

**ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS TÉCNICAS DE ENMALLADO EMPLEADAS
EN SIMULACIÓN DE YACIMIENTOS**

**ELKIN RODOLFO SANTAFÉ RANGEL
LUIS ENELSO SIERRA SUÁREZ**

**Trabajo de Grado para optar al título de
Ingeniero de Petróleos**

Directores,

**OLGA PATRICIA ORTIZ
MSc. Ing. Química UIS**

**CARLOS CESAR PIEDRAHITA ESCOBAR
PhD. Matemática Aplicada ECOPETROL ICP**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER UIS
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISCOQUÍMICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE PETRÓLEOS
BUCARAMANGA
2004**

*A mis Padres,
Rodolfo y Rosalba.*

ELKIN

*A la memoria de mi padre José Ángel,
a mis hermanos Benedicto y Hernando,
a mi esposa Ana.*

LUIS ENELSO

AGRADECIMIENTOS

A Dios, que al manifestarse por medio de todas aquellas personas que de alguna u otra manera hicieron posible nuestra formación no solo como profesionales sino como personas.

Al Instituto Colombiano del Petróleo ICP-ECOPETROL por brindarnos la oportunidad de desarrollar esta investigación y por fomentar el desarrollo del conocimiento.

A la Ingeniera Olga Patricia Ortíz y al Doctor Carlos Piedrahita por creer en nosotros y apoyarnos incondicionalmente durante todo este proceso.

A la Doctora Zuly Calderón por su apoyo.

A los miembros de Bienestar Universitario UIS por el apoyo brindado durante nuestra vida universitaria.

A todos aquellos amigos y compañeros que fortalecieron nuestro espíritu y nos llenaron de razones para seguir adelante.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	20
1. GENERALIDADES	22
1.1 BREVE ESTADO DEL ARTE DE SIMULACIÓN DE YACIMIENTOS	22
1.2 SIMULACIÓN EN YACIMIENTOS PETROLÍFEROS	23
1.2.1 Utilidad de la simulación	24
1.2.2 Planeación de un estudio de simulación	25
1.2.3 Funcionamiento de un modelo	26
1.2.4 Información requerida para utilizar un simulador	27
2. FORMULACIÓN DE LAS ECUACIONES DE FLUJO	28
2.1 FORMULACIÓN DIFERENCIAL	28
2.1.1 Definiciones	28
2.1.2 Ley de conservación de la masa	29
2.1.3 Ley de conservación del momentum	32
2.1.4 Ecuaciones básicas de flujo	33
2.2 FORMULACIÓN INTEGRAL	34
2.2.1 Ecuaciones de balance molar	34
2.3 FORMULACIÓN VARIACIONAL	38
2.3.1 Modificación de la ecuación general de flujo	40
2.3.2 Aplicación del método Galerkin	43
3. DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE FLUJO	46
3.1 DISCRETIZACIÓN DEL ESPACIO Y DEL TIEMPO	47
3.2 LINEALIZACIÓN	48
3.3 APROXIMACIONES PARA LA DISCRETIZACIÓN DEL ESPACIO	49
3.3.1 La serie de Taylor y las diferencias finitas	50
3.3.2 Formulación integral y técnica de volumen finito	52

3.3.3 Método de elementos finitos	54
3.3.4 Comparación	55
3.3.5 Transmisibilidad positiva	57
3.3.6 Propiedades de la matriz	57
3.4 DISCRETIZACIÓN POR VOLUMEN FINITO EN UNA MALLA GENERAL	57
3.5 TRANSMISIBILIDAD	64
3.6 CONDICIONES DE FRONTERA	66
3.6.1 Condiciones de frontera Dirichlet	66
3.6.2 Condiciones de frontera Neumann	67
3.7 MEDIO ANISOTRÓPICO	68
4. ERROR NUMÉRICO	72
4.1 ERROR DE DISCRETIZACIÓN	72
4.2 DISPERSIÓN NUMÉRICA	74
5. IMPACTO DEL TAMAÑO DE LA CELDA Y LOS PASOS DE TIEMPO EN LA SIMULACIÓN DE YACIMIENTOS	79
5.1 CRITERIOS PARA SELECCIONAR EL TAMAÑO DE LA CELDA	79
5.2 SELECCIÓN DEL TAMAÑO DE LAS CELDAS	80
5.2.1 Localización de los niveles de presión y saturación	80
5.2.2 Representación de la geometría, geología y propiedades físicas	81
5.2.3 Representación del comportamiento dinámico de la saturación y la presión	83
5.2.4 Efecto del tamaño de la celda en el cálculo de la presión y productividad	84
5.2.5 Efecto del tamaño de la celda en el cálculo de la eficiencia de desplazamiento: dispersión numérica.	86
5.2.5.1 Distribución de saturación areal	87
5.2.5.2 Distribución de saturación vertical	90
5.2.6 Tamaño de celdas en geometrías radiales	93
5.2.7 Tamaño de celda variable	95
5.2.8 Comprobando la sensibilidad al tamaño de la celda	95

5.3 SELECCIÓN DEL PASO DE TIEMPO	96
5.3.1 Control de entrada y salida de datos en el simulador	96
5.3.2 Consecuencias de un intervalo de tiempo sin restricciones	97
5.3.3 Selección automática del intervalo de tiempo	98
5.3.4 Selección de los intervalos de tiempo al iniciar la simulación	99
5.3.5 Comparación de los intervalos de tiempo empleados en formulaciones explícitas e implícitas	101
5.3.6 Verificando tamaños de intervalo de tiempo aceptables	101
5.4 LIMITANDO LA DISPERSIÓN NUMÉRICA	102
5.4.1 Ponderación de la movilidad	102
5.4.2 Pseudofunciones	103
5.4.3 Cálculo de velocidades frontales	104
5.4.4 Métodos de solución alternativos	104
6. CONSTRUCCIÓN DE LA MALLA	105
6.1 TEORÍA DE GENERACIÓN DE MALLAS	105
6.1.1 Importancia de la generación de mallas	109
6.1.2 Procedimiento para generar una malla en el plano	111
6.1.3 Planteamiento del problema en 2D	111
6.1.4 Métodos de generación de mallas	114
6.1.4.1 Interpolación transfinita	114
6.1.4.2 Generación variacional continua	115
6.1.4.3 Generación variacional discreta	116
6.2 TIPOS DE MALLAS	117
6.2.1 De acuerdo al sistema coordenado	117
6.2.1.1 Malla cartesiana	117
6.2.1.2 Malla hexagonal	117
6.2.1.3 Malla radial	117
6.2.1.3.1 Malla curvilínea ortogonal	117
6.2.1.3.2 Malla stream tube (tubos de flujo)	118
6.2.1.4 Malla no rectangular	118

6.2.1.5 Malla basada en geometría punto esquina	118
6.2.1.6 Malla de bisección perpendicular	119
6.2.2 De acuerdo al modo de aplicación	119
6.2.2.1 Malla uniforme	119
6.2.2.2 Malla regular	119
6.2.2.3 Malla monotipo	119
6.2.2.4 Malla híbrida	121
6.2.2.5 Malla refinada	121
6.2.2.6 Mallas agrupadas	121
6.2.2.7 Malla adaptativa dinámica	121
6.2.2.8 Malla primaria	121
6.2.2.9 Malla secundaria	122
6.2.2.10 Malla verdaderamente refinada	122
6.3 MALLAS REPRESENTATIVAS	122
6.3.1 Malla Cartesiana	123
6.3.1.1 Distribución de los nodos: esquema de punto distribuido y punto centrado	123
6.3.1.2 Construcción de una malla cartesiana en 3D	125
6.3.1.3 Refinamiento de los bloques	128
6.3.1.4 Agrupamiento	135
6.3.1.5 Cálculo de las transmisibilidades en la interfase fina / gruesa de la malla	137
6.3.1.6 Efectos de la anisotropía y orientación de la malla	139
6.3.1.6.1 Método diferencial de nueve puntos	142
6.3.2 Mallas curvilíneas	143
6.3.2.1 Malla curvilínea ortogonal	148
6.3.2.2 Malla de tubos de flujo (Stream Tube)	149
6.3.2.3 Malla no rectangular	150
6.3.2.4 Geometría punto esquina	151
6.3.2.5 Sistema de coordenadas radial	154

6.3.3 Malla de bisección perpendicular	159
6.3.3.1 Construcción de la malla PEBI a partir de la triangulación Delaunay	161
6.3.3.2 Localización de los puntos de la malla	163
6.3.3.3 Construcción de los bloques de la malla	166
7 RESULTADOS	169
7.1 COMPARACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ENMALLADO ESTUDIADOS	169
7.2 SIMULACIÓN DE UN CASO DE LA LITERATURA	177
7.2.1 Descripción del modelo	177
7.2.2 Breve descripción de los simuladores empleados	181
7.2.3 Sistemas de enmallados construidos	184
7.2.4 Comportamiento del GOR y BHP de los pozos productores	201
7.2.5 Comportamiento para diferentes intervalos de tiempo	213
7.2.6 Tiempos de cómputo	214
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	
BIBÑIOGRAFIA	
ANEXO A CÁLCULO DE LA TRANSMISIBILIDAD EN CPG	
ANEXO B GENERACIÓN DE MALLAS PLANARES	
ANEXO C DATASET DE ECLIPSE y CMG. PARA EL CASO ESTUDIADO	

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Volumen de control alrededor de un nodo	34
Figura 2. Esquema del proceso de simulación numérica	49
Figura 3. Sistema de Bloque unidimensional	53
Figura 4. Funciones de Chapeau	55
Figura 5. Celda en 3D	58
Figura 6. Elemento de la malla y comunicación de superficies entre los bloques I y J	60
Figura 7. Aproximación de Δ en un caso general, un caso ortogonal y un caso de stream tube	62
Figura 8. Cálculo de la Transmisibilidad entre bloques	65
Figura 9. Sistema de bloques k – ortogonal	71
Figura 10. Empleo de un sistema de enmallado	81
Figura 11. Diseño del modelo influenciada por la geometría interna y Externa	82
Figura 12. Típica Malla areal modelando una región con celdas Grandes	85
Figura 13. Modelo de cuatro celdas para inyección de agua a) yacimiento hipotético y su distribución en un determinado tiempo en la inyección de agua y b) modelo de cuatro bloques y distribución de saturación de agua modelada.	86
Figura 14. Influencia del espaciamiento de la malla en la distribución de saturación calculada en un modelo lineal.	88
Figura 15. Influencia del espaciamiento de la malla en el cálculo del recobro de aceite de una línea de inyección de agua con una razón de movilidad favorable.	89
Figura 16. Influencia del espaciamiento vertical en la malla en el	91

comportamiento de un modelo de sección transversal. a) 4 bloque
verticales b) 10 bloques verticales.

Figura 17. Sistema de enmallado típico para modelado de pozos	94
Figura 18. Regiones Física y Lógica	108
Figura 19. Transformación del cuadrado unitario (U2) en una región irregular.	110
Figura 20. Malla sobre la región	112
Figura 21. Definición de fronteras	114
Figura 22. Malla doblada	115
Figura 23. Esquema de Punto Centrado (a) y Punto Distribuido (b)	124
Figura 24. Posición del nodo dentro de una malla construida con esquema de punto centrado (a) y punto distribuido (b)	126
Figura 25. Construcción de una malla cartesiana rectangular con el esquema de punto distribuido en el plano horizontal	126
Figura 26. Sección transversal del espesor de un yacimiento con una malla Cartesiana	126
Figura 27. Sección transversal de capas delgadas de un yacimiento con un tipo de malla por Tubos de Corriente (Stream Tube)	127
Figura 28. Modelo De malla de bloques convencional en 3D para Simulación de Yacimientos	128
Figura 29. Determinación de las sub-coordenadas	129
Figura 30. Máximo numero de vecinos en una Malla cartesiana Rectangular 3D con refinamiento	130
Figura 31. Malla Globalmente Refinada (a)y Malla Localmente Refinada (b)	131
Figura 32. Reglas de Refinamiento	132
Figura 33. Esquema de Refinamiento en Mallas Cartesianas Rectangulares	133
Figura 34. Refinamiento permitido y no permitido	136
Figura 35. Construcción de un sistema de bloques por agrupamiento y refinamiento de bloques	136

Figura 36. Interfaces correctas para el bloque en la malla refinada en 2D	138
Figura 37. Distorsión de las interfaces del bloque en una malla tridimensional. El bloque fundamental (izquierda) tiene un bloque vecino dividido en cuatro sub-bloques	138
Figura 38. Posible refinamiento no ortogonal por exageración de los Bloques	139
Figura 39. Efecto de la orientación de la malla	140
Figura 40. Sistema Cartesiano de bloques cuadrados Paralelos y diagonales	141
Figura 41. Bloque de una malla construida en un Sistema de Coordenadas Curvilíneo	146
Figura 42. Bloques para un sistema coordenado curvilíneo	149
Figura 43. Malla de Tubos de Corriente ortogonal y no ortogonal para un patrón de cinco puntos	150
Figura 44. Uso de Malla no rectangular para aproximar la malla por tubos de corriente	151
Figura 45. Malla construida con geometría punto esquina	152
Figura 46. Empalme incompleto de bloques en la malla	153
Figura 47. Malla construida con geometría punto esquina	154
Figura 48. Un bloque típico para un modelo de pozo en coordenadas $r - z$ (Aziz y Settari 1979)	155
Figura 49. Nube de puntos distribuida en el plano	161
Figura 50. Triangulación. Los triángulos deben ser lo más equiláteros Posible	162
Figura 51. Localización de los circuncentros.	162
Figura 52. Diagrama Voronoi final	163
Figura 53. Los ángulos θ .	164
Figura 54. Construcción del bloque de la malla para un punto interno y para un punto límite	167
Figura 55. Malla PEBI generada en ECLIPSE OFFICE v. 2001 A en donde	168

se aprecia la distribución del error de dispersión numérica	
Figura 56. Sistema de enmallado del yacimiento	178
Figura 57. Descripción del yacimiento de perfil	178
Figura 58. Modelo tridimensional del modelo cartesiano de 10X10X4 obtenido con el pos-procesador GRID	187
Figura 59. Perfil del modelo de 10X10X4 obtenida con el pos-procesador GRID	187
Figura 60. Modelo de 24 celdas por capa haciendo agrupamiento de las celdas obtenida con el pos-procesador GRID	188
Figura 61. Modelo de 22 celdas por capa	189
Figura 62. Refinamiento global sobre los pozos	190
Figura 63. Refinamiento de las celdas que se encuentran cerca de los pozos obtenida con el pos-procesador GRID	191
Figura 64. Modelo con refinamiento radial en ECLIPSE 100	192
Figura 65. Vista de planta de la discretización hexagonal para el modelo.	193
Figura 66. Vista de la triangulación realizada para generación la malla PEBI hexagonal	194
Figura 67. Vista de la triangulación realizada para generación la malla PEBI hexagonal	195
Figura 68. Representación de la región del pozo con mallas PEBI hexagonales	195
Figura 69. Representación 3D del modelo con una malla PEBI hexagonal	196
Figura 70. Malla cartesiana 10 x 10 IMEX	196
Figura 71. Perfil de la malla construida. Discretización en la vertical	197
Figura 72. Refinamiento cartesiano	197
Figura 73. Vista de perfil del enmallado realizado	198
Figura 74. Enmallado CPG	198
Figura 75. Perfil del enmallado realizado	199
Figura 76. Distribución de nodos para crear la malla PEBI	199
Figura 77. Enmallado cartesiano producto de la transformación.	200

Figura 78. Vista de perfil del enmallado realizado	200
Figura 79. Comportamiento del GOR Productor 1 en el modelo cartesiano e 10X10X4 para esquema adaptativo en el CMG, de 5 puntos y 9 puntos en Eclipse 100 con un timestep de 10 días	202
Figura 80. Comportamiento del GOR Productor 2 en el modelo cartesiano de 10X10X4 para esquema adaptativo en el CMG, de 5 puntos y 9 puntos en Eclipse 100 con un timestep de 10 días	202
Figura 81. Comportamiento del GOR en el pozo productor 1 para los modelos con el menor número de bloques simulado en IMEX de CMG y Eclipse 100 excepto el modelo PEBI modelado en STAR de CMG.	203
Figura 82. Comportamiento del GOR en el pozo productor 2 para los modelos con el menor número de bloques simulado en IMEX de CMG y Eclipse 100 excepto el modelo PEBI modelado en STAR de CMG.	204
Figura 83. Comportamiento del GOR en el pozo productor 1 para los modelos con el mayor número de bloques simulados en Eclipse 100.	205
Figura 84. Comportamiento del GOR en el pozo productor 2 para los modelos con el mayor número de bloques simulados en Eclipse 100.	206
Figura 85. Comportamiento del GOR en el pozo productor 1 para todos los modelos simulados en Eclipse 100.	207
Figura 86. Comportamiento del GOR en el pozo productor 2 para todos los modelos simulados en Eclipse 100.	207
Figura 87. Comportamiento de la Botom Hole Pressure (BHP) en el pozo productor 1 para el modelo base de 400 bloques simulado en IMEX de CMG y Eclipse 100 con un intervalo máximo de tiempo de 10 días	209
Figura 88. Comportamiento de la Botom Hole Pressure (BHP) en el pozo productor 2 para el modelo base de 400 bloques simulado en IMEX de CMG y Eclipse 100 con un intervalo máximo de tiempo de 10 días	209
Figura 89. Comportamiento de la BHP en el pozo productor 1 para los modelos con el menor número de bloques simulado en IMEX de CMG y Eclipse 100 excepto el modelo PEBI modelado en STAR de CMG.	210

Figura 90. Comportamiento de la BHP en el pozo productor 2 para los modelos con el menor número de bloques simulado en IMEX de CMG y Eclipse 100 excepto el modelo PEBI modelado en STAR de CMG.	210
Figura 91. Comportamiento de la BHP en el pozo productor 1 para los modelos con el mayor número de bloques simulados en Eclipse 100.	211
Figura 92. Comportamiento de la BHP en el pozo productor 2 para los modelos con el mayor número de bloques simulados en Eclipse 100.	211
Figura 93. Comportamiento de la BHP en el pozo productor 1 para todos los modelos simulados en Eclipse 100.	212
Figura 94. Comportamiento de la BHP en el pozo productor 2 para todos los modelos simulados en Eclipse 100.	212
Figura 95. Comportamiento del GOR en el pozo productor 1 para el modelo base de 400 bloques simulado en Eclipse 100 bajo el esquema de nueve puntos con tres intervalos máximos de tiempo.	213
Figura 96. Comportamiento de la BHP en el pozo productor 1 para el modelo base de 400 bloques simulado en Eclipse 100 bajo el esquema de nueve puntos con tres intervalos máximos de tiempo.	214
Figura 97. Tiempo de cómputo en el proceso de la simulación numérica en Eclipse 100.	215
Figura 98. Tiempo de cómputo en el proceso de la simulación numérica en Eclipse 100.	215
Figura 99. Espacio requerido en CPU por todo el modelo para la simulación numérica en Eclipse 100.	216
Figura 100. Espacio requerido en CPU por celda para la simulación numérica en Eclipse 100.	216

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Apreciación global de las aproximaciones matemáticas	48
Tabla 2. Efecto del detalle vertical en la predicción de la eficiencia de inyección de agua.	90
Tabla 3. Tipos de Malla de acuerdo al Sistema Coordinado	93
Tabla 4 Datos y restricciones	143
Tabla 5 Propiedades PVT para el aceite saturado	144
Tabla 6. Funciones PVT del aceite insaturado	144
Tabla 7. Funciones PVT para el gas	145
Tabla 8. Datos de permeabilidad relativa	145
Tabla 9. Secciones requeridas en los archivos datos de Eclipse para la simulación	148

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS TÉCNICAS DE ENMALLADO EMPLEADAS EN SIMULACIÓN DE YACIMIENTOS. *

AUTORES: SIERRA SUÁREZ, Luis E., SANTAFÉ RANGEL, Elkin R.**

PALABRAS CLAVE: Malla, Celda, Discretización, Refinamiento, Agrupamiento, Ortogonal, Triangulación, Espacio, Geometría de Punto Esquina, Bisección Perpendicular, Diferencias Finitas, Formulación Integral, Formulación Variacional, Generador de Mallas, Elementos Finitos, Transformaciones, Jacobiano, Interpolación Transfinita.

DESCRIPCIÓN: Generalmente, los modelos matemáticos para los fenómenos físicos implican ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de segundo orden no lineales, como en el caso del flujo de fluidos en medios porosos. Su solución práctica se desarrolla de forma numérica realizando una discretización del espacio y del tiempo, y dependiendo de esta discretización y de la interacción de las celdas que componen la malla se obtienen resultados óptimos y confiables en un tiempo determinado. Se estudian los diferentes métodos y técnicas de enmallados que se han implementado en el modelamiento del flujo de fluidos en medios porosos como lo son las mallas cartesianas, cilíndricas, curvilíneas, híbridas, PEBI o Voronoi, técnicas de refinamiento global, local y geometría Punto Esquina, donde la solución de las EDP por diferencias finitas ha sido la más empleada por su menor tiempo de cómputo y mayor control en los balances de energía y materia para cada celda. En los métodos de elementos finitos esto no ha sido implementado con éxito aún debido a la complejidad del sistema a resolver y del tiempo de cómputo. Algunas mallas diferentes a las cartesianas se pueden tratar con diferencias finitas realizando transformaciones apropiadas del espacio como en el caso de la geometría punto esquina. Existen métodos que combinan las diferencias finitas y los elementos finitos para aprovechar sus ventajas de fácil manejo y rápido tiempo de cómputo así como una mayor descripción del espacio físico respectivamente, como es el método Galerkin y CVFE (Elementos Finitos Volumen de control) .

Debido a la irregularidad de la distribución de permeabilidad y porosidad del yacimiento, el flujo tiene tendencias de movimiento. Describir el sistema de enmallado que modelará el flujo de fluidos dentro de la simulación puede definir la exactitud del proceso. En este trabajo se establece una comparación de los diferentes sistemas de enmallado para así generar criterios que permitan determinar bajo que condiciones, ciertos tipos de enmallado pueden resultar más favorables. A su vez se valida la información teórica con un ejercicio experimental usando los simuladores ECLIPSE y CMG.

* Tesis de grado

** Ingenierías Físicoquímicas, Ingeniería de Petróleos, ORTIZ, Olga P., PIEDRAHITA, Carlos.

ABSTRACT

TITLE: COMPARATIVE ANALYSIS OF GRIDDING TECHNIQUES IN RESERVOIR SIMULATION*

AUTHORS: SIERRA SUÁREZ, Luis E., SANTAFÉ RANGEL, Elkin R.**

KEY WORDS: Mesh, Grid, Discretización, Refinement, Gathering, Ortogonal, Triangulation, Space, Corner Point Geometry, Perpendicular Bisection, Finite Differences, Integral Formulation, Variate Formulation, Generation Gridding, Finite Elements, Transformation, Jacobiano, Transfinite Interpolation.

DESCRIPTION: generally, the mathematical models for the physical phenomena implicate partial differential equations (EDP) second-order nonlinear, for example, in the event of the fluids flow porous means. Their practical solution is developed in a numeric way carrying out a discretization of the space and of the time, and depending on this discretization and of the interaction of the cells that they compose the mesh you good and reliable given at one time certain. The different methods are studied and technical of having been caught in the meshes of a net that they have been implemented in the modelling of the flow of fluids in porous means as they are it the Cartesian meshes, cylindrical, curvilinear, hybrid, PEBI or Voronoi, technical of global, local refinement and geometry Punto Esquina, where the solution of the EDP for finite differences has been the more used by its smallest time of computation and bigger control in the energy balances and matter for each cell. In the methods of finite elements this has not still been implemented with success due to the complexity of the system to solve and of the time of computation. Some meshes different to the Cartesian ones can talk to finite differences carrying out appropriate transformations of the space like in the case of the geometry point corner. Methods that combine the finite differences and the finite elements to take advantage of their advantages of easy handling and quick time of computation exist as well as a bigger description of the physical space respectively, like it is the method Galerkin and CVFE (Elements Finite control Volume).

Due to the irregularity of the permeability distribution and porosity of the location, the flow has movement tendencies. To describe the system of having been caught in the meshes of a net that it will model the flow of fluids inside the simulation it can define the average of the process. In this work a comparison of the different systems settles down of having been caught in the meshes of a net it stops to generate approaches that allow to determine under that condition, certain types of having been caught in the meshes of a net they can be this way more favorable. In turn been worth the theoretical information with an experimental exercise using the shammers ECLIPSE and CMG.

* Thesis

** Physicochemical Engineering, Petroleum Engineering, ORTIZ, Olga P., PIEDRAHITA, Carlos.

INTRODUCCIÓN

Dentro de las múltiples etapas que implica la solución de un problema complejo en un yacimiento, se encuentra la etapa de simulación. Mediante este mecanismo, se le permite a los ingenieros tener una visión casi completa de lo que está sucediendo en la roca que los provee de crudo. A través de una simulación se puede describir el flujo de fluidos que existe en el reservorio, y se pueden modelar las interacciones de las muchas partes que componen realmente a un yacimiento como sistema complejo que es. Además se pueden hacer predicciones del comportamiento del mismo, ante una alteración cualquiera y se pueden generar modelos de control que permitan el ahorro de tiempo y dinero en estudios de campo. Sin embargo, para poder hacer simulación, es necesario plantear un modelo que pueda ser solucionado por un ordenador y esto implica hacer aproximaciones. Una de las aproximaciones más decisivas, consiste en la discretización del espacio. Se debe buscar un sistema de enmallado que represente de la mejor manera posible las características del yacimiento y que permita a la vez, simular los procesos que se desean estudiar.

En el presente trabajo se observará una compilación teórica de los diferentes sistemas de enmallado, las variables de discretización de dominio y a su vez, una comparación de las diferentes técnicas de enmallado estáticas que existen para modelar un yacimiento y se definirá bajo que condiciones y características del yacimiento, ciertas técnicas resultan más favorables, identificando sus ventajas y desventajas.

Para llegar a definir de forma concreta las características de los sistemas de enmallado estudiados, como primera medida se observará un breve conjunto de generalidades sobre simulación numérica de yacimientos (capítulo 1). Posteriormente se presentaran las formulaciones integrales y variacionales de las ecuaciones de flujo (capítulos 2) y luego se analizará su esquema discreto (capítulo 3). A continuación se revisarán los errores que se generan del proceso de discretización (capítulo 4) y se enfatizará en el impacto del tamaño de la celda y los pasos de tiempo (capítulo 5). Finalmente se planteará todo el esquema de generación de mallas (capítulo 6) mostrando las características de cada una y posteriormente se desarrollará un ejercicio escogido de la literatura (capítulo 7).

1. GENERALIDADES

1.1 BREVE ESTADO DEL ARTE

La fuerza impulsora del desarrollo de los sistemas de simulación numérica fue, la capacidad que tuvo de poder predecir el comportamiento futuro de un yacimiento bajo diferentes esquemas de operación con el objeto de tomar mejores decisiones sobre el manejo del yacimiento. Sin embargo, su potencial se reconoció en 1940, donde los cálculos que evaluaban el comportamiento del yacimiento se basaban en los métodos analíticos, los cuales consideraban el yacimiento como un todo homogéneo. Fue solo hacia 1960 que se hizo posible la solución de dos y tres fases con la introducción del modelo de aceite negro (*black oil*). A partir de ese año, se hizo común la simulación mediante el uso de computadores relativamente sofisticados que representaban dichos métodos analíticos bajo esquemas en donde ya no se trataba el yacimiento como un todo, sino como unidades independientes e interrelacionadas. Durante los 70's, el afán por obtener una mayor recuperación de crudo, orientó las investigaciones hacia el estudio de problemas que van más allá del agotamiento natural y del mantenimiento de presión a procesos tales como inyección de químicos, inyección de vapor y combustión *in situ*. Esto se logró gracias al significativo avance de los métodos de simulación numérica y el mejoramiento de los equipos de computación. En los 80's el rango de aplicación de la simulación siguió expandiéndose y con el objeto de dar una mejor descripción al yacimiento, se inicia el uso de la geoestadística con la cual fue posible el modelamiento de yacimientos tanto natural como hidráulicamente fracturados al igual que pozos horizontales. El reciente interés se ha centrado en el desarrollo integrado de modelamiento estocástico junto con otras técnicas de descripción del yacimiento, que incluyen el uso de sísmica

tridimensional y geoestadística de fractales, que permiten obtener una descripción más detallada del yacimiento y un modelamiento a menor costo, aún con un mayor refinamiento de las celdas. Además, el desarrollo a nivel computacional del “pase de mensajes”, modelo de comunicación ampliamente usado en computación paralela y estandarizado en 1994 como MPI o *Message Passing Interface*, permite reducir en un buen porcentaje los tiempos de cómputo y por tanto, facilita la simulación de modelos más complejos.

1.2 SIMULACIÓN EN YACIMIENTOS PETROLÍFEROS

Las ecuaciones utilizadas en el modelo matemático para simulación, son ecuaciones diferenciales parciales no lineales; ésta no linealidad corresponde principalmente a los siguientes factores:

- a. La heterogeneidad del yacimiento.
- b. La relación no lineal existente entre la saturación, la permeabilidad y la presión capilar.
- c. La no linealidad que presentan las propiedades PVT de los fluidos como función de la presión, la composición y la temperatura.

En general, las ecuaciones diferenciales parciales que describen el flujo de fluidos en el yacimiento no pueden ser resueltas analíticamente sino, que se resuelven numéricamente mediante el reemplazo de las ecuaciones diferenciales por ecuaciones en diferencias finitas, las cuales implican una discretización, es decir, una subdivisión de tiempo y distancia en intervalos específicos y definidos. A los elementos discretos de volumen del yacimiento se les llama celdas y a los elementos discretos de tiempo, intervalos de tiempo.

1.2.1 Utilidad de la simulación. Con la ayuda de la simulación numérica de yacimientos se puede:

- a. Conocer el volumen original de aceite.
- b. Tener una buena idea del movimiento de los fluidos dentro del yacimiento.
- c. Determinar el comportamiento de un yacimiento (aceite y/o gas), bajo diversos mecanismos de desplazamiento.
- d. Inyectar fluidos para mejorar la explotación del yacimiento.
- e. Determinar la conveniencia de inyectar agua en un yacimiento de aceite por los flancos, en lugar de utilizar un patrón determinado de pozos inyectores o viceversa.
- f. Optimizar los sistemas de recolección de fluidos en superficie.
- g. Determinar los efectos de la localización de pozos y su espaciamiento en la productividad y en la eficiencia de barrido.
- h. Estimar los costos de producción del campo.
- i. Calcular la cantidad de gas que se obtiene en un número determinado de pozos localizados en puntos específicos.
- j. Definir valores de parámetros de yacimiento para llevar a cabo estudios económicos.
- k. Obtener la sensibilidad de los resultados a variaciones en las propiedades petrofísicas del yacimiento o las propiedades PVT de los fluidos cuando no son bien conocidas.
- l. Realizar estudios individuales de pozo.
- m. Planear los escenarios de producción en un futuro.

1.2.2 Planeación de un Estudio de Simulación. La mayoría de los estudios envuelven esencialmente el mismo tipo de actividades. Sin embargo, la distribución de la atención entre estas actividades varía para cada proyecto:

- a. El primer paso en la conducción de un estudio es definir el problema del comportamiento del yacimiento y el asociado a la operación. El objetivo de un estudio es obtener un análisis preliminar de la mecánica de los fluidos del yacimiento.
- b. Los datos que se necesitan deben ser revisados y organizados una vez hallan sido recolectados.
- c. Teniendo definido el problema de la mecánica de los fluidos, es necesario decidir qué modelo de simulación es el más apropiado para resolverlo. El diseño del modelo es un proceso iterativo que consta de las siguientes etapas:
 - Descripción del yacimiento.
 - Determinación del tipo de mecanismo de desplazamiento.
 - Escritura del modelo matemático.
 - Desarrollo del modelo numérico.
 - Desarrollo del programa de cómputo.
 - Determinación de la validez del modelo.
 - Ajuste del modelo con la historia del yacimiento.
 - Predicción del comportamiento futuro.
- d. Ajuste histórico: Generalmente, la descripción del yacimiento utilizada en el modelo es validada corriendo el simulador con los datos históricos de producción e inyección y comparando las presiones calculadas y el movimiento de fluidos con el actual comportamiento del yacimiento.
- e. Predicción del comportamiento: Los tipos de predicción de comportamiento que pueden ser generados mediante una corrida incluyen:
 - Caudal de producción de petróleo.

- Comportamiento del WOR y el GOR.
- Requerimientos de pozo y trabajos de *workover* (reacondicionamiento de pozos).
- Comportamiento de la presión de yacimiento.
- Eficiencias de recobro areal.
- Información general concerniente a las facilidades requeridas.
- Estimaciones de recuperación final.

La exactitud de las predicciones en el comportamiento depende de las características del modelo y de la exactitud y minuciosidad de la descripción del yacimiento.

- f. Reporte: el paso final en el estudio de simulación es reunir los resultados y conclusiones en un reporte claro y conciso.

1.2.3 Funcionamiento de un Modelo. El procedimiento de cálculo que utiliza un modelo está dado de modo simplificado en los siguientes pasos:

- a. Se comienza con celdas, de las cuales se conocen su presión y saturación inicial.
- b. Se selecciona un incremento de tiempo al cual el modelo realizará los cálculos.
- c. Se calcula o asigna el volumen producido o inyectado para el intervalo de tiempo seleccionado.
- d. Se calcula el flujo que hay entre las celdas durante el período de tiempo empleado y los nuevos valores de saturación para cada celda.
- e. Se selecciona un nuevo intervalo de tiempo y se repite el proceso hasta que el modelo efectúe los cálculos para el tiempo total deseado.

De ésta manera el simulador calculará la distribución de presiones y de saturaciones a lo largo del yacimiento en función del tiempo.

1.2.4 Información Requerida para Utilizar un Simulador. La simulación requiere de una amplia descripción física del yacimiento y de los tipos de mecanismos por medio de los cuales el yacimiento produce. Esta información debe obtenerse con la mayor precisión posible, debido a que, al variarla se pueden producir cambios significativos en los resultados obtenidos de las corridas de simulación.

La información requerida para efectuar una simulación de yacimientos es:

- a. Descripción física y geológica del yacimiento.
- b. Mecanismos de desplazamiento que operan en el yacimiento para la recuperación de hidrocarburos.
- c. Propiedades petrofísicas de la roca.
- d. Propiedades PVT de los fluidos.
- e. Historia de producción y relación de flujo.
- f. Estado mecánico de pozos.
- g. Costos de operación del campo.
- h. Mapas estructurales, isópacos, de isoporosidades y de isopermeabilidades.

2. FORMULACIÓN DE LAS ECUACIONES DE FLUJO

2.1 FORMULACIÓN DIFERENCIAL

2.1.1 Definiciones. El espacio poroso de la roca está ocupado por fluidos, separados por superficies de fase. La proporción de una fase en el volumen poroso esta definida como la saturación S_p . Entonces:

$$\sum_{p=1}^P S_p = 1 \quad (2.1)$$

donde P es el número de fases.

El sistema de fluidos esta compuesto por K componentes, en donde la composición está dada por las fracciones molares z_k .

$$\sum_{k=1}^K z_k = 1 \quad (2.2)$$

La composición de la fase p -ésima esta dada por la fracción molar x_{pk} :

$$\sum_{k=1}^K x_{pk} = 1 \quad p \in \{1, \dots, P\} \quad (2.3)$$

La presión de cada fase generalmente es diferente,

$$P_p = P_{p'} + P_{cpp'} \quad p \neq p', \quad p, p' \in \{1, \dots, P\} \quad (2.4)$$

donde $P_{cpp'}$ es la presión capilar. $P_{cpp'}$ depende de la temperatura T y sobre todo de la composición z_i de la fase. Bajo la suposición de un equilibrio termodinámico la densidad molar específica:

$$\xi_p = \xi_p(P_p, T, \bar{x}_{pk}) \quad (2.5)$$

se puede determinar si son dadas todas las composiciones, la temperatura y la presión para una fase existente.

De la Ec. 2.5 se puede también calcular la densidad de la fase:

$$e_p = \xi_p \sum_{k=1}^K M_k x_{pk} \quad p \in \{1, \dots, P\} \quad (2.6)$$

donde M_k es la masa molar.

2.1.2 Ley de la conservación de la masa. Para el flujo multifásico se define como:

$$-\nabla \cdot \vec{m}_p = \frac{\partial(m_p)}{\partial t} + \tilde{q}_p \quad (2.7)$$

donde

m_p es la masa de la fase p en una unidad de volumen del medio

\vec{m} es el flujo másico de la fase p

El operador divergencia, al lado izquierdo de la Ec. 2.7, puede ser expandido en cualquier sistema de coordenadas y representa la cantidad de masa que fluye hacia o fuera del volumen de control. El primer término del lado izquierdo de la Ec. 2.7 representa el almacenamiento y el segundo es el término fuente o sumidero, lo cual se observa en los volúmenes de control donde se ubican pozos productores o inyectores respectivamente.

Para el caso de una fase la Ec.2.7 en coordenadas cartesianas y cilíndricas se expresa respectivamente como:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} \rho u_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho u_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho u_z\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \tilde{q} \quad (2.8)$$

y

$$-\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \rho r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho r u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \tilde{q} \quad (2.9)$$

Ecuación de flujo para el aceite: en la Ec. 2.7 al realizar las respectivas sustituciones de $\vec{m}_o = \bar{\rho}_o u_o$ y $m_o = \bar{\rho}_o \phi S_o$, donde $\bar{\rho}_o$ es la densidad del aceite muerto a condiciones de yacimiento, y dividiendo en ρ_{oSTC} , densidad a condiciones de superficie se obtiene:

$$-\nabla \left[\frac{1}{B_o} u_o \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{B_o} \phi S_o \right] + q_o \quad (2.10)$$

donde

$$q_o = \frac{\tilde{q}_o}{\rho_{oSTC}}$$

La ecuación para el agua es obtenida de forma similar

$$-\nabla \left[\frac{1}{B_w} u_w \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{B_w} \phi S_w \right] + q_w \quad (2.11)$$

El gas como esta presente en la fase gaseosa como en solución en la fase aceite tenemos:

$$\dot{m}_g = \rho_g u_g + \bar{\rho}_{dg} u_o \quad m_g = \phi (S_g \rho_g + \bar{\rho}_{dg} S_o)$$

y

$$\tilde{q}_g = \tilde{q}_{pg} + \tilde{q}_o R_s \left(\frac{\rho_g}{\rho_o} \right)_{STC} = \tilde{q}_g + q_o R_s \rho_{gSTC}$$

Entonces:

$$-\nabla \left[\frac{R_s}{B_o} u_o + \frac{1}{B_g} u_g \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{R_s}{B_o} S_o + \frac{1}{B_g} S_g \right) \right] + q_{pg} + R_s q_o \quad (2.12)$$

Los términos de producción q_o , q_g y q_w representan el volumen producido a condiciones de superficie o estándar por unidad de tiempo por unidad de volumen de yacimiento.

2.1.3 Ley de la conservación del momentum. Para el flujo de fluidos en un medio poroso se expresa por la ley de Darcy, la cual para un caso multifásico se formula como:

$$\vec{u}_p = -\frac{k_{rp}}{\mu_p} \bar{k} \nabla \Phi_p = -\lambda_p \bar{k} \nabla \Phi_p \quad (2.13)$$

$$\nabla \Phi_p = \nabla P_p - e_p \vec{g} \quad (2.14)$$

donde

Φ_p Potencial de la fase

\vec{g} Vector aceleración gravitacional

μ_p Viscosidad de la fase

\vec{u}_p Velocidad de filtración

λ_p Movilidad de la fase

\bar{k} Tensor de permeabilidad

k_{rp} Permeabilidad relativa

En general, la permeabilidad \bar{k} es un tensor simétrico:

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{32} \end{bmatrix}, \text{ donde } k_{ij} = k_{ji} \quad (2.15)$$

La Ec. 2.13 es una ecuación lineal vector-vector. Las funciones de permeabilidad relativa k_{rp} dependen de la saturación y están restringidas entre cero y uno.

$$0 \leq k_{rp}(S_p) \leq 1 \quad (2.16)$$

Para el flujo de una fase

$$S_p = 1 \quad S_{p'} = 0 \quad p' \neq p \quad y$$

$$k_{rp} = 1 \quad \lambda_p = \frac{1}{\mu_p}$$

2.1.4 Ecuaciones básicas de flujo. Las ecuaciones básicas de flujo se obtienen por combinación de la ley de la conservación de la masa (Ec. 2.10 –12) y de la Ley de Darcy (Ec. 2.13) se presentan a continuación para el aceite, el agua y el gas respectivamente:

$$\nabla \cdot [\lambda_o \nabla \Phi_o] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] + q_o \quad (2.17)$$

$$\nabla \cdot [\lambda_w \nabla \Phi_w] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S_w}{B_w} \right] + q_w \quad (2.18)$$

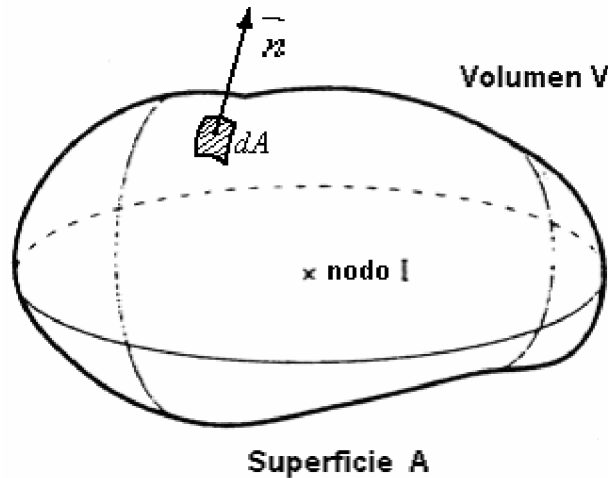
$$\nabla \cdot [R_s \lambda_o \nabla \Phi_o + \lambda_g \nabla \Phi_g] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{R_s}{B_o} S_o + \frac{S_g}{B_g} \right) \right] + R_s q_o + q_{pg} \quad (2.19)$$

2.2 FORMULACIÓN INTEGRAL DE LAS ECUACIONES DE FLUJO

2.2.1 Ecuaciones de balance molar. La conservación de la masa para el componente k está dada por:

$$-\iint_{A_f} \left[\sum_{p=1}^P \vec{u}_p \xi_p x_{pk} M_k \right] \vec{n} dA + \iiint_V q_k M_k dV = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left[\phi \sum_{p=1}^P S_p \xi_p x_{pk} M_k \right] dV \quad (2.20)$$

Figura 1. Volumen de control alrededor del nodo.



V es un volumen de control alrededor del nodo I (Fig. 1). El primer término al lado izquierdo de la Ec 2.20 es el término convectivo. Su significado físico es fácil de entender: \vec{u} es la velocidad de la fase con dimensiones $[m/s] = [m^3/(s m^2)]$ y da el volumen de la fase fluyendo por segundo a través de una unidad de superficie perpendicular a la dirección del flujo. ξ_p es la densidad molar $[moles/m^3]$ de la fase, y el producto $\vec{u}_p \xi_p$ es la velocidad molar $[moles/(s m^2)]$. Este es el número de moles fluyendo a través de la unidad de superficie. Multiplicando por la fracción

molar x_{pk} y el peso molecular M_k [Kg/mol] se obtiene la velocidad másica [kg/(s m²)] del componente k . En la superficie del volumen de control, la velocidad másica puede ser dividida en dos componentes. Una paralela a la superficie y la otra ortogonal a ésta. La componente ortogonal se obtiene multiplicando la velocidad con el vector unitario normal \vec{n} . La expresión:

$$V = \left[\sum_{p=1}^P \vec{u}_p \xi_p x_{pk} M_k \right] \vec{n} dA \quad (2.21)$$

es el flujo másico [Kg/s] del componente k a través del elemento de superficie dA . Es necesaria la sumatoria de todas las fases ya que un componente puede ser transportado por varias estas. La integral sobre la superficie cerrada A_I es el flujo másico total del componente k , fluyendo de o hacia el volumen de control. Debido a que el vector normal esta orientado hacia fuera, la integral es positiva si la masa que está fluyendo hacia afuera es mayor que la que está fluyendo hacia dentro. El segundo término representa la fuente (o sumidero). Este determina cuanta masa del componente k es sacada o introducida directamente, por ejemplo, un pozo dentro del volumen, en donde el volumen integral puede ser remplazado por el valor Q_{kI} . Por lo tanto, el lado izquierdo de la Ec. 2.20 es la razón de cambio de la masa entre el volumen de control y los alrededores. El lado derecho de la Ec. 2.20 representa el término de acumulación. El volumen de la fase p por unidad de volumen de roca es ϕS_p [m³]. Este contiene $\phi S_p \xi_p$ moles y $\phi S_p \xi_p M_k$ masa [Kg] del componente k . La sumatoria de todas las fases y la integral sobre todo el volumen de control da como resultado la masa del componente k en el volumen de control.

La Ec. 2.20 es un balance molar. De hecho, el balance molar y másico son equivalentes. Esto sería evidente cancelando la masa molar M_k de ambos lados de la Ec. 2.20. En Ingeniería de Petróleos, son empleados a menudo los

volúmenes estándar para expresar las cantidades de materia. Teniendo que e_k^o es la densidad estándar del componente puro k (la cual es constante) y dividiendo ambos lados de la Ec. 2.20 por esta, se obtiene un balance volumétrico. Tales formulaciones son comúnmente empleadas en el llamado modelo de aceite negro con tres componentes: aceite, gas y agua.

La forma integral de las ecuaciones de flujo es equivalente a la comúnmente empleada en diferencias. La secuencia de operadores integrales y diferenciales puede ser cambiada:

$$-\iint_{A_i} \left[\sum_{p=1}^P \vec{u}_p \xi_p x_{pk} \right] \vec{n} dA + \iiint_{V_i} q_k dV = \iiint_{V_i} \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \sum_{p=1}^P S_p \xi_p x_{pk} \right] dV \quad (2.23)$$

Aplicando el teorema de divergencia de Green a la Ec. 2.23 para transformar la integral de superficie a una integral de volumen:

$$\iint_{A_i} \left[\sum_{p=1}^P \vec{u}_p \xi_p x_{pk} \right] \vec{n} dA = \iiint_{V_i} \left[\nabla \left(\sum_{p=1}^P \vec{u}_p \xi_p x_{pk} \right) \right] dV \quad (2.24)$$

y la Ec. 2.23 queda:

$$-\iiint_{V_i} \left[\nabla \left(\sum_{p=1}^P \vec{u}_p \xi_p x_{pk} \right) \right] dV + \iiint_{V_i} q_k dV = \iiint_{V_i} \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \sum_{p=1}^P S_p \xi_p x_{pk} \right] dV \quad (2.25)$$

Desde que pueda ser validada para un volumen de control arbitrario, se pueden cancelar las integrales de volumen en ambos lados, lo que conlleva a la formulación diferencial de las ecuaciones de flujo:

$$-\nabla \left(\sum_{p=1}^P \vec{u}_p \xi_p x_{pk} \right) + q_k = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \sum_{p=1}^P S_p \xi_p x_{pk} \right] \quad (2.26)$$

Sustituyendo el término de flujo de la Ec. 2.20 por la velocidad de acuerdo a la ley de Darcy (Ec. 2.13), y dividiendo la integral dentro de una suma sobre toda la superficie que conecta el bloque I con sus vecinos $J = 1, \dots, NJ$ se obtiene

$$\iint_{A_I} \sum_{p=1}^P \xi_p x_{pk} \lambda_p \left(\overline{k \nabla \phi_p} \right) \cdot \vec{n} dA = \sum_{J=1}^{NJ} \iint_{A_{IJ}} \sum_{p=1}^P \xi_p x_{pk} \lambda_p \nabla \phi_p \left(\overline{k n} \right) dA = \sum_{J=1}^{NJ} Q_{IJk} \quad (2.27)$$

donde

$$Q_{IJk} = - \iint_{A_{IJ}} \sum_{p=1}^P \Lambda_{pk} \nabla \Phi_p \left(\overline{k n} \right) dA \quad (2.28)$$

$$\Lambda_{pk} = \xi_p x_{pk} \lambda_p \quad (2.29)$$

La secuencia de multiplicaciones en el término $\overline{k \nabla \Phi_p} \vec{n}$ puede ser cambiada, porque \overline{k} es un tensor simétrico. La Ec. 2.20 puede escribirse de la siguiente forma:

$$\sum_{J=1}^{NJ} Q_{IJk} + \iiint_{V_I} q_k dV = \iiint_{V_I} \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \sum_{p=1}^P S_p \xi_p x_{pk} \right] dV \quad (2.30)$$

Donde se observa de una manera más práctica el balance molar, ya que la diferencia entre la entrada y la salida de materia para un elemento de volumen, queda en función de caudales.

6.1.1 FORMULACIÓN VARIACIONAL DE LAS ECUACIONES DE FLUJO

Las ecuaciones diferenciales no lineales para el flujo de fluidos en medios porosos normalmente son resueltas casi exclusivamente por métodos en diferencias finitas. Los métodos variacionales o Galerkin para la solución de estas ecuaciones ofrecen la ventaja de obtener exactitudes de orden superior pero su desventaja sería que en un código de programación secuencial el tiempo de cómputo puede ser mayor que el empleado en un esquema en diferencias, pero su potencial podría justificarlo. Pero esto podría ser superado con el empleo de un código computacional en paralelo el cual reduciría considerablemente dichos tiempos de cómputo y se obtendrían resultados más reales.

Ya que las aproximaciones en diferencias finitas involucran una discretización tanto de las variables dependientes como de las independientes, solo se obtiene una solución discreta en tiempo y espacio. Esta es frecuentemente una desventaja, por ejemplo, si se desea predecir exactamente el comportamiento de la presión del fondo del pozo con el tiempo.

Con los procedimientos Galerkin se obtienen soluciones continuas en el espacio tal como las expresiones analíticas. Además, con una selección adecuada de las funciones básica se puede alcanzar continuidad en las derivadas. Así el metodo presta principal atención a los problemas que presentan altos gradientes en saturación o presión.

El planteamiento se hace para el caso de flujo multidimensional trifásico en un medio no homogéneo con un sistema de fronteras irregulares y múltiples pozos.

Primero se realiza las consideraciones para el planteamiento de la ecuación diferencial de flujo.

Si se considera flujo laminar y la permeabilidad absoluta como un escalar, la conservación del momentum (Ec. 2.13) se expresa como:

$$\vec{u}_p = -\frac{k_{rp} k}{\mu_p} \nabla \Phi_p \quad (2.31)$$

La densidad y la viscosidad son funciones de presión que generalmente se determinan en laboratorio. El potencial de flujo Φ_p como fue expresado por Hubbert⁽¹⁾ es:

$$\Phi_p = \int_{P_B}^{P_p} \frac{d\gamma}{\rho_p(\gamma)} - h \quad (2.32)$$

donde h un dato de profundidad medido positivamente hacia abajo, P_B es especificada.

Para obtener una ecuación general de flujo se considera C_{lg} , C_{lo} y C_{lw} como la fracción de un componente l -esimo en el gas, aceite y agua. La ecuación de continuidad

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (C_{lg} \rho_g \ddot{u}_g + C_{lo} \rho_o \ddot{u}_o + C_{lw} \rho_w \dot{u}_w) - q_l \\ & = -\phi \frac{\partial}{\partial t} (C_{lg} \rho_g S_g + C_{lo} \rho_o S_o + C_{lw} \rho_w S_w) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Combinando la Ec. 2.31 y la Ec. 2.32 se obtiene una ecuación general para el flujo

⁽¹⁾ HUBBERT, M. King. *Theory of ground-water motion*. *Journal of Geology* Nov-Dic Vol XLVII, 1940. citado por C.L. McMichael y G.W. Thomas. *Reservoir simulation by galerkin's method*. Artículo de la SPE 3568, Oklahoma 1973.

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left(\frac{C_{lg} \rho_g^2 k k_{rg}}{\mu_g} \nabla \Phi_g + \frac{C_{lo} \rho_o^2 k k_{ro}}{\mu_o} \nabla \Phi_o + \frac{C_{lw} \rho_w^2 k k_{rw}}{\mu_w} \nabla \Phi_w \right) + q_l \\ & = -\phi \frac{\partial}{\partial t} (C_{lg} \rho_g S_g + C_{lo} \rho_o S_o + C_{lw} \rho_w S_w) \end{aligned} \quad (2.33)$$

2.2.2 Modificación de la ecuación general de flujo. Las presiones de las fases están relacionadas por medio de las funciones de presión capilar

$$\begin{aligned} P_{cow} &= P_{cow}(S_w) = P_o - P_w \\ P_{cgo} &= P_{cgo}(S_g) = P_g - P_o \end{aligned} \quad (2.34)$$

Se emplea la relación

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \frac{1}{\rho_p} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2.35)$$

Obtenida por diferenciación de la Ec. 2.32.

Aplicando la regla de la cadena a la derivada del tiempo para las saturaciones de la fase agua y aceite para colocarlas en función del potencial de flujo se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_w}{\partial t} &= S'_w \left(\rho_o \frac{\partial \Phi_o}{\partial t} - \rho_w \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial S_g}{\partial t} &= S'_g \left(\rho_g \frac{\partial \Phi_g}{\partial t} - \rho_o \frac{\partial \Phi_o}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde

$$S'_w = \frac{dS_w}{dP_{cow}} \quad \text{y} \quad S'_g = \frac{dS_g}{dP_{cgo}}$$

Al asumir que las fracciones másicas y las densidades son funciones únicamente de la presión de la fase, entonces la expansión del lado derecho del Ec. 2.33 se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \nabla \cdot \left(\frac{C_{lg} \rho_g^2 k k_{rg}}{\mu_g} \nabla \Phi_g + \frac{C_{lo} \rho_o^2 k k_{ro}}{\mu_o} \nabla \Phi_o + \frac{C_{lw} \rho_w k k_{rw}}{\mu_w} \nabla \Phi_w \right) + q_l \\
 &= -\phi \left\{ \left[(C_{lg} \rho_g^2 - C_{lo} \rho_o \rho_g) S'_g + (C_{lg} \rho_g \rho'_g + \rho_g^2 C'_{lg}) S_g \right] \frac{\partial \Phi_g}{\partial t} \right. \\
 &+ \left[(C_{lo} \rho_o^2 - C_{lg} \rho_g \rho_o) S'_g + (C_{lo} \rho_o \rho'_o + \rho_o^2 C'_{lo}) S_o \right. \\
 &+ \left. (C_{lw} \rho_o \rho_w + \rho_o^2 C'_{lo}) S'_w \right] \frac{\partial \Phi_o}{\partial t} + \left. \left[(C_{lo} \rho_o \rho_w + \rho_w^2 C'_{lw}) S'_w \right. \right. \\
 &+ \left. \left. (C_{lw} \rho_o \rho'_w + \rho_w^2 C'_{lw}) \right] \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

donde C'_{lp} y ρ'_p representan las derivadas con respecto a la presión de la fase P_p

Para obtener las fracciones másicas se considera que la fase aceite se compone en el yacimiento de un aceite muerto y del gas disuelto, que la fase gas y agua son sistema de un solo componente. Entonces:

$$C_{gw} = C_{og} = C_{ow} = C_{wg} = C_{wo} = 0 \tag{2.38}$$

$$C_{gg} = C_{ww} = 1 \tag{2.39}$$

$$C_{go} = \frac{W_g}{W_o + W_g} = \frac{R_s \rho_{gs}}{B_o \rho_o} \tag{2.40}$$

$$C_{oo} = \frac{W_o}{W_o + W_g} = \frac{\rho_{os}}{B_o \rho_o} \tag{2.41}$$

donde W_p es la masa del componente l en la fase aceite; R_s es la cantidad de gas disuelto en una unidad de volumen de aceite (condiciones estándar). ρ_{ps} es la densidad de la fase p a condiciones estándar ρ_p es a condiciones de yacimiento y B_p es el factor volumétrico (relación de una unidad de volumen a condiciones estándar a una unidad de volumen a condiciones de yacimiento).

Remplazando en la ecuación general de flujo se obtienen tres ecuaciones de flujo, una para cada componente.

