

**COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO DE METODOLOGÍAS DE EXPANSIÓN  
MODAL: UN ENFOQUE NUMÉRICO CON APLICACIÓN A DETECCIÓN DE  
DAÑO**

**RAFAEL JOSÉ NIÑO TORO**



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD FISICO-MECANICAS  
ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL  
BUCARAMANGA  
2011**

**COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO DE METODOLOGÍAS DE EXPANSIÓN  
MODAL: UN ENFOQUE NUMÉRICO CON APLICACIÓN A DETECCIÓN DE  
DAÑO**

**RAFAEL JOSÉ NIÑO TORO**

**Tesis de grado presentada como requisito parcial para optar  
por el título de Ingeniero Civil**

**Director:**

**OSCAR J. BEGAMBRE  
Ing. Civil, MSc, Ph.D.**

**Co-Director:**

**JESÚS D. VILLALBA  
Ing. Civil, MSc. USP**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD FISICO-MECANICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL  
BUCARAMANGA  
2011**

## DEDICATORIA

A mis padres, Marina Toro, que siempre creyó en mí, me apoyo y estuvo incondicionalmente a mi lado; Héctor Campo gracias por estar con nosotros y por darnos todo su apoyo, a ellos gracias por todo el amor que me han brindado, la confianza que depositaron en mí.

A mi hermana Karen Julianna que es parte fundamental en mi vida y es la que me guía a ser mejor cada día.

A mi abuela Rosa Noriega por creer en mí, por apoyarme en todo momento.

A mi familia siendo fundamental para mi formación y por todo el apoyo en cada momento de mi vida, por creer en mí manteniendo la ilusión de que puedo llegar muy lejos.

Esto es por ustedes.

## **AGRADECIMIENTOS**

Le agradezco a Jesús D. Villalba Morales por todo el tiempo dedicado, por su motivación, por contar con su excelente orientación durante la realización de esta investigación. A él mil gracias por todo su apoyo.

Al profesor Oscar Begambre por haberme dado la oportunidad de trabajar bajo su supervisión.

Le agradezco a Iván Gómez A. por darme la confianza, la motivación y por ayudarme a superarme cada día más en mis estudios.

A toda mi familia por todo el apoyo y cariño brindado.

A mis amigos y compañeros por compartir buenos instantes de mi vida y por todo el cariño brindado.

## TABLA DE CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	14
1. OBJETIVOS	17
1.1 OBJETIVO GENERAL	17
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	17
2. METODOLOGÍA	18
2.1 TÉCNICAS DE EXPANSIÓN MODAL	19
2.2 EXPANSIÓN GUYAN	19
2.3 EXPANSION IRS – IMPROVED REDUCTION SYSTEM	21
2.4 EXPANSIÓN DE KIDDER	24
2.5 EXPANSIÓN EXACTO	27
2.6 EXPANSIÓN EXACTA MODIFICADA	28
2.7 EXPANSIÓN DYNAMIC	29
2.8 EXPANSIÓN SEREP	30
2.9 MÉTODOS DE CORRELACIÓN	32
3. DETECCIÓN DE DAÑO	34
3.1 INTRODUCCIÓN	34
3.2 METODOLOGÍA DE LOCALIZACIÓN DE DAÑO	35
3.2.1 Metodología basada en energía	35
4. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL	38
4.1 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	38
4.2 ESTRUCTURAS ANALIZADAS	39
4.3 ESCENARIOS DE DAÑO	41
5. RESULTADOS	43
5.1 VIGA SIMPLEMENTE APOYADA	43
5.2 ESCENARIO MULTIPLE DE DAÑO	49
5.3 VIGA EN CANTILIVER	52
5.3.1 Escenario de daño multiple	55

5.3.2 Detección de daño	59
5.3.2.1 Viga Simplemente Apoyada	59
5.3.3 Viga en Cantiliver	76
CONCLUSIONES	92
RECOMENDACIONES	94
BIBLIOGRAFÍA	95

## LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Definición del tipo de material y del tipo de sección utilizada	40
Tabla 2. Conectividad de los elementos de las estructuras tipo viga.	40
Tabla 3. Escenarios de daño estudiados.	41
Tabla 4. Tipos incompletos en las formas modales experimentales leídas.	41
Tabla 5. V.S. Frecuencias Naturales en distintos elementos con daño	44
Tabla 6 V.S. Frecuencias Naturales en distintos elementos con daño	45
Tabla 7 V.C Frecuencias Naturales en distintos elementos con daño	52

## LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Elemento finito para Viga	38
Figura 2. Estructuras tipo viga	39
Figura 3. Detección de daños	43
Figura 4 Resultados del escenario múltiple de daño VS1-I1	46
Figura 5. Resultados del escenario de daño VS1-I4	48
Figura 6. Resultados del escenario múltiple de daño VS3-I1	49
Figura 7. Resultados del escenario de daño VS3-I4	51
Figura 8. Resultados de los escenarios de daño VC1-I1	53
Figura 9. Correlación de datos escenario de daño VC1-I4	54
Figura 10. Resultados del escenario de daño VC3-I1	56
Figura 11. Resultados del escenario de daño VC3-I4	57
Figura 12. Resultados del escenario de daño VS1-I1-M2	59
Figura 13. Resultados del escenario de daño VS1-I4-M2	60
Figura 14. Resultados escenario de daño VS3-I1-M2	61
Figura 15. Resultados escenario de daño VS3-I4-M2	62
Figura 16. Resultados escenario de daño VS1-I1-M10	63
Figura 17. Resultados escenario de daño VS1-I4-M10	64
Figura 18. Resultados escenario de daño VS3-I1-M10	66
Figura 19. Resultados escenario de daño VS3-I4-M10	67
Figura 20. Resultados escenario de daño VS1-I1-M2	68
Figura 21. Resultados escenario de daño VS1-I4-M2	69
Figura 22. Resultados del escenario de daño VS3-I1-M2	70
Figura 23. Resultados escenario de daño VS3-I4-M2	71
Figura 24. Resultados escenario de daño VS1-I1-M10	72
Figura 25. Resultados escenario daño VS1-I4-M10	73
Figura 26. Resultados escenario de daño VS3-I1-M10	74
Figura 27. Resultado escenario de daño VS3-I4-M10	75

Figura 28. Resultados escenario de daño VC1-I1-M2	76
Figura 29. Resultados escenario de daño VC1-I4-M2	77
Figura 30. Resultado escenario de daño VC3-I1-M2	78
Figura 31. Resultados escenario de daño VC3-I4-M2	79
Figura 32. Resultados escenario de daño VC1-I1-M10	80
Figura 33. Resultados escenario de daño VC1-I4-M10	81
Figura 34. Resultados escena de daño VC3-I1-M10	82
Figura 35. Resultados escenario de daño VC3-I4-M10	83
Figura 36. Resultados escenario de daño VC1-I1-M2	84
Figura 37. Resultados escenario de daño VC1-I4-M2	85
Figura 38. Resultados escenario de daños VC3-I1-M2	86
Figura 39. Resultados escenario de daños VC3-I4-M2	87
Figura 40. Resultados escenario de daño VC1-I1-M10	88
Figura 41. Resultados escenario de daño VC1-I4-M10	89
Figura 42. Resultados escenario de daño VC3-I1-M10	90
Figura 43. Resultados escenario de daño VC3-I4-M10	91

## RESUMEN

**TITULO:** Comparación de Metodologías de Expansión Modal: Un Enfoque Numérico con Aplicación a Detección de Daño.

**AUTOR:** NIÑO TORO, Rafael José\*\*

**PALABRAS CLAVES:** Expansión modal, parámetros dinámicos, elementos finitos, detección de daño

La evaluación del estado de las estructuras es un tema de investigación muy importante para diversos campos de ingeniería, y por eso, están siendo desarrolladas metodologías que permiten detectar el daño en una estructura. Es muy importante el poder evitar la pérdida de funcionalidad de la estructura, ya que afecta la seguridad de los ocupantes y puede generar pérdidas humanas y económicas.

