DINÁMICA EN HIPERESPACIOS DE CONTINUOS

MELANY DAYANA MEJÍA CAVIEDES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2017

DINÁMICA EN HIPERESPACIOS DE CONTINUOS

MELANY DAYANA MEJÍA CAVIEDES

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO PARA OBTAR
AL TÍTULO DE MAGISTER EN MATEMÁTICAS

DIRECTOR
PH.D. JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2017

DEDICATORIA

*Con todo mi amor y cariño
dedico está Tesis a mis padres Edgar Mejía Mejía y
Nancy Caviedes Ruiz que siempre me han apoyado de
manera incondicional.*

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

RESUMEN

TÍTULO: DINÁMICA EN HIPERESPACIOS DE CONTINUOS*

AUTOR: MELANY DAYANA MEJÍA CAVIEDES**

PALABRAS CLAVES: Continuos, hiperespacios de continuos, sistemas dinámicos discretos, puntos periódicos, densidad de puntos periódicos, continuos casienrejados, continuos de Knaster, solenoides, funciones inducidas en hiperespacios.

DESCRIPCIÓN:

Un sistema dinámico discreto es una pareja (X, f), donde X es un espacio métrico, compacto sin puntos aislados y $f\colon X \to X$ una función continua. Un punto $x \in X$ se dice periódico si existe un entero positivo n, tal que $f^n(x) = x$; $\mathrm{Per}(f)$ denota la familia de los puntos periódicos de f. Dado X un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío, un hiperespacio de X es un subconjunto del conjunto $\mathcal{P}(X)$, al hiperespacio de todos los subconjuntos cerrados y no vacíos de X lo notaremos por 2^X, el cual lo dotaremos con la topología de Vietroris, topología que coincide con la topología generada por la métrica de Hausdorff. La función $2^f\colon 2^X \to 2^X$, definida por $2^f(A) = A$, para cada $A \in 2^X$, se llama la función inducida, además se conoce que si la función $f\colon X \to X$ es continua, entonces la función 2^f es continua. En el 2005, J. Banks en [4], demostró que para cualquier sistema dinámico se tiene que la densidad del conjunto $\mathrm{Per}(f)$, implica la densidad del conjunto $\mathrm{Per}(2^f)$; también Banks da un contraejemplo para mostrar que la afirmación reciproca no siempre es cierta.

El propósito de este trabajo es estudiar cuando la densidad de $\mathrm{Per}(2^f)$ en el hiperespacio 2^X, implica la densidad de $\mathrm{Per}(f)$ en X, dándole condiciones al espacio X o a la función $f\colon X \to X$. Nuestro trabajo está compuesto por tres capítulos:

En el Capítulo 1 presentamos las definiciones y resultados que necesitaremos para desarrollar nuestro trabajo. El Capítulo 2 mostramos condiciones en el espacio o en la función para que la afirmación sea verdadera, también construiremos continuos donde la implicación no se da. Finalmente, en el Capítulo 3 mostraremos dos clases de familias: una de continuos tipo Knaster y otra de solenoides donde se construyen homeomorfismos para cada continuo donde la afirmación no es verdadera.

*Proyecto de grado

**Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Maestría en Matemáticas. Director Dr. Javier Enrique Camargo García.

ABSTRACT

TITLE: DYNAMICAL IN HYPERSPACE OF CONTINUA***

AUTHOR: MELANY DAYANA MEJÍA CAVIEDES****

KEYWORDS: Continuous, continuous hyperspace, discrete dynamical systems, periodic points, density of periodic points, almost meshed continuum, continuous Knaster, solenoids, functions induced in hyperspace.

DESCRIPTION:
A discrete dynamic system is a pair (X, f), where X is a compact metric space without isolated points and $f\colon X \to X$ is a continuous function. A potin $x \in X$ is called a periodic point provided that ther exists a positive integer n, such that $f^n(x) = x$. The collection of all periodic points is denoted by $\mathrm{Per}(f)$. Given a compact, connected and non-empty metric space X, 2^X denotes the collection of all nonempty compact subset of X, the hyperspace 2^X is endowed with the Topology of Vietoris, topology that matches with the topology generated by the Hausdorff metric. Let $2^f\colon 2^X \to 2^X$ be defined by $2^f(A) = A$, for each $A \in 2^X$. 2^f is called the induced function, it is well known that if $f\colon X \to X$ is a continuous function, then 2^f is also a continuous function. In 2005, J. Banks in [4], showed that for any dynamic system (X, f), the density of $\mathrm{Per}(f)$ implies the density of the set $\mathrm{Per}(2^f)$; Banks also gives a counterexample in order to show that the reciprocal affirmation is not always true.

The purpose of this work is to study conditions either on the space X or on the continuous function $f\colon X \to X$, in order to have the following claim: if $\mathrm{Per}(2^f)$ is dense in the hyperspace 2^X, then $\mathrm{Per}(f)$ is dense in X. Our work is composed of three chapters:

In Chapter 1 we present the definitions and results that we will need to develop our work. Chapter 2 shows conditions either on the continuum or on the continuous function for the claim to be true, we will also construct continua where the claim is not given. Finally, in Chapter 3 we will show two family of continua: one of the type of Knaster, and another of solenoids; where a homeomorphism is constructed for each continuum and the claim is not true.

***Graduation project

****Faculty of Science. Department of Mathematics. Mastery in Mathematics. Director Ph.D. Javier Enrique Camargo García.

Introducción

Un sistema dinámico discreto corresponde a una pareja (X, f), donde X es un espacio métrico y f es una ley o función que determina cómo los puntos en el espacio se mueven con el tiempo. El objetivo principal cuándo tenemos un sistema dinámico es determinar el "comportamiento" de los puntos del espacio cuándo aplicamos reiteradamente la función f. Particularmente, es importante estudiar sus puntos periódicos de dichos sistemas, que son estados del sistema que se repiten en forma cíclica. Según Robert Devaney en [11], un sistema dinámico se dice caótico si satisface tres condiciones: es sensible a las condiciones iniciales, es transitivo y la familia de sus puntos periódicos es denso. Esta densidad puede ser interpretada como orden en todas partes en medio del caos. Existen muchas investigaciones direccionadas al estudio de los puntos periódicos en un sistema dinámico. En nuestro trabajo estudiaremos herramientas para encontrar puntos periódicos y nos enfocaremos en sistemas dinámicos muy particulares que definiremos más adelante.

Según W. Tom Ingram en [18], la primera noción del concepto de continuo fue dada en 1883 por G. Cantor en [9]. Cantor afirmaba que un continuo A es un conjunto perfecto en $\mathbb{R}^n$ tal que para cada dos puntos a, b de A y para cada $\varepsilon > 0$, le corresponde un conjunto finito de puntos $p_0 = a, p_1, p_2, ..., p_n = b$ de A tal que $|p_i - p_{i+1}| < \varepsilon$, $0 \leq i < n$. En presencia de la compacidad, esta definición dada por Cantor en $\mathbb{R}^n$ es quivalente a la definición que se conoce hoy en día de continuo. Un continuo X es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un subcontinuo es un subespacio de un espacio métrico que a su vez es un continuo. Por ejemplo, el intervalo cerrado $[0, 1]$ y la circunferencia unitaria son continuos. En [19], [21], [27] y [28] encontramos gran contenido de conceptos y teoría general de continuos.

Dado un espacio topológico X podemos definir familias de subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$ y dotarlos de una topología, estas familias se conocen como hiperespacios. El estudio de los hiperespacios aparece alrededor del año 1900 con los trabajos de Hausdorff y Vietoris. En 1905, D. Pompeiu en [32], introduce las primeras nociones de una métrica en hiperespacios, la cual fue retomada en 1914 por F.

Hausdorff, redefiniéndola de manera más general [15]. La versión dada por Hausdorff es la métrica que más aceptación tiene en la comunidad de investigadores en el área, y es conocida como la métrica de Hausdorff [28, pág. 1]. Particularmente trabajaremos con el hiperespacio 2^X formado por todos los subconjuntos cerrados no vaciós de X dotado de la topología inducida por la métrica Hausdorff. En 1922, L. Vietoris en [37], inicia el estudio de conceptos relacionados con la noción de hiperespacios, no necesariamente metrizables. En ese mismo año Vietoris, usando la estructura topológica definida por el mismo, prueba que si X es compacto entonces 2^X es compacto. Un año después prueba en [38] que la conexidad es equivalente para X y 2^X. En 1951, E. Michael muestra que en el hiperespacio 2^X de un espacio métrico y compacto y, en particular, de un continuo, la topología de Vietoris y la topología inducida por la métrica de Hausdorff coinciden, (ver [23]). Esta propiedad es bien conocida en la teoría de los hiperespacios, una prueba puede verificarse en [17, Teorema 3.1]. Como acabamos de ver es interesante y muy estudiado relacionar las propiedades del continuo X con las propiedades de su hiperespacio 2^X. Por ejemplo, sabemos que 2^X siempre es un continuo si X es un continuo; además, X es un continuo localmente conexo, si y solo si 2^X es un continuo localmente conexo, etc.

Dados un espacio métrico compacto X y una función continua $f : X \to X$, la función f induce una función en el hiperespacio 2^X, $2^f : 2^X \to 2^X$, definida de la siguiente manera: $2^f(A) = f(A)$ para cada A en 2^X. Como f es continua y cerrada, la función 2^f está bien definida. Es conocido además que 2^f es una función continua (ver [17]). Llamamos a $2^f : 2^X \to 2^X$ la función inducida por f.

Dado un espacio métrico compacto X y $f : X \to X$ una función continua podemos estudiar propiedades que cumpla la función f y se preserven en la función inducida
$2^f : 2^X \to 2^X$. Por ejemplo, en sistemas dinámicos, existen muchas investigaciones donde se estudian propiedades como transitividad, sensibilidad, puntos periódicos, recurrencia, etc., sobre continuos particulares y las relaciones entre f y 2^f. En nuestro trabajo, estudiaremos preguntas abiertas relacionadas con los puntos periódicos del sistema dinámico.

En el desarrollo del presente trabajo, se realizara un estudio de la relación que existe entre la densidad del conjunto de los puntos periódicos de la función f en un sistema dinámico discreto (X, f) y la densidad del conjunto de los puntos periódicos de la función inducida 2^f. En el primer capítulo, que titulamos Preliminares, se establecen algunos conceptos y resultados necesarios para el desarrollo de los capítulos posteriores. Se demuestra que dado un sistema dinámico discreto

(X, f) la densidad del conjunto de los puntos peródicos de la función f implica la densidad del conjunto de los puntos periódicos de la función inducida 2^f.

El Capítulo 2 titulado Densidad de puntos periódicos en hiperespacios de continuos, definimos el concepto de continuo casienrejado y mostramos que dado un sistema dinámico discreto (X, f), donde X es un continuo casi enrejado, la densidad del conjunto de los puntos peródicos de la función inducida 2^f, implica la densidad del conjunto de los puntos peródicos de la función f. En la segunda sección de este capítulo en el Teorema 2.3.2 probamos que la densidad del conjunto de los puntos periódicos de la función inducida 2^{2^f}, implica la densidad del conjunto de los puntos periódicos de la función 2^f, para cualquier función continua $f\colon X \to X$ y cualquier continuo X; este teorema muestra un resultado muy interesante a nuestro problema de investigación. Posteriormente, probaremos que dado un sistema dinámico (X, f), tal que el conjunto de los puntos periódicos de la función inducida 2^f es denso en el hiperespacio 2^X y el conjunto de los puntos periódicos de la función base f no es denso en X, podemos usando los operadores cono, cilindro y suspensión, construir nuevos ejemplos con la misma propiedad. Por último, demostramos que dada una dendrita X y una función monótona $f\colon X \to X$, tenemos que la densidad del conjunto de los puntos periódicos de la función inducida 2^f, implica la densidad del conjunto de los puntos periódicos de la función f.

En el tercero y último capítulo, titulado Dos clases de continuos indescomponibles, presentamos una familias de continuos indescomponibles, tipo arco conocidos como Continuos tipo Knaster y un homeomorfismo con la propiedead que el conjunto de los puntos periódicos de la función inducida es denso, mientras que el conjunto de los puntos periódicos de la función base tiene un único punto periódico. Por último tenemos el Teorema 3.2.2 donde probamos que para cualquier solenoide es posible construir un homeomorfismo sin puntos periódicos donde la el conjunto de los puntos periódicos de la función inducida es denso.

Los resultados no referenciados en el desarrollo del trabajo son originales de nuestra investigación.

Capítulo 1

Preliminares

En este trabajo todos los espacios serán métricos y compactos. En este capítulo, iniciamos introduciendo la noción de continuo e hiperespacio de un continuo, mostrando ejemplos y propiedades. También estudiaremos algunas herramientas básicas que usaremos para construir continuos; principalmente dedicamos una sección al estudio de los límites inversos y algunas de sus propiedades. Terminamos este capítulo, formalizando algunos aspectos relacionados con la teoría de los sistemas dinámicos discretos.

1.1. Continuos e hiperespacios

En estasección tiene formalizaremos el concepto de continuo, demostraremos que la intersección encajada de continuos es un continuo e introduciremos los conceptos propios de la teoría de hiperespacios de compactos metrizables. En base a esto, mostraremos ejemplos de continuos y algunas propiedades que usaremos en el desarrollo de este escrito.

Definición 1.1.1. Un *continuo* es un espacio métrico compacto, conexo y diferente de vacío. Un *subcontinuo* es un continuo contenido en un espacio métrico.

Ejemplo 1.1.2. Algunos ejemplos de continuos en $\mathbb{R}^2$.

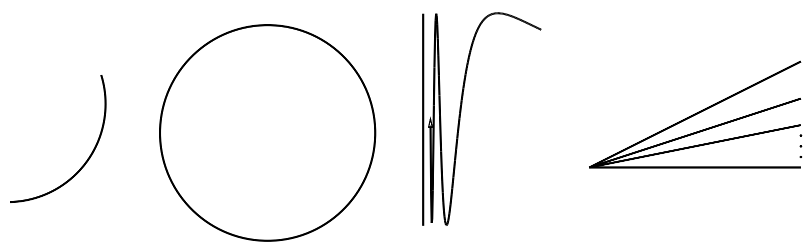
1. Un *arco* es cualquier espacio X que es homeomorfo al intervalo cerrado [0,1]. Dado que [0,1] es un continuo entonces un arco es un continuo. Si $h\colon [0,1] \to X$ es un homeomorfismo, los puntos $h(0)$ y $h(1)$ en X son llamados puntos extremos o puntos de no corte de X,(ver Figura 1-a).

2. Una *curva cerrada simple*, denotada por S^1, es un continuo homeomorfo a la circunferencia unitaria $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Dado que S^1 es

un continuo entonces una curva cerrada simple es un continuo, (ver Figura 1-b).

3. Si $W = \{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\}$ entonces $X = \operatorname{Cl}(W)$ es un continuo llamado *la curva senoidal del topólogo*. Observe que $X = W \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}$ (ver Figura 1-c).

4. Considere la sucesión armónica $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ y formemos con ella la siguiente sucesión de puntos en $\mathbb{R}^2$: definamos $a_{-1} = (1, 0)$, $a_0 = (0, 0)$ y para $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (1, \frac{1}{n})$. Ahora, para $n = 1$, unamos cada uno de los puntos a_{n-1} con el punto a_{-1} por el segmento de línea $(1 - t)a_{n-1} + ta_{-1}$. Este continuo se conoce como el *abanico armónico* (ver Figura 1-d).



(a) (b) (c) (d)

Figura 1: Continuos en el plano.

Las demostraciones de los resultados que presentamos a continuación, las mostramos para comodidad del lector y las tomamos de [27].

Teorema 1.1.3. *Sea $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos compactos tal que $X_{i+1} \subseteq X_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Si $X = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i$ y U es un subconjunto abierto en X_1 tal que $X \subseteq U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_i \subseteq U$, para cada $i \geq N$.*

Demostración. Supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $x_i \in X_i \setminus U$. Dado que $X_1 \setminus U$ es un espacio métrico compacto, podemos suponer que la sucesión $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge a un punto $p \in X_1 \setminus U$. Para cada k, tenemos que $x_i \in X_k$ para todo $i \geq k$. Por lo tanto $p \in X_k$ para cada k, y $p \in X$. Como $X \subseteq U$ y $p \in X \setminus U$ tenemos una contradicción. Por lo tanto, existe N tal que $X_i \subseteq U$ para todo $i \geq N$. $\square$

Corolario 1.1.4. *Sea $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos compactos no vacíos tal que $X_{i+1} \subseteq X_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces $X = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $X = \emptyset$. Entonces, basta tomar $U = \emptyset$ y, por el Teorema 1.1.3, existe n tal que $X_n \subseteq U$. Contradiciendo que $X_n \neq \emptyset$. Así, $X \neq \emptyset$. □

El siguiente teorema presenta uno de los objetivos de esta sección. Este resultado se conoce como el método de intersecciones anidadas para generar continuos y lo usaremos más adelante.