Ecuación para el gas

$$\begin{aligned}
 & \nabla \cdot \left(\frac{\rho_g^2 k k_{rg}}{\mu_g} \nabla \Phi_g + \frac{\rho_o \rho_{gs} R_s k k_{ro}}{\mu_o B_o} \nabla \Phi_o \right) + q_g \\
 & = -\phi \left\{ \left[\left(\rho_g^2 - \frac{R_s \rho_{gs} \rho_o}{B_o} \right) + S'_g + S_g \rho_g \rho'_g \right] \frac{\partial \Phi_g}{\partial t} \right. \\
 & \quad + \left[\left(\frac{R_s \rho_{gs} \rho_o}{B_o} - \rho_o \rho_g \right) S'_g + \left(\frac{R_s \rho_{gs} \rho'_o}{B_o} + \rho_o^2 \left(\frac{R_s \rho_{gs}}{B_o \rho_o} \right)' \right) S_o \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{\rho_{gs} \rho_o R_s S'_w}{B_o} \right] \frac{\partial \Phi_o}{\partial t} + \left(\frac{\rho_w \rho_{gs} R_s S'_w}{B_o} \right) \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Ecuación para el aceite

$$\begin{aligned}
 & \nabla \cdot \left(\frac{\rho_{os} \rho_o k k_{ro}}{\mu_o B_o} \nabla \Phi_o \right) + q_o = -\phi \left\{ \left[-\frac{\rho_{os} \rho_g}{B_o} + S'_g \right] \frac{\partial \Phi_g}{\partial t} \right. \\
 & \quad + \left[\frac{\rho_{os} \rho_o S'_g}{B_o} + \left(\frac{\rho_{os} \rho'_o}{B_o} + \rho_o^2 \left(\frac{\rho_{os}}{B_o \rho_o} \right)' \right) S_o - \frac{\rho_{os} \rho_o S'_w}{B_o} \right] \frac{\partial \Phi_o}{\partial t} \\
 & \quad \left. + \left[\frac{\rho_{os} \rho_w S'_w}{B_o} \right] \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Ecuación para el agua

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\rho_w^2 k k_{ro}}{\mu_w} \nabla \Phi_w \right) + q_w = -\phi \left\{ [\rho_o \rho_w S'_w] \frac{\partial \Phi_o}{\partial t} \right. \\ \left. + [\rho_w \rho'_w S_w - \rho_w^2 S'_w] \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \right\} \end{aligned} \quad (2.44)$$

2.2.3 Aplicación del método Galerkin. El operador $L_l(\Phi_g, \Phi_o, \Phi_w)$ definido en la Ec. 2.37 se redefine como:

$$\begin{aligned} L_l(\Phi_g, \Phi_o, \Phi_w) \equiv \nabla \cdot \left(\frac{C_{lg} \rho_g^2 k k_{rg}}{\mu_g} \nabla \Phi_g + \frac{C_{lo} \rho_o^2 k k_{ro}}{\mu_o} \nabla \Phi_o \right. \\ \left. + \frac{C_{lw} \rho_w^2 k k_{rw}}{\mu_w} \nabla \Phi_w \right) + q_l + G_{l1} \frac{\partial \Phi_g}{\partial t} + G_{l2} \frac{\partial \Phi_o}{\partial t} + G_{l3} \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.45)$$

donde G_{l1} , G_{l2} y G_{l3} son los coeficientes de las respectivas fases en la Ec. 2.37

Ahora se denota como S la clase de todos los grupos de funciones que su diferenciación es continua, $w(xyz)$, definidas en alguna región R con fronteras ∂R . Si \vec{n} es un vector normal a ∂R , se define W como aquellos elementos de la subserie de S que satisfacen:

$$\vec{n} \cdot \text{grad} W = 0 \quad (2.45)$$

en todos los puntos donde \vec{n} este definido. Considerar un subespacio dimensional finito S_M de W con dimensión M y $\{w_i\}_{i=1}^M$ es una base de S_M .

Se busca una solución aproximada a la ecuación diferencial de la forma

$$\Phi_p^* = \sum_{i=1}^M A_i^p(t) w_i \quad (2.46)$$

donde los coeficientes $A_i^p(t)$ son seleccionados de tal forma que $L_l(\Phi_g^*, \Phi_o^*, \Phi_w^*)$ sea ortogonal a los subespacios S_M . Que es.

$$\int_R L_l(\Phi_g^*, \Phi_o^*, \Phi_w^*) w_j dR = 0 \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (2.47)$$

Para esto, se reemplaza la Ec. 2.45 en la Ec. 2.47 y se obtiene.

$$\begin{aligned} \int_R L_l(\Phi_g^*, \Phi_o^*, \Phi_w^*) w_j dR \equiv \int_R \left[\nabla \cdot \left(\frac{C_{lg} \rho_g^2 k k_{rg}}{\mu_g} \nabla \Phi_g^* + \frac{C_{lo} \rho_o^2 k k_{ro}}{\mu_o} \nabla \Phi_o^* \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{C_{lw} \rho_w k k_{rw}}{\mu_w} \nabla \Phi_w^* \right) + q_l + G_{l1} \frac{\partial \Phi_g^*}{\partial t} + G_{l2} \frac{\partial \Phi_o^*}{\partial t} + G_{l3} \frac{\partial \Phi_w^*}{\partial t} \right] w_j dR = 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Empleando el teorema de Green y la definición de Φ_p^* se obtiene la aproximación Galerkin de la Ec. 2.37 que se muestra en la Ec. 2.49.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \left\{ A_i^g(t) \int_R \frac{C_{pg} \rho_g^2 k k_{rg}}{\mu_g} \nabla w_i^* \cdot \nabla w_j dR + A_i^o(t) \int_R \frac{C_{po} \rho_o^2 k k_{ro}}{\mu_o} \nabla w_i^* \cdot \nabla w_j dR \right. \\ \left. + A_i^w(t) \int_R \frac{C_{pw} \rho_w^2 k k_{rw}}{\mu_w} \nabla w_i^* \cdot \nabla w_j dR \right\} \\ = \int_R q_l w_j dR + \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{\partial A_i^g}{\partial t} \int_R G_{l1} w_i w_j dR + \frac{\partial A_i^o}{\partial t} \int_R G_{l2} w_i w_j dR + \right. \\ \left. + \frac{\partial A_i^w}{\partial t} \int_R G_{l3} w_i w_j dR \right\} \end{aligned} \quad (2.49)$$

La Ec. 2.49 define una serie de ecuaciones que pueden ser escritas de forma matricial.

3. DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE FLUJO

Las ecuaciones de balance presentadas en el capítulo anterior, describen el flujo multifásico en medios porosos de forma muy general. Estas ecuaciones pueden ser simplificadas para algunos casos elementales, de tal forma que puedan ser solucionadas analíticamente; sin embargo, esto limita su uso. La alternativa que se tiene es formular dichas expresiones a través de una aproximación numérica. Se han empleado aproximaciones numéricas para resolver muchos problemas generales. Estas, se basan en remplazar el problema original (formulado como un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales con algunas condiciones de frontera y restricciones), por uno que es más simple de resolver, de tal manera que esta solución se aproxime a la solución del problema original.

Una aproximación no consiste en buscar la solución variando continuamente las funciones coordenadas de espacio y tiempo. En lugar de esto, lo que se busca es aproximar valores a la solución únicamente para una serie de puntos de la malla y discretizando solo niveles de tiempo necesarios. Las ecuaciones diferenciales parciales que están descritas para algún punto dentro del dominio del espacio y del intervalo de tiempo, son remplazadas por un sistema de ecuaciones algebraicas. Una de esas ecuaciones generalmente se acopla a los valores aproximados de la solución en los puntos adyacentes dentro de la malla y para dos niveles de tiempo. Tales ecuaciones son típicas de los métodos de diferencias finitas. Otra forma de aproximar, es llevar a elementos finitos y técnicas de volumen finito.

A través de todos estos métodos, las ecuaciones diferenciales son reducidas a un sistema finito dimensional de ecuaciones algebraicas. Este proceso es llamado discretización el cual involucra:

- a. La construcción de un sistema de enmallado apropiado.
- b. La estructuración de ecuaciones apropiadas, una o más, por nodo de la malla.

Los rasgos más generales de las técnicas de discretización son descritos a continuación. (Profundizar en Peaceman (1977)⁽²⁾ y Aziz and Settari ⁽³⁾(1979)). En este capítulo se hace énfasis en la estructuración de las ecuaciones diferenciales con mayor detalle en el método de volumen finito para refinamiento local y para mallas irregulares en general y los efectos de la anisotropía del tensor permeabilidad.

3.1 DISCRETIZACIÓN DEL ESPACIO Y DEL TIEMPO

En las ecuaciones de balance Ec. 2.20 y 2.26 el operador espacial y la derivada del tiempo deben ser aproximados. Los pasos correspondientes para la discretización del espacio y del tiempo pueden hacerse por separado. La parte de la discretización espacial es la que esta directamente relacionada con la construcción de la malla. En muchos casos se especifica el intervalo de tiempo en el cual debe ser evaluada la discretización del espacio. Comúnmente en ingeniería de yacimientos, todas las técnicas para la discretización del tiempo son llevados de métodos IMPES (*Implicit pressure and explicit saturation*) a métodos totalmente implícitos.

⁽²⁾ PEACEMAN, D.W. (1977) *A Nonlinear Stability Analysis for Difference Equations Using Semi-Implicit Mobility*, SPE Jun. 1977 79-91 citado por STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria

⁽³⁾ AZIZ, K. y SETTARI, A. (1979) *Petroleum Reservoir Simulation*, Elsevier Applied Science Publishers, London, New York (1979) citado por STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria.

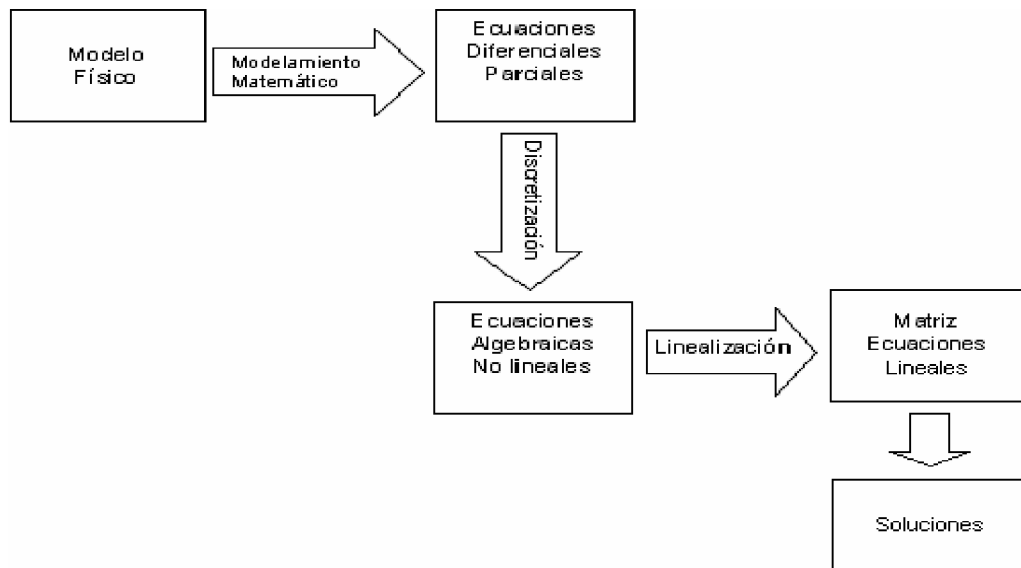
3.2 LINEALIZACIÓN

El sistema de ecuaciones obtenido después de la discretización generalmente no es lineal. Este se resuelven en forma iterativa por algún procedimiento de linealización. Una forma es construir el Jacobiano y aplicar el método de Newton. Al solucionar la matriz de ecuaciones, se consume cierto tiempo en un programa de simulación que puede ser considerable. Sin embargo, existen muchos métodos para simplificar el jacobiano o para reducir orden de este.

Para la discretización discutida aquí, se debe tener en cuenta que las ecuaciones diferenciales no lineales conservan aún una interpretación física en términos del balance de masa entre las celdas de la malla. Si se partiera de una linealización antes de discretizar sería más difícil de mantener una clara interpretación de los términos de las ecuaciones discretizadas. Así, todos los pasos siguientes de discretización, tales como la linealización, estructuración y simplificación del Jacobiano, la solución lineal, etc, pueden ser vistos como métodos numéricos para solucionar estas ecuaciones.

La construcción de la malla también tiene un impacto en esta parte de la simulación. Para mallas regulares la estructura regular del Jacobiano puede ser aprovechada para la solución lineal. En mallas refinadas localmente o arbitrariamente, es necesario una estructura de datos altamente sofisticada para almacenar y procesar los coeficientes de la matriz. Por otra parte, las ventajas de la malla flexible podrían estar contrabalanceado por el tiempo consumido en la solución lineal.

El proceso de simulación se puede resumir en la Fig. 2.

Figura 2. Esquema del proceso de la simulación numérica.

3.3 APROXIMACIONES PARA LA DISCRETIZACIÓN DEL ESPACIO

Para cualquier operador diferencial o integral, se pueden emplear varias aproximaciones para la discretización, tales como la serie de Taylor, los métodos integrales y variacionales. Para problemas simples, estos conducen a ecuaciones en diferencias finitas idénticas o muy similares. Para ecuaciones diferenciales parciales más generales y mallas irregulares, las diferentes aproximaciones conducen de forma natural a diferentes sistemas de ecuaciones discretizadas. Aunque no hay estrictamente correspondencia, la Tabla 1 da una apreciación global de las aproximaciones matemáticas y los métodos numéricos obtenidos.

Tabla 1. Apreciación global de las aproximaciones matemáticas

Aproximación discretizada	Método Numérico
Serie de Taylor	Método diferencias finitas
Formulación Integral	Método volumen finito
Formulación variacional o Método Galerkin	Método diferencias finitas

El termino “ecuaciones en diferencias finitas” no es estrictamente confinado a ecuaciones derivadas por las serie de Taylor, porque todos los métodos mencionados anteriormente forman ecuaciones que contienen operadores diferenciales aplicados en una discretización fija desconocida.

El concepto de método de volumen finito esta muy cerca al de la aproximación por elementos finitos, por esto Forsyth¹ (1989) lo refirió como CVFE (*control volume finite element method*). Otro término, empleado por Narashiman y Witherspoon⁽⁴⁾ (1976), refleja la relación con el método convencional de diferencias finitas y es el de *Integrated finite difference method*.

Existen otras técnicas a nivel matemáticas para resolver las ecuaciones de flujo que no se tratan aquí, como los métodos espectrales, el método de características, etc. Además, es posible combinar los métodos y emplearlos para cada una de las diferentes partes de las ecuaciones, que es la aproximación más apropiada.

3.3.1 La serie de Taylor y las diferencias finitas. La idea básica es partir de la formulación diferencial, en este caso de la ecuación de flujo Ec. 2.26 para cada nodo, y se evalúa todas las derivadas por fórmulas de diferencias finitas. Estas aproximaciones son obtenidas a través de la expansión de la serie de Taylor. Luego, se expresan los valores de las variables en los nodos adyacentes a la celda, por expansión alrededor del nodo central de la celda, y se emplean las

¹ FORSYTH, P.A. *A Control Volume Finite Element Method for Local Grid Refinement*, SPE 18415, Houston , 1989.

⁽⁴⁾ NARASIMHAN, T.N. y WITHERSPOON, P.A. *An Integral Finite Difference Method for Analysing Fluid Flow in Porous Media*, Water Resources Research, 12 (1), 1976, 57-64 citado por STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria.

combinaciones lineales apropiadas de la expansión de la serie para obtener aproximaciones para las derivadas.

Esto se ilustra con un ejemplo simple: la segunda derivada de una función $\Phi(x)$ en un nodo x_I de una malla equidistante con espaciamiento h . Φ_I denota el valor $\Phi(x)$ en $x = x_I$. Para los dos puntos adyacentes a x_I , $x_{I\pm 1} = x_I \pm h$, expandiendo $\Phi_{I\pm 1}$ con la serie de Taylor alrededor de x_I :

$$\Phi_{I+1} = \Phi_I + \Phi'_I h + \frac{\Phi''_I h^2}{2} + \frac{\Phi'''_I h^3}{6} + \frac{\Phi^{IV}_I h^4}{24} + \frac{\Phi^V_I h^5}{120} + \frac{\Phi^{VI}_I h^6}{720} + \dots \quad (3.1)$$

$$\Phi_{I-1} = \Phi_I - \Phi'_I h + \frac{\Phi''_I h^2}{2} - \frac{\Phi'''_I h^3}{6} + \frac{\Phi^{IV}_I h^4}{24} - \frac{\Phi^V_I h^5}{120} + \frac{\Phi^{VI}_I h^6}{720} - \dots \quad (3.2)$$

Sumando la Ec. 3.1 y Ec. 3.2 y reagrupando, se obtiene una aproximación por diferencias centrales para Φ'' con un término R_I^2 llamado error de discretización local:

$$\Phi''_I = \frac{1}{h^2} (\Phi_{I-1} - 2\Phi_I + \Phi_{I+1}) + R_I^2, \quad (3.3)$$

$$R_I^2 = -\Phi^{IV}_I \frac{h^2}{12} - \Phi^{VI}_I \frac{h^4}{360} - \dots \quad (3.4)$$

Restando la Ec. 3.2 de la Ec. 3.1 se tiene una aproximación central para Φ' ,

$$\Phi'_I = \frac{\Phi_{I+1} - \Phi_{I-1}}{2h} + R_I^c \quad (3.5)$$

$$R_I^C = -\Phi_I^m \frac{h^2}{6} - \Phi_I^V \frac{h^4}{120} - \dots \quad (3.6)$$

Para las aproximaciones progresivas:

$$\Phi_I' = \frac{\Phi_{I+1} - \Phi_I}{h} + R_I^f \quad (3.7)$$

$$R_I^f = -\Phi_I^f \frac{h}{2} - \Phi_I^m \frac{h^2}{6} - \dots \quad (3.8)$$

y por último una aproximación por diferencias regresivas:

$$\Phi_I' = \frac{\Phi_I - \Phi_{I-1}}{h} + R_I^b \quad (3.9)$$

$$R_I^b = -\Phi_I^b \frac{h}{2} - \Phi_I^m \frac{h^2}{6} - \dots \quad (3.10)$$

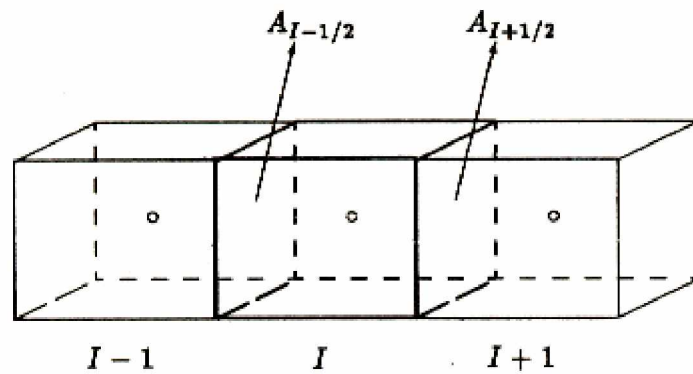
3.3.2 Formulación integral y técnica de volumen finito. Aquí la idea básica es partir de la formulación integral de la ecuación de flujo (Ec. 2.20). La construcción de un sistema de celdas consiste en una malla de nodos donde cada nodo está rodeado por un bloque. Luego de construir el sistema de celdas, se aproximan los operadores de gradiente a una formulación en diferencias y se evalúan las integrales para cada celda. A veces la integral del volumen es aproximada (en los casos simples) al volumen del bloque el cual es un valor promedio de la integral. Las integrales de superficie son divididas en una suma de integrales sobre todas las sub-superficies que únicamente se encuentran conectando a la celda con las

celdas vecinas. A menudo, la integral sobre una sub-superficie es aproximada a la velocidad promedio de flujo por área de superficie.

Como un ejemplo simple, y para comparar con la aproximación en diferencias finitas (Ec. 3.3), se aplica este método para el término de flujo en un modelo unidimensional simple en celdas de igual tamaño como se muestra en la Fig. 3:

$$\int_{V_i} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dV = \int_{A_{I+1/2}} K \frac{\partial \Phi}{\partial x} d\bar{n} + \int_{A_{I-1/2}} K \frac{\partial \Phi}{\partial x} d\bar{n} \quad (3.11)$$

Figura 3. Sistema de bloque unidimensional



Para máxima exactitud, la superficie $A_{I-1/2}$ es situado en el centro de la celda y una formulación en diferencias centrales (Ec. 3.6) es empleada para aproximar $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ en

$A_{I\pm 1/2}$. Obteniendo:

$$\int_{V_i} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dV \approx A_{I+1/2} K_{I+1/2} \frac{\Phi_{I+1} - \Phi_I}{h} + A_{I-1/2} K_{I-1/2} \frac{\Phi_{I-1} - \Phi_I}{h} \quad (3.12)$$

Para K constante, después dividir por V_i , ésta es esencialmente la misma aproximación en diferencias finitas como la Ec. 3.3:

$$\int_{V_i} K \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dV \approx K \frac{\Phi_{i-1} - 2\Phi_i + \Phi_{i+1}}{h^2} \quad (3.13)$$

3.3.3 Método de elementos finitos. Estos pueden ser obtenidos de formulaciones variacionales, pero debido a que no se deriva una formulación variacional de las ecuaciones de balance, se emplea la aproximación Galerkin. Aunque esta es una forma bastante directa, no existen detrás de ésta tales interpretaciones heurísticas obvias para los principios matemáticos de la técnica de volumen finito. El procedimiento básico es:

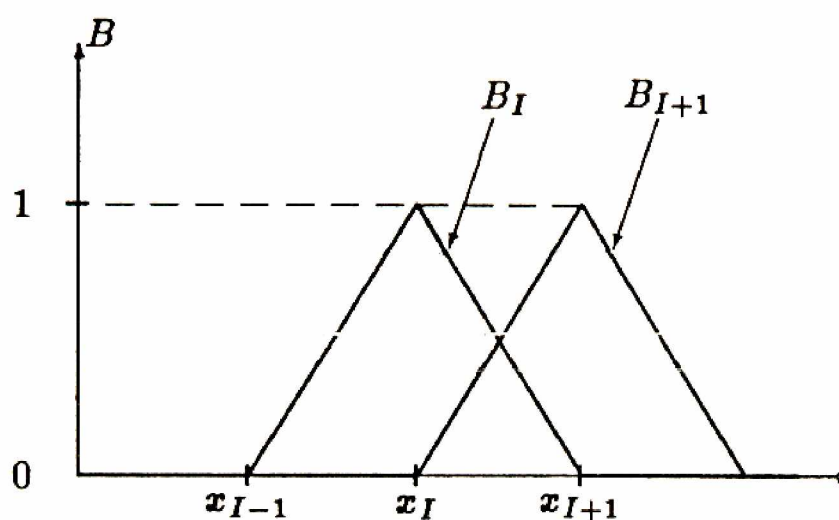
- a. Construir un sistema de enmallado, generalmente una malla de elementos triangulares o cuadrangulares.
- b. Elegir una serie de funciones básicas. En casos simples, varían linealmente dentro de cada elemento triangular.
- c. La solución de la ecuación diferencial parcial se aproxima por una combinación lineal de estas funciones. Para obtener la ecuación del i -ésimo elemento, multiplicamos la ecuación diferencial por la función básica i -ésima y se integra sobre todo el dominio.

Este método se aplicará para un caso simple de flujo como en la Ec. 3.11, en una malla equidistante y para las funciones de Chapeau como funciones básicas. Para esta aproximación, Φ se asume como función lineal dada por una combinación lineal de las funciones básicas.

$$\Phi = \sum_I \Phi_I B_I \quad (3.14)$$

Debido a la elección especial de B_I , la expansión del coeficiente Φ_I es simplemente el valor de $\Phi(x)$ en $x = x_I$.

Figura 4. Funciones de Chapeau



Remplazando Φ en la Ec. 3.11 obtenemos, después de multiplicar por B_I , e integrar:

$$\begin{aligned} \int_{x_{I-1}}^{x_{I+1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) B_I dx &= - \int_{x_{I-1}}^{x_{I+1}} K \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial B_I}{\partial x} dx \\ &= \sum_{J=I-1}^{I+1} -\Phi_J \int_{x_{I-1}}^{x_{I+1}} K \frac{\partial B_J}{\partial x} \frac{\partial B_I}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (3.15)$$

Se emplea el hecho de que B_i es cero en la parte externa del intervalo $x_{i-1} < x < x_{i+1}$ y se lleva a cabo una integración por partes. Esta es una característica típica de las funciones básicas de elementos finitos: ellas son diferentes de cero únicamente en un pocos de elementos. Sin embargo, una integral, tal como la de la Ec. 3.15, se ha dividido anteriormente en una suma de pocos términos que contienen productos de funciones básicas integradas sobre estos elementos en donde ambas son diferentes de cero. Para K constante, las integrales en la Ec. 3.15 tienen los valores:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} K \frac{\partial B_j}{\partial x} \frac{\partial B_i}{\partial x} dx = \begin{cases} -1; i \neq j \\ 2; i = j \end{cases} \quad (3.16)$$

Esto lleva exactamente la misma formulación en diferencias como en la Ec. 3.13.

3.3.4 Comparación. A excepción del caso más simple, en donde estos métodos producen discretizaciones idénticas, los tres presentan diferentes ventajas para diversos tipos de problemas. El método de la serie de Taylor se aplica a ecuaciones diferenciales en general, y el error local de discretización se obtiene automáticamente. Los métodos de elementos finitos se emplean ampliamente debido a su facilidad para la generar mallas flexibles. Las técnicas de volumen finito combina las ventajas de estos métodos: mallas flexibles y la interpretación intuitiva de las expresiones diferenciales. La formulación integral de la Ec. 2.20 es el modelo matemático del concepto heurístico de la ecuación de balance de masa para los bloques de la malla. Sin embargo, el método de volumen finito guarda este concepto en las ecuaciones discretizadas.

El hecho de que la técnica de discretización usada provea una clara interpretación física, representa una ventaja definitiva. Otras condiciones para evitar el

comportamiento no físico de la solución (saturaciones negativas, etc.), se indican más adelante. Todas estas se cumplen para el método de volumen finito. Estas también se cumplen en algunos casos, para la serie de Taylor y el método de elementos de finitos (de hecho, cuando la serie de Taylor se usa para derivar ecuaciones en diferencias, normalmente el concepto de volumen de control permite encontrar las discretizaciones correctas), pero no se realizan de manera automática si se aplican a problemas generales de flujo y mallas comunes.

3.3.5 Transmisibilidad positiva. Si el potencial en bloque I es mayor que en bloque J , entonces la masa debe fluir de I a J y no al contrario.

3.3.6 Propiedades de la matriz. En el límite de la fase simple, las discretizaciones apropiadas producen ecuaciones de presión con una simetría, generando una matriz diagonalmente dominante con elementos positivos en la diagonal y elementos negativos fuera de ella (una matriz M). Esto garantiza que la solución de la presión va a guardar un comportamiento físicamente razonable y no va a ser producto simplemente de la solución matemática.

3.4 DISCRETIZACIÓN POR VOLUMEN FINITO EN UNA MALLA GENERAL

Considere la celda mostrada en la Fig. 5. V_I es el volumen del bloque, x_I es el nodo central del bloque y x_J es el punto de la celda en la posición J fuera del bloque. A_{IJ} representa la superficie común entre los bloques I y J . En el caso general, el bloque es confinado por superficies curvas que pueden ser aproximadas por planos.

Para el término flujo (Ec. 2.28)

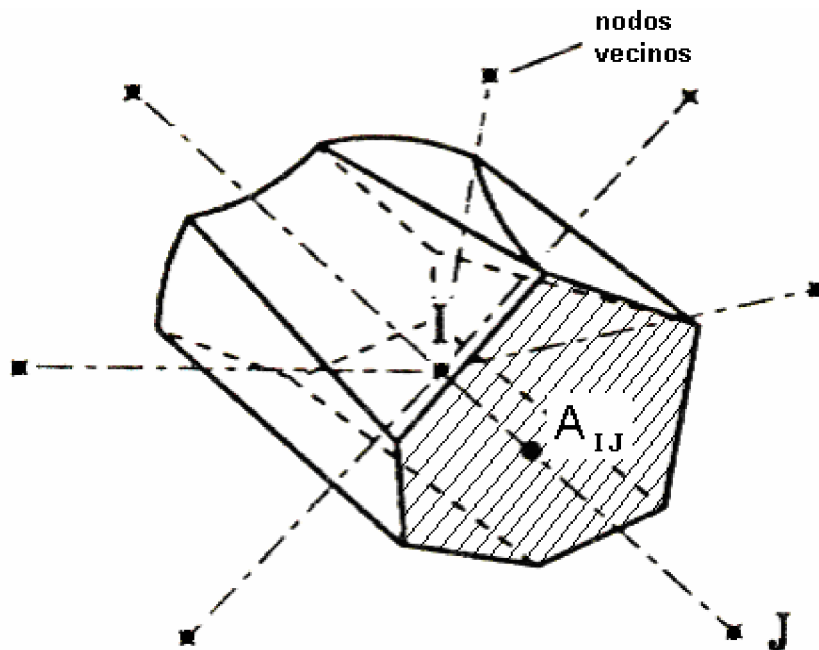
$$Q_{IJk} = \iint_{A_{IJ}} \sum_{p=1}^P \Lambda_{pk} \nabla \Phi_p(\bar{k}\bar{n}) dA \quad (3.17)$$

Hay que aproximar:

- La superficie A_{IJ} conectando el bloque I con los J -ésimos vecinos.
- La componente movilidad Λ_{pk}
- El producto escalar $\nabla \Phi_p(\bar{k}\bar{n})$

Las superficies A_{IJ} y la orientación de los vectores normales unitarios es determinado por las reglas de construcción de la malla. Una vez la malla este dada, el área y la orientación pueden ser calculadas con exactitud por medio de la geometría.

Figura 5. Celda en 3D



Puesto que Q_{Ijk} , es una integral de superficie, la componente movilidad es requerida en A_{IJ} , la cual es falsa en algunas partes entre los nodos I y J . Sin embargo, las variables de estado son asignadas a los nodos. Para obtener los valores aproximados de λ_{pk} , es necesario aplicar algún tipo de promedio entre los nodos I y J , para los casos más simple se toma uno de estos valores. Para la aproximación del producto escalar $\nabla\Phi_p(\vec{k}\vec{n})$, se considera primero un medio poroso isotrópico. En este caso, el tensor puede ser reemplazados por un valor escalar k .

Dentro de un elemento de la malla, por ejemplo un tetraedro como se muestra en Fig 6, se asume que el potencial varía linealmente. Esta es la suposición más simple. Por supuesto, teniendo en cuenta más nodos, se pueden mejorar las aproximaciones. El concepto físico, también puede hacer pensar en otra función para ajustar el potencial. En un problema con flujo casi radial, puede ser más apropiada una aproximación que es lineal en un plano logarítmico.

El gradiente de potencial dentro del elemento está dado por:

$$\nabla\Phi = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Phi_J - \Phi_I \\ \Phi_K - \Phi_I \\ \Phi_L - \Phi_I \end{pmatrix} = A^{-1}\delta\vec{\Phi} \quad (3.18)$$

Aquí, las filas de la matriz A contiene los vectores \vec{h}_1, \vec{h}_2 y \vec{h}_3 apuntando del nodo I al nodo J, K, L , respectivamente. En $\delta\vec{\Phi}$, las diferencias de potencial se colocan como un vector columna. Igualmente para el producto escalar $\nabla\Phi \cdot \vec{n}$,

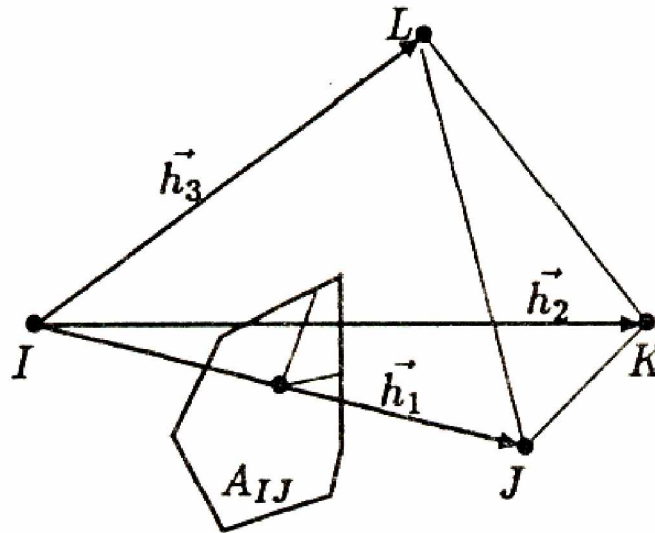
$$k\nabla\Phi \cdot \vec{n} = k\vec{a} \cdot \delta\vec{\Phi} = k[a_1(\Phi_J - \Phi_I) + a_2(\Phi_K - \Phi_I) + a_3(\Phi_L - \Phi_I)] \quad (3.19)$$

donde $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ está dado como la solución del sistema.

$$A^T \vec{a} = \vec{n}, \quad \vec{a} = (A^T)^{-1} \vec{n} \quad (3.20)$$

(A^T denota la transpuesta de A). Como se indica en la Fig. 6, únicamente una parte de la superficie imaginaria A_{IJ} está dentro del tetraedro y por consiguiente

Figura 6. Elemento de la malla y comunicación de superficies entre los bloques I y J.



la Ec. 3.19 puede ser empleada únicamente para el cálculo del flujo a través de esta superficie. Deben escogerse otros puntos vecinos para el flujo a través de esas partes de A_{IJ} pertenecientes a otros elementos. Así, el término de flujo está dado por:

$$Q_{IJk} = \sum_{p=1}^P (A_{pk})_{IJ} (b_{IJ} (\Phi_J - \Phi_I)_p + b_{IK} (\Phi_K - \Phi_I)_p + \dots + b_{IN} (\Phi_N - \Phi_I)_p) \quad (3.21)$$

donde las constantes b_{IJ}, \dots, b_{IN} , y también los números actuales de estos términos dependen únicamente de la geometría de la malla. Se puede observar de esta fórmula que el flujo del bloque I al bloque J en general, no depende únicamente de la diferencia de presión entre los bloques.

Sin embargo, el producto escalar $\nabla\Phi \cdot \vec{n}$ puede ser aproximado por una relación más simple para los siguientes casos:

- a. El vector \vec{n} es paralelo al vector h_1 , por ejemplo, la superficie que conecta los bloques I y J es perpendicular a la línea recta que conecta los nodos I y J . Entonces, la solución de la Ec. 3.20 es $\vec{a} = (a_1, 0, 0)$, donde $a_1 = |\vec{h}_1|^{-1} = 1/h_{IJ}$.

Por consiguiente,

$$\nabla\Phi \cdot \vec{n} = \frac{\Phi_J - \Phi_I}{h_{IJ}} \quad (3.22)$$

- b. Los nodos I y J se encuentran en la misma línea de flujo. Entonces $\nabla\Phi$ en la dirección $\vec{h} = I\vec{J}$ y el producto escalar esta dado por :

$$\nabla\Phi \cdot \vec{n} = \frac{\Phi_J - \Phi_I}{h_{IJ}} \cos\gamma \quad (3.23)$$

donde γ denota el ángulo entre \vec{h} y \vec{n} .

El primer caso es válido para una malla ortogonal. La ortogonalidad es una propiedad únicamente geométrica dentro del método de construcción de la malla. El segundo caso es llamado malla de tubo de flujo (*streamtube*), la cual está basada en suposiciones hidrodinámicas que pueden ser más o menos válidas.

Esta permite asumir que las actuales líneas de flujo (orientadas en la misma dirección de $\nabla\Phi$) para un ángulo v con la misma dirección $\vec{h} = I\vec{J}$, permite que ε denote el ángulo verdadero entre el $\nabla\Phi$ y \vec{n} (en dos dimensiones, $\varepsilon = \gamma - v$). En lugar de Ec. 3.23,

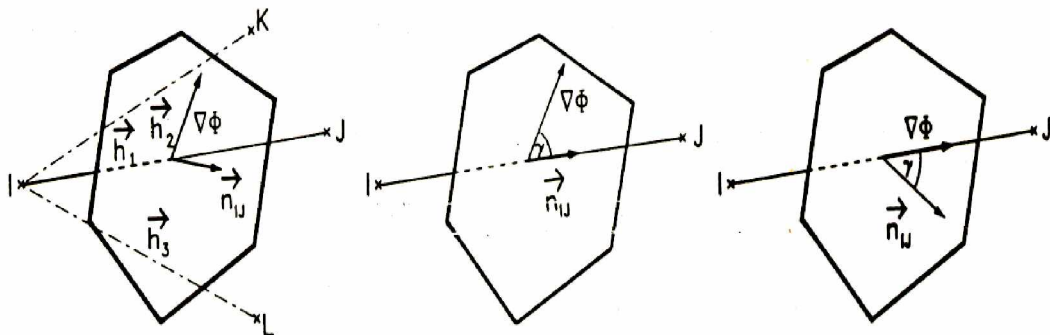
$$\nabla\Phi \cdot \vec{n} = \frac{\Phi_J - \Phi_I}{h_{IJ}} \cos\gamma + E_{str}$$

donde un término adicional de error:

$$E_{str} = |\nabla\Phi|(\cos\varepsilon - \cos\delta \cos\gamma) \tag{3.24}$$

el cual es independiente de h , por ejemplo, este no tiende a cero cuando $h \rightarrow 0$. Un término similar de error se obtiene cuando la suposición del caso 1 es violado, por ejemplo, cuando el flujo a través de A_{IJ} no es ortogonal a \vec{IJ} .

Figura 7. Aproximación de $\nabla\Phi$ un caso general, caso ortogonal, y caso tubo de flujo.



Para el caso ortogonal, el término de flujo está dado como:

$$Q_{IJk} = \sum_{p=1}^P (A_{pk} k)_{IJ} b_{IJ} (\Phi_J - \Phi_I)_p \quad (3.25)$$

donde

$$b_{IJ} = \frac{A_{IJ}}{h_{IJ}} \quad (3.26)$$

Una fórmula similar es válida para el caso de la malla de tubo de flujo (*streamtube*) donde sólo la constante b_{IJ} ha de ser cambiada,

$$Q_{IJk} = \sum_{p=1}^P (A_{pk} k)_{IJ} b_{IJ}^{str} (\Phi_J - \Phi_I)_p \quad (3.27)$$

donde

$$b_{IJ}^{str} = \frac{A_{IJ}}{h_{IJ}} \cos \gamma \quad (3.28)$$

En el término acumulación de la Ec. 2.23

$$\iiint_{V_I} \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \sum_{p=1}^P S_p \xi_p x_{pk} \right] dV \quad (3.29)$$

La derivada del tiempo se reemplazó por una aproximación en diferencias. En ocasiones, la integral de volumen es aproximado al volumen del boque I . Se obtiene:

$$\left(\iiint_{V_I} \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \sum_{p=1}^P S_p \xi_p x_{pk} \right] dV \right)^{n+1} \approx \frac{V_I}{\Delta t} \left(\left[\phi \sum_{p=1}^P S_p \xi_p x_{pk} \right]_I^{n+1} - \left[\phi \sum_{p=1}^P S_p \xi_p x_{pk} \right]_I^n \right) \quad (3.30)$$

donde V_I denota el volumen de la celda I , n es el índice para el nivel de tiempo, $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. En la discretización de este término y el de almacenamiento, una forma irregular de la celda no tiene influencia con tal de que el volumen del bloque sea evaluado correctamente.

3.5 TRANSMISIBILIDAD

Para mallas ortogonales y para mallas de tubos de flujo (*streamtube*) el término que representa el flujo a través de la superficie conectada entre dos celdas adyacentes puede ser calculado empleando sólo los valores de potencial para los dos nodos I y J . La Ec. 3.25 y Ec. 3.27 pueden ser escritas en una forma común, como

$$Q_{IJk} = T_{IJ} \sum_{p=1}^P (A_{pk})_{IJ}^{n+1} (\Phi_J - \Phi_I)_p^{n+1} \quad (3.31)$$

El término T_{IJ} , la transmisibilidad entre los bloques, depende sólo de la geometría y la permeabilidad.

En un modelo discreto de bloques se asume que la permeabilidad dentro de cada bloque es constante, pero en los bloques adyacentes generalmente tendrá valores diferentes. Debido a que la Ec. 3.31 es lineal en la diferencia de potencial, tal como la ley de Ohm, se puede emplear la ley de Kirchoff para calcular la resistividad o transmisibilidad total para los elementos conectados en serie o en

paralelo. Para el caso de una conexión en paralelo, por ejemplo, dos celdas adyacentes, ver Fig. 8,

$$r_{IJ} = r_i^J + r_j^I = \frac{1}{T_i^J} + \frac{1}{T_j^I} \quad (3.32)$$

donde r_i^J es la porción de la resistividad total resultante del espacio entre el nodo I y la superficie A_{IJ} . La resistividad r_j^I esta definida de forma similar. El recíproco de la resistividad es llamado transmisibilidad del bloque T_i^J y T_j^I . La resistividad y la transmisibilidad entre bloques es:

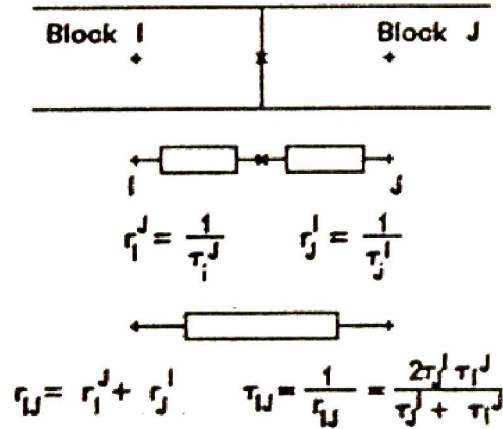
$$T_{IJ} = \frac{1}{r_{IJ}} = \frac{1}{1/T_i^J + 1/T_j^I} = \frac{T_i^J T_j^I}{T_i^J + T_j^I} \quad (3.33)$$

En el método de volumen finito, T_{IJ} es una cantidad para ser evaluada en la superficie que separa al bloque I y J . La transmisibilidad entre bloques definida por la Ec. 3.33 es un promedio armónico de la transmisibilidad entre los bloques I y J . La interpretación física de este valor promedio es la razón por la que es preferido, comparado a otras definiciones de valor promedio, tales como la media aritmética o geométrica.

Cada bloque tiene tantas transmisibilidades como celdas vecinas. Comparando la Ec. 3.25 con la Ec. 3.31, la transmisibilidad para el caso ortogonal es calculada como:

$$T_i^J = k_i^J \frac{A_{IJ}}{h_i^J} \quad (3.34)$$

Figura 8 Cálculo de la transmisibilidad entre bloques



y para el caso de tubos de flujo (*streamtube*), de la Ec. 3.27 y Ec. 3.31

$$T_I^J = k_I^j \frac{A_{IJ}}{h_I^j} \cos \gamma \quad (3.35)$$

donde

k_I^j es la permeabilidad del bloque I entre el nodo I y la superficie A_{IJ}

h_I^j es la sección de la línea conectada IJ contenidas en el bloque I.. ($h_{IJ} = h_I^j + h_J^i$)

γ es el ángulo entre \vec{h}_{IJ} y el vector normal de la superficie A_{IJ}

3.6 CONDICIONES DE FRONTERA

Es esencial que condiciones de frontera del yacimiento sean formuladas y aproximadas de una forma, tal que, permita modelar la interacción del yacimiento

con sus alrededores de la manera deseada. Dos tipos de condiciones de frontera son comúnmente empleados en simulación de yacimientos.

3.6.1 Condiciones de frontera Dirichlet. (Condiciones de primer tipo), Para este tipo se especifica el valor del potencial en la frontera del yacimiento Γ :

$$\Phi(\bar{x}, t) = \Phi_{\Gamma}^0(t), \quad \bar{x} \in \Gamma \quad t > 0 \quad (3.36)$$

Este tipo corresponde a una presión constante en la frontera. Los nodos de las celdas han de estar en la frontera para obtener una buena aproximación. Para un nodo de la celda en la frontera I no es necesario calcular el valor del potencial (o la presión) porque ya esta dada para este punto por las condiciones de frontera. La ecuación de balance es empleada para calcular el flujo entre los bloques circundantes. El término de flujo Q_{IJ} , donde J son los nodos internos de la malla, será calculado para los puntos internos de la malla.

Al considerar una presión constante en la frontera está no esta cerrada, es decir, hay flujo a través de la frontera. Así, las condiciones de frontera han de ser especificadas también para la saturación. Condiciones de entrada de un flujo son fácilmente tratadas. Por ejemplo, el flujo de agua que entra al yacimiento de un acuífero es modelado manteniendo la saturación constante, $S_w = 1$. La salida de fluido del yacimiento generalmente ocurre a través de los pozos y es modelado por los términos de sumidero.

3.6.2 Condiciones de frontera Neumann (o condiciones de segundo tipo) Se fija el gradiente de potencial en la frontera Γ . Para los problemas de simulación de

yacimientos, esto es equivalente a expresar la velocidad de flujo a través de la frontera. Eso significa que:

$$\vec{u}_B = \vec{u}_B(\bar{x}, t), \quad t > 0 \quad \bar{x} \in \Gamma \quad (3.37)$$

es una función conocida. En los casos prácticos

$$\vec{u}_B = 0$$

es decir, la frontera está cerrada. En la formulación integral de la ecuación de flujo este tipo de frontera es representado por los bloques en la frontera. Un flujo nulo a través de esta superficie es modelado cancelando los correspondientes términos en la ecuación en diferencias (Ec. 3.25). Es posible construir celdas especiales en la frontera en donde los nodos representen un bloque imaginario.

3.7 MEDIO ANISOTRÓPICO

En casos donde el escalar permeabilidad no puede modelar el comportamiento del flujo en un medio poroso, un tensor \bar{k} es introducido. La ley de Darcy (Ec. 2.13) establece una relación lineal entre el gradiente de potencial $\nabla\Phi$ y la velocidad de flujo \vec{u} . En general, esta dependencia lineal cambia el valor absoluto de $\nabla\Phi$ y su dirección. La velocidad de flujo no es ampliamente paralela al gradiente de potencial.

En una aproximación en diferencias finitas, se deben aproximar los términos como:

$$\nabla \cdot \left(\bar{k} \nabla \Phi \right) = k_{11} \Phi_{xx} + k_{22} \Phi_{yy} + k_{33} \Phi_{zz} + 2k_{12} \Phi_{xy} + 2k_{13} \Phi_{xz} + 2k_{23} \Phi_{yz} \quad (3.38)$$

Para problemas en dos dimensiones, el términos correspondiente a la combinación de derivadas no puede ser aproximados por el usual esquema de cinco puntos (la situación es similar en tres dimensiones para el esquema de siete puntos). Una posibilidad es orientar el sistema coordenado para que este coincida con los ejes principales de \bar{k} . En tal sistema coordenado, \bar{k} es una matriz diagonal, y la Ec. 3.38 no tendría una combinación de derivadas. Sin embargo, no es posible orientar una malla para que esta esté alineada por todos los lados en el yacimiento con los ejes principales del tensor permeabilidad. Otra forma de tratar los términos correspondiente a la combinación de derivadas (en 2D) es emplear un esquema de nueve puntos (Shiralkar² 1989).

Empleando técnicas de volúmenes finitos el termino flujo $\nabla\Phi_p(\bar{k}\vec{n})$ puede ser calculado de la misma manera como para el caso isotrópico. La única diferencia es que $\nabla\Phi_p$ es multiplicado por el vector $\bar{k}\vec{n}$ a cambio de $\vec{k}\vec{n}$. Empleando Ec. 3.18 para el gradiente de potencial se llega a una formula similar a Ec. 3.19

$$\nabla\Phi(\bar{k}\vec{n}) = \vec{c} \cdot \delta\vec{\Phi} = (c_1(\Phi_J - \Phi_I) + c_2(\Phi_K - \Phi_I) + c_3(\Phi_L - \Phi_I)) \quad (3.39)$$

donde \vec{c} esta dado por

$${}^T A \vec{c} = \bar{k}\vec{n} \quad \text{o} \quad \vec{c} = ({}^T A)^{-1} \bar{k}\vec{n} \quad (3.40)$$

Sin embargo, si el tensor permeabilidad es considerada, el término flujo Q_{ijk} puede ser aproximado de nuevo por la forma dada por la Ec. 3.21.

² SHIRALKAR, G.S. *Reservoir Simulation of Generally Anisotropic Systems*, SPE 18442, Houston, 1989

La aproximación es más simple para ciertos casos:

- a. El vector $\vec{k}n$ es paralelo a \vec{h} . Este es el caso para una malla ortogonal que (como se discutió anteriormente, para aproximaciones en diferencias finitas) coincide con los ejes principales de \bar{k} , entonces esta en una forma diagonal.

Análogamente para la derivación de la Ec. 3.22.

$$\nabla\Phi \cdot (\vec{k}n) = \left| \vec{k}n \right| \frac{\Phi_J - \Phi_I}{h_{IJ}} \quad (3.41)$$

- b. En una malla de tubos de flujo, los efectos de la anisotropía son ya son considerados en las líneas de flujo. Por tanto, los nodos $\bar{k}\nabla\Phi$ están en la dirección $\vec{h} = I\vec{J}$. Esta malla permite que γ denote el ángulo entre \vec{h} y \vec{n} . Entonces

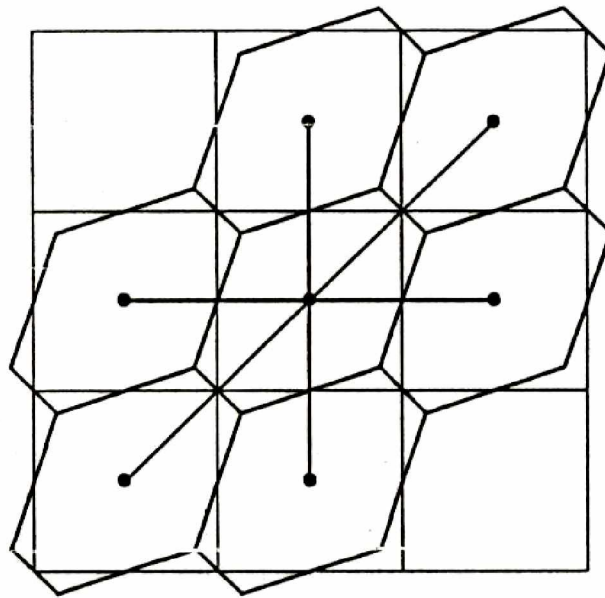
$$(\bar{k}\nabla\Phi) \cdot \vec{n} = \left| \vec{k}n \right| \frac{\Phi_J - \Phi_I}{\left(\begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ k & h \end{matrix} \right) \cdot \vec{h}} |\vec{h}| \cos\gamma \quad (3.42)$$

Para una malla de tubos de flujo, es decir, para $\gamma = 0$

$$(\bar{k}\nabla\Phi) \cdot \vec{n} = \frac{\Phi_J - \Phi_I}{h_{IJ}} \frac{1}{\left(\begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ k & n \end{matrix} \right)} \quad (3.43)$$

Se debe notar que para un escalar k , todas estas formulas se reducen a la Ec. 3.22 y 3.23, respectivamente. Fig. 9 muestra de que modo un sistema de bloque

Figura 9. Sistema de bloques \bar{k} -ortogonal



cartesianos ortogonales es alterado por el concepto de \bar{k} -ortogonal. En este ejemplo,

$$\bar{k} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

Los ejes principales son orientados diagonalmente. Obsérvese que por esta razón, las superficies conectadas los bloques para su diagonal vecina son ortogonales (en el sentido usual) para las líneas conectadas.

4. ERROR NUMÉRICO

4.1 ERROR DE DISCRETIZACIÓN

La discretización para los términos de flujo expuesta en el capítulo 3 fue obtenida asumiendo una dependencia lineal de Φ dentro de los elementos de una malla triangular. Esta suposición genera un error local de discretización, y la forma explícita de este término es obtenida por la expansión de la serie de Taylor. En mallas regulares y para movilidad constante, el término de flujo en la Ec. 3.25 es aproximado por una formulación en diferencias finitas (Ec. 3.25), que en una dimensión es esencialmente la Ec. 3.4 con un error local de discretización del orden $o(h^2)$. Una malla irregular, con coeficientes y con movilidad tratada por funciones de ponderación de bajo orden (corriente arriba), se introducen términos adicionales de error. Así en los casos más comunes, las aproximaciones en diferencias finitas son de orden $o(h)$ o incluso menores.

Sin embargo, estas pueden estar desviándose al tener en cuenta solo el análisis del error local de discretización en la exactitud global de la solución. En casos simples (ecuaciones diferenciales lineales, malla regular), el error global en la solución será del mismo orden que el error local de discretización. Pero en casos más generales esto puede ser no válido.

Los errores de Discretización actúan como términos fuente adicionales en las ecuaciones de balance, es decir, una solución numérica de la Ec. 2.20 más aproximada a la solución exacta se obtiene al añadir los términos fuente adicionales. El error en la solución numérica generado por tales términos de fuente y/o sumidero adicionales pueden ser suavizados o incluso cancelados entre bloques vecinos. Por ejemplo, las mallas cartesianas pueden construirse bajo el esquema de punto distribuido o punto centrado. Los términos de flujo se

aproximan con un error $O(h)$ en una malla de punto distribuido, pero en una malla de punto centrado, el error de la discretización es normalmente $O(1)$, es decir, permanecerá constante sin tener en cuenta el tamaño de la celda. Sin embargo, un análisis más profundo muestra que este esquema es convergente, pero depende de la irregularidad de malla (cambios suaves o abruptos en el espaciamiento, la irregularidad local o global, etc.) si la convergencia es de orden $O(h)$ o $O(h)^p$ con algún potencial fraccional $0 < p < 1$.

Otro ejemplo es el acoplamiento de una malla fina local a una malla gruesa global. Una técnica para este refinamiento local emplea un orden muy bajo de acoplamiento para la presión (Heinemann³ 1983). El error de truncamiento para este esquema es normalmente $O(1/h)$. El esquema es convergente, pero la convergencia puede ser lenta en cualquier región dentro de $O[h \log(1/h)]$ de la interfase entre mallas (Forsyth et al., (1986)).

De otro lado, una discretización con un error local $O(h)$ no puede asegurar convergencia a una única solución para los problemas con un fuerte efecto de la orientación de la malla.

Para el método de volumen finito, un análisis matemático del comportamiento de la convergencia fue dado por Heinrichs⁽⁵⁾ (1987). Al menos en la sola fase límite, este método es linealmente convergente. Otros autores como Forsyth⁴ (1989), y

³ HEINEMANN, Z., GERMEN, G., y HANTELIMANN, G. *Using local grid refinement in a multiple-application reservoir simulation*. Artículo SPE 12255, San Francisco USA 1983.

⁽⁵⁾ HEINRICH, B. *Finite difference methods on irregular networks*. Verlag Birkhauser, Basel, Boston, Stuttgart 1987. citado por STEINER Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*, Alpbach, 1988 y 1989. Leoben Austria p 365

⁴ FORSYTH, P.A. *A control volume finite element method for local grid refinement*. Artículo SPE 18415, Houston USA 1989.

Rozon⁵ (1989) emplearon la estrecha relación entre el volumen finito y el método Galerkin de elementos finitos (que se conoce por tener convergencia $O(h)$) para demostrar la convergencia de los método de volumen finito.

4.2 DISPERSIÓN NUMÉRICA

El efecto de los errores de discretización en la solución de la presión puede ser interpretado como términos fuente adicionales. Sin embargo, el efecto en la saturación es descrito por un término de dispersión adicional. Como ejemplo, considere el flujo unidimensional de dos fase incompresible. De las ecuaciones de balance (Ec. 2.26), es posible derivar una ecuación de convección-difusión para una saturación normalizada S , ver Peaceman⁽⁶⁾ (1977), o Aziz y Settari⁶ (1979).

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - V \frac{\partial S}{\partial x} \quad (4.1)$$

Los coeficientes D y V son funciones de la saturación. Para este problema, el término dispersión resulta de la presión capilar. En la solución en diferencias finitas el error de truncamiento tiene un efecto similar al término de dispersión física: estas invasiones externas presentan además frentes de saturación agudos como si estuviera presente una difusividad adicional. A este proceso de invasión y al término adicional de difusividad se le conoce como dispersión numérica

⁵ ROZON, B. J. *A generalizad finite volumen discretization method for reservoir simulation*. Artículo SPE 18414, Houston USA 1989.

⁽⁶⁾ PEACEMAN, D. W. *Fundamentals of numerical reservoir simulation, developments in petroleum sciencie 6*, Oxford: Elsevier 1977. citado por STEINER Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*, Alpbach, 1988 y 1989. Leoben Austria p 365

⁶ AZIZ, K. y SETTARI, A. *Petroleum reservoir simulation*. London y New York : Elsevier 1979.

Las ponderaciones en contra corriente conllevan a un error de truncamiento con un término principal $O(h)$ que es mayor al $O(h^2)$. Una aproximación en diferencias finitas modificada como:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = (D + D_{num}) \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - V \frac{\partial S}{\partial x} \quad (4.2)$$

posee un término adicional de difusividad D_{num} . Para una discretización explícita en tiempo, D_{num} está dado por:

$$D_{num} = \frac{Vh}{2} \left[1 - \frac{\tau}{h} V \right] \quad (4.3)$$

Y para una discretización implícita la dispersión numérica se expresa como:

$$D_{num} = \frac{Vh}{2} \left[1 + \frac{\tau}{h} V \right] \quad (4.4)$$

De estas expresiones se puede observar que tomando un intervalo de tiempo pequeño se incrementaría la dispersión numérica en el esquema explícito mientras que decrecería en el esquema implícito. Si el intervalo de tiempo es tan pequeño que el error de discretización del tiempo es despreciable, ambos esquemas tendrían igual dispersión. Para muchos problemas de simulación el paso de tiempo esta limitado por la tasa de flujo a través de las celdas y por los efectos de la no linealidad de las funciones PVT.

Como cita Peaceman⁽⁷⁾ (1977):

“Ahora se vuelve evidente un problema serio. Cuando la dispersión física D es pequeña, la solución real podría tener un frente relativamente agudo, y este puede ser importante para calcular la amplitud del frente. Cuando la dispersión numérica es alta, como frecuentemente lo es, D_{num} puede ser mucho mayor que D . Como resultado de esto, la dispersión numérica ocultará la dispersión física, generando un frente aparentemente mucho más distorsionado de lo que podría ser realmente.”

Sin embargo, una cantidad pequeña de dispersión numérica, incrementa la estabilidad de un esquema en diferencias finitas, ya que, una alta frecuencia de oscilaciones en la solución sería atenuada rápidamente. Para el modelo planteado por la Ec. 4.1 Peaceman proporciona algunas expresiones analíticas para el término de difusión numérica para varios esquemas en diferencias finitas.

En dos o tres dimensiones ocurre una complicación adicional. La difusión numérica no es invariante bajo la rotación de la malla, es decir, esta depende de la dirección del flujo respecto a la orientación de la malla. Además, los frentes invasión agudos y los efectos de enmascaramiento de la difusividad física, esta dependencia direccional puede causar serias distorsiones del patrón de flujo para razones de movilidad desfavorables en problemas de desplazamiento. Este fenómeno ha sido determinado como *efecto de la orientación de la malla*. Se han hecho muchos esfuerzos para superar estas dificultades. Existen algunas posibilidades:

- a. Hacer la difusión numérica más isotrópica. Este es, de hecho, el efecto de un esquema de nueve puntos o una malla hexagonal.

⁽⁷⁾ PEACEMAN, D. W. *Fundamentals of numerical reservoir simulation, developments in petroleum science* 6, Oxford: Elsevier 1977. citado por STEINER Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*, Alpbach, 1988 y 1989. Leoben Austria p 366.