El presente trabajo tiene como objetivo comparar las diferentes metodologías de expansión modal a partir de cambios ocurridos, entre las condiciones sin o con daño, en parámetros dinámicos de la estructura. Siete técnicas de expansión modal fueron implementadas (Guyan, Irs, Kidder, Exacto, Exacto Modificado, Dynamic, Serep) con la finalidad de comparar su desempeño en la detección de daño. Los parámetros dinámicos de la estructura sin y con daño, se obtiene por medio del método de elementos finitos de la estructura. Estos parámetros dinámicos miden los cambios de la respuesta dinámica después de ocurrido el daño. Las mediciones incompletas fueron consideradas de orden similar a las características de la información obtenida de ensayo dinámico real.

Las técnicas de expansión modal implementadas son aplicadas a estructuras tipo viga sometidas a diferentes escenarios de daño. Los resultados muestran un buen desempeño de ciertas técnicas de expansión modal y al emplear las técnicas de detección de daño se obtienen muy buenos resultados.

---

\* Trabajo de Grado

\*\* Facultad Fisico-Mecanica, Escuela de Ingeniería Civil, Universidad Industrial de Santander. Director, Oscar J. Begambre; Co-Director, Jesús D. Villalba.

## ABSTRACT

**TITLE:** Comparison of Modal Expansion Methodologies: A Numerical Approach with Application to Damage Detection

**AUTHOR:** NIÑO TORO, Rafael José\*\*

**KEYWORDS:** Modal expansion, dynamic parameters, finite element, detecting damage.

The assessment of structural health is an important research topic in many engineering fields and, for that reason, damage detection methodologies are being developed.

Is very important to avoid the loss of functionality of the structure because it affects the security of the people and it can lead human and economic loss.

The goal of this dissertation is to compare the different methodologies of modal expansion from changes presented, between the conditions with or without damages on dynamic parameters of the structure. Seven techniques of modal expansion were implemented (Guyan, Irs, Kidder, Exacto, Exacto Modificado, Dynamic, Serep) with the purpose of compare their performance on identifying damages. The dynamic parameters of the structure undamaged and damaged dynamic parameters are computed using the finite element model of the structure. These dynamic parameters measure the changes of the dynamic answer after the damage happen. The incomplete measurements were considered of similar order to the characteristics of the information obtained from the dynamic real essay.

The modal expansion techniques are applied to structures like girders under different scenaries of damage. The results show a good performance of certain modal expansion techniques and by using the damage detection techniques are obtained very good results.

---

\* Colleague thesis

\*\* Physical-Mechanical Faculty, School the engineering Civil, Industrial University of Santander. Director, Oscar J. Begambre; Co-Director, Jesús D. Villalba.

## INTRODUCCIÓN

Diversos factores como el envejecimiento, la fatiga o la exposición a los medios ambientales pueden producir daño en una estructura, lo cual puede tener cambios mínimos o hasta llegar al colapso de la misma. Lo anterior de un punto de vista económico y mirando la seguridad de sus ocupantes, es de gran importancia desarrollar nuevas metodologías que nos ayuden a determinar o predecir el daño en la estructura.

El daño es definido como los cambios introducidos en un sistema, que afectan negativamente su rendimiento actual o futuro (Doebling, 1998). Los daños estructurales usualmente se producen por una pérdida de rigidez de uno o más elementos, y también se puede ver afectada por la reducción en el módulo de elasticidad que varía las propiedades físicas del material, incluyendo los cambios en las condiciones de contorno y la conectividad del sistema. Estos cambios como la reducción de la rigidez, la aparición de grietas o distensión de las conexiones, producen cambios en las propiedades dinámicas y estáticas (Doebling, 1998). A priori es muy importante el poder evitar la pérdida de funcionalidad de la estructura, ya que afecta la seguridad de los ocupantes y puede generar pérdidas humanas y económicas. Para poder evitar dichas pérdidas existen diversos métodos para la detección de daño; algunos de ellos se basan en los cambios de las propiedades dinámicas después de ocurrido el daño. En el caso de la respuesta dinámica lo que se mide es la variación en las frecuencias, amortiguamiento modal y modos de vibración, en tanto en el otro caso de la respuesta estática se miden variaciones en los desplazamientos y deformaciones. Para estos casos cabe aclarar que en los algoritmos de detección de daño incluye cuatro etapas diferentes del análisis: la detección de la presencia de daño, la localización, la cuantificación y la predicción de la vida de la estructura. Sin embargo, para poder detectar con cierta precisión el daño de una estructura

