

DETERMINACIÓN DE LA MASA DE GALAXIAS
ESPIRALES CON BASE EN UN MODELO DE DISCO
MÁXIMO Y UN MODELO COMPUESTO POR DISCO -
HALO

JERSON IVÁN REINA MEDRANO
Físico

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2012

**DETERMINACIÓN DE LA MASA DE GALAXIAS
ESPIRALES CON BASE EN UN MODELO DE DISCO
MÁXIMO Y UN MODELO COMPUESTO POR DISCO -
HALO**

JERSON IVÁN REINA MEDRANO
Físico

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de Doctor en
Ciencias Naturales (Física)

Director:
GUILLERMO A. GONZÁLEZ V., PhD.

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2012**

Este trabajo está dedicado a la memoria de mi padre, y a las tres personas que son el motivo de mi inspiración: mi amada esposa, mi hermoso hijo y mi adorada Lucerito

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mis agradecimientos a todas las personas que de una u otra manera, hicieron posible la realización de esta Tesis Doctoral. Especialmente quiero dar gracias al profesor Guillermo Alfonso González Villegas, por compartir conmigo las ideas que permitieron llevar a cabo este trabajo y por haberme brindado durante estos años de dirección, una excelente orientación académica y una muy buena amistad. A Fernando Quiñonez, por su incondicionalidad al momento de brindar los acertados aportes en el ajuste de los datos. A todos los colegas y compañeros del GIRG, en especial a Fransol López y Andrés Américo Navarro. A los que de manera indirecta hicieron valiosos aportes para mejorar este trabajo: Antonio Calixto Gutiérrez, Javier Fernando Ramos, Harold Paredes, Jose David Sanabria y Heiner Sarmiento. Finalmente quiero agradecer a la Vicerrectoría Académica de la Universidad Industrial de Santander por brindarme el auxilio económico para llevar a cabo este posgrado.

TABLA DE CONTENIDO

1	INTRODUCCIÓN	11
1.1	Contexto General	11
1.2	Organización del Trabajo	15
2	MODELOS DE GALAXIA COMPUESTOS POR UN DISCO FINITO DELGADO	18
2.1	Introducción	18
2.2	El método de Hunter	19
2.2.1	Los Discos Generalizados de Kalnajs	21
3	MODELO DE MASA DEL DISCO MÁXIMO	26
3.1	Introducción	26
3.2	Una Familia de Modelos Particulares	27
3.3	Ajuste de Datos a los Modelos	29
3.4	Análisis de la Estabilidad: Frecuencias Epicíclica y Vertical	31
4	POTENCIALES ANALÍTICOS PARA GALAXIAS PLANAS	

CON HALO ESFEROIDAL	47
4.1 Introducción	47
4.2 Modelo de Masa Compuesto por un Disco finito Delgado y un Halo Esferoidal	48
4.3 Obtención de Modelos Particulares	52
4.4 Ajuste de los Datos al Modelo	54
CONCLUSIONES	62
A Valores de las constantes $C_{2n}[km^2/s^2]$ obtenidas por el mejor ajuste	63
REFERENCIAS	66
Bibliografía	69

LISTA DE FIGURAS

2.1	(a) Densidad superficial $\tilde{\Sigma}_m$ como función de \tilde{R} para los discos generalizados de Kalnajs desde $m = 1$ hasta $m = 5$. (b) Curvas de rotación \tilde{v}_m para los mismos modelos, también desde $m = 1$ hasta $m = 5$	30
3.1	Velocidad circular en [km/s] de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del ajuste. La línea sólida es la curva de rotación determinada a partir de (3.4) y los parámetros del mejor ajuste listados en el Cuadro 3.1. La línea a trazos representan las curvas de rotación para aquellas galaxias que se logran estabilizar radialmente utilizando los parámetros m del Cuadro 3.2. Los puntos con barras de error son los datos, como reportados en [1]	40
3.2	Velocidad circular en [km/s] de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del ajuste. La línea sólida es la curva de rotación determinada a partir de (3.4) y los parámetros del mejor ajuste listados en el Cuadro 3.1. La línea a trazos representan las curvas de rotación para aquellas galaxias que se logran estabilizar radialmente utilizando los parámetros m del Cuadro 3.2. Los puntos con barras de error son los datos, como reportados en [1]	41

- 3.3 Velocidad circular en [km/s] de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del ajuste. La línea sólida es la curva de rotación determinada a partir de (3.4) y los parámetros del mejor ajuste listados en el Cuadro 3.1. La línea a trazos representan las curvas de rotación para aquellas galaxias que se logran estabilizar radialmente utilizando los parámetros m del Cuadro 3.2. Los puntos con barras de error son los datos, como reportados en [1] 42
- 3.4 Velocidad circular en [km/s] de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del ajuste. La línea sólida es la curva de rotación determinada a partir de (3.4) y los parámetros del mejor ajuste listados en el Cuadro 3.1. La línea a trazos representan las curvas de rotación para aquellas galaxias que se logran estabilizar radialmente utilizando los parámetros m del Cuadro 3.2. Los puntos con barras de error son los datos, como reportados en [1] 43
- 3.5 Densidad superficial de masa en [kg/m^2] de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del ajuste. La línea sólida representa el comportamiento de la densidad superficial de masa determinada a partir de (3.2) y los parámetros del mejor ajuste registrados en el Cuadro 3.1. La línea a trazos representa la densidad superficial de masa de aquellas galaxias que se lograron estabilizar al cambiar el número de parámetros del mejor ajuste. 44
- 3.6 Densidad superficial de masa en [kg/m^2] de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del ajuste. La línea sólida representa el comportamiento de la densidad superficial de masa determinada a partir de (3.2) y los parámetros del mejor ajuste registrados en el Cuadro 3.1. La línea a trazos representa la densidad superficial de masa de aquellas galaxias que se lograron estabilizar al cambiar el número de parámetros del mejor ajuste. 45

- 3.7 Densidad superficial de masa en $[kg/m^2]$ de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del ajuste. La línea sólida representa el comportamiento de la densidad superficial de masa determinada a partir de (3.2) y los parámetros del mejor ajuste registrados en el Cuadro 3.1. La línea a trazos representa la densidad superficial de masa de aquellas galaxias que se lograron estabilizar al cambiar el número de parámetros del mejor ajuste. 46
- 3.8 Densidad superficial de masa en $[kg/m^2]$ de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del ajuste. La línea sólida representa el comportamiento de la densidad superficial de masa determinada a partir de (3.2) y los parámetros del mejor ajuste registrados en el Cuadro 3.1. La línea a trazos representa la densidad superficial de masa de aquellas galaxias que se lograron estabilizar al cambiar el número de parámetros del mejor ajuste. 47
- 3.9 Frecuencia epicíclica en $[km^2/s^2]$ de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del mejor ajuste. La línea sólida representa la frecuencia epicíclica determinada a partir de (3.15) y los parámetros del mejor ajuste. Las regiones en donde la frecuencia es negativa representa regiones de inestabilidad radial. Las gráficas con línea a trazos representan la frecuencia epicíclica de las galaxias que se logarron estabilizar utilizando otros parámetros distintos a los del mejor ajuste. 48
- 3.10 Frecuencia epicíclica en $[km^2/s^2]$ de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del mejor ajuste. La línea sólida representa la frecuencia epicíclica determinada a partir de (3.15) y los parámetros del mejor ajuste. Las regiones en donde la frecuencia es negativa representa regiones de inestabilidad radial. Las gráficas con línea a trazos representan la frecuencia epicíclica de las galaxias que se logarron estabilizar utilizando otros parámetros distintos a los del mejor ajuste. 49

- 3.11 Frecuencia epicíclica en $[km^2/s^2]$ de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del mejor ajuste. La línea sólida representa la frecuencia epicíclica determinada a partir de (3.15) y los parámetros del mejor ajuste. Las regiones en donde la frecuencia es negativa representa regiones de inestabilidad radial. Las gráficas con línea a trazos representan la frecuencia epicíclica de las galaxias que se logaron estabilizar utilizando otros parámetros distintos a los del mejor ajuste. 50
- 3.12 Frecuencia epicíclica en $[km^2/s^2]$ de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del mejor ajuste. La línea sólida representa la frecuencia epicíclica determinada a partir de (3.15) y los parámetros del mejor ajuste. Las regiones en donde la frecuencia es negativa representa regiones de inestabilidad radial. Las gráficas con línea a trazos representan la frecuencia epicíclica de las galaxias que se logaron estabilizar utilizando otros parámetros distintos a los del mejor ajuste. 51
- 4.1 Gráfica de la velocidad circular en km/s. Los puntos con barra de error son las observaciones como reportadas en [1], mientras que la línea sólida es la curva de rotación determinada a partir de (4.28) para $n = 4$, y los parámetros A2l obtenidos por medio del mejor ajuste 61
- 4.2 Gráfica de la frecuencia epicíclica en $(km/s)^2$. Notemos que siempre es positiva en cualquier lugar del intervalo, lo cual indica que es radialmente estable. 62
- 4.3 Gráfica de la frecuencia vertical en $(km/s)^2$. La línea sólida representa el comportamiento de la frecuencia vertical para el valor mínimo de la masa del halo. La línea a trazos representa el comportamiento de la frecuencia vertical cuando se toma el valor máximo de la masa del halo. 62
- 4.4 Gráfica de la densidad superficial de masas en (kg/m^2) . La línea sólida representa el comportamiento de la densidad superficial para el valor mínimo de la masa del halo. La línea a trazos representa el comportamiento de la densidad superficial cuando se toma el valor máximo de la masa del halo. . . 63

TÍTULO

DETERMINACIÓN DE LA MASA DE GALAXIAS ESPIRALES CON BASE EN UN MODELO DE DISCO MÁXIMO Y UN MODELO COMPUESTO POR DISCO - HALO. ¹.

AUTOR

REINA MEDRANO, Jerson Iván ².

PALABRAS CLAVES

Dinámica de Galaxias, Modelos de Masa, Estabilidad.

Se determinan valores estimados para la masa de un conjunto de galaxias espirales en el Cluster de la Osa Mayor. Inicialmente, se considera con base en la hipótesis del disco máximo, que la masa del disco galáctico es lo suficientemente grande, de tal manera que sea consistente con la curva de rotación de cada galaxia analizada. En esta primera parte, la contribución de masa del halo de materia oscura se asume por lo tanto despreciable en la parte interior de la espiral. A partir de la ecuación de Laplace, se obtiene una expresión apropiada para el potencial gravitacional generado por una fuente de materia tipo disco y después, por medio de éste, se deducen las expresiones para la densidad superficial de masa y la velocidad tangencial de rotación. Se ajusta la velocidad con los datos de la curva de rotación de alguna galaxia en particular, con el propósito de encontrar los parámetros del mejor ajuste que permitan estimar la masa de cada galaxia del Cluster. Por medio de las frecuencias epicyclia y vertical se encuentra un criterio para determinar la estabilidad del modelo.

Luego, se estima la masa de cada galaxia del Cluster, teniendo en cuenta la contribución tanto del disco delgado, así como la del halo de materia oscura. El potencial gravitacional de esta configuración se escoge como la superposición del potencial producido por cada una de las componentes. La distribución de materia del halo se caracteriza por un potencial gravitacional que es solución de la ecuación de Poisson. Así como en el caso anterior, los parámetros del ajuste necesarios para calcular la masa se obtendrán por medio del ajuste entre la velocidad del modelo y los datos de la curva de rotación de las galaxias del Cluster.

¹Tesis Doctoral.

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo A. González V. (Director).

TITLE

DETERMINING THE MASS OF SPIRAL GALAXIES BASED ON A MAXIMUM DISC MODEL AND A MODEL COMPOSED BY DISC - HALO.¹

AUTHOR REINA MEDRANO, Jerson Iván.²

KEY WORDS

Galaxy Dynamics, Mass Models, Stability.

Estimated values are determined for the mass of a spiral galaxies set of the Ursa Major cluster. Initially are considered in base of the maximum disc hypothesis, i.e. the galactic disc mass is sufficiently great to represent consistency with the rotation curve of each analyzed galaxy. In this first part, is assumed that the contribution of the dark matter halo mass is negligible in the inner part of the spiral. From the Laplace equation is obtained an appropriate expression for the gravitational potential generated by a disc source matter and then by means of it, are deducted the expressions for the surface mass density and the circular velocity. The circular velocity is adjusted with the experimental data of each galaxy rotation curve in order to find values of the parameter for the best fit that allow to estimate the mass of each galaxy belonging to the cluster. By mean of the epicyclic and vertical frequencies it is found a test to determine the stability of the model.

After that is estimated the mass of each galaxy of the cluster, taking into account the contribution from the thin disc and from the symmetry of the dark halo. The gravitational potential of this configuration is chosen as the superposition of the potential due to produced potential by the components. The matter distribution of the halo is characterized by a gravitational potential, that is a solution of the Poisson equation. As in the later case, the parameters delivered by the fit needed to calculated the mass, were found by mean of the fit between the circular velocity of the model and the experimental data of each galaxy rotation curve.

¹Senior thesis project.

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo A. González V. (Advisor).

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

SECCIÓN 1.1

Contexto General

Uno de los mayores desafíos de la astronomía actual es la determinación del origen, naturaleza y distribución de la materia en sus formas visible y oscura. Sin importar que el contenido de materia de una galaxia espiral sea luminosa o no, solo hay una fuerza que afecta a todas las formas de materia, cualquiera que sean sus propiedades y condiciones: la gravedad. De modo que sondeando los efectos de la gravedad, a través de su influencia dinámica, podremos poner de manifiesto todo el contenido material de un sistema. Actualmente una de las mejores herramientas con que se cuenta para analizar el contenido material de una galaxia espiral es la curva de rotación [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. En ésta se muestra como varía la velocidad circular, definida como la velocidad de las estrellas que se mueven en órbitas circulares alrededor del centro, únicamente bajo los efectos de su propia gravedad.

Así, si se asume un determinado modelo acerca de la composición de una galaxia espiral, el ajuste de dicho modelo con la curva de rotación de una galaxia en particular permite, en principio, determinar completamente su distribución de masa. La descripción más aceptada de la composición de una galaxia espiral es que una parte significativa de su masa se encuentra concentrada en un disco delgado, mientras que las otras contribuciones a la masa total de la galaxia provienen de un halo esferoidal de materia oscura, una protuberancia central y, quizás, un agujero negro central [5, 10]. Ahora bien, dado que todos los componentes contribuyen al campo gravitacional de la galaxia, la obtención de modelos apropiados que incluyan los efectos de todas las partes es un problema de gran dificultad. Sin embargo, la contribución de cada una de las partes está limitada a ciertas escalas de distancia, de manera que en un modelo razonablemente realista no es necesario incluir la contribución de todas las componentes [11]. Por ejemplo, la influencia gravitacional del agujero negro central es apreciable solo dentro de algunos parsec alrededor del centro de la galaxia [12], así que se puede despreciar completamente al estudiar la dinámica en el disco, o en regiones exteriores a la protuberancia central, mientras que la protuberancia central domina principalmente la región interna de la galaxia hasta unos cuantos kiloparsec.

Por otro lado, los primeros trabajos realizados por Vera Rubin y sus colaboradores [13, 14, 15, 3], sobre curvas de rotación ópticas, muestran que éstas no declinan con la distancia al centro como se espera a partir de la distribución de materia luminosa, sino que la forma usual es de tal manera que presentan un crecimiento rápido en la región central, seguido de una zona en que la velocidad de rotación permanece prácticamente constante. Estos autores afirman que la planitud de las curvas de rotación es evidencia de materia oscura, sin embargo, Kalnajns [16] y después Kent [17, 18], muestran que con una apropiada escogencia para la razón masa - luz de las protuberancias y los discos, en muchas galaxias la forma de las curvas de rotación pueden ser explicadas solo a partir de la materia luminosa, y que no se requiere materia oscura adicional. Existen argumentos dinámicos, los cuales sugieren que la región interior de las galaxias espirales no pueden ser dominadas por materia oscura.

Es usual que dentro del radio óptico, los halos de materia oscura con una densidad superficial de masa más grande que la del disco, se utilicen para suprimir inestabilidades [19]. No obstante, también es posible construir un modelo de galaxias de disco con una curva de rotación casi plana, la cual es estable sin requerir halos de materia oscura [20]. Esto invierte el argumento de estabilidad del disco [21], el cual a menudo se utiliza para soportar la

necesidad de un halo de materia oscura dentro del radio óptico. De hecho, halos esféricos de masa fuera del radio óptico no tienen efecto sobre la estabilidad del disco.

Tomando en cuenta las anteriores consideraciones, fue posible proponer la hipótesis del disco máximo [7, 19, 22, 23, 24, 25]. Bajo esta hipótesis, la masa del disco luminoso en una galaxia espiral se supone que es lo más grande posible, de tal manera que sea consistente con la curva de rotación de la galaxia. De esta manera, la contribución de masa del halo de materia oscura se asume por lo tanto despreciable en la parte interior de la espiral.

Por otra parte, la influencia de los halos de materia oscura son evidentes a través de las curvas de rotación HI. Este descubrimiento fue primero realizado por [26, 27, 28]. Ellos muestran que la curva de rotación de muchas galaxias espirales sigue siendo plana más allá de donde se acaba la materia visible, lo cual da evidencia final e irrefutable de presencia de grandes cantidades de materia oscura en galaxias espirales [28, 7].

Con base en lo expuesto anteriormente, es usual aceptar que muchos de los aspectos de la dinámica galáctica se pueden describir, de una manera aceptable, mediante modelos que consideren solamente la contribución de un disco delgado. Habitualmente, la construcción de modelos de galaxias discoidales tiene como punto de partida la obtención del potencial gravitacional generado por este tipo de fuentes [29, 30, 31, 32, 33, 34].

Aunque muchos de los modelos de discos delgados existentes en la literatura presentan densidades superficiales y curvas de rotación con notables propiedades, muchos de ellos representan principalmente discos de extensión infinita, siendo así poco apropiados como modelos planos de galaxias. Con el fin de obtener modelos más realistas de galaxias planas, es necesario utilizar métodos que permitan obtener modelos de discos delgados finitos. Un método simple para obtener el potencial gravitacional, la densidad superficial y la curva de rotación de discos delgados de radio finito fue desarrollado por Hunter [35], siendo el conocido disco de Kalnajs [31] el ejemplo más simple de disco delgado obtenido mediante dicho método.

En un trabajo anterior [30] utilizamos el método de Hunter con el fin de obtener una familia de discos delgados de radio finito con una densidad superficial de masa bien comportada, los cuales se pueden considerar como una generalización del disco de Kalnajs. Adicionalmente, en [36] se estudió el movimiento de partículas de prueba en el campo gravitacional generado por

los primeros miembros de esta familia y en [32] se obtuvo una nueva familia infinita de modelos autoconsistentes mediante la superposición de miembros pertenecientes a la familia de discos de Kalnajš generalizados.