Teorema 1.1.5. *Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de continuos tal que $X_{i+1} \subseteq X_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Entonces, X es un continuo.*

Demostración. Por el Teorema 1.1.3 tenemos que X es un espacio métrico compacto no vacío. Ahora, supongamos que X es disconexo; es decir, existen cerrados no vacíos y disjuntos A y B, tales que $X = A \cup B$. Dado que X_1 es un espacio normal, existen abiertos disjuntos V y W de X_1 tales que $A \subseteq V$ y $B \subseteq W$. Entonces, por el Teorema 1.1.3, $X_n \subseteq V \cup W$ para algún n. Por [39, Teorema 26.6], $X_n \subseteq V$ o $X_n \subseteq W$. Como $X \subseteq X_n$, entonces $X \subseteq V$ o $X \subseteq W$, contradiciendo que A y B son no vacíos. Por lo tanto X es conexo. □

Sea X_1 un triángulo cualquiera junto con su interior, es decir "relleno". De manera inductiva construimos la sucesion de continuos $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $X_{n+1} \subseteq X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de la siguiente forma: Unimos los puntos medios de los lados de triángulo X_1 de modo que su interior queda dividido en cuatro triángulos iguales, de los cuales eliminamos el triángulo central para obtener X_2. A su vez, X_2 esta formado por 3 triángulos, con los cuales aplicamos independientemente el proceso anterior para obtener X_3, es decir, en cada uno de estos tres triángulos unimos los puntos medios de los lados y eliminamos el triángulo central, obteniéndo nueve triángulos, este será el continuo X_3. La Figura 2 representa estos tres primeros continuos de la sucesión.

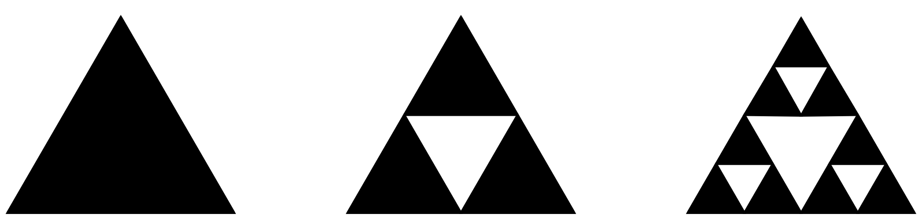


Figura 2: X_1, X_2 y X_3

Continuando de esta manera tenemos la sucesion $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $X_{n+1} \subseteq X_n$ para cada n y definimos el triángulo de Sierpiński por $X = \cap_{n\in\mathbb{N}} X_n$, entonces X

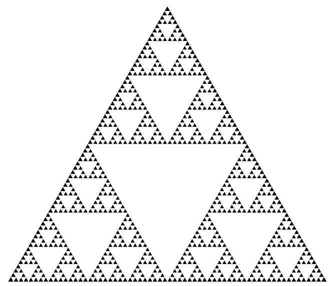


Figura 3: Triángulo de Sierpiński

es un continuo por el Teorema 1.1.5. Una idea del continuo resultante se puede observar en la Figura 3

Definición 1.1.6. Una *gráfica* es un continuo que se puede escribir como la unión de un número finito de arcos, tales que dos de los cuales o son disjuntos, se intersectan en un punto final o se intersectan en sus dos puntos finales. Además, una gráfica se dice que es un *árbol* si no tiene curvas cerradas simples.

La noción de árbol se generaliza de la siguiente manera.

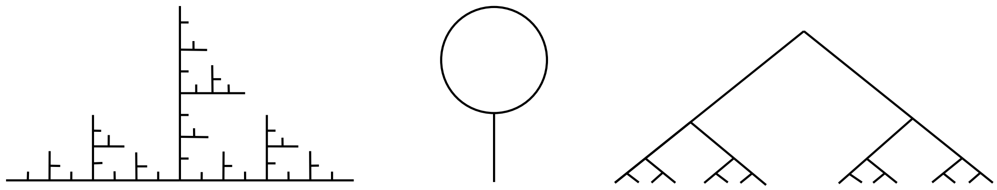
Definición 1.1.7. Decimos que un continuo D es una *dendrita*, si D es localmente conexo y no contiene curvas cerradas simples.

Si D es una dendrita y $p \in D$, entonces el orden de p, que denotamos por $\mathrm{Ord}_D(p)$, es el número de componentes conexas de $D \setminus \{p\}$. Si $\mathrm{Ord}_D(p) = 1$, decimos que p es un *punto final* y si $\mathrm{Ord}_D(p) \geq 2$ entonces decimos que p es un *punto de ramificación*. Denotemos por $\mathrm{End}(D)$ y $\mathrm{Br}(D)$ el conjunto de los puntos finales y el conjunto de los puntos de ramificación de D respectivamente. Un punto $p \in D \setminus \mathrm{End}(D)$ es llamado *punto de corte* y al conjunto de todos los puntos de corte se denota por $\mathrm{Cut}(D)$. En [19, VI, Teorema 8] se prueba que el conjnto $\mathrm{Cut}(D)$ es denso en D.

En la Figura 4 se muestran la dendrita D_3 en (a), la paleta en (b) y la dendrita de Gehman en (c). Algunos detalles de las construcciones se mostraran con detalle más adelante.

Dado X un continuo, podemos definir familias de subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$ y dotarlos de una topología, estas familias se conocen como hiperespacios de X. El hiperespacio formado por todos los subconjuntos cerrados no vacios de X se denota por 2^X. Esto es:

$$2^X := \{A \subseteq X \mid A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$$



(a) (b) (c)

Figura 4: Algunos ejemplos de dendritas y gráficas.

Definición 1.1.8. Dados A y B dos elementos de 2^X, el valor

$$\mathcal{H}(A,B) := inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(B,\varepsilon) \text{ y } B \subset N(A,\varepsilon)\}$$

define una distancia en 2^X conocida como la métrica de Hausdorff, donde $N(A,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,a) < \varepsilon \text{ para algún } a \in A\}$ y d es la métrica de X.

Dada una colección finita de subconjuntos abiertos de $X, U_1, U_2, ..., U_k$, consideramos el siguiente subconjunto de 2^X :

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_k\rangle := \left\{B \in 2^X \mid B \subseteq \cup_{i=1}^k U_i \text{ y } B \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \ldots k\}\right\}.$$

La colección de todos los posibles subconjuntos del hiperespacio 2^X de la forma $\langle U_1, U_2, ..., U_k\rangle$, donde cada U_i es un subconjunto abierto de X, es una base que induce una topología en 2^X. Esta topología es conocida como la *topología de Vietoris.* Ella coincide con la topología generada por la métrica de Hausdorff. Este resultado lo podemos encontrar en [17, Teorema 1.2, pág. 3].

Dados $U_1, \ldots, U_m$ subconjuntos abiertos de X, puesto que

$$\langle U_1, \ldots, U_m\rangle = \langle \cup_{i=1}^m U_i\rangle \cap \langle X, U_1\rangle \cap \ldots \cap \langle X, U_m\rangle,$$

entonces $\mathcal{S} = \{\langle U\rangle \mid U \text{ abierto de } X\} \cup \{\langle X, V\rangle \mid V \text{ abierto de } X\}$ es una subbase para 2^X. Además, nótese que $\langle U\rangle = \{B \in 2^X \mid B \subseteq U\}$ y $\langle X, U\rangle = \{B \in 2^X \mid B \cap U \neq \emptyset\}$

Definición 1.1.9. Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua y sobreyectiva. Definimos $2^f\colon 2^X \to 2^X$ como $2^f(A) = f(A)$ para cada $A \in 2^X$. La función 2^f la llamamos *función inducida.*

Como f es continua y cerrada en X, la función 2^f está bien definida. A continuación mostramos 2^f es continua.

Proposición 1.1.10. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua y sobreyectiva entonces la función inducida $2^f\colon 2^X \to 2^X$ es continua.*

Demostración. Dado que los abiertos de una subbase en 2^X son de la forma $\langle U\rangle$ ó $\langle X, V\rangle$, donde U y V son abiertos de X, es suficiente probar que $(2^f)^{-1}(\langle U\rangle)$ y $(2^f)^{-1}(\langle X, V\rangle)$ son abiertos, para todo U y V abiertos en X. Note que $(2^f)^{-1}(\langle U\rangle) = \langle f^{-1}(U)\rangle$, pues

$$A \in (2^f)^{-1}(\langle U\rangle) \Leftrightarrow f(A) \in \langle U\rangle \Leftrightarrow f(A) \subseteq U \Leftrightarrow A \subseteq f^{-1}(U) \Leftrightarrow A \in \langle f^{-1}(U)\rangle.$$

Además, $(2^f)^{-1}(\langle X, V\rangle) = \langle X, f^{-1}(V)\rangle$, pues

$$\begin{aligned} A \in (2^f)^{-1}(\langle X, V\rangle) &\Leftrightarrow f(A) \in \langle X, V\rangle \Leftrightarrow f(A) \cap V \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset \Leftrightarrow A \in \langle X, f^{-1}(V)\rangle. \end{aligned}$$

Así, tenemos que $\langle f^{-1}(U)\rangle$ y $\langle X, f^{-1}(V)\rangle$ son subconjuntos abiertos de 2^X, por lo tanto 2^f es una función continua.

$\square$

1.2. Límites inversos

En esta sección definiremos límite inverso como un subespacio del espacio producto $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ de una familia de espacios métricos compactos $\{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Esto nos permitirá elaborar ejemplos con propiedades interesantes, como veremos en capítulos posteriores.

Definición 1.2.1. Una *sucesión inversa* es una "doble sucesión", $(X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ donde cada X_n es un espacio métrico compacto y $f_n^{n+1}\colon X_{n+1} \to X_n$ es una función continua, para cada $n \in \mathbb{N}$. Las funciones f_n^{n+1} se conocen como funciones de ligadura. Dada una sucesión inversa $(X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, su límite inverso, denotado por $\varprojlim(X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ o X_∞, se define como

$$\varprojlim(X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \mid f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Si X_n es un continuo, para cada $n \in \mathbb{N}$, diremos que $(X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión inversa de continuos.

Las demostraciones de los siguientes resultados fueron tomadas de [27].

Teorema 1.2.2. *Sea $(X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión inversa y, para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos $A_k = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \mid f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n,\ \text{para cada}\ n \leq k\}$. Entonces:*

I) Para todo $kn\mathbb{N}$, $A_k \cong \prod_{n=k+1}^{\infty} X_n$ y por tanto, A_k es compacto y diferente de vacío.

II) Para todo $kn\mathbb{N}$, $A_{k+1} \subseteq A_k$.

III) $\varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$.

De lo anterior, $\varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ es compacto y no vacío.

Demostración. Sea $kn\mathbb{N}$, nótese que $\phi_k \colon A_k \to \prod_{n=k+1}^{\infty} X_n$, definida para cada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A_k$, por

$$\phi_k((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_n)_{n=k+1}^{\infty},$$

es un homeomorfismo, para cada $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, por el Teorema de Tychonoff A_k es compacto y no vacío, para cada $k \in \mathbb{N}$. Además, no es dificil ver que $A_{k+1} \subseteq A_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, y $\varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Finalmente, como $\varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ es una intersección de compactos encajados no vacíos, por el Teorema 1.1.3, $\varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ es compacto y diferente de vacío. $\square$

El siguiente teorema muestra que el límite inverso de una sucesión inversa de continuos es un continuo.

Teorema 1.2.3. *Sea $(X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión inversa de continuos. Entonces $\varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ es un continuo.*

Demostración. Sea A_k como en el Teorema 1.2.2, para cada $k \in \mathbb{N}$. Por [27, Teorema 2.1], A_k es un continuo, para cada $k \in \mathbb{N}$. Ahora nuestra prueba se sigue de los Teoremas 1.1.5 y 1.2.2. $\square$

Denotaremos por $f_n \colon X_\infty \to X_n$ la restricción de la proyección natural $\pi_n \colon \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \to X_n$; es decir, $f_n = \pi_n|_{X_\infty}$. A continuación mostramos cómo describir los abiertos en un límite inverso.

Proposición 1.2.4. *Sea $(X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión inversa de espacios métricos compactos con limite inverso X_∞. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea*

$$\mathcal{B}_n = \{f_n^{-1}(U_n) \mid U_n \text{ es un subconjunto abierto de } X_n\}.$$

Si $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$, entonces $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X_∞.

Demostración. Dado que X_∞ es un subconjunto de la topología producto, un abierto básico de X_∞ es de la forma

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{n_j}^{-1}(U_{n_j}),$$

donde U_{n_j} es un subconjunto abierto de X_{n_j}. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $n_k = \text{máx}\{n_1, \ldots, n_k\}$. Sea $U = \cap_{j=1}^{k}(f_{n_j}^{n_k})^{-1}(U_{n_j})$. Entonces U es un subconjunto abierto de X_{n_k} y

$$\begin{aligned} f_{n_k}^{-1}(U) &= f_{n_k}^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^{k}(f_{n_j}^{n_k})^{-1}(U_{n_j})\right) \\ &= \bigcap_{j=1}^{k}\left(f_{n_j}^{n_k} \circ f_{n_k}\right)^{-1}(U_{n_j}) = \bigcap_{j=1}^{k} f_{n_j}^{-1}(U_{n_j}). \end{aligned}$$

□

Los siguientes resultados los usaremos en construcciones más adelante. Las pruebas se pueden consultar en [21, Capítulo 2].

Teorema 1.2.5. *Sea* $(X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión inversa de espacios compactos con funciones de ligadura sobreyectivas, cuyo limite inverso es* X_∞. *Entonces* $f_n\colon X_\infty \to X_n$ *es abierta para cada* $n \in \mathbb{N}$ *si y solo si* $f_n^{n+1}\colon X_{n+1} \to X_n$ *es abierta para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.2.6. *Sean* $(X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(Y_n, g_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones inversas de espacios compactos, cuyos límites inversos son* X_∞ *y* Y_∞, *respectivamente. Si para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existe una función continua* $k_n\colon X_n \to Y_n$ *tal que* $k_n \circ f_n^{n+1} = g_n^{n+1} \circ k_{n+1}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *entonces existe una función continua* $k_\infty\colon X_\infty \to Y_\infty$ *tal que* $g_n \circ k_\infty = k_n \circ f_n$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.2.7. *Sea* $(X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(Y_n, g_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones inversas de espacios compactos, con funciones continuas sobreyectivas cuyos límites inversos son* X_∞ *y* Y_∞, *respectivamente. Suponga que para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existe una función continua* $k_n\colon X_n \to Y_n$ *tal que* $k_n \circ f_n^{n+1} = g_n^{n+1} \circ k_{n+1}$. *Si todas las funciones* k_n *son sobreyectivas, entonces la función inducida* k_∞ *es sobreyectiva.*

Terminamos esta sección mostrando cómo construir una clase especial de continuos usando límites inversos.

Definición 1.2.8. Un continuo X es *descomponible* si $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos propios de X, en caso contrario diremos que X es *indescomponible.*

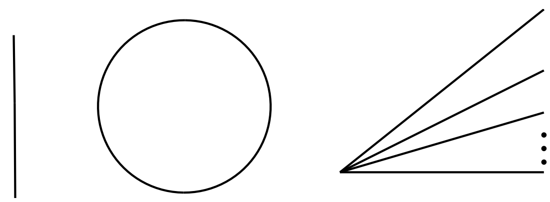


Figura 5: Continuos descomponibles.

La Figura 5 al igual que todos los ejemplos presentados hasta el momento, muestran ejemplos de continuos descomponibles.

Ahora mostramos, usando límites inversos, como podemos construir ejemplos de continuos indescomponibles; es decir, mostramos que existen continuos indescomponibles. Antes, algunos resultados importantes.

Definición 1.2.9. Una sucesión inversa $(X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de continuos es llamada una *suceción inversa indescomponible* siempre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = A_{n+1} \cup B_{n+1}$ donde A_{n+1} y B_{n+1} son subcontinuos de X_{n+1}, entonces $f_n^{n+1}(A_{n+1}) = X_n$ o $f_n^{n+1}(B_{n+1}) = X_n$.

La prueba del siguiente lema puede ser consultada en [27, Lema 2.6].

Lema 1.2.10. *Sea $(X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión inversa de espacios métricos con límite inverso X_∞. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : X_\infty \to X_n$ denota la n-ésima función proyección. Sea A un subconjunto compacto de X_∞. Entonces, $(f_n(A), f_n^{n+1} |_{f_{n+1}(A)})_{n=1}^\infty$ es una sucesión inversa con funciones de ligadura sobreyectivas y*

$$\varprojlim(f_n(A), f_n^{n+1} |_{f_{n+1}} (A))_{n=1}^\infty = A = \big[\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n(A)\big] \cap X_\infty.$$

La siguiente teorema se encuentra en [27].

Teorema 1.2.11. *Si $(X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión inversa indescomponible con límite inverso X_∞, entonces X_∞ es un continuo indescomponible.*

Demostración. Por el Teorema 1.2.3, X_∞ es un continuo. Supongamos que X_∞ es descomponible, es decir $X_\infty = A \cup B$ donde A y B son subcontinuos propios de X_∞. Por el Lema 1.2.10, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $f_n(A) \neq X_n$ y $f_n(B) \neq X_n$. Sea $k \geq n_0$; nótese que $X_{k+1} = f_{k+1}(A) \cup f_{k+1}(B)$, como $(X_n, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión inversa indescomponible, entonces $f_k^{k+1}(f_{k+1}(A)) = f_k(A) = X_k$ o $f_k^{k+1}(f_{k+1}(B)) = f_k(B) = X_k$. Esto contradice que $f_k(A) \neq X_k$ y $f_k(B) \neq X_k$. Por lo tanto X_∞ es indescomponible. $\square$

A continuación veremos dos ejemplos de continuos indescomponibles.

Ejemplo 1.2.12. Sea $\mathcal{P} = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de números primos. Definimos $f_n^{n+1}\colon S^1 \to S^1$ por $f_n^{n+1}(z) = z^{p_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $(S^1, f_n^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión inversa indescomponible. Así, por el Teorema 1.2.11 $\varprojlim(S^1, f_n^{n+1})$ es un continuo indescomponible. Este continuo se denota por $\Sigma_{\mathcal{P}}$ y se conoce como el Solenoide $\mathcal{P}$-ádico.