puede ser necesario que sus frecuencias varíen como mínimo un 5% aproximadamente (Creed, 1995). Las relaciones entre los cambios y las frecuencias es debido a asumir escenarios de posibles daños calculados en base al modelo de elementos finitos.

A la hora de trabajar se debe realizar un ajuste de un modelo analítico necesario para tener la capacidad de realizar una comparación de los resultados obtenidos con el modelo de elementos finitos. Al hacer estas comparaciones, surge uno de los problemas más importantes como es la diferencia entre los grados de libertad de ambos modelos. El modelo de elementos finitos posee un gran número de grados de libertad para poder aproximarnos a una buena solución; por tanto el modelo experimental carece de grados de libertad ya que no es práctico (ni posible) medir todos los grados de libertad de la estructura se tienen en cuenta estas observaciones:

- Muchos grados de libertad de la estructura son internos y no se puede acceder a ellos.
- Para propósitos de un análisis modal, no es necesario disponer de un gran número de puntos de medición.
- Tener en cuenta que los grados de libertad son diferentes para las matrices de masa y rigidez que nos hacen imposible realizar operaciones entre ellas.
- Por otro lado el número y la posición de los grados deben ser idénticos tanto para los modelos experimentales como para el analítico.

Debido a esto existen dos posibles soluciones que nos ayudan a afrontar el problema obteniendo las respuestas esperadas para realizar las operaciones necesarias como lo son:

- *Reducción del modelo analítico:* los grados de libertad del modelo analítico son reducidos o condensados a un número de grados de libertad del modelo

experimentales, llamándose Grados de libertad primarios o maestros.

- *Expansión de modelo analítico*: los grados de libertad del modelo experimental se expanden hasta el número de grados de libertad analíticos.

El propósito de estos modelos es modificar los parámetros de la masa y la rigidez del modelo numérico con el fin de obtener unos mejores resultados numéricos e información experimental.

Por otro lado, si los modelos no son correlacionados, la utilización del modelo analítico para el estudio del comportamiento del sistema, puede llevar a la obtención de resultados irreales. En este caso, el uso de técnicas de ajuste del modelo puede llevar a una mejor representación del modelo analítico, y consecuentemente, a resultados más reales con relación al comportamiento del sistema. Se asume que el modelo experimental es el correcto y se procede a la corrección de los parámetros del modelo analítico con base en los datos experimentales.

## **1. OBJETIVOS**

### **1.1 OBJETIVO GENERAL**

Realizar un análisis comparativo de diferentes técnicas de expansión modal aplicadas a estructuras con daño.

### **1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Aplicar una metodología existente para detección de daño que utilice formas modales y verificar la influencia de la técnica de expansión modal utilizada sobre su desempeño.
- Programar en MATLAB (R2009a) el cálculo de frecuencias naturales y formas modales de una viga que no presente amortiguamiento y determinar las formas modales completas en la estructura.

## 2. METODOLOGÍA

El presente trabajo de grado pretende implementar los modelos de expansión modal a nivel de simulación, los cuales sirven para analizar, identificar y obtener información faltante y/o de formas modales faltantes. Estas técnicas de expansión modal serán implementadas, teniendo en cuenta que en general los modelos de estructuras analizadas, no presentan los mismos grados de libertad experimentales y analíticos.

En estos modelos se empleara un criterio de comparación que será definido para determinar cuál sería la mejor técnica de expansión modal a ser utilizada. Las técnicas se simularan, y los datos obtenidos serán datos experimentales debido al carácter numérico de esta investigación.