En la referencia [30] la familia de modelos de discos se obtuvo exigiendo que la densidad superficial de masa se comportase como una función monótonamente decreciente del radio, con un máximo en el centro del disco y disminuyendo hasta anularse en su borde. Así entonces, aunque la distribución de masa de esta familia de discos presenta un comportamiento satisfactorio de tal forma que podrían considerarse como modelos adecuados de galaxias planas, sus correspondientes curvas de rotación no presentan un comportamiento apropiado pues no reproducen la región plana de las curvas de rotación observadas.

En [32] la nueva familia de discos se obtuvo exigiendo que la densidad superficial de masa se pudiese expresar como una función bien comportada del potencial gravitacional, de tal forma que las funciones de distribución correspondientes se pudiesen obtener fácilmente. Aparte de presentar una densidad superficial bien comportada, los modelos obtenidos presentaban igualmente curvas de rotación mejor comportadas que la de los discos de Kalnajš generalizados. Aunque estos discos son estables con respecto a perturbaciones radiales, son inestables con respecto a perturbaciones verticales. Además de los problemas de estabilidad, estos discos se pueden considerar como modelos apropiados para describir satisfactoriamente una gran variedad de galaxias.

Con base en los trabajos anteriores, en [37] se han obtenido modelos de discos delgados en los cuales las velocidades se ajustaron con el fin de reproducir las curvas de rotación observadas de cuatro galaxias espirales del cluster de la Osa Mayor, las galaxias NGC 3877, NGC 3917, NGC 3949 y NGC 4010. Los datos correspondientes se tomaron de un artículo reciente [1] el cual presenta los resultados de un análisis de las imágenes de 43 galaxias del cluster de la Osa Mayor obtenidas mediante el Westerbork Synthesis Radio Telescope. Estos modelos presentan densidades bien comportadas y los valores obtenidos para las masas concuerdan con el orden de magnitud esperado con base en las medidas de luminosidad total.

Sin embargo, los modelos presentan una región central, que se extiende aproximadamente hasta la mitad del radio galáctico, en la cual se presentan fuertes inestabilidades con respecto a perturbaciones verticales. Se puede demostrar fácilmente que modelos en los cuales solo se considere la con-

tribución de un disco galáctico delgado siempre presentarán inestabilidad con respecto a perturbaciones verticales [37]. Es necesario considerar modelos más realistas que incluyan el carácter no delgado del disco galáctico o la contribución a la masa debida al halo de materia oscura.

SECCIÓN 1.2

Organización del Trabajo

El objetivo central de la presente Tesis Doctoral es determinar valores estimados para la masa de un conjunto de galaxias espirales en el Cluster de la Osa Mayor. Inicialmente, se considerará con base en la hipótesis del disco máximo, que la masa del disco galáctico es lo suficientemente grande, de tal manera que sea consistente con la curva de rotación de cada galaxia analizada. En esta parte, la contribución de masa del halo de materia oscura se asume por lo tanto despreciable en la parte interior de la espiral. A partir de la ecuación de Laplace, se obtendrá una expresión apropiada para el potencial gravitacional generado por una fuente de materia tipo disco y después, por medio de dicho potencial, se deducirán las expresiones para la densidad superficial de masa y la velocidad circular, la cual se ajustará con los datos de la curva de rotación de alguna galaxia en particular, con el propósito de encontrar los parámetros del mejor ajuste que permitirán estimar la masa de cada galaxia del Cluster. Por medio de las frecuencias epicíclia y vertical se encontrará un criterio para determinar la estabilidad del modelo.

Luego se estimará la masa de cada galaxia del Cluster, teniendo en cuenta la contribución tanto del disco delgado como la del halo de materia oscura. El potencial gravitacional de esta configuración se escogerá como la superposición del potencial producido por cada una de las componentes. La distribución de materia del halo se caracterizará por un potencial gravitacional que es solución de la ecuación de Poisson. Los parámetros del ajuste necesarios para calcular la masa se obtendrán por medio del ajuste entre la velocidad circular del modelo y los datos de la curva de rotación de las galaxias del Cluster.

En el capítulo 2 se presenta un método simple para obtener la densidad superficial, el potencial gravitacional y la curva de rotación de discos del-

gados de radio finito, conocido como el método de Hunter [35]. El método está basado en la obtención de soluciones de la ecuación de Laplace en términos de las coordenadas esferoidales oblatas, las cuales están apropiadamente diseñadas para el estudio de discos planos de extensión finita. El ejemplo más simple de un disco finito obtenido por medio del método de Hunter es el bien conocido disco de Kalnajs [31]. El disco de Kalnajs tiene una densidad superficial bien comportada y representa un disco rotando uniformemente, de tal manera que su velocidad circular es proporcional al radio [35, 38]. En la sección 2.2.1, se construye los discos generalizados de Kalnajs [30], obtenidos mediante el método de Hunter.

En el capítulo 3 se obtienen modelos de discos delgados, en los cuales la velocidad circular coincide con el ajuste numérico hecho a las curvas de rotación observadas para un conjunto de galaxias en el Cluster de la Osa Mayor. Esta vez la velocidad circular, se expresa como una serie de potencias de una coordenada radial adimensional. Posteriormente, se determinan los coeficientes de la serie por medio de un ajuste numérico adecuado. Con ello quedan determinadas las correspondientes distribuciones de masa y demás cantidades que caracterizan el comportamiento cinemático de los modelos particulares. Finalmente, se calcula la masa, integrando la densidad superficial de masa. En particular, se aplica el tratamiento descrito y se calcula la masa para una muestra de 26 galaxias espirales en el Cluster de la Osa Mayor, usando datos tomados de [1]. Estos valores obtenidos para la masa se pueden tomar como estimativos muy precisos para la cota superior de masa de estas galaxias, ya que en el modelo se considera que toda la masa está concentrada en el disco galáctico.

En el capítulo 4 se presenta una familia de potenciales analíticos para galaxias planas con halos esferoidales. Los potenciales se obtienen considerando la superposición de dos componentes independientes, un potencial generado por el disco delgado y un potencial generado por el halo esferoidal, expresados apropiadamente como la superposición de productos de funciones de Legendre de manera que el modelo implica una relación lineal entre las masas del disco delgado y el halo esferoidal. Considerando el potencial del halo más simple se obtiene una expresión para la velocidad circular que se puede ajustar de manera muy precisa a las curvas de rotación de algunas galaxias en particular, de tal manera que los modelos son estables contra perturbaciones radial y vertical. Solamente se obtiene un modelo de galaxia que cumple todos los requisitos. Los valores de la masa del halo y la masa del disco para esta galaxia se calculan de tal manera que se obtiene un intervalo muy cercano de valores para esas cantidades. Por lo tanto, los valores

de las masas obtenidos están en perfecto acuerdo con el orden de magnitud esperado y con el orden de magnitud relativo entre la masa del halo y la masa del disco.

Capítulo 2

MODELOS DE GALAXIA COMPUESTOS POR UN DISCO FINITO DELGADO

SECCIÓN 2.1

Introducción

A continuación se presenta un método simple para obtener la densidad superficial, el potencial gravitacional y la curva de rotación de discos delgados de radio finito, conocido como el método de Hunter [35]. Dicho método está basado en la obtención de soluciones de la ecuación de Laplace en términos de las coordenadas esferoidales oblatas, las cuales están apropiadamente diseñadas para el estudio de discos planos de extensión finita. El ejemplo más simple de un disco finito obtenido por medio del método de Hunter es el bien conocido disco de Kalnajs [31]. El disco de Kalnajs tiene una densidad superficial bien comportada y representa un disco rotando uniformemente, de tal manera que su velocidad circular es proporcional al radio [35, 38].

SECCIÓN 2.2

El método de Hunter

Con el fin de obtener modelos discoidales finitos axialmente simétricos, es necesario encontrar soluciones de la ecuación de Laplace que representen el potencial exterior de una fuente en forma de disco delgado. De acuerdo con esto, se necesita resolver la ecuación de Laplace para un potencial axialmente simétrico,

$$\phi_{,RR} + \frac{\phi_{,R}}{R} + \phi_{,zz} = 0, \quad (2.1)$$

donde (R, φ, z) son las coordenadas cilíndricas usuales. Se supone que, además de la simetría axial, el potencial gravitacional tiene simetría de reflexión con respecto al plano $z = 0$,

$$\phi(R, z) = \phi(R, -z), \quad (2.2)$$

de tal manera que la derivada normal del potencial, $\partial\phi/\partial z$, satisface la relación

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(R, -z) = -\frac{\partial\phi}{\partial z}(R, z), \quad (2.3)$$

de acuerdo con el carácter atractivo del campo gravitacional. También se asume que $\partial\phi/\partial z$ no se anula en el plano $z = 0$, con el fin de tener una distribución delgada de materia que representa el disco. Dado un potencial gravitacional $\phi(R, z)$ con las propiedades anteriores, la densidad superficial de masa $\Sigma(R)$, puede ser obtenida usando la ley de Gauss [5]. Entonces usando la ecuación (2.3), se tiene

$$\Sigma(R) = \frac{1}{2\pi G} \left[\frac{\partial\phi}{\partial z} \right]_{z=0^+}. \quad (2.4)$$

Ahora, para obtener una densidad superficial correspondiente a una distribución discoidal finita de materia, se deben imponer las condiciones de frontera

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(R, 0^+) \neq 0; \quad R \leq a, \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(R, 0^+) = 0; \quad R > a, \quad (2.5b)$$

de tal manera que la distribución de materia está restringida al disco $z = 0$, $0 \leq R \leq a$, donde a es el radio del disco. Introduciremos ahora las

coordenadas esferoidales oblatas, cuya simetría se adapta en forma natural a la geometría del modelo. Estas coordenadas están relacionadas con las cilíndricas por medio de la relación [39],

$$R = a\sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)}, \quad (2.6a)$$

$$z = a\xi\eta, \quad (2.6b)$$

donde $0 \leq \xi < \infty$ y $-1 \leq \eta < 1$. Obsérvese que el disco tiene coordenadas $\xi = 0$, $0 \leq \eta^2 < 1$. Por lo tanto, al cruzar el disco la coordenada η cambia de signo pero no cambia en valor absoluto. Este comportamiento singular de la coordenada implica entonces que una función par de η es continua en todo su dominio pero tiene una derivada con respecto a η discontinua. Ahora, en términos de las coordenadas esferoidales oblatas, la ecuación de Laplace se puede escribir como

$$[(1 + \xi^2)\phi_{,\xi}]_{,\xi} + [(1 - \eta^2)\phi_{,\eta}]_{,\eta} = 0, \quad (2.7)$$

y necesitamos encontrar soluciones que sean funciones pares de η y con las condiciones de contorno

$$\phi_{,\xi}(0, \eta) = F(\eta), \quad (2.8a)$$

$$\phi_{,\eta}(\xi, 0) = 0, \quad (2.8b)$$

donde $F(\eta)$ es una función par que puede ser expresada como una superposición de polinomios de Legendre en el intervalo $-1 \leq \eta \leq 1$ [39]. De acuerdo con esto, el potencial gravitacional newtoniano para el exterior de un disco finito delgado con una densidad de materia axialmente simétrica puede ser escrito como [39],

$$\phi(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta), \quad (2.9)$$

donde C_{2n} son constantes arbitrarias, $P_{2n}(\eta)$ son los polinomios de Legendre y $q_{2n}(\xi) = i^{2n+1}Q_{2n}(i\xi)$, siendo Q_{2n} las funciones de Legendre de segunda clase. Con esta solución general para el potencial gravitacional, la densidad superficial está dada por

$$\Sigma(R(\eta)) = \frac{1}{2\pi a G \eta} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} (2n + 1) q_{2n+1}(0) P_{2n}(\eta), \quad (2.10)$$

y como mostraremos después, las constantes arbitrarias C_{2n} pueden escogerse apropiadamente de tal manera que la densidad superficial presente un comportamiento físicamente razonable.

Además de la densidad superficial de masa, otra cantidad comúnmente usada para caracterizar galaxias es la velocidad circular $v_c(R)$, también llamada curva de rotación, definida como la velocidad tangencial de las estrellas en órbitas circulares alrededor del centro. Ahora, dado $\phi(R, z)$, podemos fácilmente evaluar $v_c(R)$ a través de la relación

$$v_c^2 = R \left[\frac{\partial \phi}{\partial R} \right]_{z=0}, \quad (2.11)$$

de tal manera que usando (2.9), obtenemos

$$v_c^2 = \frac{R^2}{(a^2 - R^2)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} q_{2n}(0) P'_{2n}(\eta). \quad (2.12)$$

Para familiarizarnos con el método de Hunter, a continuación mostramos la construcción de los discos generalizados de Kalnajs [30].

2.2.1 Los Discos Generalizados de Kalnajs

Especificaremos el formalismo general esbozado anteriormente, considerando una familia de discos finitos delgados con una densidad de masa bien comportada. Se exigirá que la densidad superficial de masa sea una función monótonamente decreciente del radio, con un máximo en el centro y anulándose en el borde. Para esto, se deben imponer las condiciones

$$\Sigma(a) = 0, \quad (2.13a)$$

$$\Sigma(0) = \Sigma_{max}, \quad (2.13b)$$

y también exigir que

$$M = 2\pi \int_0^a \Sigma(R) R dR, \quad (2.14)$$

donde M es la masa total del disco. Ahora usando la condición de contorno (2.8a), la densidad superficial de masa puede escribirse en la forma

$$\Sigma(R(\eta)) = \frac{F(\eta)}{2\pi a G \eta}, \quad (2.15)$$

donde $F(\eta)$ es una función par de η , monótonamente decreciente en el intervalo $0 \leq \eta \leq 1$, y tal que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{F(\eta)}{\eta} = 0. \quad (2.16)$$

Esta relación satisface la condición (2.13a).

Además imponemos la condición

$$\int_0^1 F(\eta) d\eta = \frac{MG}{a}, \quad (2.17)$$

en concordancia con la ecuación (2.14). Una función $F(\eta)$ que concuerda con todos los anteriores requerimientos es [40]

$$F_m(\eta) = (2m + 1) \frac{MG}{a} \eta^{2m}, \quad (2.18)$$

donde, con el fin de satisfacer (2.16), se debe tomar $m \geq 1$. Con esta particular escogencia de $F_m(\eta)$ se obtiene una familia de discos finitos con densidades de masa dadas por

$$\Sigma_m(R) = \frac{(2m + 1)M}{2\pi a^2} \left[1 - \frac{R^2}{a^2} \right]^{m-1/2}. \quad (2.19)$$

Como se puede ver, el disco con $m = 1$ corresponde al bien conocido disco de Kalnajs [31]. En consecuencia, esta familia de discos finitos delgados puede ser considerada como una generalización del disco de Kalnajs.

Ahora de la relación (2.10), la función $F(\eta)$ puede escribirse como

$$F(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n} P_{2n}(\eta), \quad (2.20)$$

con

$$K_{2n} = (2n + 1) q_{2n+1}(0) C_{2n}. \quad (2.21)$$

Los coeficientes K_{2n} son encontrados, usando la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre, a través de la expresión

$$K_{2n} = \frac{4n + 1}{2} \int_{-1}^1 F_m(\eta) P_{2n}(\eta) d\eta. \quad (2.22)$$

La anterior ecuación puede ser expresada como [39]

$$K_{2n}^m = \frac{MG}{2a} \left[\frac{\pi^{1/2} (4n + 1) (2m + 1) \Gamma(2m + 1)}{2^{2m} \Gamma(1 + m - n) \Gamma(m + n + \frac{3}{2})} \right], \quad (2.23)$$

de manera que, usando las propiedades de la función Gama, se obtiene

$$C_{2n}^m = \frac{MG}{2a} \left[\frac{\pi^{1/2} (4n + 1) (2m + 1)!}{2^{2m} (2n + 1) (m - n)! \Gamma(m + n + \frac{3}{2}) q_{2n+1}(0)} \right], \quad (2.24)$$

para $n \leq m$ y $C_{2n} = 0$ para $n > m$.

Con los anteriores valores de C_{2n} se pueden calcular las diferentes cantidades físicas que caracterizan el comportamiento de los modelos. Entonces, por ejemplo, el potencial gravitacional para los tres primeros miembros de la familia, están dados por

$$\phi_1(\xi, \eta) = -\frac{MG}{a}[\cot^{-1} \xi + A(3\eta^2 - 1)], \quad (2.25a)$$

$$\phi_2(\xi, \eta) = -\frac{MG}{a}[\cot^{-1} \xi + \frac{10A}{7}(3\eta^2 - 1) + B(35\eta^4 - 30\eta^2 + 3)], \quad (2.25b)$$

$$\phi_3(\xi, \eta) = -\frac{MG}{a}[\cot^{-1} \xi + \frac{10A}{6}(3\eta^2 - 1) + \frac{21B}{11}(35\eta^4 - 30\eta^2 + 3) + C(231\eta^6 - 315\eta^4 + 105\eta^2 - 5)], \quad (2.25c)$$

donde

$$A = \frac{1}{4}[(3\xi^2 + 1) \cot^{-1} \xi - 3\xi], \quad (2.26a)$$

$$B = \frac{3}{448}[(35\xi^4 + 30\xi^2 + 3) \cot^{-1} \xi - 35\xi^3 - \frac{55}{3}\xi], \quad (2.26b)$$

$$C = \frac{5}{8448}[(231\xi^6 + 315\xi^4 + 105\xi^2 + 5) \cot^{-1} \xi - 231\xi^5 - 238\xi^3 - \frac{231}{5}\xi]. \quad (2.26c)$$

Tomando $\xi = 0$ en las anteriores expresiones, se obtiene el valor del potencial dentro del disco. En particular, para el primer miembro de la familia,

$$\phi_1(R, 0) = \frac{3\pi MG}{8a^3}R^2, \quad (2.27)$$

encontramos una relación equivalente con el potencial obtenido por [31].