- b. En mallas regulares, se presentan tendencias de los patrones de flujo a seguir las líneas coordenadas o ejes de simetría. En una malla irregular basada en una malla triangular arbitraria, no se presentan tendencias de flujo en el sistema de bloques y así los efectos de orientación se reducen.
- c. Emplear mallas curvilíneas a lo largo de las líneas de flujo. La difusión numérica, que hace que el flujo tienda a lo largo de las líneas coordenadas, está aún presente pero no distorsiona el patrón de flujo porque el flujo sigue las líneas coordenadas.
- d. Reduciendo así mismo la difusión numérica. Las ec. 4.3 y 4.4 sugieren que esto sería posible a través de una malla fina e intervalos de tiempo pequeños. Sin embargo, como fue observado por varios autores, el efecto de la orientación de la malla no desaparece o puede incluso volverse peor en mallas finas para el desplazamientos con razones de movilidad desfavorable*.
- e. Otra forma de reducir la dispersión numérica es la aplicación de esquemas diferenciales de muy alto orden, métodos combinados de elementos finitos y diferencias finitas (Russel y Wheeler⁽⁸⁾ 1983, Potempta⁷ 1983), ponderaciones más complejas que el esquema simple de contra corriente para la fase móvil

* La razón de movilidad entre la fase desplazante y la fase desplazada es menor que uno.

⁽⁸⁾ RUSSEL, T.F. y WHEELER, M.F. *Finite Element and Finite Difference Methods for Continuous Flow Problems*, en *The Mathematics of Reservoir Simulation*, SIAM, Philadelphia citado por STEINER Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*, Alpbach, 1988 y 1989. Leoben Austria.

⁷ POTENPA, T. *Three-dimensional simulation of steam flooding with minimal grid orientation*. Artículo SPE 11726. California USA 1983.

(Todd⁸ 1972, Frauenthal⁽⁹⁾ 1985) e introduciendo una dispersión artificial (Young 1986, Shiralkar y Stephenson⁹ 1987). Sin embargo, todos los métodos propuestos tienen serias limitaciones para ser empleados en simuladores tridimensionales multifásicos.

⁸ TODD, M. R. , O'DELL, P.M. y HIRASAKI, G. J. Methods for increased accuracy in numerical reservoir simulator. Artículo SPE 5522, Dallas 1975.

⁽⁹⁾ FRAUENTHAL, J.C., FRANCO di, R.B. y TOWLER, B.F. Reduction of Orientation Effects in Reservoir Simulation with Generalized Upstream Weighting, SPEJ, Dic 1985, 902-908 citado por STEINER Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*, Alpbach, 1988 y 1989. Leoben Austria.

⁹ SHIRALKAR, G.S. y STEPHENSON, R. E. *A general formulation for simulation physical dispersion and a new nine-point scheme*. Artículo SPE 16975, Dallas 1987.

5. IMPACTO DEL TAMAÑO DE LA CELDA Y LOS INTERVALO DE TIEMPO EN LA SIMULACIÓN DE YACIMIENTOS

El corazón de una formulación en diferencias finitas para un problema de simulación de yacimientos es la segmentación espacial del modelo dentro de un patrón, de una malla o bloque de celdas y la división del intervalo de tiempo total dentro de la misma secuencia en intervalos de tiempo muy pequeños. La representación matemática del flujo de fluidos, involucra la selección de incrementos espaciales y una secuencia de intervalos de tiempo.

5.1 CRITERIOS PARA SELECCIONAR EL TAMAÑO DE LA CELDA

El tamaño de celdas y el intervalo de tiempo deben ser lo suficientemente pequeños para satisfacer los siguientes requerimientos:

- a. Identificar saturaciones y presiones en las ubicaciones y tiempos específicos de forma adecuada requeridos por el estudio.
- b. Describir adecuadamente la geometría, la geología y las propiedades físicas iniciales del yacimiento.
- c. Describir la dinámica de las saturaciones y los perfiles de presión con suficiente detalle para satisfacer los objetivos del estudio.
- d. Modelar correctamente la mecánica de los fluidos en el yacimiento.

- e. Ser compatible con la matemática en los segmentos de simulación para que la solución de las ecuaciones de flujo de fluido sea exacta y estable.

Estos cinco requerimientos son los que se emplean más frecuentemente en simulación. El simulador debe satisfacer estos requerimientos, ya que de ello depende no solo que la simulación sea exitosa, si no que las respuestas a los cuestionamientos hechos, sean correctas y se aproximen a la realidad.

5.2 SELECCIÓN DEL TAMAÑO DE LAS CELDAS

Para que sea una herramienta efectiva para el ingeniero, un modelo de simulación debe poder predecir el comportamiento del yacimiento, bajo uno o más esquemas de producción e inyección. Los aspectos más importantes dentro del comportamiento del yacimiento, incluyen la productividad e inyectabilidad de los pozos, los niveles de presión y saturación de fluidos en la vecindad de cada pozo, GOR, WOR y relación gas/agua, la eficiencia en el desplazamiento y sobre todo, las eficiencias de recobro.

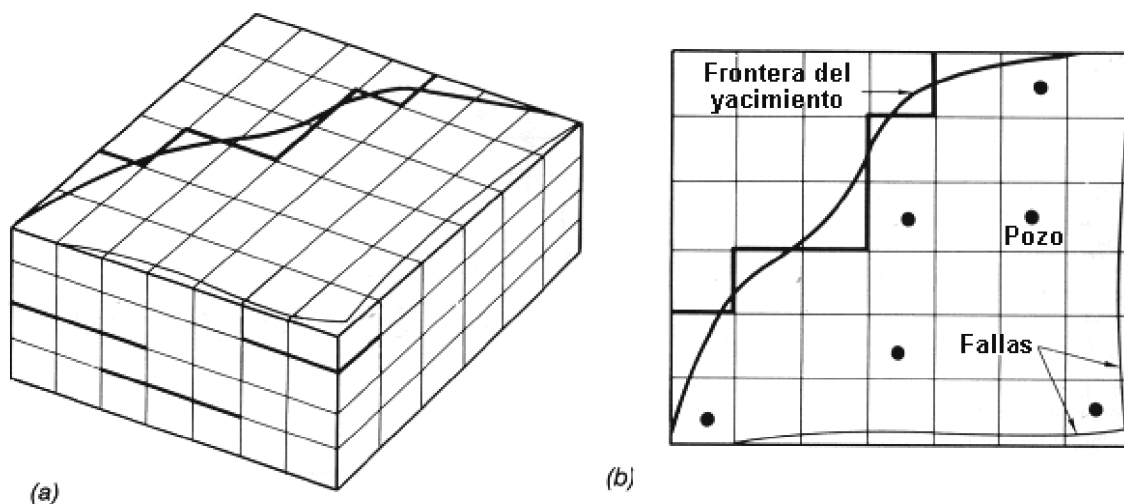
5.2.1 Localización de los niveles de presión y saturación. El primer paso en el desarrollo de un diseño preliminar del modelo del yacimiento es identificar los puntos en donde deben ser conocidos los niveles de presión y saturación. La localización espacial podría diseñarse incluyendo a todos los pozos o podría estar limitada por una pequeña subserie de estos.

La celda debe ser lo suficientemente fina, para que se pueda identificar el comportamiento del yacimiento en cada punto o localización establecida. Aunque una división pequeña describe bien el comportamiento del yacimiento, usualmente se requieren también divisiones grandes. La Fig 10, compara las mínimas celdas

Tales barreras son generalmente incluidas en los modelos por la asignación de una permeabilidad de cero en las fronteras internas de las celdas que las representan.

La representación de barreras internas solo es necesaria, si las barreras son sustancialmente amplias como para afectar seriamente el comportamiento de los fluidos. La Fig. 11, muestra un sistema de enmallado seleccionado para representar las fronteras (b) y las barreras de shale (a).

Figura 11. Diseño del modelo influenciado por la geometría interna y externa. En (a) se pueden apreciar las barreras de shale y en (b) se puede apreciar como trata de adaptarse la malla ante una frontera irregular del yacimiento



Los cambios significativos en permeabilidad y porosidad pueden ser representados en el modelo por una frontera entre las capas. Por ejemplo, los yacimientos altamente estratificados pueden requerir una amplia división de la malla en la dirección vertical. Además, si hay pequeñas variaciones de las propiedades en la vertical, la división no puede hacerse únicamente con el fin de describir dichas variaciones; también puede ser necesario representar el

comportamiento dinámico de los fluidos, aún en capas homogéneas. El número de celdas necesario para representar una zona y el número de celdas modeladas, pueden ser reducidas sin afectar los cálculos realizados para el yacimiento. Esto es muy importante, sobre todo si se desea construir un modelo grande.

La definición de las celdas en una zona de transición debe ser lo suficientemente fina, para describir con la exactitud requerida la distribución de la saturación, gradientes de presión y la eficiencia de desplazamiento en la zona. Si no es práctico definir una malla fina, se pueden emplear relaciones de pseudo permeabilidad relativa y presión capilar.

Las variaciones en las propiedades iniciales del fluido, (es decir, viscosidad del aceite, presión, saturación y GOR) se describen en la gran mayoría de ocasiones y de manera estricta, a través de las mallas finas en las regiones del modelo donde se presentan estos cambios. Pero puede que este tipo de malla se requieran para modelar otros factores de diseño. Por ejemplo, una zona viscosa cerca al contacto agua/aceite WOC, o presiones de saturación que son funciones de la profundidad o la posición areal, son factores que deben ser considerados cuando se seleccione el tamaño de las celdas. Una malla que represente inadecuadamente tales variaciones verticales o laterales podría generar predicciones irregulares de presión promedio, gradientes de presión, o de saturación de gas.

5.2.3 Representación del comportamiento dinámico de la saturación y la presión Una mala definición de la distribución de la presión y de la saturación puede generar errores en el cálculo de las tasas de producción y de la eficiencia de desplazamiento. Estos factores implican manejar resoluciones verticales y areales. Existen otros, tales como la dispersión numérica, que influyen en la exactitud de los cálculos involucrados en la solución de las ecuaciones de flujo.

Para representar adecuadamente el comportamiento dinámico, el modelo debe tener tres características esenciales:

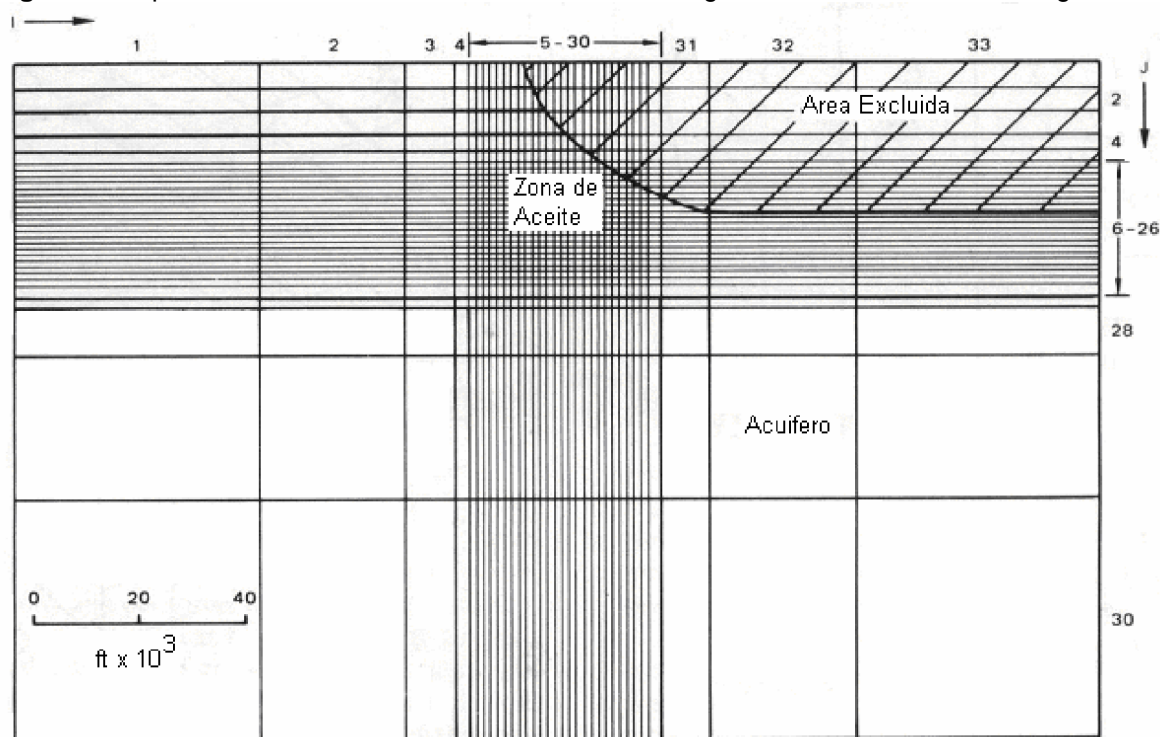
- a. Poder describir la presión en el yacimiento como una función del tiempo. El cálculo exacto de la presión es necesario para la predicción de la productividad del pozo, y en última medida, para la estimación del recobro total.
- b. Si hay más de una fase móvil en el yacimiento, el modelo debe ser capaz de describir la localización y el movimiento de los fluidos individualmente. Algunas divisiones verticales pueden ser importantes si existe un movimiento vertical significativo o segregación de fluidos.
- c. Debe ser capaz de representar correctamente el comportamiento de inyección y producción de los pozos, y su dependencia en presión y saturación. Frecuentemente, la representación detallada de pozos individuales en modelos completos areales y tridimensionales no es práctico.

5.2.4 Efecto del tamaño de la celda en el cálculo de la presión y la productividad. Si una región del yacimiento contiene solo una fase móvil y no tiene pozos, entonces serán necesarios muy pocos bloques para representar adecuadamente los cambios de presión. Por ejemplo, en la representación de acuíferos y capas de gas, se toman intervalos de tiempo más grandes que aquellos empleados para representar regiones multifásicas. La Fig. 12, muestra una típica malla areal que emplea bloques grandes para la representación de un acuífero; el gradiente de presión logra modelarse adecuadamente en el acuífero. Incluso si el acuífero representado contiene pozos inyectores, podría seguir siendo modelado con la malla mostrada, de tal manera que no es necesaria una descripción detallada del comportamiento de los pozos inyectores individuales. Sucede lo contrario con las zonas de aceite que contienen pozos productores, las

cuales si se modelan usualmente con enmallados finos, aún si el aceite es la única fase fluyendo en la zona, ya que casi siempre se requiere la predicción del comportamiento de producción individual.

En regiones multifásicas, la representación de los cambios en presión es más compleja. La malla debe describir adecuadamente la distribución de saturación, ya que los errores en el cálculo de esta distribución pueden generar errores en la movilidad del fluido, lo cual se traduce directamente en errores en el cálculo de las presiones.

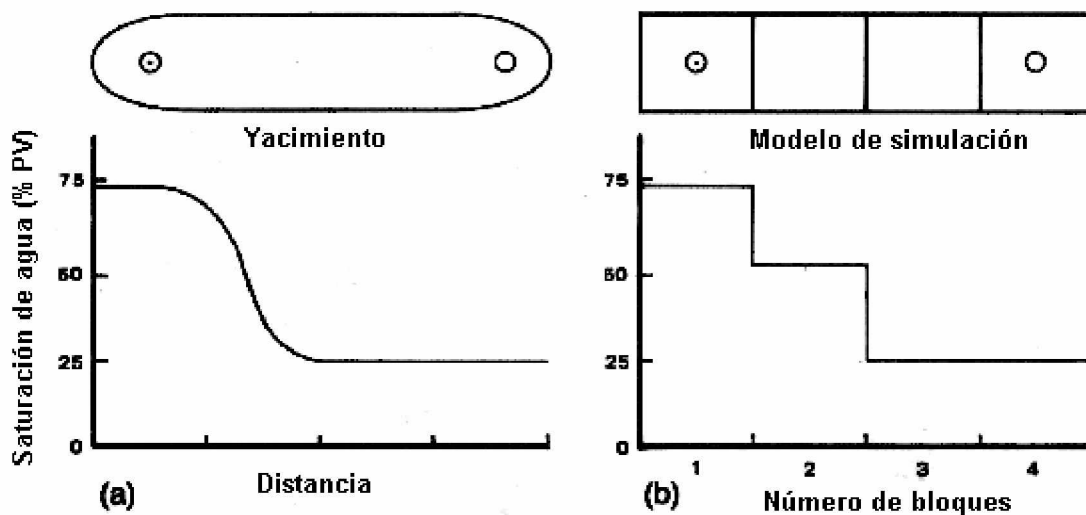
Figura 12. Típica malla areal en la cual es modelado una región con una fase con celdas grandes.



MATTAX Calvin C. y DALTON Robert L. Reservoir simulation. USA, SPE 1990 (pág 46).

5.2.5 Efecto del tamaño de la celda en el cálculo de la eficiencia de desplazamiento: Dispersión Numérica. La dispersión numérica es uno de los factores más importantes a ser tratados por las técnicas de análisis numérico, ya que puede causar graves distorsiones en la simulación de los procesos donde ocurren cambios rápidos de saturación; este fenómeno es característico de muchos tipos de desplazamiento llevados a cabo en el yacimiento. Para el problema que se ilustra en la Fig.13, los bloques 3 y 4 no han sido invadidos por agua y en estos, la movilidad será muy pequeña o nula. La saturación de agua en los bloques 1 y 2 estará muy por encima de la saturación inicial, por lo tanto, se tendrán altos valores de movilidad en estos bloques. Si se emplea una ponderación de la movilidad totalmente en contracorriente, la movilidad en el bloque 2 define la movilidad a ser empleada en el cálculo del flujo del bloque 2 al 3. Así, en el próximo intervalo de tiempo, el agua ya fluirá dentro del bloque 3, porque el agua se está movilizándose en el bloque 2. El agua que fluye al bloque 3 incrementaría la saturación de agua provocando el movimiento del agua en este bloque.

Figura 13. Modelo de cuatro celdas para inyección de agua a) yacimiento hipotético y su distribución en un determinado tiempo en la inyección de agua y b) modelo de cuatro bloques y distribución de saturación de agua modelada.



Como resultado, el agua fluiría del bloque 3 al bloque 4 en el siguiente intervalo de tiempo. En otras palabras, en esta simulación por lo menos un poco del agua que fluye avanzará a cada bloque en cada intervalo de tiempo. En el modelo, calculado con ponderación corriente arriba, se moverá un poco de agua dentro del pozo productor dentro de cuatro intervalos de tiempo. Este modelo no puede simular exactamente el comportamiento del yacimiento, ya que la distribución anticipada de la saturación, siempre provocará un ligero error en los cálculos de la inyección.

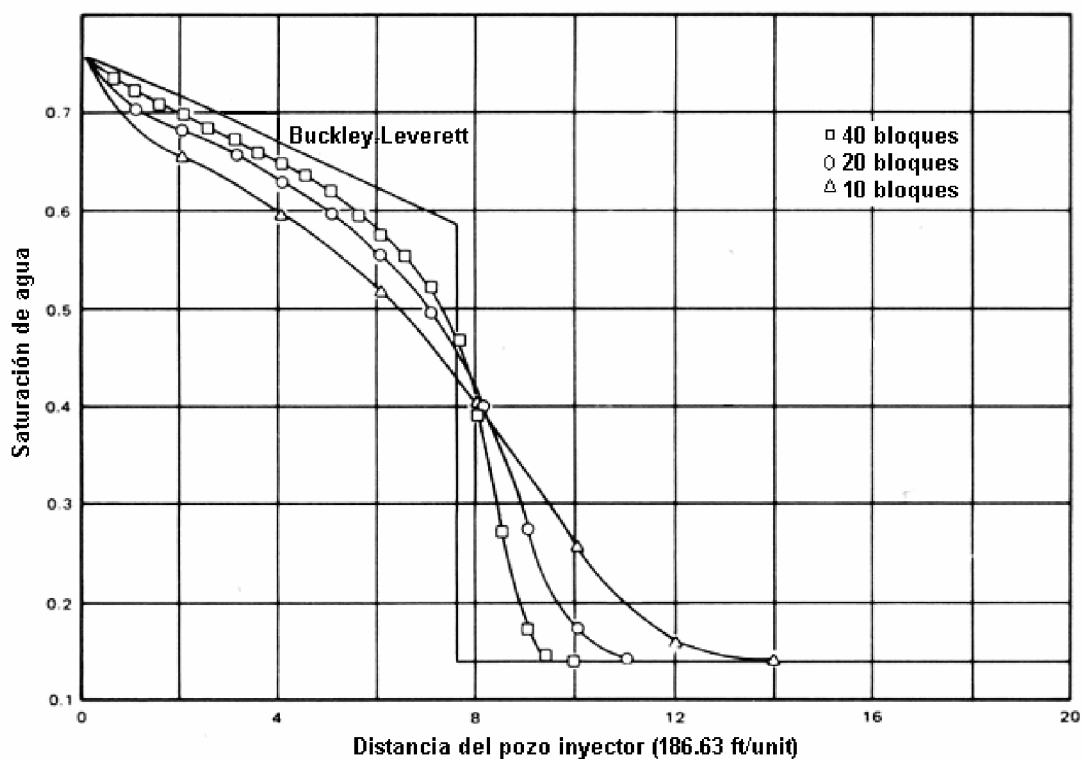
No hay una forma satisfactoria de eliminar la dispersión numérica completamente en una simulación. Sin embargo, existe cierto número de técnicas para reducirla. El empleo de un número grande de celdas, reduce la dispersión a un nivel aceptable, pero esta aproximación no es práctica para muchos estudios porque el número de celdas en el modelo está limitado por costos y restricciones de tiempo.

Una consecuencia mayor de los errores en la distribución de saturación, es la generación de falsos desplazamientos y eficiencias de barrido. Las eficiencias calculadas pueden estar influenciadas por la división de la malla, ya sea a nivel areal o verticalmente.

5.2.5.1 Distribución de saturación areal. La Fig. 14 muestra el efecto del tamaño de la celda en un modelo que tiene más de cuarenta celdas entre los pozos. Este modelo fue empleado en un estudio de los yacimientos Jay-Little Escambia Creek en Florida y Alabama. La solución analítica del comportamiento de inyección de agua por el método de Buckley-Leverett es tomada como referencia y se puede comparar con los resultados numéricos obtenidos por modelos que contienen 10, 20 y 40 celdas. La aproximación mejora a medida que el número de bloques se incrementa.

El efecto de la dispersión numérica se aprecia, generalmente, con la disminución de la eficiencia de desplazamiento calculada en la ruptura. La cantidad de dispersión varía de modelo a modelo, pero el error tiende a ser más serio en simulaciones en las cuales las relaciones de movilidad favorable resultan en frentes de saturación agudos y, por tanto, un desplazamiento muy eficiente de aceite o gas.

Figura 14. Influencia del espaciamiento de la malla en la distribución de saturación calculada en un modelo lineal.

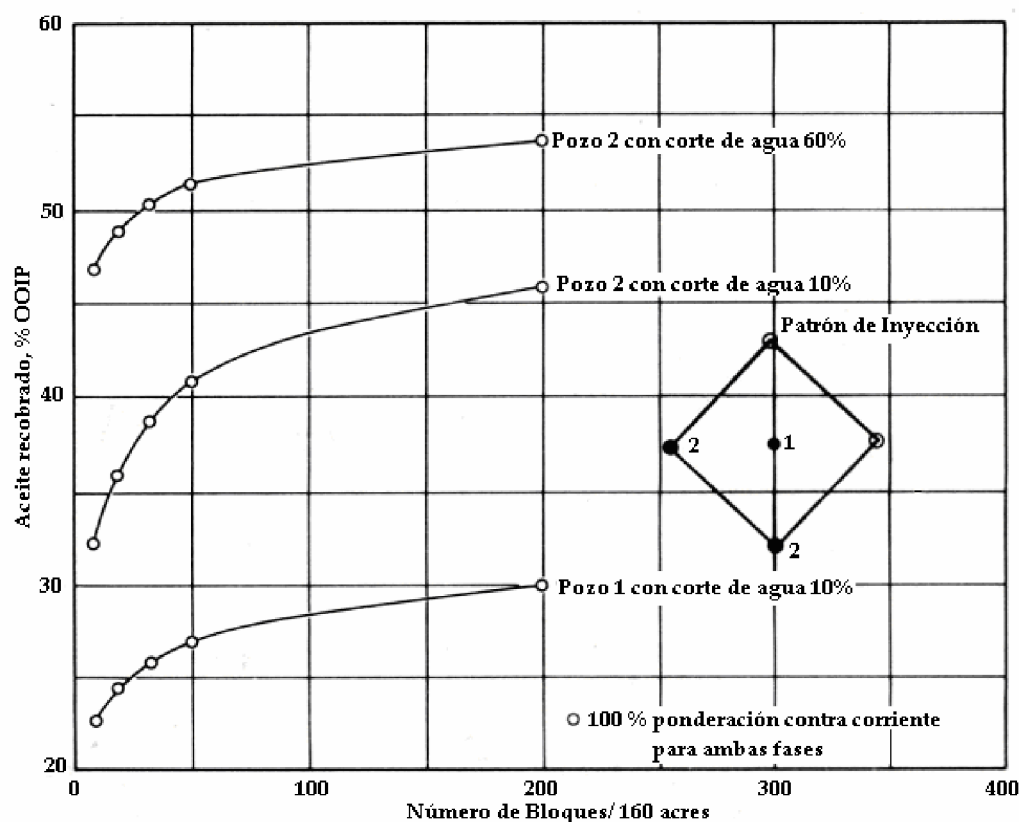


MATTAX Calvin C. y DALTON Robert L. Reservoir simulation. USA, SPE 1990 pág 47

La Fig. 15 muestra otro ejemplo en donde los cálculos demuestran el efecto del tamaño de la malla en la eficiencia de recobro de un desplazamiento en el cual, la

razón de movilidad es favorable. Fué modelada una inyección de agua¹⁰ en un patrón de conducción 3:1 con 10, 20, 30, 50 y 200 celdas. El elemento patrón es de 160 acres. Además son graficados los recobros calculados para los diferentes niveles de corte de agua en dos tipos de producción contra el número de celdas. Como el número de celdas se incrementa, la eficiencia de recobro y el recobro calculado para un corte de agua de producción dado se incrementa.

Figura 15. Influencia del espaciamiento en la malla en el calculo del recobro de aceite de una línea de inyección de agua con una razón de movilidad favorable.



MATTAX Calvin C. y DALTON Robert L. Reservoir simulation. USA, SPE 1990 (pág 47).

Al contrario la baja predicción en la eficiencia de recobro en modelo con muy pocas celdas, este tiende a sobre predecir la eficiencia de barrido areal debido a que en el modelo no se considera plenamente el impacto de la digitación,

¹⁰ MATTAX Calvin C. y DALTON Robert L. Reservoir simulation. USA, SPE 1990 (pág 47)

especialmente cuando las razones de movilidad son desfavorables. El efecto combinado del error en la eficiencia de recobro y la eficiencia de barrido fueron estudiados por Todd¹¹. El incremento del barrido areal en modelos con muy pocos bloques no compensa completamente la reducida eficiencia de desplazamiento. Como resultado principal, el recobro predecido fue muy bajo en modelos con muy pocos bloques.

5.2.5.2 Distribución de saturación Vertical. Un número insuficiente de divisiones de la malla en la dirección vertical, también puede causar errores en la eficiencia del desplazamiento. Los errores resultan primordialmente de la insuficiencia que tienen las divisiones verticales gruesas para modelar digitaciones de gas o regiones de alta saturación de aceite o gas que se pueden formar por segregación gravitacional. En la Fig. 16, se representa un desplazamiento agua/aceite. El yacimiento es un flanco de conducción de agua con un buzamiento hacia arriba en la zona de producción de aceite. La Fig.16a, muestra los perfiles de saturación para algunos tiempos después de iniciar la producción en un sistema de enmallado con cuatro celdas en la vertical. La Fig.15b, muestra los perfiles para los mismos tiempos en un modelo con diez celdas en la dirección vertical. Las eficiencias de desplazamiento calculadas con estos dos sistemas de enmallado y con un tercer sistema que tienen treinta celdas en la vertical se comparan en la Tabla 2.

En modelos de yacimientos con alta permeabilidad, es especialmente difícil representar los perfiles de saturación correctos, porque casi cualquier tasa práctica de depleción, el drenaje gravitacional será lo suficientemente efectivo como para generar una pequeña capa de aceite justo encima de la base del

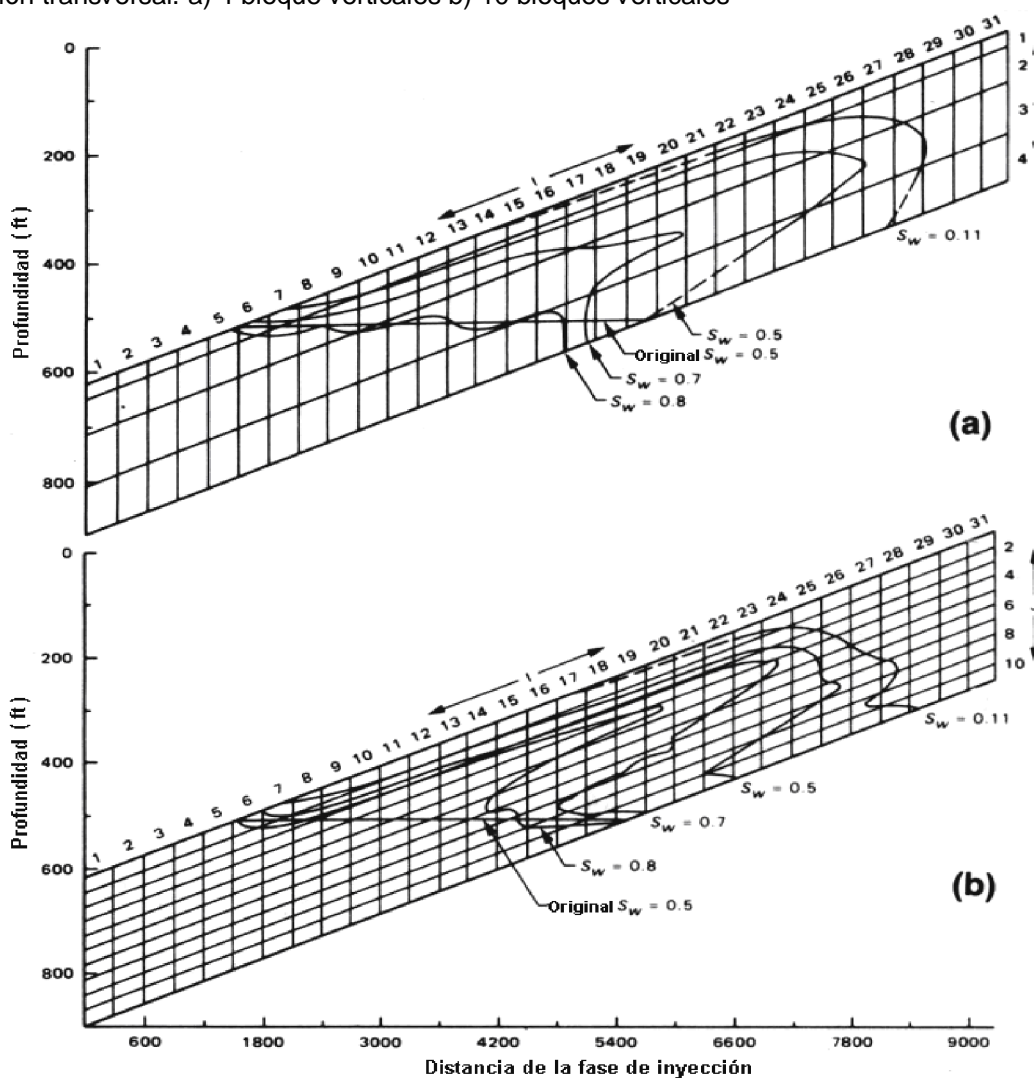
¹¹ TODD, M.R, O'DELLI P.M. , y HIRASAKI, G.J. *Métodos para incrementar la exactitud en la simulación numérica de yacimientos*. SPEJ Dic 1972, 515-30, Trans, AIME, 253.

Tabla 2. Efecto del detalle vertical en la predicción de la eficiencia de inyección de agua

Número de capas en el modelo	Eficiencia de desplazamiento (%OIP)	Eficiencia de recobro (%OIP)
4	52.1	47.2
10	55.1	49.6
30	58.9	52.0

MATTAX Calvin C. y DALTON Robert L. Reservoir simulation. USA, SPE 1990 pág 48

Figura 16. Influencia del espaciado vertical en la malla en el comportamiento de un modelo de sección transversal. a) 4 bloques verticales b) 10 bloques verticales



MATTAX Calvin C. y DALTON Robert L. Reservoir simulation. USA, SPE 1990 pág 48

yacimiento en una región invadida por gas o justo debajo del tope del yacimiento en una región invadida de agua.

Si las celdas no son lo bastante pequeñas como para representar estas delgadas regiones de altas saturaciones de aceite, el aceite móvil será calculado incorrectamente y la tasa de drenaje de aceite calculada será errónea.

Para resolver correctamente este problema es necesaria una división detallada. En el caso de que haya un gran número de shales continuos, se debe considerar la división vertical de cada zona.

Una alternativa al uso de enmallados verticales finos en un modelo grande, es el uso de curvas de pseudo permeabilidad relativa. Las pseudo-funciones pueden ser desarrolladas a partir de modelos pequeños en la que los enmallados finos son prácticos.

Es necesario aumentar la cantidad de celdas por encima y por debajo de pequeñas capas discontinuas de *shales* para definir exactamente el movimiento del aceite, ya que puede haber formación de burbujas de aceite por encima de los *shales*. El problema puede ser especialmente serio si el gas es miscible en el aceite. En este caso, al generarse la capa de gas en bloques que son demasiado gruesos verticalmente, pueden hacerse estimaciones altamente optimistas de recobro porque todo el aceite en contacto con el gas sería teóricamente recobrado. Igualmente, divisiones grandes tanto vertical como en la horizontal cerca de pozos inyectores puede llevar a sobre estimaciones de la porción del yacimiento que entraría en contacto con el gas miscible.

La experiencia indica que diez a veinte capas verticales son usualmente suficientes para modelar la inyección de agua o gas. Si este grado de

segmentación no es posible para el modelo de un campo total, debe ser considerado el empleo de curvas de pseudo-permeabilidad relativa.

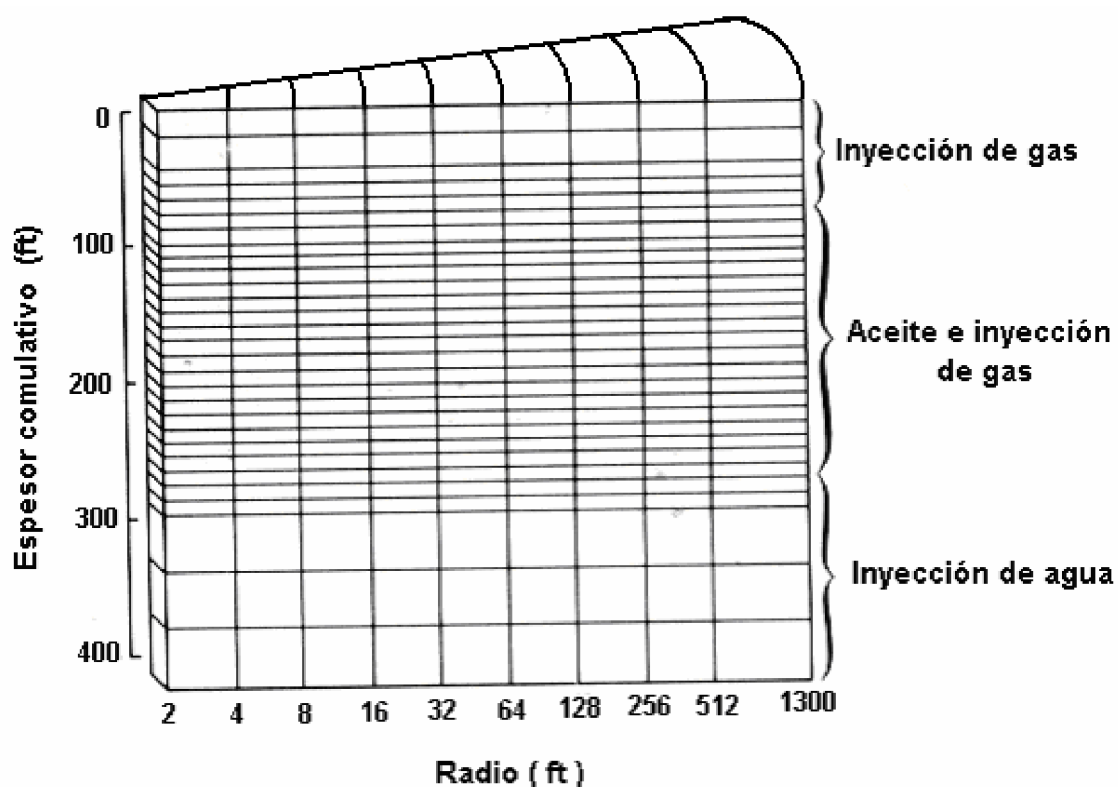
5.2.6 Tamaño de celdas en geometrías radiales. Una de las zonas que más requiere de tratamiento especial es la región inmediatamente adyacente al pozo. En esta región, los frentes del fluido y los contactos pueden ir cambiando su forma rápidamente, por tanto, el comportamiento de la presión, la saturación y la eficiencia de barrido vertical cerca del pozo no puede ser representado en un modelo areal o 3D teniendo celdas grandes. Esta limitante puede ser superada empleando un modelo radial por aparte para representar un pozo y su vecindad inmediata, e incorporando los resultados de un pozo dentro de un modelo de todo el yacimiento empleando funciones de pozo. Las funciones de pozo son términos especiales de fuente y sumidero, que relacionan las tasas de producción de aceite, GOR o WOR con saturaciones y presiones en bloques grandes.

Algunos simuladores acoplan modelos de un pozo con un modelo de todo el campo, corriendo ambos tipos de modelos simultáneamente, y transfiriendo los resultados en cada intervalo de tiempo. Este acoplamiento de modelos puede modelar efectivamente el comportamiento de un pozo, pero, la aproximación no es práctica para modelos que involucran un número grande de pozos.

Los modelos radiales son especialmente útiles en estudios de conificación y otros efectos cerca del fondo del pozo. En general, el tamaño de las celdas en tales modelos siguen un patrón común (Fig.16). Los bloques adyacentes al fondo del pozo son bastante pequeños para permitir identificar la formación de una conificación u otros procesos con transmisibilidad nula.

Generalmente en la dirección radial, los bloques de las primeras columnas miden alrededor de uno a tres pies; el tamaño de la celda se incrementa progresivamente en forma radial en factores de dos a tres. Normalmente se emplean de diez a veinte columnas de bloques. Los tamaños aceptables de las celdas internas de un modelo diseñado especialmente para estudios de conificación, se puede obtener con cálculos manuales para estimar la forma y el tamaño del cono. Si estos cálculos indican que la conificación no es severa, entonces se pueden usar bloques grandes.

Figura 17. Sistema de enmallados típico para el modelado de pozos.



MATTAX Calvin C. y DALTON Robert L. Reservoir simulation. USA, SPE 1990 (pág 49).

5.2.7 Tamaño de celda variable. Una manera efectiva de asegurar una adecuada definición del enmallado a mínimo costo, sería emplear un modelo en el que el tamaño de la celda no es uniforme. Por ejemplo, puede hacerse un ahorro en los costos computacionales empleando celdas muy grandes en regiones de una fase. Es necesario tener en cuenta dos cosas: primero, las celdas no deben ser tan grandes, de tal manera que, las respuestas de flujo sean "instantáneas", es decir, debe ser un número suficiente de celdas para modelar la transición del comportamiento del sistema yacimiento/acuífero. Segundo, los contrastes extremos entre las dimensiones de las celdas pueden causar dificultades al solucionar las ecuaciones de flujo.

Con un sistema de enmallado no uniforme, las celdas pequeñas no son empleadas en áreas del campo donde la definición no es tan crítica.

Cuando se hace el refinamiento de áreas específicas después pueden ser adherido al enmallado "regular", en el cual cada celda tiene solo una celda vecina en cada lado. En los refinamientos locales una celda tiene múltiples celdas vecinas; estos esquemas pueden ser muy exitosos para obtener un mayor detalle de las áreas de interés sin que se eleven los costos por las celdas extras que puedan involucrar otras áreas del modelo que no necesitan tanto detalle. Esta aproximación cambia la forma de la matriz de ecuaciones, sin embargo, el simulador debe estar diseñado especialmente para manejar la complejidad adicionada.

5.2.8 Comprobando la sensibilidad al tamaño de la celda. Se han discutido unas pautas y consideraciones que son importantes en la selección del tamaño de las celdas. Antes de seleccionar un sistema de celdas, ¿cómo se puede verificar que el enmallado escogido es el más apropiada para el estudio?. Es esencial en esta fase del diseño del modelo, redefinir las preguntas para ser respondidas por el estudio. Específicamente, determinar que aspectos del movimiento del fluido

deben ser conocidos para desarrollar y soportar las conclusiones del estudio y qué predicciones específicas del comportamiento del yacimiento son necesarias.

Teniendo redefinidas las preguntas, la manera más directa para verificar la adecuada selección de la celda es refinar la malla (por un factor de 2, por ejemplo) y determinar si las respuestas cambian significativamente. Si el modelo es bastante grande, puede ser más práctico emplear esta aproximación en subconjuntos para construir modelos muy pequeños que contienen solo las regiones de mayor interés. La comparación que se hace normalmente incluye distribución de saturación y presión, eficiencia en los pozos o regiones. Casi siempre un chequeo definitivo de la capacidad de la malla es la insensibilidad que puedan presentar las variables de en la malla respecto a la más refinada. Un segundo chequeo es, que una vez iniciada la simulación, comparar los primeros comportamientos de una pequeña parte del campo con los cálculos realizados por un método clásico (analítico). Esta aproximación obviamente tiene limitaciones, pero frecuentemente puede ser útil para evaluar si el modelo es realista.

5.3 SELECCIÓN DEL INTERVALO DE TIEMPO

A este punto es necesario seleccionar la secuencia de incrementos de tiempo a usar en la simulación. Intervalos de tiempo muy grandes reducirían la calidad de la respuesta, mientras intervalos de tiempo muy pequeños incrementarían el tiempo de cómputo, tiempo calendario y los costos.

5.3.1 Control de entrada y salida de datos en el simulador. Durante la mayor parte de una simulación se deben reportar perfiles y comportamiento de flujo. Para esto se pueden emplear intervalos de tiempo relativamente grandes de igual longitud sin afectar la simulación. Durante este periodo, el tamaño del intervalo de tiempo puede ser limitado únicamente por la frecuencia deseada en la entrada y la

salida de datos, estableciendo los tiempos en los cuales se efectúan cambios a los datos de entrada, o acciones requeridas para el manejo del yacimiento. Por ejemplo, un típico intervalo de tiempo en el ajuste histórico puede ser de uno a tres meses para coincidir con el registro mensual en los cambios de la tasa de producción de los pozos. Para otros tiempos de la simulación, el intervalo de tiempo debe ser restringido en tamaño para que los cambios en algunos parámetros preseleccionados puedan establecerse al tiempo deseado.

5.3.2 Consecuencias de un intervalo de tiempo sin restricciones. Las tres consecuencias más comunes al emplear intervalos de tiempo muy grandes son:

- a. Los cálculos de movilidad son incorrectos, debido a que, esta cambia demasiado durante un intervalo de tiempo y el empleo de un solo valor resulta inapropiado para la movilidad de la fase.
- b. Una alta dispersión numérica.
- c. Algunas propiedades del yacimiento, usualmente la presión, cambian demasiado durante un intervalo de tiempo haciendo que no puede describir adecuadamente la física del sistema.

Si la movilidad no es calculada correctamente, entonces, el curso de la tasa de flujo de fluidos individualmente entre celdas sería erróneo y los perfiles de saturación estarían distorsionados. Si se está empleando una formulación completamente implícita, puede que no se observe el error, debido a que las soluciones pueden ser erróneas y aún ser estables. La mecánica del fluido en el yacimiento no sería modelado apropiadamente si no se reconocen los cambios en las propiedades del sistema en el intervalo de tiempo, por ejemplo, el aceite saturado en una celda donde la presión está decreciendo rápidamente, podría

liberar un gran volumen de gas que posiblemente se volvería móvil y se filtraría hacia el tope del sistema o hacia un pozo productor. Sin embargo, si el intervalo de tiempo es muy grande, no se reconocería el avance del frente del gas, no se movería durante el intervalo de tiempo y el simulado calcularía una saturación irreal de gas.

5.3.3 Selección automática del intervalo de tiempo. Muchos simuladores tienen la capacidad de escoger automáticamente los intervalos de tiempo, calculando los valores de parámetros preseleccionados y ajustando el intervalo hasta que los cambios en dichos parámetros estén dentro de la tolerancia especificada. Los parámetros y su tolerancia varían de simulador a simulador y pueden ser fijados automáticamente o ser seleccionados por el usuario.

En ambos casos el simulador toma un intervalo de tiempo, usualmente prueba en contraste con la tolerancia. Si esta no es fijada, los cálculos hechos con el intervalo de tiempo, son descartados y se selecciona un intervalo de tiempo pequeño.

Algunos de los parámetros y tolerancias que se emplean más comúnmente son:

- a. *Cambio de presión:* la magnitud de un cambio aceptable de presión dependería del problema a solucionar. Si, a un tiempo particular, el gas libre está presente o es esperado, la tolerancia sería de unas cuantas unidades por pulgada cuadrada. De otra manera, en la simulación de algunos procesos, tales como una inyección de agua a presiones por encima del punto de burbuja, tolerancias por encima de los cien *psi* son aceptables.
- b. *Cambio de saturación:* este es un criterio frecuentemente aplicado. El tamaño de un cambio aceptable de saturación dependerá de la formulación de las ecuaciones solucionadas, el simulador empleado y la técnica empleada para

estimar las funciones de saturación. Valores comúnmente aceptables para cambios de saturación están dentro de un rango del cinco al diez por ciento del volumen poroso. Con formulaciones totalmente implícitas cambios grandes pueden en algún momento ser toleradas.

- c. *Coeficiente de transmisibilidad*: este es esencialmente una modificación del criterio de cambio de saturación, excepto que la tolerancia es formulada directamente en los coeficientes empleados en las ecuaciones de flujo.
- d. *Error en balance de materiales*: este criterio no es siempre aplicable y puede ser difícil de emplear eficientemente. En general un gran “error” en el balance de materiales indica que la solución a las ecuaciones es erróneo.
- e. *Error por el truncamiento del tiempo*: controlando el intervalo de tiempo, es útil mantener errores por truncamiento en tiempo dentro de la tolerancia deseada en problemas en que las funciones de presión o saturación son altamente no lineales.

5.3.4 Selección de los intervalos de tiempo al iniciar la simulación. A tiempos muy tempranos en una simulación, o en algunos tiempos en los que hay cambios significativos en la operación modelada, se presentan usualmente cambios grandes y rápidos en la magnitud del flujo. Para estos tiempos, los intervalos deben ser cortos para permitir el ajuste del modelo a los cambios. El primer evento que presenta estas características es el inicio de la simulación. Al principio, el modelo generalmente está en equilibrio con un potencial de flujo no establecido o tendrá especificada la presión y la saturación en una determinada zona del yacimiento.

En el primer caso, que corresponde a las condiciones iniciales de cuando fué descubierto el yacimiento, se toman intervalos pequeños de tiempos, hasta que se establezcan gradientes de potencial y dirección de flujo. Para iniciar, los intervalos de tiempo de cinco a diez días son bastante pequeños. Pueden usarse inicialmente intervalos de tiempo de quince o más días si la producción de fluido por intervalo de tiempo es pequeña vs volumen de los bloques que contienen los pozos. Para el segunda caso, correspondiente a un tiempo posterior, el yacimiento ha sido puesto en producción y no todos los gradientes de potencial están especificados correctamente, así que, deben tomarse intervalos de tiempo pequeños hasta que los potenciales de flujo puedan ser reajustados apropiadamente.

En otras situaciones, una vez el intervalo de tiempo inicial es tomado exitosamente, los intervalos subsecuentes pueden ser secuencialmente largos. Una secuencia típica de tiempos, implica duplicar el tamaño del intervalo de tiempo para cada intervalo hasta que se obtenga el máximo tamaño.

Otros eventos que pueden requerir una reducción en el tamaño del intervalo de tiempo, son los cambios en la tasa de producción o de inyección. Cuando en un pozo se esta produciendo o se esta inyectando a una tasa relativamente constante, se establece un perfil de presión en la vecindad del pozo. Si ocurre un cambio grande en la tasa, el perfil cambia drásticamente y hay cambios fuertes en la magnitud y posiblemente en la dirección del movimiento del fluido, por lo cual se requerirá intervalos de tiempo pequeños, por las razones previamente discutidas.

En casos más drásticas, por ejemplo, cuando los pozos productores son convertidos a inyectoras, los intervalos de tiempo deben ser reducidos a menos de 0.01 días, inmediatamente después del cambio de la tasa.

5.3.5 Comparación de los intervalos de tiempo empleados en formulaciones explícitas e implícitas. Un tratamiento explícito es menos satisfactorio sobre todo si se tienen grandes intervalos de tiempo; aquí, los parámetros son asumidos para mantener los mismos valores durante un intervalo de tiempo que se tienen al principio del intervalo de tiempo. Sin embargo, si la saturación y la presión no están cambiando rápidamente, como en algunos modelos areales con celdas grandes, un tratamiento explícito puede ser aceptable y intervalos de tiempo de longitud razonables pueden ser empleados sin introducir errores grandes en el cálculo de las tasas de flujo. Cuando son aplicables, las técnicas explícitas son más económicas que otras. En muchos simuladores, y particularmente en la simulación de conificación, desprendimiento de gas en solución e intrusión de gas, el cambio a técnicas implícitas o semi-implícitas son prácticamente necesarias. De otro modo, se requerirían intervalos de tiempo pequeños para prevenir oscilaciones en la presión o saturación y alcanzar la convergencia de la solución.

5.3.6 Verificación del tamaño de los intervalos de tiempo. Independiente de la formulación empleada y de los criterios aplicados para seleccionar el intervalo de tiempo, es conveniente probar si los resultados de la secuencia de intervalos de tiempo producirán una simulación lo suficientemente exacta. Como en el caso del tamaño de las celdas, la mejor forma para responder esta pregunta es hacer una corrida de sensibilidad. Una parte del yacimiento podría ser simulado primero con la secuencia seleccionada de intervalos de tiempo y con un intervalo muy pequeño, si no se observa una diferencia significativa en el comportamiento, la secuencia seleccionada de intervalos de tiempo pueden ser empleados con confiabilidad.

5.4 LIMITANDO LA DISPERSIÓN NUMÉRICA

Es necesario que haya compatibilidad con la matemática del simulador para que la solución sea lo suficientemente exacta.

Se ha discutido cómo la dispersión numérica puede introducir distorsiones en el cómputo de los perfiles de saturación. Una forma efectiva de limitar el efecto es incrementar el número de celdas en la dirección principal del flujo. Sin embargo, en un estudio grande el número total de celdas está limitado por costos y otras consideraciones prácticas.

El conflicto entre el deseo de un gran número de celdas para limitar la dispersión numérica y la necesidad de un número reducido de bloques para limitar los costos computacionales es difícil de resolver. Un mínimo número de celdas es necesario para definir los perfiles de saturación y presión.

Grandes modificaciones han sido propuestas en el modelamiento para reducir el efecto de la dispersión numérica sin un aumento extravagantemente del tamaño del modelo. Ninguna de esas modificaciones es totalmente satisfactoria.

5.4.1 Ponderación de la movilidad. La técnica que parece ser más útil es el de *dos puntos, esquema de ponderación de movilidad en contra corriente* descrito por Todd¹². En esta aproximación, la permeabilidad relativa para el flujo a través de la frontera de dos celdas es calculado extrapolando la permeabilidad relativa de las dos celdas en contra corriente a un punto en la frontera.

Para esto, se deben ubicar las fronteras reales en un rango aceptable de valores; suponer que las dos celdas están ubicadas en una misma línea de flujo, y de aquí que las saturaciones puedan ser extrapoladas con los valores de estas dos celdas. Si las líneas de flujo son complejas, esta suposición no sería válida y la aproximación puede conducir a permeabilidades relativas irreales.

¹² TODD, M.R. O'DELL, P-M. y HIRASAKI, G.J. "Methods for increased accuracy in numerical reservoir simulator" SPEJ (April 1976) 65-72; Trans., AIME, 253.

Método de evaluación parcial corriente abajo: la movilidad es calculada combinando la movilidad en contra corriente y a favor de la corriente en las celdas, de este modo el avance de la fase desplazante puede ser reducida. El cálculo involucra interpolación entre las fronteras de las celdas, o la fracción de ponderación a favor de la corriente puede ser seleccionado arbitrariamente.

Claramente, ponderaciones paralelos, a favor de la corriente, pueden reducir la dispersión numérica. Sin embargo, tiene serias desventajas. Primero, la aplicación del porcentaje opcional de ponderación a favor de la corriente dependería de las características particulares del sistema yacimiento/fluido. Segundo, reduciendo la movilidad de la fase desplazante, se introducirían errores en el perfil de presión, incluso cuando el perfil de saturación esté cerrado por perfiles Buckley-Leverett.

Técnicas de ponderación combinadas: son modificaciones de la ponderación parcial a favor de la corriente. La aproximación tiende a eliminar la distorsión en el perfil de presión. Una aproximación es calcular una movilidad total entre las celdas con ponderaciones en contra corriente y calcular el radio de movilidad con el mismo componente a favor de la corriente. Este procedimiento combina los beneficios de la ponderación parcial en contra y a favor de la corriente. Esta técnica podría ser empleada con cuidado, porque puede provocar oscilaciones en la solución.

5.4.2 Pseudofunciones. Las curvas de permeabilidad relativa empleadas en modelos areales pueden ser modificados para restringir el movimiento de la fase desplazante hasta que la saturación de la fase alcance un nivel determinado de simulaciones a partir de un modelo de sección transversal obtenido de un enmallado fino. El efecto consiste en agudizar los perfiles de saturación y hacer lineal el flujo a través de una sola celda, de tal manera que se comporte como si

hubiese un flujo a través de varias celdas colocadas en serie. Kyte y Berry⁽¹⁰⁾ discutieron en detalle las curvas de permeabilidad relativa modificadas.

5.4.3 Cálculo de velocidades frontales. una propuesta alternativa que se aproxima al límite de la dispersión numérica es un método llamado “tiempo variable en la actualización del flujo”⁽¹¹⁾. En este método, los flujos no se actualizan en cada intervalo de tiempo, si no que, se estima el número de intervalos de tiempo requeridos en los cuales se moverá un valor fijo de concentración a través del enmallado y entonces el flujo se actualiza a una determinada frecuencia. La aproximación trabaja bien en una dimensión, pero ha sido extendido a múltiples dimensiones.

5.4.4 Métodos de solución alternativos. Las técnicas Galerkin poseen un gran potencial para minimizar la dispersión numérica. Estas técnicas involucran formulaciones en elementos finitos en lugar de diferencias finitas de las ecuaciones de flujo.

⁽¹⁰⁾ KYTE, J.R. y BERRY, D. W. *New pseudo function to control numerical dispersion*. SPEJ (Aug 1975) 269-76 citado por MATTAX Calvin C. y DALTON Robert L. Reservoir simulation. USA, SPE 1990 pág 52.

⁽¹¹⁾ LARSON, R. G. “Controlling numerical dispersion by variably timed flux updating in two dimension” SPEJ (June 1982) 399-419 referenciado en MATTAX Calvin C. y DALTON Robert L. Reservoir simulation. USA, SPE 1990 pág 53.

6. CONSTRUCCIÓN DE LA MALLA

6.1 TEORÍA DE GENERACIÓN DE MALLAS

Un sistema generador de mallas, según Thompson et al.1985⁽¹²⁾ :

“... puede ser pensado como un procedimiento para la distribución ordenada de observadores, o estaciones de muestreo, sobre un campo físico, de tal manera que sea posible una comunicación eficiente entre los observadores y que todos los fenómenos físicos sobre ese campo puedan ser representados con suficiente exactitud por medio de esa colección finita de observaciones. La estructura de una red de familias de coordenadas permite a los observadores ser fácilmente identificados en relación a los otros, y esto conlleva a una codificación más simple que la que resultaría de una estructura triangular o de una distribución aleatoria de los puntos. El sistema de generación de mallas proporciona cierta influencia de un observador sobre los otros, así que si uno de ellos se mueve hacia una mejor posición para observar la solución, sus vecinos lo seguirán en cierta medida para mantener una cobertura suave del campo.

La solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales requerirá cierta discretización del campo en una colección de puntos o volúmenes elementales (celdas). Las ecuaciones diferenciales son aproximadas por un conjunto de ecuaciones algebraicas sobre ésta colección, y este sistema de ecuaciones algebraicas es entonces resuelto para producir un conjunto discreto de valores, los cuales se aproximan a la solución del sistema diferencial parcial sobre el campo. La discretización de la solución requiere de cierta organización para ser eficiente; esto es, debe ser posible identificar rápidamente los puntos o celdas. Mas aún, la discretización debe conformar la frontera de la región, de tal manera que las condiciones de frontera puedan ser representadas de manera precisa. Esta organización es proporcionada por un sistema de coordenadas, y la necesidad de conformar la frontera es reflejada en la elección que hace de coordenadas cartesianas para regiones rectangulares, coordenadas cilíndricas para regiones circulares, etc., todo dentro de los límites de los recursos que se puedan hallar en los manuales.