En los resultados obtenidos numéricamente se deberán tener en cuenta dos consideraciones para así realizar las comparaciones en los métodos:

- La estructura no presenta amortiguamiento.
- Las mediciones están libres de ruido.

De acuerdo con esta información obtenida se empleara el método de elementos finitos para modelar una estructura de tipo viga sometida a escenarios de daño simple y múltiple, por tanto se considera que no se conoce la posición del daño aplicado a la estructura utilizando las matrices del sistema original. El daño en la estructura será simulado como una reducción en la matriz de rigidez del elemento aplicar el daño.

Para cumplir con el proyecto planteado se llevara a cabo lo siguiente:

- Apoyados en diferentes medios teóricos y prácticos como bibliotecas e internet,

recopilaremos la mayor información posible relacionado con el tema a trabajar, teniendo en cuenta su aplicación en nuestros objetivos.

- Implementación en MATLAB de las técnicas de expansión modal y de la técnica de detección de daño a utilizar.
- Aplicación de las metodologías propuestas en una estructura de tipo viga que presenta escenarios de daño simple y múltiple. Debido al carácter numérico de este trabajo los escenarios serán introducidos en el modelo de elementos finitos de la estructura sin daño y a partir ellos, las características modales de la estructura con daño son calculadas.

## **2.1 TÉCNICAS DE EXPANSIÓN MODAL**

El ajuste de los modelos es necesario para ampliar la forma modal experimental en el conjunto de grados de libertad de elementos finitos, para estudios de correlación; más así como para el modelo de actualización y estudios de localización (Avitabile, 1998). Este ajuste es requerido debido a que el número de grados de libertad analíticos deben coincidir con el experimental, esencialmente este problema se puede solucionar con dos formas como son la reducción o expansión del modelo; en este trabajo será tomado el método de ajuste expansión del modelo, ya que al realizar pocas mediciones nos queda un modelo incompleto, y al aplicar esta técnica podemos expandir hasta el número de grados de libertad analíticos. Por otro lado estas técnicas introducen errores en las formas modales debido a los procedimientos numéricos empleados (Villalba, 2009). Entre las principales técnicas de expansión modal encontramos las siguientes:

## **2.2 EXPANSIÓN GUYAN (Guyan, 1975)**

Un método práctico, para lograr la reducción de la matriz de rigidez, es identificar aquellos grados de libertad que se desea condensar o reducir como grados de libertad dependiente o secundaria y expresarlos en función de los grados de

libertad seleccionados como independientes o primarios. La relación entre los grados de libertad primarios y secundarios se establece por medio de relaciones estáticas, (Guyan, 1975):

$$F = K_n \{u\} \quad (2-0)$$

Donde  $K_n$  es la matriz de rigidez del sistema,  $u$  es el vector de desplazamiento, y  $F$  es el vector fuerza. Aquellos grados de libertad (*primarios* o *activos*) se denominan por la coordenada ( $p$ ), los grados de libertad (*secundarios* o *eliminados*) que serán expandidos son designados por las primeras coordenadas ( $s$ ). Con este arreglo de coordenadas de la matriz de rigidez pueden ser escritas en forma particionada como:

$$\begin{bmatrix} [k_{pp}] & [k_{ps}] \\ [k_{sp}] & [k_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_p \\ F_s \end{Bmatrix} \quad (2-1)$$

Suponiendo que la fuerza en los grados de libertad secundarios son cero, de la Ec. (2-1) Se obtiene la segunda ecuación ampliada como:

$$[k_{ps}] u_p + [k_{ss}] u_s = 0 \quad (2-3)$$

De la Ec. (1-3) Se despeja  $u_s$  :

$$u_s = - [k_{ss}]^{-1} [k_{ps}] u_p \quad (2-4)$$

Retomando la matriz de rigidez particionada y separando las ecuaciones de (2-1) obtenemos:

$$[k_{pp}] u_p + [k_{ps}] u_s = F_p \quad (2-2)$$

Sustituimos la Ec. (1-4) en (1-2):

$$\begin{bmatrix} k_{pp} \\ -k_{ps} \end{bmatrix} u_p - k_{SS}^{-1} \begin{bmatrix} k_{sp} \end{bmatrix} u_p = F_p \quad (2-5)$$