Ejemplo 1.2.13. Para cada entero positivo $n \in \mathbb{N}$, sean $r \in \{0, \dots, n-1\}$ y $g_n\colon [0,1] \to [0,1]$ la función definida por:

$$g_n(x) = \begin{cases} nx - r, & \text{si } r \text{ es par y } x \in [\frac{r}{n}, \frac{r+1}{n}] \subseteq [0,1]; \\ -nx + r + 1, & \text{si } r \text{ es impar y } x \in [\frac{r}{n}, \frac{r+1}{n}] \subseteq [0,1]. \end{cases}$$

La Figura 6 representa las gráficas de g_2, g_3 y g_4, respectivamente. Nótese que por [6], para cualquier par de enteros positivos n y m, $g_n \circ g_m = g_m \circ g_n = g_{nm}$. Si $M = \{n_i \in \mathbb{N}\colon i \in \mathbb{N}\}$, donde $n_i \geq 2$ para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos el continuo *tipo Knaster* $\mathcal{K}_M$, de la siguiente forma: $\mathcal{K}_M = \varprojlim\{[0,1]; g_{n_i}; i \in \mathbb{N}\}$; es decir,

$$\mathcal{K}_M = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}\colon x_i = g_{n_i}(x_{i+1}),\ \text{para todo } i \in \mathbb{N}\}.$$

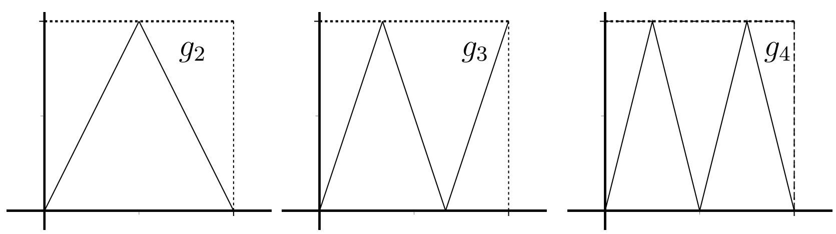


Figura 6: Funciones g_2, g_3 y g_4.

Si $[0,1] = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos propios de $[0,1]$ entonces sin perdida de generalidad supongamos que $0 \in A$ y $1 \in B$. Si $\frac{1}{n} \in A$ entonces $g_n([0, \frac{1}{n}]) = [0,1]$; es decir, $g_n(A) = [0,1]$, y si $\frac{1}{n} \in B$ entonces $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \subseteq B$ entonces $g_n([\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]) = [0,1]$; es decir, $g_n(B) = [0,1]$. Entonces $\mathcal{K}_M$ es un continuo indescomponible por el Teorema 1.2.11.

1.3. Sistemas dinámicos

Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Dado que el contradominio y el dominio de f son el mismo espacio, podemos definir nuevas funciones a partir de la composición de f consigo misma: f_0 será la función identidad, $id\colon X \to X$; $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f^2 \circ f$, $\ldots$, $f^n = f^{n-1} \circ f$. Llamaremos a estas funciones las iteradas de f. Las siguientes dos propiedades son inmediatas: Si $n, m \in \mathbb{N}$ donde $\mathbb{N}$ representa al conjunto de los números enteros no negativos, entonces $f^n \circ f^m = f^{n+m}$ y $(f^n)^m = f^{nm}$. Bajo estas condiciones diremos que la pareja (X, f) es un sistema dinámico discreto.

Definición 1.3.1. Dado un punto $x \in X$ la siguiente sucesión será la *órbita de x bajo f*

$$o\left(x, f\right) := \left\{x, f\left(x\right), f^2\left(x\right), f^3\left(x\right), \ldots\right\}.$$

La interpretación que le damos a la sucesión $o(x, f)$ es la siguiente: en el tiempo $t = 0$ un objeto se encuentra en la posición x; en el tiempo $t = 1$ el objeto ha cambiado de posición y ahora se encuentra en $f(x)$; en el tiempo $t = 2$ el objeto vuelve a cambiar de posición y se encuentra en $f\left(f\left(x\right)\right) = f^2\left(x\right)$, y así sucesivamente.

Definición 1.3.2. Sea $f : X \to X$. Decimos que x es un *punto periódico* de f; o tiene una órbita periódica bajo f; si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Al menor de estos números le llamamos el *período* de x. Si $f(x) = x$; decimos que x es un punto fijo (además de ser un punto periódico de período 1). Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotaremos por $\mathrm{Per}(f)$.

Sea $T\colon\ [0, 1] \to [0, 1]$ dada por

$$T(x) := \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 2 - 2x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Esta función se conoce como la tienda, y siempre la denotaremos con la letra T.

Mostremos a continuación la existencia de órbita fija, periódica y no periodica para la función T.

Comencemos por los puntos fijos de T. Si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y es punto fijo de T, entonces por un lado tenemos que $T\left(x\right) = x$ y, por el otro lado tenemos que, $T\left(x\right) = 2x$. Por lo tanto, $x = 2x$, luego $x = 0$, es decir;

$$o\left(0, T\right) = \{0, 0, 0, \ldots\} = \{0\}.$$

Si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ y es un punto fijo de T, entonces $2 - 2x = x$, luego $x = \frac{2}{3}$, así;

$$o\left(\frac{2}{3}, T\right) = \left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \ldots\right\} = \left\{\frac{2}{3}\right\}.$$

Además estos puntos son los únicos dos puntos fijos de T. Por otro lado como $T\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ y $T(1) = 0$, entonces los puntos $\frac{1}{2}$ y 1 no son puntos periódicos bajo T, es decir, $\frac{1}{2}, 1 \notin Per(T)$.

Ahora busquemos un punto $x_0 \in [0,1]$ tal que $T(x_0) \neq x_0$ y $T^2(x_0) = x_0$. Obsérvese que si un punto $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ cumple estas dos condiciones, entonces $T(x_0) = 2x_0$ luego $T(x_0) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, entonces $T^2(x_0) = 2 - 2(2x_0)$. Por lo tanto, $T^2 = (x_0) = x_0$ implica $2 - 4x_0 = x_0$, luego $x = \frac{2}{5}$. Como $T\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}$ y $T^2\left(\frac{2}{5}\right) = T\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5}$, tenemos que

$$o\left(\frac{2}{5}, T\right) = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \dots\right\} = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}.$$

Es decir, $\frac{2}{5} \in Per(T)$ y su periodo es 2.

Para ver que T tiene un punto periódico de periodo 3 seguimos un razonamiento similar. Supongamos que $T(x_0) \neq x_0$, $T^2(x_0) \neq x_0$ y $T^3(x_0) = x_0$, y que tanto x_0 como $T(x_0)$ están en el intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Como $\frac{1}{2} < T^2(x_0)$, llegamos a que $2 - 2(4x_0) = x_0$, luego $x_0 = \frac{2}{9}$ es un punto periódico bajo la función T de periodo 3. Además,

$$o\left(\frac{2}{9}, T\right) = \left\{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \dots\right\} = \left\{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right\}.$$

De aquí en adelante X representa un espacio métrico compacto no vacío sin puntos aislados, y $f\colon X \to X$ una función continua.

El sistema dinámico (X, f) induce nuevos sistemas ahora definidos en los hiperespacios de X, recordemos que un hiperespacio de X es un subconjunto del conjunto de partes de X y el hiperespacio formado por todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X se denota por 2^X.

$$2^X := \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y no vacío }\}.$$

A continuación presentamos un resultado que nos facilitará las pruebas de algunos teoremas más adelante.

Teorema 1.3.3. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Entonces, el conjunto de los puntos periódicos de 2^f es denso en 2^X si y solo si para todo abierto U de X, existen $A \in 2^X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $A \subseteq U$ y $f^n(A) = A$.*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{Per}(2^f)$ es denso en 2^X. Sea U un subconjunto abierto de X tenemos que $\langle U \rangle$ es un subconjunto abierto en 2^X, entonces existen $A \in 2^X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $A \subseteq U$ y $f^n(A) = A$.

Ahora supongamos que para todo abierto U de X, existen $A \in 2^X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $A \subseteq U$ y $f^n(A) = A$. Sea $\langle U_1, \dots U_k \rangle$ un subconjunto abierto de 2^X, como U_i es abierto de X para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces existen $A_i \in 2^X$ y $m_i \in \mathbb{N}$ tales que $A_i \subseteq U_i$ y $f^{m_i}(A_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Sea $B = \bigcup_{i=i}^{k} A_i$ y $m = \text{m.c.m}\{m_1, \ldots, m_k\}$, entonces

$$f^m(B) = f^m(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \bigcup_{i=1}^{k} f^m(A_i) = \bigcup_{i=i}^{k} A_i = B.$$

□

En el 2005, Banks en [4, Lema 1] muestra el siguiente resultado.

Teorema 1.3.4. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si el conjunto de los puntos periódicos de f es denso en X, entonces el conjunto de los puntos periódicos de la función 2^f es denso en 2^X*

Demostración. Como $\text{Per}(f)$ es denso en X, tenemos que dado cualquier abierto U de X existen $x \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(x) = x$. Sean $A = \{x\}$ un compacto tal que

$$(2^f)^n(A) = f^n(\{x\}) = \{f^n(x)\} = \{x\} = A$$

Así por el Teorema 1.3.3 tenemos que $\text{Per}(2^f)$ es denso en 2^X. □

En los capítulos siguientes estudiaremos el problema bajo qué condiciones la densidad de los puntos periódicos de la función inducida 2^f implica la densidad de los puntos periódicos de la función base f; es decir, estudiaremos el recíproco del Teorea 1.3.4.

Capítulo 2

Densidad de puntos periódicos en hiperespacios de continuos

Una consecuencia del Teorema 1.3.4 en que si $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X entonces $\mathrm{Per}(2^f)$ es denso en 2^X, una pregunta natural seria bajo que condiciones el recíproco es cierto, es decir, cuándo la densidad de $\mathrm{Per}(2^f)$ implica la densidad de $\mathrm{Per}(f)$. En este capítulo Mostraremos algunas condiciones sobre el espacio o la función para que esta implicación se cumpla. También daremos ejemplos donde la implicación no es cierta. En la primera sección del capítulo probaremos que sobre una clase amplia de continuos la implicación es válida.

2.1. Continuos casienrejados

El resultado a destacar en esta sección es el Teorema 2.1.6, donde probaremos que sobre la clase de los continuos casienrejados, la densidad de $\mathrm{Per}(f)$ implica la densidad de $Per(2^f)$. Tambien probaremos que la clase de los continuos casienrejados, entre otros, contiene todas las gráficas y dendritas tales que el conjunto de sus puntos finales es cerrado o numerable; así, por nuestro Teorema 2.1.6 implica que si el espacio dado es una gráfica o una dendrita con el conjunto de sus puntos finales cerrado o numerable, nuestra implicación inversa se cumple.

Sea X un espacio métrico compacto. Si A es un arco en X con puntos finales a y b ($a \neq b$), entonces decimos que A es un *arco libre* en X si $A \setminus \{a, b\}$ es abierto en X. Dado X un continuo sea $\mathcal{FA}(X) = \cup\{\mathrm{Int}_X(J) \mid J \text{ es un arco libre de } X\}$ y $\mathcal{F}(X) = X \setminus \mathcal{FA}(X)$.

Definición 2.1.1. Dado un continuo X. Si el conjunto $\mathcal{FA}(X)$ es denso en X, decimos que X es un continuo *casienrejado*. Un continuo casienrejado X es *enrejado* si X tiene una base de vecindades $\mathcal{B}$ tal que para todo $B \in \mathcal{B}$ se tiene que

$B \setminus \mathcal{F}(X)$ es conexo.

A continuación mostramos que la curva senoidal cerrada del topólogo, el abanico armónico y el arete hawaiano son ejemplos de continuos casienrejados que no son enrejados, algunos de estos ejemplos se definierón en la sección 1.1, en el Ejemplo 1.1.2.

Ejemplo 2.1.2. Sea $X = \mathrm{Cl}(W)$, donde $W = \{(x, \mathrm{sen}(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\}$. Nótese que $X \setminus W$ es abierto de X tal que todo arco contenido en $X \setminus W$ es un arco libre. Así $\mathcal{FA}(X) = W$, por lo tanto X es casienrejado. Utilizando un argumento similar al anterior, se puede probar que el abanico armónico es casienrejado, (ver Fifura 7). Además, si U es abierto de $X \setminus W$ entonces $U \setminus \mathcal{F}(X) = U \cap W$ y claramente $U \cap W$ no es conexo, por lo tanto X no es enrejado. De manera similar se puede probar que el abanico armónico no es enrejado.

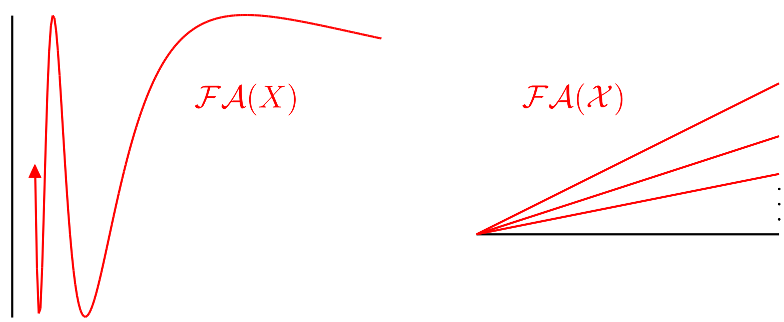


Figura 7: Curva senoidal del topólogo y Abanico armónico.

Ejemplo 2.1.3. Sea $C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - \frac{1}{n})^2 = \frac{1}{n^2}\}, \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces definamos $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. El continuo C se conoce como el *arete hawaiano*. Nótese que $C_n \setminus \{(0, 0)\}$ es un abierto de C tal que todo arco contenido en $C_n \setminus \{(0, 0)\}$ es un arco libre, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $\mathcal{FA}(C) = \cup_{n \in \mathbb{N}}(C_n \setminus \{(0, 0)\})$ y por lo tanto C es casienrejado, (ver Figura 8). Además, sea U abierto de C tal que $(0, 0) \in U$ entonces $U \setminus \mathcal{F}(X) = U \cap \mathcal{FA}(C)$ y claramente $U \cap \mathcal{FA}(C)$ es disconexo, por lo tanto C no es enrejado.

Ahora veamos dos ejemplos de continuos casienrejados que son enrejados.

Ejemplo 2.1.4. Definamos recursivamente el siguiente continuo. Sea $A_0 = \{0, 1\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0, 1\}$ y $A_{n+1} = A_n \cup (x_i)_{i=1}^{2^n} \times [0, \frac{1}{2^n}] \cup [0, 1] \times \{\frac{1}{2^{n+1}}\}, \forall n \in \mathbb{N}$, donde

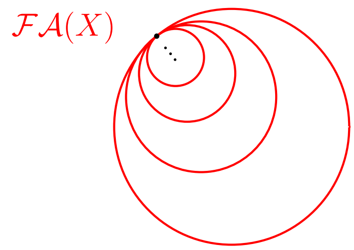
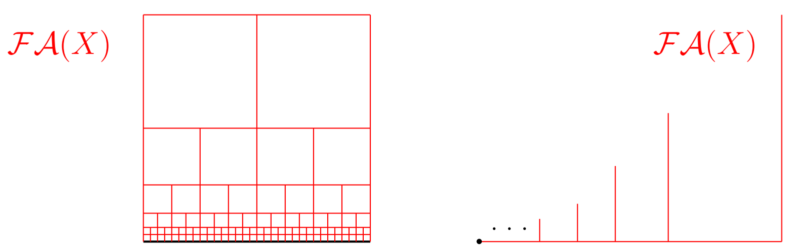


Figura 8: Arete Hawaiano.

$x_i = \frac{2(n+1-i)+1}{n}$. Entonces el contino $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es casienrejado (ver Figura 9-a). Ahora definamos $G = ([0,1] \times \{0\}) \cup \left(\bigcup \left\{ \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times \left[0, \frac{1}{n}\right] : n \geq 2 \right\}\right)$, G es un continuo casienrejado, (ver Figura 9-b). Además, nótese que para todo U abierto de $D \setminus \mathcal{FA}(D)$ se tiene que $U \setminus \mathcal{F}(D)$ es un continuo, por lo tanto D es enrejado. De manera similar se puede probar que G es enrejado.



(a) (b)

Figura 9: Dos continuos casienrejados que son enrejados.

El siguiente teorema es de suma importancia para demostrar los Colorarios 2.1.7 y 2.1.8, su demostración se encuentra en [16, Teorema 6].

Teorema 2.1.5. *La clase de los continuos enrejados contiene a la clase de las gráficas y la clase de las dendritas con el conjunto de los puntos finales cerrado o numerable.*

La demostración del siguiente teorema fue tomada de [3, Teorema 6.4].

Teorema 2.1.6. *Sea X un continuo casienrejado. Si $f : X \to X$, es una función continua tal que* $\mathrm{Per}(2^f)$ *es denso en* 2^X, *entonces* $\mathrm{Per}(f) \cap (a, b) \neq \emptyset$.

Demostración. Sea U un subconjunto abierto no vacio de X. Como X es casienrejado, el conjunto $\mathcal{FA}$ es denso en X, entonces existe $p \in U \cap \mathcal{FA}$. Sea J un arco libre en X tal que $p \in \operatorname{Int}_X(J)$. Entonces $p \in U \cap \operatorname{Int}_X(J)$, así existen $a, b \in U \cap \operatorname{Int}_X(J)$ tal que $p \in (a,b) \subseteq [a,b] \subseteq U \cap \operatorname{Int}_X(J)$.