De ésta organización de la discretización del campo para regiones generales surge el interés actual en sistemas de coordenadas que conformen la frontera,

⁽¹²⁾ THOMPSON, J., WARSI, Z., y MASTIN, C. *Numerical grid generation. Foundations and applications*. New York : Elsevier Science. 1985 citado por RIVERA LOAIZA, Cuauhtémoc. Utilización de redes de Petri para la elaboración de una interfaz de Usuario. México: Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo Facultad de Ingeniería Eléctrica, Febrero 2000.

generados numéricamente. Es decir, generar computacionalmente para regiones arbitrarias lo que está disponible en los manuales para regiones simples. Los sistemas de coordenadas cubren el campo y tienen líneas (o superficies) coordenadas que coinciden con todas las fronteras. La distribución de las líneas debe ser suave, concentrándose en regiones donde la solución varía fuertemente, y el sistema debe ser capaz de “sentir” estas variaciones y autoajustarse dinámicamente para conseguir este objetivo.”

Una malla generada numéricamente se puede pensar como el conjunto organizado de puntos formado por las intersecciones de las líneas de un sistema de coordenadas. Tal como lo plantea Tinoco¹³, la característica esencial de un sistema tal, es que alguna línea coordenada (o en tres dimensiones, alguna superficie coordenada) sea coincidente con cada segmento de la frontera de la región física. El uso de intersecciones de líneas coordenadas para definir los puntos de la malla proporciona una estructura organizacional que permite que todos los cálculos sean realizados en una malla cuadrada fija, cuando las ecuaciones diferenciales que se estén resolviendo hayan sido transformadas de tal manera que las coordenadas curvilíneas, reemplacen a las coordenadas cartesianas como variables independientes.

La malla libera a la simulación computacional de restringirse a ciertas formas de frontera y permite la generación de códigos de uso general en los cuales la forma de la frontera es especificada simplemente en la entrada de datos. Las fronteras también pueden estar en movimiento, ya sea por especificaciones externas o en respuesta al desarrollo de la solución física. Similarmente, el sistema de coordenadas puede ajustarse para seguir la variación en la solución física. En cualquier caso, la malla generada numéricamente permite que todos los cálculos sean realizados en una malla cuadrada fija en el campo computacional (también llamado *espacio lógico*), el cual es siempre rectangular por defecto.

¹³ TINOCO RUIZ, J.G.(1997).*Funcionales discretos para la generación de mallas suaves y convexas sobre regiones planas irregulares*. PhD thesis, CIMAT, Guanajuato, Gto.

El proceso de generación de mallas a nivel numérico surgió, en su forma más fuerte, de la necesidad de facilitar el cómputo de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP's) que se utilizan en dinámica de fluidos para describir regiones físicas con geometría compleja. Al transformar una región física compleja a una región más simple, se eliminan las complicaciones de la forma de la región que es objeto de estudio en el problema. Tales transformaciones pueden verse como un sistema general en coordenadas curvilíneas para la región física. Las técnicas clásicas de transformar y plantear problemas en coordenadas polares, cilíndricas, o esféricas son casos especiales. Una desventaja de usar tales sistemas coordenados es un aumento en la complejidad de las ecuaciones estándar transformadas, es decir, esas ecuaciones generales, las cuales al ser variadas en los parámetros clave, modelan el problema físico a ser resuelto. Una ventaja de esta técnica es que las condiciones límite son más sencillas de establecer para aproximar con precisión.

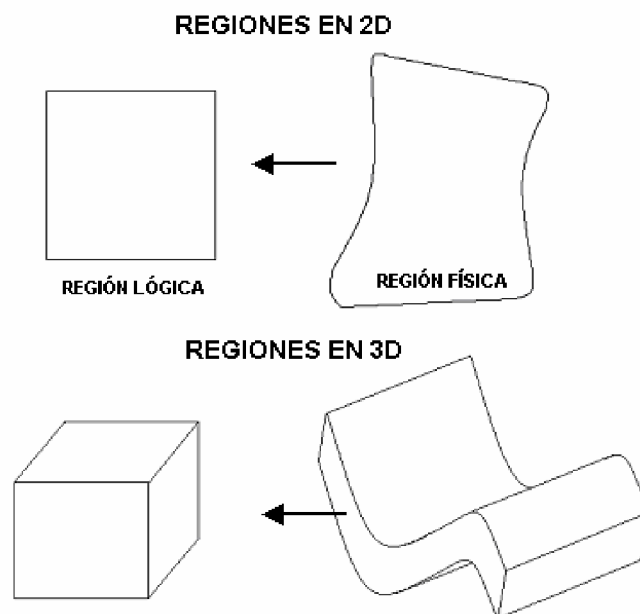
En muchas aplicaciones, es posible transformar la *región física* o espacio físico el cual se quiere representar, a un cuadrado en dos dimensiones o a un cubo en tres dimensiones (Fig.18). Al cuadrado o a el cubo se le llama la *región lógica* o espacio lógico, y la transformación da lugar a un límite, conformando así el sistema coordenado. Las líneas coordenadas en este sistema coordenado están dadas por las imágenes de las líneas de coordenada uniforme en la región lógica. En tales sistemas coordenados, es relativamente fácil de hacer aplicaciones exactas de condiciones límite establecidas a nivel numérico.

Cuando se llevan a cabo algoritmos en códigos de computadora, los cálculos se hacen en el espacio lógico y posteriormente, se hace la transformación al espacio físico. Los diversos atributos de una malla determinan su versatilidad para facilitar o complicar los cálculos.

Estas transformaciones son posibles gracias al cálculo del Jacobiano. Si el Jacobiano de la transformación es igual a cero, la transformación no conserva las propiedades físicas y matemáticas esenciales de las ecuaciones estándar. Dichas transformaciones son denominadas plegables; uno de los mayores objetivos de los algoritmos generadores de mallas es precisamente evitar este tipo de transformaciones.

También, se sabe que el error de aproximación de las ecuaciones estándar no sólo depende de la forma de las soluciones derivadas y del espaciamiento de la malla, sino también de la tasa de cambio de ese espaciamiento y de que tan lejos estén los nodos de ser ortogonales.

Figura 18. Regiones Física y Lógica



Normalmente se producen menos errores al darle un espaciamiento uniforme a la malla, siendo esta ortogonal. Así otra meta de los algoritmos generadores de

mallas es producir mallas lisas, es decir, mallas en donde el espacio varíe fácilmente y los ángulos entre las líneas coordenadas de la malla no sean demasiado pequeños*.

Si la solución de las ecuaciones estándar varía rápidamente en alguna parte de la región física, entonces es razonable escoger una malla más fina en esa parte de la región para reducir el error en la solución numérica. De esta manera aparecen las mallas de solución adaptada o adaptativas.

La ventaja principal de algoritmos de generación de mallas modernos es que estos algoritmos pueden usarse de manera eficaz para generar mallas grandes, conteniendo miles de millones de puntos, permitiendo a su vez una reducción considerable del error y un tratamiento simplificado de las condiciones límite. Se han aplicado algoritmos de generación de mallas a muchos problemas en dinámica de fluidos a nivel computacional, incluyendo aerodinámica, flujos de marea y estuarios, física del plasma, electromagnetismo y estructuras. El enfoque de este trabajo será específicamente la Simulación Numérica de Yacimientos de Hidrocarburos.

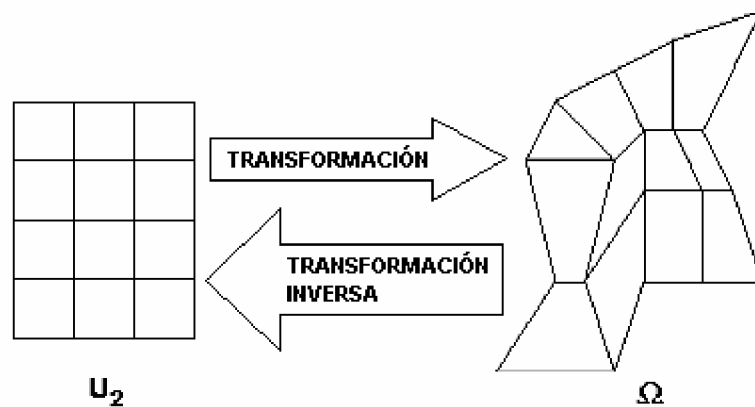
6.1.1 Importancia de la generación de mallas. En la vida real los modelos matemáticos de muchos problemas físicos utilizan ecuaciones diferenciales parciales (EDP's) para describir su comportamiento. Desgraciadamente no hay una técnica estándar para resolver analíticamente todas las EDP's; es por eso que muchas veces se buscan soluciones numéricas.

Existen dos métodos de uso común: el Método de los Elementos Finitos (MEF en cualquiera de sus versiones), y Método de Diferencias Finitas. El primero tiene

* La condición de ortogonalidad no siempre se va a poder garantizar, pero se debe procurar mantener un control sobre esta condición. De hecho existen esquemas de enmallado para simulación de yacimientos en donde la no ortogonalidad es una característica fundamental de la malla.

como principal desventaja el que su implementación es compleja y genera sistemas matriciales complejos y dispersos. La desventaja del segundo es que requiere de un orden en los nodos. Además, los esquemas de diferencias finitas pueden aplicarse solamente cuando el arreglo de nodos de la malla es rectangular, lo cual es una seria limitación. Este problema se resuelve mediante el uso de transformaciones como se expuso anteriormente. Cuando se genera una malla, se transforma un dominio U_2^* (región lógica) en Ω^{**} (región física), y viceversa (Fig. 19). Así que es posible transformar problemas definidos en Ω en su equivalente sobre U_2 .

Figura 19. Transformación del cuadrado unitario (U_2) en una región irregular (Ω).



En particular las curvas coordenadas de Ω se transforman en segmentos de recta, paralelos a algún lado de U_2 , generando así mallas rectangulares y, por consiguiente, permitiendo resolver el problema por diferencias finitas.

* Dominio lógico en 2D
 ** Dominio físico en 2D

6.1.2 Procedimiento para generar una malla en el plano. Lo primero que se requiere para generar una malla es escoger la región Ω del plano donde se desea generar la malla. Una vez que se tiene a Ω hay que elegir cuatro puntos en su frontera; estos puntos dividirán a Ω en cuatro lados.

El siguiente paso es aproximar cada lado por una poligonal. Si se desea generar una malla de $m \times n$ celdas se requerirán $m+1$ puntos en el lado que se quieren m celdas, y $n+1$ puntos en los lados restantes. Este paso se conoce como *generación en la línea** y existen técnicas especiales para generar estas poligonales. Por último, es necesario escoger un método de generación de mallas y aplicarlo a la discretización obtenida en el paso anterior.

En resumen:

- a. Escoger una región Ω del plano.
- b. Definir 4 lados en su frontera.
- c. Aproximar cada lado por una poligonal, cuyo número de nodos depende de las celdas deseadas en la malla.
- d. Aplicarle a Ω un algoritmo de generación de mallas.

6.1.3 Planteamiento del problema en 2D.

Definición: Una malla $\mathbf{x}(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ sobre una región $\Omega \subset R^2$ es una función continua:

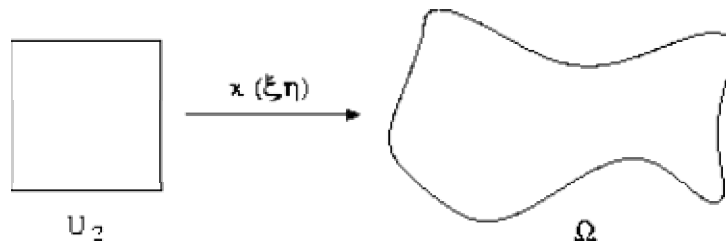
* Para mayor información ver KNUPP, Patrick y STEINBERG, Stanly. *Fundamentals of Grid Generation*. USA: CRC Press, Inc. 1994 Chapter 3 pág. 45 o TINOCO RUIZ, J.G.(1997). *Funcionales discretos para la generación de mallas suaves y convexas sobre regiones planas irregulares*. PhD thesis, CIMAT, Guanajuato, Gto

$$\mathbf{x}: U_2 \rightarrow \Omega \tag{6.1}$$

donde U_2 es el cuadrado unitario $[0,1] \times [0,1]$ (Fig. 20).

Nótese que si se toma una línea coordenada $\xi = cte$ o $\eta = cte$ en U_2 , su imagen será una curva; estas curvas en Ω son llamadas de manera natural *curvas coordenadas*. Si se elige una porción de superficie en U_2 , esto es, una colección de líneas coordenada en U_2 , la función \mathbf{x} proporciona una retícula en Ω , de ahí el término malla o red.

Figura 20. Malla sobre la región Ω



Se puede establecer el problema de generación de mallas como sigue: *Dada una función biyectiva y continua de la frontera de U_2 en la frontera de Ω , extenderla a una función continua de U_2 a Ω .*

De entre las posibles mallas existentes en Ω serán de interés aquellas con ciertas propiedades, a saber:

- a. Primeramente se quiere que puntos diferentes en U_2 tengan como imagen puntos diferentes en Ω ; es fácil ver que esto implica que diferentes líneas

coordenadas que no se cruzan en U_2 , tendrán imágenes que no se cruzan en Ω . Se requiere pues, que \mathbf{x} sea 1-1.

- b. También se requerirá que \mathbf{x} llene Ω , es decir, que \mathbf{x} sea un mapeo sobre toda la región.
- c. Por otro lado, es deseable que la imagen de una curva suave en U_2 sea una curva suave en Ω , esto es, se requiere que las funciones $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$ tengan derivadas continuas al ser consideradas como funciones de ξ y η separadamente.

Las mallas que tienen las dos primeras propiedades se llaman *mallas convexas*; en contraparte, las que no gozan de esta propiedad son llamadas *mallas no convexas* (también conocidas como *dobladas*). Una función que tenga las tres características es llamada difeomorfismo entre U_2 y Ω . el problema de generación de mallas es replanteado entonces de manera más especializada como:

Dado un difeomorfismo:

$$\mathbf{x} : \partial(U_2) \rightarrow \partial\Omega \tag{6.2}$$

extenderlo a un difeomorfismo:

$$\mathbf{x} : U_2 \rightarrow \Omega \tag{6.3}$$

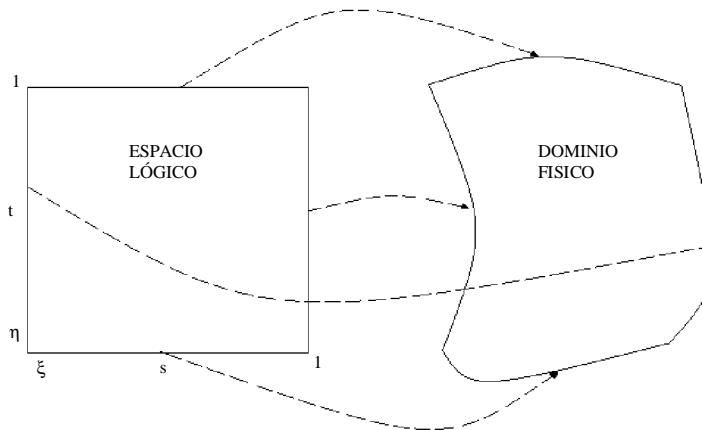
6.1.4 Métodos de Generación de Mallas

6.1.4.1 Interpolación transfinita. Al trabajar en dos dimensiones (la extensión a la tercera dimensión es natural), se toma como dominio computacional al cuadrado unitario, con coordenadas s y t , y al dominio físico como una región con coordenadas x y y .

Como ya se discutió, para generar la malla en el espacio físico, es necesario crear una malla en el cuadrado unitario y crear un mapa de esto en el dominio físico⁽¹³⁾. Para conseguirlo es necesario cumplir con dos requisitos antes de realizar el mapeo:

- La relación debe ser 1 - 1, y
- Las fronteras del espacio computacional deben de ser mapeadas en las fronteras del espacio físico (Fig. 21)

Figura 21. Definición de fronteras

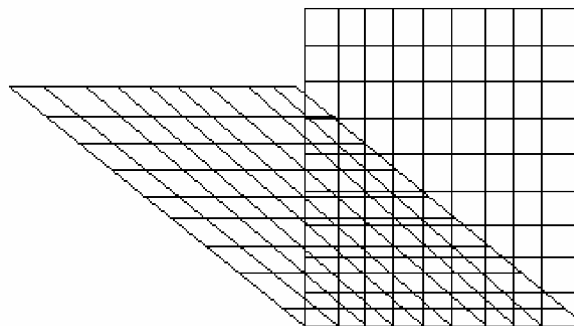


⁽¹³⁾ (EPCC), E. P. C. C. (1999). Página en internet acerca de la Transpolación transfinita. <http://www.epcc.ed.ac.uk/epcc-tec/documents/tw-meshgen/MeshGeneration.book12> citada por RIVERA LOAIZA, Cuauhtémoc. *Utilización de redes de Petri para la elaboración de una interfaz de Usuario*. México: Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo Facultad de Ingeniería Eléctrica, Febrero 2000.

El mapeo puede ser arbitrario, pero esto no siempre produciría una buena malla. La Interpolación transfinita (TFI, por sus siglas en inglés - *TransFinite Interpolation*), es un tipo de mapeo en donde las coordenadas físicas, tratadas como una función de las coordenadas computacionales, son interpoladas de sus valores en las fronteras del dominio computacional. Dado que los datos son dados como un número no-enumerado de puntos, la interpolación es llamada transfinita.

Los métodos para generación de mallas basados en la interpolación son de los más fáciles de implementar, además de que son bastante rápidos en comparación con los métodos variacionales continuos y discretos. Sin embargo tienen la gran desventaja de que transmiten la falta de suavidad de la frontera hacia el interior, y aún más para regiones que no sean convexas a menudo dan lugar a mallas dobladas (Fig. 22) , lo que significa, que los mapeos no son 1-1.

Figura 22. Malla doblada



6.1.4.2 Generación variacional continua. Los métodos variacionales continuos se pueden considerar enmarcados dentro de los métodos de ecuaciones diferenciales. La diferencia principal es que los parámetros pertinentes al control de las propiedades de la malla aparecen en integrales de superficie (o de

volumen, en tres dimensiones), y no en forma de términos asociados a fuentes. La malla se determina tomando el óptimo de dichas integrales, lo cual produce el sistema diferencial generador en la forma de ecuaciones de Euler-Lagrange.

6.1.4.3 Generación variacional discreta. Tal como lo menciona Castillo⁽¹⁴⁾, mediante este método se busca controlar propiedades de la malla, tales como la longitud entre los puntos y las áreas de las celdas, con el fin de evitar el problema de “doble” en varias regiones del espacio. La malla se genera minimizando un funcional definido sobre los puntos interiores de la misma. Este es un problema de minimización de gran escala que se puede resolver usando un método de gradientes conjugados no lineal. Dentro de los funcionales más usados se encuentran los funcionales discretos de área y longitud, y los de suavizamiento, los cuales permiten el control sobre dichas variables que son muy sensibles a las transformaciones.

Dentro de la Simulación Numérica de Yacimientos una de las etapas claves para el diseño correcto de un modelo, es el proceso de discretización del dominio a modelar, o dicho en otras palabras, la generación de la malla con la cual se pretende modelar el fenómeno objeto de estudio en el Yacimiento.

La terminología usada en diferentes publicaciones concernientes a la clasificación de la malla, no es la misma. A continuación se clasifican las mallas usadas, en dos grupos: el primero se refiere al sistema coordenado y el segundo al tipo de malla y modo de aplicación.

⁽¹⁴⁾ CASTILLO, J. E. *Mathematical aspects of numerical grid generation*. SIAM, México. 1991 citado por RIVERA LOAIZA, Cuauhtémoc. *Utilización de redes de Petri para la elaboración de una interfaz de Usuario*. México: Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo Facultad de Ingeniería Eléctrica, Febrero 2000.

6.2 TIPOS DE MALLAS

6.2.1 De acuerdo al Sistema Coordinado

6.2.1.1 Malla cartesiana. Este tipo de malla es la más comúnmente usada en simulación de yacimientos. Los puntos de la malla son intersecciones de los planos coordenados rectangulares. En dos dimensiones un punto de la malla tiene cuatro vecinos (Ver Tabla 3).

6.2.1.2 Malla Hexagonal. La malla de puntos se forma a partir de una malla de triángulos, y los bloques de la malla final, forman una configuración de celdas hexagonales. Un punto de la malla tiene 6 vecinos en el plano. Una malla semejante fue presentada por Pruess y Bodvarsson¹⁴ en 1983.

6.2.1.3 Malla Radial. tales mallas se ajustan muy bien a problemas de flujo en un pozo. En el caso anisotrópico, la malla corresponde a un sistema coordinado cilíndrico, pero para permeabilidad anisotrópica se usa un sistema de coordenadas elíptico. Estos sistemas son casos especiales de los siguientes tipos de malla:

6.2.1.3.1 Malla curvilínea ortogonal. las ecuaciones de flujo de fluidos son transformadas a un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal que es más apropiado para el patrón de flujo en consideración. Las ecuaciones transformadas son discretizadas en una malla curvilínea de manera similar que en una malla Cartesiana. Un punto de la malla tiene 4 vecinos en el plano. La transformación de coordenadas convierte a la malla curvilínea en una malla rectangular. Por esta

¹⁴ STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria.

razón tales mallas son fácilmente implementables en un simulador para estructuras de malla rectangular. Las líneas de flujo (*Streamlines*) y las líneas equipotenciales conforman dicho sistema coordinado. Sin embargo, si el sistema de coordenadas no es estrictamente ortogonal, se introducen nuevos términos dentro de las ecuaciones, los cuales pueden tener alguna importancia pero son usualmente despreciados.

6.2.1.3.2 Malla *Stream tube* (tubos de flujo): Los nodos están localizados sobre las líneas de flujo. La consecuencia de esto es el no flujo entre los nodos de las diferentes líneas de flujo (*Streamlines*) de las superficies enmalladas. La orientación de las caras del bloque entre dos nodos en la misma línea de flujo, puede ser seleccionada arbitrariamente. Sin embargo, si las líneas de la malla no siguen estrictamente las líneas de corriente, entonces es mejor usar un sistema de coordenadas curvilíneo ortogonal formado por los tubos de flujo (*Stream tube*) y superficies equipotenciales, dependiendo del fenómeno de desplazamiento a modelar.

6.2.1.4 Malla no Rectangular: Las superficies curvas de una malla curvilínea ortogonal son reemplazadas por planos que construyen fácilmente la malla. Haciendo una observación rigurosa, la malla no es ortogonal, pero converge para una ortogonal si se refina.

6.2.1.5 Malla basada en Geometría Punto Esquina: Se construye un bloque a través de la elección libre y directa de los puntos (coordenadas) de las esquinas. El punto de la malla (nodo) es uno de los puntos internos del bloque. La malla resultante es no ortogonal.

6.2.1.6 Malla de Bisección Perpendicular: La localización de los nodos se hace libremente. Los límites de los bloques comparten un plano ortogonal en la línea recta que está conectando los nodos, asociando dichos nodos y el punto medio entre ellos. Los bloques cubren el espacio sin traslaparse o presentar aberturas. Se abrevia el término "bisección perpendicular" por "PEBI" que corresponde a término en inglés (Perpendicular Bisection). Estas mallas son ortogonales en el sentido de que la superficie transversal de cada bloque, es perpendicular a la línea que conecta los nodos adyacentes que los componen.

Las figuras que aproximan la forma de cada malla pueden ser apreciadas en la Tabla 3.

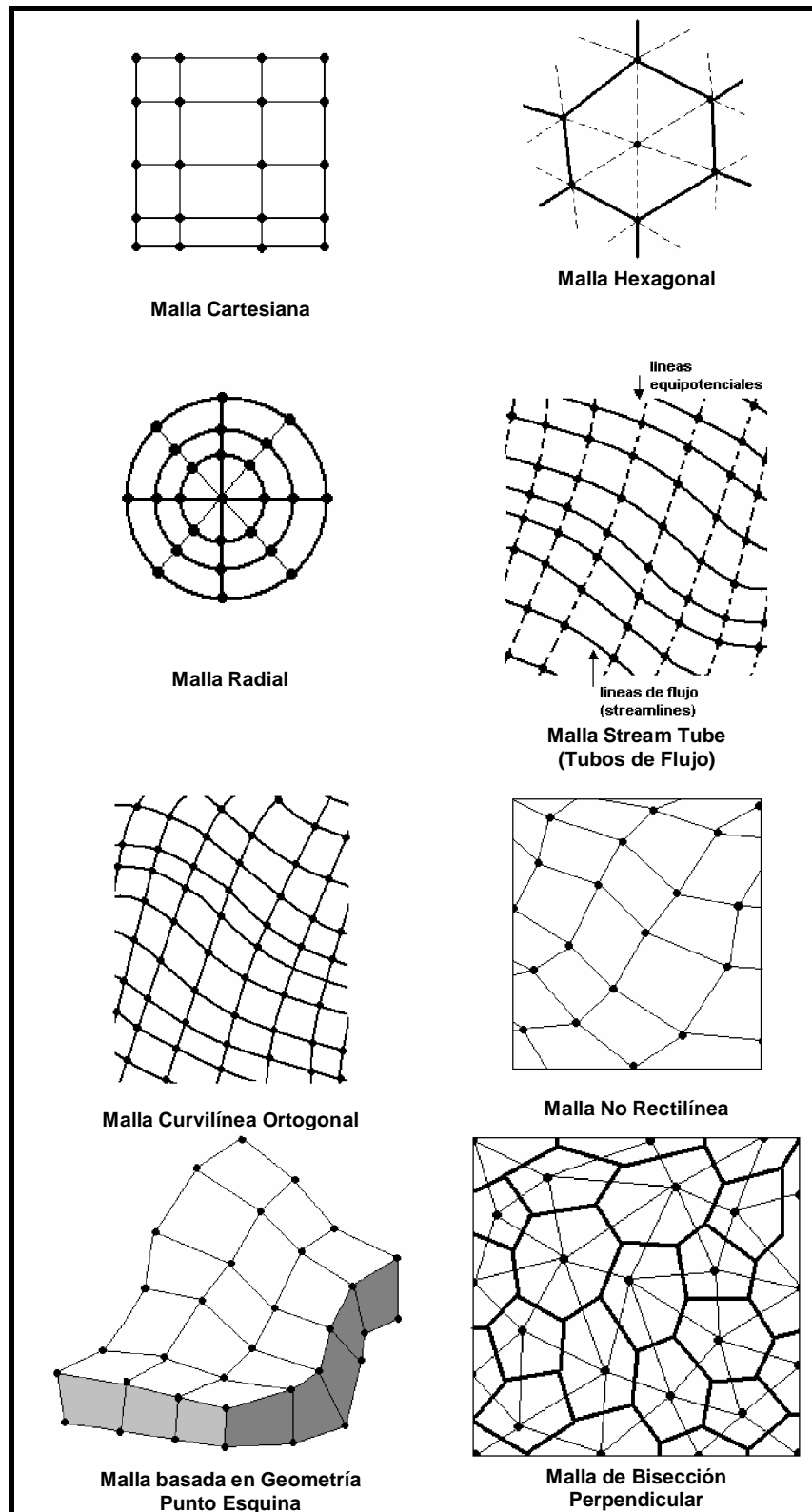
6.2.2 De acuerdo al Modo de Aplicación

6.2.2.1 Malla uniforme: Una malla es uniforme si es una repetición simple de un patrón. Los bloques tienen la misma forma y tamaño. El espaciamiento de la malla es constante, pero no necesariamente igual en cada dirección coordenada.

6.2.2.2 Malla regular: El espaciamiento de la malla es constante en cada dirección coordenada, pero no necesariamente es el mismo. Una malla regular Cartesiana o Hexagonal es también uniforme. Una malla radial puede ser regular pero no es uniforme.

6.2.2.3 Malla monotipo: Se presenta cuando el espacio está cubierto con el mismo tipo de malla.

Tabla 3. Tipos de Malla de acuerdo al Sistema Coordenado



6.2.2.4 Malla híbrida: El sistema de enmallado está compuesto de diferentes tipos de malla (desde un enfoque geométrico). En este caso se necesitan reglas especiales para asociar dos sistemas de enmallado (Hibridación).

6.2.2.5 Malla refinada: Una malla es refinada si, después de la construcción de un sistema de enmallado, se introducen puntos adicionales en la malla. Si tal refinamiento es confinado para una parte pequeña de la malla, entonces éste es llamado refinamiento local de la malla. Si no lo es, por ejemplo, si sólo se inserta una coordenada suplementaria en la superficie o líneas en la malla, no hay razón para hablar de refinamiento. Una malla refinada siempre es irregular.

6.2.2.6 Mallas Agrupadas: Se presenta cuando después de la construcción de un sistema de enmallado, algunos de los nodos son removidos. De este modo los bloques de esa zona serán unidos o agrupados. Después de agrupar, la malla será irregular.

6.2.2.7 Malla adaptativa dinámica: El cambio del sistema de enmallado está dirigido a las variables del sistema (la presión, la saturación, el etc.). La malla cambia a medida que estas propiedades cambian también.

6.2.2.8 Malla primaria: La malla primaria es la que permite obtener datos de inicialización. El valor inicial de las variables (la presión, la saturación, etc) se calculará directamente para cada nodo (o bloque) sobre esta malla a partir de información obtenida de mapas estructurales, los espesores neto y bruto, la distribución de porosidad, etc y considerando la fase de contacto, las propiedades

PVT y las propiedades de la roca. Si la inicialización es correcta, entonces el modelo estará en equilibrio hidrodinámico.

6.2.2.9 Malla secundaria: Se presenta después de procesos de refinamiento posterior o de agrupamiento. Los valores de las propiedades para las celdas se calculan a partir de los valores obtenidos de la malla primaria y no de los mapas y propiedades. Por ejemplo, los valores de los bloques refinados se calcularán a partir del valor de arranque que presente el bloque que fue sometido a refinamiento.

Una parte de las celdas no es integrada al sistema de ecuaciones, así que el sistema será resuelto en primera medida sin tener en cuenta estas celdas. Posteriormente, algunas de estas celdas servirán como condiciones de frontera para solucionar un segundo sistema de ecuaciones que involucra las celdas que resultaron del refinamiento. Tal reconstrucción del sistema de bloques tiene que conservar a la masa, lo cual no significa un cambio en la cantidad de fluido permitida en el lugar.

6.2.2.10 Malla verdaderamente refinada: Todos los nodos son integrados al mismo sistema de ecuaciones en un solo paso.

6.3 MALLAS REPRESENTATIVAS

Después de observar la anterior clasificación compilada por Zoltan y Clements¹⁵, se han definido ciertos tipos de malla como los más representativos y sobre los cuales se profundizará: Malla Cartesiana, Mallas Curvilíneas y Mallas de Bisección Perpendicular (PEBI).

¹⁵ STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria, pág. 312.

6.3.1 Malla Cartesiana. Como su nombre lo indica, está basada en el Sistema Coordinado Cartesiano. Aunque el Sistema de Coordenadas Cartesiano es rígido y no parece ser muy adecuado para describir la geometría real del yacimiento y el patrón de flujo, ha sido usado ampliamente en simulación de yacimientos.

6.3.1.1 Distribución de los nodos: Esquema de Punto Distribuido y Punto Centrado. Es posible construir un sistema de enmallado dividiendo como primera medida el dominio espacial en un sistema de bloques y localizando un nodo en el centro de cada bloque. Éste esquema es llamado **aproximación de punto centrado** y es de uso muy común en la simulación de yacimientos. La segunda forma es definir las posiciones de los nodos primero que todo y después los límites del bloque. Este esquema es llamado **aproximación de punto distribuido*** (Fig. 23).

La Malla Cartesiana es ortogonal. Por consiguiente la componente del gradiente potencial que es normal al área transversal de los bloques que se comunican, puede ser aproximado a través de,

$$Q_{IJK} = \sum_{p=1}^P (\Lambda_{pk} k)_{IJ} b_{IJ} (\Phi_J - \Phi_I)_p \quad (6.4)$$

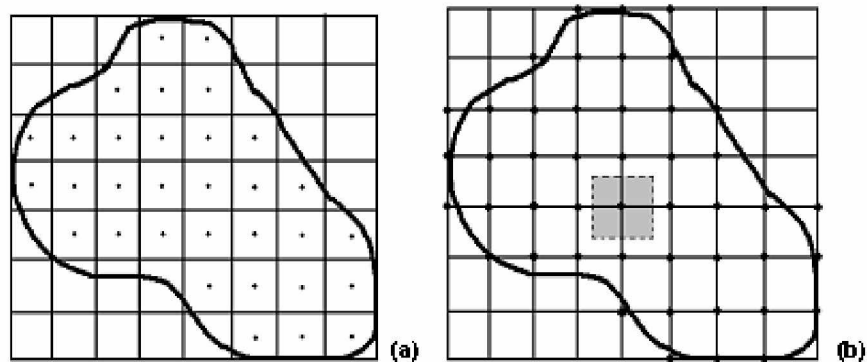
expresión expuesta en el Capítulo 3. Aziz y Settari¹⁶ (1972 - 1979) discutieron las características de los dos tipos de mallas usando la formulación diferencial de la ecuación de flujo. La formulación integral de esta ecuación fué discutida en el Capítulo 2. La diferencia radica, en que se calculó el gradiente potencial para los

* Cabe aclarar que bajo este esquema no es necesario que los pozos que se ubiquen dentro de la malla, se encuentren sobre los nodos tal como lo muestra la Figura 22.

¹⁶ AZIZ, K. Y SETTARI, A. *A New Iterative Method for Solving Reservoir Simulation Equations*, J. Can. Pet. Tech., 11, No. 1 (1972), 62-68. *Petroleum Reservoir Simulation*, Elsevier, London, New York (1979).

nodos y no en las caras de los bloques. Para este caso, aquí no hay diferencia entre las dos mallas si la movilidad Λ es una constante. Pero usando una formulación integral, queda de manifiesto, que el orden de aproximación del término de gradiente potencial siempre es diferente.

Figura 23. Esquema de Punto Centrado (a) y Punto Distribuido (b)



Respecto al error en el análisis de la discretización, se puede afirmar que la aproximación de punto distribuido conserva siempre una coherencia en el ajuste al dominio que se desea discretizar, y por consiguiente, es estable y convergente para cualquier método de diferencias finitas. Debe quedar claro, que el hecho de que aparezca una inconsistencia, no implica necesariamente que se presente divergencia; un ejemplo de esto puede ser, si el tamaño de un bloque tiende a cero ($\|h\| \rightarrow 0$). El orden real de la convergencia depende de la manera como se haga el espaciamiento de la malla o de la irregularidad de la misma. Los errores de discretización, generan errores en las soluciones de las ecuaciones, pero estos efectos son “suavizados”. Teniendo en cuenta esto y basados en los experimentos numéricos, Aziz y Settari¹⁷ concluyen que el esquema de

¹⁷ STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria.

espaciamiento más razonable y sencillo de la malla, es el esquema de punto centrado el cual también será convergente en los límites.

Sin embargo, desde un punto de vista práctico, no hay diferencia adicional al usar uno o otro tipo de esquema. Eso significa que, implementar una malla con puntos distribuidos no es más complicado que una malla con puntos centrados. La única diferencia apreciable, es la buena consistencia que el esquema de punto distribuido ofrece para el análisis matemático de error.

6.3.1.2 Construcción de una Malla Cartesiana en 3D Anteriormente se concluyó que el esquema de punto distribuido tiene cierta ventaja sobre el de punto centrado, así que se tomará este como punto de partida. El primer paso es construir una malla con un espaciamiento arbitrario sobre el área de estudio. Las caras de cada bloque se ubicarán a la mitad de la línea que une los nodos (Fig. 24). Los límites externos son aproximados con una poligonal pasando a través de los nodos.

Para evitar cambios en el volumen del yacimiento, el volumen poroso de los bloques que representan las fronteras del yacimiento, debe ser corregido. Por ejemplo, el volumen restante de los bloques que se cortan afuera, tiene que agregarse para los bloques vecinos como se muestra en la Fig. 25.

El mismo procedimiento de construcción puede ser aplicado en la dirección vertical, si la extensión del yacimiento es comparable con la horizontal (Fig 26). Sin embargo, frecuentemente, la extensión vertical es más pequeña en orden de magnitud que la horizontal y se aproxima por capas, así que tal esquema de discretización no puede ser usado o requiere un espaciamiento muy pequeño de la cuadrícula.

Figura 24. Posición del nodo dentro de una malla construida con esquema de punto centrado (a) y punto distribuido (b)

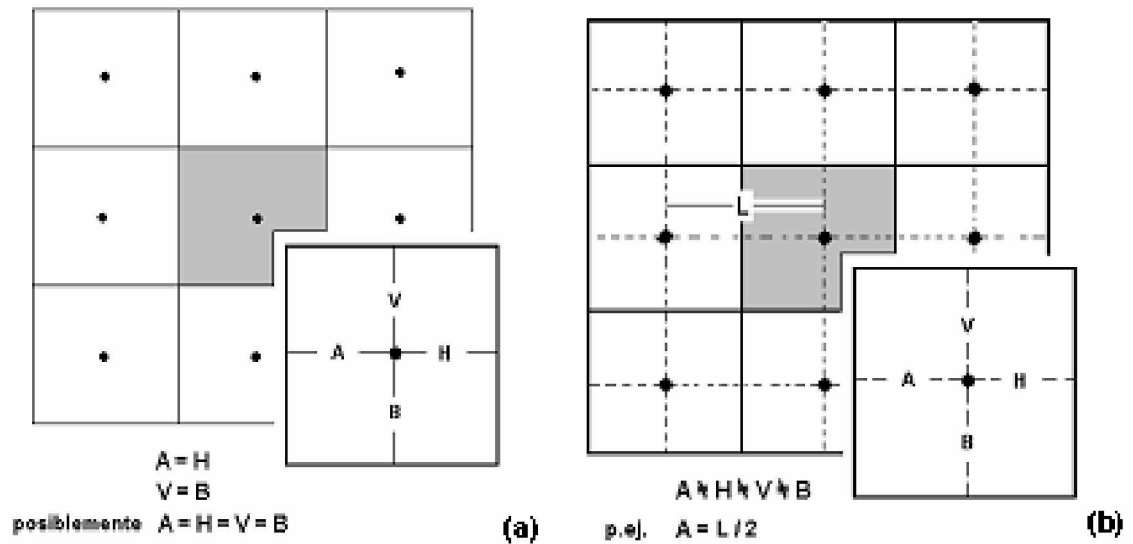


Figura 25. Construcción de una malla cartesiana rectangular con el esquema de punto distribuido en el plano horizontal

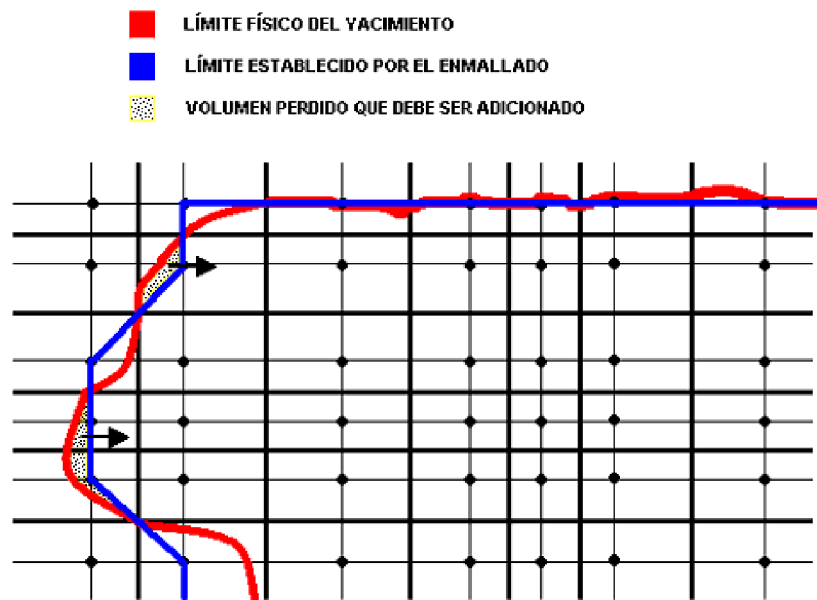
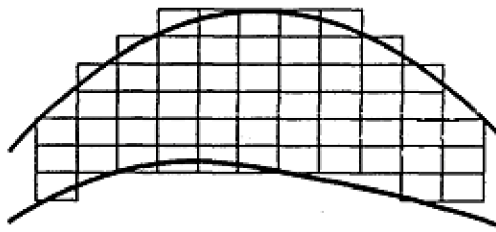


Figura 26. Sección transversal del espesor de un yacimiento con una malla Cartesiana

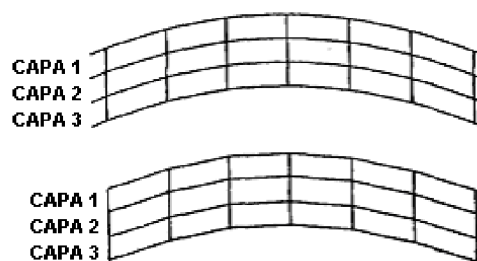


STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria, pág 378.

En lugar de hacer eso, es mejor aproximar cada capa a un tubo de flujo (modelo *Stream tube*) en la sección transversal, como se muestra en Fig. 27. Para poder hacer esta aproximación, se debe asumir que tanto la componente vertical de la velocidad de flujo como su componente paralela al estrato, pueden ser calculadas independientemente.

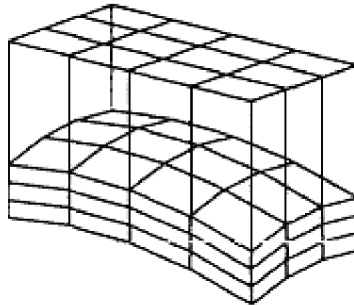
El sistema de bloques 3D es mostrado en la Fig. 28. Es evidente que esta malla es cartesiana y solo ortogonal en el plano horizontal pero no en la sección transversal.

Figura 27. Sección transversal de capas delgadas de un yacimiento con un tipo de malla por Tubos de Corriente (*Stream Tube*)



STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria, pág 378.

Figura 28. Modelo de malla de bloques convencional en 3D para Simulación de Yacimientos



STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria, pág 378.

6.3.1.3 Refinamiento de los bloques. Una malla cartesiana sencilla usando un espaciamiento variable, suele ser en la mayoría de casos, insuficiente para suministrar una buena descripción de las áreas sobre las que se tiene un interés particular, por ejemplo, en los límites de los pozos, en las fronteras del yacimiento y en las discontinuidades. Para lograr una alta resolución con pocos bloques tanto como sea posible, el área seleccionada o las celdas individuales pueden ser subdivididos por medio de una técnica denominada **refinamiento de la malla**. Este método fué usado desde un principio en simulación de yacimientos por Von Rosenberg¹⁸ (1982) y Heinemann¹⁹ (1983).

El sistema inicial de celdas es llamado Fundamental, y sus bloques son referidos como *Bloques Fundamentales* (Abreviatura: *F-blocks* o Bloques F). Ellos están definidos por tres índices para el espacio tridimensional: I1, I2, I3. Además se

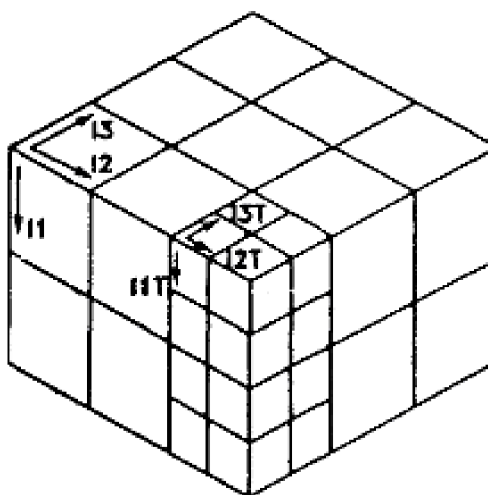
¹⁸ ROSENBERG von, D.U. *Local Grid Refinement for Finite Difference Methods*, SPE 10974, New Orleans USA Sep. 1982.

¹⁹ HEINEMANN, Z. , GERKEN, G. y HANTELIMANN, G. *Using Local Grid Refinement in a Multiple-Application Reservoir Simulator*. SPE 12255, San Francisco, USA 1983.

asignan tres números divisores (K_{I1} , K_{I2} , K_{I3}), para cada Bloque F. Estos indican el número parcial de bloques en los cuales los Bloques F deben ser divididos en la dirección correspondiente. De este modo, las subcoordenadas ($I1T$, $I2T$, $I3T$) se definen en cada Bloque F, teniendo la misma dirección de las coordenadas principales (Fig. 29).

Como se puede apreciar, cada bloque parcial ya puede ser ubicado especificando las coordenadas ($I1$, $I2$, $I3$). Como paso siguiente, los bloques parciales son referidos como *R-blocks*, Bloques R o bloques del Refinamiento.

Figura 29. Determinación de las sub-coordenadas



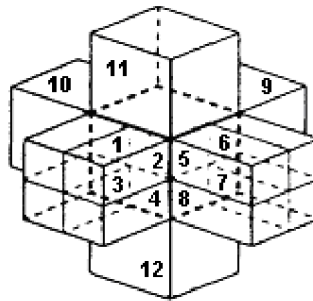
STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria, pág 381.

La malla fundamental está construida bajo el esquema de punto distribuido. No es posible subdividir los bloques de la malla fundamental y asignar los nodos a los subbloques tal como lo plantea un esquema de punto centrado, así que la malla refinada permanece completamente con el esquema de punto distribuido. Sin embargo, si se construye el refinamiento, las ecuaciones de discretización deberán ser modificadas en la interfaz entre la malla gruesa y la malla fina.

La construcción en la Fig. 30 asegura que en el interior de la región refinada, la malla refinada es de punto distribuido. Sólo en la interfaz entre la malla gruesa y la fina bien, los nodos son realmente simétricos con relación a los límites del bloque.

Cabe aclarar que el refinamiento de una malla cartesiana rectangular se puede dar de dos maneras: a nivel Global y a nivel Local (Fig. 31). En un **Refinamiento Global**, la zona de interés es subdividida pero las líneas del refinamiento se extienden por todo el yacimiento generando subdivisiones en zonas donde no existen cambios rápidos y no es necesario refinar. En un **Refinamiento Local**, solo se subdividen los bloques de interés sin que se generen más

Figura 30. Máximo numero de vecinos en una Malla cartesiana Rectangular 3D con refinamiento

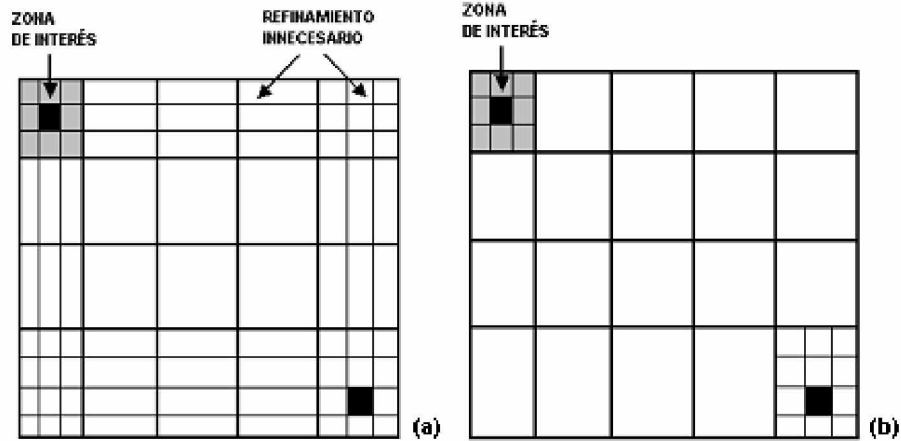


STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria, pág 381.

divisiones de las necesarias. Sin embargo, se debe considerar que una malla o sistema de celdas de este estilo no puede ser refinado arbitrariamente. Von Rosenberg²⁰, autor de esta técnica, establece ciertas condiciones o reglas bajo las

²⁰ VON ROSEMBERG, D.U. *Local Mesh Refinement for Finite Difference Methods*, artículo SPE 10974 presentado en el Congreso Annual de la SPE, New Orleans, Sept. 26-29, 1982

Figura 31. Malla Globalmente Refinada (a) y Malla Localmente Refinada (b)



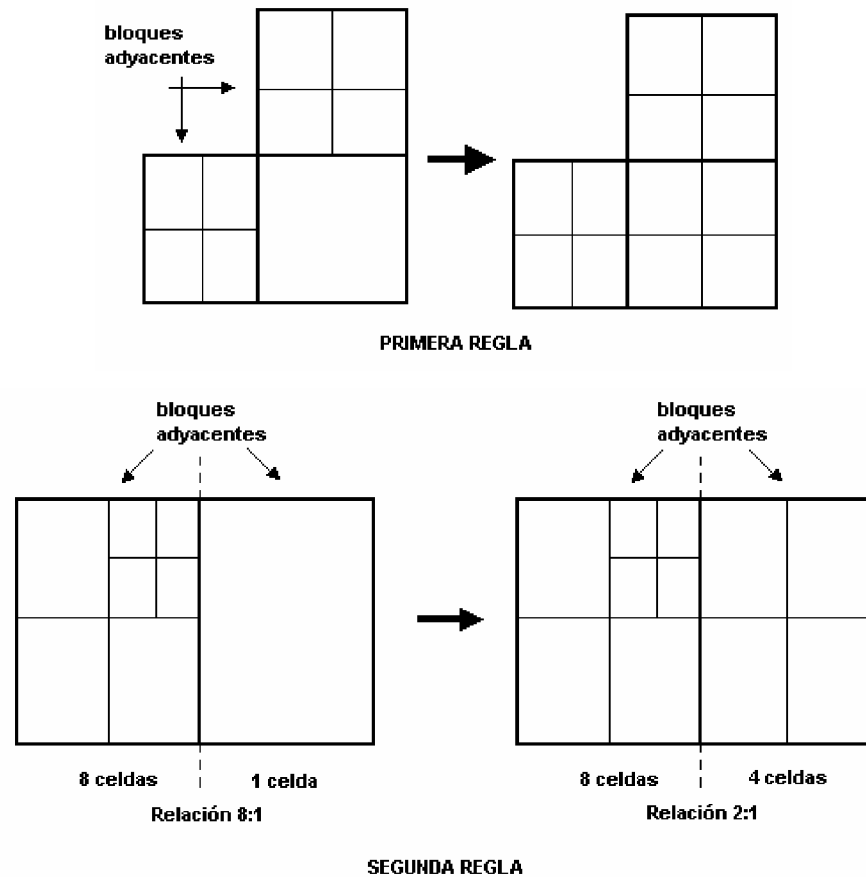
cuales debe ser aplicado el refinamiento local; estas consideraciones son:

- Si dos elementos contiguos a un tercero son refinados, este tercer elemento también debe refinarse.
- Si un elemento pequeño, adyacente a un más grande, es refinado, este último elemento debe refinarse de tal manera que exista una relación máxima de tamaños de 2:1 (Fig. 32).

Con las restricciones impuestas por estas reglas, existen cuatro configuraciones que resultan del refinamiento local: el esquema en cruz, el esquema en espada, el esquema en tijeras y el esquema en poste (Fig. 33).

El **esquema en cruz** es la configuración más común y tiene incrementos de longitud iguales en cualquier dirección. La primera y segunda derivada en dirección x expresadas en diferencias finitas se puede escribir como:

Figura 32. Reglas de Refinamiento



$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{F_2 - F_1}{2\Delta x} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \left[\frac{(\Delta x)^2}{6} \right] - \dots \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{F_2 - 2F_0 + F_1}{(\Delta x)^2} - \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \left[\frac{(\Delta x)^2}{12} \right] - \dots \quad (6.6)$$

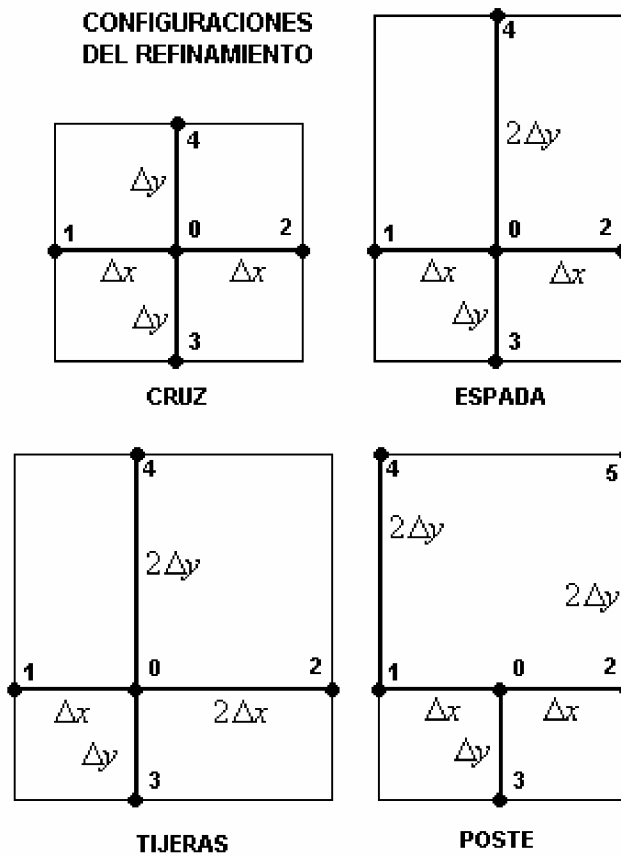
Las derivadas en y para este esquema son iguales a las de x . En términos mas generales este esquema es también conocido como **esquema de cinco puntos**.

El **esquema en espada** se caracteriza porque uno de sus incrementos tiene una longitud equivalente al doble de la longitud de los otros tres lados; las derivadas en la dirección que se incrementa del eje y se expresan como:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{F_4 + 3F_0 - 4F_3}{6\Delta y} - \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left[\frac{(\Delta y)^2}{3} \right] - \dots \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{F_4 - 3F_0 + 2F_3}{3(\Delta y)^2} - \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left[\frac{\Delta y}{3} \right] - \dots \quad (6.8)$$

Figura 33. Esquema de Refinamiento en Mallas Cartesianas Rectangulares



Las derivadas en x y en la dirección que no se incrementa en y, son similares a las Ec. 6.5 y 6.6.

En el **esquema en tijeras** dos de sus lados tienen el doble de la longitud que los otros dos; de ahí se deriva su nombre. En las direcciones incrementadas, las derivadas tienen una forma similar a las Ec. 6.7 y 6.8 y las direcciones que no se modifican guardan la similitud con las Ec. 6.5 y 6.6.

Por último, el **esquema en poste** complica un poco más la expresión de sus derivadas debido a la configuración que presenta. En la dirección incremental en y estas pueden ser expresadas como:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{F_4 + F_5 + 8F_0 - F_1 - F_2 - 8F_3}{12\Delta y} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \left[\frac{(\Delta x)^2}{6} \right] - \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left[\frac{(\Delta x)^2}{3} \right] - \dots \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{F_4 + F_5 + 4F_3 - F_1 - F_2 - 4F_0}{6(\Delta y)^2} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \left[\frac{(\Delta x)^2}{3\Delta y} \right] - \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left[\frac{\Delta x}{3} \right] - \dots \quad (6.10)$$

Esta técnica de Refinamiento Local proporciona resultados bastante satisfactorios cuando se aplica en los niveles adecuados. Debe ser recalcado que la importancia de todo esto radica en el hecho de que nuestro sistema de enmallado debe poseer una configuración tal, que permita obtener la transmisibilidad entre los bloques de la manera más sencilla posible. Esto implica que se debe tratar en lo posible de ortogonalizar la línea de flujo que une los nodos de interés, con respecto a la cara común de los bloques. Además de las reglas anteriores se deben tener en cuenta ciertos aspectos complementarios según Aziz y Settari²¹:

²¹ AZIZ, K. Y SETTARI, A. *Petroleum Reservoir Simulation*, Elsevier, London, New York (1979).

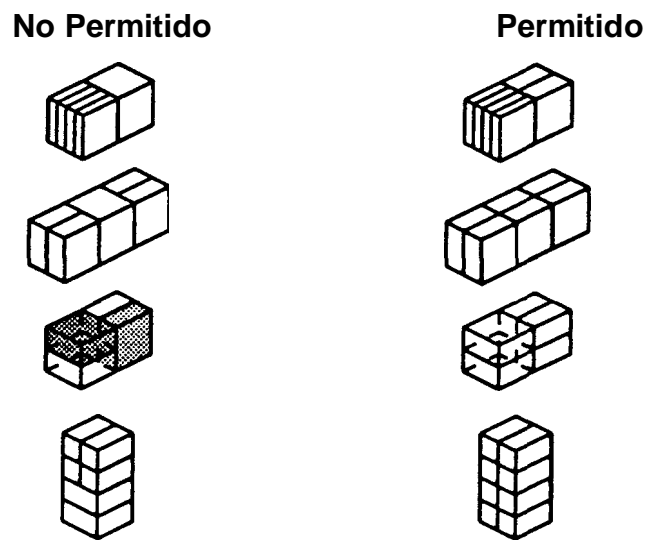
- a. Si se observa que dos Bloques F comparten una cara en una dirección coordenada, es recomendable no dividir en las otras dos direcciones coordenadas para ambas vecindades de los Bloques F.
- b. En cualquier sección a través del sistema de bloques, un bloque sólo puede tener uno o dos bloques vecinos en cada lado.
- c. La división en la dirección vertical debe ser continua dentro de los estratos que están comunicando.
- d. Si se observan dos Bloques F desde una misma dirección coordenada, no se permite que las divisiones de las otras dos direcciones coordenadas se incrementen y disminuyan simultáneamente.

En un sistema de bloques convencional cartesiano usando un esquema diferencial de cinco puntos, un bloque tiene un máximo de cuatro vecinos en el caso bidimensional, y un máximo de seis vecinos en el caso tridimensional. Para el Refinamiento Local de la malla, un bloque puede tener un máximo de doce vecinos, tomando en cuenta las reglas anteriores.