Las expresiones para la densidad superficial de masa para los tres primeros miembros son

$$\Sigma_1 = \frac{3M}{2\pi a^2}(1 - \tilde{R}^2)^{1/2}, \quad (2.28a)$$

$$\Sigma_2 = \frac{5M}{2\pi a^2}(1 - \tilde{R}^2)^{3/2}, \quad (2.28b)$$

$$\Sigma_3 = \frac{7M}{2\pi a^2}(1 - \tilde{R}^2)^{5/2}, \quad (2.28c)$$

donde $\tilde{R} = R/a$, mientras que las expresiones para la velocidad circular son

$$v_1^2 = \frac{3\pi MG}{4a} \tilde{R}^2, \quad (2.29a)$$

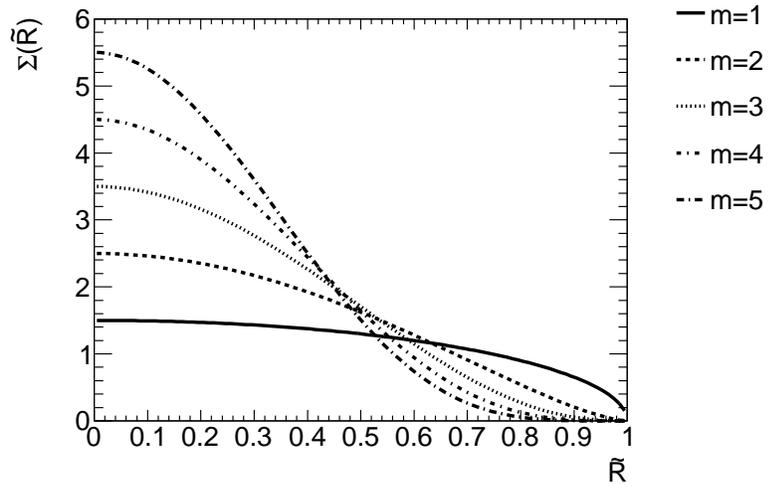
$$v_2^2 = \frac{15\pi MG}{32a} \tilde{R}^2 (4 - 3\tilde{R}^2), \quad (2.29b)$$

$$v_3^2 = \frac{105\pi MG}{256a} \tilde{R}^2 (5\tilde{R}^4 - 12\tilde{R}^2 + 8). \quad (2.29c)$$

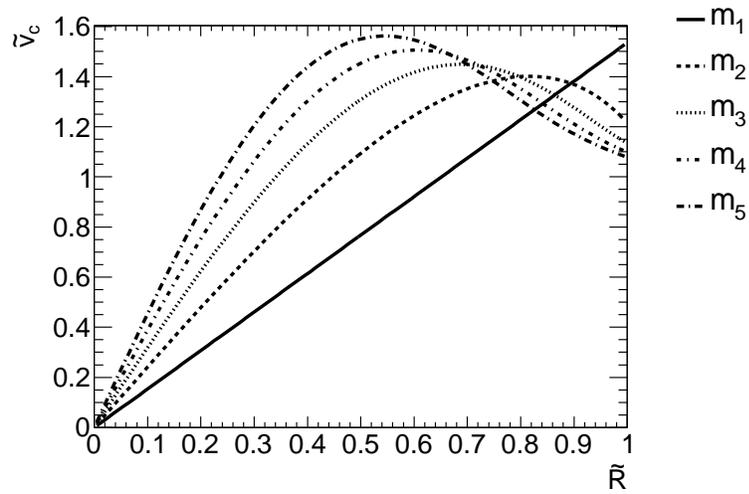
En la figura 2.1(a) graficamos la cantidad adimensional $\tilde{\Sigma}_m = \pi a^2 \Sigma_m / M$ contra la variable adimensional \tilde{R} , en el intervalo $0 \leq \tilde{R} \leq 1$, para $m = 1, \dots, 5$. Como podemos ver, los discos con mayores valores de m presentan una mayor concentración de masa en el centro. Estos discos pueden ser considerados como modelos apropiados para describir galaxias con una protuberancia central.

Para ilustrar el comportamiento de las curvas de rotación, en la figura 2.1(b) graficamos la cantidad adimensional $\tilde{v}_m(\tilde{R}) = \sqrt{a/MG} v_m(\tilde{R})$, para $m = 1, \dots, 5$. La velocidad circular correspondiente a $m = 1$ es proporcional al radio, representando un disco uniformemente rotante. Por otra parte, para $m > 1$, la velocidad circular crece desde cero en el centro del disco, hasta que alcanza un máximo en un radio crítico y luego decrece hasta un valor finito en el borde del disco. El valor del radio crítico decrece cuando m crece.

Aunque los modelos presentan un buen comportamiento en la densidad de masa, sus curvas de rotación no se aproximan satisfactoriamente a los datos medidos en muchas galaxias. Usualmente las observaciones revelan que la velocidad circular, en zonas alejadas del núcleo, no decae a medida que crece el radio, sino que tiende a mantenerse constante o, en ciertas ocasiones, crece modestamente. No obstante, como mostraremos a continuación, la importancia de estos modelos es fundamental ya constituyen el punto de partida para la formulación de otros modelos mas acordes con la observación.



(a)



(b)

Figura 2.1: (a) Densidad superficial $\tilde{\Sigma}_m$ como función de \tilde{R} para los discos generalizados de Kalnajs desde $m = 1$ hasta $m = 5$. (b) Curvas de rotación \tilde{v}_m para los mismos modelos, también desde $m = 1$ hasta $m = 5$.

Capítulo 3

MODELO DE MASA DEL DISCO MÁXIMO

SECCIÓN 3.1

Introducción

En este capítulo se obtienen modelos de discos delgados, en los cuales la velocidad circular se hace coincidir con las curvas de rotación observadas para un conjunto de galaxias en el Cluster de la Osa Mayor. Con el fin de hacer esto, se considera un enfoque distinto al aplicado en el capítulo anterior. En lugar de asumir un determinado comportamiento para la densidad superficial de masa, la velocidad circular dada por (2.12), se expresa como una serie de potencias de una coordenada radial adimensional. Posteriormente, se determinan los coeficientes de la serie por medio de un ajuste numérico adecuado. Con estos coeficientes quedan determinadas las correspondientes distribuciones de masa y demás cantidades que caracterizan el comportamiento cinemático de los modelos. Finalmente se calcula la masa efectuando la integral de la densidad (2.10). Se efectúa el tratamiento descrito y se encuentra la masa para una muestra de 26 galaxias espirales en el

Cluster de la Osa Mayor. Estos valores se pueden tomar como estimativos muy precisos para la cota superior de masa de estas galaxias, ya que en el modelo se considera que toda la masa está concentrada en el disco galáctico.

SECCIÓN 3.2

Una Familia de Modelos Particulares

Recordemos que para un potencial gravitacional de la forma (2.9), las expresiones para la velocidad circular (2.12) y la densidad superficial de masa (2.10), escritas esta vez como funciones de la coordenada adimensional $\tilde{R} = R/a$, son

$$v_{c_n}^2(\tilde{R}) = \frac{\tilde{R}^2}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} q_{2n}(0) P'_{2n}(\eta), \quad (3.1)$$

y

$$\Sigma_n(\tilde{R}) = \frac{1}{2\pi a G \eta} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} (2n+1) q_{2n+1}(0) P_{2n}(\eta), \quad (3.2)$$

donde al evaluar sobre el disco $\xi = 0$ entonces $\eta = \sqrt{1 - \tilde{R}^2}$. Al integrar la densidad superficial sobre el área total del disco se obtiene

$$\frac{\mathcal{M}G}{a} = C_0 \quad (3.3)$$

lo cual permite calcular el valor de la masa total \mathcal{M} .

Como se sabe, todas las cantidades que caracterizan al modelo de disco están determinadas por las constantes C_{2n} , las cuales se pueden determinar a partir de los datos observacionales correspondientes a la curvas de rotación de alguna galaxia en particular. Ahora bien, con el fin de encontrar modelos en los que la velocidad circular pueda ser ajustada a la curva de rotación de una galaxia, se debe limitar la serie a un número finito de términos. Esto significa que se debe hacer $C_{2n} = 0$ para $n > m$, con m un entero positivo, el cual representa el número de parámetros necesarios para obtener el mejor ajuste entre los datos y el modelo. Así, después de introducir las derivadas de los polinomios de Legendre, la expresión (3.1) se puede escribir

apropiadamente como

$$v_c^2(\tilde{R})_m = \sum_{n=1}^m A_{2n} \tilde{R}^{2n}, \quad (3.4)$$

donde las A_{2n} son los valores de los parámetros del ajuste que están relacionados con C_{2n} a través de la relación

$$C_{2n}^m = \frac{4n+1}{4n(2n+1)} \sum_{k=1}^m \frac{A_{2k} I_{kn}}{q_{2n}(0)}, \quad (3.5)$$

para $n \neq 0$, donde

$$I_{kn} = \int_{-1}^1 \eta(1-\eta^2)^k P'_{2n}(\eta) d\eta, \quad (3.6)$$

la cual se obtiene igualando las expresiones (3.1) y (3.4) y usando las propiedades de los polinomios de Legendre. Luego, si los parámetros A_{2n} se determinan mediante el ajuste de los datos observacionales correspondientes a la curva de rotación, la relación (3.5) proporciona los valores de las constantes C_{2n} que definen el modelo particular de disco.

Como se puede ver, el valor de C_0 no está determinado por la expresión (3.5). Sin embargo, a partir de (3.2) es claro que la densidad superficial de masa diverge en el borde del disco cuando $\eta = 0$, a menos que se imponga la condición [35]

$$\sum_{n=0}^m C_{2n} (2n+1) q_{2n+1}(0) P_{2n}(0) = 0, \quad (3.7)$$

que, luego de usar las propiedades de las funciones de Legendre, conduce a

$$C_0^m = \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} C_{2n}, \quad (3.8)$$

la cual da el valor de C_0 , y posteriormente de la masa total \mathcal{M} , en términos de A_{2n} .

Las expresiones anteriores implican que un modelo de disco particular está completamente determinado por un conjunto de parámetros A_{2n} , los cuales se deben escoger de tal forma que las velocidades circulares puedan coincidir con el ajuste efectuado sobre las curvas de rotación observadas. Además, como las potencias de \tilde{R}^{2n} son un conjunto de funciones linealmente independientes, la expresión (3.4) es muy adecuada para ajustarse numéricamente

a un conjunto de datos. En consecuencia, la expresión (3.4) puede considerarse como una especie de “curva de rotación universal” para galaxias planas, la cual se puede ajustar fácilmente a los datos observados de la curva de rotación de una galaxia espiral en particular.

SECCIÓN 3.3

Ajuste de Datos a los Modelos

Con el fin de ajustar estos modelos a datos reales observados, se ha escogido una muestra de 41 galaxias en el Cluster de la Osa Mayor. Los datos de las curvas de rotación correspondientes se han tomado, tal como se presentan en la Tabla 4 de un reciente artículo desarrollado por [1]. En este artículo se presentan los resultados de las mediciones fotométricas de la línea de 21 cm para 43 galaxias en el cercano cluster de la Osa Mayor, usando el Westerbork Synthesis Radio Telescope. Para cada dato de la curva de rotación, se toma el valor de a como el último valor de radio tabulado. En consecuencia, se asume que el radio de la galaxia está definido por el último valor de R medido. La transformación de las unidades se hace teniendo en cuenta que la distancia media al cluster es de 18.6 Mpc y que para esta distancia, 1 arcmin corresponde a 5.4 kpc.

Entonces, tomando el radio normalizado en unidades de a , el ajuste entre el modelo (3.4) y los datos de la curva de rotación de alguna galaxia en particular, se hace a través de un ajuste no lineal por mínimos cuadrados, usando el algoritmo de Levenberg - Marquardt e implementado en ROOT versión 5.28 [41]. Para cada galaxia, se busca entre todos los posibles ajustes hechos desde $m = 1$ hasta $m = N - 1$, donde N es el número de datos, aquel para el cual se obtiene el mínimo valor de chi cuadrado reducido χ_r^2 , definido como

$$\chi_r^2 = \frac{1}{NGL} \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i} \right]^2, \tag{3.9}$$

donde NGL representa el número de grados de libertad del ajuste, definidos como $NGL = N - m$, y_i son los datos de la velocidad circular, $f(x_i)$ es el modelo dado por (3.4) y σ_i representa la desviación estandar o error en la medida de la velocidad de rotación.

Es importante tener en cuenta que el hecho de obtener el mínimo valor de χ_r^2 no implica que el ajuste sea bueno en un sentido absoluto. La bondad del ajuste se evalúa a partir de la prueba o test de chi cuadrado reducido [42]. Por medio de esta prueba, el valor de χ^2 dividido en el número de grados de libertad obtenidos mediante el ajuste, se compara con los valores del χ_r^2 crítico. Si el valor de χ_r^2 obtenido mediante el ajuste, es menor que el valor crítico de χ^2/NGL de la familia de distribuciones $f(\chi^2) = (\chi^2)^{(NGL/2)-1} e^{-\chi^2/2}$, entonces significa que hay un 95% de nivel de confianza de descartar la hipótesis de que el ajuste entre los datos y el modelo no sea bueno.

De este modo, en el Cuadro 3.1 se presenta en las columnas (1), (2) y (3) el nombre, tipo morfológico y radio, respectivamente¹, de las 26 galaxias de la muestra que quedan después de aplicar la prueba de bondad del ajuste. Los resultados mas importantes del ajuste se muestran en las columnas (4), (6) y (7). En la columna (4) se presenta el número de parámetros m que se obtienen a partir del mejor ajuste. En la columna (6) se muestra el valor del χ_r^2 , mientras que en (7) se presenta el número de grados de libertad. En la columna (8) se da el nivel de confianza con que se realiza ajuste.

En las Figuras 3.1 hasta 3.4 se muestran las curvas de rotación ajustadas para las 26 galaxias consideradas. Los puntos con barras de error son las observaciones, tal como están reportadas en [1], mientras que la línea sólida es la curva de rotación determinada a partir de (3.4) con los valores de A_{2n} dados por el mejor ajuste. En este mismo conjunto de figuras también encontramos curvas de rotación con líneas a trazos. Estas curvas de rotación se obtienen utilizando un número de parámetros distinto a los del mejor ajuste, pero manteniendo el nivel de confianza del ajuste al 95%. En la siguiente sección, después de analizar la estabilidad del modelo, se explicará con detalle el objetivo de este ajuste.

Como se puede ver, la relación (3.4) ajusta de forma precisa con los datos observados de las galaxias consideradas. Entonces, de los valores obtenidos para A_{2n} , los correspondientes valores de las constantes C_{2n} se determinan usando (3.5) y (3.8). De la misma manera, por medio de (3.3) y (3.8) se obtienen los valores de las masas \mathcal{M} y sus respectivos errores estándar para cada galaxia. Los valores de las masas para cada galaxia de la muestra se encuentran en la columna (5). En el apéndice A se encuentran los valores de las constantes C_{2n} para el conjunto de galaxias ajustadas.

¹Estas características son recopiladas tal como están reportadas en la Tabla 4 de [1]

Ahora, como el conjunto de constantes C_{2n} define completamente cada modelo de disco delgado en particular, se puede fácilmente calcular todas las cantidades físicas que caracterizan a cada galaxia. En las Figuras 3.5 hasta la 3.8 se muestran las densidades superficiales de masa para las 26 galaxias, como función de la coordenada radial adimensional $\tilde{R} = R/a$. La línea sólida representa el comportamiento de la densidad superficial usando los parámetros m obtenidos por medio del mejor ajuste. Para las 26 galaxias se obtiene una densidad superficial bien comportada, teniendo un máximo en el centro y posteriormente decreciendo hasta un valor nulo en el borde del disco.

SECCIÓN 3.4

Análisis de la Estabilidad: Frecuencias Epicíclica y Vertical

Existen otras dos cantidades importantes, en lo que respecta a la cinemática de los modelos. Éstas, describen la estabilidad ante perturbaciones radiales y verticales de partículas que efectúan órbitas cuasicirculares [5]. Se trata de la frecuencia epicíclica

$$\kappa^2(R) = \left. \frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2} \right|_{z=0}, \quad (3.10)$$

y la frecuencia vertical,

$$\nu^2(R) = \left. \frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial z^2} \right|_{z=0}, \quad (3.11)$$

donde

$$\Phi_{\text{eff}} = \Phi(R, z) + \frac{\ell^2}{2R^2}, \quad (3.12)$$

es el potencial efectivo y $\ell = Rv_c$ es el momentum angular específico.

Entonces, tomando la expresión (2.11) para la velocidad circular, las ante-

riores expresiones se pueden escribir como

$$\kappa^2(R) = \frac{1}{R} \frac{dv_c^2}{dR} + \frac{2v_c^2}{R^2}, \quad (3.13)$$

$$\nu^2(R) = \nabla^2 \Phi \Big|_{z=0} - \frac{1}{R} \frac{dv_c^2}{dR}, \quad (3.14)$$

donde también se ha usado la expresión para el operador de Laplace en coordenadas cilíndricas.

Estas dos últimas ecuaciones no son realmente las definiciones fundamentales para las frecuencias epicíclica y vertical, sino una forma alternativa de expresar estas cantidades, en términos de la velocidad circular. Si los valores de κ^2 y ν^2 son positivos, tendremos un caso de estabilidad, mientras que valores negativos de estas cantidades, representan situaciones de inestabilidad (ante perturbaciones radiales y verticales, respectivamente).

Al introducir (3.4) en las expresiones (3.13) y (3.14) y emplear el hecho de que el potencial es solución de la ecuación de Laplace, las expresiones para la frecuencia epicíclica y vertical se pueden reescribir apropiadamente como

$$\tilde{\kappa}_m^2(\tilde{R}) = \sum_{n=1}^m 2(n+1)A_{2n}\tilde{R}^{2n-2}, \quad (3.15)$$

donde $\tilde{\kappa} = a\kappa$, y

$$\tilde{\nu}_m^2(\tilde{R}) = - \sum_{n=1}^m 2nA_{2n}\tilde{R}^{2n-2}, \quad (3.16)$$

donde $\tilde{\nu} = a\nu$. De manera que usando (3.15), (3.16) y los valores de los parámetros determinados a partir del ajuste numérico, las expresiones para las dos frecuencias se pueden determinar explícitamente. En las Figuras 3.9 hasta 3.12, se muestra con línea sólida las gráficas de la frecuencia epicíclica para el conjunto de galaxias considerado. Galaxias para las que $\tilde{\kappa}^2 > 0$ corresponde a galaxias radialmente estables. Como se puede observar a partir del comportamiento gráfico de la frecuencia radial, hay 17 galaxias de la muestra que presentan pequeñas regiones de inestabilidad radial cerca del borde del disco. Por otro lado, el signo menos de la ecuación (3.14) nos permite inferir que todas las galaxias de la muestra presentan un comportamiento inestable ante perturbaciones verticales, debido a que la velocidad circular inicialmente crece monótonamente con \tilde{R} y luego se mantiene prácticamente constante.

Con base en la prueba de χ_r^2 , cabe la posibilidad de que existan otros valores de m , distintos a los que se obtienen por medio del mejor ajuste, para los cuales se pueden obtener modelos radialmente estables. Para este fin, esta vez se hace el ajuste para cada una de las galaxias radialmente inestables de la muestra, con aquellos valores de m que satisfagan la prueba.

Después de explorar todas estas posibilidades, se logra estabilizar 7 de las 17 galaxias inestables, las cuales mantienen tanto las curvas de rotación, como la densidad superficial de masa, con un comportamiento físicamente aceptable. En las figuras 3.1 hasta 3.4 se muestra con línea a trazos el comportamiento de la curva de rotación para estas siete galaxias. De igual manera, en las figuras 3.5 hasta 3.8 y las figuras 3.9 hasta 3.12, se muestra con línea a trazos, el comportamiento de la densidad superficial de masa y la frecuencia epicíclica, respectivamente, para estas siete galaxias.