Sean $[a,b]$ un arco libre en X con $a \neq b$, $p \in (a,b)$ y $a_1, b_1 \in [a,b]$ tales que $a < a_1 < p < b_1 < b$. Claramente (a_1,p) y (p,b_1) son abiertos en X, entonces $\langle (a_1,p) \rangle$ y $\langle (p,b_1) \rangle$ son abiertos en 2^X. Como $\operatorname{Per}(2^f)$ es denso en 2^X, existen $A_1, A_2 \in 2^X$ y $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$2^{f^{n_1}}(A_1) = A_1 \subseteq (a_1,p) \subseteq [a_1,b_1] \subseteq (a,b) \text{ y}$$

$$2^{f^{n_2}}(A_2) = A_2 \subseteq (p,b_1) \subseteq [a_1,b_1] \subseteq (a,b).$$

Ahora miremos los casos en los que A_1 o A_2 son finitos o infinitos:

Caso 1 Supongamos que A_1 es finito entonces $f^{n_1}|_{A_1} : A_1 \to A_1$ es una permutación de los elementos de A_1 y como las permutaciones de conjuntos finitos tienen orden finito, tenemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(f^{n_1}|_{A_1})^k = id_{A_1}$. De ahí $A_1 \subseteq \operatorname{Per}(f)$, por lo tanto $\operatorname{Per}(f) \cap (a,b) \neq \emptyset$. Similarmente se prueba para cuando A_2 es finito.

Caso 2 Supongamos que A_1 y A_2 son infinitos. Sean

$$c_1 = \text{mín}(A_1), d_1 = \text{máx}(A_1) \text{ y } c_2 = \text{mín}(A_2), d_2 = \text{máx}(A_2)$$

entonces $c_1, d_1 \in A_1 \subseteq [c_1,d_1] \subseteq (a_1,p)$, $c_2, d_2 \in A_2 \subseteq [c_2,d_2] \subseteq (a_2,p)$ y $c_1 < d_1 < p < c_2 < d_2$. Sea $n = \text{m.c.m}(n_1,n_2)$ entonces $2^{f^n}(A_1) = A_1$ y $2^{f^n}(A_2) = A_2$.

Veamos que:

(1) existen $c_1', d_1' \in [c_1,d_1]$ tales que $f^n(c_1') = c_1$, $f^n(d_1') = d_1$ y $(c_1', d_1') \cap (f^n)^{-1}(\{c_1, d_1\}) = \emptyset$.

En efecto: sean

$$x = \text{máx}((f^n)^{-1}(\{c_1\}) \cap [c_1,d_1]) \text{ e } y = \text{mín}((f^n)^{-1}(\{d_1\}) \cap [c_1,d_1]).$$

Entonces $x \neq y$. Si $x < y$ definimos $c_1' = x$ y $d_1' = y$. Entonces $c_1' < d_1'$ y por la forma en la que se definieron x e y tenemos que los puntos c_1' y d_1' satisface ***(1)***.

Ahora supongamos que $y < x$. Definamos

$$c_1' = \text{mín}((f^n)^{-1}(\{c_1\}) \cap [y,x]) \text{ e } d_1' = \text{máx}((f^n)^{-1}(\{d_1\}) \cap [y,c_1']).$$

Entonces $d_1' < c_1'$ y los puntos c_1', d_1' satisfacen ***(1)***. Esto completa la prueba de ***(1)***.

Haciendo un proceso similar a la prueba de ***(1)*** se puede probar que:

(2) existen $c_2', d_2' \in [c_2, d_2]$ tales que $f^n(c_2') = c_2$, $f^n(d_2') = d_2$ y $(c_2', d_2') \cap (f^n)^{-1}(\{c_2, d_2\}) = \emptyset$.

Por las propiedades de los puntos c_1' y d_1' dadas en ***(1)***, por [27, Teorema 8.14] y el hecho que $[c_1, d-1]$ es un arco libre en X, el conjunto $f^n([c_1', d_1'])$ satisface una de las siguientes dos condiciones:

(3) $f^n([c_1', d_1']) = [c_1, d_1]$;

(4) $f^n([c_1', d_1'])$ es un subcontinuo localmente conexo de X tal que $c_1, d_1 \in f^n([c_1', d_1'])$ y $f^n([c_1', d_1']) \cap (c_1, d_1) = \emptyset$.

Usando un razonamiento similar se prueba que el conjunto $f^n([c_2', d_2'])$ satisface una de las siguientes dos condiciones:

(5) $f^n([c_2', d_2']) = [c_2, d_2]$;

(6) $f^n([c_2', d_2'])$ es un subcontinuo localmente conexo de X tal que $c_2, d_2 \in f^n([c_2', d_2'])$ y $f^n([c_2', d_2']) \cap (c_2, d_2) = \emptyset$.

Supongamos que $f^n([c_1', d_1']) = [c_1, d_1]$. Dado que $[c_1', d_1']$ es arco conexo en el $[c_1, d_1]$ tal que $f^n(c_1') = c_1$ y $f^n(d_1') = d_2$, existe un punto fijo de f^n en $[c_1', d_1']$. Esto implica que $\mathrm{Per}(f) \cap (a, b) \neq \emptyset$. Si $f^n([c_2', d_2']) = [c_2, d_2]$, entonces de manera similar a lo anterior existe un punto fijo de f^n en $[c_2', d_2']$ y entonces $\mathrm{Per}(f) \cap (a, b) \neq \emptyset$.

Supongamos ahora las condiciones ***(4)*** y ***(6)***. Por ***(4)*** y [27, Teorema 8.14] el conjunto $f^n([c_1', d_1'])$ contiene un arco B_1 con punto finales c_1 y d_1 tales que $B_1 \subseteq X \setminus (c_1, d_1)$. Como $[a, b]$ es un arco libre en X y los arcos en $[a, b]$ son únicos, el subarco $[d_1, b]$ esta contenido en B_1. En particular

$$[c_2', d_2'] \subseteq [d_1, b] \subseteq B_1 \subseteq f^n([c_1', d_1']).$$

Procediendo de forma similar a lo anterior, supongamos ahora ***(6)*** tenemos que existe B_2 un arco con puntos dinales c_2 y d_2 asi que $B_2 \subseteq X \setminus (c_2, d_2)$. Por lo tanto

$$[c_1', d_1'] \subseteq [a, c_2] \subseteq B_2 \subseteq f^n([c_2', d_2']).$$

Por lo que no es dificil ver que existen $c_1^*, d_1^* \in [c_1', d_1']$ tales que $f^n([c_1^*, d_1^*]) = [c_2', d_2']$. Por otro lado tambien tenemos que existen $c_2^*, d_2^* \in [c_2', d_2']$ tales que $f^n([c_2^*, d_2^*]) = [c_1', d_1']$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}[c_1^*, d_1^*] &= f^n([c_2^*, d_2^*]) \subseteq f^n([c_2', d_2']) \\ &= f^n(f^n([c_1^*, d_1^*])) \\ &= f^{2n}([c_1^*, d_1^*]) \subseteq (a, b).\end{aligned}$$

De aquí se sigue que existe un punto fijo de f^{2n} en $[c_1^*, d_1^*] \subseteq (a, b)$. Por lo tanto $\mathrm{Per}(f) \cap (a, b) \neq \emptyset$.

Así de los ***Casos 1*** y ***2*** tenemos que $\mathrm{Per}(f) \cap (a, b) \neq \emptyset$. Esto implica que $\mathrm{Per}(f) \cap U \neq \emptyset$, así $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X.

$\square$

Los Teoremas 2.1.6 y 2.1.5 dejan como consecuencia los siguentes dos colorarios:

Corolario 2.1.7. *Sea G un gráfica y $f\colon G \to G$ una función continua. Si $\mathrm{Per}(2^f)$ es denso en 2^G, entonces $\mathrm{Per}(f)$ es denso en G.*

Corolario 2.1.8. *Sean D un dendrita con el conjunto de sus puntos finales cerrado o numerable y $f\colon D \to D$ una función continua. Si $\mathrm{Per}(2^f)$ es denso en 2^D, entonces $\mathrm{Per}(f)$ es denso en D.*

Proposición 2.1.9. *Existe una dendrita tal que el conjunto de sus puntos finales no es denso ni numerable.*

Demostración. Sea D_3 el continuo definido inductivamente de la siguiente forma:

La gráfica A_1 es la unión de tres arcos libres maximales unidos por el punto $(0,0)$, $A_1 = [-1,0] \times \{0\} \cup [0,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0,1]$. En cada punto medio de estos arcos libres unimos un arco de longitud menor obteniendo la gráfica A_2 como la unión de nueve arcos libres maximales, $A_2 = A_1 \cup [0, \frac{1}{4}] \times \{\frac{1}{2}\} \cup \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \times [0, \frac{1}{4}]$, como se muestra en la Figura 10. De manera similar la gráfica A_3 se construye tomando la gráfica A_2 y uniendo una arco libre de longitud más pequeña en cada uno de los puntos medios de los nueve arcos libres maximales de la gráfica A_2 obteniendo la gráfica A_3 como la unión de veintisiete arcos libres maximales, $A_3 = A_2 \cup \{-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\} \times [0, \frac{1}{8}] \cup \{\frac{1}{8}\} \times [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}] \cup [0, \frac{1}{8}] \times \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\} \cup [-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}] \times \{\frac{1}{2}\} \cup [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}] \times \{\frac{1}{2}\}$, como se muestra en la Figura 10.

De manera inductiva para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la gráfica A_n y $D_3 = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$. La Figura 11 muestra una representación de D_3. En [27, cap. X] se puede verificar que D_3 es efectivamente una dendrita con las propiedades descritas en nuestra proposición.

$\square$

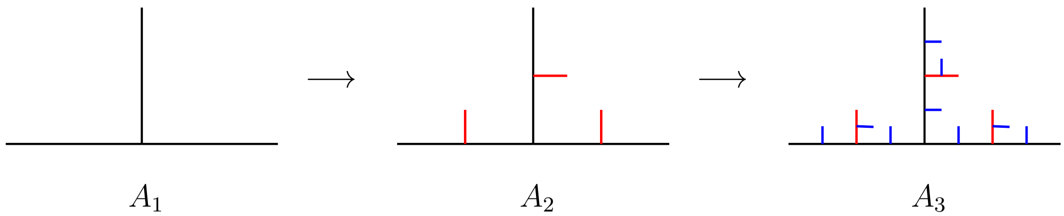


Figura 10: Paso 1, 2 y 3 de la construción de D_3.

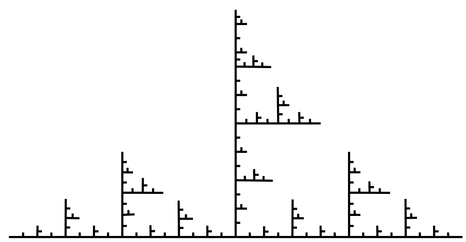


Figura 11: Dendrita D_3.

Consideramos importante mencionar que D_3 se conoce como la dendrita universal de orden 3. En la teoria de continuos entendemos que dada un clase de espacios $\mathcal{S}$ y un elemento $U \in \mathcal{S}$, decimos que U es *universal* para la clase $\mathcal{S}$ si cada elemento de $\mathcal{S}$ se puede encajar en U; es decir, para todo $X \in \mathcal{S}$ existe un homeomorfismo $h\colon X \to h(X) \subset U$. Así, D_3 es universal de orden 3 porque para cualquier dendrita X tal que todos sus puntos de ramificación son a lo más de orden 3, existe un encaje $h : X \to D_3$. Si modificamos la construción de D_3 de tal manera que en cada paso de la construción los puntos de ramificación tengan orden m, obtenemos la dendrita D_m que es *la dendrita universal de orden m.* En particular, podemos imaginar este proceso uniendo una cantidad numerable de segmentos de manera que no se pierda la conexidad local obtenemos *la dendrita universal,* denotada por D_ω.

Además las dendritas universales D_n tienen la propiedad de que todos sus puntos de ramificación tienen orden n y para cualquier arco $\alpha \subset D_n$ se tiene que $\overline{\alpha \cap Br(D_n)} = \alpha$ [27]. Otro ejemplo de un espacio universal más conocido es el Cubo de Hilbert, definido por el producto numerable del intervalo $[0, 1]$ y denotado como I^∞. El Cubo de Hilbert es un continuo y además para todo continuo X existe un subcontinuo Y de I^∞ tal que X es homeomorfo a Y [39, Teorema 23.1]. Las dendritas universales de orden n son continuos que no tienen arcos libres por lo tanto estas dendritas no son casienrejados. Además el conjuntos $\mathrm{End}(f)$ es denso en D; es decir, $\mathrm{End}(f)$ no es cerrado.

En el 2009, en [25] el profesor Héctor Méndez plantea la siguiente pregunta:

Pregunta 2.1.10. *Sea D un dendrita y $f\colon D \to D$ una función continua. ¿Si $\mathrm{Per}(2^f)$ es denso en 2^D, entonces $\mathrm{Per}(f)$ es denso en D?*

En el 2017, en [1], los autores muestran una función continua de una dendrita en si misma con la propiedad de que el conjunto de los puntos periódicos de la función inducida es denso mientras que el conjunto de los puntos periódicos de la función base no lo es. Esto responde de manera negativa a la conjetura planteada por el profesor Héctor Méndez en [25].

2.2. Odómetro

En esta sección daremos un ejemplo de un sistema dinámico discreto $(\mathcal{C}, \mathcal{O})$ tal que el conjunto de los puntos periódicos de la función inducida es denso mientras que el conjunto de los puntos periódicos de la función base es vacío. Dicha función es conocida como la máquina sumadora o en algunos casos como el odómetro y $\mathcal{C}$ como el espacio de Cantor. También mostraremos algunas propiedades que nos serán de gran útilidad para construir nuestro ejemplo de que no siempre se tiene el reciproco del Teorema 1.3.4.

La siguiente definición que presentaremos fue tomada de [27, Definición 7.5]

Definición 2.2.1 (Conjunto Ternario de Cantor)**.** El conjunto ternario de Cantor o espacio de Cantor es un subespacio $\mathcal{C}$ de $[0,1]$, definido por

$$\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i,$$

donde $C_1 = [0,1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y asumiendo de forma inductiva que hemos definido C_i, C_{i+1} se define mediante la eliminación en C_i del tercio-medio del intervalo abierto de cada componente de C_i. Un espacio de Cantor es cualquier espacio homeomorfo al espacio producto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, los detalles se pueden consultar en [19] y [39].

Lema 2.2.2. *Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor. Entonces*

(1) *Dado cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ donde cada D_i es un subconjunto no vacio y compacto, y $D_i \cap D_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.*

(2) *Dado cualquier $m \in \mathbb{N}$, y cualquier D_i en (1), $D_i = \bigcup_{j=1}^{m} D_{i,j}$ donde cada $D_{i,j}$ es un subconjunto no vacio y compacto, y $D_{i,j} \cap D_{i,k} = \emptyset$ para todo $j \neq k$.*

Demostración. Supongamos que $n > 1$. De la construcción intersección anidada utilizada para definir $\mathcal{C}$ en la Definición 2.2.1. Es fácil encontrar un l suficientemente grande tal que para todo C_l, dado en la Definición 2.2.1, existan $n-1$ puntos $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$ en $[0,1] \setminus C_l$, con la propiedad de que cualesquiera dos de estos puntos estan en diferentes componentes de $\mathcal{C} \setminus C_l$ y

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < 1 = t_n.$$

Sea $D_i = [t_{i-1}, t_i] \cap \mathcal{C}$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$. Entonces, es fácil ver que los $D_1, \cdots, D_n$ satisfacen *(1)*.

Para demostrar *(2)* simplemente observe que la idea usada en la prueba de *(1)* puede aplicarse a cualquiera de los intervalos $[\text{ínf}\, D_i, \sup D_i]$, $1 \leq i \leq n$ para obtener los conjuntos deseados $D_{i,1}, D_{i,2}, \cdots, D_{i,m}$.

Esto completa la prueba del lema. $\square$

A continuación definiremos una función del conjunto de Cantor en si mismo y una base para la topología de Cantor que será de gran utilidad más adelante.

Definición 2.2.3. Sean $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y $\mathcal{O} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ una función dada por

$$\mathcal{O}((x_i)_{i=1}^{\infty}) = \begin{cases} (0,0,0,0,\ldots) & si\ x_i = 1,\ \forall i \in \mathbb{N} \\ (0,\ldots,\underbrace{1}_{x_i}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots) & si\ i = \text{mín}\{i \in \mathbb{N} : x_i = 0\}. \end{cases}$$

Esta función se conoce como la *máquina sumadora* y en algunos casos como el *odómetro*. El siguiente conjunto

(1)
$$B = \{[\omega] \mid \omega \in \{0,1\}^n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$$

donde $[\omega] = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{C} \mid x_i = \omega_i, \text{ para cada } i = \{1,2,\ldots,n\}\}$ es una base para la topología de $\mathcal{C}$.

En la Figura 12 tenemos el comportamiento del odómetro sobre los abiertos básicos de longitud 1 y 2 descritos en ***(1)***. Note que si la longitud del abierto básico es 1 tenemos los abiertos $[0]$ y $[1]$, donde $\mathcal{C} = [0] \cup [1]$. Si aplicamos el odómetro a cada uno de los abiertos básicos tenemos que $\mathcal{O}([0]) = [1]$ y $\mathcal{O}([1]) = [0]$; es decir, $\mathcal{O}^2([0]) = [0]$, (se forma un ciclo de orden 2). Además $[0] \cap [1] = \emptyset$, como se muestra en la Figura 12.

De manera similar cuando la longitud del abierto básico es 2 obtenemos los abierto $[00], [01], [10]$ y $[11]$, donde $\mathcal{C} = [00] \cup [01] \cup [10] \cup [11]$. Entonces $\mathcal{O}([00]) = [10]$, $\mathcal{O}([10]) = [01]$, $\mathcal{O}([01]) = [11]$, y $\mathcal{O}([11]) = [00]$; es decir, $\mathcal{O}^4([00]) = [00]$, formando un ciclo de orden 4. Además los abiertos básicos $[00], [01], [10]$ y $[11]$ son disjuntos dos a dos, como se muestra en la Figura 12.