6.3.1.4 Agrupamiento. Aplicando un refinamiento de malla se puede tener una alta resolución en las afueras de los pozos, en los límites del yacimiento y en las discontinuidades. Las aplicaciones prácticas muestran que el procedimiento inverso, o sea, construyendo un sistema de bloques por agrupamiento, puede ser muy útil. Esta técnica se introdujo por Heinemann y Munka²² (1986). La Fig. 35 muestra una parte de una Malla Cartesiana fundamental. Se tienen con anterioridad 8 bloques y dos veces 2 bloques han sido agrupados. El mismo

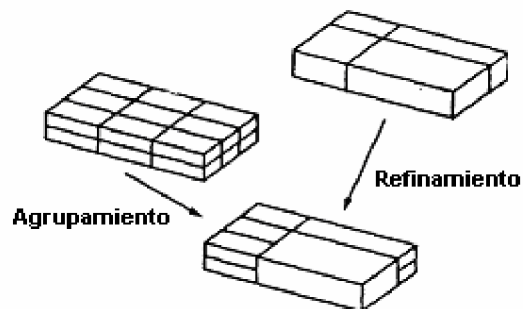
²² HEINEMANN, Z. Y MUNKA, M. Reservoir Simulation with Block Gathering, SPE 15097, Oakland 1986.

Figura 34. Refinamiento permitido y no permitido



STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria, pág 382.

Figura 35. Construcción de un sistema de bloques por agrupamiento y refinamiento de bloques.



STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria, pág 386.

de bloques puede ser construido a través de un refinamiento. En la Fig. 35 uno de los bloques fué subdividido 4 veces y dos bloques dos veces. Un sistema de bloques agrupados es consistente bajo las mismas condiciones como un sistema de bloques refinado. Las reglas de este procedimiento y de los cálculos de las transmisibilidades entre bloques están dados en el numeral anterior.

Para construir solamente sistemas de enmallado primario no es necesario introducir el agrupamiento de bloques. Cada forma de la malla debe ser construida por refinamiento cuando se puede seleccionar una malla fundamental conveniente. Asumimos que esta malla primaria fue seleccionada bajo la consideración de todas las circunstancias y que una reducción del número de bloques conducirá a una pérdida de exactitud necesaria.

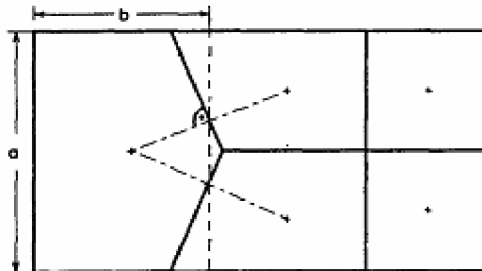
El Agrupamiento de bloques es sólo un método auxiliar usado para propósitos especiales. Estos propósitos son los siguientes:

- a. Incremento Gradual del número de bloques durante un ajuste histórico.
- b. Largo término de predicción en las corridas con un reducido número de bloques.
- c. Economizar al solucionar problemas locales a través del agrupamiento de partes alejadas de cambios rápidos en el yacimiento.
- d. El manejo de yacimientos múltiples con un acuífero común.

6.3.1.5 Cálculo de las Transmisibilidades en la interfase Fina / Gruesa de la malla. Como fué planteado anteriormente, la principal complicación dentro de una malla refinada es el cálculo de la transmisibilidad entre los bloques en la zona de

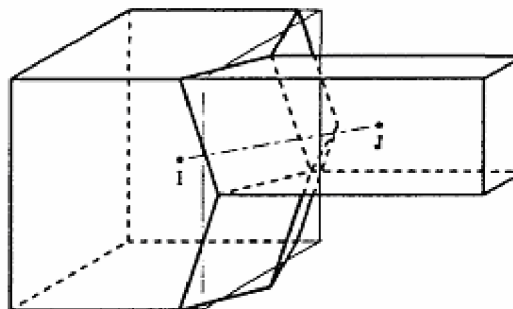
interfaz de la malla gruesa a la fina. Para calcular las transmisibilidades correctamente, se redefinen las áreas de contacto, dando por resultado planos de simetría similares a los existentes entre los nodos I , J y K , de la figura 36 y 37.

Figura 36. Interfaces correctas para el bloque en la malla refinada en 2D



STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria, pág 382.

Figura 37. Distorsión de las interfaces del bloque en una malla tridimensional. El bloque fundamental (izquierda) tiene un bloque vecino dividido en cuatro sub-bloques



STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria, pág 383.

- a. Debe conservarse permeabilidad anisotrópica.
- b. Se debe minimizar la desviación del sistema de celdas para propiciar la ortogonalidad.

Con la **Permeabilidad anisotrópica** lo que se busca es que si la permeabilidad del yacimiento es substancialmente más alta o más baja que el promedio en alguna dirección, los ejes de las celdas estén alineados con los ejes de la permeabilidad direccional. De lo contrario, no será posible construir un sistema de celdas que modelará correctamente la anisotropía en permeabilidad.

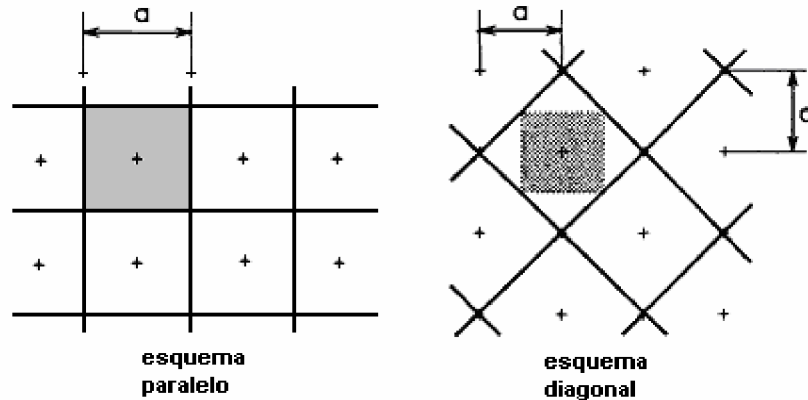
Buscar la **ortogonalidad del sistema de celdas** permite un mejor ajuste descriptivo del modelo ya que las ecuaciones usadas en los simuladores de yacimientos son obtenidas para los sistemas de celdas ortogonales. Es decir, cada columna de bloques está en ángulos rectos a cada fila de bloques. Si los bloques de celdas no son ortogonales las ecuaciones no son estrictamente aplicables y las respuestas generadas por un simulador no puede ser exactas. A veces, sin embargo, (como en el modelo 3D) los límites físicos del yacimiento y la forma de las capas planas no se ajustan a celdas ortogonales. En tales casos, si la curvatura es ligera, se puede emplear una malla no ortogonal y los resultados serán aceptables. Sin embargo, el sistema de celdas no debe diseñarse con ángulos de más de unos grados entre límites de bloques adyacentes. Para los yacimientos en que las mallas cartesianas no son apropiadas, una malla curvilínea debe ser considerada. Las ecuaciones de flujo para una malla curvilínea son similares a que para una malla ortogonal sólo que el Volumen Poroso y los términos de transmisibilidad son multiplicados por un factor relacionado con la forma de la malla.

De aquí se pueden obtener dos conclusiones importantes:

- Una malla más isotrópica puede reducir el efecto de orientación considerablemente porque el error de truncamiento está más uniformemente distribuido sobre todas las direcciones.
- Si la malla es anisotrópica, como el esquema de cinco puntos cartesiano, los efectos de orientación de la malla no pueden disminuirse reduciendo el espaciamiento de la malla.

6.3.1.6.1 Método diferencial de nueve puntos. Yanosik y McCracken²⁴ (1979) sugirieron combinar dos aproximaciones: un esquema paralelo y uno diagonal. Para una malla Cartesiana cuadrada, esto se muestra en la Figura 5.20. Para cada bloque diagonal de la malla se inscribe un bloque paralelo. Un bloque diagonal tiene dos veces al área de un bloque paralelo.

Figura 40. Sistema Cartesiano de bloques cuadrados Paralelos y diagonales.



Sin escribir ecuación alguna, debe notarse que ambos sistemas de enmallado proporcionan una aproximación a la solución exacta (al menos si la ecuación del

²⁴ YANOSIK, J.L. y McCracken, T.A. *A Nine-Point, Finite Difference Reservoir Simulator for Realistic Prediction of Adverse Mobility Ratio Displacement*, SPEJ 253-262.

diferencial fuera lineal) permitiendo construir de esta manera cualquier combinación lineal. Se obtiene tal combinación directamente cuando se adicionan las ecuaciones diferenciales para el sistema de enmallado doble.

Las transmisibilidades resultantes de esta combinación lineal son un término medio ponderado de las transmisibilidades paralelas y diagonales. Las transmisibilidades de cinco puntos pesan en un factor de $2/3$, y las transmisibilidades para los bloques diagonales pesan en un factor de $1/3$.

Se puede concluir por consiguiente, que el esquema de diferencias de nueve puntos es casi libre de los efectos de orientación.

6.3.2 Mallas curvilíneas. Si las superficies que describen al yacimiento son planos paralelos, puede usarse en su representación un sistema de coordenadas cartesianas. Las coordenadas cartesianas, como se apreció anteriormente, pueden rotarse de tal forma que las superficies que definen coincidan con las del yacimiento.

Aunque los diferentes yacimientos pueden ser simulados usando sistemas de mallas rectangulares en coordenadas cartesianas, hay muchas circunstancias en donde la forma del yacimiento y del flujo está mejor representada en un sistema coordenado curvilíneo. Como principal ventaja de este esquema se encuentra el hecho de que permite minimizar el tamaño del modelo sin sacrificar exactitud y puede ser diseñado para cualquier campo, disminuyendo de esta manera el error numérico de truncamiento.

La aplicación de las mallas curvilíneas para simulación de yacimientos fué propuesta al principio por Hirasaki y O'dell (1970). Sonier y Chaumet (1974), Robertson y Woo (1976), Wadsley (1980), Freguson y Wadsley (1986) y Fleming (1987) dieron contribuciones importantes en estos tópicos.

Las mallas curvilíneas fueron introducidas:

- a. Para aproximar correctamente los límites del yacimiento y las discontinuidades.
- b. Para alinear las direcciones principales de permeabilidad con los ejes coordenados y así evitar errores substanciales.
- c. Para reducir el número de celdas activas requeridas en la malla en el nivel de resolución dado.
- d. Para igualar errores numéricos de truncamiento usando el mismo número de bloques en cada línea de flujo.
- e. Para reducir efecto de orientación de la malla por medio del empalme de las líneas de corriente con las líneas coordenadas.

La aplicación exitosa del refinamiento de la malla (Heinemann²⁵ (1983)), del esquema diferencial de nueve puntos (Yanosik y McCracken²⁶ (1979), Coats²⁷ (1983)) de la combinación de la malla cartesiana y radial (Pedrosa²⁸ y Aziz (1985)), y finalmente la introducción de la malla ortogonal irregular por Heinemann

²⁵ HEINEMANN, Z. , GERKEN, G. y HANTELMANN, G. *Using Local Grid Refinement in a Multiple-Application Reservoir Simulator*. SPE 12255, San Francisco, USA 1983.

²⁶ YANOSIK, J.L. y McCracken, T.A. *A Nine-Point, Finite Difference Reservoir Simulator for Realistic Prediction of Adverse Mobility Ratio Displacement*, SPEJ 253-262.

²⁷ STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria.

²⁸ PEDROSA, O.A. *Use of Hybrid Grid in Reservoir Simulation* PhD. 1985 Stanford University USA 1985

y Brand²⁹ (1989) ha desplazado la aplicación de las técnicas de coordenadas curvilíneas de la primera fila de interés. Sin embargo, ha sido la plataforma de nuevos modelos descritos más adelante, así que se discutirán sus características sin restarle importancia.

Un Sistema de Coordenadas Curvilíneo es una generalización simple del Sistema de Coordenadas Cartesianas. Cualquier punto P está definido por un vector $\vec{r} = r(u_1, u_2, u_3)$, y la orientación con respecto al origen para P está dada por u , el cual tiene tres variables u_1, u_2, u_3 . Si el determinante funcional:

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{u}} \right| = \det \begin{vmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{vmatrix} \quad (6.11)$$

donde

$$r_{i,j} = \frac{\partial r_i(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_j} \quad (6.12)$$

no deja de existir en una región del espacio, entonces $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ define un sistema de coordenadas curvilíneo para esta región.

Las superficies:

$$u_1 = \text{const}; \quad u_2 = \text{const}; \quad u_3 = \text{const};$$

²⁹ BRAD, J. Rozon. A Generalized Finite Volume Discretization Method for Reservoir Simulation. SPE 18414 1989

La forma de estas superficies coordenadas y sus intersecciones definen las líneas coordenadas construyendo una red curvilínea general. En otras palabras, cada punto P está definido por la intersección de tres planos coordenados.

Para definir un vector en el sistema curvilíneo, necesitamos un grupo de tres vectores base los cuales están dados por:

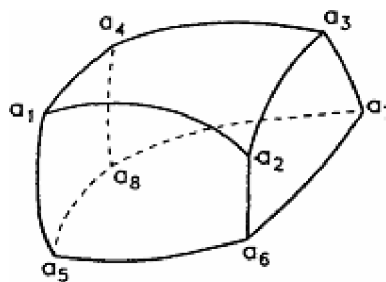
$$\vec{r}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \quad \vec{r}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}, \quad \vec{r}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}, \quad (6.13)$$

Cualquier vector $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ está definido en este sistema de vectores base por

$$\vec{v} = v_1 \vec{r}_1 + v_2 \vec{r}_2 + v_3 \vec{r}_3 \quad (6.14)$$

En un sistema curvilíneo general, el grupo de vectores base depende de las coordenadas espaciales. Esto debe ser tenido en cuenta para la formación de derivadas. Las ecuaciones de arriba definen las transformaciones coordenadas. Todas las ecuaciones de flujo pueden ser transformadas a un sistema curvilíneo general. La discretización es realizada aproximando las derivadas en las ecuaciones transformadas.

Figura 41. Bloque de una malla construida en un Sistema de Coordenadas Curvilíneo



STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria.

La Fig. 41 muestra un bloque de una malla construida bajo un Sistema de Coordenadas Curvilíneo general. Este bloque no es ortogonal. En consecuencia se deben incluir al menos cuatro puntos vecinos de la malla para calcular el término de flujo a través de un lado del bloque. De otra manera la aproximación no será coherente.

En las ecuaciones diferenciales, durante la transformación a coordenadas curvilíneas no ortogonales, se generan nuevos términos transpuestos en la derivada. Tales términos corresponden al factor de volumen poroso y a los coeficientes de transmisibilidad. Además dada la no ortogonalidad, se generan términos transversales parciales. El cálculo correcto del término de flujo para interfaz entre los bloques depende de una correcta aproximación de estos términos. Sin embargo casi siempre los términos transversales parciales pueden ser ignorados si se logra que los ángulos de la malla no se desvíen tanto de la ortogonalidad.

La expresión que representa la conservación de la masa para la fase aceite cuando el yacimiento es isotrópico* se puede ver como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial u^j} \left[g g^{ij} \tau_o \frac{\partial \Phi_o}{\partial u^j} \right] + q_o \quad (6.15)$$

- donde
- τ_o : movilidad del aceite
 - S_o : saturación de aceite
 - q_o : tasa de producción de aceite
 - ϕ : porosidad
 - g : determinante del tensor métrico
 - g^{ij} : conjugada del tensor métrico

* Esta es la forma más simplificada (monofásica e isotrópica)

B_o : factor volumétrico del aceite

u : coordenada curvilínea

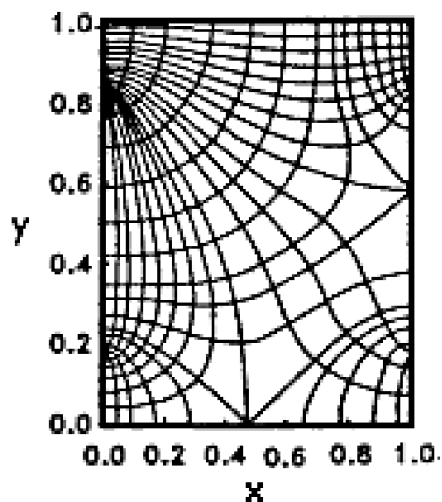
Los términos transversales parciales son introducidos después del desarrollo de los coeficientes coordenados. El error es casi insignificante si la malla aproxima a un modelo de Tubos de Flujo (Stream Tube).

6.3.2.1 Malla curvilínea ortogonal. Un Sistema de Coordenadas es ortogonal si las coordenadas son mutuamente ortogonales en cualquier parte del espacio coordinado. En este caso el término de flujo entre bloques para una cara común a estos, puede ser calculado entre dos puntos de la malla sin que existan términos transversales parciales en las ecuaciones de flujo transformadas en su forma diferencial. Para cualquier sistema de bloques ortogonal, las transmisibilidades entre bloques pueden calcularse usando conceptos geométricos intuitivos así:

$$\tau_{IJ} = k_{IJ} \frac{A_{IJ}}{h_{IJ}} \quad (6.16)$$

donde k_{IJ} es la permeabilidad entre el bloque I y el J, A_{IJ} es el área transversal y h_{IJ} es la distancia entre nodos.

La razón principal a usar un sistema de enmallado curvilíneo ortogonal es reducir los efectos de orientación de la malla. Debido a esto, el sistema de enmallado curvilíneo debe basarse en el modelo de Tubo de Flujo (*Stream Tube*), pero sin despreciar los términos de flujo entre los tubos. El modelo de Tubos de Flujo (*Stream Tube*) coincide con las líneas de flujo dentro del yacimiento físico, las cuales pueden cambiar con el tiempo, sólo si se prefija este comportamiento antes de realizar la simulación.

Figura 42. Bloques para un sistema coordenado curvilíneo

STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria.

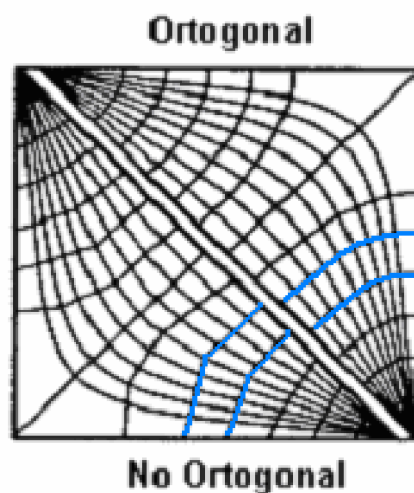
6.3.2.2 Malla de tubos de flujo (*Stream Tube*). La aproximación por Tubos de Flujo fué introducida por Higgins y Leighton⁽¹⁵⁾ (1962). Ellos presentaron una evidencia convincente, de que el desarrollo del frente de agua con un patrón de 5 puntos puede calcularse manteniendo las líneas de flujo constantes a medida que progresa la inundación y usando teoría de Buckley-Leverett (1942) para calcular el desplazamiento a lo largo de las líneas de flujo.

Si se conocen las líneas de flujo, entonces los nodos pueden ser distribuidos arbitrariamente a lo largo de ellas. Los límites de los bloques en dirección de las líneas de flujo, forman lo que se denomina tubos de flujo (*Stream Tube*), y en la otra dirección hay superficies arbitrarias cortando los tubos de corriente en bloques. La Fig. 43 muestra un esquema patrón de 5 puntos. A un lado los tubos de flujo (*Stream Tube*) están irregularmente cortados en bloques. En el otro lado, se construyó una malla ortogonal equivalente a partir de líneas de flujo y

⁽¹⁵⁾ HIGGINS, R.V. y LEIGHTON, A.J. *A computer Method to Calculate Two Phase Flow in Irregularly bounded Porous Medium*, AIME, 225, 679-683 citado por STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria.

superficies equipotenciales. Las dos mallas son equivalentes en el sentido de que las líneas de flujo permanecen iguales. Las transmisibilidades entre los bloques tienen que ser calculadas con la Ec. 2.35 para ambos casos, donde el ángulo γ es 90 grados para el caso ortogonal y variable para el otro caso.

Figura 43. Malla de Tubos de Corriente ortogonal y no ortogonal para un patrón de cinco puntos



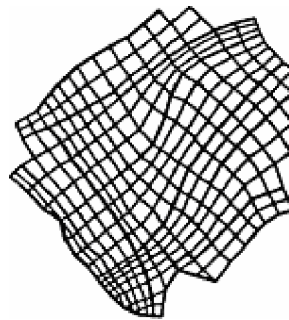
STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria

La aplicabilidad del modelo del Tubo de Flujo está limitada para patrones sencillos y una relación de movilidad favorable. Si la relación de movilidad es desfavorable, entonces los Tubos de Flujo cambiarán significativamente durante el desplazamiento. Martin y Wegner⁽¹⁶⁾ (1979) propusieron un método para cambiar los Tubos de Flujo con el paso del tiempo, pero tal formulación resultó ser demasiado complicada para aplicaciones en propósitos generales.

⁽¹⁶⁾ MARTÍN, J.C. y WEGNER, R.E. *Numerical Solution of Multiphase, Two-Dimensional Incompressible Flow Using Stream -Tube Relationships*, SPEJ, 313-323 1979 citado por STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria

6.3.2.3 Malla no rectangular. La Malla de Tubos de Flujo Ortogonal ha asignado curvas a los límites de los bloques y por esta razón es un tanto complicado calcular volúmenes, áreas, etc. Para sobreponer estas dificultades Wadsley (1980) sugirió usar un rayado coordenado no rectangular. Los bordes curvilíneos de los bloques son aproximados con líneas rectas. Tal cuadrícula es mostrada en la Fig. 44. La aproximación del problema de flujo es tan buena como sea la aproximación de la geometría.

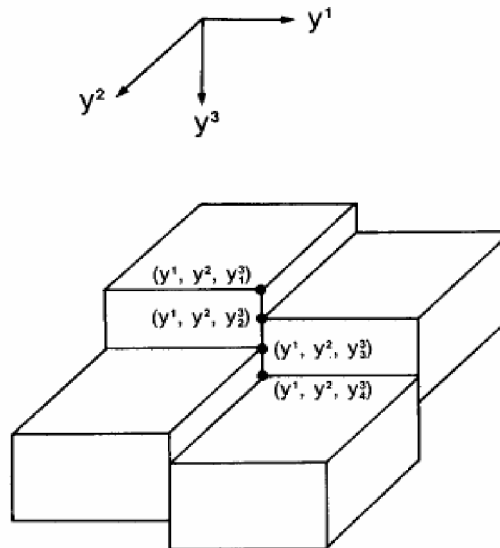
Figura 44. Uso de Malla no rectangular para aproximar la malla por tubos de corriente.



STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria

6.3.2.4 Geometría punto esquina (Corner Point Geometry, C.P.G.). La forma para este tipo de malla es rectilínea: se inicia con una malla por Tubos de Flujo (Stream Tube) no ortogonal que es correcta, pasando a través de la malla no rectangular que es una aproximación de la malla por tubos de corriente, para la elección libre de las esquinas de los bloques que componen la malla. Cada vértice del bloque se ubica en la posición más conveniente permitiéndole actuar como una “caja flexible” en el espacio. Esta propiedad hace que este tipo de geometría se adapte prácticamente a cualquier tipo de geometría del yacimiento. En la Fig. 45 se puede observar un ejemplo de distribución coordenada de las esquinas de los bloques.

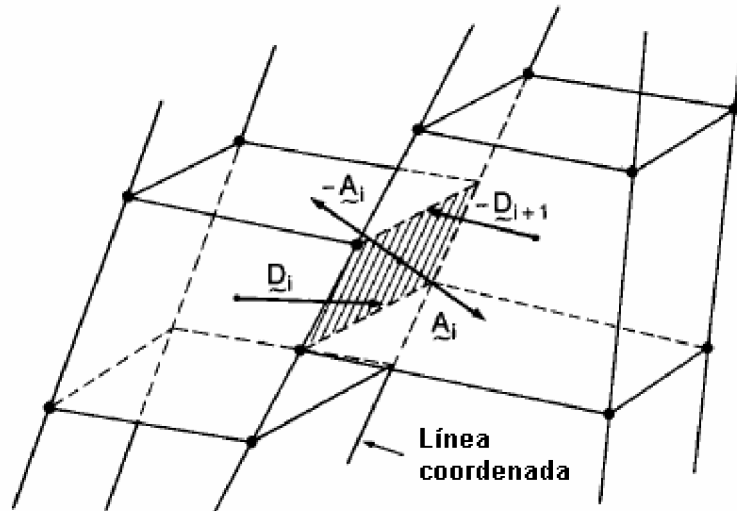
Figura 45. Distribución coordenada de las esquinas en el espacio para bloques de una malla CPG. La figura muestra como varias esquinas pueden tener el mismo par coordenado en el plano.



Una aplicación simple del esquema de cinco puntos (2D) o del esquema de siete puntos (3D) para tales sistemas de enmallado desprecia los términos transversales parciales de las derivadas. Bajo ciertas situaciones de flujo, esto causa errores graves. Sin embargo, Cheshire³⁰ (1989), presentó un método de discretización basado en una aproximación por elementos finitos para la geometría de Punto Esquina. Otra forma de introducir errores dentro de los esquemas de solución ocurre cuando las caras de los bloques no se conectan totalmente. Se hace necesario trabajar con componentes y áreas comunes (Fig. 46).

³⁰ CHESHIRE, I.M. *Local Grid Refinement* artículo presentado en la primera Conferencia Europea de Matemáticas en recobro de aceite, Cambridge, Julio 1989

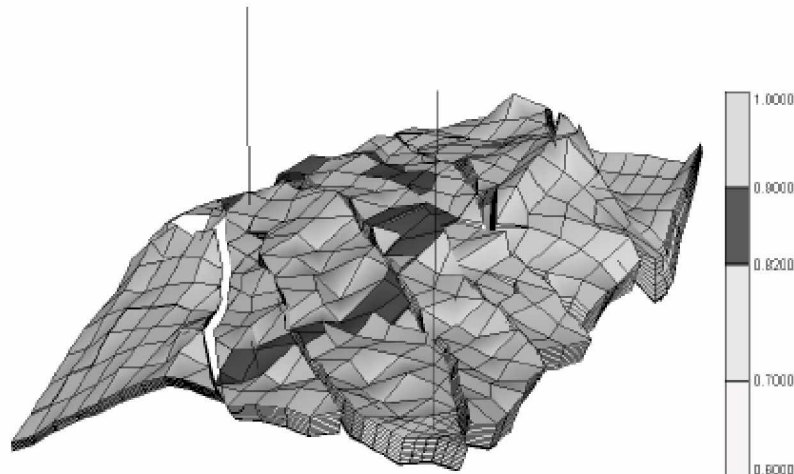
Figura 46. Empalme incompleto de bloques en la malla. Se puede observar como es la distribución de conexiones por transmisibilidad y el área común con la que se desarrollarán los cálculos.



La Fig. 47 muestra tal malla, tomado del material publicitario de un simulador comercial. Tal libertad es naturalmente tentadora pero el resultado es fidedigno sólo si la discretización es matemáticamente correcta.

El problema más difícil de resolver en esta geometría, es el cálculo de la transmisibilidad. Dado que a cada bloque en el espacio se le pueden asignar arbitrariamente las coordenadas de las esquinas, es posible que se tengan muchas configuraciones de bloques las cuales pueden ser agrupadas de forma simplificada en dos tipos: con caras paralelas y sin caras paralelas. Los métodos aplicados para los cálculos de transmisibilidad son la aproximación vectorial, que es el caso más sencillo y la Integración Armónica*

* Para mayor información observar el apéndice A

Figura 47. Malla construida con geometría punto esquina

6.3.2.5 Sistema de coordenadas radial. Una de las tareas más importantes en la ingeniería de petróleos es el cálculo de variables en pozos simples, tales como pruebas de pozo, conificación de agua y gas, inyección de fluido de estimulación, ect.. La exactitud en los cálculos numéricos para tales problemas necesitan mallas especiales. La simetría más frecuentemente usada es la radial, la cual en 2D representa una formulación en r y z , y puede ser reducido fácilmente de una formulación tridimensional.

Un punto de la malla en un sistema de coordenadas cilíndrico está especificado por la coordenadas r_i , θ_j y z_k como lo muestra la figura 45 con un bloque típico.

El problema a solucionar es el cómo se pueden escoger las posiciones óptimas para los puntos de la malla y los límites del bloque. Esta pregunta se discute en detalle por Aziz y Settari³¹(1979) pp.86-91 y 207-213. Las series de Taylor y el método de volúmenes finitos conducen a soluciones ligeramente diferentes. Se expone el segundo método como una consecuencia lógica de los capítulos 1 y 2

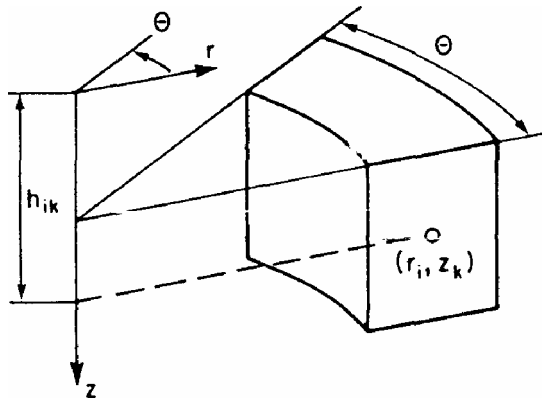
³¹ AZIZ, K. Y SETTARI, A. *Petroleum Reservoir Simulation*, Elsevier , London, New York (1979).

de este trabajo y se discute circunstancialmente porque no está clarificado en el libro mencionado arriba.

Los límites del bloque en la dirección radial, lateral y vertical son superficies ortogonales en las líneas coordenadas y están localizadas en $r_{i\pm 1/2}$, $\theta_{i\pm 1/2}$ y $z_{k\pm 1/2}$ respectivamente. De acuerdo a la Ec. 3.31, la tasa de flujo a través de la superficie de cada bloque esta dada por una formulación en diferencias:

$$q = -A \frac{k \Delta\Phi}{\mu \Delta s} = -A \frac{k \Phi_J - \Phi_I}{\mu \Delta s} \quad (6.17)$$

Figura 48. Un bloque típico para un modelo de pozo en coordenadas $r - z$ (Pedrosa y Aziz 1985)



donde los índices I y J denotan dos nodos vecinos. Estimamos la aproximación por la Ec. 6.17 como óptima si la solución exacta para ciertos problemas físicos simples, como un problema de flujo unidimensional en estado estable con condiciones de frontera simplificadas.

La coordenada $\theta_{j\pm 1/2}$ fué seleccionada como la media aritmética de las coordenadas de los nodos:

$$\theta_{j\pm 1/2} = \frac{\theta_{j+1} + \theta_j}{2} \quad (6.18)$$

Los límites de los bloques a lo largo de la dirección radial son bisecciones perpendiculares según el método básico, introducido en el Capítulo 3.

Para encontrar el valor óptimo para $r_{i+1/2}$, asumimos primero un flujo radial en una dimensión. La solución exacta para la tasa de flujo q y el radio r está dada por :

$$q = -\frac{k\Delta\theta(z_{j+1/2} - z_{j-1/2})}{\mu} \frac{p(r_{i+1}) - p(r_i)}{\ln(r_{i+1}/r_i)} \quad (6.19)$$

donde q es la tasa de flujo, μ la viscosidad del fluido, k la permeabilidad y $\Delta\theta = \theta_{j+1} - \theta_j$.

De la aproximación discreta de la Ec. 6.17, la tasa de flujo está escrita en la forma

$$q = -\frac{k\Delta\theta(z_{j+1/2} - z_{j-1/2})}{\mu} r_{i+1/2} \frac{p(r_{i+1}) - p(r_i)}{r_{i+1} - r_i} \quad (6.20)$$

Reemplazamos Φ con la presión p , porque la dirección de flujo es horizontal. La posición correcta de los límites del bloque está definida por lo requerido en la Ec. 6.18 y la Ec. 6.19 para producir el mismo resultado. Este es el caso para:

$$r_{i+1/2} = \frac{r_{i+1} - r_i}{\ln(r_{i+1}/r_i)} \quad (6.21)$$

En el segundo paso consideramos sólo la componente lateral de flujo, o sea, el flujo a lo largo de los arcos con r constante. Se asume que la presión es constante en cualquier línea radial y varía linealmente en θ . Así las superficies en $r_{i+1/2}$ y en $r_{i-1/2}$ son límites de no flujo y la velocidad se calculada simplemente por :

$$u(r) = -\frac{k}{\mu} \frac{p(\theta_{j+1}) - p(\theta_j)}{r\Delta\theta} \quad (6.22)$$

La tasa de flujo a través de un límite del bloque es:

$$q = \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} (z_{k+1/2} - z_{k-1/2}) u(r) dr = -\frac{(z_{k+1/2} - z_{k-1/2})}{\Delta\theta} \frac{k}{\mu} (p(\theta_{j+1}) - p(\theta_j)) \ln \frac{r_{i+1/2}}{r_{i-1/2}} \quad (6.23)$$

Otra forma del término de flujo se obtiene asumiendo la velocidad lateral como constante a lo largo de los límites del bloque:

$$q = u(r)(z_{j+1/2} - z_{j-1/2})(r_{i+1/2} - r_{i-1/2}) \quad (6.24)$$

Introduciendo la Ec. 6.22 en la Ec. 6.24 se llega a:

$$q = -\frac{(z_{j+1/2} - z_{j-1/2})(r_{i+1/2} - r_{i-1/2})k}{\Delta\theta\mu r_i} [p(\theta_{j+1}) - p(\theta_j)] \quad (6.25)$$

Las Ec. 6.23 y Ec. 6.25 están derivadas bajo suposiciones diferentes. Si se usan las Ec. 6.23 y Ec. 6.25 para producir resultados idénticos, éstas imponen una condición adicional en las posiciones de los nodos:

$$r_i = \frac{r_{i+1/2} - r_{i-1/2}}{\ln\left(\frac{r_{i+1/2}}{r_{i-1/2}}\right)} \quad (6.26)$$

Si el radio interno del pozo $r_{1/2} = r_w$ y el primer punto radial r_1 se escoge, entonces las Ec. 6.21 y Ec., 6.26 que pueden ser solucionadas sucesivamente para obtener los puntos radiales r_i y $r_{i\pm 1/2}$ los cuales cumplen a cabalidad con ambas condiciones. Si r_w , y, el radio exterior r_e y el número de puntos radiales M se mezclan, entonces los radios r_i y $r_{i\pm 1/2}$ que satisface ambas Ec. 6.21 y Ec. 6.26, son obtenidos solucionando un sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} r_{1/2} &= r_w && \text{radio interno o de pozo} \\ r_{i+1/2} &= \frac{r_{i+1} - r_i}{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)} && (i = 2, \dots, M-1), \\ r_i &= \frac{r_{i+1/2} - r_{i-1/2}}{\ln\left(\frac{r_{i+1/2}}{r_{i-1/2}}\right)} && (i = 1, \dots, M), \\ r_{M+1/2} &= r_e && \text{otros radios} \end{aligned} \quad (6.27)$$

En el caso radial bidimensional allí no hay componente lateral de flujo, así la Ec. 6.26 carece de importancia. El radio r_i puede ser seleccionado libremente y los límites radiales pueden ser calculados fácilmente de la Ec. 6.21. Para obtener igualmente una buena aproximación en todas partes, es mejor distribuir los puntos de la malla en dirección radial de tal modo que, las diferencias de presión entre los puntos de la malla, al menos para flujo monofásico en estado estable, quede igual. De la Ec. 6.19, se da este caso si:

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} = \text{const.} \quad (6.28)$$

Comparado para la distribución dada por la Ec. 6.27, esto pone los puntos radiales más apretadamente hacia el pozo. En la dirección vertical ambos métodos de construcción de la malla, el punto distribuido y el de bloque centrado, pueden ser aplicado. En el caso homogéneo, el esquema de punto distribuido es el más recomendado. En este caso los puntos de la malla de la primera fila están en lo alto del estrato, y el último en el fondo. Los límites del bloque bisectan los espacios de la malla. Las coordenadas de verticales de los límites son:

$$z_{k+1/2} = \frac{z_{k+1} + z_k}{2} \quad (6.29)$$

Si el yacimiento está dividido por capas, lo que es mejor es tomar los límites del estrato y los límites de la fase también como límites de bloque $z_{k\pm 1/2}$. Los puntos de la malla están dados por una aproximación de bloque centrado

$$z_k = \frac{z_{k+1/2} + z_{k-1/2}}{2} \quad (6.30)$$

6.3.3 Malla de bisección perpendicular. El método de discretización por volumen finito permite construir ecuaciones diferenciales en sistemas generales de enmallado formando una red de triángulos, cuadriláteros convexos, radiales u otras mallas curvilíneas. La interpretación heurística de este método sugiere, que para una malla de bloques de forma muy arbitraria, la solución de las ecuaciones de diferencia debe proporcionar una aproximación razonable de la solución exacta. Pero cuando las integrales para los términos de flujo son evaluadas, se realizan varias aproximaciones, y la calidad empieza a depender del grado de

regularidad de la malla. Para fundamentar matemáticamente el comportamiento de la convergencia, es necesario especificar reglas más detalladas para construcción de la malla.

Las mallas basadas en la bisección perpendicular han sido usadas ya por mucho tiempo y en muchas aplicaciones. Narashiman y Witherspoon⁽¹⁷⁾ (1976) usaron tales mallas para calcular flujo monofásico. Para el flujo multifásico se consideró en una malla hexagonal regular por Pruess y Bodvarsson (1983). Algunos de los primeros intentos de usar mallas irregulares para flujo de multifásico fueron generalizaciones simples de los esquemas estándar (en 2D) de cinco puntos o en cierta forma mallas cartesianas deformadas (la geometría de punto Esquina). Esto fué hecho en poco tiempo, sin embargo, estos métodos no solo carecían de fundamentación matemática, sino que producían resultados erróneos en muchos casos. Recientemente los artículos en mallas irregulares por ello, usan técnicas de volumen finito o elementos finitos para justificar a sus discretizaciones (Forsyth 1989, Heinemann et al. 1989, Rozon 1989, Cheshire 1989).

No todas las discretizaciones en mallas irregulares se basan en la bisección perpendicular. Para una malla rectangular, hay dos formas diferentes de construir los bloques de la malla, ya sea por el esquema de punto centrado y punto distribuido, o el equivalente más reciente para el método perpendicular de bisección. En el caso irregular, hay aun más alternativas para especificar los puntos y bloques de la malla. Pero con respecto a las técnicas de volumen finito, es más natural operar con mallas de bisección perpendicular.

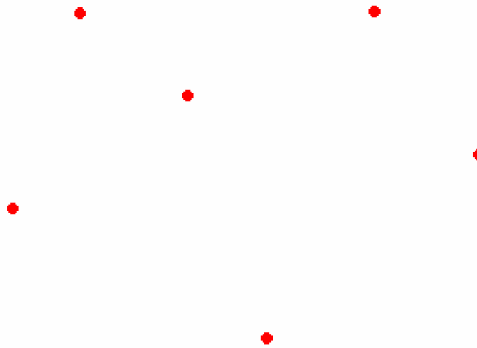
El análisis expuesto aquí, se restringirá al uso de triángulos, rectángulos y la combinación de estos elementos. Después de Heinrichs (1987), quien mostró la

⁽¹⁷⁾ NARASIMHAN, T.N. y WITHERSPOON, P.A. "An Integral Finite Difference Method for Analysing Fluid Flow in Porous Media, *Water Resources Research*, 12(1), 1976, 57-64 citado por STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation*. Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria.

convergencia de tales discretizaciones bajo suposiciones muy generales, se define ahora la malla de bisección perpendicular (Perpendicular Bisection, PEBI). En este trabajo se considera sólo que tales mallas a nivel tridimensional constan de dos dimensiones idénticas comportándose como elementos prismáticos. Para la construcción de la malla por consiguiente, se describirá sólo el caso de dos dimensiones.

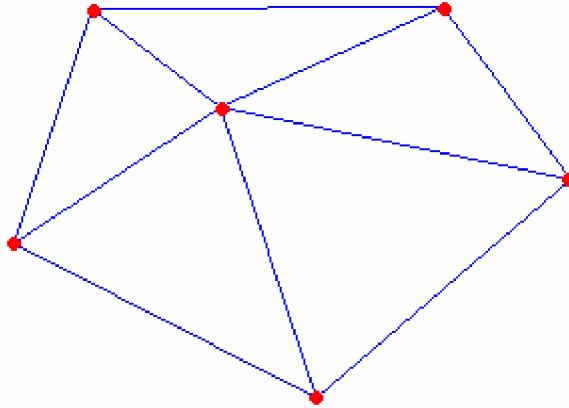
6.3.3.1 Construcción de la malla PEBI a partir de la triangulación de Delaunay. Se va a suponer una nube pequeña de puntos aleatorios para efectos de mostrar como se realiza el procedimiento. El primer paso es distribuir dicha nube de puntos en el plano que se desea enmallar tal y como lo muestra la Fig. 49:

Figura 49. Nube de puntos distribuida en el plano



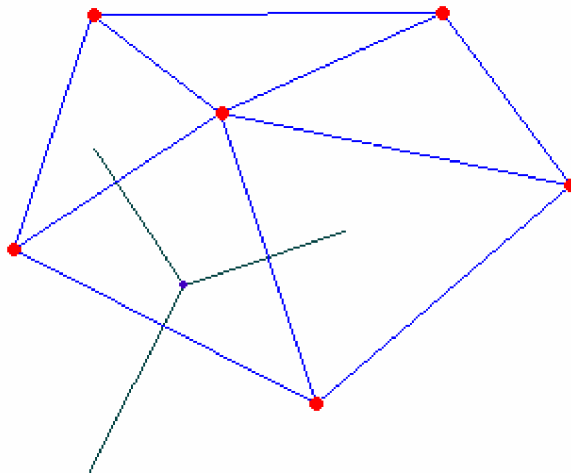
La triangulación de Delaunay es la triangulación más equilátera posible de entre todas las posibles sobre la nube de puntos. Realizamos pues la triangulación de Delaunay sobre la nube de puntos, así que se procede a triangular bajo este criterio.

Figura 50. Triangulación. Los triángulos deben ser lo más equiláteros posible.



Una vez que se tiene triangulada la nube de puntos se procede a calcular los vértices del diagrama de Voronoi que serán los circuncentros de los triángulos que se ven en la Fig. 50.

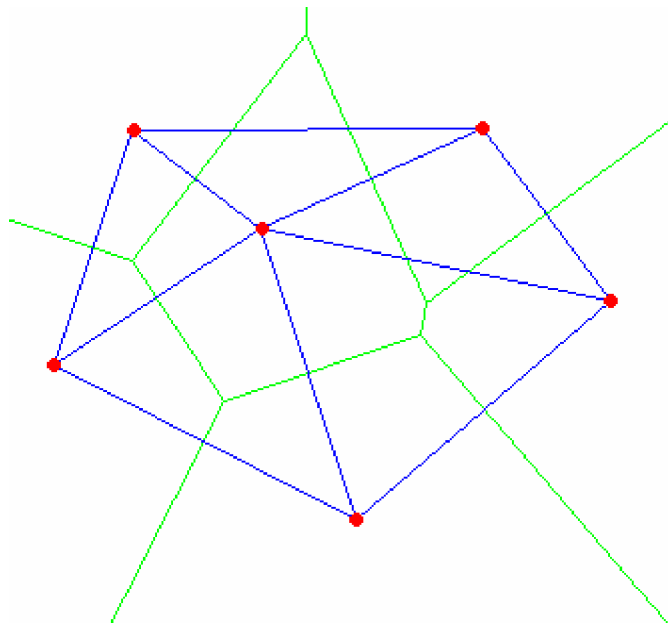
Figura 51. Localización de los circuncentros.



Una vez calculados todos los circuncentros de todos los triángulos, se realiza el diagrama aprovechando el trazo de la mediatriz, de los lados del triángulo, y

borrando la semirrecta que incida en una región del diagrama de Voronoi, como se puede observar en la siguiente figura:

Figura 52. Diagrama Voronoi final.



Otros dos métodos bastante reconocidos para la generación de mallas Voronoi son el algoritmo “Divide y Vencerás” y el método De La Fortune, los cuales emplean círculos y trazados de vecindades para llegar a mallas similares pero estos no serán discutidos aquí ya que no tienen como base una triangulación.

6.3.3.2 Localización de los puntos de la malla. Para conservar un error de truncamiento pequeño, la distribución de los puntos de la malla en el interior del yacimiento debe ser tan regular como sea posible. Para mallas triangulares, considerando la exactitud, los triángulos equiláteros son los más óptimos como fue expuesto anteriormente. Por razones de flexibilidad, al menos algunos triángulos tienen que ser irregulares. Los puntos de la malla tienen que ser distribuidos de

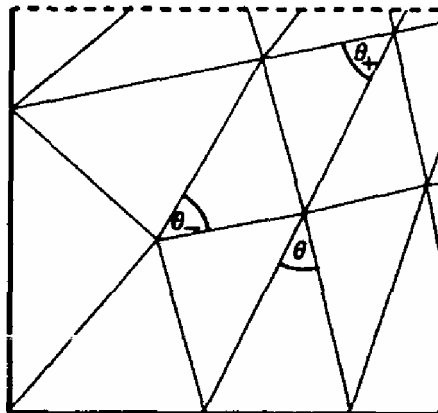
una manera más densa en regiones donde se requiere mayor resolución o donde la solución varía rápidamente. Normalmente estas regiones se encuentran alrededor de los pozos. Esto causa que la malla sea irregular. Esta irregularidad se asocia a las zonas estrechas que se presentan en la interfaz entre una malla gruesa y una fina (ambas siendo regulares), o a los cambios de tamaño de la malla (el primer caso hace parte más o menos del refinamiento local de la malla).

Para la siguiente condición de regularidad, hay que evitar las transmisibilidades negativas y que los bloques de la malla que se traslapen, *cf.* Fig. 53:

$\theta_- + \theta_+ \leq \pi$ \rightarrow para los ángulos θ_{\pm} en los
vértices opuestos al lado común
de dos triángulos.

$\theta \leq \pi / 2$ \rightarrow para el ángulo θ en el
vértice opuesto a un lado del límite. (6.31)

Figura 53. Los ángulos θ , θ_- y θ_+



Al considerar los límites externos del yacimiento, se puede suponer fácilmente que las celdas que se generan allí tendrán forma de polígonos. Al menos cada punto de la esquina de los polígonos tiene que ser un punto de la malla. Si hay diferentes tipos de condiciones límite aplicadas en diferentes partes de un límite, por ejemplo, presión constante a un lado y en el otro una barrera de no flujo, el punto de colisión, o donde las condiciones límite cambian, tiene que ser también un punto de la malla. Adicionalmente, si las funciones en los límites tienen una discontinuidad de salto, por ejemplo, un salto en la presión en un límite de presión constante, entonces tales puntos de discontinuidad tienen que ser incluidos en el sistema de enmallado. La construcción de tales mallas para los ejemplos de simulación de yacimientos es sólo factible si el software soporta el esquema de generación.

Descripción de la generación automática de la malla:

- a. El yacimiento debe ser cubierto por una malla hexagonal regular.
- b. Para aproximar los límites, los puntos de la malla son proyectados en los límites o cambiados de posición hacia las esquinas de los límites del polígono y hacia las ubicaciones de los pozos. Debido a este paso, se distorsiona una zona de la malla hexagonal a lo largo de los límites y alrededor de pozos.
- c. Un procedimiento iterativo de suavizamiento es aplicado para cada punto de la malla excepto en puntos que representan pozos y en puntos de las esquinas. Las coordenadas de cada punto de la malla son reemplazadas por una media ponderada de las coordenadas de todos los vecinos. A los puntos de los límites, sin embargo, les es sólo permitido cambiar su posición a lo largo del límite. Este procedimiento es repetido iterativamente. Los nodos para los cuales se les asignó un factor de ponderación alto, formarán una malla densa mientras que quienes tengan factores de ponderación bajos causarán un

espaciamiento más tosco de la malla. Si todos los puntos reciben igual peso, este procedimiento converge para una malla formada por triángulos casi equiláteros en el interior y algunos ligeramente deformados para coincidir con los límites.

- d. Durante el proceso de suavizamiento, las restricciones del ángulo mostradas en la Ec. 6.25 puede ser violadas. Después de que cada iteración del proceso suavizado, esta condición es chequeada y la malla es ajustada correctamente cambiando algunos triángulos o removiendo puntos de la malla, si es necesario, para asegurar regularidad de la malla.
- e. Los bloques de la malla son construidos por el método descrito en la siguiente subsección. El área o el volumen de los bloques es calculado así como también las transmisibilidades entre los bloques. Todos los datos suponiendo geometría de la malla y la transmisibilidad están escritos en un archivo de la interfaz el cual es usado como entrada en el simulador.

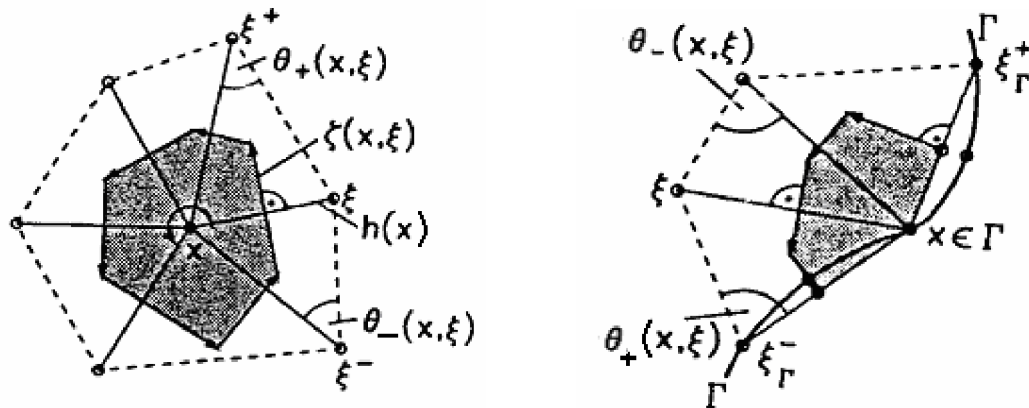
6.3.3.3 Construcción de los bloques de la malla. Ahora se definirán los bloques de la malla por medio de la Bisección Perpendicular (Heinrichs (1987), McNEAL (1953)). Cada nodo de la malla triangular o rectangular es asociado con un bloque de la malla el puede estar descrito solamente por el esquema de la triangulación de Delaunay expuesto anteriormente o de forma general como sigue:

Se determinan los puntos de intersección de las bisecciones perpendiculares del triángulo y los lados del rectángulo, o sea, los circuncentros de Δ y alrededor de cada punto de la malla (nodo). Para x y un punto vecino ξ denotamos el lado conectándolos con $h(x, \xi)$. Si x y ξ no son ambos puntos límite, entonces dos circuncentros corresponden a lado $h(x, \xi)$ y, en los casos especiales, pueden

coincidir. Estos dos puntos estarán conectados por un segmento de bisector perpendicular $\zeta(x, \xi)$. Si ambos x y ξ son puntos límite, el segmento entre el punto de intersección de los bisectores perpendiculares y el "punto de la perforación" de la bisectriz en el límite será tomado y designado por $\zeta(x, \xi)$. Además, $\zeta(x)$ denota el segmento de línea del límite conformado entre dos puntos de la perforación. Los detalles se muestran en la Fig. 54.

Ahora el bloque de la malla rodea al punto x está definido como la región adjunta por todos los segmentos $\zeta(x, \xi)$ para todos los puntos vecinos ξ . Las condiciones de regularidad de la malla Ec. 6.31 asegure que la construcción de los bloques cuadrículados puede ser realizado correctamente.

Figura 54. Construcción del bloque de la malla para un punto interno y para un punto límite

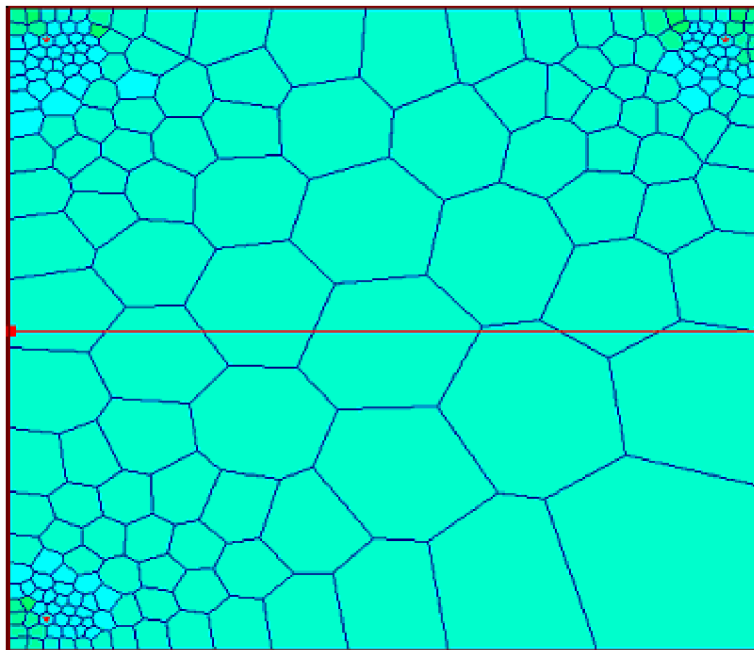


Para una malla rectangular, este procedimiento simplemente conduce a una malla de punto distribuido. Como se ya mencionó en el Capítulo 3, este método puede ser modificado para problemas anisótropicos de permeabilidad. Para \bar{k} anisotrópica, la bisección $h(x, \xi)$ no es en gran medida perpendicular, pero puede

ser rotado en un ángulo tal que el vector normal $\bar{n}(x,\xi)$, $\bar{k}\bar{n}(x,\xi)$ sea paralelo a $h(x,\xi)$.

El resultado de todo este procedimiento es una malla similar a la mostrada por la Fig. 55.

Figura 55. Malla PEBI generada en ECLIPSE OFFICE v. 2001 A en donde se aprecia la distribución del error de dispersión numérica.



7. RESULTADOS

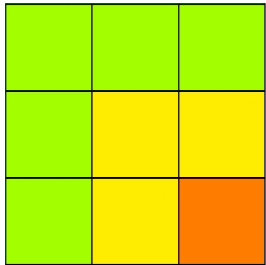
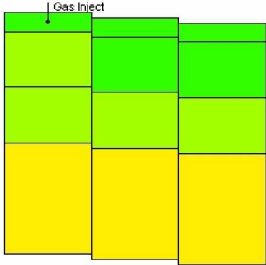
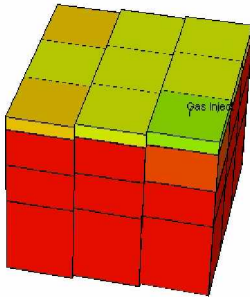
7.1 COMPARACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ENMALLADO

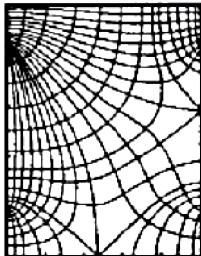
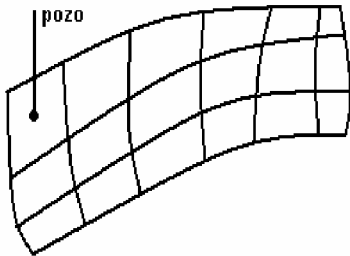
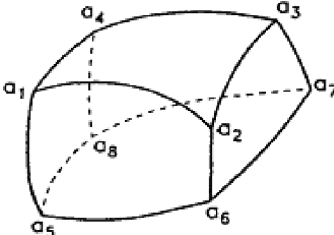
De acuerdo a toda la base teórica revisada, se pudo establecer la diferenciación de los sistemas de enmallado, teniendo como criterios descriptivos los siguientes ítems: la construcción, las características básicas, las ventajas y desventajas, el campo de aplicación y forma general de la malla en el espacio. Esta ficha técnica* de cada tipo de malla puede orientar de manera rápida al ingeniero, técnico o estudiante que se encuentra desarrollando una simulación, sobre las características más importantes del sistema de enmallado que está usando y lo que puede esperar de él, o puede permitir tomar una decisión preliminar el sistema que es más apropiado para el proceso que desea modelar.

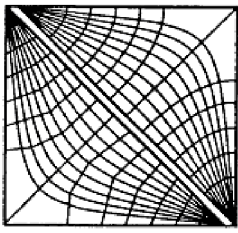
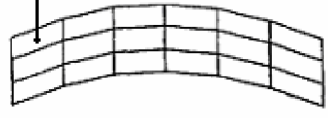
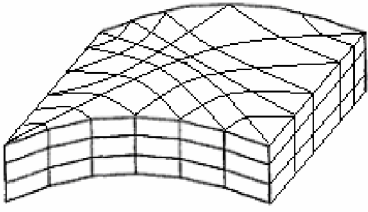
Debe quedar claro que estas fichas técnicas solo constituyen una herramienta de carácter cualitativo, y no logran contener toda la base matemática que se encuentra detrás de cada sistema. Esta información puede encontrarse de forma explícita en los capítulos desarrollados anteriormente en el presente trabajo o en las referencias expuestas durante el desarrollo de todo el tema.

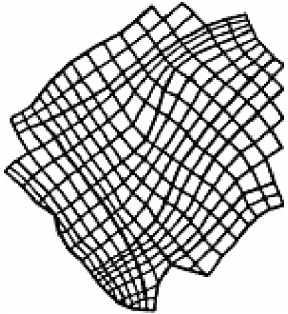
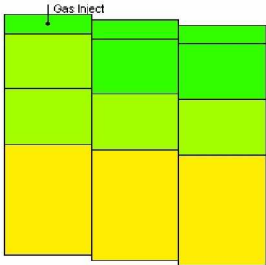
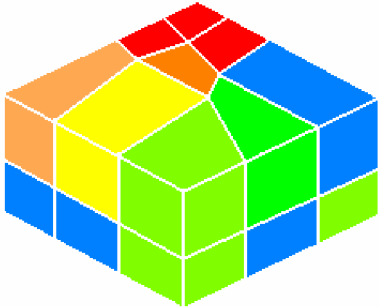
Es de suma importancia que se tenga en cuenta que las técnicas pueden ser combinadas en la medida que estas lo permitan y que el modelo lo requiera. La decisión más acertada depende de un conjunto de variables, incluyendo la capacidad de la persona que esté al frente del diseño de la simulación.