En el Cuadro 3.2 se muestra el nombre NGC/UGC de aquellas galaxias estables después de hacer el nuevo ajuste. El número de parámetros m obtenidos por este nuevo ajuste se muestran en la columna (2). En las columnas (4) y (5) se presentan los valores para el χ_r^2 y el número de grados de libertad, respectivamente. En (3) se dan los valores de la masa \mathcal{M} para que estas galaxias sean radialmente estables.

Cuadro 3.1: Resultados del mejor ajuste. La columna (1) es el nombre NGC/UGC de cada galaxia. La columna (2) es el tipo morfológico de la galaxia. La columna (3) es el radio del disco definido como el último dato observado. Los resultados del mejor ajuste para (3.4) se presentan en las columnas (4) - (8), donde la columna (4) es el número de parámetros necesarios para obtener el mejor ajuste; la columna (5) es la masa total del disco \mathcal{M} y su respectivo error estandar; las columnas (6) y (7) representan el chi cuadrado reducido y el número de grados de libertad, respectivamente, y la columna (8) es el nivel de confianza

Galaxia (1)	Tipo (2)	a [kpc] (3)	m (4)	\mathcal{M} [$10^{10} \mathcal{M}_{\odot}$] (5)	χ_r^2 (6)	NGL (7)	C.L % (8)
NGC3726	SBc	33.57	7	12.50 ± 6.90	0.4	5	95
NGC3877	Sc	11.7	6	4.77 ± 0.72	0.073	7	95
NGC3917	Scd	15.3	7	4.05 ± 0.86	0.3	10	95
NGC3949	Sbc	7.29	6	2.93 ± 0.35	0.048	2	95
NGC3953	SBbc	16.2	6	11.76 ± 4.01	0.76	3	95
NGC3972	Sbc	9.0	6	2.14 ± 0.32	0.085	5	95
NGC4010	SBb	10.8	6	2.30 ± 0.93	0.36	6	95
NGC4085	Sc	6.39	5	1.58 ± 0.01	0.00015	2	95
NGC4088	Sbc	22.14	7	9.68 ± 3.63	0.56	6	95
NGC4100	Sbc	23.49	11	9.98 ± 1.57	0.16	14	95
NGC4157	Sb	30.6	8	16.10 ± 9.63	0.80	9	95
NGC4183	Scd	21.69	8	3.92 ± 2.46	0.59	15	95
NGC4217	Sb	17.19	8	8.50 ± 2.58	0.23	11	95
NGC4389	SBbc	5.49	4	0.72 ± 1.00	0.047	2	95
UGC6399	Sm	8.1	6	0.83 ± 0.04	0.0036	3	95
UGC6446	Sd	15.84	8	1.74 ± 1.09	0.30	9	95
UGC6667	Scd	8.1	8	0.65 ± 0.20	0.11	1	95
UGC6818	Sd	7.2	6	0.47 ± 0.25	0.29	2	95
UGC6917	SBd	10.8	7	1.71 ± 0.71	0.28	4	95
UGC6923	Sdm	5.49	3	0.46 ± 0.43	0.47	3	95
UGC6930	Sbb	17.1	7	2.84 ± 0.82	0.16	4	95
UGC6962	SBcd	5.4	5	1.85 ± 0.009	0.00003	1	95
UGC6969	Sm	4.59	4	0.30 ± 1.17	0.17	1	95
UGC6973	Sab	8.1	7	3.58 ± 2.19	1.07	2	95
UGC6983	SBcd	16.2	9	2.80 ± 1.64	0.29	9	95
UGC7089	Sdm	9.45	7	0.72 ± 0.26	0.12	5	95

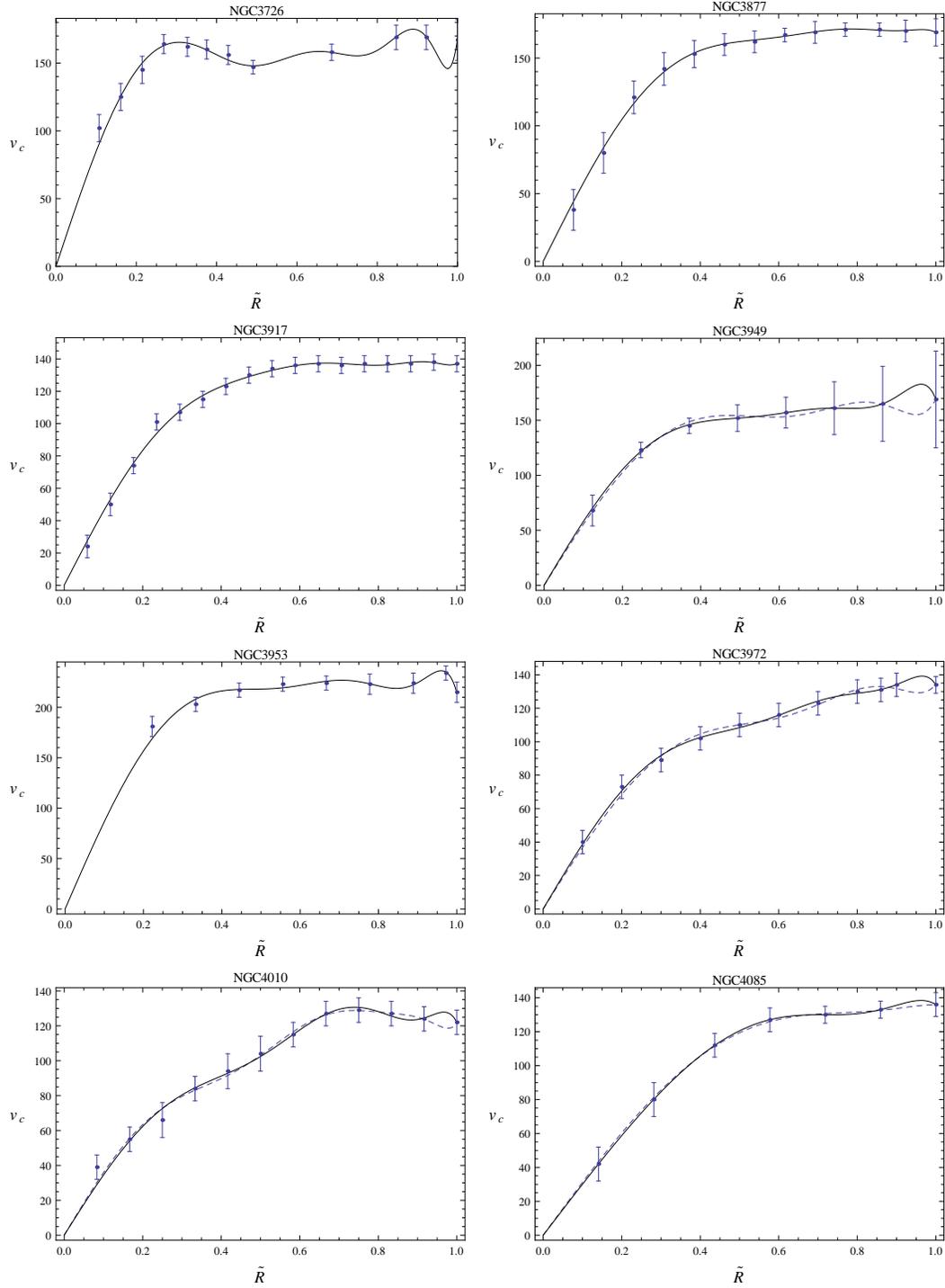


Figura 3.1: Velocidad circular en [km/s] de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del ajuste. La línea sólida es la curva de rotación determinada a partir de (3.4) y los parámetros del mejor ajuste listados en el Cuadro 3.1. La línea a trazos representan las curvas de rotación para aquellas galaxias que se logran estabilizar radialmente utilizando los parámetros m del Cuadro 3.2. Los puntos con barras de error son los datos, como reportados en [1]

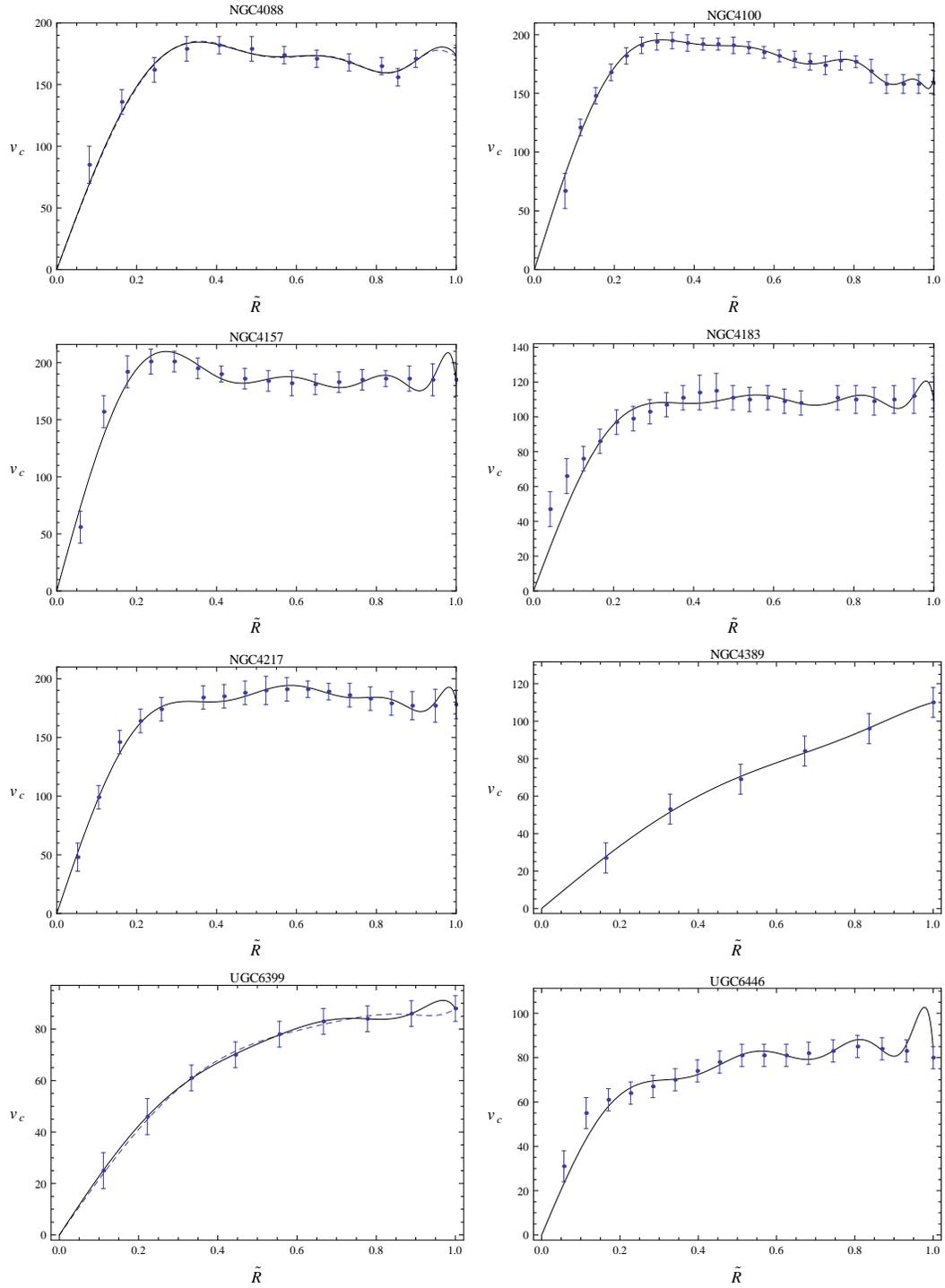


Figura 3.2: Velocidad circular en [km/s] de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del ajuste. La línea sólida es la curva de rotación determinada a partir de (3.4) y los parámetros del mejor ajuste listados en el Cuadro 3.1. La línea a trazos representan las curvas de rotación para aquellas galaxias que se logran estabilizar radialmente utilizando los parámetros m del Cuadro 3.2. Los puntos con barras de error son los datos, como reportados en [1]

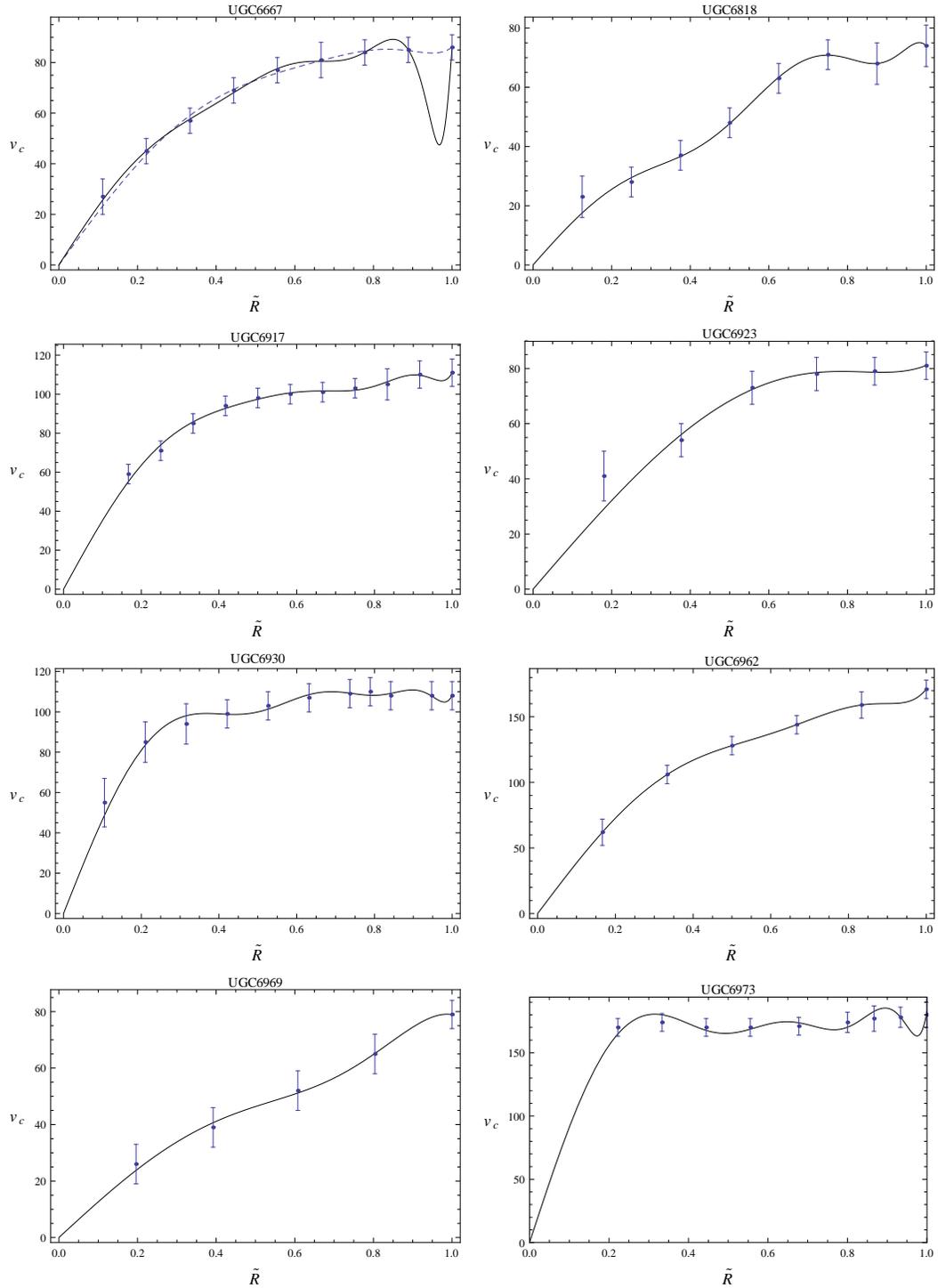


Figura 3.3: Velocidad circular en [km/s] de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del ajuste. La línea sólida es la curva de rotación determinada a partir de (3.4) y los parámetros del mejor ajuste listados en el Cuadro 3.1. La línea a trazos representan las curvas de rotación para aquellas galaxias que se logran estabilizar radialmente utilizando los parámetros m del Cuadro 3.2. Los puntos con barras de error son los datos, como reportados en [1]

Cuadro 3.2: Galaxias estables utilizando otros parámetros distintos a los del mejor ajuste. La columna (1) muestra el nombre NGC/UGC de estas galaxias. La columna (2) es el número de parámetros necesarios para obtener estabilidad radial. La columna (3) es la masa total del disco \mathcal{M} y su respectivo error estandar; las columnas (4) y (5) representan el chi cuadrado reducido y el número de grados de libertad, respectivamente, y la columna (8) representa el nivel de confianza al cual se fija el ajuste

Galaxia (1)	m (2)	\mathcal{M} [$10^{10} \mathcal{M}_\odot$] (3)	χ_r^2 (4)	NGL (5)	C.L (6)
NGC3949	5	2.68 ± 0.78	0.24	3	95
NGC3972	5	2.06 ± 0.48	0.19	6	95
NGC4010	7	2.23 ± 0.95	0.38	5	95
NGC4085	4	1.56 ± 1.17	0.031	3	95
NGC4088	8	9.59 ± 4.21	0.75	5	95
UGC6399	5	0.81 ± 0.15	0.061	4	95
UGC6667	5	0.78 ± 0.23	0.15	4	95

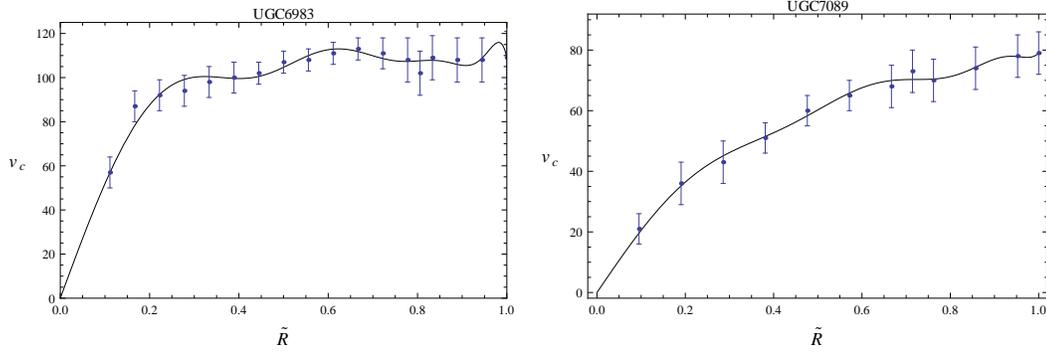


Figura 3.4: Velocidad circular en [km/s] de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del ajuste. La línea sólida es la curva de rotación determinada a partir de (3.4) y los parámetros del mejor ajuste listados en el Cuadro 3.1. La línea a trazos representan las curvas de rotación para aquellas galaxias que se logran estabilizar radialmente utilizando los parámetros m del Cuadro 3.2. Los puntos con barras de error son los datos, como reportados en [1]