Donde la matriz de transformación está dada por:

$$T_s = \begin{bmatrix} I \\ ts \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -k_{SS}^{-1} \begin{bmatrix} k_{sp} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

Y expandiendo las formas modales nos queda:

$$u_n = \begin{bmatrix} u_p \\ u_s \end{bmatrix} = [T_s] \begin{bmatrix} u_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -k_{SS}^{-1} \begin{bmatrix} k_{sp} \end{bmatrix} \end{bmatrix} u_p \quad (2-7)$$

Nótese que los grados primarios permanecen sin cambios, como se ve en la Ec. (2-7) :

$$u_p = I u_p \quad (2-8)$$

Y en el grado de libertad secundario se eliminan las estimadas por:

$$u_s = \begin{bmatrix} -k_{SS}^{-1} \begin{bmatrix} k_{sp} \end{bmatrix} \end{bmatrix} u_p \quad (2-9)$$

### 2.3 EXPANSION IRS – IMPROVED REDUCTION SYSTEM (O’Callahan, 1989)

El método de expansión “Improved Reduction System” (IRS) utiliza la matriz de transformación de la condensación estática (Guyan, 1975). Este método es muy esencial ya que trabajamos con la ecuación de movimiento pero sin amortiguamiento; la técnica IRS mejora el proceso de expansión Guyan quedando como:

$$M_n \ddot{u}_n + K_n u_n = 0 \quad (2-10)$$

Donde  $\{\ddot{u}_n\}$  nos representa el vector de aceleración del sistema. Este problema dinámico de la vibración no amortiguada se indica en:

$$\begin{bmatrix} K_n - \omega_j^2 [M_n] \end{bmatrix} u_n = 0 \quad (2-11)$$

Y  $\omega_j^2$  corresponde a la diagonal de los valores propios del sistema o frecuencias angulares.

La ecuación compactada del sistema puede escribirse como:

$$K_n \phi_i = M_n \phi_i \Omega^2 \quad (2-12)$$

Tomando la Ec. (1-0) é igualando la Ec. (2-12) Obteniendo:

$$K_n u_n = M_n \ddot{u}_n \quad (2-13)$$

Reemplazando  $F_p = 0$  en la Ec. (2-1) Las ecuaciones nos quedan:

$$\begin{bmatrix} [k_{pp}] & [k_{ps}] \\ [k_{sp}] & [k_{pp}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_s \end{Bmatrix} \quad (2-14)$$

Si analizamos la ecuación (2-1), y en donde la relación de identidad es  $u_p = u_p$  de esta ecuación podemos despejar los desplazamientos para obtener:

$$\begin{Bmatrix} u_p \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_p & \\ -k_{ss}^{-1} & k_{sp} \end{Bmatrix} u_p + \begin{Bmatrix} 0 \\ -k_{ss}^{-1} F_s \end{Bmatrix} \quad (2-15)$$

Donde la ecuación se puede escribir en forma compactada como:

$$u_n = T_s u_p + u_n^{fd} \quad (2-16)$$

Y haciendo la distribución de la fuerza de ajuste que es  $u_n^{fd}$  :

$$u_n^{fd} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -K_{ss}^{-1} F_s \end{Bmatrix} \quad (2-17)$$

Esta ecuación podemos escribirla como:

$$\mathbf{u}_n^{fd} = -\mathbf{K}_{SS}^{-1} \mathbf{F}_s \quad (2-18)$$

Teniendo la ecuación para el sistema de fuerzas inerciales desarrollaremos el ajuste para el vector de desplazamiento usando las Ec. (2-7), (2-13), (2-16)

$$\mathbf{u}_n^{fd} = \mathbf{K}_{SS}^{-1} \mathbf{M}_n \mathbf{T}_s \mathbf{u}_p \omega_j^2 \quad (2-19)$$