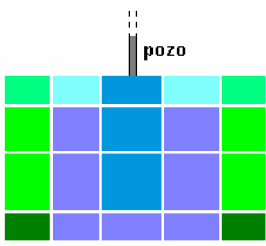
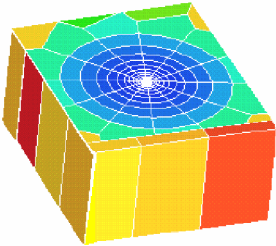
* Las figuras presentadas en las fichas no corresponden al mismo modelo pero si son una representación del tipo de enmallado que correspondiente a la ficha.

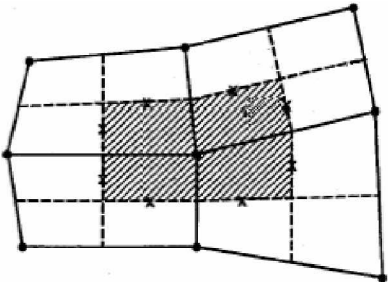
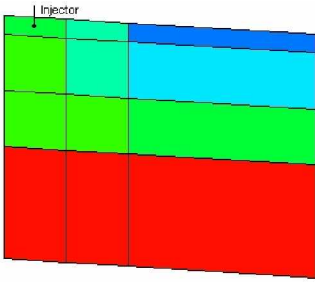
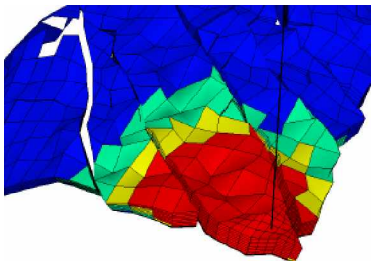
Malla Cartesiana		
CONSTRUCCIÓN:	Se puede usar un esquema de punto centrado o punto distribuido.	
CARACTERÍSTICAS:	Es rectangular o cuadrada dependiendo del esquema y de la distribución en general; un nodo está definido por la intersección de dos planos rectos. En cada nodo las líneas coordenadas son ortogonales. El sistema es totalmente ortogonal. Su discretización se basa en diferencias finitas.	
VENTAJAS:	Es el sistema más sencillo y más utilizado. Se puede inclinar o girar en el plano para orientar la malla con la tendencia de flujo, o se puede plantear un esquema de 9 puntos para corregir los efectos de orientación. Permite modificar la malla base a través refinamientos o agrupamientos de celdas, dependiendo de si se necesita o no, una mayor resolución en determinada zona y de si el simulador lo permite. Si la vertical es de dimensiones mucho menores que en el plano, se puede aproximar por tubos de flujo (<i>stream tube</i>).	
DESVENTAJAS:	Es demasiado rígida y no siempre logra describir de forma adecuada la geometría del yacimiento.	
APLICACIÓN:	Es de uso general ya que representa la forma más simple y reducida de discretización en el espacio, aunque su uso no se extiende tanto en plano para modelos de pozo tales como en estudios de conificación o inyección de fluidos. En estos modelos se usa más sobre la vertical a través de refinamientos. Se usa también para describir mejor los límites de fase.	
VISTA DE PLANTA	VISTA LATERAL	VISTA 3D
		

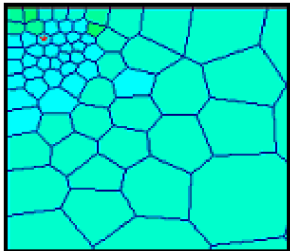
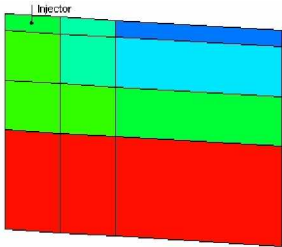
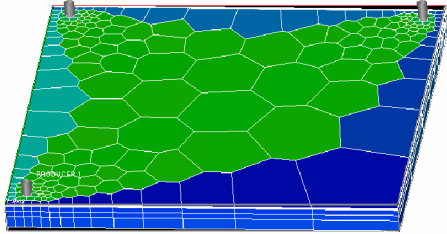
Malla Curvilínea		
CONSTRUCCIÓN:	Los nodos se ubican sobre las líneas de flujo en el yacimiento.	
CARACTERÍSTICAS:	Todo el esquema general de la malla puede ser ortogonal o no. Las líneas de flujo son suaves y representan los canales de permeabilidad existentes en el yacimiento. Tienden a ser más densa en las cercanías a los pozos.	
VENTAJAS:	Permite corregir los efectos de orientación ajustando las líneas de corriente en el yacimiento con las líneas coordenadas. Esto permite alinear las direcciones principales de permeabilidad con los ejes coordenados. Además, facilita minimizar el tamaño del modelo sin sacrificar exactitud y puede ser diseñada para cualquier campo, disminuyendo de esta manera el error numérico de truncamiento y reduciendo el número de celdas activas.	
DESVENTAJAS:	Las caras de los bloques son curvas, lo cual dificulta el cálculo del área transversal o del volumen de la celda. El cálculo se complica si las caras son no ortogonales entre sí ya que es necesario incluir al menos cuatro puntos vecinos de la malla para calcular el término de flujo. De otra manera la aproximación no será coherente.	
APLICACIÓN:	Ya no es de uso común debido a que fué reemplazada por esquemas mejorados creados posteriormente. Lo que se conserva es la estructura del sistema coordinado para modelos que posean esta geometría o cuyas líneas de flujo en el yacimiento así lo requieran.	
VISTA DE PLANTA	VISTA LATERAL	VISTA 3D (para un bloque de la malla)
		

Malla de Tubos de Flujo (Stream Tube)		
CONSTRUCCIÓN:	Los nodos se colocan sobre las líneas de flujo y estas a su vez, son cortadas por superficies equipotenciales que terminan de generar la malla. Se puede decir que es el mismo esquema de generación de una malla curvilínea.	
CARACTERÍSTICAS:	La principal característica es que no existe flujo entre las líneas de flujo que la conforman, solo sobre ella. Esto le da el comportamiento de tubo.	
VENTAJAS:	Permite aproximar en el espacio sobre la vertical en las Mallas cartesianas cuando el espesor del yacimiento no es comparable con su área. Además facilita el cálculo del volumen o del área de la celda ya que dos caras de una celda pasan a ser rectilíneas.	
DESVENTAJAS:	Introduce las consecuencias de la no ortogonalidad en los nodos, si el esquema trabajado es no ortogonal. Rígida en la vertical y limitada a aplicaciones particulares.	
APLICACIÓN:	Está limitada para patrones sencillos y con una relación de movilidad favorable. Si la relación de movilidad es desfavorable, entonces los Tubos de Flujo tienden a cambiar significativamente durante el desplazamiento y no son recomendables. Es válida en aproximaciones de discretización vertical cuando el espesor del yacimiento no es comparable con su extensión. También es apta para modelar zonas en donde existen canales de alta permeabilidad y en modelos de pozo horizontal.	
VISTA DE PLANTA	VISTA LATERAL	VISTA 3D
<p>Ortogonal</p>  <p>No Ortogonal</p>	<p>pozo</p> 	

Malla No Rectilínea		
CONSTRUCCIÓN:	Se genera de la misma manera que una malla de Tubos de Flujo, pero ahora cada línea de flujo está formada por segmentos de recta.	
CARACTERÍSTICAS:	Genera celdas con forma de cuadriláteros, considerando flujo entre líneas de flujo existentes en el yacimiento. En la vertical se comporta como una malla cartesiana.	
VENTAJAS:	Facilita el cálculo de áreas y volúmenes dado que se eliminan los lados curvos. Se adapta a la irregularidad del yacimiento en el plano.	
DESVENTAJAS:	Introduce un alto nivel de no ortogonalidad. Rígida en la vertical.	
APLICACIÓN:	No se usa como tal, ya que existen esquemas más completos que introducen estas características geométricas posteriormente.	
VISTA DE PLANTA	VISTA LATERAL	VISTA 3D
		

Malla Radial		
CONSTRUCCIÓN:	Bajo un sistema de coordenadas curvilíneo, se construyen superficies equipotenciales circulares a partir del nodo de referencia el cual representa el pozo.	
CARACTERÍSTICAS:	Combinada con una malla cartesiana forman un tipo de esquema Híbrido, el cual puede llegar a describir muy bien el yacimiento si sus condiciones lo permiten. No solo se puede describir con círculos concéntricos, si no que también puede usar elipses.	
VENTAJAS:	Apta para modelos de pozo. Si las condiciones son isotrópicas el modelo es circular y si son anisotrópicas el modelo es elíptico. Puede reducir considerablemente los tiempos de cómputo evitando un refinamiento cartesiano en la zona del pozo.	
DESVENTAJAS:	Requiere de un buen refinamiento en la vertical. Esto la limita en muchas ocasiones a modelos de pozo individuales. Se recomienda no siempre modelar todos los pozos de un campo bajo este esquema al mismo tiempo ya que se pueden presentar problemas de convergencia.	
APLICACIÓN:	Estudios de conificación y análisis de sensibilidad de parámetros de pozo en operaciones como inyección de vapor y aditivos químicos.	
VISTA DE PLANTA	VISTA LATERAL	VISTA 3D
		

Malla en Geometría de Punto Esquina (C.P.G.)		
CONSTRUCCIÓN:	Se inicia con una malla areal que sigue un procedimiento de construcción muy similar a la malla de Tubos de Flujo (<i>Stream Tube</i>) no ortogonal, pasando a través de la malla no rectangular que es una aproximación de la malla por tubos de corriente, y basándose en una triangulación interna para la para finalmente general las líneas divisorias usando interpolación transfinita. En la vertical, la intersección de los planos definidos dentro del modelo (fallas y planos horizontales) junto con los lados coordenados generados por las caras de los cuadriláteros formados en el plano, generan el bloque en 3D, permitiéndole al bloque adquirir la posición más conveniente y que de esta manera pueda actuar como una “caja flexible” en el espacio.	
CARACTERÍSTICAS:	En el plano puede ser una malla cartesiana o no rectilínea, y en 3D es un conjunto de cajas, pero con la propiedad de que se pueden ajustar a la geometría del yacimiento de forma libre. Es altamente no ortogonal.	
VENTAJAS:	Se puede modelar prácticamente cualquier tipo de geometría de un yacimiento. Permite refinamiento en las zonas donde se requiera.	
DESVENTAJAS:	El problema más difícil de resolver en esta geometría, es el cálculo de la transmisibilidad. Dado que a cada bloque se ajusta en el espacio, es posible que se tengan muchas configuraciones de bloques las cuales pueden propiciar o no, paralelismo entre sus caras. Los métodos aplicados para los cálculos de transmisibilidad son la aproximación vectorial, que es el caso más sencillo y la Integración Armónica.	
APLICACIÓN:	Campos altamente fallados y con geometrías complejas. Es la geometría de mayor uso.	
VISTA DE PLANTA	VISTA LATERAL	VISTA 3D
		

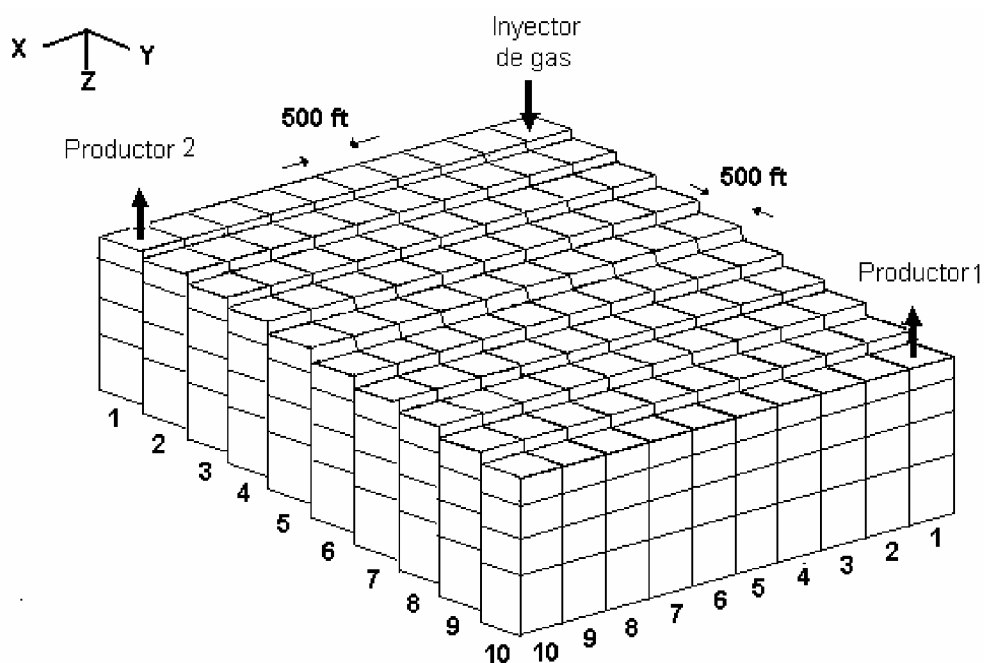
Malla de Bisección Perpendicular (PEBI)		
CONSTRUCCIÓN:	Se asignan "puntos libres" en el espacio los cuales se triangulan. Luego sobre esta triangulación, se construyen líneas que corten los lados de los triángulos buscando generar circuncentros, creando de esta manera sobre cada nodo de la triangulación una celda adaptada a la forma de las otras.	
CARACTERÍSTICAS:	Las celdas pueden tomar diversas formas dependiendo de la distribución de los nodos y de la celda patrón que se escoja. Solo funciona en el plano, así que los elementos que la componen son prismáticos. La malla PEBI es un esquema simplificado del método CVFE. Si se trabaja en un esquema de Volumen Finito es posible generar elementos en el espacio que no necesariamente son prismáticos.	
VENTAJAS:	Muy adaptativa. Es versátil y aprovecha las propiedades que tiene de los elementos finitos para adaptarse a las irregularidades del yacimiento y las zonas de rápida variación de propiedades. Garantiza en el plano, que las líneas de flujo entre los nodos van ha ser siempre ortogonales a las caras de las celdas lo que permite que el cálculo de la transmisibilidad sea sencillo. Tiene la capacidad de generar celdas pequeñas en donde los cambios son rápidos o hay mayor densidad de puntos y celdas de mayor tamaño en donde no se necesita mayor descripción, evitando de esta en una etapa muy temprana, acudir a esquemas adicionales de refinamiento o agrupamiento.	
DESVENTAJAS:	El método de solución de las ecuaciones requiere de medianos y altos tiempos de cómputo. Puede presentar fallas en la adaptación a los límites del yacimiento, dependiendo del tamaño de celda y tipo de celda que se construya.	
APLICACIÓN:	Es versátil y puede usarse prácticamente para cualquier tipo de proceso y en cualquier situación, dada su alta adaptabilidad.	
VISTA DE PLANTA	VISTA LATERAL	VISTA 3D
		

7.2 SIMULACIÓN DE UN CASO DE LA LITERATURA⁽¹⁸⁾

7.2.1 Descripción del modelo. Modelo tridimensional de aceite negro asociado con inyección de gas con cuatro capas Fig. 56. En la Fig. 57 se muestra un perfil con las propiedades de la roca por capa. En las tablas 4, 5, 6, 7 Y 8 se tienen las propiedades de la roca y los fluidos.

Este modelo fué empleado en el octavo estudio comparativo sobre las técnicas de enmallado en simulación de yacimientos en el cual participaron: Computer Modelling Group (CMG), INTERA Information Technologies (INT), Beicip-Franlab (B-F). Simulation and Modelling Consultancy (SMC),y la universidad de Standford.

Figura 56. Sistema de enmallado del yacimiento



⁽¹⁸⁾ QUANDALLE Phillippe. *Comparative solution Project: gridding techniques in reservoir simulation*. Artículo SPE 25263: New Orleans 1993.

Figura 57. Descripción del yacimiento de perfil

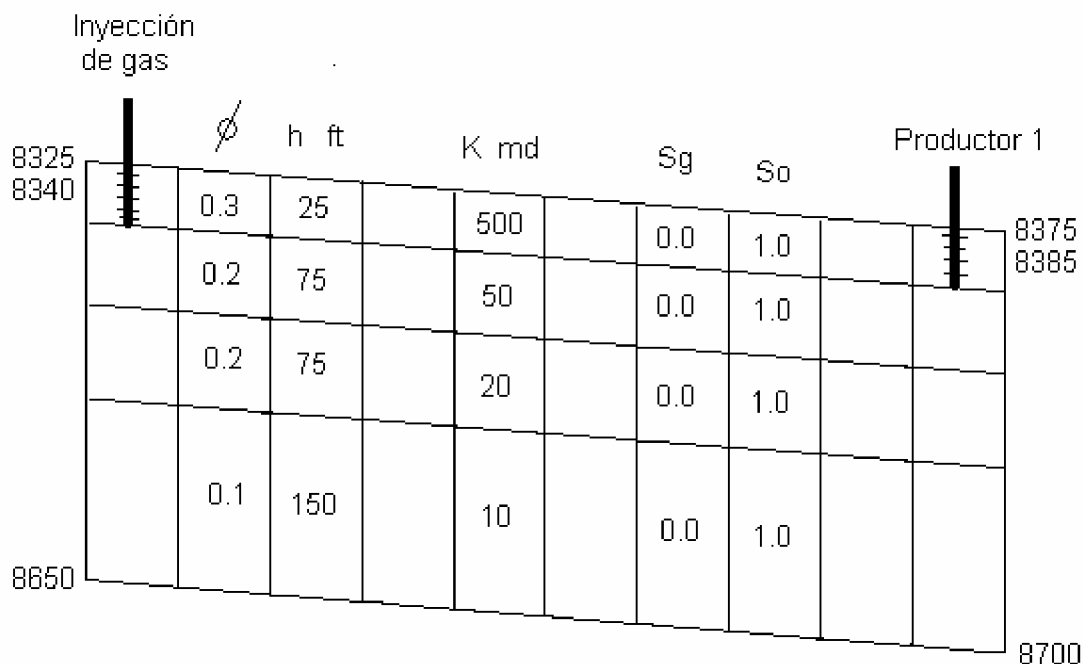


Tabla 4 Datos y restricciones

Presión inicial de yacimiento psia @ 8400 ft	4500
Rata de inyección de gas MM SCF/D	12.5
Máxima rata de producción, para cada pozo productor STB/D	1875
Mínima rata de aceite, para cada productor STB/D	100
Máxima presión de fondo fluyendo BHP para cada productor psi	1000
Compresibilidad de la roca 1/psi	3×10^{-4}
Porosidad @ 14.7 psi	0.3
Radio del pozo ft	0.25
Daño	0
Presión capilar	0
Temperatura del yacimiento °F	200
Gravedad específica del gas	0.792
El pozo inyector esta perforado en la capa superior a 250 ft tanto en el eje X	

como en el Y.

El pozo productor 1 esta perforado en la capa superior únicamente a 4750 ft en la dirección X y 250 ft en la dirección Y.

EL pozo productor 2 esta perforado únicamente en la capa superior a 250 ft en la dirección X y 4750 en la dirección Y.

La corrida es terminada a los diez años o cuando los dos pozos productores hayan alcanzado un GOR de 30000 SCF/STB.

Tabla 5 Propiedades PVT para el aceite saturado.

GOR	Presión	FVF	VISC	Densidad
M SCF/STB	Psia	RB/STB	cP	lbm/cu ft
0,0010	14,7	1,0620	1,0400	46,244
0,0905	264,7	1,1500	0,9750	43,544
0,1800	514,7	1,2070	0,9100	42,287
0,3170	1014,7	1,2950	0,8300	41,004
0,6360	2014,7	1,4350	0,6950	38,995
0,7750	2514,7	1,5000	0,6410	38,304
0,9300	3014,7	1,5650	0,5940	37,781
1,2700	4014,7	1,6950	0,5100	37,046
1,6180	5014,7	1,8270	0,4490	36,424
2,9840	9014,7	2,3570	0,2030	34,482

Tabla 6. Funciones PVT del aceite insaturado

Presión	FVF	VISC	Densidad
psia	RB/STB	cP	lbm/cu ft
4014,7	1,6950	0	46,244
9014,7	1,5790	0,9750	43,544

Tabla 7. Funciones PVT para el gas

Presión	FVF	VISC	Densidad
psia	RB/STB	cP	lbm/cu ft
14,7	0,935829	0,008	0,064
264,7	0,067902	0,0096	0,8916
514,7	0,035228	0,0112	1,7185
1014,7	0,017951	0,014	3,3727
2014,7	0,009063	0,0189	6,6806
2514,7	0,007266	0,0208	8,3326
3014,7	0,006064	0,0228	9,9837
4014,7	0,004554	0,0268	13,2952
5014,7	0,003644	0,0309	16,6139
9014,7	0,002167	0,047	27,9483

Tabla 8. Datos de permeabilidad relativa

Aceite-Gas		
Sg	Krg	Kro
0,000	0,000	1,000
0,001	0,000	1,000
0,020	0,000	0,997
0,050	0,005	0,980
0,120	0,025	0,700
0,200	0,075	0,350
0,250	0,125	0,200
0,300	0,190	0,090
0,400	0,410	0,021
0,450	0,600	0,010
0,500	0,720	0,001
0,600	0,870	0,0001
0,700	0,940	0,000
0,850	0,980	0,000
1	1	0

7.2.2 Breve descripción de los simuladores y herramientas empleadas en la simulación.

- a. **ECLIPSE 100** es un simulador trifásico, tridimensional para la simulación de aceite negro con opciones de gas condensado. Su código está escrito en FORTRAN77. Y para simulaciones bastante largas pueden ser corridas en modo paralelo. La opción en paralelo está basada en la arquitectura de memoria distribuida implementada con MPI (message passing interface).

Cuenta con las opciones geométricas CPG (*corner point geometry*) y la convencional de punto centrado. Las opciones de punto centrado cartesiano y radial están disponibles en una, dos y tres dimensiones. Emplea un esquema de solución totalmente implícito para dar estabilidad a los pasos largos de tiempo. La geometría de punto esquina es más fácil de preparar en programas como FILL, GRID or FloGrid o Eclipse Office ofrece una variedad de formas. Es posible también realizar refinamiento local tanto cartesiano como radial y agrupamiento de celdas para manejar de una mejor forma las zonas de interés en el modelo.

Las simulaciones se realizan en base a archivos con extensión DATA, el cual tienen un formato para la descripción de los datos necesarios para la simulación.

En tabla 5 se muestran las secciones del archivo data.

- b. **ECLIPSE OFFICE** Es una herramienta que ayuda a manejar las simulaciones.
- Se enlaza y maneja algunas de las aplicaciones de ECLIPSE .
 - Permite chequear los resultados durante las corridas de simulación.
 - Permite revisar y editar resultados de simulación y generar reportes.
 - Corre una simulación animada rápidamente desde el principio hasta el final.

-
- Eclipse Office ofrece un ambiente integro y amigable que permite el enlace con todas las aplicaciones de la línea de Eclipse. Permite desarrollar mallas de Bisección Perpendicular (PEBI) de manera rápida.
- c. IMEX** es un simulador de petróleo negro de la compañía CMG el cual trabaja con métodos implícitos/explicitos y adaptivos. Incluye características tales como el refinamiento local del enmallado, la administración global de pozos, la opción seudomiscible, la inyección de polímeros, pozos horizontales, doble porosidad/doble permeabilidad, enmallados flexibles entre otras. IMEX fué desarrollado con el fin de simular el agotamiento primario, la conificación, la inyección de agua, gas, solvente y polímeros en yacimientos de porosidad única y doble.
- d. STAR** es un simulador de procesos avanzados que incluye opciones tales como inyección química y de polímeros, aplicaciones térmicas, inyección de vapor, pozos horizontales, dual permeabilidad-porosidad, permeabilidad direccional, mallas flexibles (CVFE-PEBI), y muchas otras aplicaciones. Fué desarrollado para simular inyección de vapor, ciclos de vapor, aditivos con vapor, combustión seca y húmeda, para muchos tipos de procesos de aditivos químicos, empleando una amplia gama de mallas y modelos de porosidad a escala de campo o de laboratorio.

Tabla 9. Secciones requeridas en los dataset de Eclipse para la simulación

Sección	Requerimiento	Descripción
RUNSPEC	requerido	Se dan las características generales de la simulación, título, fases presentes, dimensiones del problema, etc
GRID	requerido	Se especifica la geometría de la malla computacional y las propiedades en cada celda
EDIT	Opcional	Se realizan modificaciones al volumen poroso calculado, profundida del centro de la celda y transmisibiliades
REGIONS	Opcional	Divide la malla computacional en regines para el calculo de propiedades PVT, saturación, condiciones iniciales, fluido en in-sitio y regiones EOS (Eclipse 300)
SOLUTION	Requerido	Se especifican las condiciones iniciales del yacimiento
SUMMARY	Opcional	Aquí se especifican los datos que se desea que se reaporte en cada paso de tiempo
SCHEDULE	Requerido	En esta sección se especifica las operaciones a ser simuladas (producción e inyección)

Tabla 10. Secciones requeridas en los dataset de IMEX para la simulación

Sección	Requerimiento	Descripción
I / O Control	requerido	Se dan las características generales de la simulación, título, Tipo de enmallado, porosidad, permeabilidad, espesores y demás.
Component Property Section	requerido	Se introducen las tablas PVT, densidades y se especifica el modelo.
Rock-Fluid Property Section	requerido	Propiedades de la roca
Initial Conditions Section	requerido	Presiones y profundidades de referencia al igual que las profundidades de los contactos
Numerical Control Section	requerido	Método de solución Implícito / Explícito adaptativo o no.
Well and recurrent data section	requerido	Aquí se especifican todos los datos de pozo.

7.2.3 Sistemas de enmallado contruidos. Las geometrías trabajadas en cada simulador fueron las siguientes:

Cartesiana 10 x 10 (Malla Base en

Esquema de 5 y 9 puntos)	400 celdas	ECLIPSE 100 e IMEX
Agrupamiento I (Coarsing I)	88 celdas	ECLIPSE 100
Agrupamiento II (Coarsing II)	96 celdas	ECLIPSE 100

Refinamiento Local (LGR)	> 400 celdas	ECLIPSE 100
Bisección Perpendicular (PEBI)	> 400 celdas	ECLIPSE OFFICE
Geometría de Punto Esquina (CPG)	144 celdas	IMEX
Refinamiento	96 celdas	IMEX
Bisección Perpendicular (PEBI)	108 celdas	STAR

En Eclipse 100, a partir de la data construida para la simulación del modelo de geometría cartesiana de 10X10X4 (Ver Anexo C), se realizan las modificaciones pertinentes a las secciones de la data para realizar la simulación con refinamiento local (*LGR*) y agrupamiento de celdas (*Coarse*) o técnicas *Gathering*.

El modelo cartesiano de 10X10X4 se muestra en la Fig. 58 y la Fig. 59. La simulación de este modelo se realizó con un esquema de cinco y nueve puntos. El esquema de nueve puntos permite reducir los efectos de orientación de la malla y la dispersión numérica. Para el **modelo coarse** de 24 celdas por capa ver Fig. 60 se realizaron los siguientes cambios al *dataset*. Todas las aclaraciones son hechas anteponiendo dos guiones.

En la sección RUNSPEC se incluyó la *keyword LGR* donde se especifican los números de refinamientos, el máximo número de celdas en un *LGR* y el máximo número de celdas agrupadas y queda de la siguiente manera:

```
LGR
0 0 96/
```

En la sección *GRID* se incluye la *keyword COARSEN*

```
--AGRUPAMIENTO DE CELDAS
--I1 I2 J1 J2 K1 K2 NX NY NZ
COARSEN
```

--LINEA HORIZONTAL SUPERIOR

2 3 1 1 1 4 1 1 4 /

4 5 1 1 1 4 1 1 4 /

6 7 1 1 1 4 1 1 4 /

8 9 1 1 1 4 1 1 4 /

--LINEA HORIZONTAL INFERIOR

2 3 10 10 1 4 1 1 4 /

4 5 10 10 1 4 1 1 4 /

6 7 10 10 1 4 1 1 4 /

8 9 10 10 1 4 1 1 4 /

--LINEA VERTICAL DERECHA

1 1 2 3 1 4 1 1 4 /

1 1 4 5 1 4 1 1 4 /

1 1 6 7 1 4 1 1 4 /

1 1 8 9 1 4 1 1 4 /

--LINEA VERTICAL IZQUIERDA

10 10 2 3 1 4 1 1 4 /

10 10 4 5 1 4 1 1 4 /

10 10 6 7 1 4 1 1 4 /

10 10 8 9 1 4 1 1 4 /

--CUADROS INTERNOS

2 5 2 5 1 4 1 1 4 /

6 9 2 5 1 4 1 1 4 /

2 5 6 9 1 4 1 1 4 /

6 9 6 9 1 4 1 1 4 /

Figura 58. Modelo tridimensional del modelo cartesiano de 10X10X4 obtenido con el pos-procesador GRID

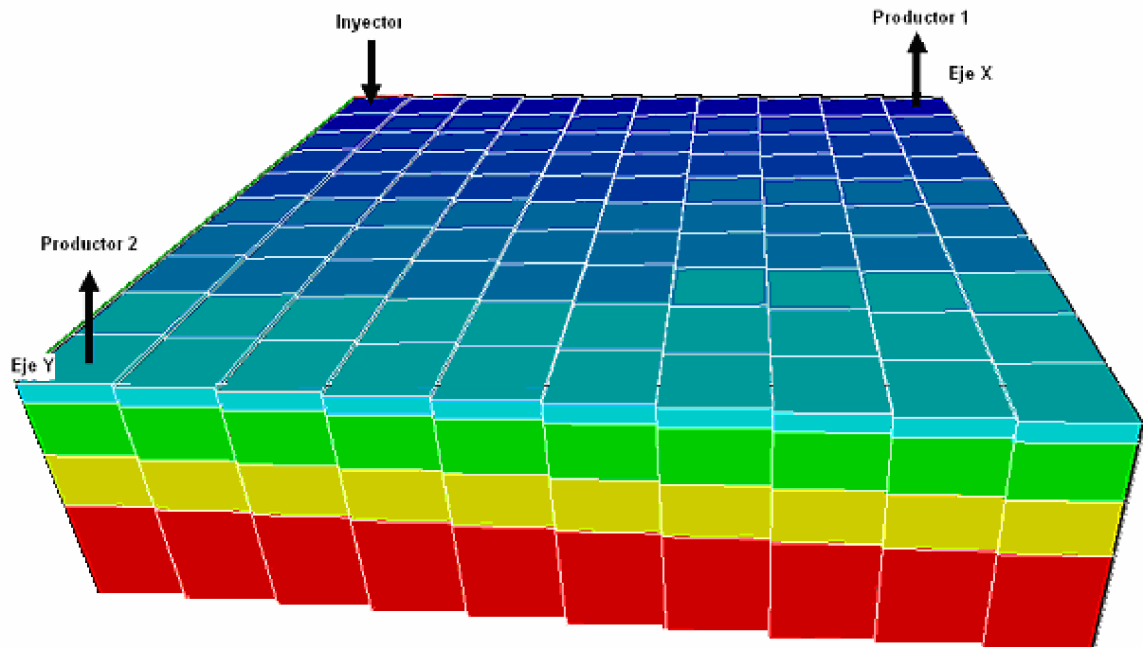


Figura 59. Perfil del modelo de 10X10X4 obtenida con el pos-procesador GRID

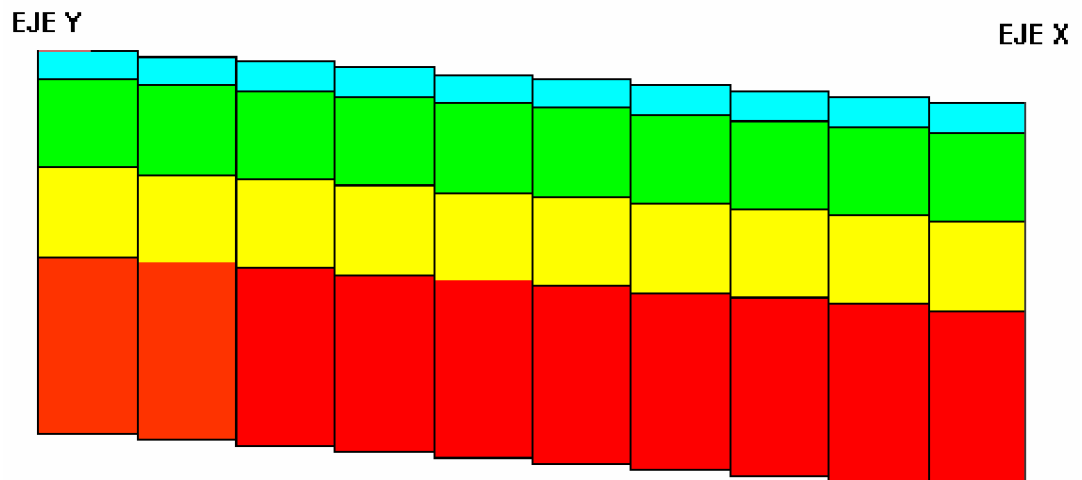
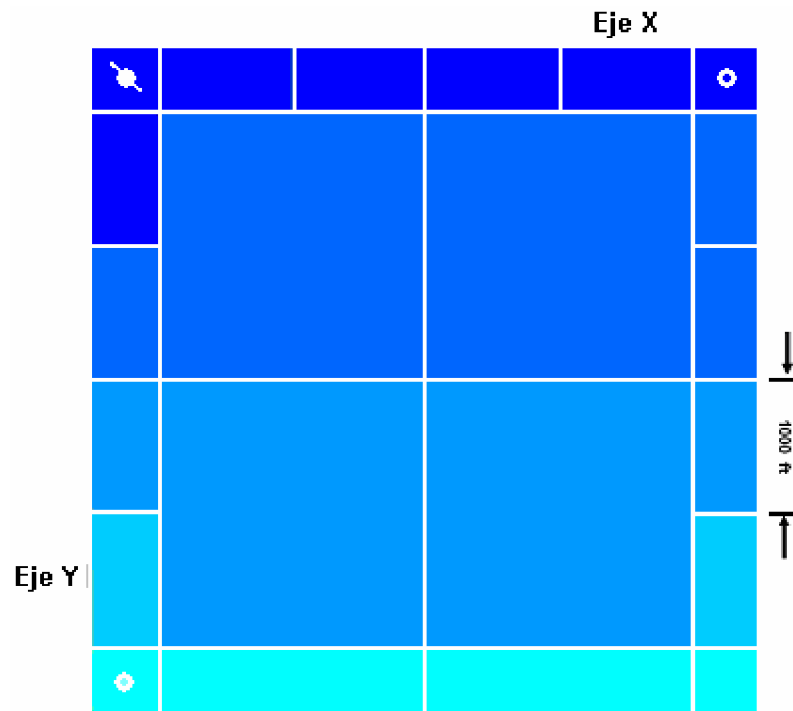


Figura 60. Modelo de 24 celdas por capa haciendo agrupamiento de las celdas obtenida con el pos-procesador GRID



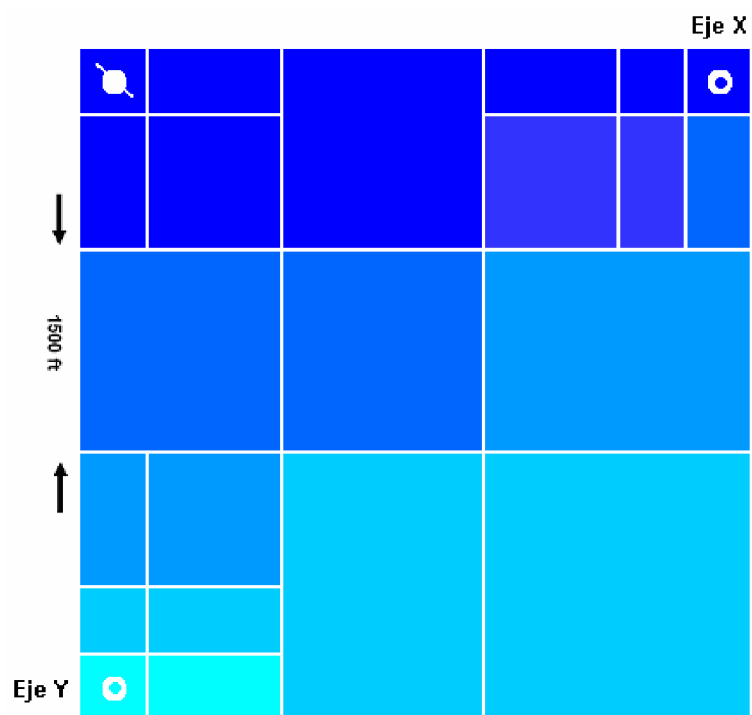
El agrupamiento (*coarsing*) de 22 celdas por capa se realiza de la misma manera y se obtiene la configuración que se muestra en la Fig. 61. Para esto, en la sección GRID del DATA se indican las celdas a agrupar y la cantidad de celdas dentro de cada agrupamiento partiendo del modelo base, que sería:

```
--aGRUPAMIENTO DE CELDAS
--I1 I2 J1 J2 K1 K2 NX NY NZ
COARSEN
2 3 1 1 1 4 1 1 4/
7 8 1 1 1 4 1 1 4/
1 1 2 3 1 4 1 1 4/
2 3 2 3 1 4 1 1 4/
7 8 2 3 1 4 1 1 4/
9 9 2 3 1 4 1 1 4/
```

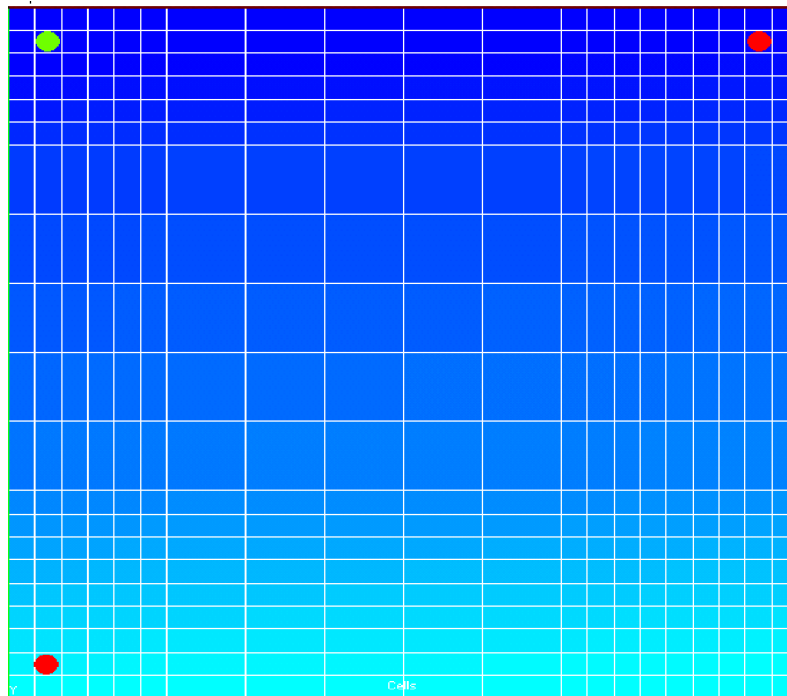
```

10 10 2 3 1 4 1 1 4/
4 6 1 3 1 4 1 1 4/
1 3 4 6 1 4 1 1 4/
4 6 4 6 1 4 1 1 4/
7 10 4 6 1 4 1 1 4/
1 1 7 8 1 4 1 1 4/
2 3 7 8 1 4 1 1 4/
2 3 9 9 1 4 1 1 4/
2 3 10 10 1 4 1 1 4/
4 6 7 10 1 4 1 1 4/
7 10 7 10 1 4 1 1 4/
/
    
```

Figura 61. Modelo de 22 celdas por capa

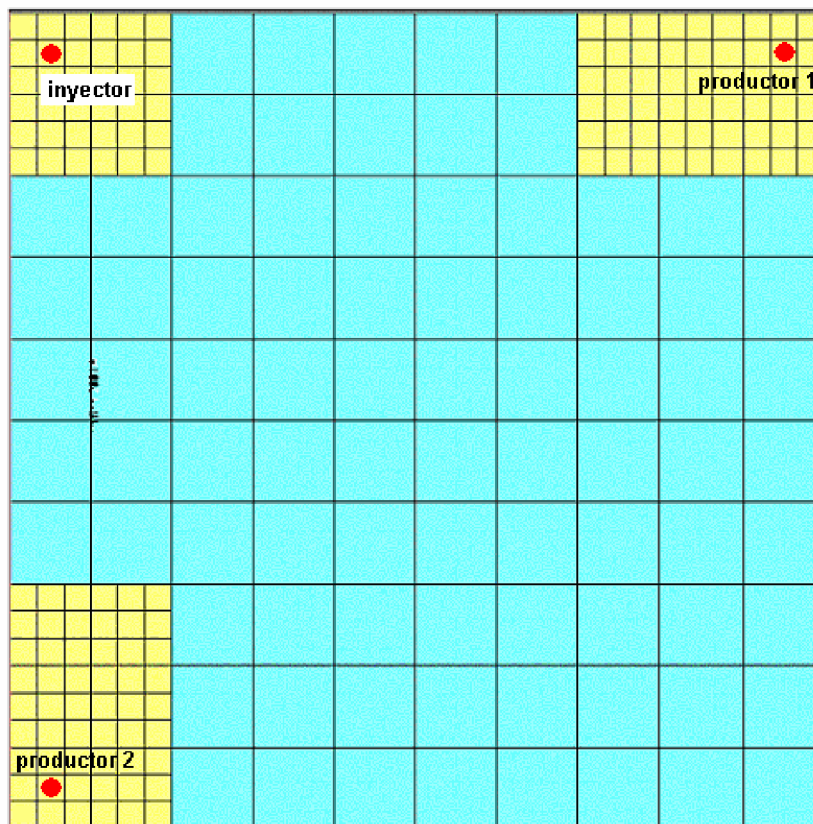


Sobre los pozos se realizó un refinamiento global, local y radial. El refinamiento global se observa en la Fig. 62

Figura 62. Refinamiento global sobre los pozos

Se realizó un **refinamiento LGR** sobre las celdas que están próximas a los pozos, ya que, allí se presentan los mayores gradientes de presión y saturación. Para esto, se realizó un refinamiento como se indica en la Fig. 63. Aunque se aumento considerablemente la cantidad de celdas, donde podremos observar su considerable tiempo de cómputo.

Figura 63. Refinamiento de las celdas que se encuentran cerca de los pozos obtenidos con el post-procesador GRID.



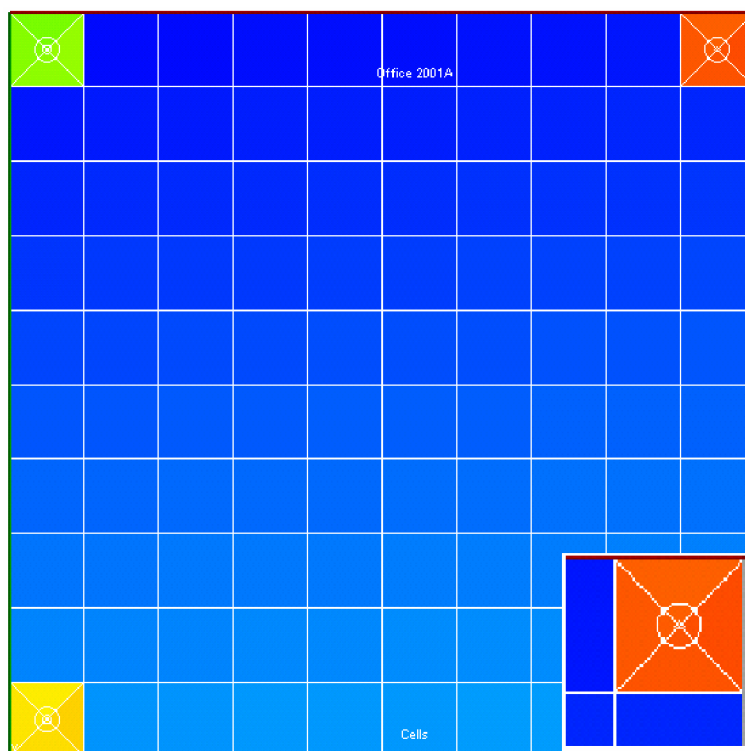
Para este esquema de enmallado es necesario que en la sección RUNSPEC se especifiquen las características generales del refinamiento y para esto se debe incluir la *Keyword* de la siguiente manera:

```
LGR
--MAXLGR MAXCLS MCOARS MAMALG
3      216      0      0/
```

Aquí se especifica el número de refinamientos a realizar y el máximo número de celdas que tendrá el mayor refinamiento.

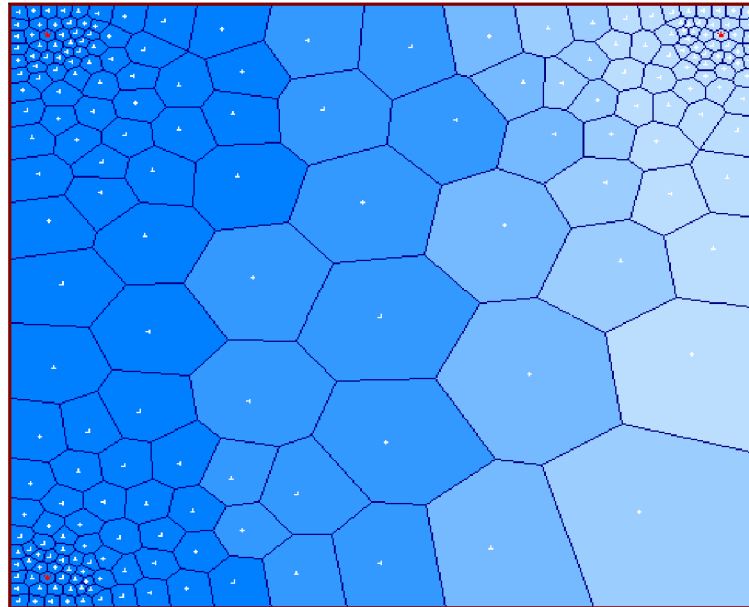
También se hizo un refinamiento radial sobre los pozos en la dirección tetha de cuatro y en la dirección radial seis. (ver Fig. 64)

Figura 64. Modelo con refinamiento radial en Eclipse 100



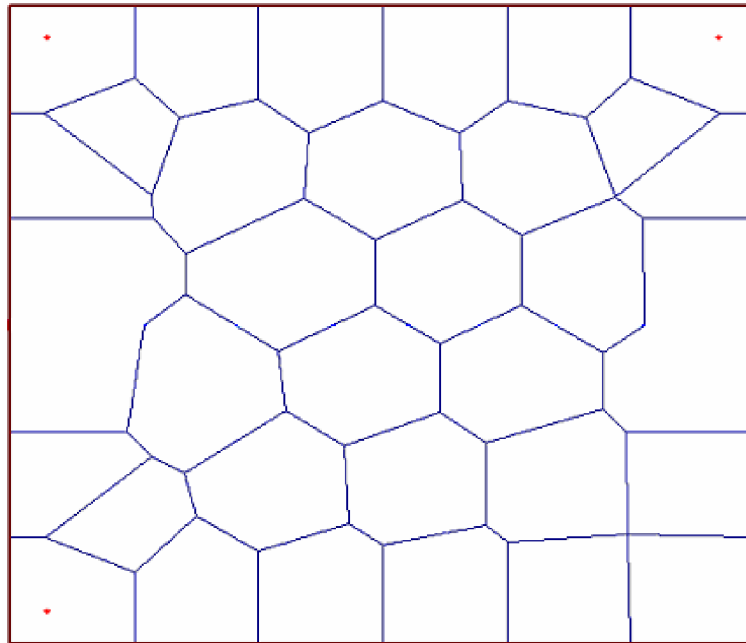
El modelamiento con el enmallado PEBI se realizó empleando la herramienta de Eclipse Office, ya que en esta es más fácil de manejar dicha geometría al permitir la selección del tipo de enmallado, el cual se genera automáticamente por la triangulación de Delaunay. Esto sería bastante complejo para realizarlo desde la data, por esto la importancia del pre y el pos procesadores. La Fig. 63, la cual fue obtenida por medio de Eclipse Office muestra dicha geometría.

Figura 65. Vista de planta de la discretización hexagonal para el modelo.



En la Fig. 66 se puede apreciar una malla PEBI con elementos hexagonales. Eclipse Office ofrece la posibilidad de Trabajar con elementos Hexagonales, Cuadriláteros, Circulares y Variados ajustando la forma y el tamaño de la celda ya sea por sus dimensiones o por su tamaño relativo.

Figura 66. Vista de planta de la discretización hexagonal para el modelo.



En la Fig. 67 se puede apreciar el esquema de triangulación empleado para ubicar los nodos en las capas. En la Fig. 68 se tiene un aumento sobre el pozo inyector. Por último, en la Fig. 69 se observa un modelo 3D para todo el campo. Aquí se puede apreciar que la discretización es solo en 2D y los elementos que componen la malla son prismáticos.

Figura 67. Vista de la triangulación realizada para generación la malla PEBI hexagonal.

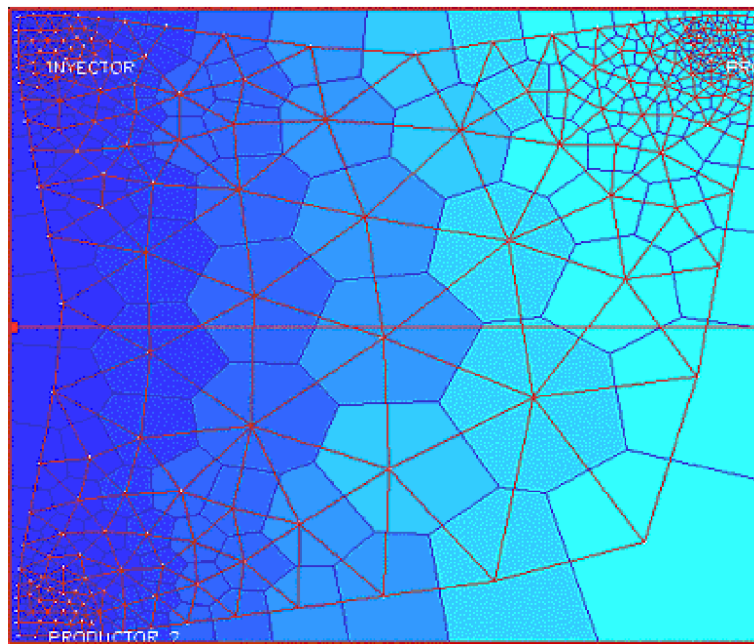


Figura 68. Representación de la región del pozo con mallas PEBI hexagonales.

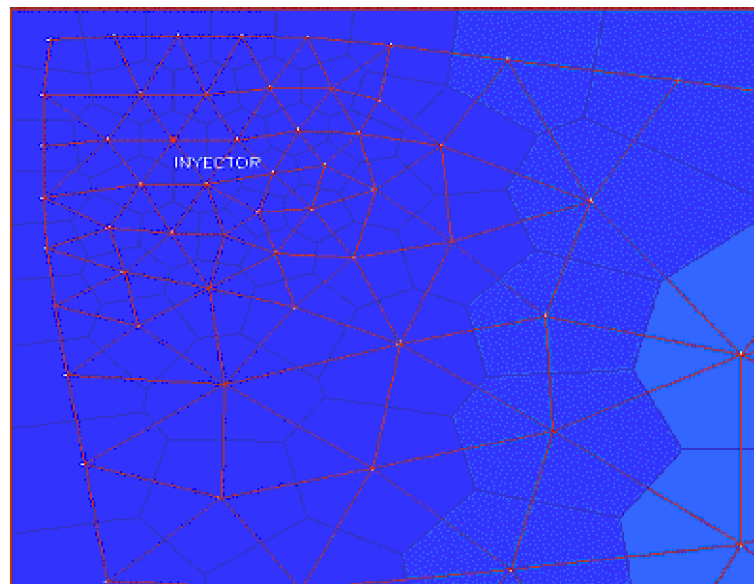
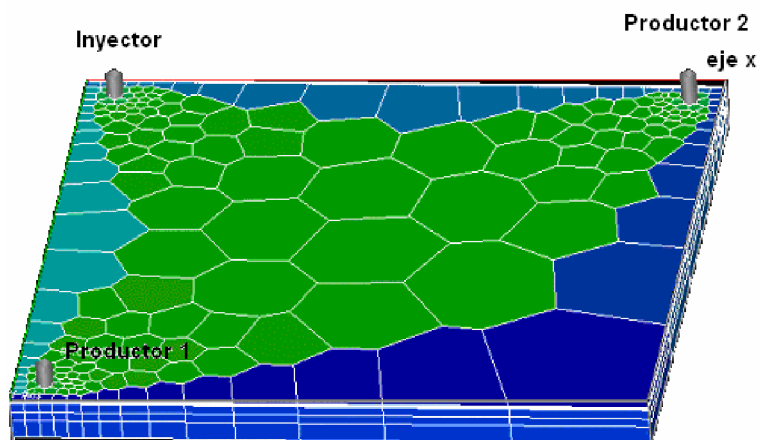
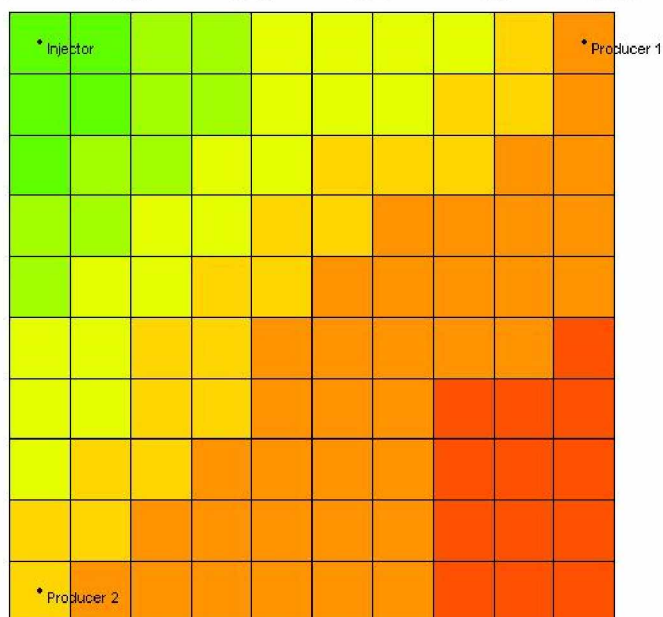


Figura 69. Representación 3D del modelo con una malla PEBI hexagonal.

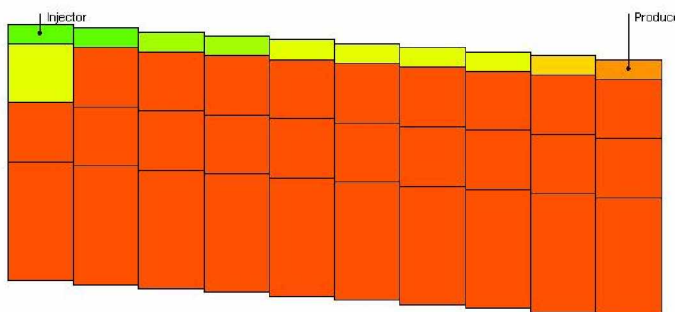


Dentro de las mallas construidas en **IMEX**, como primera medida se diseñó el modelo base que puede ser observado en la Fig. 69.

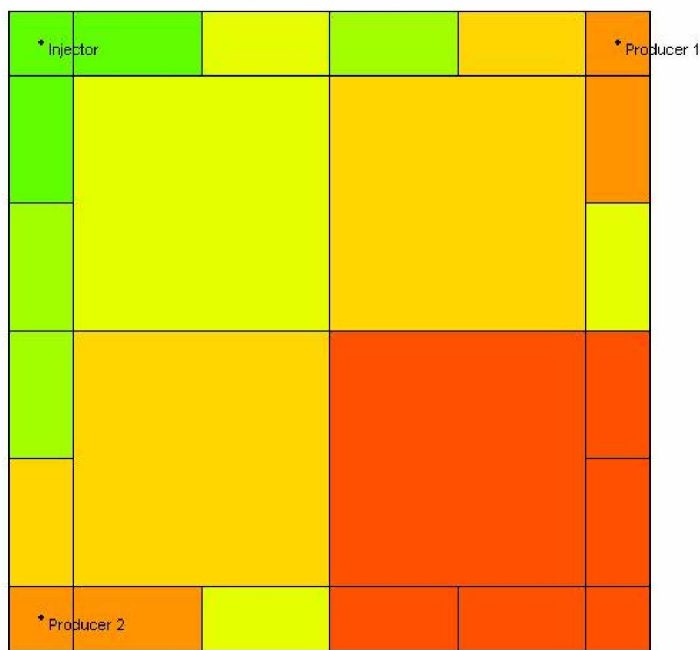
Figura 70. Malla cartesiana 10 x 10 construida en IMEX



Se puede observar también en un corte transversal como la malla cartesiana se dispone en la vertical (Fig. 70)

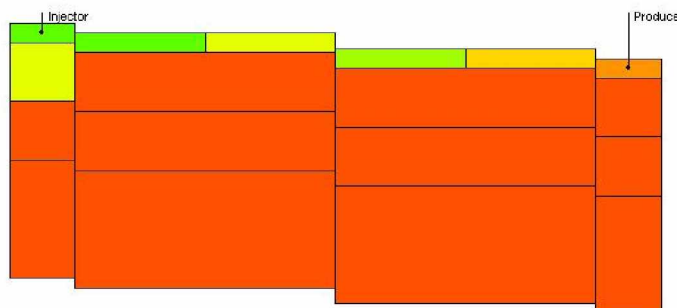
Figura 71. Perfil de la malla construida. Discretización en la vertical

La Malla Refinada fué el segundo modelo construido en IMEX en donde la técnica fue refinar una malla mucho más gruesa que la inicial. En IMEX no se desarrollaron pruebas de agrupamiento (Fig. 71).