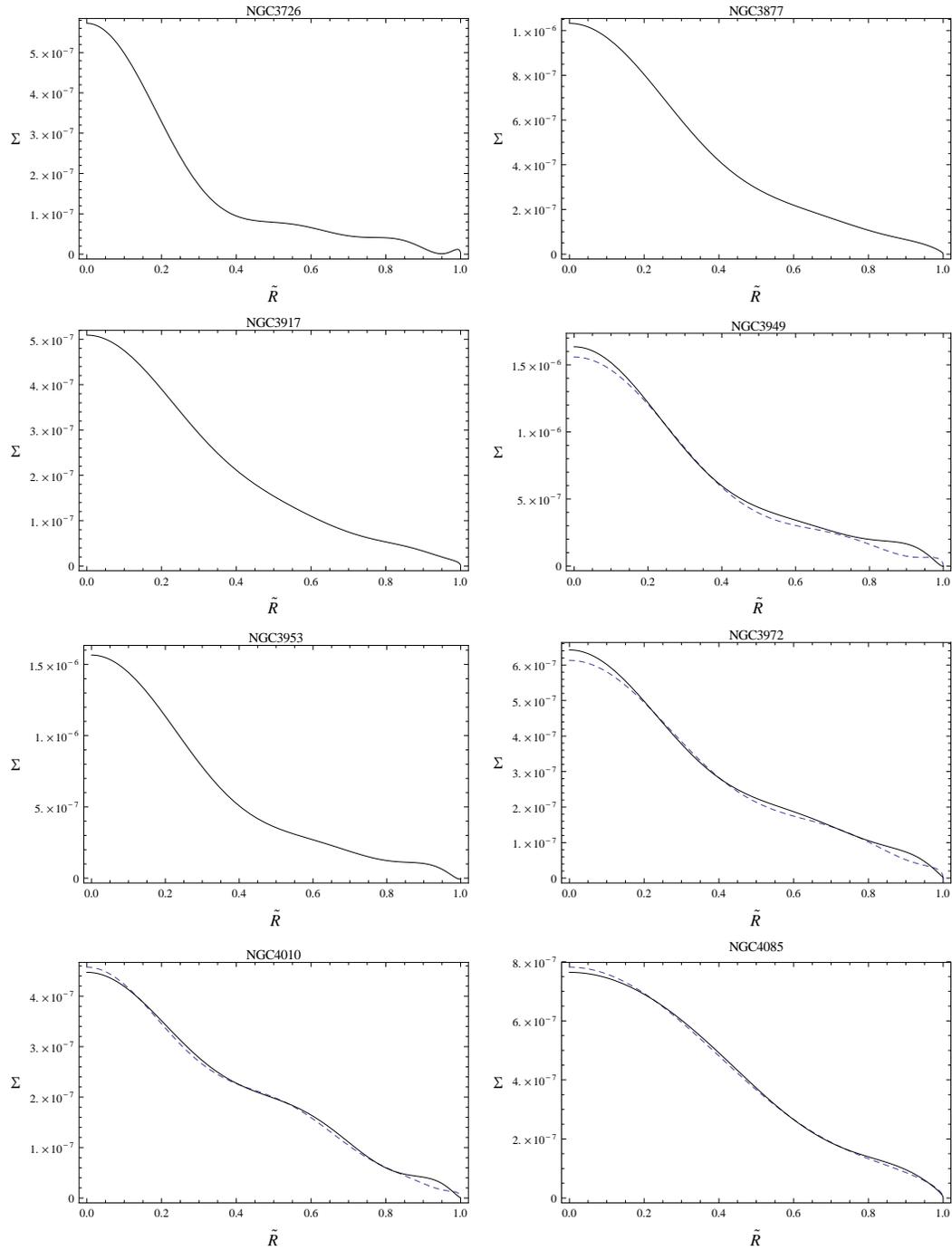


Figura 3.5: Densidad superficial de masa en $[kg/m^2]$ de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del ajuste. La línea sólida representa el comportamiento de la densidad superficial de masa determinada a partir de (3.2) y los parámetros del mejor ajuste registrados en el Cuadro 3.1. La línea a trazos representa la densidad superficial de masa de aquellas galaxias que se lograron estabilizar al cambiar el número de parámetros del mejor ajuste.

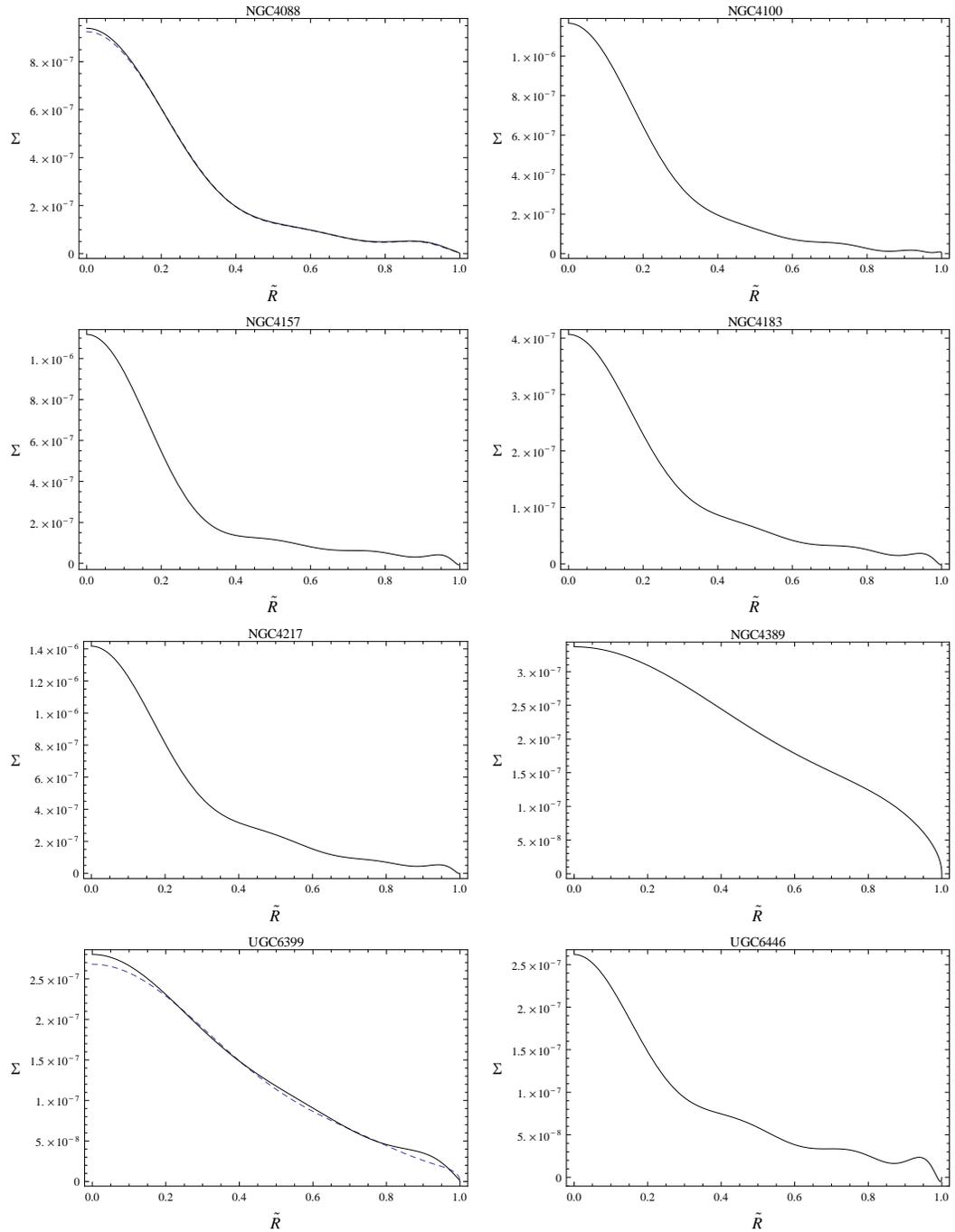


Figura 3.6: Densidad superficial de masa en $[kg/m^2]$ de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del ajuste. La línea sólida representa el comportamiento de la densidad superficial de masa determinada a partir de (3.2) y los parámetros del mejor ajuste registrados en el Cuadro 3.1. La línea a trazos representa la densidad superficial de masa de aquellas galaxias que se lograron estabilizar al cambiar el número de parámetros del mejor ajuste.

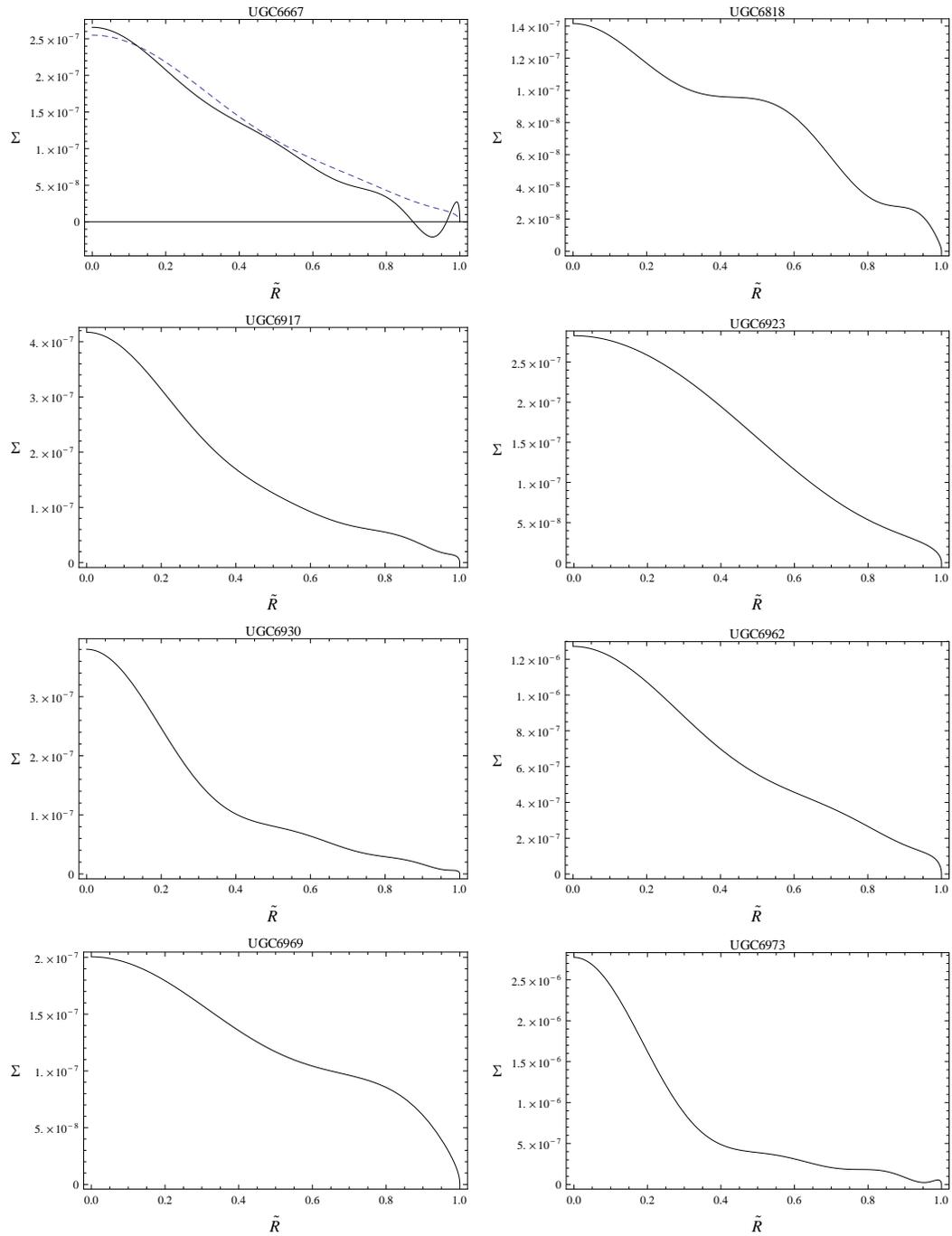


Figura 3.7: Densidad superficial de masa en $[kg/m^2]$ de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del ajuste. La línea sólida representa el comportamiento de la densidad superficial de masa determinada a partir de (3.2) y los parámetros del mejor ajuste registrados en el Cuadro 3.1. La línea a trazos representa la densidad superficial de masa de aquellas galaxias que se lograron estabilizar al cambiar el número de parámetros del mejor ajuste.

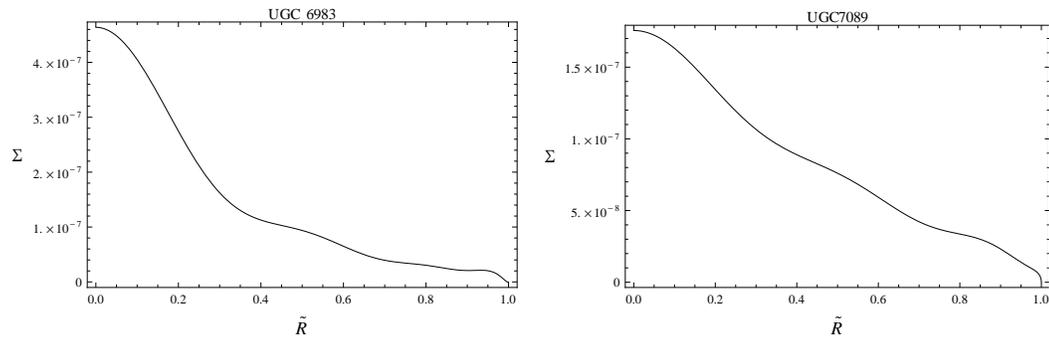


Figura 3.8: Densidad superficial de masa en $[kg/m^2]$ de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del ajuste. La línea sólida representa el comportamiento de la densidad superficial de masa determinada a partir de (3.2) y los parámetros del mejor ajuste registrados en el Cuadro 3.1. La línea a trazos representa la densidad superficial de masa de aquellas galaxias que se lograron estabilizar al cambiar el número de parámetros del mejor ajuste.

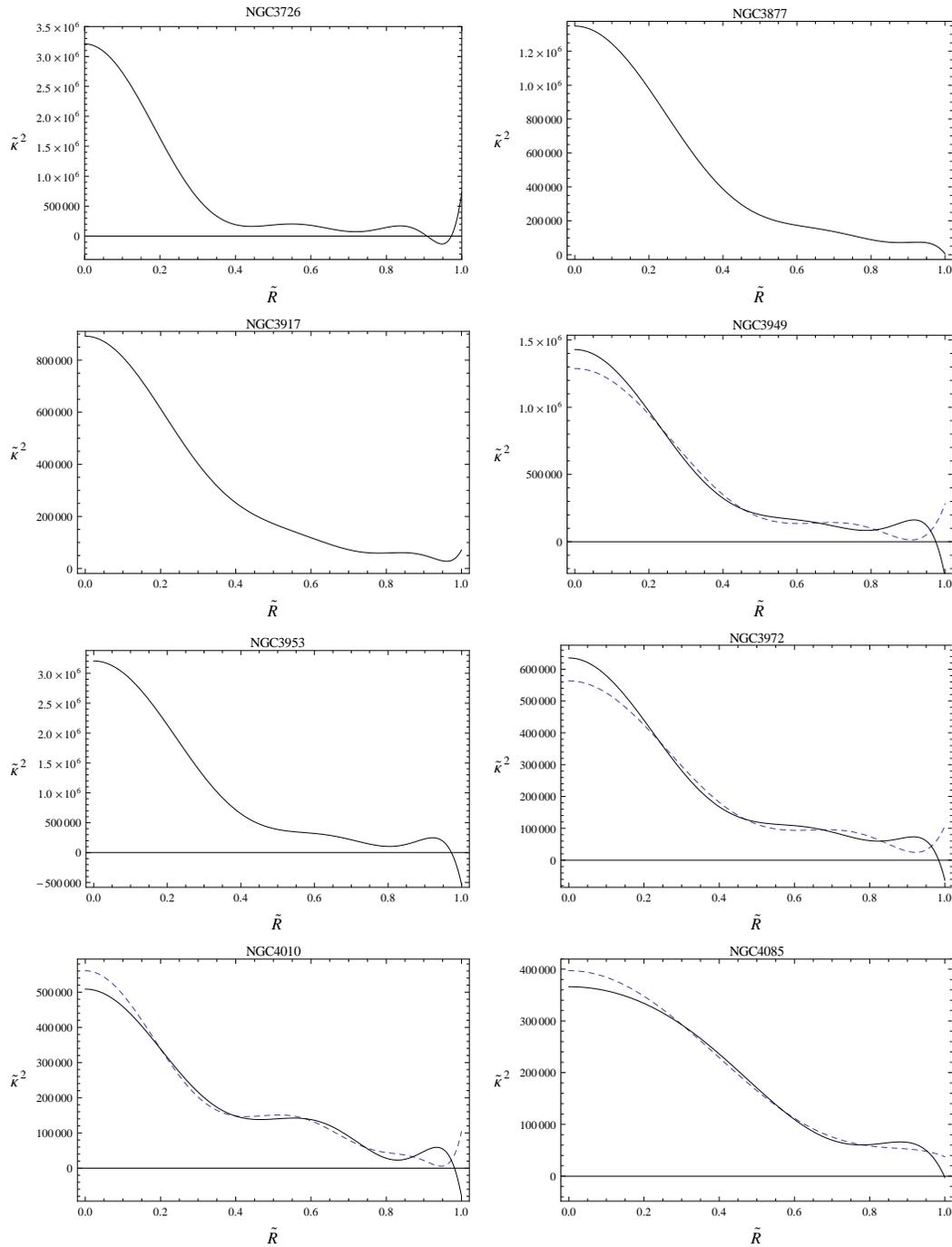


Figura 3.9: Frecuencia epicíclica en $[km^2/s^2]$ de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del mejor ajuste. La línea sólida representa la frecuencia epicíclica determinada a partir de (3.15) y los parámetros del mejor ajuste. Las regiones en donde la frecuencia es negativa representa regiones de inestabilidad radial. Las gráficas con línea a trazos representan la frecuencia epicíclica de las galaxias que se logaron estabilizar utilizando otros parámetros distintos a los del mejor ajuste.