Así si la longitud de los abiertos básicos es $k \in \mathbb{N}$, obtnemos 2^k abiertos básicos denotatos por $[\omega_i]$ con $i \in \{1, \ldots, 2^k\}$ donde $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{2^k} [\omega_i]$, $\mathcal{O}^{2^k}([\omega_i]) = [\omega_i]$, para todo $i \in \{1, \ldots, 2^k\}$ y si $N < 2^k$ se tiene que $\mathcal{O}^N([\omega_i]) = [\omega_j]$, donde $i \neq j$. Además $[\omega_i] \cap [\omega_j] = \emptyset$, si $i \neq j$.

Esta observación que se puede extrapolar a abiertos de cualquier longitud nos será de gran ayuda para la demostración de la sigueinte proposición.

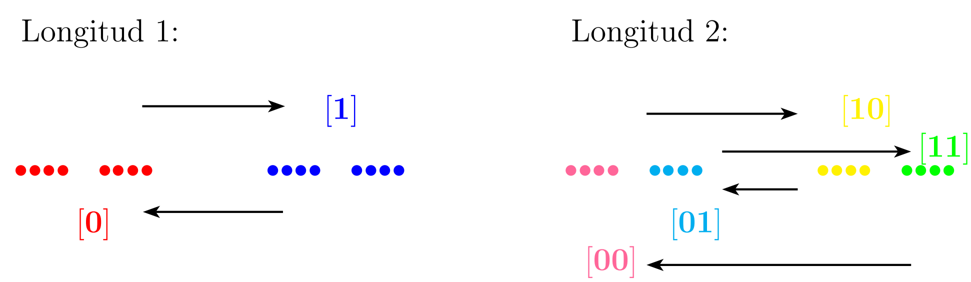


Figura 12: Comportamiento del odómetro sobre los básicos de longitud 1 y 2.

En el resto de la sección a continuación mostraremos una serie de propiedades que nos llevarán a clasificar el odómetro como un ejemplo sobre un compacto tal que el conjunto $\mathrm{Per}(2^{\mathcal{O}})$ es denso en $2^{\mathcal{C}}$ y el conjunto $\mathrm{Per}(\mathcal{O})$ es vacío. Estas propiedades las usaremos para construir nuevos ejemplos más adelante.

Proposición 2.2.4. *Si $\mathcal{C}$ es el espacio de Cantor y $\mathcal{O} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ el odómetro, entonces $\mathcal{O}$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Observe que para probar que $\mathcal{O} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un homeomorfismo es suficiente con mostrar que la función $\mathcal{O}$ es biyectiva y continua. En efecto.

- $\mathcal{O}$ es inyectiva:

  Sean $(x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}$ dos elementos de $\mathcal{C}$ con $(x_i)_{i=1}^{\infty} \neq (y_i)_{i=1}^{\infty}$ entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $j = \text{mín}\{i \mid x_i \neq y_i\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x_j = 0$ y $y_j = 1$. Sea $k = \text{mín}\{i \mid x_i = 0\}$ entonces tenemos dos caso:

Caso 1 Si $k < j$ tenemos que:

$\mathcal{O}((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (0, \ldots, 0, 1, x_{k+1}, \cdots x_j, \cdots)$ y

$\mathcal{O}((y_i)_{i=1}^{\infty}) = (0, \ldots, 0, 1, x_{k+1}, \cdots, y_j, \cdots)$

así $\mathcal{O}((x_i)_{i=1}^{\infty}) \neq \mathcal{O}((y_i)_{i=1}^{\infty})$

Caso 2 Si $k > j$ y $j < l = \text{mín}\{i \mid y_i = 0\}$ tenemos que:

$\mathcal{O}((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (0, \ldots, 0, 1, x_{j+1}, \cdots)$ y

$\mathcal{O}((y_i)_{i=1}^{\infty}) = (0, \ldots, 0, \underbrace{0}_{y_j}, \cdots, 1, y_{l+1}, \cdots)$

así $\mathcal{O}((x_i)_{i=1}^{\infty}) \neq \mathcal{O}((y_i)_{i=1}^{\infty})$

- $\mathcal{O}$ es sobre:

  Sean $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$ y $j = \text{mín}\{i \mid y_i = 1\}$. Entonces

  $\exists (x_i)_{i=1}^{\infty} = (1, 1, \cdots, \underbrace{0}_{x_j}, y_{j+1}, \cdots) \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{O}((x_i)_{i=1}^{\infty}) = ((y_i)_{i=1}^{\infty})$.

- $\mathcal{O}$ es continua:

  Sean $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$ y U un abierto de $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{O}((x_i)_{i=1}^{\infty}) \in U$. Como B es base, existe $\omega \in \{0,1\}^l$ tal que $\mathcal{O}(x) \in [\omega] \subset U$ para algún $l \in \mathbb{N}$. Dado $k > l$ sabemos que $\bigcup_{|s|=k}[s] = \mathcal{C}$, existe $s \in \{0,1\}^k$ tal que $x \in [s]$, además como $\mathcal{O}([s]) \cap [\omega] \neq \emptyset$ tenemos que $\mathcal{O}([s]) = [\omega]$. Así $\mathcal{O}$ es continua.

Por lo tanto $\mathcal{O}$ es un homeomorfismo.

$\square$

Proposición 2.2.5. *Si $\mathcal{C}$ es el espacio de Cantor y $\mathcal{O} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ el odómetro entonces el conjunto* $\text{Per}(2^{\mathcal{O}})$ *es denso en el hiperespacio* $2^{\mathcal{C}}$.

Demostración. Sea $\langle U \rangle$ un abierto en 2^X, donde U es un abierto de $\mathcal{C}$. Sean $\omega \in \{0,1\}^k$ tal que $[\omega] \subset U$ y $A = [\omega] \in 2^{\mathcal{C}}$. Entonces $A \in \langle U \rangle \cap \text{Per}(2^{\mathcal{O}})$ pues

$$(2^{\mathcal{O}})^{2^k}(A) = \mathcal{O}^{2^k}([\omega]) = [\omega] = A.$$

Así, por el Teorema 1.3.3 tenemos que $\text{Per}(2^{\mathcal{O}})$ es denso en $2^{\mathcal{C}}$.

$\square$

Proposición 2.2.6. *Si $\mathcal{C}$ es el espacio de Cantor y $\mathcal{O} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ el odómetro entonces el conjunto* $\text{Per}(\mathcal{O})$ *es vacío.*

Demostración. Supongamos que existe $x \in \mathcal{C}$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{O}^N(x) = x$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^k > N$. Existen $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{2^k} \in \{0,1\}^k$ tales que

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{2^k} [\omega_i] \text{ y } [\omega_i] \cap [\omega_j] = \emptyset, \forall i \neq j.$$

Existe $m \in \{1, 2, \cdots, 2^k\}$ tal que $x \in [\omega_m]$. Sabemos que $\mathcal{O}^{2^k}([\omega_m]) = [\omega_m]$ y $\mathcal{O}^l([\omega_m]) = [\omega_j]$, $\forall l < 2^k$ y algún $j \neq m$, entonces

$$f^N([\omega_m]) = [\omega_i] \neq [\omega_m]$$

por lo tanto $\mathcal{O}^N(x) \neq x$ y así $\mathrm{Per}(\mathcal{O}) = \emptyset$.

$\square$

Puesto que la demostración del siguiente teorema se tiene de manera inmediata de las Proposiciones 2.2.5 y 2.2.6, la omitiremos.

Teorema 2.2.7. *Sea $\mathcal{C}$ el espacio de Cantor y $\mathcal{O}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ el odómetro. Entonces el conjunto* $\mathrm{Per}(2^{\mathcal{O}})$ *es denso en el hiperespacio $2^{\mathcal{C}}$, mientras que el conjunto* $\mathrm{Per}(\mathcal{O})$ *es vacío, luego no es denso en $\mathcal{C}$.*

2.3. Densidad de $\mathrm{Per}(2^{2^f})$

El resultado principal de esta sección se resume en el Teorema 2.3.2, en donde probamos que la densidad de $\mathrm{Per}(2^{2^f})$ implica la densidad de $\mathrm{Per}(2^f)$ para cada función $f\colon X \to X$ y cada continuo X.

Sea X un continuo. Definimos $\cup_X\colon 2^{2^X} \to 2^{2^X}$ por

$$\cup_X(\mathcal{A}) = \cup\{A \mid A \in \mathcal{A}\} \textit{ para cada } \mathcal{A} \in 2^{2^X}.$$

Del Ejercicio 11,5 dado en [17], se prueba que $\cup_X$ es una función continua.

El siguiente lema se sigue de [35, 3.2.2 pág. 108].

Lema 2.3.1. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua entre continuos. Entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd} 2^{2^X} \arrow[r, "2^{2^f}"] \arrow[d, "\cup_X"'] & 2^{2^Y} \arrow[d, "\cup_Y"] \\ 2^X \arrow[r, "2^f"] & 2^Y \end{tikzcd}$$

es conmutativo; es decir, $\cup_Y \circ 2^{2^f} = 2^f \circ \cup_X$.

El siguiente resultado muestra una situación particular donde la densidad de los puntos periódicos de la función inducida implica la densidad de la función base.

Teorema 2.3.2. *Sean X un continuo y $f\colon X \to X$ una función continua. Si* $\mathrm{Per}(2^{2^f})$ *es denso en* 2^{2^X}*, entonces* $\mathrm{Per}(2^f)$ *es denso en* 2^X*.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacio de 2^X. Veamos que $\mathcal{U} \cap \mathrm{Per}(2^f) \neq \emptyset$. Como $\mathrm{Per}(2^{2^f})$ es denso en 2^{2^X}, existe $\mathcal{A} \in \langle \mathcal{U} \rangle \cap \mathrm{Per}(2^{2^f})$. Así, existe un entero positivo n tal que $(2^{2^f})^n(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Note que, por Lema 2.3.1,

$$(2^f)^n(\cap\mathcal{A}) = \cap((2^{2^f})^n(\mathcal{A})) = \cap\mathcal{A}.$$

Como $\mathcal{A} \in \mathcal{U}$, tenemos que $\cap\mathcal{A} \in \mathcal{U}$.

Por lo tanto $\cap\mathcal{A} \in \mathcal{U} \cap \mathrm{Per}(2^f)$ y $\mathrm{Per}(2^f)$ es denso en 2^X.

□

Para cada $n \geq 2$, denotemos

$$2^X_n = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^X}}}}} \text{ (n-veces)} \quad \text{y} \quad 2^f_n = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^f}}}}} \text{ (n-veces)}.$$

Con esta notación, del Teorema 2.3.2 se tiene la sigueinte proposición:

Proposición 2.3.3. *Sean X un continuo y $f\colon X \to X$ una función continua. Si* $\mathrm{Per}(2^f_n)$ *es denso en* 2^X_n*, para algún $n \geq 2$, entonces* $\mathrm{Per}(2^f)$ *es denso en* 2^X*.*

Además, por el Teorema 1.3.4, tenemos lo siguiente:

Teorema 2.3.4. *Sean X un continuo y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces,* $\mathrm{Per}(2^f)$ *es denso en* 2^X *si y solo si* $\mathrm{Per}(2^{2^f})$ *es denso en* 2^{2^X}*.*

2.3.1. Construcciones generales

En esta sección a partir de un continuo$X$n y $f\colon X \to X$ una función continua tal que el conjunto $\mathrm{Per}(2^f)$ es denso en 2^X y $\mathrm{Per}(f)$ no es denso en X construiremos nuevos continuos con la misma propiedad. Hasta este momento solamente hemos construido un solo ejemplo (el odómetro) donde no tenemos el recíproco del Teorema 1.3.4. En el Capítulo 3 construiremos nuevos ejemplos que a su vez, les podremos aplicar la teoría que desarrollaremos esta sección.

Iniciamos esta sección con el siguiente teorema que usaremos con frecuencia para desarrollar los principales objetivos de esta sección.

Teorema 2.3.5. *Sean X un espacio métrico compacto, A un subconjunto cerrado de X y $f\colon X \to X$ una función continua. Si $f(A) \subset A$, $Y = X/A$ y $q\colon X \to Y$ es la función cociente, entonces $g\colon Y \to Y$ definida por $q \circ f = g \circ q$ es una función continua que cumple las siguientes condiciones:*

1. *Si $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X, entonces $\mathrm{Per}(g)$ es denso en Y.*

2. *Si $\mathrm{Int}_X(A) = \emptyset$ y $\mathrm{Per}(g)$ es denso en Y, entonces $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X.*

Demostración. Note que, por [12, Teorema 4.3], g es una función continua.

Probemos *1*. Sea V un subconjunto abierto no vacio de Y. Como q es una función continua, entonces $q^{-1}(V)$ es abierto. Puesto que

$$q^{-1}(V) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$

$\mathrm{Per}(f)$ es denso en X, existe $x \in \mathrm{Per}(f) \cap (q^{-1}(V) \cap (X \setminus A))$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) = x$. Así, $(q \circ f^m)(x) = q(x)$. Como $q \circ f = g \circ q$, entonces $q \circ f^m = g^m \circ q$, entonces

$$(q \circ f^m)(x) = (g^m \circ q)(x) = q(x),$$

con lo que, $g^m(q(x)) = q(x)$. Es claro que $q(x) \in V$. Por lo tanto, $V \cap \mathrm{Per}(g) \neq \emptyset$ y $\mathrm{Per}(g)$ es denso en Y.

Ahora, probemos *2*. Sea U un subconjunto abierto no vacio de X. Como

$$\mathrm{Int}_X(A) = \emptyset,$$

$W = U \cap (X \setminus A)$ es un subconjunto abierto no vacio de X. Observe que

$$q|_{X \setminus A}\colon X \setminus A \to Y \setminus \{q(A)\},$$

es un homeomorfismo, así

$$\mathrm{Per}(g) \cap (q(U \cap (X \setminus A))) \neq \emptyset.$$

Como $q \circ f = g \circ q$, no es dificil ver que $\mathrm{Per}(f) \cap (U \cap (X \setminus A)) \neq \emptyset$. Por lo tanto $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X. □

Sea X un espacio métrico compacto, definimos $\mathrm{Cylin}(X) = X \times [0,1]$, $\mathrm{Cone}(X) = \mathrm{Cylin}(X)/(X \times \{1\})$ y $\mathrm{Sus}(X) = \mathrm{Cone}(X)/(X \times \{0\})$.

Si $f\colon X \to X$ es una función continua, entonces la función

$$\mathrm{Cylin}(f)\colon \mathrm{Cylin}(X) \to \mathrm{Cylin}(X)$$

esta definida por $\mathrm{Cylin}(f)((x,t)) = (f(x), t)$, para cada $(x, f) \in \mathrm{Cylin}(X)$, es continua.

Las funciones $q_1 \colon \mathrm{Cylin}(X) \to \mathrm{Cone}(X)$ y $q_2 \colon \mathrm{Cone}(X) \to \mathrm{Sus}(X)$ denotan la funciones cociente. Además $v = q_1(X \times \{1\}), v_1 = q_2(v)$ y $v_2 = q_2(X \times \{0\})$ se llaman los vértices de $\mathrm{Cone}(X)$ y $\mathrm{Sus}(X)$, respectivamente. Las funciones $\mathrm{Cone}(f)$ y $\mathrm{Sus}(f)$ están definidas por $q_1 \circ \mathrm{Cylin}(f) = \mathrm{Cone}(f) \circ q_1$ y $q_2 \circ \mathrm{Cone}(f) = \mathrm{Sus}(f) \circ q_2$, respectivamente.

Proposición 2.3.6. *Sean X un espacio métrico compacto y $f \colon X \to X$ una función continua. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathrm{Per}(f)$ *es denso en* X*;*
2. $\mathrm{Per}(\mathrm{Cylin}(f))$ *es denso en* $\mathrm{Cylin}(X)$*;*
3. $\mathrm{Per}(\mathrm{Cone}(f))$ *es denso en* $\mathrm{Cone}(X)$*;*
4. $\mathrm{Per}(\mathrm{Sus}(f))$ *es denso en* $\mathrm{Sus}(X)$*.*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{Cl}_X(\mathrm{Per}(f)) = X$. Sea $U \times V$ un subconjunto abierto no vacio de $\mathrm{Cylin}(X)$. Como U es un subconjunto abierto de X y $\mathrm{Cl}_X(\mathrm{Per}(f)) = X$, entonces existe $x \in U$ tal que $f^n(x) = x$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $s \in V$. Claramente

$$Cylin(f)^n((x, s)) = (f^n(x), s) = (x, s),$$

es decir, $(x, s) \in (U \times V) \cap \mathrm{Per}(\mathrm{Cylin}(f))$ y $\mathrm{Per}(\mathrm{Cylin}(f))$ es denso en $\mathrm{Cylin}(X)$.

Ahora, supongamos *2* y probemos *1*. Sea U un subconjunto abierto no vacio de X. Entonces existe

$$(x, t) \in (U \times [0, 1]) \cap \mathrm{Per}(Cylin(f)),$$

tal que $Cylin(f)^m((x, t)) = (x, t)$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Así, $f^m(x) = x$ y $\mathrm{Per}(f) \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X.