Figura 72. Refinamiento cartesiano

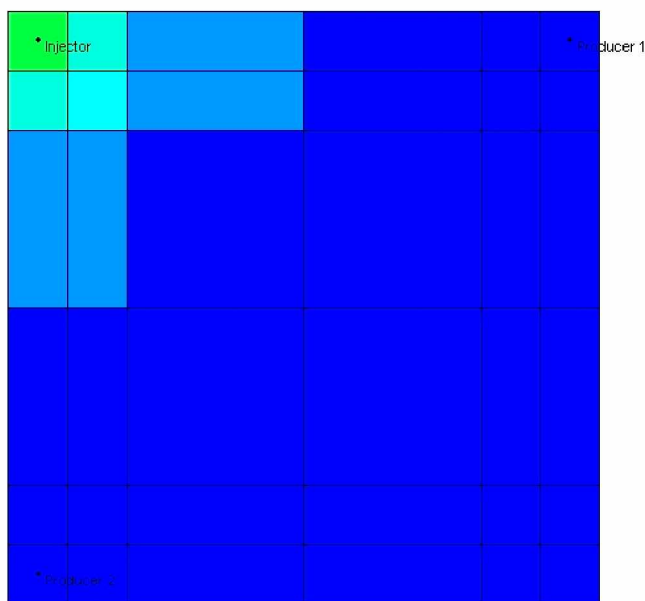
La Malla corresponde a un refinamiento cartesiano con 96 bloques en total. En la Fig. 72 se muestra como se construyó el modelo a partir de 4 celdas las cuales fueron refinadas sucesivamente hasta llegar a la malla observada.

Figura 73. Vista de perfil del enmallado realizado



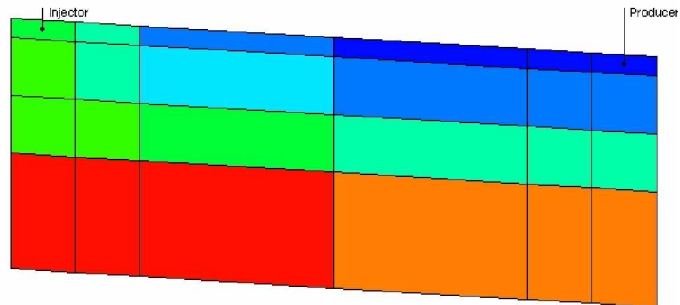
El tercer modelo de enmallado realizado en IMEX fue el de Geometría de Punto Esquina (CPG) sin refinamiento en los pozos. La Fig. 73 muestra la configuración areal.

Figura 74. Enmallado *corner point geometry*



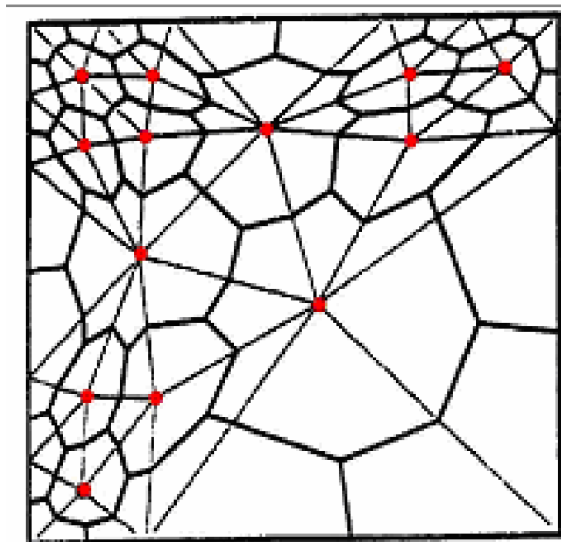
En la Fig. 75 se aprecia como los bloques adquieren la forma de la pendiente y la malla es no ortogonal.

Figura 75. Perfil del enmallado realizado



El último modelo construido fue el de mallas PEBI pero no se pudo visualizar debido a que el grupo de simuladores de CMG no cuentan con un pre-procesador ni un posd-procesador adecuado para visualizar estas mallas. La Fig. 76 indica la distribución de los nodos que se tomó y la triangulación hecha para una posible malla tomada de artículo base correspondiente al 8vo estudio comparativo de la SPE.

Figura 76 Distribución de nodos para crear la malla PEBI



Para visualizar las propiedades es necesario ejecutar primero el dataset y luego observar las variaciones sobre una malla cartesiana de 7 X 7. Sin embargo el método de solución usado es el CVFE para PEBI.

Figura 77. Enmallado cartesiano producto de la transformación

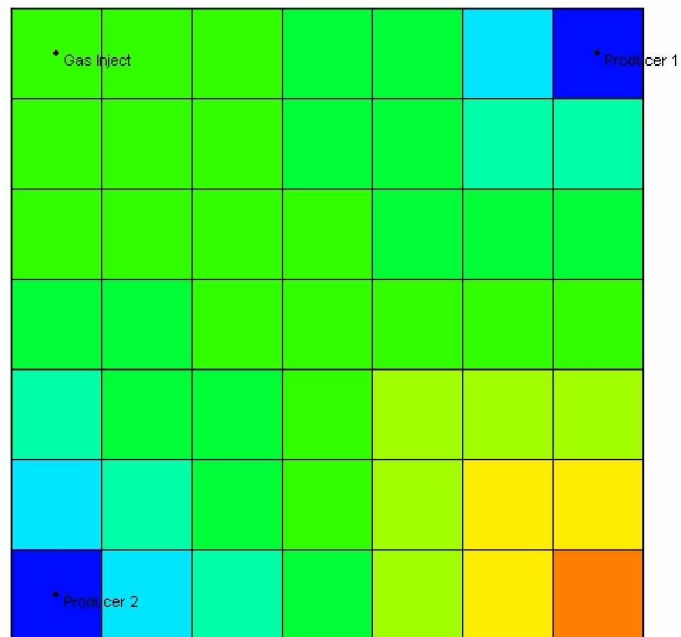
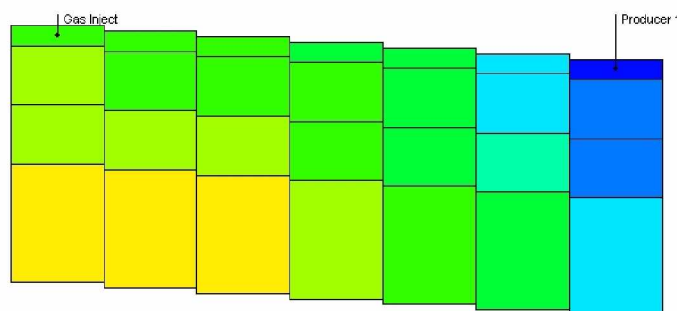


Figura 78. Vista de perfil del enmallado realizado



7.2.4 Comportamiento del GOR y BHP de los pozos productores. Los comportamientos de los diferentes modelos se compararon con la simulación del modelo de 400 bloques bajo el esquema de nueve puntos, ya que, con este flujo esquema los resultados de la simulación no son influenciados severamente por los efectos de la orientación de la malla y la dispersión numérica. Además el de fluido en el medio poroso se va a centrar esencialmente en la capa superior donde los valores de permeabilidad y porosidad son bastante mayores que el de las demás capas. Por tanto un esquema de 27 puntos sería innecesario para validar los datos.

Las curvas de comportamiento para el esquema de nueve puntos se ha demarcado en rojo y para cada modelo se le ha asignado un color específico. Las simulaciones hechas en Eclipse están referidas con INT (Intera) y las realizadas en el IMEX o STAR de Computer Modeling Group como CMG.

En la Fig. 79 y 80 se tienen los comportamientos del GOR para el modelo base de 400 bloques simulados en Eclipse 100 e IMEX bajo el esquema de cinco puntos y un esquema de nueve puntos en Eclipse 100. Se observa como para el esquema de nueve puntos el tiempo en que ocurre la irrupción del gas en los pozos es más rápido en el pozo productor 2 que en el pozo productor 1, ya que, este último se encuentra a la misma profundidad del pozo inyector haciendo que los cálculos se realicen en línea recta. Además, los esquemas de cinco puntos muestran un comportamiento que predicen una irrupción de gas muchos antes de la predicha en el esquema de nueve puntos. Lo que nos indica que en los cálculos de los gradientes de saturación el gas avanza más rápido en los modelos de cinco puntos que el de nueve puntos porque en este último se tiene en cuenta no solo el movimiento del fluido en los cuatro sentidos cardinales sino también en las diagonales.

Figura 79. Comportamiento del GOR en el pozo productor 1 para el modelo base de 400 bloques simulado en IMEX de CMG y Eclipse 100 con un intervalo máximo de tiempo de 10 días.

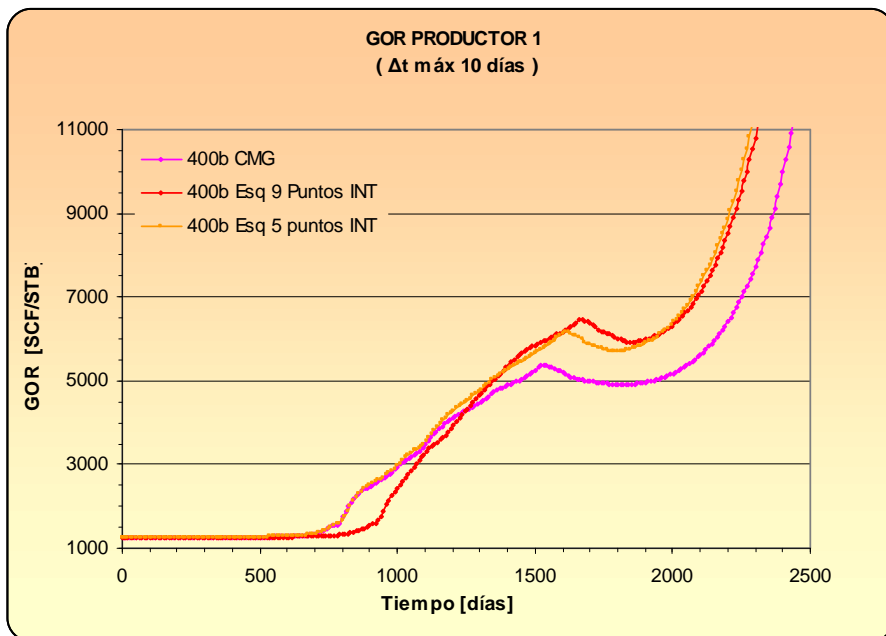
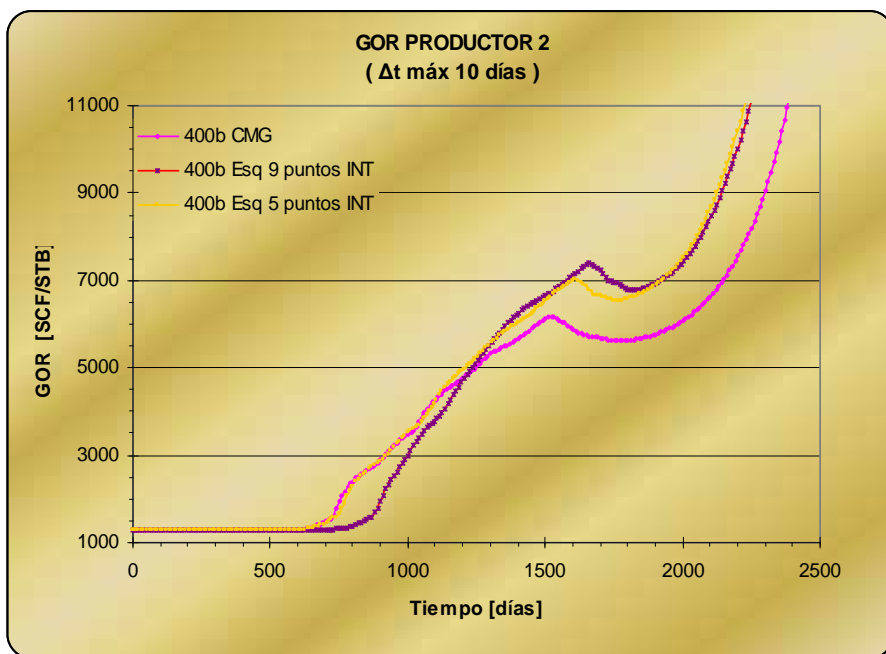
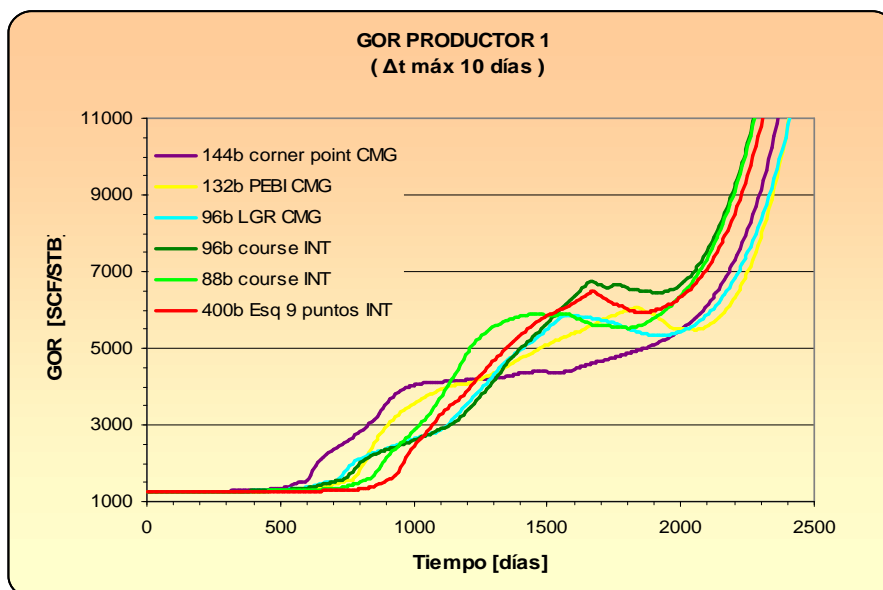


Figura 80. Comportamiento del GOR en el pozo productor 2 para el modelo base de 400 bloques simulado en IMEX de CMG y Eclipse 100 con un intervalo máximo de tiempo de 10 días.



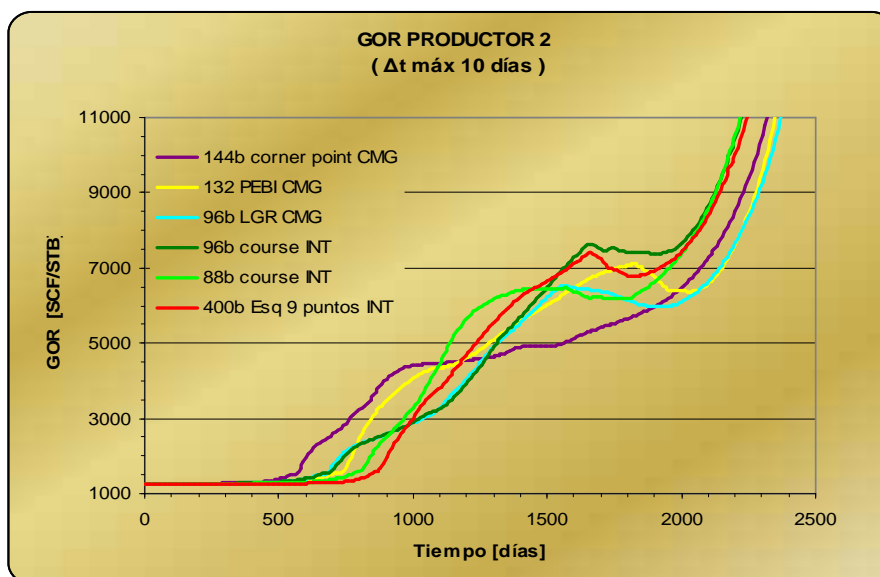
En la Fig. 81 y 82 se observan el comportamiento del GOR tanto en el pozo productor uno como en el dos para todos los modelos simulados con un número de celdas menor de cuatrocientas celdas al emplear mallas flexibles o técnicas de agrupamiento. Todos los modelos predicen una irrupción de gas en el pozo antes que en el modelo que simulado bajo el esquema de nueve puntos. Pero es el modelo de *corner point geometry* el que se encuentra más desviado de la curva de comparación y es porque en el modelo la cantidad de bloques es pequeña para la simulación de un flujo no ortogonal.

Figura 81. Comportamiento del GOR en el pozo productor 1 para los modelos con el menor número de bloques simulado en IMEX de CMG y Eclipse 100 excepto el modelo PEBI modelado en STAR de CMG.



Los modelos de 96 bloques, modelados tanto en Eclipse 100 como en CMG, presentan un comportamiento similar excepto en el tiempo en que la presión en el pozo cae a la presión de burbuja, que es cuando el GOR empieza a presentar una leve disminución. La simulación en el IMEX muestra que la presión de burbuja en el yacimiento se alcanza antes que la obtenida en la simulación con Eclipse 100. El comportamiento para este modelo no difiere drásticamente del comportamiento del modelo de 400 bloques simulado con el esquema de nueve puntos como si se aprecia para el modelo de 88 bloques, el cual presenta una mayor desviación en general. Por tanto, si se llega a disminuir demasiado el número de celdas con el objeto de ganar tiempo de cómputo (ver Fig. 94) se pierde exactitud.

Figura 82. Comportamiento del GOR en el pozo productor 2 para los modelos con el menor número de bloques simulado en IMEX de CMG y Eclipse 100 excepto el modelo PEBI modelado en STAR de CMG.



En las Fig. 83 y 84 se muestran los comportamientos del GOR en el pozo productor uno y dos para mallas que poseen un número mayor de 400 bloques simulados en Eclipse 100. Se puede observar como los comportamientos presentan una menor desviación de la curva de comparación pero se tienen que sacrificar tiempo de computo (ver Fig. 94).

Figura 83. Comportamiento del GOR en el pozo productor 1 para los modelos con el mayor número de bloques simulados en Eclipse 100.

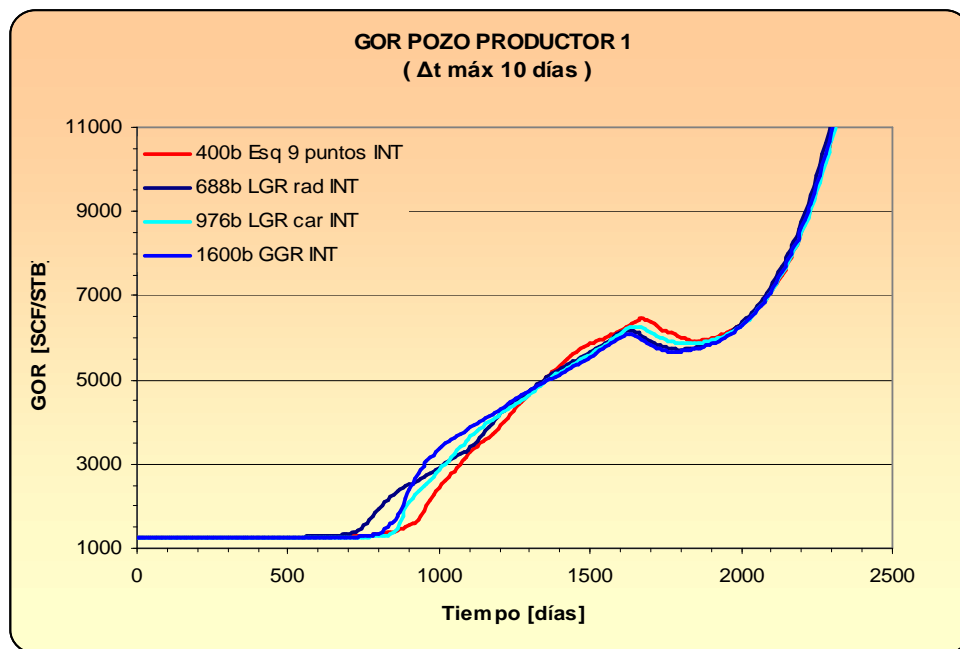
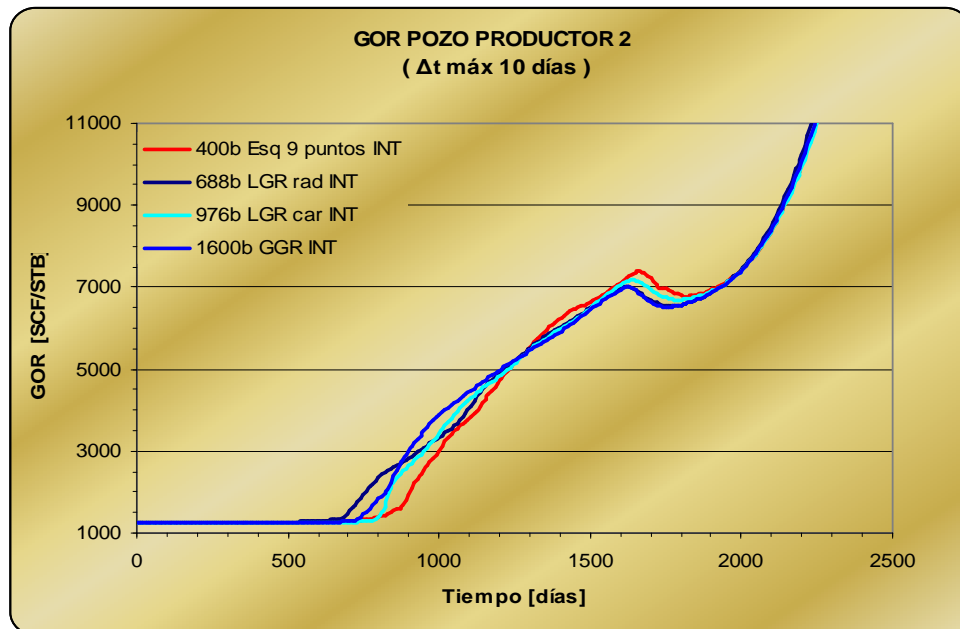


Figura 84. Comportamiento del GOR en el pozo productor 2 para los modelos con el mayor número de bloques simulados en Eclipse 100.



En las Fig. 85 y 86 se pueden apreciar el comportamiento del GOR para todos los modelos construidos y simulados en Eclipse 100. Se observa como dicho comportamiento es similar en todos los modelos alrededor de los 2100 días que es cuando el GOR empieza a incrementarse drásticamente ya que prima el flujo de gas.

Figura 85. Comportamiento del GOR en el pozo productor 1 para todos los modelos simulados en Eclipse 100.

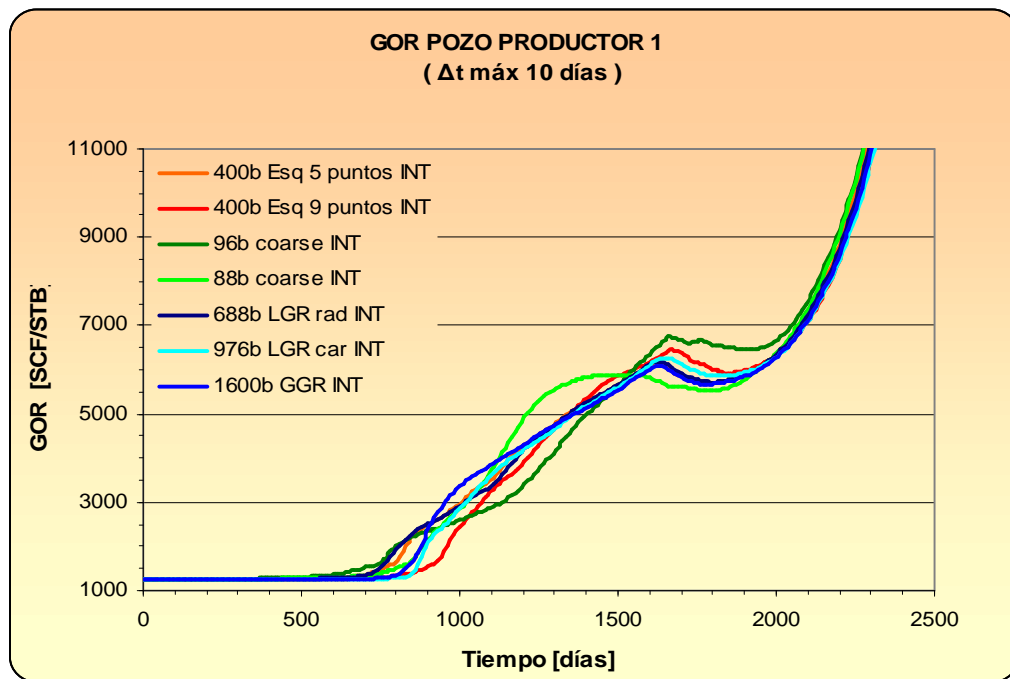
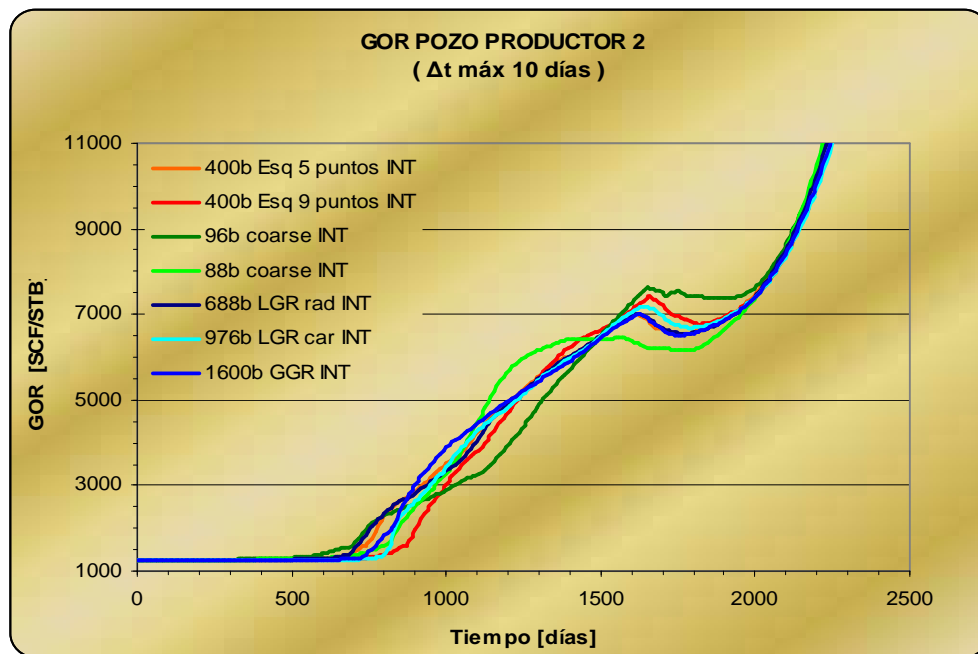


Figura 86. Comportamiento del GOR en el pozo productor 2 para todos los modelos simulados en Eclipse 100.



En las Fig. 87 y 88 se tienen los comportamientos de la presión en el fondo del pozo con el tiempo para los modelos de 400 bloques simulado en IMEX y Eclipse 100 con esquemas de solución de cinco y nueve puntos. Inicialmente se presenta un incremento de la presión, debido a la presurización del yacimiento, hasta que ocurre la irrupción del gas en el pozo. Luego, empieza a descender, manteniendo producción, hasta que alcanza el control por presión de la BHP de 1000 psia, momento en que la producción de aceite empieza a decrecer drásticamente. En las curvas no se presentan los comportamientos hasta los 3600 días que es lo programado para la simulación, ya que, el GOR presenta un alto gradiente antes de los 2500 días.

Los niveles de ajuste de los diferentes modelos al de 400 bloques simulado bajo un esquema de nueve puntos son similares al del comportamiento del GOR. (ver Fig. 89 a 94). Se puede observar como la tendencia de la curva son muy diferentes entre ambos simuladores después de que la presión de burbuja es alcanzada. Como se pudo observar con el comportamiento del GOR en los simuladores de CMG la presión de burbuja es alcanzada antes que en las simulaciones con Eclipse 100.

Figura 87. Comportamiento de la *Botom Hole Pressure* (BHP) en el pozo productor 1 para el modelo base de 400 bloques simulado en IMEX de CMG y Eclipse 100 con un intervalo máximo de tiempo de 10 días.

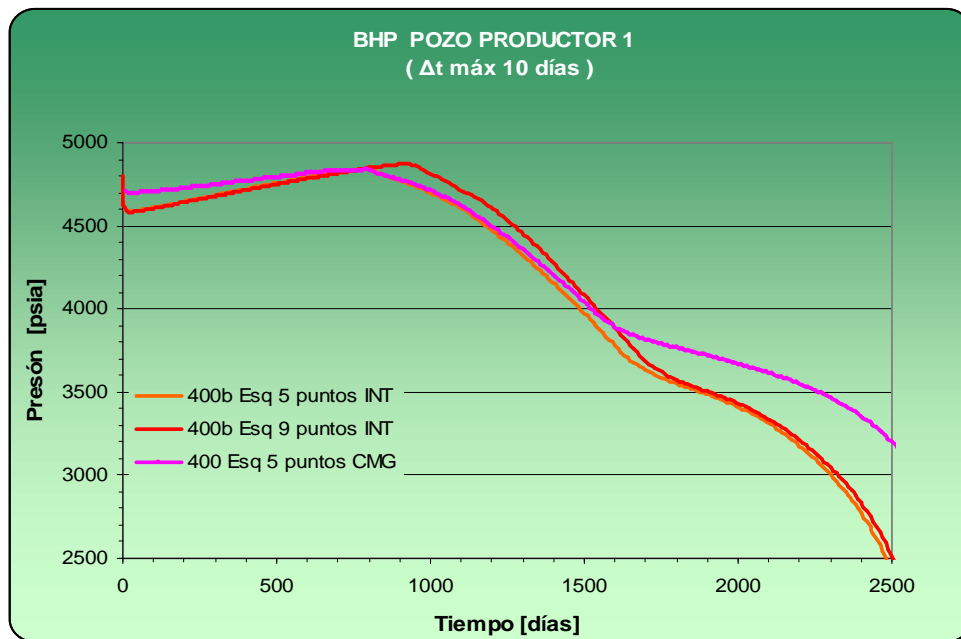


Figura 88. Comportamiento de la *Botom Hole Pressure* (BHP) en el pozo productor 2 para el modelo base de 400 bloques simulado en IMEX de CMG y Eclipse 100 con un intervalo máximo de tiempo de 10 días.

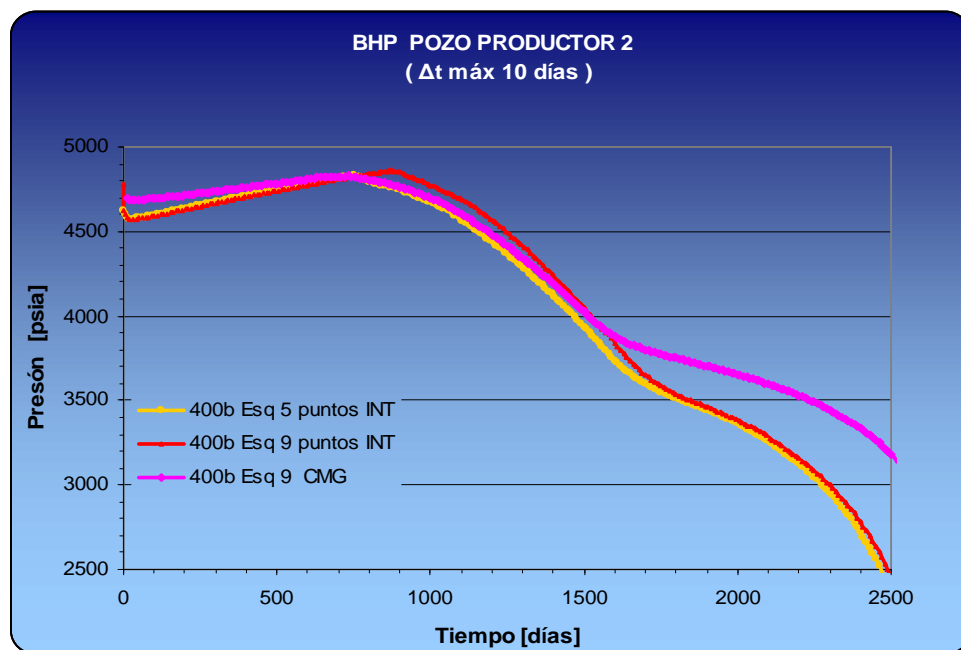


Figura 89. Comportamiento de la BHP en el pozo productor 1 para los modelos con el menor número de bloques simulado en IMEX de CMG y Eclipse 100 excepto el modelo PEBI modelado en STAR de CMG.

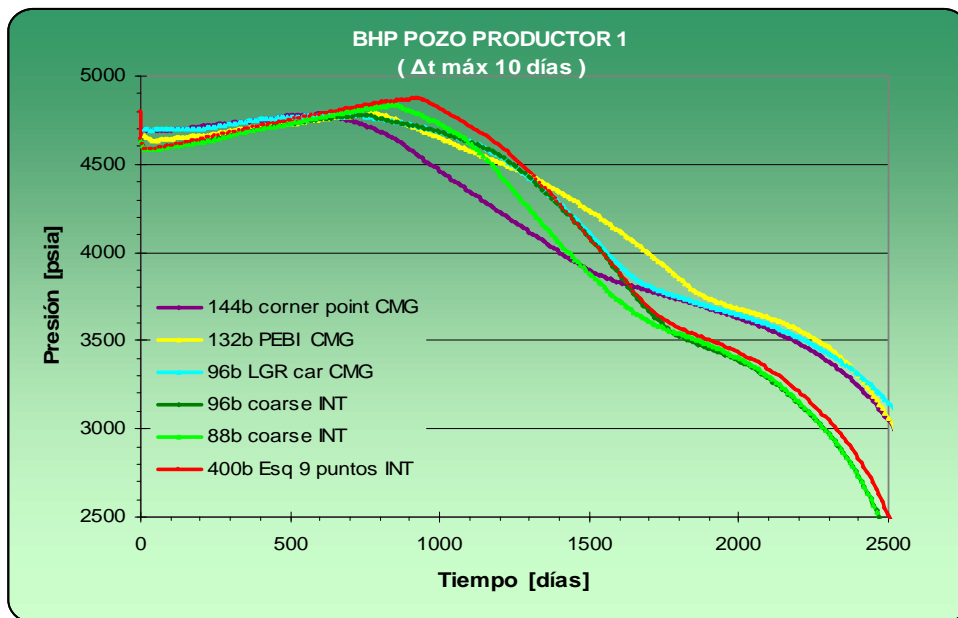


Figura 90. Comportamiento de la BHP en el pozo productor 2 para los modelos con el menor número de bloques simulado en IMEX de CMG y Eclipse 100 excepto el modelo PEBI modelado en STAR de CMG.

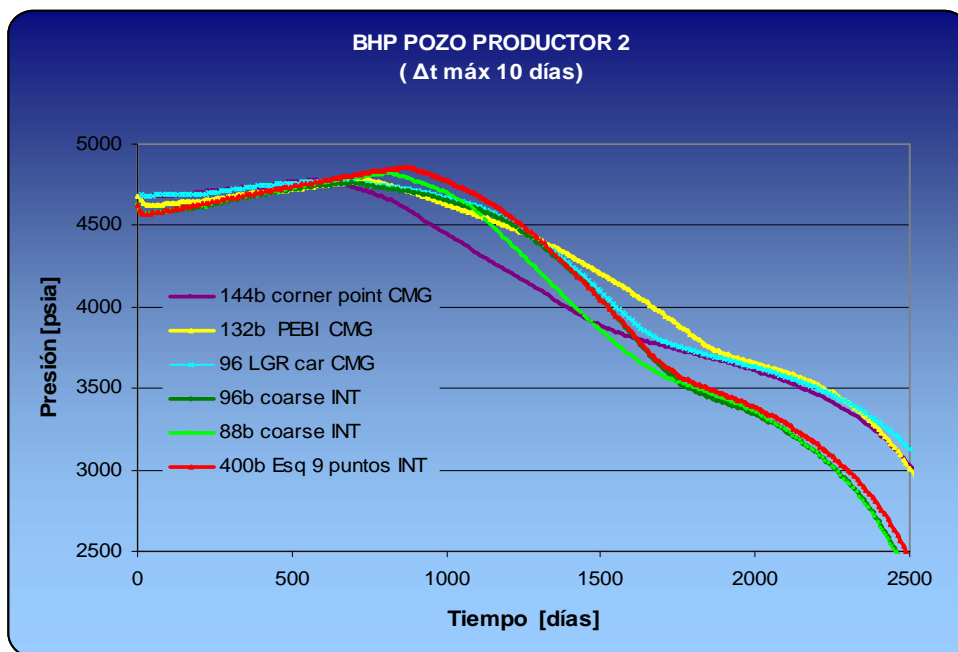


Figura 91. Comportamiento de la BHP en el pozo productor 1 para los modelos con el mayor número de bloques simulados en Eclipse 100.

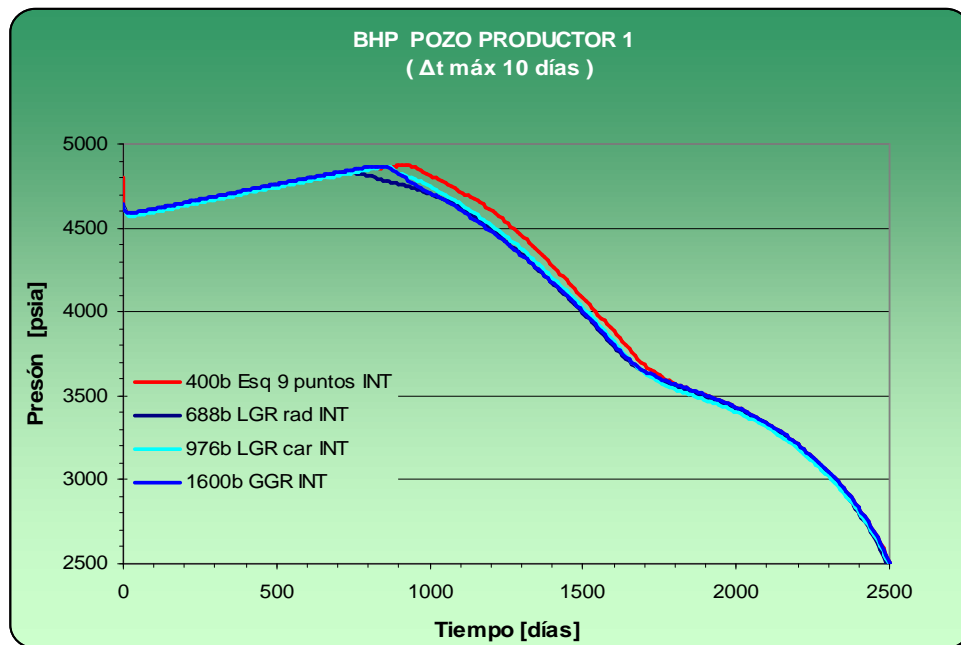


Figura 92. Comportamiento de la BHP en el pozo productor 2 para los modelos con el mayor número de bloques simulados en Eclipse 100.

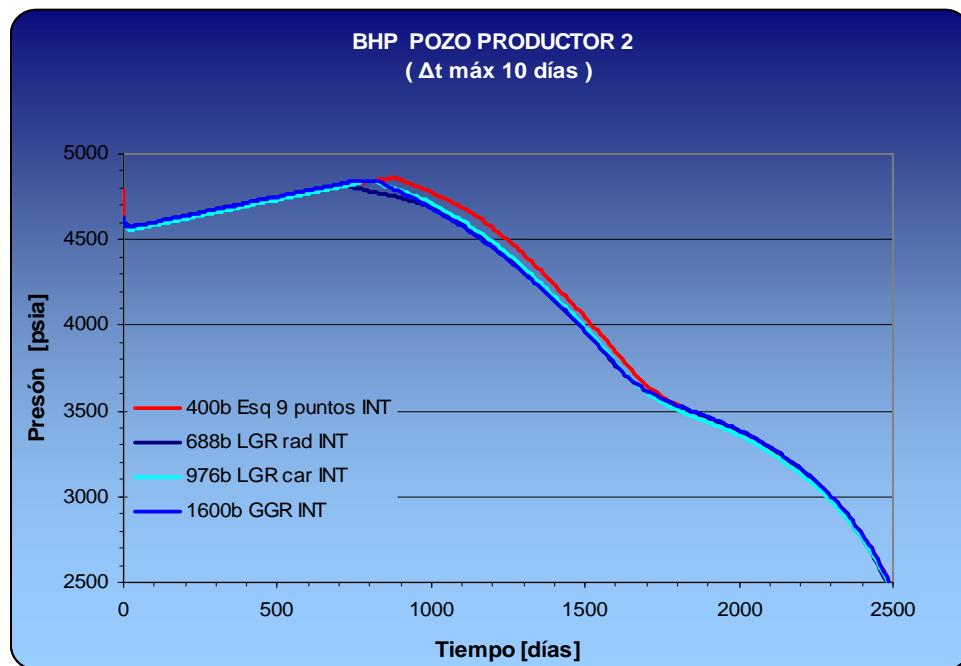


Figura 93. Comportamiento de la BHP en el pozo productor 1 para todos los modelos simulados en Eclipse 100.

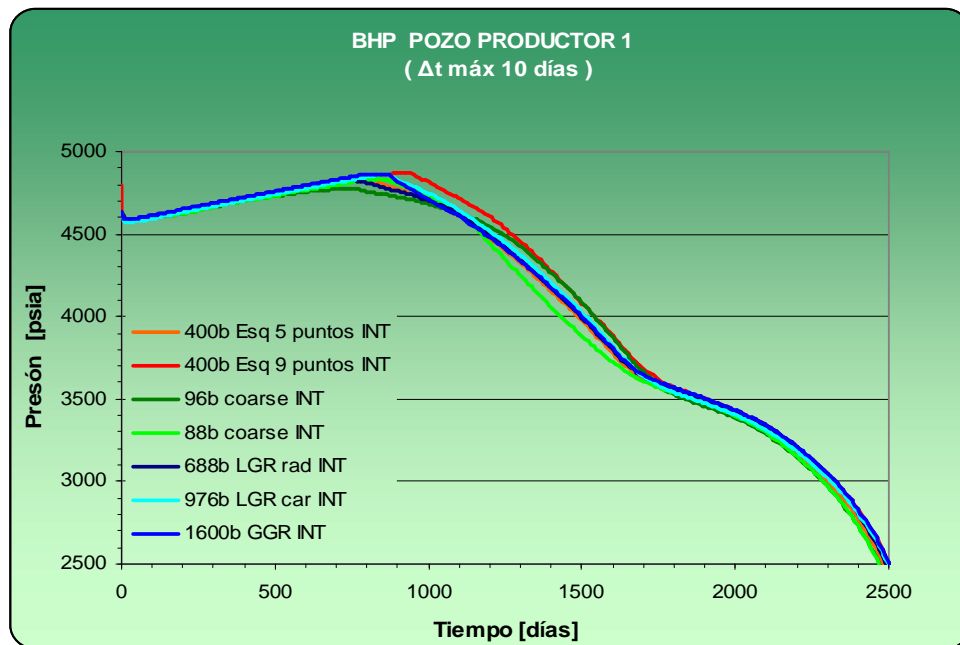
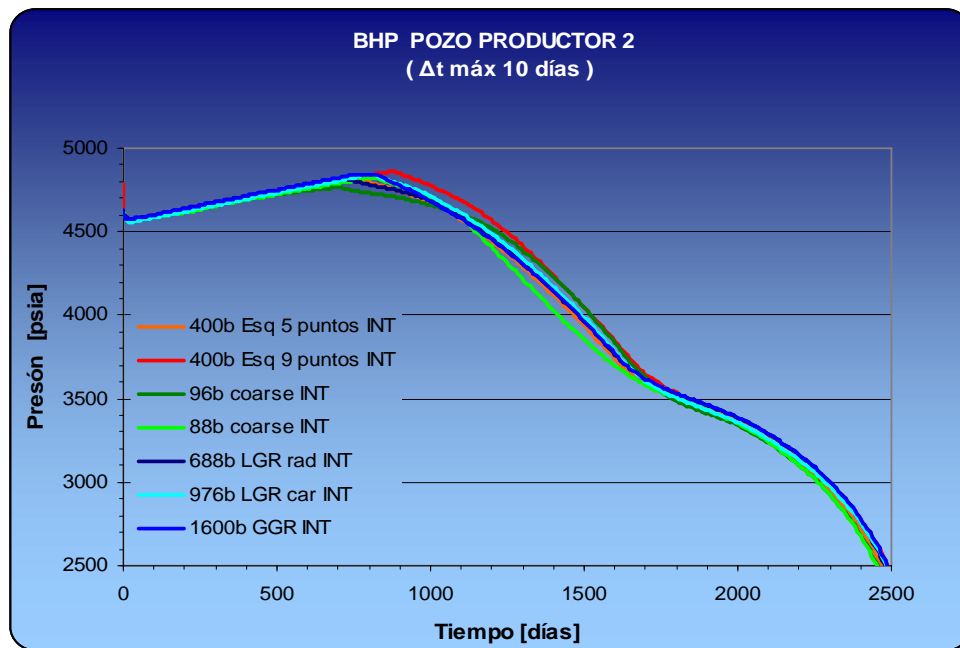


Figura 94. Comportamiento de la BHP en el pozo productor 2 para todos los modelos simulados en Eclipse 100.



7.2.5 Comportamiento para diferentes intervalos de tiempo. En las Fig. 95 y 96 se describen el comportamiento del GOR y BHP en el pozo productor uno para el modelo de 400 bloques simulados bajo el esquema numérico de nueve puntos y para tres intervalos de tiempo el de 10 días, junto con uno de 100 y 300 días para observar su influencia. Se tiene que las diferencias esencialmente se presentan después de que la presión cae a la presión de burbuja en el yacimiento y la de mayor intervalo de tiempo predice cambios altos en el GOR antes que en el de menores intervalos de tiempo. Por tanto, la caída drástica de presión en el fondo del pozo ocurre antes que en los otras dos simulaciones de 10 y 100 días. Como se observa tienen una fuerte influencia cuando el yacimiento que está o empiezan a estar insaturados, es decir, con presiones menores a la presión de burbuja.

Figura 95. Comportamiento del GOR en el pozo productor 1 para el modelo base de 400 bloques simulado en Eclipse 100 bajo el esquema de nueve puntos con tres intervalos máximos de tiempo.

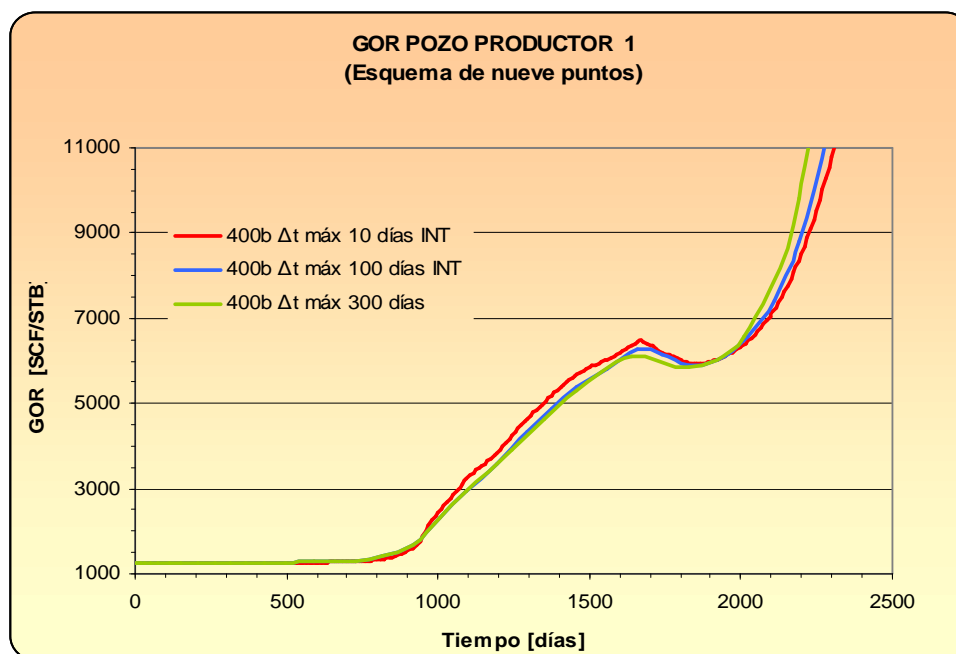
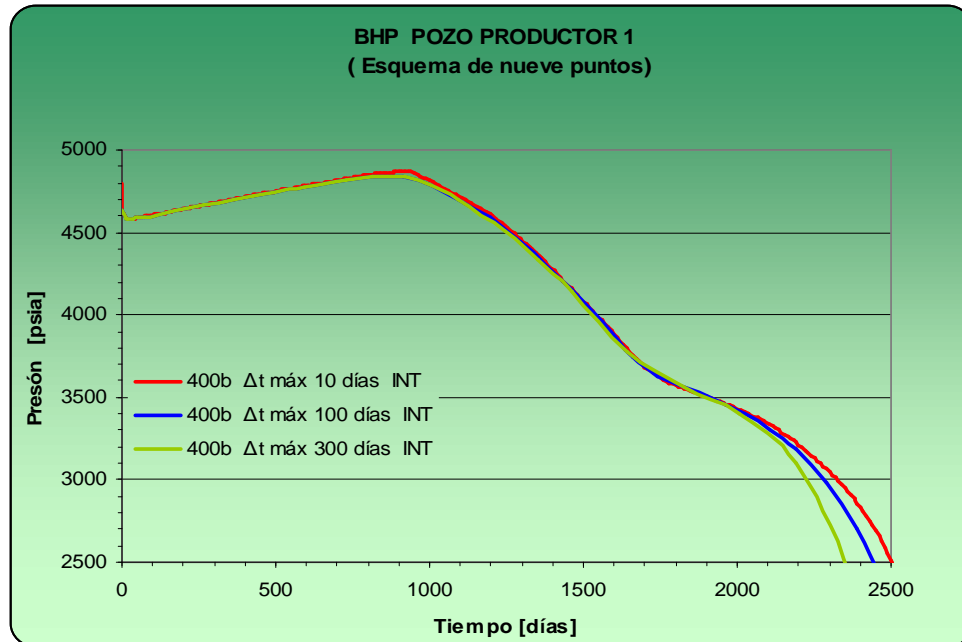


Figura 96. Comportamiento de la BHP en el pozo productor 1 para el modelo base de 400 bloques simulado en Eclipse 100 bajo el esquema de nueve puntos con tres intervalos máximos de tiempo.



7.2.6 Tiempos de cómputo. En las Fig. 97 y 98 se aprecian los tiempos de cómputo para los modelos en los simuladores Eclipse 100 y CMG respectivamente. Los datos del lado izquierdo en la Fig. 97 son los correspondientes a los modelos con un número de celdas menor de 400 y los del lado derecho a modelos con un número mayor a 400.

Se observa en las dos figuras como al disminuir la cantidad de celdas efectivamente el tiempo de cómputo disminuye pero la exactitud disminuye, excepto en el modelo con *corner point geometry* en el cual el tiempo de cómputo es alto con respecto a los demás en CMG debido a que en las simulaciones se requieren hacer transformaciones del espacio por medio de mapeo, lo cual implican cálculos adicionales.

Figura 97. Tiempo de cómputo en el proceso de la simulación numérica en Eclipse 100.

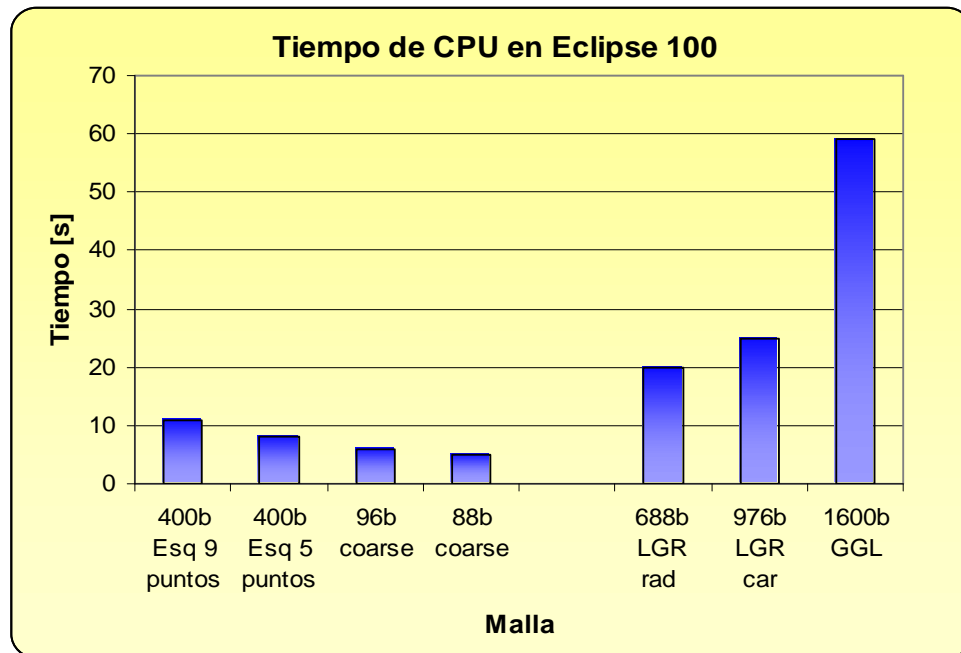


Figura 98. Tiempo de cómputo en el proceso de la simulación numérica en Eclipse 100.

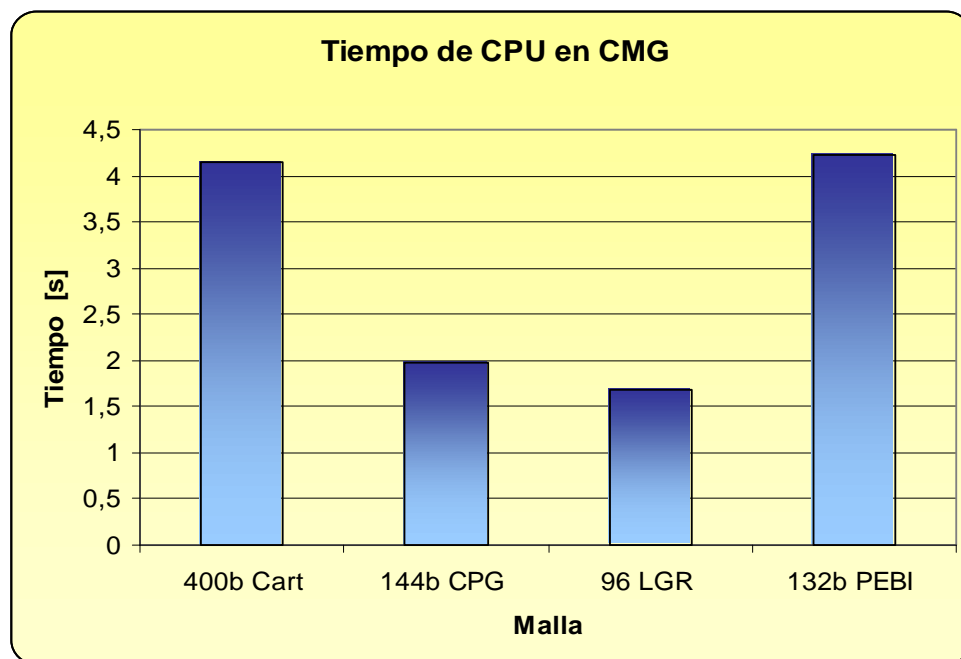


Figura 99. Espacio requerido en CPU por todo el modelo para la simulación numérica en Eclipse 100.

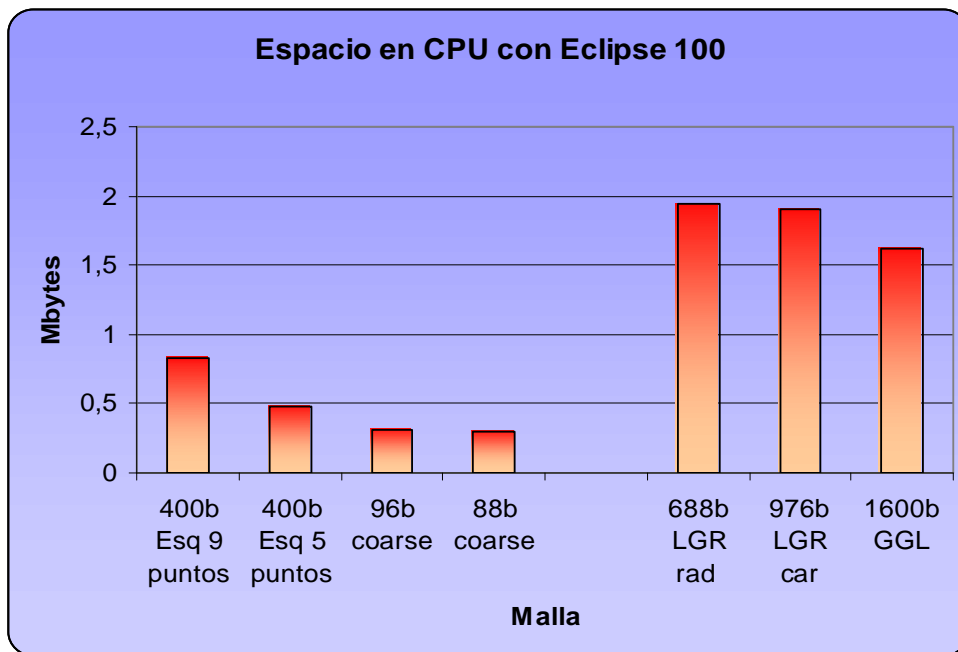
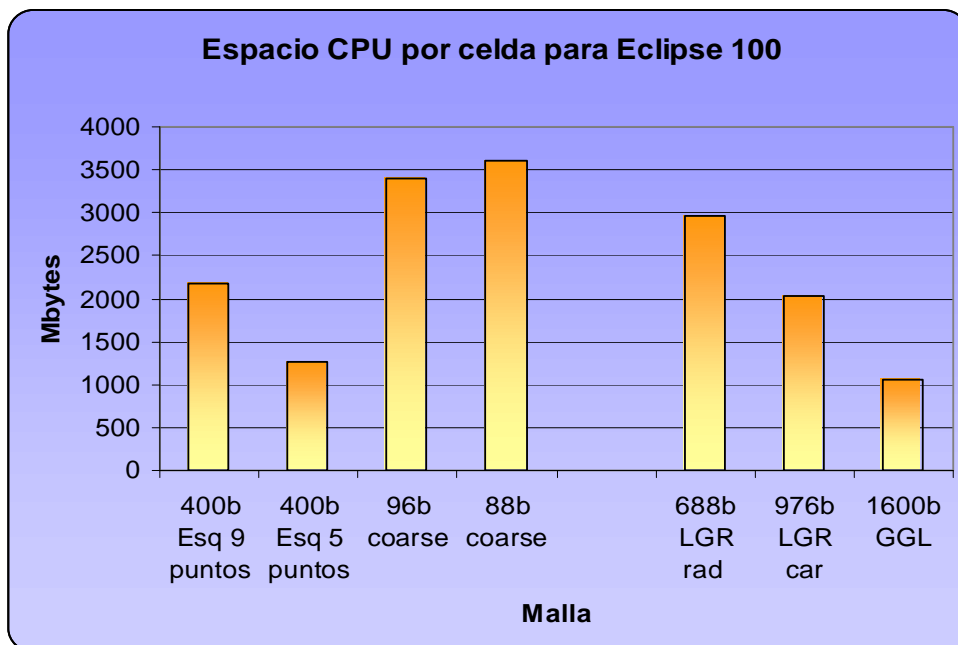


Figura 100. Espacio requerido en CPU por celda para la simulación numérica en Eclipse 100.



CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el presente trabajo se establece una ficha técnica de cada tipo de malla de tal manera que, la persona que desea hacer una simulación, pueda basarse en criterios teórico-prácticos que le permitan elegir el sistema de enmallado que debe usar y lo que puede esperar de él.

El presente trabajo muestra que no existe un sistema único de enmallado para solucionar todos los problemas generados en una simulación de yacimientos. Algunos sacrifican definición por ahorrar tiempo de cómputo y otros, pese a que logran adaptarse a cualquier tipo de condiciones posibles para simular, representan costos altos lo que los limita a usos muy específicos.

Es muy importante tener en cuenta que el tipo de discretización que se use para modelar el problema, definirá el sistema de ecuaciones que tiene que resolver y por consiguiente, dará la pauta para escoger el método de solución que se debe aplicar a el modelo. Esto enfatiza la importancia que la Teoría de Generación de Mallas tiene dentro del proceso de construcción de un simulador completo.

Se observa que los sistemas de enmallado que tienen una mayor acogida son los basados en Geometría de Punto Esquina para modelos de campo, y en un sistema radial para modelos de pozo. Los sistemas de enmallado adaptativos tales como el PEBI, no ha sido usados suficientemente, ya sea por desconocimiento del sistema como tal o por su tendencia a consumir altos tiempos de cómputo, lo que lo hace poco interesante para las empresas. Sin embargo, es muy probable que el sistema a nivel de modelos de pozo, de muy buenos resultados con tiempos aceptables que lo pueden convertir en una buena opción a ser tenida en cuenta.

Además, teniendo en cuenta que la simulación en paralelo reduce drásticamente el tiempo de cómputo, este sistema de enmallado podría ser más utilizado en un futuro cercano.

Gracias al desarrollo de las técnicas de solución de problemas y procesamiento de datos a nivel computacional, se recomienda implementar los esquemas adaptativos y de alto refinamiento a procesamiento en paralelo. Este esquema de trabajo reduce en un alto porcentaje los tiempos de cómputo y permite trabajar con un gran volumen de datos.

Se recomienda la construcción de un programa que implemente un algoritmo generador de mallas, como herramienta complementaria a los simuladores, dado que la mayoría de estos solo se limitan a resolver los esquemas diferenciales, integrales o variacionales pero no ofrecen facilidad alguna para la generación del enmallado.

Se recomienda realizar un estudio que permita seleccionar el tipo de mallas a utilizar en diferentes partes del yacimiento según criterios de eficiencia de cómputo y dispersión de datos.

BIBLIOGRAFÍA

AZIZ, K. y SETTARI, A. *Petroleum reservoir simulation. London y New York :* Elsevier 1979.

AZIZ S. ODEH. Comparison of Solutions to a Three-Dimensional Black-Oil Reservoir Simulation Problem. SPE 9723 1981.

BRAD J. ROZON. *A Generalized Finite Volume Discretization Method for Reservoir Simulation.* SPE 18414 1989.

CASTILLO, J. E. *Mathematical aspects of numerical grid generation.* SIAM, México. 1991

C.L, Palagi y K. Aziz. Use of Voronoi Grid in Reservoir Simulation. SPE 22889 1991

C.L, Palagi y K. Aziz. Supplement to Spe 22889, Use of Voronoi Grid in Reservoir Simulation Apéndice A,B y C. SPE 26951

E. P. C. C. (1999). Página en internet acerca de la Transpolación transfinita.[http://www.epcc.ed.ac.uk/epcc-tec/documents/tw-meshgen/Mesh Generation.book12](http://www.epcc.ed.ac.uk/epcc-tec/documents/tw-meshgen/MeshGeneration.book12)

G. E. ROBERTSON. Grid-Orientation Effects and the Use of Orthogonal Coordinates in Reservoir Simulation Curvilinear. SPE 6100, 1978.

GOLDTHORPE, W.H. and Y.S. CHOW. *Unconventional Modelling of Faulted Reservoirs: A Case Study*. Woodalde Offshore Petroleum Pty. Ltd, SPE 13526 1985.

HEINEMANN, Z. , GERKEN, G. y HANTELMANN, G. *Using Local Grid Refinement in a Multiple-Application Reservoir Simulator*. SPE 12255, San Francisco, USA 1983.

HEINEMANN, Z. Y MUNKA, M. Reservoir Simulation with Block Gathering, SPE 15097, Oakland 1986.

HERNANDEZ GARCIA Miguel A. DOMINGUEZ VARGAS Guillermo C. Apuntes de Simulación de Yacimientos. UNAM. México 1984

HIGGINS, R.V. y LEIGHTON, A.J. *A computer Meted to Calculate Two Phase Flow in Irregularly bounded Porous Medium*, AIME, 225, 679-683.

H.N, Sharpe y D.A. Anderson. A New Adaptive Orthogonal Grid Generation Procedure for Reservoir Simulation. SPE 20744 1990

H,N, Sharpe. Validation of an Adaptive, Orthogonal, Curvilinear Gridding Procedure for Reservoir Simulation. SPE 25262 1993.

J. MANIK, and T. Ertekin, Development and Application of Dynamic and Static Local Grid Refinement Algorithms for Water Coning Studies. The Pennsylvania State University, SPE 39228 1997

KHALID AZIZ A. SETTARI . Use of Irregular Gris in Reservoir Simulation. U. OF CALGARY, SPE 3174 1972

KHALID AZIZ, Reservoir Simulation Grids: Opportunities and Problems. Stanford U, SPE.252333 1993

KNUPP Patrick y STEINBERG Stanly. Fundamentals Grid Generation, USA 1994

L.C.W. Amado, y O.A. Pedrosa. A Finite Volume Approach with Triangular Grid for Solving Fluid Flow Problems in Reservoirs SPE 23633 1992

MATTAX Calvin C. y DALTON Robert L. Reservoir Simulation. 1 Ed, SPE. USA 1990.

NARASIMHAN, T.N. y WITHERSPOON, P.A. "An Integral Finite Diference Meted for Analysing Fluid Flow in Porous Media, Water Resources Research, 12(1), 1976, 57-64

PEDROSA, Oswaldo A. Jr, SPE, Petrobras, Khalid Aziz. Use of a Hybrid Grid in Reservoir Simulation. Stanford U / SPE 13501 1986

PHILLPPE QUANDALLE, BEICIP-FRANLAB. Eighth SPE Comparative Solution Project: Gridding in Reservoir Simulation. SPE 25263 1993

POTENPA, T. *Three-dimensonal simulation of steam flooding with minimal grid orientation.* Artículo SPE 11726. California USA 1983.

RIVERA LOAIZA, Cuauhtémoc. Utilización de redes de Petri para la elaboración de una interfaz de Usuario. México: Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo Facultad de Ingeniería Eléctrica, Febrero 2000

ROSENBERG von, D.U. *Local Grid Refinement for Finite Difference Methods*, SPE 10974, New Orleands USA Sep. 1982.

ROZON, B. J. *A generalizad finite volumen discretization method for reservoir simulation.* Artículo SPE 18414, Houston USA 1989.

STEINER, Paul. *First and Second International Forum on Reservoir Simulation.* Alpbach 1988-1989, Leoben, Austria

THOMPSON, J., WARSI, Z., y MASTIN, C. *Numerical grid generation. Foundations and applications.* New York : Elsevier Science. 1985

TINOCO RUIZ, J.G.(1997).*Funcionales discretos para la generación de mallas suaves y convexas sobre regiones planas irregulares.* PhD thesis, CIMAT, Guanajuato, Gto.

TODD. M.R, O'DELL, P.M. , y HIRASAKI, G.J. *Métodos para incrementar la exactitud en la simulación numerica de yacimientos.* SPEJ Dic 1972, 515-30, Trans, AIME, 253.

VON ROSEMBERG, D.U. *Local Mesh Refinement for Finite Difference Methods,* artículo SPE 10974 presentado en el Congreso Annual de la SPE, New Orleans, Sept. 26-29, 1982

YANOSIK, J.L. y McCracken, T.A. *A Nine-Point, Finite Difference Reservoir Simulator for Realistic Prediction of Adverse Mobility Ratio Displacement,* SPEJ 253-262.

Yu Ding y P,A, Lemonnier. *Development of Dynamic Local Grid Refinement in Reservoir Simulation* SPE 25279 1993

Z.E. Heinemann, SPE, C.W. Brand, Margit Munka, "Modeling Reservoir Geometry With Irregular Grids" / SPE and Y.M. Chen, Mining U. of Leoben SPE 18412 1991

ANEXO A

TRANSMISIBILIDAD EN GEOMETRÍA DE PUNTO ESQUINA

1. ESQUEMAS NUMÉRICOS

Uno de los principales problemas fijado por el empleo de mallas distorsionadas es conservar la exactitud de la discretización de flujo multifásico. El empleo del esquema de cinco-punto para mallas distorsionadas puede conducir a errores debido a la no ortogonalidad del flujo en la interfase de las celdas. Para mejorar la exactitud, algunos esquemas numéricos de volumen de control fueron propuestos. Esos métodos se pueden clasificar en dos categorías dependiendo de la discretización del operador elíptico.

1) Los esquemas basados en la corrección de flujo, como el método de elementos finitos CVFE (*control-volume finite-element*).

2) Los esquemas basados en la corrección de presión, como el método de volúmenes finitos que emplean interpolación bilineal o lineal en presión.

Realizando comparaciones entre los dos esquemas para el caso de una malla inclinada trabajada por primera vez por Hirasaki y O'Dell con el propósito de investigar la disminución de la exactitud cuando se emplean aproximaciones de flujo no-ortogonal, se observó que el esquema de corrección de flujo es más

exacto que el esquema de corrección de presión, especialmente al simular flujo multifásico.

El análisis se presenta para un sistema de flujo bifásico despreciando el efecto de la gravedad y la presión capilar. En orden para simplificar la derivada:

$$\frac{\partial(\Phi S_m / B_m)}{\partial t} = \text{div}(\lambda_m K \nabla P) + q_m \quad (\text{A-1})$$

donde m denota la fase agua 'w' o aceite 'o'

La discretización del operador elíptico $\text{div}(\lambda_m K \nabla P)$ requiere de apropiados cálculos de la transmisibilidad.

2. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS VOLUMEN DE CONTROL

Este método fue introducido por Hegre para geometría punto esquina y es ahora también empleado para mallas triangulares.

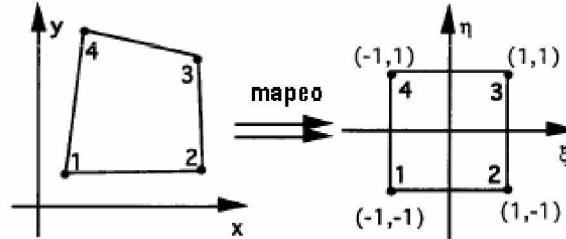
Empleando el método estándar Galerkin el término de transmisibilidad entre dos nodos i, j para una malla distorsionada se expresa como (Fig. A1):

$$T_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla N^i K \nabla N^j dV \quad (\text{A-2})$$

donde N^i es una función básica bilineal, que es cero excepto para los elementos finitos conectados al nodo. El volumen poroso alrededor de un nodo es calculado por la expresión:

$$V_i = \int_{\Omega} \Phi N^i dV \quad (A-3)$$

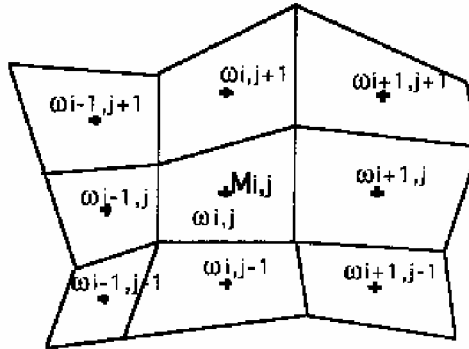
Figura A1. Malla distorsionada transformada para el calculo de la transmisibilidad



Esta relación garantiza la conservación de la masa

La discretización de la ecuación para el nodo (i,j) puede ser escrita de la siguiente manera (Fig. A2):

$$\begin{aligned}
 V_{i,j} \frac{(\Phi S / B)_{i,j}^{n+1} - (\Phi S / B)_{i,j}^n}{\Delta t} = & \\
 q + T_{i+1/2,j} \lambda_{i+1/2,j} (P_{i+1,j} - P_{i,j}) + T_{i-1/2,j} \lambda_{i-1/2,j} (P_{i-1,j} - P_{i,j}) & \\
 + T_{i,j+1/2} \lambda_{i,j+1/2} (P_{i,j+1} - P_{i,j}) + T_{i+1/2,j+1/2} \lambda_{i+1/2,j+1/2} (P_{i+1,j+1} - P_{i,j}) & \\
 + T_{i-1/2,j-1/2} \lambda_{i-1/2,j-1/2} (P_{i-1,j-1} - P_{i,j}) + T_{i+1/2,j-1/2} \lambda_{i+1/2,j-1/2} (P_{i+1,j-1} - P_{i,j}) & \\
 + T_{i-1/2,j+1/2} \lambda_{i-1/2,j+1/2} (P_{i-1,j+1} - P_{i,j}) & \quad (A-4)
 \end{aligned}$$

Figura A2. Estructura de una malla distorsionada

donde $V_{i,j}$ es un volumen de control alrededor del nodo (i,j) . la movilidad de la fase λ es evaluada con funciones de peso corriente arriba.

Este esquema es de nueve puntos para presión como para saturación, con términos de flujo en la dirección diagonal. El flujo de una fase dentro de una celda puede ser expresado como la suma del flujo en cada dirección X, Y, 'y' Z, y en la dirección diagonal.

3. CÁLCULO DE LA TRANSMISIBILIDAD

Entre los métodos para calcular esta variable física encontramos:

3.1 Aproximación vectorial.

Este método fue creado por Goldthorpe Chow y Kydland. Se definen las siguientes variables:

T_{AB} : será la transmisibilidad entre los bloques A y B.

T_A : será la transmisibilidad desde el bloque central A a la interfase común.

T_B : será la transmisibilidad del centro del bloque B a la misma interfase.

$$\frac{1}{T_{AB}} = \frac{1}{T_A} + \frac{1}{T_B} \quad (\text{A-5})$$

Ellos calculan T_A y T_B por:

$$T_i = k_i \frac{|An_i \cdot (r_m - r_i)|}{\|r_m - r_i\|^2}, i = A, B \quad (\text{A-6})$$

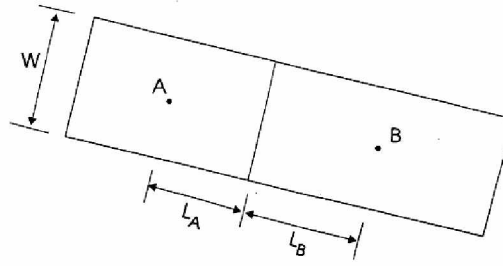
An_i , es un vector cuyas componentes z, y, x, son las áreas descritas por las proyecciones de la interfase común en los planos x-y, x-z y z-y respectivamente. $(r_m - r_i)$ es un vector del punto medio de la celda de Malla i al punto medio de la interfase común y k_i es la permeabilidad de la celda i en la dirección apropiada (x, y, o z).

3.2 Integración Armónica

Valiéndose de las transformaciones y del mapeo, se calculan los centroides, las áreas y los volúmenes asociados a cada bloque entre los cuales se desea calcular la transmisibilidad.

- **Malla Ortogonal.** Se consideran dos bloques regulares como los de la Fig. A3 Cada bloque posee su propia permeabilidad, k_A y k_B . Haciendo una analogía, se puede considerar como si fuera flujo a través de dos resistencias en serie:

Figura A3. Bloques de malla ortogonales



teniendo por resultado que la transmisibilidad de A a B es la suma de los inversos de cada transmisibilidad asociada a cada bloque, de donde:

$$T_A = k_A \Delta Z W / L_A \quad (A-7)$$

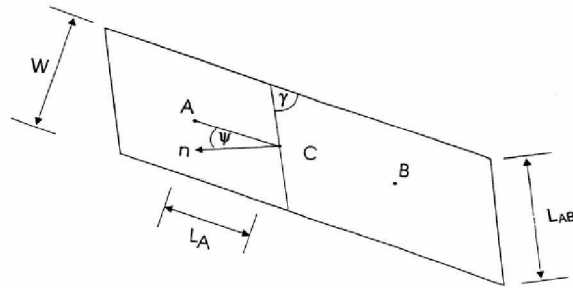
$$T_B = k_B \Delta Z W / L_B \quad (A-8)$$

- **Malla No Ortogonal con lados paralelos.** En la Fig. A4, se considera hasta cierto punto como el caso más general donde los bloques son no ortogonales, pero las caras límite son paralelas. Se hace un desarrollo geométrico similar al anterior y se llega a:

$$T_A = \frac{k_A \Delta z L_{AB} \cos \psi}{L_A} \quad (A-9)$$

- **Método de Tubos en Paralelo.** Se trata de ir cortando el bloque en líneas horizontales a modo de tubos, los cuales se representan en la Fig. A5 como v . La transmisibilidad será la suma de las transmisibilidades parciales de cada tubo. Hay

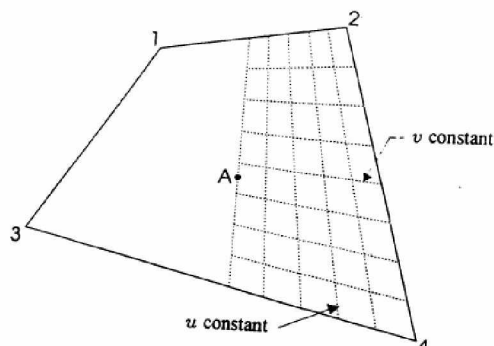
Figura A4. Bloques de malla no ortogonales con lados paralelos.



que tener en cuenta que solo estamos evaluando medio bloque. La expresión a la que se llega es:

$$T_A = \int_{v=0}^1 \frac{1}{\int_{u=u_c}^{u=1} \frac{ds}{du}(u,v) du} \int_{u=u_c}^{u=1} k_A \frac{dA}{dv}(u,v) \cos\psi(u,v) dv \quad (\text{A-10})$$

Figura A5. Conjunto de tubos y rebanadas



- **Método de rebanadas en serie.** Se trata de ir rebanando el bloque en tajadas verticales, partiendo desde el centroide. Esto lo podemos observar en la

Fig. A5 en donde las rebanadas se representan con la letra u . La transmisibilidad será la suma de todos los trozos o rebanadas. La expresión a la que se llega es la siguiente:

$$\frac{1}{T_A} = \int_{u=u_c}^{u=1} \frac{1}{\int_{v=0}^1 \frac{k_A \frac{dA}{dv}(u,v) \cos \psi(u,v)}{\frac{ds}{du}(u,v)} dv} du \quad (\text{A-11})$$

3.3 Arreglos para 3D.

Tubos en paralelo:

$$T_A = \int_{v=0}^1 \int_{w=0}^1 \frac{1}{\int_{u=u_c}^1 \frac{k_A \frac{dA}{dvdw}(u,v,w) \cos \psi(u,v,w)}{\frac{ds}{du}(u,v,w)} du} dv dw \quad (\text{A-12})$$

Rebanadas en serie:

$$\frac{1}{T_A} = \int_{u=u_c}^{u=1} \frac{1}{\int_{v=0}^1 \int_{w=0}^1 \frac{k_A \frac{dA}{dvdw}(u,v,w) \cos \psi(u,v,w)}{\frac{ds}{du}(u,v,w)} dv dw} du \quad (\text{A-13})$$

ANEXO B

GENERADORES DE MALLAS

1. GENERADORES DE MALLAS NO ELÍPTICOS

1.1 Generación de mallas algebraicas

Ventajas

- Rápido cómputo de las mallas, comparados con los métodos de ecuaciones diferenciales parciales.
- Control directo control sobre la localización del nodo en la celda.

Desventajas

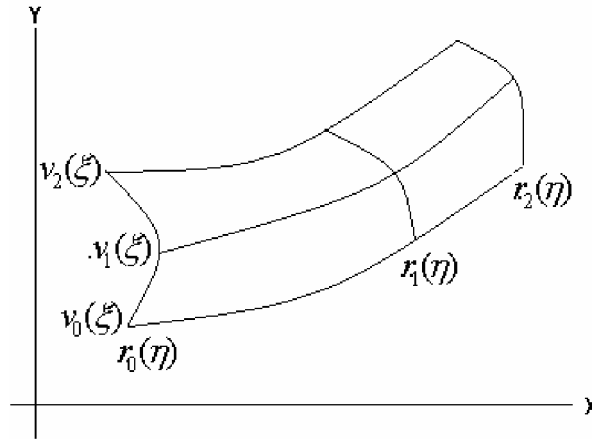
- No pueden garantizar suavidad sobre la malla; en particular, las fronteras inclinadas discontinuas pueden propagarse en el interior de la malla.

Los métodos algebraicos se iniciaron con la interpolación transfinita (TIF) que tiene este origen de los métodos de generación de superficies.

Si sobre una región ocurre una interpolación, se deben dar dos familias de curvas (Fig. B1):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k(\xi), \quad 0 \leq k \leq K, \\ \mathbf{r}_l(\eta) \quad 0 \leq l \leq L \end{aligned} \tag{B-1}$$

Figura B1. Generación de mallas algebraicas empleando múltiples curvas



Las curvas deben satisfacer la condición de consistencia:

$$\mathbf{r}_l(\eta_k) = \mathbf{v}_k(\xi_l), \quad 0 \leq k \leq K, \quad 0 \leq l \leq L \tag{B-2}$$

La interpolación multidireccional es lograda por medio de operadores de proyección, llamada así debido a sus propiedades idempotentes definidas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\eta = \mathbf{P}_\eta(\xi, \eta) &= \sum_{k=0}^K \phi_k(\eta) \mathbf{v}_k(\xi) \\ \mathbf{P}_\xi = \mathbf{P}_\xi(\xi, \eta) &= \sum_{l=0}^L \psi_l(\xi) \mathbf{r}_l(\eta) \end{aligned} \tag{B-3}$$

donde ϕ_k y ψ_l son funciones de interpolación (polinomios de Lagrange, splines, polinomios Hermite e interpolación polinómica Bezier/Bernstein). La proyección \mathbf{P}_η es la interpolación unidireccional en la dirección η , mientras \mathbf{P}_ξ es la interpolación unidireccional en la dirección ξ .

La interpolación unidireccional puede ser combinada para formar el producto tensorial del proyector:

$$\mathbf{P}_\xi \mathbf{P}_\eta = \mathbf{P}_\xi \mathbf{P}_\eta(\xi, \eta) = \sum_{l=0}^L \sum_{k=0}^K \phi_k(\eta) \psi_l(\xi) \mathbf{r}_l(\eta_k) = \sum_{l=0}^L \sum_{k=0}^K \phi_k(\eta) \psi_l(\xi) \mathbf{v}_k(\xi_l) \quad (\text{B-4})$$

Otros Métodos Algebraicos

- *Multisuperficies*

Métodos de interpolación unidireccional generalizados. En este método, se especifican N “superficies de control”. Las superficies no necesariamente corresponden a las superficies de la malla. Entonces se crea un campo vectorial de la superficie por medio de la usual interpolación polinómica. Se integran las expresiones resultantes para encontrar las fórmulas de multisuperficies. La expresión resultante puede entonces ser combinada como un proyector empleando interpolación transfinita para obtener la malla.

- *Técnica de las dos fronteras*

Solo emplea información de las fronteras y de las derivadas de las fronteras, con polinomios de interpolación cúbicos o lineales. El método contiene términos que

controlan la ortogonalidad. El espaciamento puede ser controlado por una técnica de re-parametrización.

1.2 Técnicas de mapeo Conforme y Cuasiconforme

Un importante factor acerca del mapeo conforme se resume en el Teorema de Mapeo de Riemann el cual plantea Fig. B2:

Un dominio D simple conectado por lo menos por dos puntos de frontera, puede ser mapeado conformemente y uno a uno sobre el disco $|w| < 1$. El mapeo $w = f(z)$ es determinado singularmente fijando $f(z_0) = w_0$ y $\arg(f'(z_0)) = 0$ donde w_0 es un punto arbitrario del disco $z_0 \in D$

Este mapa puede ser construido solucionando las ecuaciones diferenciales parciales

$$M^2 \mathbf{x}_{\xi\xi} + \mathbf{x}_{\eta\eta} = 0. \tag{B-6}$$

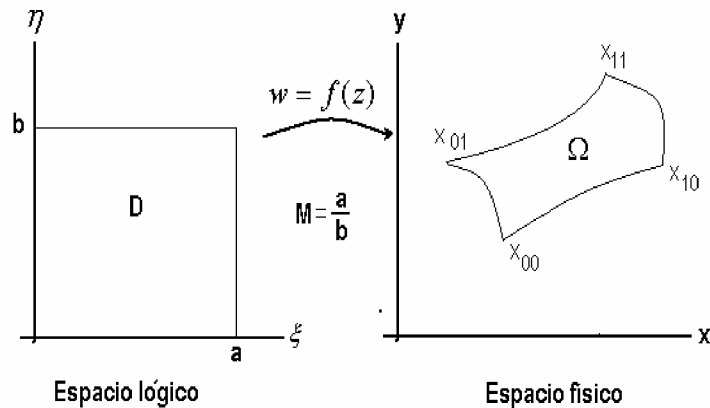


Figura B2. Teorema de Mapeo de Riemann

El resultado del mapeo es entonces un mapa cuasi conforme. La dificultad con esta aproximación es que M no es conocida a priori puesto que esta depende del dominio.

El mapeo conforme puede ser también construido algebraicamente o solucionando las ecuaciones de integrales. Además, permite manejar múltiples regiones conectadas con relativa facilidad empleando múltiples cortes de secciones.

Desventajas

- a. Existe una amplia restricción para las dos dimensiones
- b. Poco control sobre el interior de la malla.
- c. La construcción del mapa puede ser muy difícil.
- d. La gran cantidad de valores de las funciones pueden conducir a dificultades en la implementación del algoritmo.
- e. La distribución arbitraria de los puntos de frontera se logra sacrificando la principal ventaja, la ortogonalidad.
- f. El mapeo conforme está mal condicionado en el sentido de que cambios muy pequeños en la forma del dominio pueden alterar dramáticamente la posición de los puntos de frontera mapeado.

1.3 Generación de mallas ortogonales

Las mallas ortogonales son definidas teniendo la propiedad $g_{12} = 0$

Ventajas

- El error de truncamiento se reduce.
- La transformación de la ecuación general tienen mucho menor cantidad de términos que los que habrían en un marco no ortogonal

- Las condiciones físicas de frontera son representadas más fácilmente.

Desventaja

- Solo existe para dominios planares, entonces se requiere de una re-parametrización particular de las fronteras.

Es difícil calcular la malla ortogonal directamente de la relación $g_{12} = 0$ desde una ecuación diferencial parcial de primer orden con dos incógnitas.

Eiseman propuso el método de trayectorias ortogonales en que se determinan las líneas constantes ξ a partir de una esquema de interpolación simple y las líneas constantes η son determinadas por los requerimientos de ortogonalidad. Los puntos en la frontera pueden ser especificados tan solo tres de las cuatro fronteras de la región para este método.

La transformación ortogonal en el plano se puede ver como una transformación cuasi-conforme, teniendo una dilatación real; en este caso se define por la relación.

$$f_{\mathbf{x}_\xi} = -\mathbf{x}_\eta^\perp \quad (\text{B-5})$$

y la ecuación diferencial parcial de segundo orden :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (f_{\mathbf{x}_\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\mathbf{x}_\eta / f) = 0, \quad (\text{B-6})$$

conocida como la *laplaciana escalada*, donde:

$$f = \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}. \quad (\text{B-7})$$

El esquema más amplio de estudio para la generación de mallas ortogonales involucra la solución de la Ec. B-7.

1.4 Generación de mallas Hiperbólicas y Parabólicas

Se parte del siguiente sistema de primer orden no lineal para generar mallas sobre superficies *airfoi* en dos dimensiones:

$$x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta} = 0, \quad x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi} = V, \quad (\text{B-8})$$

o en notación vectorial:

$$\mathbf{x}_{\xi} \cdot \mathbf{x}_{\eta} = 0, \quad J = V. \quad (\text{B-9})$$

Donde $V = V(\xi, \eta)$ es una función de control empleada específicamente.

el sistema es equivalente para el par de proposiciones $g_{12} = 0$ y $\sqrt{g} = V$. Si la transformación es no singular, por ejemplo, $\sqrt{g} \neq 0$, entonces este sistema puede ser expresado vectorialmente como:

$$\mathbf{x}_{\eta} = \frac{V}{g_{11}} \mathbf{x}_{\xi}^{\perp}. \quad (\text{B-10})$$

Se puede notar una similitud entre las Ec. B-7 y B-11; ambas requieren la tangente \mathbf{x}_η para ser proporcional a la “perpendicular” de la otra tangente. Sin embargo, si $f = f(\xi, \eta)$, entonces la Ec. B-6 es lineal, mientras que B-10, es no lineal. Más importante aún, B-6 es un sistema de ecuaciones elípticas. De otro lado, B-10 no está realmente clasificada debido a la no linealidad. Sin embargo, si la última ecuación es linealizada, el sistema resultante tiene la forma

$$A\mathbf{x}_\xi + B\mathbf{x}_\eta = \mathbf{v} \quad (\text{B-11})$$

y es hiperbólica.

Donde A y B son matrices y v es un vector.

La Ec. B-7 y B-11, así como el sistema linealizado B-12 pueden ser propuestos como un problema de valor inicial y solucionarlo por esquemas *maching* en los cuales los datos de frontera son dados en las fronteras internas de un dominio infinito; la malla solución es entonces obtenida por *maching* la solución externa.

Para superar algunas de las limitaciones de la generación de mallas hiperbólicas. Nakamura, estudio un esquema de generación malla parabólica en el cual la rapidez del algoritmo hiperbólico y la suavidad del algoritmo elíptico son tenidos en cuenta. El sistema propuesto por la generación de mallas parabólicas es:

$$x_\eta = Ax_{\xi\xi} + s_x, \quad (\text{B-12})$$

$$y_\eta = Ay_{\xi\xi} + s_y, \quad (\text{B-13})$$

con A siendo una constante especificada y empleada. El termino fuente S_x y S_y son empleados para controlar el espaciado y la ortogonalidad al interior de la malla. Como en la generación de mallas hiperbólicas, las condiciones de frontera

son especificadas en la frontera interna de un dominio infinito, influenciado por el término fuente, por la vía de algoritmos de interpolación. El control sobre la ortogonalidad es indirectamente alcanzado a través del término fuente. El método es especialmente exitoso para mallas tipo O y H alrededor de *airfoils*. La teoría del término fuente no parece haber sido ampliamente desarrollada, ni tiene una extensión a las tres dimensiones.

1.5 Generación de mallas Bi-armónicas

Son generadores de mallas basados en ecuaciones diferenciales parciales de cuarto orden que permiten adicionar condiciones de frontera impuestas. Adicionalmente a las usuales condiciones de Dirichlet, por ejemplo, uno puede imponer condiciones de frontera Neumann para controlar la ortogonalidad y el espaciamiento en la frontera. Esto es especialmente exitoso en la unión de mallas en dominios múltiples simultáneos. El operador bi-armónico es el único generador de cuarto orden empleado en la actualidad.

$$x_{\xi\xi\xi\xi} + 2x_{\xi\xi\eta\eta} + x_{\eta\eta\eta\eta} = 0, \quad (\text{B-14})$$

$$y_{\xi\xi\xi\xi} + 2y_{\xi\xi\eta\eta} + y_{\eta\eta\eta\eta} = 0, \quad (\text{B-15})$$

por ejemplo, $\nabla_{\xi}^4 \mathbf{x} = 0$.

Desventajas

- Las ecuaciones discretizadas son muy difíciles de resolver debido al incremento en el ancho de banda de las ecuaciones en la matriz.

- Aunque la malla es suave, no hay un directo control sobre el interior de la malla (como es el caso del generador elíptico). Formas no homogéneas de las ecuaciones bi-armónicas permiten un control indirecto sobre el interior de la malla.
- No hay garantía contra mallas plegadas

2. Generadores de Mallas Elípticas

El generador de mallas elíptico esta basado en la solución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales elípticas.

Ventajas

- El interior de la malla es muy suave, incluso para datos de fronteras no suaves. Mallas suaves son necesarias para alcanzar bajos errores de truncamiento en la solución de las ecuaciones generales por métodos de diferencias finitas
- Se puede especificar todas las cuatro fronteras del dominio, de esta manera se satisfacen los problemas básicos de generación de mallas planares.
- El interior de la malla es relativamente insensible a la parametrización de la frontera en la aproximación elíptica;
- La solución existe para una amplia variedad de parametrizaciones de la frontera y cambios únicamente graduales cuando los datos de la frontera son cambiados.

Desventajas

- La mayor falta en la que se incurre en la aproximación elíptica es la pérdida de rapidez relativa a los otros métodos mencionados.

- Es muy rígido controlar el interior de la malla cuando esta es generada para resolver un sistema elíptico.

2.1 *Generador Elíptico Simple*

Los generadores elípticos simples llamados el AH (Amsdem-Hirt)   generador longitudinal, es una generalización del generador AH a dos dimensiones con $p = 0$. Este generador requiere que cada componente del mapa satisfaga las ecuaciones de Laplace.

$$\begin{aligned}\nabla^2 x &= \nabla_{\xi}^2 x = x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta} = 0; \\ \nabla^2 y &= \nabla_{\xi}^2 y = y_{\xi\xi} + y_{\eta\eta} = 0.\end{aligned}\tag{B-16}$$

2.2 *El Winslow o generador de mallas suaves*

Es el más ampliamente empleado de todos los generadores de mallas elípticos   también conocido como el generador homogéneo Thompson-Thames –Mastin (TTM). El método surgió de la necesidad de un generador elíptico que pueda producir mallas no plegadas, por ejemplo una transformación con jacobiano positivo. El método requiere de las componentes de la transformación inversa,

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y),\tag{B-17}$$

Para satisfacer las ecuaciones Laplacianas

$$\nabla^2 \xi = \nabla_x^2 \xi = \xi_{xx} + \xi_{yy} = 0; \quad \nabla^2 \eta = \nabla_x^2 \eta = \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0\tag{B-18}$$

en un dominio lógico convexo. Las condiciones de frontera Dirichlet son dadas por la inversa de la frontera de los mapas.

Es difícil resolver numéricamente las ecuaciones *winslow* directamente en un dominio arbitrario. Para desarrollar un algoritmo numérico conveniente para el computo del mapa *winslow* las Ec. B-18 son transformadas a un espacio lógico esto puede ser resumido en que $g \neq 0$ para que el mapeo sea invertido. El resultado es:

$$\begin{aligned} g_{22}x_{\xi\xi} - 2g_{12}x_{\xi\eta} + g_{11}x_{\eta\eta} &= 0, \\ g_{22}y_{\xi\xi} - 2g_{12}y_{\xi\eta} + g_{11}y_{\eta\eta} &= 0, \end{aligned} \tag{B-19}$$

2.3 El Generador de Mallas TTM no Homogéneo

Se estudia la versión planar del generador TTM no homogéneo y como este es empleado para controlar la malla en el interior de un dominio. EL generador puede ser empleado para atraer o repeler nodos en la malla hacia puntos especificados en el dominio lógico y mover líneas coordenadas en una forma similar. Thompson, Thames, y Mastin añadieron términos fuentes a las ecuaciones diferenciales parciales homogéneas B-19. Hay dos formas básicas del generador de mallas no homogéneas; ambos requieren que el usuario especifique dos funciones de peso para ser empleadas en el término no homogéneo. La aproximación original no homogénea es

$$\nabla_x^2 \xi = p, \quad \nabla_x^2 \eta = Q, \tag{B-20}$$

Donde la aproximación formulada

$$\nabla_x^2 \xi = \frac{g_{22}}{g} p, \quad \nabla_x^2 \eta = \frac{g_{11}}{g} Q, \quad (\text{B-21})$$

Sin embargo, la malla continua no homogénea no necesariamente es lisa incluso cuando se emplea un generador “elíptico”.

Restricciones en P y Q son claramente necesarias si una malla lisa y no plegada es obtenida.

Invirtiendo la forma original Ec. B-21 de las ecuaciones TTM dadas

$$\mathcal{L}_w x = -g_{22} P x_\xi - g_{11} Q x_\eta. \quad (\text{B-22})$$

El control local de la malla es obtenido seleccionando P y Q para que tengan la forma exponencial.

Estos términos fuentes contienen parámetros arbitrarios que son variados para obtener una malla deseada. La aproximación P-Q para el control del interior de la malla es razonablemente efectivo pero carece de automatización.

La implementación numérica del generador no homogéneo requiere únicamente mínimas modificaciones del código de generador homogéneo.

3. CONTROL DE LA MALLA CERCA DE LA FRONTERA

Un requerimiento generalmente importante para un generador de malla es ser capaz de controlar el comportamiento de la transformaron cerca de la frontera ya que a menudo este es donde el comportamiento de la solución cambia mas rápidamente (fenómenos de capas de frontera en dinámica de fluidos). En tales aplicaciones, el control sobre el espaciamiento de la malla y la ortogonalidad cerca de la frontera es frecuentemente requerida. El medio más efectivo de lograr esto

es aplicar condiciones de frontera Neumann (gradiente) para el generador de mallas de ecuaciones diferenciales parciales elípticas.

Sin embargo muchos generadores de mallas elípticas son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden que pueden soportar solo una serie de condiciones de frontera. Si las condiciones Neuman son aplicadas a la frontera, entonces las condiciones de frontera Dirichlet deben ser descartadas. El resultado del mapeo podría entonces no ser extenso en la conformación de fronteras.

Ambas condiciones de frontera pueden ser reforzadas si el orden de la ecuación es incrementado. El generador de mallas bi-armonico de cuarto orden es probablemente un candidato. Sin embargo, aunque la aproximación bi-armónica podría trabajar en principio es relativamente difícil de implementar y solucionar ecuaciones diferenciales parciales de cuarto orden comparado con las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden. Además el control sobre el interior d la malla es muy indirecto y hay una tendencia de la malla generada bi-armónicamente a plegarse.

Este método ha gozado de algunos éxitos generalmente su empleo no es llamativo porque la derivación del metodo no es matemáticamente justificado (por ejemplo, las ecuaciones finales no garantizan que las transformaciones resultantes posean las propiedades de frontera deseadas. Hay también instancias prácticas en las cuales el método ha fallado para el comportamiento efectivo.

Otra aproximación para el problema es la descrita a continuación. La malla cerca de la frontera es controlada empleando ecuaciones elípticas no homogéneas de segundo orden con condiciones de frontera Dirichlet. Las condiciones Neumann son simuladas a través de términos fuentes no homogéneas. Las consecuencias geométricas de especificar una condición de frontera Neumann a lo largo de una frontera con datos Dirichlet conocidos es descrita en la primera parte de esta sección, mientras la segunda parte emplea estos resultados en una exposición general del amplio uso del método STEGER Y Sorenson 190 simulando condiciones de frontera Neumann. La generalización de la discusión permite

extender el método original Steger Sorenson a otros generadores de mallas elípticos junto al contexto original TTM en el cual este fue propuesto.

4. ALGORITMOS DE SOLUCIÓN ADAPTATIVA

El objetivo es reducir el error de truncamiento en la solución numérica de ecuaciones estándar trasladando los nodos de la malla como el desarrollo de la solución.

Funciones de peso son introducidos en los generadores de mallas no homogéneas para crear un movimiento de los nodos; los pesos son basados en propiedades físicas de la solución, tales como el gradiente. Como por ejemplo para las mallas adaptativas con TTM no homogéneas

$$P = g^{11}\phi(\xi,\eta) \text{ y } Q = g^{22}\psi(\xi,\eta) \quad (\text{B-23})$$

ANEXO C

ARCHIVO DE DATOS PARA EL MODELO EN ECLIPSE Y CMG

1. DATA ECLIPSE Este data corresponde al modelo cartesiano de 10X10X4 SPE 25263 Octavo proyecto de solución comparativo: Técnicas de enmallado en simulación de yacimientos.

RUNSPEC =====

TITLE

Modelo Compartivo SPE 25263

CART

DIMENS

-- Nx Ny Nz
10 10 4/

--FASES PRESENTES

OIL

GAS

DISGAS

--UNIDADES

FIELD

--DIMENSIONES DE LA TABLA DE EQUILIBRIO

EQLDIMS

--REGIONES NODOS EN MAX N EN PROF MAX N DE TABLAS MAX N DE NODOS
-- PROFUNDIDAD EN LA TABLA CONC VS PROF PROF

1 100 20 1 20/

START

03 'AUG' 2004 /

WELLDIMS

--MAX N DE MAX DE POZOS MAX N DE MAX N DE POZOS
-- POZOS CONECTAD GRUPOS EN EL GRUPO
3 1 1 3/

TABDIMS

--N DE TABLAS N DE TABLAS N MAX DE NODOS MAX NODOS EN MAX N DE MAX
N DE NODSO

--SATURACION PVT EN TAB DE SATUR TAB PVT REG FIP R_S
1 1 16 16 1 16 /

```
-- CONTROL DE SALIDA QUE SON 50 ITEMS
DEBUG
0 1 4* 1 /
```

```
GRID =====
```

```
EQUALS
DX 500 /
DY 500 /
DZ 25 1 10 1 10 1 1 /
PERMX 500 /
PORO 0.3/
```

```
DZ 75 1 10 1 10 2 2 /
PERMX 50 /
PORO 0.2/
```

```
DZ 75 1 10 1 10 3 3 /
PERMX 20 /
PORO 0.2/
```

```
DZ 150 1 10 1 10 4 4 /
PERMX 10/
PORO 0.1/
```

```
/
--END EQUALS KEYWORD
```

```
COPY
'PERMX' 'PERMY' 1 10 1 10 1 4/
'PERMX' 'PERMZ' /
/
```

```
BOX
1 10 1 10 1 1 /
TOPS
```

```
8325 8330 8335 8340 8345 8350 8355 8360 8365 8370
8325 8330 8335 8340 8345 8350 8355 8360 8365 8370
8325 8330 8335 8340 8345 8350 8355 8360 8365 8370
8325 8330 8335 8340 8345 8350 8355 8360 8365 8370
8325 8330 8335 8340 8345 8350 8355 8360 8365 8370
8325 8330 8335 8340 8345 8350 8355 8360 8365 8370
8325 8330 8335 8340 8345 8350 8355 8360 8365 8370
8325 8330 8335 8340 8345 8350 8355 8360 8365 8370
8325 8330 8335 8340 8345 8350 8355 8360 8365 8370 /
```

```
--RESUMEN DE LAS PROPIEDADES Y EL GRID PARA VISUALIZACIONES
INIT
```

```
--CONTROL DE LA FORMA DE SALIDA
```

RPTGRID
'DX' 'DY' 'DZ' 'PERMX' 'PERMY' 'PERMZ' 'MULTZ'
'PORO' 'TOPS' 'PORV' 'TRANX' 'TRANY' 'TRANZ'/

PROPS
-- OIL WATER GAS
DENSITY
46.244 64.79 0.0647/
ROCK
14.7 0.000003/

--OIL SATURADO
--R_S P_burb FVF VISC
PVTO
0.001 14.7 1.0620 1.0400 /
0.0905 264.70 1.1500 0.97500 /
0.1800 514.70 1.2070 0.9100 /
0.3170 1014.7 1.2950 0.8300 /
0.6360 2014.7 1.4350 0.6950 /
0.7750 2514.7 1.5000 0.6410 /
0.9300 3014.7 1.5650 0.5940 /
1.2700 4014.7 1.6950 0.5100
5014.7 1.671 0.549
9014.7 1.579 0.74 /

/

--PGAS BGAS VISGAS
PVDG
14.7 166.666 0.008000
264.7 12.093 0.009600
514.7 6.274 0.011200
1014.7 3.197 0.014000
2014.7 1.614 0.018900
2514.7 1.294 0.020800
3014.7 1.080 0.022800
4014.7 0.811 0.026800
5014.7 0.649 0.030900
9014.7 0.386 0.047000/

/

-- S_o K_rg K_ro P_cga
SGOF
0.0 0.0 1 0
0.001 0.0 1 0
0.02 0.0 0.997 0
0.05 0.005 0.98 0
0.12 0.025 0.7 0
0.2 0.075 0.35 0
0.25 0.125 0.2 0
0.3 0.19 0.09 0
0.4 0.41 0.021 0
0.45 0.6 0.01 0
0.5 0.72 0.001 0

```

0.6 0.87 0.0001 0
0.7 0.94 0.0000 0
0.85 0.98 0.0000 0
1 1 0 0
/

```

```

--control en la salida de PROPS
RPTPROPS
'SOF2' 'SWFN' 'SGFN' 'PVTW'
'PVTG' 'DENSITY' 'ROCK'/

```

```
SOLUTION =====
```

```

--DATOS QUE INICIALIZAN EL FLUIDO EN UN POTENCIAL DE EQUILIBRIO
--
--DATO DATO OWC GWC GOC GOC RSVD RVVD METODO
--PROF PRES PROF PCOW PROF PCOG PCOG TABLA SOLUCION
EQUIL
8400 4800 9500 0 8000 0 1 0 0 /

```

```

--VARIACION DEL Rs INICIAL vs PROFUNDIDAD
--PROFUND Rs
RSVD
8200 1.27
8500 1.27/

```

```

--CONTROL DE SALIDA
RPTSOL
'PRES'/

```

```
SUMMARY =====
```

```

--RATA DE PRODUCCION DE ACEITE EN EL CAMPO
FOPR

```

```

--GOR PARA EL POZO PRODUCTOR
WGOR
'PRODUCE1'
'PRODUCE2'
/

```

```

WBHP
'PRODUCE1'
'PRODUCE2'
'INJECTOR'
/

```

```

--SATURACIO DE GAS Y ACEITE EN LA CELDA DE INYECCIPN Y LA DE PRODUCCION
BGSAT
1 1 1

```

```

10 1 1
1 10 1
/
BOSAT
1 1 1
10 1 1
1 10 1
/
--PRESION EN LA CELDA DE INYECCION Y PRODUCCION
BPR
1 1 1
10 1 1
1 10 1
/

RUNSUM
EXCEL

SCHEDULE =====

--CONTROL A CADA SALIDA DE CADA TIEMPO REPORTADO
RPTSCHED
'PRES' 'SGAS' 'WELLS' 'SUMMARY=2' 'CPU=2' 'WELSPECS' 'NEWTON=2'/

TUNING
1 10/
/
/

--ESPECIFICACIONES DE DATO DE POZO
--NOMBRE NOMBRE LOCALIZACION DEEP IP
--POZO GRUPO I J BHP
WELSPECS
'PRODUCE1' 'G' 10 1 8385 'OIL/'
'PRODUCE2' 'G' 1 10 8340 'OIL/'
'INJECTOR' 'G' 1 1 8340 'GAS'/
/

--ESPECIFICACIONES DE LOS DATOS DE COMPLETAMIENTO
-- NOMBRE LOCALIZACION OPEN TAB FACT DIAMET
-- POZO I J K1 K2 SHUT SAT TRANSMI POZO
COMPDAT
'PRODUCE1' 10 1 1 1 'OPEN' 0 -1 0.25/
'PRODUCE2' 1 10 1 1 'OPEN' 0 -1 0.25/
'INJECTOR' 1 1 1 1 'OPEN' 1 -1 0.25/
/

-- CONTROL DEL POZO PRODUCTOR
-- NAME OPEN METODO OIL WATER GAS LIQU REG BHP
-- HOLE SHUT CONTROL RATE RATE RATE RATE RATE
WCONPROD
'PRODUCE1' 'OPEN' 'ORAT' 1875 4* 1000/
'PRODUCE2' 'OPEN' 'ORAT' 1875 4* 1000/

```

/

```

--CONTROL DEL POZO DE INYECCION
--NOMBRE TIPO OPEN MODO RATA KESV BHP
--POZO INYEC SHET CONTROL FLUJO RATA LIMIT
WCONINJE
'INJECTOR' 'GAS' 'OPEN' 'RATE' 12500 1* 9000/
/

```

```

--ESPECIFICA UNA SERIE DE 10 REPORTES A UN INTERVALO DE 1 AÑO
TSTEP
10*365/
END

```

2. GRUPO DE DATOS CMG

MALLA DE 10 X 10 CARTESIANA

Este es un Grupo de Datos correspondiente al archivo de la Malla 10X10 en CMG. Guardado como extensión *.dat y cargado al simulador IMEX generará los resultados vistos anteriormente.

```

RESULTS SIMULATOR IMEX
RESULTS SECTION INOUT

```

```

*TITLE1 'SPE 8'
*TITLE2 'Basado en el Octavo Estudio Comparatico de la SPE'
*TITLE3 "

```

** Se definen las unidades de la simulación y variables generales de salida.

```
*INUNIT *FIELD
```

```
*OUTUNIT *FIELD
```

```

*WPRN *WELL 10
*WPRN *GRID *TIME
*WPRN *ITER *BRIEF
*WSRF *WELL 1
*WSRF *GRID *TIME
*OUTPRN *WELL *BRIEF
*OUTPRN *GRID SO SG PRES BPP IMEXMAP DATUMPRES

```

```

*OUTPRN *TABLES *NONE
*OUTPRN *RES *NONE

```

*OUTSRF *GRID SO SG PRES BPP

** Dimensionamiento de la malla, tipo de geometría y topes de la formación

GRID VARI 10 10 4
KDIR DOWN

DI CON 500.

DJ CON 500.

DK KVAR
25. 75. 75. 150.

DTOP

8340	8345	8350	8355	8360	8365	8370	8375	8380	8385
8340	8345	8350	8355	8360	8365	8370	8375	8380	8385
8340	8345	8350	8355	8360	8365	8370	8375	8380	8385
8340	8345	8350	8355	8360	8365	8370	8375	8380	8385
8340	8345	8350	8355	8360	8365	8370	8375	8380	8385
8340	8345	8350	8355	8360	8365	8370	8375	8380	8385
8340	8345	8350	8355	8360	8365	8370	8375	8380	8385
8340	8345	8350	8355	8360	8365	8370	8375	8380	8385
8340	8345	8350	8355	8360	8365	8370	8375	8380	8385
8340	8345	8350	8355	8360	8365	8370	8375	8380	8385
8340	8345	8350	8355	8360	8365	8370	8375	8380	8385
8340	8345	8350	8355	8360	8365	8370	8375	8380	8385
8340	8345	8350	8355	8360	8365	8370	8375	8380	8385
8340	8345	8350	8355	8360	8365	8370	8375	8380	8385
8340	8345	8350	8355	8360	8365	8370	8375	8380	8385

RESULTS SECTION GRID
RESULTS SECTION NETPAY
RESULTS SECTION NETGROSS
RESULTS SECTION POR

** Definición del valor de Porosidad (Constante para este caso y con un valor de ** **0.3)

POR CON 0.3
RESULTS SECTION PERMS

**Definición de los valores de Permeabilidad en todas la direcciones

**\$ RESULTS PROP PERMI Units: md
**\$ RESULTS PROP Minimum Value: 50 Maximum Value: 500
PERMI KVAR
500. 50. 20. 10.

**\$ RESULTS PROP PERMJ Units: md
**\$ RESULTS PROP Minimum Value: 50 Maximum Value: 500
PERMJ KVAR
500. 50. 20. 10.

**\$ RESULTS PROP PERMK Units: md

**\$ RESULTS PROP Minimum Value: 20 Maximum Value: 60
 PERMK KVAR
 500. 50. 20. 10.

**Valor de Compresibilidad y presión de Referencia

RESULTS SECTION TRANS
 RESULTS SECTION FRACS
 RESULTS SECTION GRIDNONARRAYS
 CPOR MATRIX 3.E-06
 PRPOR MATRIX 14.7

RESULTS SECTION VOLMOD
 RESULTS SECTION SECTORLEASE

**Definición del modelo y de tablas PVT

RESULTS SECTION ROCKCOMPACTION
 RESULTS SECTION GRIDOTHER
 RESULTS SECTION MODEL
 MODEL *BLACKOIL

**\$ OilGas Table 'Table A'

** Component Property Section **

*PVT *EG 1

** P	Rs	Bo	EG	VisO	VisG
14.7	1.	1.062	6.	1.04	0.008
264.7	90.5	1.15	82.7	0.975	0.0096
514.7	180.	1.207	159.	0.91	0.0112
1014.7	371.	1.295	313.	0.83	0.014
2014.7	636.	1.435	620.	0.695	0.0189
2514.	775.	1.5	773.	0.641	0.0208
3014.7	930.	1.565	926.	0.594	0.0228
4014.7	1270.	1.695	1233.	0.51	0.0268
5014.7	1600.	1.827	1541.	0.449	0.0309
9014.7	2984.	2.357	2591.	0.203	0.047

*DENSITY *OIL 46.244

*DENSITY *GAS 0.0647

*DENSITY *WATER 62.238

*CO 1.3687E-05

*CVO 4.6E-05

*BWI 1.041

*CW 2.9886E-06

*REFPW 14.7

*VWI 0.31

*CVW 0

**Definición de las Propiedades Roca-Fluido

.RESULTS SECTION MODELARRAYS
 RESULTS SECTION ROCKFLUID

*ROCKFLUID

** Rock-Fluid Property Section **

*RPT 1

*SWT

** sw krw krow

0.120000 0.000000 1.000000 0.000000

0.820000 1.000000 0.000000 0.000000

*SLT

0.150000 0.980000 0.000000 0.000000

0.300000 0.940000 0.000000 0.000000

0.400000 0.870000 0.000100 0.000000

0.500000 0.720000 0.001000 0.000000

0.550000 0.600000 0.010000 0.000000

0.600000 0.410000 0.021000 0.000000

0.700000 0.190000 0.090000 0.000000

0.750000 0.125000 0.200000 0.000000

0.800000 0.075000 0.350000 0.000000

0.880000 0.025000 0.700000 0.000000

0.950000 0.005000 0.980000 0.000000

0.980000 0.000000 0.997000 0.000000

0.999000 0.000000 1.000000 0.000000

1.000000 0.000000 1.000000 0.000000

*KROIL *STONE2 *SWSG

RESULTS SECTION ROCKARRAYS

RESULTS SECTION INIT

*INITIAL

** Initial Conditions Section **

*VERTICAL *BLOCK_CENTER *WATER_OIL_GAS

*DATUMDEPTH 9000. *REFDENSITY *GRIDBLOCK

**\$ Data for PVT Region 1

**\$ -----

*REFDEPTH 8400.

*REFPRES 4800.

*DWOC 9500.

*DGOC 7000.

**Parámetros de control numérico(time sep, valores de peso dependiendo del **método, etc.)

RESULTS SECTION INITARRAYS

**\$ RESULTS PROP PB Units: psi

**\$ RESULTS PROP Minimum Value: 4014.7 Maximum Value: 4014.7

PB CON 4014.7

RESULTS SECTION NUMERICAL

```

*NUMERICAL
*MAXSTEPS 1000
*****
** Numerical Control Section                               **
*****
*DTMAX 1000.      **
*AIM *THRESH 0.25 0.25
*NORM *PRESS 1000.
*NORM *SATUR 0.2

RESULTS SECTION NUMARRAYS
RESULTS SECTION GBKEYWORDS
RUN **

```

**Definición de las características de los pozos y de las restricciones de los **mismos como parámetros de control.

```

*****
** Well and Recurrent Data Section                         **
*****
DATE 1986 04 22.

DTWELL 1.

WELL 1 'Injector'
INJECTOR UNWEIGHT 'Injector'
INCOMP GAS
OPERATE MAX STG 12.5e6 CONT
MONITOR BACKFLOW STOP

PERF WI 'Injector'
** if  jf  kf  wi
   1   1   1  81.68658

WELL 2 'Producer 1'
PRODUCER 'Producer 1'
OPERATE MAX STO 1875. CONT
OPERATE MIN BHP 1000. CONT
MONITOR BACKFLOW STOP
MONITOR GOR 30000 shutin

** Well geometry for the producer.
**      rad  geofac wfrac skin
GEOMETRY K 0.25 0.34 1. 0.
PERF GEO 'Producer 1'
** if  jf  kf  wi
   10  1   1   12595.89

WELL 3 'Producer 2'
PRODUCER 'Producer 2'
OPERATE MAX STO 1875 CONT

```

OPERATE MIN BHP 1000. CONT
MONITOR BACKFLOW STOP
MONITOR GOR 30000 shutin

** Well geometry for the producer.
** rad geofac wfrac skin
GEOMETRY K 0.25 0.34 1. 0.
PERF GEO 'Producer 2'
** if jf kf ff
1 10 1 12595.89

OPEN 'Producer 1'

OPEN 'Producer 2'

TIME 3650 **

STOP

***** TERMINATE SIMULATION *****

RESULTS SECTION WELLDATA
RESULTS SECTION PERFS