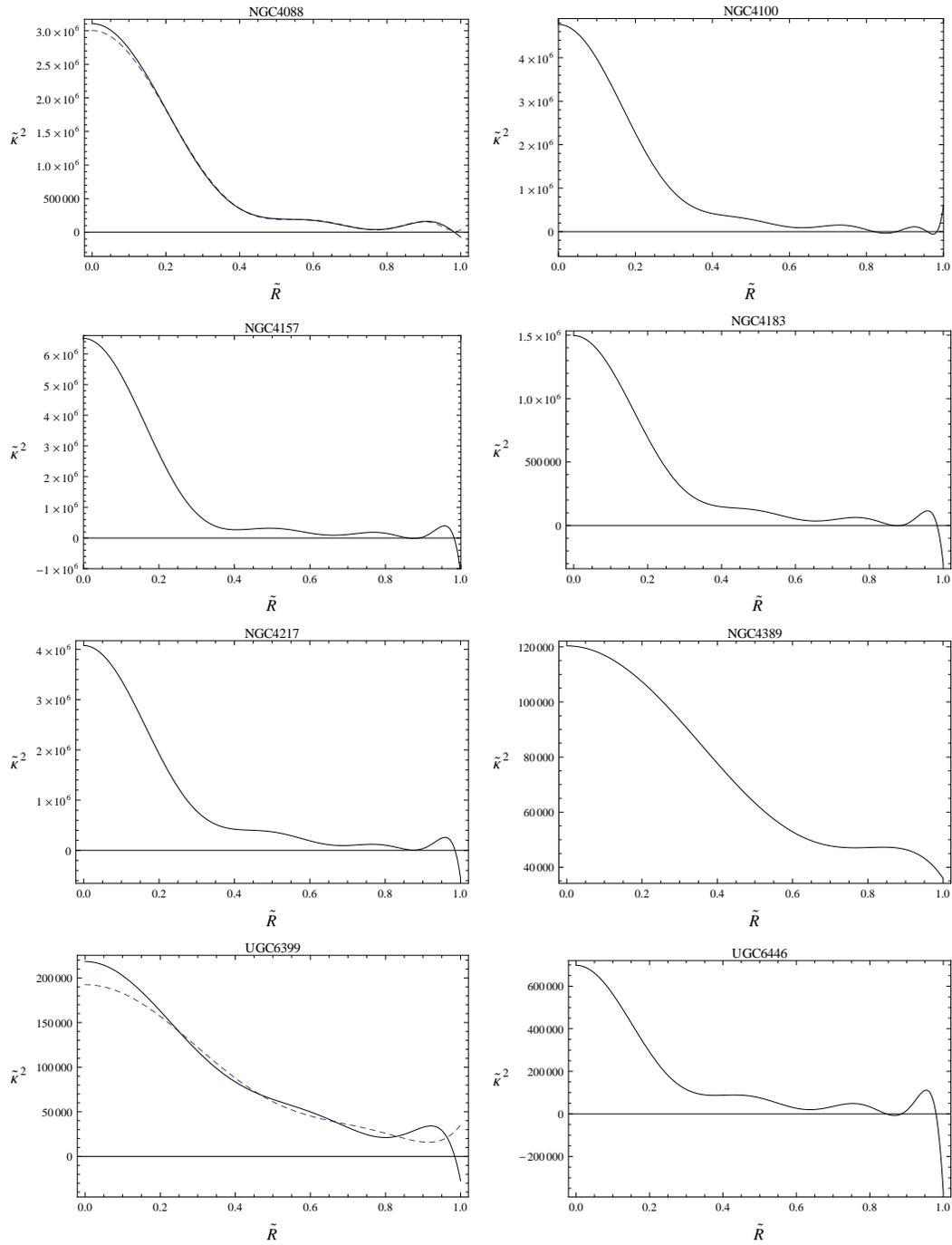


Figura 3.10: Frecuencia epicíclica en $[km^2/s^2]$ de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del mejor ajuste. La línea sólida representa la frecuencia epicíclica determinada a partir de (3.15) y los parámetros del mejor ajuste. Las regiones en donde la frecuencia es negativa representa regiones de inestabilidad radial. Las gráficas con línea a trazos representan la frecuencia epicíclica de las galaxias que se logaron estabilizar utilizando otros parámetros distintos a los del mejor ajuste.

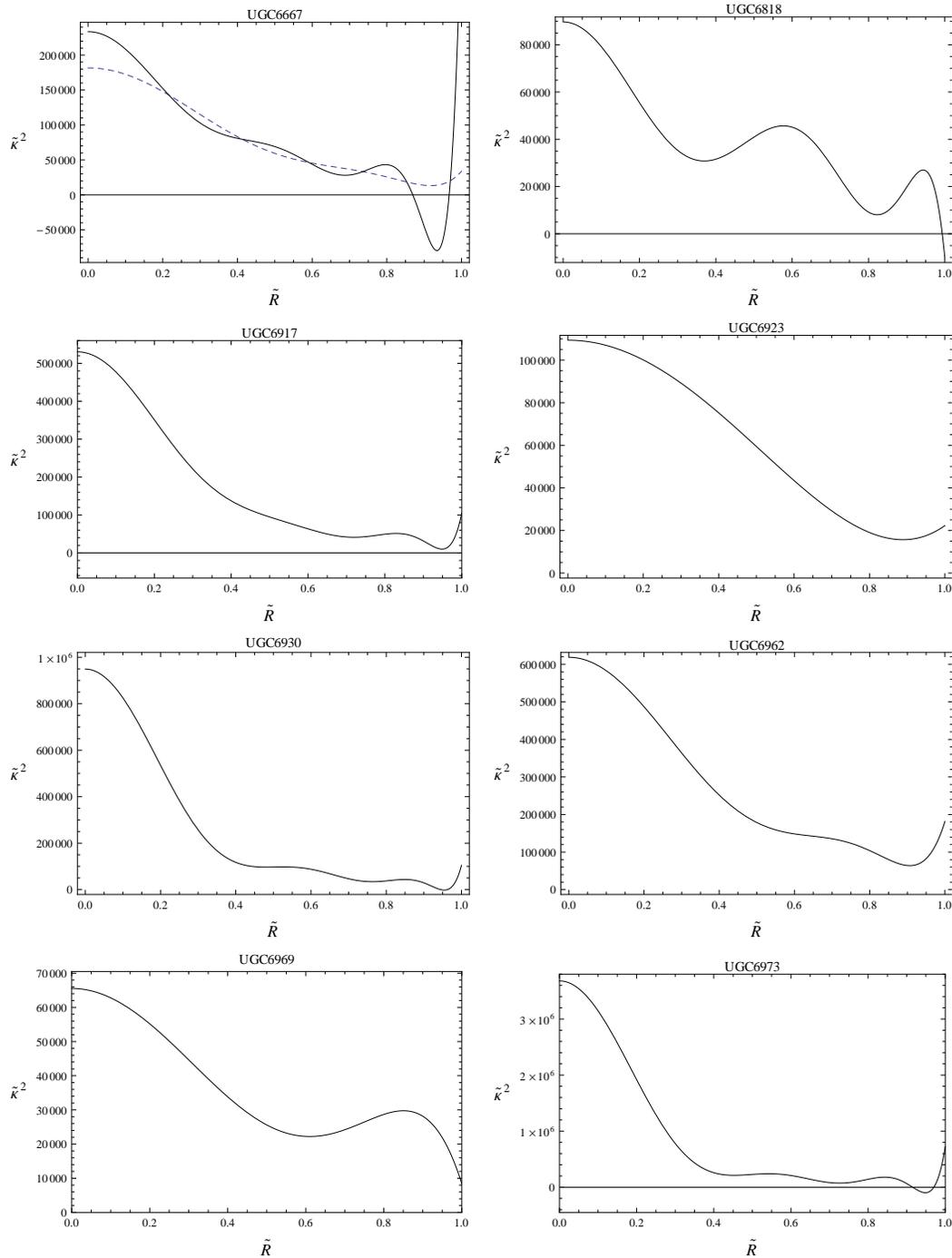


Figura 3.11: Frecuencia epicíclica en $[km^2/s^2]$ de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del mejor ajuste. La línea sólida representa la frecuencia epicíclica determinada a partir de (3.15) y los parámetros del mejor ajuste. Las regiones en donde la frecuencia es negativa representa regiones de inestabilidad radial. Las gráficas con línea a trazos representan la frecuencia epicíclica de las galaxias que se lograron estabilizar utilizando otros parámetros distintos a los del mejor ajuste.

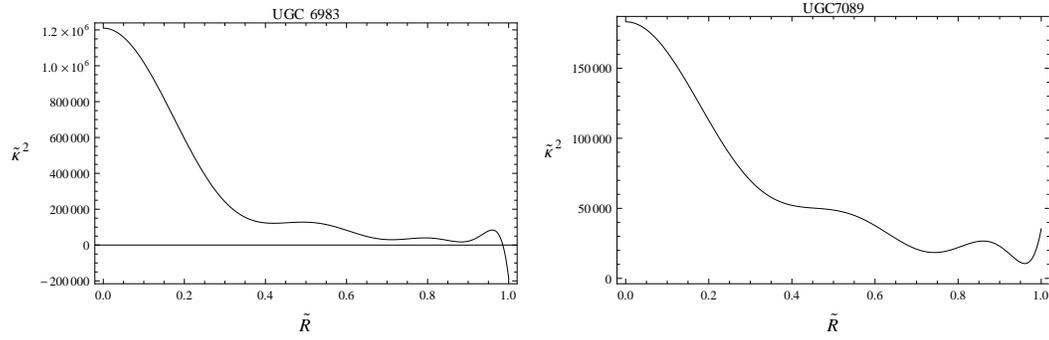


Figura 3.12: Frecuencia epicíclica en $[km^2/s^2]$ de las 26 galaxias ajustadas usando los parámetros del mejor ajuste. La línea sólida representa la frecuencia epicíclica determinada a partir de (3.15) y los parámetros del mejor ajuste. Las regiones en donde la frecuencia es negativa representa regiones de inestabilidad radial. Las gráficas con línea a trazos representan la frecuencia epicíclica de las galaxias que se lograron estabilizar utilizando otros parámetros distintos a los del mejor ajuste.

Capítulo 4

POTENCIALES ANALÍTICOS PARA GALAXIAS PLANAS CON HALO ESFEROIDAL

SECCIÓN 4.1

Introducción

En este capítulo se presenta una familia de potenciales analíticos para galaxias planas con halos esferoidales. Los potenciales se obtienen considerando la superposición de dos componentes independientes: un potencial generado por el disco delgado y un potencial generado por el halo esferoidal, ambos expresados apropiadamente como la superposición de productos de funciones de Legendre. Tomando el potencial del halo más simple se obtiene una expresión para la velocidad circular que se puede ajustar de manera muy precisa con las curvas de rotación del mismo conjunto de galaxias analizadas en el capítulo anterior. Particularmente, La galaxia NGC4389 se ajusta apropiadamente al modelo, de tal manera que presenta un comportamiento estable contra perturbaciones radial y vertical. Los valores de la masa del halo y la

masa del disco para esta galaxia se calculan de tal manera que se obtiene un intervalo muy cercano de valores para esas cantidades. Por lo tanto, los valores de las masas obtenidos están en perfecto acuerdo con el orden de magnitud esperado y con el orden de magnitud relativo entre la masa del halo y la masa del disco.

SECCIÓN 4.2

Modelo de Masa Compuesto por un Disco finito Delgado y un Halo Esferoidal

Con el fin de obtener modelos de galaxia compuestos por un disco delgado y un halo esferoidal, se empieza considerando un potencial gravitacional axialmente simétrico, $\Phi(R, z)$, que además de la simetría axial satisfaga las mismas condiciones sobre la simetría de reflexión (2.2) y (2.3) analizadas en el capítulo 2. También se asume que $\partial\Phi/\partial z$ no se anula sobre el plano $z = 0$, a fin de tener una distribución de materia que represente el disco.

Para poder describir de manera separada la contribución del disco delgado y del halo esferoidal, se considera que el potencial gravitacional se puede escribir como la superposición de dos componentes independientes

$$\Phi(R, z) = \Phi_d(R, z) + \Phi_h(R, z), \quad (4.1)$$

donde $\Phi_d(R, z)$ y $\Phi_h(R, z)$ corresponden al potencial generado por el disco galáctico y por el halo esferoidal, respectivamente. El potencial gravitacional que caracteriza al disco se escoge de manera que sea una solución de la ecuación de Laplace en cualquier región fuera del disco,

$$\nabla^2\Phi_d = 0, \quad (4.2)$$

mientras que el potencial del halo esferoidal $\Phi_h(R, z)$ se toma de manera que represente una solución de la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\Phi_h = 4\pi G\rho, \quad (4.3)$$

donde $\rho(R, z)$ es la densidad de masa del halo.

En este capítulo no mostraremos las generalidades necesarias para obtener el potencial gravitacional debido al disco galáctico, ya que en el capítulo 2

por medio del método de Hunter, el cual consiste en encontrar soluciones de la ecuación de Laplace en términos de las coordenadas esferoidales oblatas, encontramos que el potencial gravitacional, solución de (4.2) está dado por (2.9).

Con el fin de dar solución a (4.3), debemos tener presente que aunque la densidad de masa del halo sea desconocida, el potencial gravitacional del halo esferoidal se escoge como la superposición de funciones en términos de las coordenadas esferoidales oblatas, de tal manera que $\nabla^2 \Phi_h$ sea una función de las coordenadas distinta de cero, con un comportamiento apropiado, para que esta función represente la densidad de masa del halo.

Después de algunas manipulaciones algebraicas, encontramos que una forma apropiada de representar el potencial gravitacional del halo esferoidal es

$$\Phi_h(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l B_{jk} q_j^k(\xi) P_j^k(\eta), \quad (4.4)$$

donde m es un entero positivo, el cual define el modelo de halo considerado, y los coeficientes B_{jk} son constantes arbitrarias las cuales se deben especificar para obtener cualquier modelo particular. Aquí las funciones [43]

$$q_j^k(\xi) = (1 + \xi^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k q_j(\xi)}{d\xi^k}, \quad (4.5)$$

son soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 + \xi^2) \frac{dq_j^k}{d\xi} \right] = \left[j(j+1) - \frac{k^2}{1 + \xi^2} \right] q_j^k(\xi), \quad (4.6)$$

mientras que las funciones asociadas de Legendre [44],

$$P_j^k(\eta) = (1 - \eta^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k P_j(\eta)}{d\eta^k}, \quad (4.7)$$

son solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dP_j^k}{d\eta} \right] = \left[\frac{k^2}{1 - \eta^2} - j(j+1) \right] P_j^k(\eta), \quad (4.8)$$

donde j y k son enteros, con $j \geq k$. Por otro lado, debido al caracter discontinuo que presenta la coordenada η , para que $\Phi_h(\xi, \eta)$ sea continua en

cualquier lugar se debe cumplir que $(j - k)$ es un número par, puesto que de esta manera $P_j^k(\eta)$ es una función par de η .

Con el fin de que el potencial del halo esferoidal no contribuya a la densidad superficial de masa del disco, se debe imponer la condición

$$\left. \frac{\partial \Phi_h}{\partial z} \right|_{z=0^+} = 0, \quad (4.9)$$

la cual en coordenadas oblatas se reduce al sistema

$$\left. \frac{\partial \Phi_h}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad (4.10a)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_h}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0. \quad (4.10b)$$

Si ahora reemplazamos el potencial gravitacional de la forma (4.4) en (4.3), se obtiene la correspondiente expresión para la densidad de masa del halo, la cual se escribe como

$$\varrho(\xi, \eta) = \frac{1}{4\pi G} \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l \frac{B_{jk} k^2 q_j^k(\xi) P_j^k(\eta)}{a^2 (1 + \xi^2)(1 - \eta^2)}. \quad (4.11)$$

De manera que, como $P_j^k(\eta)$ es finito en el intervalo $-1 \leq \eta \leq 1$ y $q_j^k(\xi)$ tiende a cero cuando $\xi \rightarrow \infty$, entonces $\varrho_j^k(\xi, \eta)$ debidamente desaparece en el infinito. Por otro lado, a partir de la expresión (4.7) y (4.11) es fácil ver que $\varrho(\xi, \eta)$ diverge en $\eta = \pm 1$ (eje z) a menos que $k \geq 2$, mientras que para $k > 2$ esta función desaparece en $\eta = \pm 1$.

De acuerdo con lo anterior, la posibilidad más simple de escoger apropiadamente el potencial gravitacional del halo esferoidal es tomando $k = 2$. Así, a partir de la expresión (4.4) el potencial gravitacional para el halo esferoidal se escribe como

$$\Phi_h(\xi, \eta) = B_{00} q_0^0(\xi) P_0^0(\eta) + B_{20} q_2^0(\xi) P_2^0(\eta) + B_{22} q_2^2(\xi) P_2^2(\eta). \quad (4.12)$$

Utilizando esta expresión para el potencial y las expresiones explícitas para $q_j^k(\xi)$ y $P_j^k(\eta)$, la densidad de masa del halo esferoidal se puede escribir como

$$\varrho(\xi) = \frac{3B_{22}}{\pi G a^2} \left\{ 3 \cot^{-1} \xi - \frac{\xi(3\xi^2 + 5)}{(1 + \xi^2)^2} \right\}, \quad (4.13)$$

la cual, después de integrar sobre todo el espacio, permite obtener la expresión

$$B_{22} = \frac{\mathcal{M}_h G}{16a}, \quad (4.14)$$

donde \mathcal{M}_h es la masa total del halo. Después, al aplicar la condición (4.10a), se obtiene que

$$B_{00} = -\frac{\mathcal{M}_h G}{a}, \quad (4.15a)$$

$$B_{20} = \frac{\mathcal{M}_h G}{2a}, \quad (4.15b)$$

de manera que todas las constantes en el potencial gravitacional del halo (4.12) quedan expresadas en términos de la masa del halo \mathcal{M}_h .

Con el fin de poder ajustar el modelo disco - halo a los datos de las curvas de rotación del conjunto de galaxias estadísticamente seleccionado en el capítulo anterior, se debe ahora encontrar una expresión apropiada para la velocidad circular del modelo. En coordenadas esféricas oblatas la velocidad circular definida por (2.11), se escribe como

$$v_c^2 = \frac{(\eta^2 - 1)}{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_{\xi=0}, \quad (4.16)$$

la cual después de usar (4.1), (2.9), (4.12) y las propiedades de las funciones de Legendre, se reduce a

$$v_c^2(\tilde{R}) = \frac{\tilde{R}^2}{\eta} \sum_{l=1}^m \tilde{C}_{2l} P'_{2l}(\eta), \quad (4.17)$$

donde

$$\tilde{C}_2 = q_2(0) \left[C_2 + \frac{\mathcal{M}_h G}{4a} \right], \quad (4.18)$$

y

$$\tilde{C}_{2l} = q_{2l}(0) C_{2l}, \quad (4.19)$$

para $l \geq 2$. Entonces, usando (3.8), (4.18) y (4.19), se puede comprobar que

$$\frac{\mathcal{M}_d G}{a} + \frac{\mathcal{M}_h G}{4a} = \sum_{l=1}^m \frac{(-1)^{l+1} \tilde{C}_{2l}}{q_{2l}(0)}, \quad (4.20)$$

y así el modelo implica una relación lineal entre \mathcal{M}_d y \mathcal{M}_h , en donde el término independiente es determinado por las constantes \tilde{C}_{2l} , con $l \geq 1$. Ahora, es claro que la anterior relación tiene sentido solamente si el lado derecho es positivo, lo cual se debe comprobar para cada conjunto de constantes \tilde{C}_{2l} correspondientes a cualquier modelo particular.