Las afirmaciones *2, 3* y *4* son equivalentes por el Teorema 2.3.5. □

Un resultado similar de la Proposición 2.3.6 para las implicaciones de las funciones inducidas, se da en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.7. *Sean X un espacio métrico compacto y $f \colon X \to X$ una función continua. Si $\mathrm{Cl}_{2^X}(\mathrm{Per}(2^f)) = 2^X$, entonces:*

1. $\mathrm{Per}(2^{\mathrm{Cylin}(f)})$ *es denso en* $2^{\mathrm{Cylin}(X)}$*.*
2. $\mathrm{Per}(2^{\mathrm{Cone}(f)})$ *es denso en* $2^{\mathrm{Cone}(X)}$*.*
3. $\mathrm{Per}(2^{\mathrm{Sus}(f)})$ *es denso en* $2^{\mathrm{Sus}(X)}$*.*

Demostración. Probemos *1*, la prueba de *2* y *3* son similares.

Sea $\langle U \times V \rangle$ un subconjunto abierto básico de $2^{\mathrm{Cylin}(X)}$. Como $\mathrm{Cl}_{2^X}(\mathrm{Per}(2^f)) = 2^X$ y $\langle U \rangle$ es un subconjunto abierto de 2^X, existen $A \in \langle U \rangle$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(A) = A$. Sea $t \in V$, nótese que $A \times \{t\} \in \langle U \times V \rangle$ es un subconjunto compacto de $\mathrm{Cylin}(X)$. Así, por el Teorema 1.3.3, tenemos que $\mathrm{Per}(2^{\mathrm{Cylin}(f)})$ es denso en $2^{\mathrm{Cylin}(X)}$. $\square$

Veamos ahora un ejemplo de un continuo X y un homeomorfismo $h\colon X \to X$ tal que el conjunto $\mathrm{Per}(2^h)$ es denso en 2^X mientras que el conjunto $\mathrm{Per}(h)$ consta de un solo punto.

Ejemplo 2.3.8. Existe un homeomorfismo $H\colon \mathrm{Cone}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Cone}(\mathcal{C})$ tal que $\mathrm{Per}(2^H)$ es denso en $2^{\mathrm{Cone}\mathcal{C}}$ y el conjunto $\mathrm{Per}(H) = \{v\}$, donde v es el vértice del $\mathrm{Cone}(\mathcal{C})$.

Sea $\mathcal{O}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ la función odómetro dada en la Definición 2.2.3, de la Proposición 2.2.4 tenemos que el odómetro es un homeomorfismo. Ahora como $\mathrm{Per}(\mathcal{O}) = \emptyset$, de la Proposición 2.2.6 tenemos que $\mathrm{Per}(\mathrm{Cylin}(\mathcal{O})) = \emptyset$. Así, $\mathrm{Per}(\mathrm{Cone}(\mathcal{O})) = \{v\}$, donde v es el vértice de $\mathrm{Cone}(\mathcal{C})$. Como $\mathrm{Per}(2^{\mathcal{O}})$ es denso $2^{\mathcal{C}}$, por el Teorema 2.3.7, $\mathrm{Per}(2^{\mathrm{Cone}(\mathcal{O})})$ es denso en $2^{\mathrm{Cone}(\mathcal{C})}$. Por lo tanto, $H = \mathrm{Cone}(\mathcal{O})$ satisface las condiciones del Ejemplo 2.3.8, (ver Figura 13).

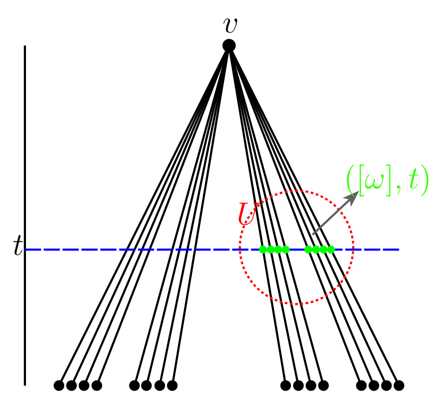


Figura 13: $\mathrm{Cone}(\mathcal{C})$)

Además, por el Teorema 2.3.7, deducimos que la función $\mathrm{Sus}(\mathcal{O})\colon \mathrm{Sus}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Sus}(\mathcal{C})$ es una función continua tal que $\mathrm{Per}(2^{\mathrm{Sus}(\mathcal{O})})$ es denso en $2^{\mathrm{Sus}(\mathcal{C})}$, pero $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Sus}(\mathcal{C})}(\mathrm{Per}(\mathrm{Sus}(\mathcal{O})))$ es diferente de $\mathrm{Sus}(\mathcal{C})$. Por lo tanto tenemos el siguiente resultado, su demostración es consecuencia la Proposición 2.3.6 y el Teorema 2.3.7 por lo tanto la omitiremos.

Teorema 2.3.9. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua tal que* $\mathrm{Cl}_{2^X}(\mathrm{Per}(2^f)) = 2^X$ *y* $\mathrm{Cl}_X(\mathrm{Per}(f)) \neq X$. *Lo siguiente es válido:*

1. $\mathrm{Per}(2^{\mathrm{Cylin}(f)})$ *es denso en* $2^{\mathrm{Cylin}(X)}$ *y* $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Cylin}(X)}(\mathrm{Per}(\mathrm{Cylin}(f))) \neq \mathrm{Cylin}(X)$.
2. $\mathrm{Per}(2^{\mathrm{Cone}(f)})$ *es denso en* $2^{\mathrm{Cone}(X)}$ *y* $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Cone}(X)}(\mathrm{Per}(\mathrm{Cone}(f))) \neq \mathrm{Cone}(X)$.
3. $\mathrm{Per}(2^{\mathrm{Sus}(f)})$ *es denso en* $2^{\mathrm{Sus}(X)}$ *y* $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Sus}(X)}(\mathrm{Per}(\mathrm{Sus}(f))) \neq \mathrm{Sus}(X)$.

2.4. Monótona y dendritas

En busca de dar respuesta a la Pregunta 2.1.10 planteada por Héctor Méndez en [25], tenemos como resultado central de esta sección el Teorema 2.4.10, donde debilitando la hipótesis de la función, por función monótona, obtenemos una respuesta afirmativa a la Pregunta 2.1.10; es decir, dada una dendrita D y una función continua monótona $f\colon D \to D$, se tiene que si el conjunto $\mathrm{Per}(2^f)$ es denso en 2^D, entonces el conjunto $\mathrm{Per}(f)$ es denso en D. Este resultado fue demostrado por Haithem Abouda y Issam Naghmouchi en [2].

Definición 2.4.1. Sean X y Y dos espacios topológicos. Una función $f\colon X \to Y$ es monótona si para cualquier subconjunto conexo C de Y, $f^{-1}(C)$ es conexo.

Note que si $f\colon X \to X$ entonces f^n es monótona para cualquier $n \in \mathbb{N}$ cuando f es monótona.

Definición 2.4.2. Sea (X, f) un sistema dinámico. Definimos el conjunto ω-*límite* de un punto $x \in X$ como el siguiente conjunto

$$\begin{aligned}\omega_f(x) &= \{y \in X \mid \exists n_i \in \mathbb{N}, n_i \to \infty, \lim_{i\to\infty} d(f^{n_i}(x), y) = 0\} \\ &= \textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{f^k(x) \mid k \geq n\}}.\end{aligned}$$

Un punto $x \in X$ se llama *recurrente para* f si $x \in \omega_f(x)$.

Un conjunto $A \subseteq X$ se llama f-*invariante* si $f(A) \subseteq A$. El conjunto $\omega_f(x)$ es un conjunto no vacio, cerrado y fuertemente invariante, es decir, $f(\omega_f(x)) = \omega_f(x)$. Si $\omega_f(x)$ es finito entonces este es una órbita periódica. Si $\omega_{f^m}(x)$ es finito para algún $m \in \mathbb{N}$ entonces $\omega_f(x)$ es también finito (ver [8] para más detalles). Sean $\mathrm{Fix}(f)$, $\mathrm{Per}(f)$, $R(f)$ y $\Lambda(f)$ los conjuntos de puntos fijos, puntos periódicos, puntos recurrentes y la unión de todos los conjuntos ω-límite respectivamente. Entonces tenemos la siguiente relación de inclusiones:

$$\mathrm{Fix}(f) \subseteq \mathrm{Per}(f) \subseteq R(f) \subseteq \Lambda(f).$$

Recordemos que cualesquiera dos puntos distintos x, y de una dendrita D pueden unirse mediante un único arco con puntos finales x y y, denotamos este arco por $[x, y]$ y sea $[x, y) = [x, y]\backslash\{y\}$(resp.$(x, y] = [x, y]\backslash\{x\}$ y $(x, y) = [x, y]\backslash\{x, y\}$). A continuación, daremos algunos resultados que nos llevarán a demostrar el Teorema 2.4.10, algunas de sus pruebas fueron tomadas de [2].

Lema 2.4.3. *[22, Lema 2.3] Sea $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos conexos de una dendrita (D, d). Si $C_i \cap C_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, entonces*

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam}(C_n) = 0.$$

Lema 2.4.4. *Sea (D, d) una dendrita y $f: D \to D$ una función continua monótona. Entonces para cualesquiera $x, y \in D$, $f([x, y]) = [(f(x), f(y))]$.*

Demostración. Como f es continua y monótona, tenemos que $[(f(x), f(y))] \subseteq f([x, y])$ y $f^{-1}([(f(x), f(y))]) \supseteq [x, y]$ respectivamente. Por lo tanto, $f([x, y]) \subseteq [(f(x), f(y))]$ y por lo tanto $f([x, y]) = [(f(x), f(y))]$. □

Lema 2.4.5. *Sea (D, d) una dendrita y $f: D \to D$ una función continua monótona. Supongamos que $a \in \operatorname{Fix}(f)$ y sea $x \in D$. Para algún $n \in \mathbb{Z}_+$ y $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $(a, f^n(x)] \cap (a, f^{m+n}(x)] \neq \emptyset$ y $(a, x] \cap (a, f^m(x)] \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $z \in (a, f^n(x)] \cap (a, f^{n+m(x)}]$. Como

$$f^n([a, x]) = [a, f^n(x)] \text{ y } f^n([a, f^m(x)]) = [a, f^{m+n}(x)]$$

por Lema 2.4.4, existe $y_1 \in (a, x]$ y $y_2 \in (a, f^m(x)]$ tales que $f_n(y_1) = f^n(y_2) = z$. Por Lema 2.4.4, $f^n([y_1, y_2]) = \{z\}$ asi $a \notin [y_1, y_2]$ como $z \neq a$. Entonces necesariamente, $(a, x] \cap (a, f^m(x)] \neq \emptyset$. □

Lema 2.4.6. *Sean D una dendrita y $f: D \to D$ una función continua monótona de una dendrita en si misma, $a \in \operatorname{Fix}(f)$ y $x \in D$. Si $[a, x] \subseteq [a, f(x)]$ entonces existe $b \in \operatorname{Fix}(f)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = b$ y $[a, f^n(x)] \subseteq [a, b]$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Demostración. Probaremos por inducción sobre n que $[a, f^n(x)] \subseteq [a, f^{n+1}(x)]$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$:

Para $n = 0$, tenemos que $[a, x] \subseteq [a, f(x)]$. Supongamos que para algún $n \in \mathbb{Z}_+$, $[a, f^n(x)] \subseteq [a, f^{n+1}(x)]$ entonces por el Lema 2.4.4, $[s, f^{n+1}(x)] \subseteq [a, f^{n+2}(x)]$. Asi la clausura $\overline{I}$ del conjunto $I = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+}[a, f^n(x)]$ es un arco f-invariante y la sucesión $(f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ es monótona en este arco, asi esto converge a un punto fijo $b \in \overline{I}$, y obtenemos que $[a, f^n(x)] \subseteq [a, b] = \overline{I}$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. □

Lema 2.4.7. *Sea D una dendrita, $f: D \to D$ una función continua monótona, $a \in \operatorname{Fix}(f)$ y $x \in D$ tales que $[a, x] \cap \operatorname{Fix}(f) = \{a\}$ y $[a, x] \cap [a, f(x)] = [a, u_1]$ donde $u_1 \in (a, x)$. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

(i) *Si* $f(u_1) \in [x, u_i]$ *entonces* $\omega_f(x) = \{a\}$.

(ii) *Si* $f(u_1) \in (u_1, f(x)]$ *entonces existe* $b \in \text{Fix}(f)$ *tal que* $\omega_f(x) = \{b\}$.

Demostración. Por el Lema 2.4.4 tenemos que $f([a, x]) = [a, f(x)]$, entonces como $u_1 \in (a, f(x)]$, existe $u_0 \in (a, x]$ tal que $f(u_0) = u_1$. Denotemos para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f^n(u_0)$.

Probemos ***(i)***. En este caso $u_0 \in (u_1, x]$ y como $[a, x] \cap \text{Fix}(f) = \{a\}$, entonces para cada $y \in [a, u_0]$, $\omega_f(x) = \{a\}$. Si para algún $k \in \mathbb{Z}_+$, $f^k(x) \in [a, u_0]$, entonces es claro que $\omega_f(x) = \{a\}$. Supongamos que para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, $f^k(x) \notin [a, u_0]$. En este caso, podríamos ver que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$[u_k, f^k(x)] \cap [a, x] = \{u_k\}.$$

Procedemos por indución sobre k :

Para $k = 1$, $[u_1, f(x)] \cap [a, x] = \{u_1\}$ (ver Figura 14).

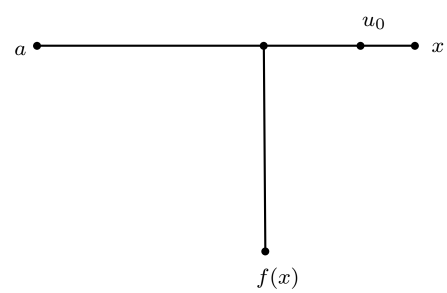


Figura 14: El conjunto $[a, x] \cup [a, f(x)]$

Ahora supongamos que para algún $k \in \mathbb{N}$, $[u_k, f(^k(x)] \cap [a, x] = \{u_k\}$. Si $\{u_{k+1}\} \nsubseteq [u_{k+1}, f^{k+1}(x)] \cap [a, x]$, entonces existe $y \in (u_{k+1}, f^{k+1}(x)] \cap [a, u_1]$. Como $f([a, u_0]) = [a, u_1]$ y $f([u_k, f^k(x)]) = [u_{k+1}, f^{k+1}(x)]$, existen $w \in [a, u_0]$ y $v \in [u_k, f^k(x)]$ tales que $f(w) = f(v) = y$. Por el Lema 2.4.4, $f([w, v]) = \{y\}$. Como $[u_k, f^k(x)] \cap [a, x] = \{u_k\}$, obtenemos $u_k \in [w, v]$ y así $f(u_k) = y \neq u_{k+1}$, que es una contradicción. Por lo tanto $[u_{k+1}, f^{k+1}(x)] \cap [a, x] = \{u_{k+1}\}$.

Probemos ahora que la colección de conjuntos $(u_k, f^k(x)]$, $k \in \mathbb{N}$, son disjuntos dos a dos.

Supongamos que existe $i, j \in \mathbb{N}$ y $z \in D$ tal que $z \in (u_i, f^i(x)] \cap (u_{i+j}, f^{i+k}(x)]$. Como $f^i([u_0, x]) = [u_i, f^i(x)]$ y $f^j([u_j, f^j(x)]) = [u_{i+j}, f^{i+j}(x)]$, existen $y_1 \in [u_0, x]$ y $y_2 \in [u_j, f^j(x)]$ tales que $f^i(y_1) = f^i(y_2) = z$; así por Lema 2.4.4, $f^i(u_j) = z$, una contradición. Concluimos que los conjuntos $(u_k, f^k(x))$, $k \in \mathbb{N}$, son disjuntos dos a dos, así por Lema 2.4.3, tenemos que,

$$\lim_{k\to+\infty} \operatorname{diam}([u_k, f^k(x)]) = 0.$$

Por lo tanto, $\omega_f(x) = \omega_f(u_0) = \{a\}$.

Probemos ***(ii)***. Por el Lema 2.4.6, existe $b \in \operatorname{Fix}(f)$ tal que $\lim_{k\to+\infty} f^n(x) = b$ y $[a, u_n] \subseteq [a, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente, $[u_1, b] \cap \operatorname{Fix}(f) = \{b\}$ (Lema 2.4.6). Distinguimos tres casos:

Caso 1 $b \in [u_1, f(x)]$: En este caso $b = u_2$, de hecho, tenemos $u_1 \in [x, b]$, así por Lema 2.4.4, $u_2 = f(u_1) \in [f(x), b]$. Por lo tanto, $u_2 \in [f(x), b] \cup [a, b] = \{b\}$, así $u_2 = b$ y $f([u_1, b]) = \{b\}$.

Ahora, si los conjunto $(b, f^n(x)]$, para $n \in \mathbb{Z}_+$, son disjuntos dos a dos entonces por Lema 2.4.3, $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}([b, f^n(x)]) = 0$ y así $\omega_f(x)\{b\}$. De otra manera, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $(b, f^n(x)] \cap (b, f^{m+n}(x)] \neq \emptyset$. Así por Lema 2.4.5, $[b, x] \cap [b, f^m(x)] = [b, v]$ para algún $v \in (b, x]$. Veamos que $v \in [b, u_1]$. Tomemos $b \in [a, f(x)]$, y como $b \in \operatorname{Fix}(f)$, entonces $b \in [a, f^m(x)]$ (Lema 2.4.4). Así $\{a, b, v\} \subseteq [a, f^m(x)]$, entonces $v \notin (u_1, x]$(de lo contrario el conjunto $\{a, b, v\}$ no puede ser incluido en un arco). Tomemos $v \in (b, u_1]$ y $f([u_1, b]) = \{b\}$. En consecuencia, $[b, x] \cap [b, f^m(x)] = [b, v]$ dónde $v \in (b, u_1] \subseteq (b, x)$ y $f^m(v) = b$. Aplicando Lema 2.4.7(i) a la función continua f^m y considerando el punto fijo b de f^m en lugar de a y el punto v en lugar de u_1, obtenemos $\omega_{f^m}(x) = \{b\}$ y como $b \in \operatorname{Fix}(f)$, $\omega_f(x) = \{b\}$.