SECCIÓN 4.3

Obtención de Modelos Particulares

Con el fin de obtener modelos particulares, se deben especificar los valores de las constantes \tilde{C}_{2l} del modelo general. Entonces, se ajustan esas constantes de tal manera que la velocidad circular $v_c^2(\tilde{R})$ ajuste con los datos de la curva de rotación de alguna galaxia particular. Ahora, como la expresión (4.17) para la velocidad circular solamente contiene derivadas de los polinomios de Legendre de orden par, esto es equivalente a

$$v_c^2(\tilde{R})_m = \sum_{l=1}^m A_{2l} \tilde{R}^{2l}. \quad (4.21)$$

Como se puede ver, esta expresión tiene la misma forma que la ecuación (3.4) encontrada en el capítulo 3. Esto implica que los parámetros del ajuste A_{2l} encontrados a través del modelo de disco máximo han de ser los mismos que los obtenidos por medio de este modelo. Sin embargo, en este modelo las constantes A_{2l} están relacionadas con las anteriores constantes \tilde{C}_{2l} , para $l \neq 0$, a través de

$$\tilde{C}_{2l} = \frac{4l+1}{4l(2l+1)} \sum_{k=1}^m A_{2k} I_{kl}, \quad (4.22)$$

donde

$$I_{kl} = \int_{-1}^1 \eta(1-\eta^2)^k P'_{2l}(\eta) d\eta, \quad (4.23)$$

la cual se obtiene igualando las expresiones (4.17) y (4.21) y usando las propiedades de ortogonalidad de las funciones asociadas de Legendre.

Entonces, si las constantes A_{2l} están determinadas por un ajuste de los datos observacionales correspondientes a la curva de rotación, los valores correspondientes de los coeficientes \tilde{C}_{2l} se pueden determinar por medio de la relación (4.22), obteniendo entonces un caso particular de (4.20) correspondiente a un modelo de galaxia específico, el cual puede ser escrito en términos de las constantes A_{2l} como

$$\frac{\mathcal{M}_d G}{a} + \frac{\mathcal{M}_h G}{4a} = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{l+1} (4l+1) A_{2k} I_{kl}}{4l(2l+1) q_{2l}(0)}; \quad (4.24)$$

sin embargo, esta relación no determina completamente los valores de \mathcal{M}_d y \mathcal{M}_h , solamente da una relación lineal entre ellas. Así, a fin de restringir los valores permitidos de estas masas, es necesario analizar el comportamiento de algunas otras cantidades que caracterizan al modelo.

Como ya se estudio en el capítulo anterior, la estabilidad del modelo se analiza a partir del comportamiento de la frecuencia epicíclica, $\kappa^2(R)$, y la frecuencia vertical, $\nu^2(R)$. Esas dos cantidades deben ser positivas a fin de tener órbitas circularmente estables. Ahora, usando (4.21) en (3.13), la frecuencia epicíclica se puede escribir apropiadamente como

$$\tilde{\kappa}^2(\tilde{R}) = \sum_{l=1}^n 2(l+1)A_{2l}\tilde{R}^{2l-2}, \quad (4.25)$$

donde $\tilde{\kappa} = a\kappa$. Notemos que la frecuencia epicíclica está completamente determinada por el conjunto de constantes A_{2l} , las cuales se fijan por el ajuste numérico de la curva de rotación, entonces no hay parámetros libres necesarios para encontrar una relación entre las masas del disco y del halo, que puedan ser ajustados requiriendo estabilidad radial.

Por otro lado, usando la ecuación de Poisson (4.3), la expresión (4.13) para la densidad del halo y la expresión (4.21) para la velocidad circular, la frecuencia vertical se puede escribir como

$$\tilde{\nu}^2(\tilde{R}) = \frac{9\pi G\mathcal{M}_h}{8a} - f_1(\tilde{R}), \quad (4.26)$$

donde $\tilde{\nu} = a\nu$ y

$$f_1(\tilde{R}) = \sum_{l=1}^n 2lA_{2l}\tilde{R}^{2l-2}. \quad (4.27)$$

Así, como $\tilde{\nu}^2$ debe ser positiva en cualquier lugar en el intervalo $0 \leq \tilde{R} \leq 1$ a fin de tener estabilidad vertical, las expresiones (4.26) define un límite inferior para la masa del halo,

$$\mathcal{M}_h \geq \mathcal{M}_h^- = \frac{8a}{9\pi G} \left\{ \text{máx } f_1(\tilde{R}) \right\}, \quad (4.28)$$

que combinado con (4.24) da también un límite superior para la masa del disco \mathcal{M}_d .

También es necesario considerar el comportamiento de la densidad superficial de masa, como dada por la expresión (3.2), la cual, en términos de las

constantes A_{2l} puede ser escrita como

$$\Sigma(\tilde{R}) = \frac{\sqrt{1 - \tilde{R}^2}}{\pi^2 a G} \left\{ f_2(\tilde{R}) - \frac{3\pi G \mathcal{M}_h}{8a} \right\}, \quad (4.29)$$

De acuerdo con esto, con el fin de que la densidad superficial de masa sea positiva en cualquier lugar sobre el disco, la expresión (4.29) define un límite superior para la masas del halo,

$$\mathcal{M}_h \leq \mathcal{M}_h^+ = \frac{8a}{3\pi G} \left\{ \text{mín } f_2(\tilde{R}) \right\}, \quad (4.30)$$

que combinada con (4.24) da también un límite inferior para la masa del disco \mathcal{M}_d . Sin embargo, a fin de que los modelos tengan sentido, debemos tener que

$$\mathcal{M}_h^+ \geq \mathcal{M}_h^-, \quad (4.31)$$

lo cual debe ser comprobado para cada conjunto de constantes correspondientes a cualquier modelo particular.

SECCIÓN 4.4

Ajuste de los Datos al Modelo

Con el fin de analizar la compatibilidad que tiene el modelo con los datos de la curva de rotación de alguna galaxia real, se escoge el mismo conjunto de datos de las galaxias del Cluster de La Osa Mayor, reportado por [1] y analizado en el capítulo 3. Aprovechando que la expresión que se utilizó para hacer el ajuste de la muestra de galaxias por medio del modelo de disco máximo (3.4), tiene la misma forma que la expresión (4.21), entonces se puede garantizar que el número de parámetros y el valor de los parámetros A_{2l} necesarios para hacer el ajuste del modelo de disco - halo, son las mismas que se obtuvieron para hacer el ajuste del modelo de disco máximo.

Así, de las 26 galaxias que pasaron el test estadístico, se escogen solamente las 16 que, además de tener curvas de rotación y densidad superficial de masa bien comportada, son radialmente estables. Luego, para cada una de ellas, se procede a determinar los valores mínimo y máximo para la masa del halo usando las expresiones (4.28) y (4.30). Finalmente, se comprueba si estos

Cuadro 4.1: Constantes A_{2l} (km^2s^{-2}).

NGC4389	
A_2	$30087,0 \pm 2489,3$
A_4	$-57552,0 \pm 16144,7$
A_6	$67317,2 \pm 30484,7$
A_8	$-27760,5 \pm 16936,1$

Cuadro 4.2: Masa del Halo \mathcal{M}_h y Masa del Disco \mathcal{M}_d en ($10^{10}M_\odot$).

	Masa Mínima	Masa Máxima
\mathcal{M}_h	$2,17 \pm 0,18$	$2,23 \pm 1,33$
\mathcal{M}_d	$0,024 \pm 0,002$	$0,038 \pm 0,012$

dos valores para la masa del halo están en acuerdo con la condición (4.31) a fin de que los modelos tengan sentido. Sin embargo, cuando se comprueba la consistencia del ajuste, se encuentra que solamente el ajuste hecho a la galaxia NGC4389 satisface estas condiciones, mientras que para todas las demás galaxias se encuentra que $\mathcal{M}_h^+ < \mathcal{M}_h^-$.

En el Cuadro 4.1 se presenta los valores de los parámetros A_{2l} obtenidos por medio del ajuste numérico con los datos observados de la curva de rotación para la galaxia NGC4389. En el Cuadro 4.2 también se muestra los valores mínimo y máximo de la masa del halo. Luego, a partir de la relación

$$\mathcal{M}_h + 4\mathcal{M}_d = 5,7255 \times 10^{34} \text{ kg}, \quad (4.32)$$

se calculan los valores mínimo y máximo de la masa del disco \mathcal{M}_d .

En la Figura 4.1, se muestra la curva de rotación para la galaxia NGC4389. Los puntos con barra de error son las observaciones como reportadas en [1], mientras que la línea sólida es la curva de rotación determinada a partir de (4.21) para $n = 4$, y los parámetros A_{2l} obtenidos por medio del mejor ajuste. Como se puede ver, el comportamiento de la curva de rotación se ajusta de forma muy precisa con los datos. También se grafica, en la Figura 4.2, la frecuencia epicíclica, la cual siempre es positiva en cualquier lugar del intervalo, lo cual indica que siempre permanece radialmente estable.

En la Figura 4.3 se presenta la frecuencia vertical. La línea sólida representa el comportamiento de la frecuencia vertical para el mínimo valor de la masa

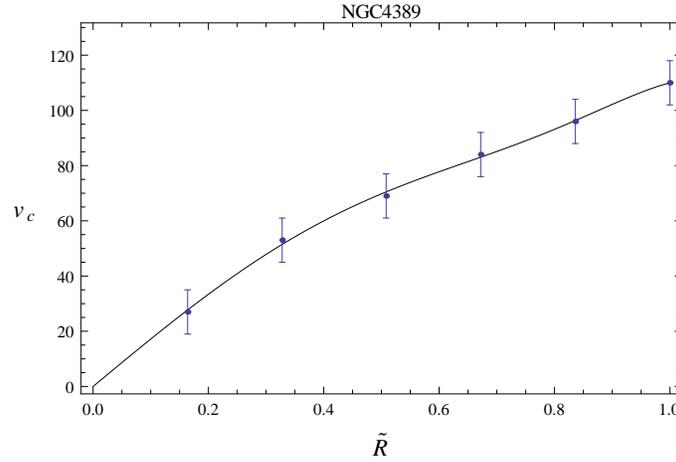


Figura 4.1: Gráfica de la velocidad circular en km/s. Los puntos con barra de error son las observaciones como reportadas en [1], mientras que la línea sólida es la curva de rotación determinada a partir de (4.28) para $n = 4$, y los parámetros A2l obtenidos por medio del mejor ajuste

del halo \mathcal{M}_h^- , mientras que en línea a trazos se muestra el comportamiento de la frecuencia vertical para el máximo valor de la masa del halo \mathcal{M}_h^+ . Como se puede ver, para esta galaxia se encuentra que la frecuencia vertical, para ambos valores de la masa del halo, es positiva en toda la extensión, de manera que el modelo es estable contra perturbaciones verticales.

Finalmente, en la Figura 4.4, se presenta la gráfica de la densidad superficial de masa para los mismos valores de la masa del halo. La línea sólida representa la densidad superficial de masa para el mínimo valor de la masa del halo, mientras que la línea a trazos representa la densidad superficial de masa para el valor máximo de la masa del halo. Para esta galaxia, la densidad tiene un máximo en el centro del disco y luego decrece como \tilde{R} crece, desapareciendo en el borde del disco.

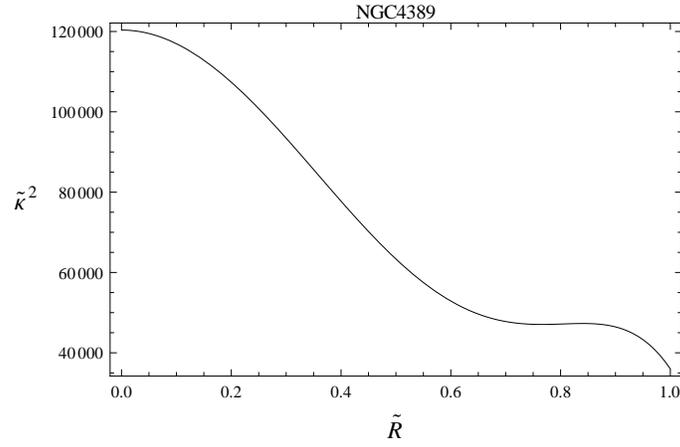


Figura 4.2: Gráfica de la frecuencia epicíclica en $(\text{km/s})^2$. Notemos que siempre es positiva en cualquier lugar del intervalo, lo cual indica que es radialmente estable.

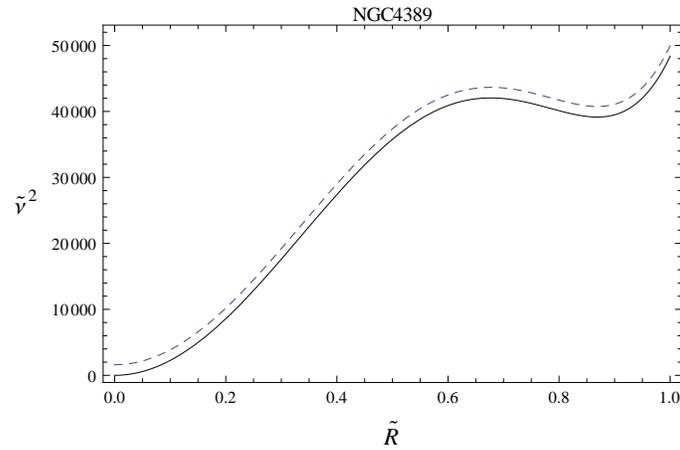


Figura 4.3: Gráfica de la frecuencia vertical en $(\text{km/s})^2$. La línea sólida representa el comportamiento de la frecuencia vertical para el valor mínimo de la masa del halo. La línea a trazos representa el comportamiento de la frecuencia vertical cuando se toma el valor máximo de la masa del halo.

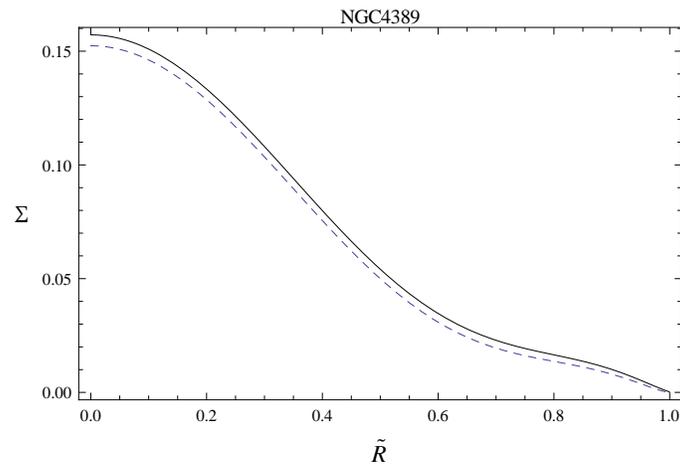


Figura 4.4: Gráfica de la densidad superficial de masas en (kg/m^2). La línea sólida representa el comportamiento de la densidad superficial para el valor mínimo de la masa del halo. La línea a trazos representa el comportamiento de la densidad superficial cuando se toma el valor máximo de la masa del halo.

CONCLUSIONES

Es el momento de exponer los aspectos mas importantes que se estudiaron, descubrieron y formularon a lo largo de la investigación que dio como fruto esta tesis.

Nosotros presentamos en el capítulo 2, una familia infinita de discos delgados finitos axialmente simétricos obtenidos por medio de una particularización del método de Hunter. Los modelos de discos obtenidos son una generalización del bien conocido disco de Kalnajs, el cual corresponde al primer miembro de la familia. La particularización del modelo de Hunter fue obtenida requiriendo que la densidad superficial de masa fuera una función monótonamente decreciente del radio, con un máximo en el centro del disco y desapareciendo en el borde, de tal manera que la distribución de masa de los miembros superiores de la familia estaba más concentrada en el centro. También analizamos la curva de rotación de los modelos y encontramos para el primer miembro de la familia, el disco de Kalnajs, una velocidad circular proporcional al radio, representando así un disco uniformemente rotante, mientras que para los otros miembros de la familia la velocidad circular aumenta desde un valor cero en el centro del disco hasta alcanzar un máximo en un radio crítico y luego decrece a un valor finito en el borde del disco. También encontramos que el valor del radio crítico decrece como el valor de m crece.

En el capítulo 3 presentamos la formulación de la hipótesis del disco máximo para 26 galaxias espirales en el Cluster de la Osa Mayor. Encontramos que el conjunto de galaxias modeladas por medio de esta hipótesis, ajustaron de forma muy precisa con los datos observacionales de la curva de rotación de las galaxias de la muestra. Esto sugiere que no siempre es necesario introducir halos de materia oscura a fin de describir apropiadamente la curva de rotación de las galaxias espirales. En todos los casos el mejor ajuste entre los datos y el modelo se fijó a un 95 % de nivel de confianza. Estos mo-

delos presentan densidades de masa bien comportadas (similar al perfil de luminosidad de muchas galaxias espirales) y los valores obtenidos para la correspondiente masa total \mathcal{M} están dentro del orden de magnitud esperado para dicha magnitud. En consecuencia, las expresiones aquí obtenidas para la velocidad circular, ecuación (3.4), puede ser considerada como una especie de “curva de rotación universal” para galaxias planas, la cual puede fácilmente ser ajustada a los datos observados para una galaxia en particular.

Por otro lado, el análisis de la frecuencia epicíclica reveló que 17 galaxias de la muestra presentan pequeñas regiones de inestabilidad radial cerca del borde del disco. Sin embargo, tal como lo predice la expresión (3.15), la inestabilidad radial depende solamente de los parámetros del ajuste A_{2n} , de manera que con el fin de resolver este inconveniente, analizamos la frecuencia radial para todos los posibles valores de m distintos a los obtenidos por medio del mejor ajuste, pero que mantengan el nivel de confianza del ajuste al 95 %, y así, logramos que 7 de éstas galaxias presentaran estabilidad contra perturbaciones radiales.