Caso 2 $b \notin [u_1, f(x)]$ y $f(x) \in [u_1, b]$: En este caso, tenemos por el Lema 2.4.6, $\omega_f(x) = \omega_f(f(x)) = \{b\}$.

Caso 3 $b \notin [u_1, f(x)]$ y $f(x) \notin [u_1, b]$: En este caso, $[b, x] \cup [b, f(x)] = [b, v]$ donde $v \in (u_1, b]$. Así $f(v) \in (v, b]$ (Lema 2.4.6). Aplicando el Lema 2.4.7(i) a la función continua f considerando b en lugar de a y el punto v en lugar de u, obtenemos $\omega_f(x) = \{b\}$.

Esto completa la prueba. $\square$

Lema 2.4.8. *Sean D una dendrita, $f\colon D \to D$ una función continua monótona, $a \in \operatorname{Fix}(f)$ y $x \in D$. Si $\omega_f(x)$ es infinito entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $[a, x] \cap [a, f^n(x)] = [a, u_n]$ donde $u_n \in \operatorname{Fix}(f^n)$.*

Demostración. Podemos suponer que $[a, x] \cap \operatorname{Fix}(f) = \{a\}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $[a, x] \cap [a, f^n(x)] = [a, u_n]$. Entonces $u_n \in [a, x)$, en efecto, si $u_n = x$, entonces por Lema

2.4.6 aplicando a f^n, obtenemos $\omega_{f^n}(x) = \{b\} \subseteq \mathrm{Fix}(f^n)$ y así $\omega_f(x)$ es finito, una contradición. Resulta que $u_n \in \mathrm{Fix}(f^n)$ si $u_n = a$ y, si $u_n \in (a, x)$, el resultado se sigue por el Lema 2.4.7. $\square$

Teorema 2.4.9. *Sean D una dendrita $f\colon D \to D$ una función continua monótona. Entonces $\Lambda(f) \subset \overline{\mathrm{Per}(f)}$.*

Demostración. Si $\omega_f(x)$ es finita, entonces $\Lambda(f) \subset \overline{\mathrm{Per}(f)}$. Supongamos que $\omega_f(x)$ es infinito. Sea $a \in \mathrm{Fix}(f)$ tal que $[a, x] \cap \mathrm{Fix}(f) = \{a\}$. Por el Lema 2.4.3, el conjunto $(a, f^{2n}(x)]$, para $n \in \mathbb{N}$, no pueden ser disjuntos dos a dos (de lo contrario, $\omega_{f^2}(x) = \{a\}$ y así $\omega_f(x)$ es finito). Así por el Lema 2.4.5, existe $n_o \in \mathbb{N}$ con $n_0 > 1$ y $u_0 \in D$ tal que $[a, x] \cap [a, f^{n_0}(x)] = [a, u_0]$ donde $u_0 \in (a, x]$. Por el Lema 2.4.6, $u_0 \in (a, x)$ y por el Lema 2.4.8, $u_0 \in \mathrm{Fix}(f^{n_0})$. Si consideramos ahora la fución continua f^{n_0} entonces del mismo modo, podemos probar que existe un entero $n_1 \in \mathbb{N}$ con $n_1 > 1$ y un punto fijo u_1 de $f^{n_0 n_1}$ en el arco (u_0, x) tal que $[a, x] \cap [a, f^{n_0 n_1}(x)] = [a, u_1]$. Por inducción, encontrammos una sucesión de enteros $(n_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ y una sucesión de puntos $(u_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ en D tales que para cada $i \in \mathbb{Z}_+$, tenemos que $n_i > 1$, $u_i \in \mathrm{Fix}(f^{N_i})$, $u_{i+1} \in (u_i, x)$, y $[a, x] \cap [a, f^{N_i}(x)] = [a, u_i]$, donde $N_i = \prod_{j=0}^{i} n_j$. Entonces $u_i \in \mathrm{Per}(f)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Ahora como $\lim_{i \to +\infty} f^{N_i}(x) = u_\infty$, tenemos $u_\infty \in \overline{\mathrm{Per}(f)}$. Como $f(\overline{\mathrm{Per}(f)}) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$, entonces $\omega_f(x) = \omega_(u_\infty) \subseteq \mathrm{Per}(f)$.

$\square$

Teorema 2.4.10. *Sean X una dendrita y $f\colon X \to X$ una función continua monótona. Si $\mathrm{Per}(2^f)$ es denso en 2^X, entonces $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X.*

Demostración. Como $\mathrm{Per}(2^f)$ es denso en X, entonces $\mathrm{R}(2^f)$ es denso en 2^X. Sea V un subconjunto abierto no vacío de X y tomemos U un subconjunto abierto no vacío de X tal que $\overline{U} \subseteq V$. Claramente $\langle U \rangle$ es un abierto en 2^X. Sea $F \in \mathrm{R}(2^f) \cap \langle U \rangle$, entonces para una cantidad infinita de $n \in \mathbb{N}$, $f^n(F) \in \langle U \rangle$ así $f^n(F) \subseteq U$. Entonces para cualquier $x \in F$, $f^n(x) \in U$ para una cantidad infinita de $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $\omega_f(x) \cap \overline{U} \neq \emptyset$. Así, $\Lambda(f) \cap \overline{U} \neq \emptyset$. Luego por el Teorema 2.4.9, $\overline{\mathrm{Per}(f)} \cap V \neq \emptyset$, por lo tanto $\mathrm{Per}(f) \cap V \neq \emptyset$.

$\square$

Observación 2.4.11. *Recientemente demostramos el Teorema 2.1.6 que si $\mathrm{Per}(2^f)$ es denso en 2^X entonces $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X para la clase de continuos llamados casienrejados (que contiene en particular las dendritas con el conjunto de los puntos finales cerrado. Por el Teorema 2.4.10, esto también se aplica para cada función continua monótono en cualquier dendrita.)*

Capítulo 3

Dos clases de continuos indescomponibles

Hasta el momento tenemos que para cualquier función continua $f\colon X \to X$ la densidad de los puntos periódicos de la función inducida $2^f\colon 2^X \to 2^X$ implica la densidad de los puntos periódicos de la función base f siempre y cuando X sea un continuo casienrejado; en particular dendritas con el conjunto de puntos finales cerrado, árboles o gráficas. Además, si la función base f es monótona y X es cualquier dendrita, nuestra afirmación es verdadera. En este capítulo construiremos familias de continuos y homeomorfismos donde la densidad de los puntos periódicos de la función inducida no implica la densidad de los puntos periódicos de la función base, con lo que tenemos ejemplos que no satisfacen el reciproco del Teorema 1.3.4.

Formalmente, construiremos dos familias: una de continuos tipo Knaster; este es, encadenable e indescomponible, y otra donde mostraremos que para cualquier solenoide, podemos construir un homeomorfismo con esta propiedad.

3.1. Una familia de continuos de Knaster

En esta sección presentamos una familia de continuos indescomponibles, tipo arco y hereditariamente unicoherentes; conocidos como *Continuos tipo Knaster*. Dado M una sucesión de números naturales mayores o iguales a 2, definimos $\mathcal{K}_M$ como el límite inverso de arcos con funciones de ligadura abiertas, asociadas a la sucesión M, que no son homeomorfismos.

Para cierta sucesión M, construimos un homeomorfismo $G\colon \mathcal{K}_M \to \mathcal{K}_M$ con la propiedad que el conjunto de los puntos periódicos de la función inducida, $\mathrm{Per}(2^G)$ es denso en $2^{\mathcal{K}_M}$, mientras que el conjunto $\mathrm{Per}(G)$ tiene un único punto periódico.

Para cada entero positivo $n \in \mathbb{N}$, sean $r \in \{0, \dots, n-1\}$ y $g_n \colon [0,1] \to [0,1]$ la función definida por

$$g_n(x) = \begin{cases} nx - r, & \text{si } r \text{ es par y } x \in [\frac{r}{n}, \frac{r+1}{n}] \subseteq [0,1]; \\ -nx + r + 1, & \text{si } r \text{ es impar y } x \in [\frac{r}{n}, \frac{r+1}{n}] \subseteq [0,1]. \end{cases}$$

La Figura 15 representa las gráficas de g_1, g_2 y g_3, respectivamente. Nótese que para cualquier par de enteros positivos n y m, $g_n \circ g_m = g_m \circ g_n = g_{nm}$, ver detalles en [6].

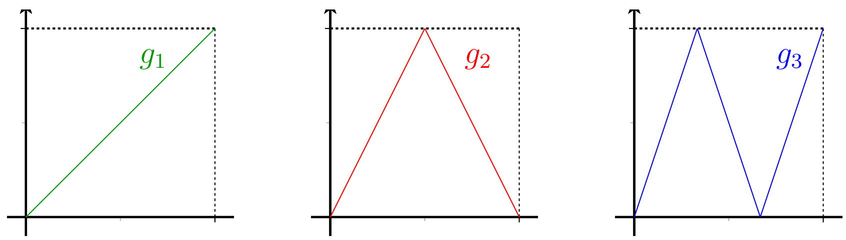


Figura 15: Las funciones g_1, g_2 y g_3 respectivamente.

Como mencionamos en la introducción, dada una sucesión de enteros positivos mayores o iguales a dos M, definiremos un continuo de Knaster $\mathcal{K}_M$, de la siguiente forma: si $M = \{n_i \in \mathbb{N} \colon i \in \mathbb{N}\}$, donde $n_i \geq 2$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Definimos $\mathcal{K}_M = \varprojlim\{[0,1]; g_{n_i}; i \in \mathbb{N}\}$; i.e.,

$$\mathcal{K}_M = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}} \colon x_i = g_{n_i}(x_{i+1}),\ \text{para todo } i \in \mathbb{N}\}.$$

En particular, si M es una sucesión constante n, escribiremos $\mathcal{K}_M$ como $\mathcal{K}_n$. En este caso

$$\mathcal{K}_n := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}} \colon x_i = g_n(x_{i+1}),\ \text{para todo } i \in \mathbb{N}\}.$$

Como $\mathcal{K}_M \subseteq [0,1]^{\mathbb{N}}$, recordemos que la métrica en $\mathcal{K}_M$, para cada $x, y \in \mathcal{K}_M$, esta dada por la fórmula

$$d(x,y) = d((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|x_i - y_i\|}{2^i}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, como $g_n \circ g_m = g_m \circ g_n$, por el Teorema 1.2.6, podemos inducir una función continua $G_m \colon \mathcal{K}_n \to \mathcal{K}_n$, para cada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{K}_n$, definida por

$$G_m(x_i)_{i\in\mathbb{N}} = (g_m(x_i))_{i\in\mathbb{N}}.$$

Note que $\mathcal{K}_M$ es un continuo tipo arco (ver [27]). Dado que para cada $n \geq 2$, g_n y g_2 conmuta, g_2 induce una función de $\mathcal{K}_M$ en si mismo $G_2 \colon \mathcal{K}_M \to \mathcal{K}_M$, dada por $G_2(x_1, x_2, \ldots) = (g_2(x_1), g_2(x_2), \ldots)$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, $\pi_i \colon \mathcal{K}_M \to [0,1]$ denota la proyección correspondiente. Note que para cada $i \in \mathbb{N}$ el siguiente diagrama conmuta (ver Figura 16); es decir, $\pi_i \circ G_m = G_m \circ \pi_i$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}_M \arrow[r, "G_m"] \arrow[d, "\pi_i"'] & \mathcal{K}_M \arrow[d, "\pi_i"] \\ {[0,1]} \arrow[r, "g_m"] & {[0,1]} \end{tikzcd}$$

Figura 16: Diagrama conmutativo.

Además, nótese que para cada $l \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\pi_i \circ G_2^l = g_2^l \circ \pi_i.$$

Como $g_{n_k} : [0,1] \to [0,1]$ es una función abierta, para cualquier $n_k \in M$, tenemos por Teorema 1.2.5que las proyecciones π_i son abiertas, para cada $i \in \mathbb{N}$.

En lo que sigue de esta sección probaremos el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1. *Dado $M = \{2, 4, 6, \ldots\}$, la función $G_2 \colon \mathcal{K}_M \to \mathcal{K}_M$ definida por $G_2((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (g_2(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ es tal que:*

1. *G_2 es un homeomorfismo.*

2. *$Per(G_2) = \{(0, 0, \ldots)\}$.*

3. *$Per(2^{G_2})$ es denso en $2^{\mathcal{K}_M}$.*

Demostración. Del Teorema 1.2.7 tenemos que $G_2 \colon \mathcal{K}_M \to \mathcal{K}_M$ es una función continua y sobreyectiva. Además, como g_2 es abierta, G_2 es abierta. Así, por [39, Teorema 7.9], solo faltaría mostrar que $G_2 \colon \mathcal{K}_M \to \mathcal{K}_M$ es inyectiva para concluir que G_2 es un homeomorfismo.

Sean $x, y \in \mathcal{K}_M$, tales que $G_2(x) = G_2(y)$. Denotemos $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, e $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Así, $g_2(x_i) = g_2(y_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Supongamos que $x \neq y$; es decir, existe $i_0 \in \mathbb{N}$, $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Obsérvese que como $x, y \in \mathcal{K}_M$, tenemos que $x_i \neq y_i$, para cada $i \geq i_0$. Además, como $g_2(x_i) = g_2(y_i)$, tenemos que x_i e y_i son puntos simétricos respecto a $\frac{1}{2}$, para todo $i \geq i_0$; esto es $x_i = 1 - y_i$ para todo $i \geq i_0$ (ver Figura 17).

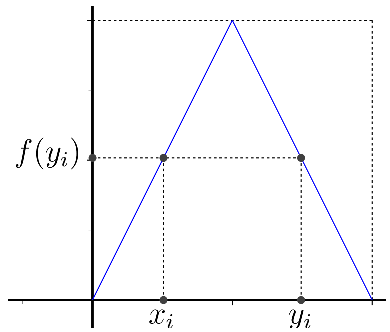


Figura 17: Puntos simétricos respecto al punto $\frac{1}{2}$.

Sea $y \in [0,1]$. Usando un argumento similar, no es difícil ver que $g_{2j}^{-1}(y)$ es un conjunto simétrico con respecto a $\frac{1}{2}$; esto es, si $x \in g_{2j}^{-1}(y)$, entonces $1-x \in g_{2j}^{-1}(y)$. Como $x_{i_0+1} \in g_{2i_0}^{-1}(x_{i_0})$, $y_{i_0+1} \in g_{2i_0}^{-1}(y_{i_0})$ y $g_{2i_0}^{-1}(x_{i_0}) \cap g_{2i_0}^{-1}(x_{i_0}) = \emptyset$, no es posible que $x_{i_0+1} = 1 - y_{i_0+1}$. Contradicción. De lo anterior $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Así, $G_2 \colon \mathcal{K}_M \to \mathcal{K}_M$ es inyectiva. Por tanto, G_2 es un homeomorfismo y concluimos la prueba de *1*.

Ahora probemos que $Per(G_2) = \{(0,0,\ldots)\}$. Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Per}(G_2)$. Supongamos que k es el periodo de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bajo G_2 es decir,

$$G_2^k((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (g_2^k(x_1), g_2^k(x_2), \ldots) = (x_1, x_2, \ldots) = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

De lo anterior, $x_i \in \mathrm{Per}(g_2)$ y el periodo de x_i bajo g_2 es menor o igual a k.

Sea $A_k = \{t \in [0,1] \mid g_2^k(t) = t\}$. Por la definición de g_2 tenemos que A_k es un conjunto finito y $A_k \subseteq \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Así, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $A_k \subseteq \{0, \frac{1}{r}, \ldots, 1\}$. Luego existe $r_i \leq r$ tal que $x_i = \frac{r_i}{r}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Luego,

$$x_r = g_{2r}(x_{r+1}) = g_{2r}(\tfrac{r_i}{r}) = 0.$$

De la definición de $\mathcal{K}_M$, $x_i = 0$ para cada $i \leq r$. Además, para cualquier $l \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$x_{lr} = g_{2lr}(x_{lr+1}) = g_{2lr}\left(\frac{s}{r}\right) = 0.$$

Por lo tanto $x_i = 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y completamos *2*.

Por último probemos que $\mathrm{Per}(2^{G_2})$ es denso en $2^{\mathcal{K}_M}$. Sean $k \in \mathbb{N}$ y U_k un abierto diferente de vacío de $[0,1]$. Veremos que $\mathrm{Per}(2^{G_2}) \cap \pi_k^{-1}(U_k) \neq \emptyset$. Como

$\mathrm{Per}(g_2)$ es denso en $[0,1]$, podemos tomar $y \in U_k$, tal que $g_2^n(y) = y$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea

$$A = \pi_k^{-1}(y) = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{K}_M \mid x_k = y\}.$$

Probemos que $G_2^n(A) = A$. Nótese que si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in A$, entonces $G_2^n((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (g_2^n(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$, donde $g_2^n(x_k) = g_2^n(y) = y$; así, $G_2^n((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) \in A$ y $A \subseteq G_2(A)$.

Por otra parte, dado $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in A$, encontremos un $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in A$ tal que $G_2^n((y_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Como $y_k = y$, definimos cada y_i, $i \leq k$, de una única manera de acuerdo con la definición de $\mathcal{K}_M$. Para completar la definición de $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ usaremos el diagrama conmutativo dado en la Figura 18:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{K}_M \arrow[dl, "\pi_k"'] \arrow[dr, "\pi_{k+1}"] & \\
{[0,1]} \arrow[d, "g_2^k"'] & & {[0,1]} \arrow[ll, "g_{2k}"'] \arrow[d, "g_2^k"] \\
{[0,1]} & & {[0,1]} \arrow[ll, "g_{2k}"']
\end{tikzcd}$$

Figura 18: Diagrama conmutativo

Definamos una sucesión de conjuntos compactos $B_1, B_2, B_3, \ldots$ en $\mathcal{K}_M$ de la siguiente manera:

$$B_1 = \pi_k^{-1}(y), B_2 = \pi_{k+1}^{-1}((g_2^n)^{-1}(x_{k+1})), B_3 = \pi_{k+2}^{-1}((g_2^n)^{-1}(x_{k+2}))\ldots$$

es decir, $B_i = \pi_{k+i-1}^{-1}((g_2^n)^{-1}(x_{k+i-1}))$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Nótese que $B_{i+1} \supseteq B_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i \neq \emptyset$. Basta tomar $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$ y claramente, $G_2^n((y_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$; es decir, $A \subseteq G_2^n(A)$. De lo anterior, A es un compacto contenido en $\pi_k^{-1}(U_k)$ tal que $G_2^k(A) = A$. Así, $\mathrm{Per}(2^{G_2})$ es denso en $2^{\mathcal{K}_M}$, por el Teorema 1.3.3. $\square$

Observe que si hacemos una procedimiento similar al anterior se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.1.2. *Dado $m \in \mathbb{N}$ y $M = \{m, 2m, 3m, \ldots\}$, la función $G_m \colon \mathcal{K}_M \to \mathcal{K}_M$ definida por $G_m((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (g_m(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ es tal que:*

1. *G_m es un homeomorfismo.*

2. *$Per(G_m) = \{(0, 0, \ldots)\}$.*

3. *$Per(2^{G_m})$ es denso en $2^{\mathcal{K}_M}$.*

A continuación presentamos una pregunta que aún permanece abierta, planteada por el profesor Héctor Méndez Lango en [25].

Pregunta 3.1.3. *Sea X un continuo encadenable hereditariamente descomponible. ¿Para toda función $f\colon X \to X$ la densidad del conjunto* $\mathrm{Per}(2^f)$ *en* 2^X *implica la densidad de* $\mathrm{Per}(f)$ *en* X*?*

3.2. Solenoides

En esta sección probaremos que para cualquier solenoide es posible definir un homeomorfismo sin puntos periódicos, tal que la función inducida tiene como subconjunto denso a la familia de sus puntos periódicos.

Definición 3.2.1. Sea $\mathcal{P} = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tal que p_n es un número primo, para todo $n \in \mathbb{N}$. El *solenoide $\mathcal{P}$-adico*, denotado por $\Sigma_{\mathcal{P}}$, esta definido por,

$$\Sigma_{\mathcal{P}} = \varprojlim\{S^1; f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty},$$

donde $f_n^{n+1}\colon S^1 \to S^1$ esta dado por $f_n^{n+1}(z) = z^{p_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Los homeomorfismos que describimos a continuación los tomamos de [20, pág. 5]. Para cada solenoide $\Sigma_{\mathcal{P}}$, donde $\mathcal{P} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ es la sucesión de números primos, definimos la familia de rotaciones $\{h_n\colon S^1 \to S^1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ inductivamente por:

1. $h_1(z) = z$, para cada $z \in S^1$;
2. $h_n(z) = ze^{2\pi i(1/(p_1 \ldots p_{n-1}))}$, para cada $z \in S^1$ y $n \geq 2$.

Si $z = e^{\alpha i} \in S^1$, note que:

$$\begin{aligned}(h_n \circ f_n^{n+1})(z) &= h_n(z^{p_n}) = h_n(e^{\alpha p_n i}) = e^{i(\alpha p_n + 2\pi/(p_1 \ldots p_{n-1}))} = \\ &= e^{p_n i(\alpha + 2\pi/(p_1 \ldots p_n))} \; = \; (e^{i(\alpha+2\pi/(p_1 \ldots p_n))})^{p_n} \; = \\ &= (h_{n+1}(z))^{p_n} = (h_{n+1} \circ f_n^{n+1})(z), \quad \text{para cada } n \geq 1.\end{aligned}$$

Así, por [21, Teorema 2.1.31], la sucesión $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ induce una función continua $h\colon \Sigma_{\mathcal{P}} \to \Sigma_{\mathcal{P}}$ definida por $h((z_n)_{n=1}^{\infty}) = (h_n(z_n))_{n=1}^{\infty}$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, h_n es un homeomorfismo, tenemos que h es un homeomorfismo, por [21, Teorema 2.1.32].

Teorema 3.2.2. *Sean $\Sigma_{\mathcal{P}}$ un solenoide y $h\colon \Sigma_{\mathcal{P}} \to \Sigma_{\mathcal{P}}$ el homeomorfismo definido anteriormente. Entonces,* $\mathrm{Per}(2^h)$ *es denso en* $2^{\Sigma_{\mathcal{P}}}$ *y* $\mathrm{Per}(h) = \emptyset$.

Demostración. Veamos que $\mathrm{Per}(h) = \emptyset$. Sean $w \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ y $m \geq 1$. Es claro que $h^m(w) = (h_k^m(w_k))_{k=1}^{\infty}$, donde $w = (w_k)_{k=1}^{\infty}$. Sea $k_0 > 0$ tal que $p_1 ... p_{k_0-1} > m$. Por lo tanto,

$$h_{k_0}^m(w_{k_0}) = w_{k_0} e^{2\pi m i(1/(p_1 ... p_{k-1}))} \neq w_{k_0}.$$

Así, $h^m(w) \neq w$, para cualquier $w \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ y $m \geq 1$. Por lo tanto, $\mathrm{Per}(h) = \emptyset$.

Veamos que $\overline{\mathrm{Per}(2^h)} = 2^{\Sigma_{\mathcal{P}}}$. Sea U un subconjunto abierto no vacio de $\Sigma_{\mathcal{P}}$. Note que, por la Proposición 1.2.4, existen $m \geq 1$ y un subconjunto abierto U_m de S^1 tal que $\pi_m^{-1}(U_m) \subset U$. Sea $w_m \in U_m$. Como

$$h_m(w_m) = w_m e^{2\pi i(1/(p_1 ... p_{m-1}))},$$

entonces

$$h_m^{p_1 \cdot ... \cdot p_{m-1}}(w_m) = w_m.$$

Sea $A = \pi_m^{-1}(w_m)$. Es claro que $A \subseteq \pi_m^{-1}(U_m) \subseteq U$. Finalmente mostremos que $h^r(A) = A$, donde $r = p_1 ... p_{m-1}$. Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$; es decir, $z_m = w_m$. Así, $h^r((z_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (h_n^r(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Como $h_m^r(w_m) = w_m$, $(h_n^r(z_n))_{n\in\mathbb{N}} \in A$ y $h^r(A) \subseteq A$. Recíprocamente, si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$, existe un único $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ tal que $h^r((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (h_n^r(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como $z_m = w_m$ y $h^r(w_m) = w_m$, $x_m = w_m$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$. Es decir, $A \subseteq h^r(A)$. Por tanto $h^r(A) = A$. Así, por el Teorema 1.3.3, $\mathrm{Per}(2^h)$ es denso en $2^{\Sigma_{\mathcal{P}}}$. $\square$

Conclusiones y preguntas

El presente trabajo tuvo como objetivo principal mostrar continuos X y funciones continuas $f\colon X \to X$, donde la densidad de $\mathrm{Per}(2^f)$ en el hiperespacio 2^X, implicara o no la densidad de $\mathrm{Per}(f)$ en X, donde $\mathrm{Per}(f)$ denota el conjunto de los puntos periódicos de la función f. Concluimos los sigueintes resultados:

† El Teorema 2.3.2, donde probamos que dado X un continuo y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces, $\mathrm{Per}(2^f)$ es denso en 2^X si y solo si $\mathrm{Per}(2^{2^f})$ es denso en 2^{2^X}.

† El Teorema 2.3.9, donde probamos que dado X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua tal que $\mathrm{Cl}_{2^X}(\mathrm{Per}(2^f)) = 2^X$ y $\mathrm{Cl}_X(\mathrm{Per}(f)) \neq X$. Lo siguiente es válido:

   i. $\mathrm{Per}(2^{\mathrm{Cylin}(f)})$ es denso en $2^{\mathrm{Cylin}(X)}$ y $\mathrm{Per}(\mathrm{Cylin}(f)) \neq \mathrm{Cylin}(X)$.
   ii. $\mathrm{Per}(2^{\mathrm{Cone}(f)})$ es denso en $2^{\mathrm{Cone}(X)}$ y $\mathrm{Per}(\mathrm{Cone}(f)) \neq \mathrm{Cone}(X)$.
   iii. $\mathrm{Per}(2^{\mathrm{Sus}(f)})$ es denso en $2^{\mathrm{Sus}(X)}$ y $\mathrm{Per}(\mathrm{Sus}(f)) \neq \mathrm{Sus}(X)$.

   En particular si X es el cono de Cantor $\mathrm{Cone}(\mathcal{C})$ y f es el odómetro $\mathcal{O}$, tenemos que los conjunto de los puntos periódicos de las siguientes funciones $2^{\mathrm{Cone}}(\mathrm{Sus}(\mathcal{O}))$, $2^{\mathrm{Cylin}}(\mathrm{Cone}(\mathcal{O}))$, $2^{\mathrm{Sus}}(\mathrm{Cylin}(\mathcal{O}))$, etc. son densos en los hiperespacios $2^{\mathrm{Cone}(\mathrm{Sus}(\mathcal{C}))}$, $2^{\mathrm{Cylin}(\mathrm{Cone}(\mathcal{C}))}$, y $2^{\mathrm{Sus}(\mathrm{Cylin}(\mathcal{C}))}$, etc. respectivamente, mientras que los conjunto de los puntos periódicos de las funciones $\mathrm{Cone}(\mathrm{Sus}(\mathcal{O}))$, $\mathrm{Cylin}(\mathrm{Cone}(\mathcal{O}))$, $\mathrm{Sus}(\mathrm{Cylin}(\mathcal{O}))$, etc. no son densos en los continuos $\mathrm{Cone}(\mathrm{Sus}(\mathcal{C}))$, $\mathrm{Cylin}(\mathrm{Cone}(\mathcal{C}))$, y $\mathrm{Sus}(\mathrm{Cylin}(\mathcal{C}))$, etc. respectivamente.

† El Teorema 3.2.2, donde probamos que dado $\Sigma_{\mathcal{P}}$ un solenoide, donde $\mathcal{P} = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de números primos, existe un homeomorfismo $h\colon \Sigma_{\mathcal{P}} \to \Sigma_{\mathcal{P}}$ tal que $\mathrm{Per}(2^h)$ es denso en $2^{\Sigma_{\mathcal{P}}}$ y $\mathrm{Per}(h) = \emptyset$.

Terminamos nuestro trabajo con algunas preguntas que permanecen abiertas y pueden dar origen a futuras investigaciones en el área de los sistemas dinámicos discretos y las funciones inducidas entre hiperespacios de continuos.

Definición 3.2.3. Sean X y Y espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ una función continua. Diremos que f es *confluente* si para cada continuo $K \subseteq Y$ y cada componente C de $f^{-1}(K)$, se tiene que $f(C) = K$.

Pregunta 1. *Sean D una dendrita y $f\colon D \to D$ una función continua. ¿Qué condiciones debe tener la función f para que siempre que $\overline{Per(2^f)} = 2^X$, tengamos que $\overline{Per(f)} = X$?*

En particular:

Pregunta 2. *Sean D una dendrita y $f\colon D \to D$ una función abierta o confluente. ¿Si $\overline{Per(2^f)} = 2^X$ entonces $\overline{Per(f)} = X$?*

La siguiente pregunta fue planteada por el profesor H. Méndez en [25].

Pregunta 3. *Sea X un continuo encadenable hereditariamente descomponible. ¿Para toda función $f\colon X \to X$ se tiene que la densidad del conjunto* $\mathrm{Per}(2^f)$ *en* 2^X *implica la densidad de* $\mathrm{Per}(f)$ *en X?*

Bibliografía

[1] Abouda H. and Naghmouchi I., “A note on periodic points of dendrite maps and their induced maps ”, J. Math. Anal. Appl., vo. 448(1),2017, 722–725.

[2] Abouda H. and Naghmouchi I., “Monotone maps on dendrites and their induced maps ”, Topol. Appl.,204, 2016, 121-134.

[3] Acosta G., Hernández-Gutiérrez R., Naghmouchi I., and Oprocha P.,“Periodic points and transitivity on dendrites”, Ergodic. Theory. Dynam. Systems., 2016, arXiv:1312.7426v1.

[4] Banks J., “Chaos for induced hyperspace maps”, Chaos Solitons Fractals, vo. 25(3),2005,681–685.

[5] Banks J., Brooks J., Cairns G., David G., and Stacey P., “On Devaney’s Definition of Chaos”, American Math, Montly, vo. 99, 1992,332–334.

[6] Barge M., “The topological entropy of homeomorphisms of Knaster continua”, Houston J. Math., vo. 13, 1987, 465–485.

[7] Blanchard E., Glasner E., Koyada S. Maass A., “On Li-Yorke pairs”, J. Reine Angew. Math., vo. 547, 1992, 51–68.

[8] Block L.S., Coppel W.A., “Dynamics in One Dimension”, Lect. Notes in Matc., vo. 1513, 1992, Springer-Verlag.

[9] Cantor G., “Ueber unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten”, Math. Ann., vo. 21(4), 1883, 545 –591.

[10] Charatonik J-J., “Bosquejo de la historia de la teoría de continuos”, en: Invitación a la teoría de los continuos y sus hiperespacios (Editores: R. Escobedo, S. Macías, H. Méndez), Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 31, Sociedad Matemática Mexicana, 2006.

[11] Devaney R. L., “An introduction to chaotic dynamical”, Second Ed., Addison-Wesley, Redwood City, 1989.

[12] Dugundji J., “Topology”, Boston: Allin and Bacon, 1966.

[13] García J.L., Kwietniak D., Lampart M., Oprocha P. and Peris A., “Chaos on hyperspaces”, Nonlinear Anal., vo. 71(1-2), 1–8, 2009.

[14] Gengrong Z., Fanping Z. and Xinhe L., “Devaney’s chaotic on induced maps of hyperspace”, Chaos Solitons Fractals, vo. 27(2), 2006, 471–475.

[15] Hausdorff F.,“Grundzuge der Mengenlehre”, Leipzig, 1914. Primera edic., New York, 1949.

[16] Hernández-Gutiérrez R., Illanes A., and Martínez de-la Vega V.,“Uniqueness of hyperspaces of peano continua”, Rocky Mountain J. Math., no. 43(5), 2013, 1583 –1624.

[17] Illanes A. and Nadler S.B., Jr., “Hyperspaces fundamentals and recent advances ”, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 216. Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[18] Ingram W.T., “A brief historical view of continuum theory ”, Topol. Appl., vo. 153, 2006, 1530 –1539.

[19] Kuratowski K., “Topology ”, vo. 2, Academic press, New York and London, Warszawa, 1968.

[20] Kwapisz J.,“Homotopy and Dynamics for Homeomorphisms of solenoids and Knaster continua”, Fund. Math.,2001, 251–278.

[21] Macías S., “Topics on Continua ”, vo. 275. Chapman and Hall/CRC, Taylor and Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2015.

[22] Mai J.H, Shi E.H, “$\bar{R} = \bar{P}$ for maps od dendrites X with $Card(End(X)) < c$”, Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng. vo.19 (4), 2009, 1392–1396.

[23] Michael E., “Topologies on spaces of subsets”, Trans. Amer. Math. Soc., vo. 71(1),1951, 152–182.

[24] Méndez-Lango H., “Dinámica Colectiva”, Revista Integración. Vol. 30(1), 2012, 25–41.

[25] Méndez-Lango H., “On density of periodic points for induced hyperspace maps”, Topology Proc. vo. 35, 2010, 281–290.

[26] Méndez-Lango H., “On Intervals, Sensitivity Implies Chaos”, Revista Integración, no 21, 2003, 15–23.

[27] Nadler S. B. Jr., “Continuum Theory An Introduction ”, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vo. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[28] Nadler S-B. Jr., “Hyperspaces of sets”,Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., vo. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978 (reeditado por: Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 33, Sociedad Matemática Mexicana, 2006).

[29] Naghmouchi I., “Pointwise recurrent dendrite maps ”, Ergod. Theory Dyn. Syst. vo. 33, 2013, 1115–1123.

[30] Naghmouchi I., “Dynamical of monotone graph, dendrite and dendroid maps ”, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 2011, in press.

[31] Naghmouchi I., “Dynamical properties of monotone dendrite maps ”, Topol. Appl. vo.159(1), 2012, 144 –149.

[32] Pompeiu D., “Sur la continuité des fonctions de variables complexes”, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Sci. Math. Sci. Phys. vo. 7(3),1905, 265–315.

[33] Ruette S., “Chaos for Continuous Interval Maps”, Université Paris-Sud, France, 2003.

[34] Sabogal S. y Arenas G., “Una introducción a la geometría fractal”, Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, 2011.

[35] Teleiko A. and Zarichnyi M., “Categorical topology of compact Hausdorff spaces”, Math. Student, Monograph series, vo. 5, 1999, VNTL publishers, Ukraine.

[36] Vellekoop M., Berglund R., “On Intervals, Transitivity=Chaos”, Amer. Math. Monthly, no 101, 1994, 353-355.

[37] Vietoris L. , “Bereiche zweiter Ordnung”, Monats. Math. Phys. vo. 32(1),1922, 258–280.

[38] Vietoris L., “Kontinua zweiter Ordnung”, Monats. Math. Phys., vo. 33(1), 1923, 49–62.

[39] Willard S., General Topology, Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1968.