Los modelos construidos para las galaxias mencionadas, presentan una región central con fuertes inestabilidades ante perturbaciones verticales. Este resultado era de esperarse debido al hecho de que los modelos solo consideran el disco galáctico. De hecho, como podemos inferir a partir de la expresión 3.14, la inestabilidad vertical siempre estará presente en modelos construidos a partir de soluciones de la ecuación de Laplace y ajustadas de tal forma que sus velocidades circulares reproduzcan el comportamiento observado, es decir, una proporcionalidad directa con el radio.

Por lo tanto, modelos más realistas deben considerar el carácter no delgado del disco galáctico, o la contribución de un halo esférico. Creemos que los valores de \mathcal{M} que fueron obtenidos para las 26 galaxias estudiadas, pueden considerarse como un estimativo bastante preciso de su cota superior de masa, ya que el modelo está apoyado en el hecho de que toda la masa está concentrada en el disco galáctico.

En el capítulo 4, presentamos una familia de potenciales analíticos para galaxias planas con halos esferoidales caracterizados por tener una relación lineal entre la masa del halo y la masa del disco. Los modelos son estables contra perturbaciones radiales y verticales y sus velocidades circulares pueden ser ajustadas de forma muy aproximada a la curva de rotación de alguna galaxia específica.

Los modelos aquí presentados son una generalización de los modelos presentados en [37], donde solamente se consideró un disco galáctico. La generalización fue obtenida adicionando al potencial gravitacional del disco el potencial gravitacional correspondiente al halo esferoidal, de tal manera que se pudo resolver el problema de inestabilidad vertical presentado en el capítulo 3.

Un modelo particular se obtuvo mediante el ajuste numérico de la expresión general para la velocidad circular con los datos observados de la curva de rotación de la galaxia NGC4389. Para esta galaxia obtuvimos un ajuste numérico bastante preciso con la curva de rotación y, a partir de los parámetros A_{2l} obtenidos con el ajuste numérico, calculamos los valores de la masa del halo y la masa del disco

Sin embargo, aunque probamos la aplicabilidad del modelo con todas las galaxias reportadas por [1], modelos consistentes solo fue obtenido para una sola galaxia NGC4389, mientras que para las otras galaxias fueron obtenidos modelos con valores de la masa del halo tal que $\mathcal{M}_h^+ < \mathcal{M}_h^-$. Ahora, puede ser considerado que este resultado ocurre como consecuencia de que se escogió el halo más simple. En efecto, como podemos ver de las expresiones (4.11) y (4.12), solamente un término del potencial gravitacional del halo contribuye a su densidad, lo que deja solamente un parámetro libre a determinar a fin de ajustar el modelo a las condiciones de consistencia impuestas.

Los principales resultados de esta tesis se han divulgado a través de una serie de 3 artículos, de los cuales uno de ellos ya ha sido publicado, otro ha sido revisado por los evaluadores, y ellos han sugerido hacer algunos cambios para su posterior publicación y el final se encuentra en preparación.

- Guillermo A. Gonzalez and Jerson I. Reina. An Infinite Family of Generalized Kalnajs Disks. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 371:1873–1876, 2006.
- Guillermo A. González, J. Ibáñez and Jerson I. Reina. Analytical potentials for flat galaxies with spheroidal halos. submitted to *New Astronomy*
- Guillermo A. González, Jerson I. Reina and Fernando Quiñonez. Analytical Mass Models to a Sample of Galaxies in the Ursa Major Cluster. En Preparación

Así mismo, varios resultados han sido expuestos en algunos eventos

- Ponencia. XXIV Congreso Nacional de Física. Título: Modelos Relativistas de Discos Finitos Delgados para Cuatro Galaxias del Cluster de la Osa Mayor. Octubre 2011. Bogotá, Colombia.
- Ponencia. Tercer Taller de Relatividad y Gravitación. Título: Una Familia Infinita de los Discos Generalizados de Kalnajs. Noviembre 2006. Isla Coche, Venezuela.

A

Valores de las constantes $C_{2n}[km^2/s^2]$ obtenidas por el mejor ajuste

	NGC3726	NGC3877	NGC3917
m	7	6	7
C_0	16009.9 ± 8841.7	1755.5 ± 2643.9	11376.5 ± 2427.2
C_2	25763.0 ± 6894.5	26696.0 ± 2148.2	17300.0 ± 1946.5
C_4	16241.8 ± 4970.8	13960.8 ± 1418.9	8981.3 ± 1310.3
C_6	12510.7 ± 2301.9	7443.5 ± 579.6	4572.9 ± 587.7
C_8	10495.8 ± 774.7	3938.26 ± 159.64	2190.76 ± 195.60
C_{10}	6662.15 ± 182.66	1854.80 ± 27.48	1055.87 ± 46.11
C_{12}	4649.38 ± 27.49	540.78 ± 2.36	626.81 ± 6.97
C_{14}	2460.97 ± 2.05		246.54 ± 0.52
	NGC3949	NGC3953	NGC3972
m	6	6	6
C_0	17335.5 ± 2052.82	31237.5 ± 10660.1	10233.20 ± 1536.95
C_2	24663.8 ± 1709.1	48537.4 ± 8903.5	13839.2 ± 1285.8
C_4	12145.7 ± 1054.6	27895.6 ± 5435.3	5377.34 ± 781.57
C_6	7987.6 ± 409.9	17323.9 ± 2115.9	2989.12 ± 302.16
C_8	4143.26 ± 111.31	9537.74 ± 579.83	1782.92 ± 81.91
C_{10}	2209.52 ± 19.35	5608.93 ± 101.46	1058.89 ± 14.21
C_{12}	1236.48 ± 1.68	2799.29 ± 8.83	493.71 ± 1.23

	NGC4010	NGC4085	NGC4088
m	6	5	7
C_0	9172.97 ± 3722.18	10629.7 ± 86.7	18812.6 ± 7060.2
C_2	12969.5 ± 3085.3	14859.90 ± 74.07	30409.4 ± 5657.5
C_4	4788.79 ± 1929.15	5970.22 ± 42.79	21300.3 ± 3809.6
C_6	1278.83 ± 755.34	$2189.29 \pm 14.0.3$	16026.3 ± 1724.8
C_8	782.60 ± 205.14	226.77 ± 2.80	9768.51 ± 575.88
C_{10}	1162.33 ± 35.45	-222.52 ± 0.28	6248.54 ± 135.79
C_{12}	666.31 ± 3.06		3649.31 ± 20.54
C_{14}			846.52 ± 1.54
	NGC4100	NGC4157	NGC4183
m	11	8	8
C_0	18295.4 ± 2879.5	22611.2 ± 13543.7	7784.60 ± 4874.35
C_2	33700.1 ± 2106.8	36542.3 ± 10330.7	12261.1 ± 3728.7
C_4	26585.90 ± 1633.84	26514.10 ± 7684.27	7939.49 ± 2756.33
C_6	18870.30 ± 957.27	22312.4 ± 3896.4	5687.65 ± 1393.43
C_8	13365.40 ± 473.25	17330.4 ± 1509.0	3780.7 ± 539.7
C_{10}	9053.86 ± 195.24	13790.01 ± 438.35	2720.46 ± 156.82
C_{12}	5336.01 ± 66.03	9112.41 ± 90.90	1677.83 ± 32.51
C_{14}	3333.74 ± 17.85	6066.51 ± 12.13	1288.77 ± 4.34
C_{16}	2227.11 ± 3.71	3143.08 ± 0.80	775.31 ± 0.29
C_{18}	466.17 ± 0.56		
C_{20}	39.000 ± 0.003		
C_{22}	-346.71 ± 0.05		
	NGC4217	NGC4389	UGC6399
m	8	4	6
C_0	21284.1 ± 6445.1	5638.36 ± 7825.18	4422.58 ± 193.19
C_2	34763.6 ± 4996.3	6431.37 ± 6686.24	6069.45 ± 166.24
C_4	23185.5 ± 3591.8	1170.86 ± 3949.43	2405.43 ± 104.02
C_6	15182.8 ± 1779.8	538.56 ± 3949.43	1049.56 ± 40.54
C_8	9590.53 ± 682.73	160.70 ± 98.04	349.84 ± 10.99
C_{10}	7471.16 ± 197.72		235.64 ± 1.90
C_{12}	5101.2 ± 41.0		176.79 ± 0.16
C_{14}	3514.80 ± 5.48		
C_{16}	1771.08 ± 0.36		
	UGC6446	UGC6667	UGC6818
m	8	8	6
C_0	4717.08 ± 2964.13	3433.10 ± 1059.35	2819.11 ± 1498.49
C_2	6619.21 ± 2253.93	5623.37 ± 843.24	3462.67 ± 1231.46
C_4	3385.34 ± 1693.72	2626.65 ± 570.67	687.04 ± 791.07
C_6	2335.25 ± 849.31	500.23 ± 272.06	-103.66 ± 309.71
C_8	1361.56 ± 326.45	635.99 ± 102.82	-52.92 ± 83.93
C_{10}	1142.27 ± 94.52	133.47 ± 29.73	300.78 ± 14.53
C_{12}	700.69 ± 19.58	22.83 ± 6.19	206.56 ± 1.26
C_{14}	693.49 ± 2.61	399.50 ± 0.83	
C_{16}	625.54 ± 0.17	-62.00 ± 0.05	

	UGC6917	UGC6923	UGC6930
m	7	3	6
C_0	6817.49 ± 2827.27	3643.81 ± 3385.88	7138.06 ± 2053.24
C_2	9872.18 ± 2247.10	5050.79 ± 3136.25	11148.6 ± 1673.2
C_4	4747.13 ± 1550.73	1848.4 ± 1264.4	6259.85 ± 1078.51
C_6	2679.53 ± 695.11	441.42 ± 171.24	3852.20 ± 476.19
C_8	1432.15 ± 230.35	2831.9 ± 18012.4	2757.99 ± 158.01
C_{10}	586.12 ± 54.17		1241.35 ± 5.67
C_{12}	386.02 ± 8.19		493.56 ± 0.43
C_{14}	244.96 ± 0.61		
	UGC6962	UGC6969	UGC6973
m	5	4	7
C_0	14703.70 ± 70.36	2581.43 ± 11011.10	18992.0 ± 11644.7
C_2	19237.60 ± 60.21	3060.25 ± 9391.91	30669.5 ± 9338.3
C_4	6566.63 ± 34.57	379.40 ± 5581.83	19946.6 ± 6281.2
C_6	2876.26 ± 11.18	371.72 ± 1363.41	15086.20 ± 2828.47
C_8	1605.40 ± 2.26	201.15 ± 140.05	11701.9 ± 943.9
C_{10}	761.86 ± 0.23		7538.67 ± 222.53
C_{12}			5230.59 ± 33.62
C_{14}			2576.66 ± 2.52
	UGC6983	UGC7089	
m	9	7	
C_0	7449.42 ± 4350.24	3262.94 ± 1169.42	
C_2	11569.70 ± 3213.94	4286.84 ± 932.78	
C_4	6962.65 ± 2516.34	1471.84 ± 637.70	
C_6	4434.89 ± 1368.96	649.82 ± 285.19	
C_8	2800.37 ± 589.07	282.10 ± 94.8	
C_{10}	2349.54 ± 198.74	206.46 ± 22.37	
C_{12}	1742.34 ± 50.98	256.09 ± 3.39	
C_{14}	1051.95 ± 9.40	129.85 ± 0.25	
C_{16}	361.66 ± 1.12		
C_{18}	-89.63 ± 0.07		

REFERENCIAS

- [1] V. C. Rubin y W. K. Ford. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. *ApJ.*, 159:379–403, 1970.
- [2] Y. Sofue y V. C. Rubin. Rotation Curves of Spiral Galaxies. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 39:137–174, 2001.
- [3] V. C. Rubin, D. Burstein, W. K. Ford y N. Thonnard. Rotation Velocities of 16 SA Galaxies and a Comparison of Sa, Sb, and SC Rotation Properties. *Astrophysical Journal*, 289:81–98, February 1985.
- [4] J. Binney y S. Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 2 edition, 2008.
- [5] A. Pierens y J. M. Huré. Rotation Curves of Galactic Disks for Arbitrary Surface Density Profiles: A Simple and Efficient Recipe. *ApJ*, 605:179–182, April 10 2004.
- [6] T. S. van Albada, R. Sancisi, M. Petrou y R. J. Tayler. Dark matter in spiral galaxies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 320(1556):447–464, 1986.
- [7] M. Honma y Y. Sofue. Mass of the Galaxy Inferred From Outer Rotation Curve. *Publ.Astron.Soc.Jap.Lett.*, 1997.
- [8] E. Noordermeer, J. M. van der Hulst, R. Sancisi, R. S. Swaters y T. S. van Albada. The Mass Distribution in Early-Type Disk Galaxies: Declining Rotation Curves and Correlations with Optical Properties. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 376:1513–1546, 2007.
- [9] F. LeBlanc. *An Introduction to Stellar Astrophysics*. Wiley, 1 edition, 2010.

-
- [10] Tristan Faber. Galactic halos and gravastars: Static spherically symmetric spacetimes in modern general relativity and astrophysics. 2006. Tesis de Maestría (Director: Prof. Matt Visser).
- [11] R. Schodel, T. Ott, R. Genzel, R. Hofmann y M. Lehnert. A Star in a 15.2 year orbit around the supermassive black hole at the center of the Milky Way. *Nature*, pages 694–696, 2002.
- [12] V. C. Rubin, N. Thonnard y W. K. Ford. Extended Rotation Curves of High-Luminosity Spiral Galaxies. IV - Systematic Dynamical Properties, SA Through SC. *ApJ*, 225:L107–L111, November 1978.
- [13] V. C. Rubin, N. Thonnard y K. Ford. Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 $R=4$ kpc to UGC 2885 $R=122$ kpc. *Astrophysical Journal, part 1*, 238:471–487, June 1 1980.
- [14] V. C. Rubin, W. K. Ford, N. Thonnard, y D. Burstein. Rotational Properties of 23 SB Galaxies. *ApJ*, 261:439–456, October 1982.
- [15] A. J. Kalnajs. Halos and disk stability. In J. Kormendy and G. R. Knapp, editors, *Dark Matter in the Universe*, volume 117 of *IAU Symposium*, pages 289–296, 1987.
- [16] S. M. Kent. Dark Matter in Spiral Galaxies. I - Galaxies with Optical Rotation Curves. *Astronomical Journal*, 91:1301–1327, June 1986.
- [17] S. M. Kent. Dark matter in spiral galaxies. III - The SA galaxies. *ApJ*, 96:514–527, August 1988.
- [18] E. Athanassoula, A. Bosma y S. Papaioannou. Halo Parameters of Spiral Galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, 179:23–40, June 1987.
- [19] J. A. Sellwood y N. W. Evans. The Stability of Disks in Cusped Potentials. *ApJ.*, 546:176–188, 2001.
- [20] J. P. Ostriker y P. J. Peebles. A Numerical Study of the Stability of Flattened Galaxies: or, can Cold Galaxies Survive? *ApJ*, 186:467–480, December 1973.
- [21] K. G. Begeman. H I Rotation Curves of Spiral Galaxies. I - NGC 3198. *Astronomy and Astrophysics*, 223:47–60, October 1989.
- [22] P. Palunas y T. B. Williams. Maximum Disk Mass Models for Spiral Galaxies. *Astron.J.*, 120:2284–2903, 2000.

-
- [23] B. J. Weiner, J. A. Sellwood y T. B. Williams. The Disk and Dark Halo Mass of the Barred Galaxy NGC 4123. II. Fluid-Dynamical Models. *ApJ*, 546:931–951, January 2001.
- [24] R. A. Swaters, R. Sancisi, T. S. van Albada y J. M. van der Hulst. Are Dwarf Galaxies Dominated by Dark Matter? *ApJ.*, 729:118, 2011.
- [25] D. H. Rogstad y G. S. Shostak. Gross Properties of Five Scd Galaxies as Determined from 21-cm Observations. *ApJ*, 176:315, September 1972.
- [26] M. S. Roberts y R. N. Whitehurst. The Rotation Curve and Geometry of M31 at Large Galactocentric Distances. *ApJ*, 201:327–346, October 1975.
- [27] A. Bosma. 21-cm line studies of spiral galaxies. II. The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types. *Astron. J.*, 86:1825–1846, December 1981.
- [28] J. C. Brandt y M. J. Belton. On the Distribution of Mass in Galaxies. III. Surface Densities. *ApJ*, 136:352, September 1962.
- [29] G. A. Gonzalez y J. I. Reina. An Infinite Family of Generalized Kalnajs Disks. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 371:1873–1876, 2006.
- [30] A. J. Kalnajs. The Equilibria and Oscillations of a Family of Uniformly Rotating Stellar Disks. *ApJ*, 175:63, July 1972.
- [31] J. F. Pedraza, J. Ramos-Caro y G. A. Gonzalez. An Infinite Family of Self-consistent Models for Axisymmetric Flat Galaxies. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 390:1587–1597, 2008. Submitted to MNRAS.
- [32] A. Toomre. On the Distribution of Matter Within Highly Flattened Galaxies. *ApJ*, 138:385, August 1963.
- [33] A. Toomre. On the Gravitational Stability of a Disk of Stars. *ApJ*, 139:1217–1238, May 1964.
- [34] C. Hunter. The Structure and Stability of Self-Gravitating Disks. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 126:299, 1963.
- [35] J. Ramos-Caro, F. Lopez-Suspes y G. A. Gonzalez. Chaotic and Regular Motion Around Generalized Kalnajs discs. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 386:440–446, 2008.

-
- [36] G. A. Gonzalez, S. M. Plata-Plata y J. Ramos-Caro. Finite Thin Disc Models of Four Galaxies in the Ursa Major Cluster: NGC3877, NGC3917, NGC3949 and NGC4010. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 404:468–474, 2010.
- [37] M. A. W. Verheijen y R. Sancisi. The Ursa Major Cluster of Galaxies. IV. HI Synthesis Observations. *Astronomy and Astrophysics*, 370:765–867, May 2001.
- [38] C. Hunter. Determination of the Distribution Function of an Elliptical Galaxy. *Astronomical Journal*, 80:783, October 1975.
- [39] H. Bateman. *Higher Transcendental Functions*. McGraw Hill, 1953.
- [40] P. S. Letelier y S. R. Oliveira. Exact self-gravitating disks and rings: A solitonic approach. *J. Math. Physics*, 28(1):165–170, 1987.
- [41] R. Brun y F. Rademakers. ROOT: An Object Oriented Data Analysis Framework. *Nucl. Instrum. Meth.*, A389:81–86, 1997.
- [42] P. R. Bevington y D. K. Robinson. *Data Reduction and Error Analysis*. McGraw Hill, 3 edition, 2003.
- [43] H. Lamb. *Hydrodynamics*. Dover, 6 edition, 1945.
- [44] G. Arfken y H. Weber. *Mathematical Methods for Physicist*. Academic Press, 6 edition, 2005.