Para mejorar el vector modal se puede formar una ecuación usando (1-7), (1-16), (1-19)

$$\mathbf{u}_n^i = \mathbf{T}_s \mathbf{u}_p + \mathbf{K}_{SS}^{-1} \mathbf{M}_n \mathbf{T}_s \mathbf{u}_p \omega_j^2 \quad (2-20)$$

$\mathbf{u}_n^i$  Representa la mejora del vector modal actualizado incluyendo los efectos de la distribución de fuerzas inerciales borradas de la matriz de masa y la matriz de rigidez ya que tienden a afectar la solución.

Reescribiendo la Ec. (2-20) En una forma más conveniente como:

$$\mathbf{u}_n^i = \mathbf{T}_i \mathbf{u}_p \quad (2-21)$$

Donde  $\mathbf{T}_i$  es la nueva matriz mejorada dada como:

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{t}_s + \mathbf{t}_d \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

$\mathbf{t}_s$  Se debe tomar de la ecuación (2-6) y  $\mathbf{t}_d$  son los ajustes de los grados de libertad eliminados siendo  $\mathbf{t}_d$  como:

$$t_d = K_{SS}^{-1} [M_{sp} + M_{ss} t_s] M_a^{-1} K_a \quad (2-23)$$

Siendo  $[K_a]$  y  $[M_a]$  la matriz de rigidez y matriz de masa condensada escrita como:

$$[K_a] = T_s^T [K_n] [T_s] \quad (2-24)$$

$$[M_a] = T_s^T [M_n] [T_s] \quad (2-25)$$

Y expandiendo las formas modales:

$$u_s = [t_s + t_d] u_p \quad (2-26)$$

## 2.4 EXPANSIÓN DE KIDDER (Kidder, 1972)

En la determinación de las formas modales y las frecuencias de la estructura es conveniente reducir el tamaño del sistema por medio de la reducción de la matriz de rigidez y la matriz de masa, ya que estos factores son los que gobiernan las frecuencias. Al emplear la Ec. (2-11) y particionando la matriz se obtiene:

$$\left( -\omega_j^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow a \\ \rightarrow b \end{matrix} \quad (2-27)$$

Donde los grados de libertad (*primarios o activos*) se denominan por la coordenada (1), los grados de libertad (*secundarios o eliminados*) que serán expandidos son designados por las primeras coordenadas (2), y  $\omega_j^2$

Corresponde a la diagonal de los valores propios, donde  $M_{ij}$  y  $K_{ij}$  son las sub-matrices de masa y rigidez respectivamente;  $x_1$  y  $x_2$  son los sub-vectores

modales y  $x$  es el vector modal.

Al usar la ecuación (2-27b) y el sub-vector  $x_2$  puede ser expresada en términos del sub-vector  $x_1$  quedando:

$$x_2 = - \left( -w_j^2 M_{22} + K_{22} \right)^{-1} \left( -w_j^2 M_{21} + K_{21} \right) x_1 \quad (2-28)$$

Esta ecuación requiere una relación de transformación, después de haber determinado  $x_1$ , ya que  $x_2$  fue hallada de la Ec. (2-27b). Sustituyendo la ecuación (2-28) en la Ec. (2-27a) Se obtiene:

$$\left[ -w_j^2 M_{11} + K_{11} - \left( -w_j^2 M_{12} + K_{12} \right) \left( -w_j^2 M_{22} + K_{22} \right)^{-1} \left( -w_j^2 M_{21} + K_{21} \right) \right] x_1 = 0 \quad (2-29)$$

El conjunto de la reducción de la ecuación de frecuencias de la que la  $w_j^2$  y el sub-vector  $x_1$  donde son determinados usando métodos de iteración. Obteniendo la solución desde la ecuación (2-29) donde se puede quitar el tiempo de consumo entre la iteración y obteniendo la inversa de  $\left( -w_j^2 M_{22} + K_{22} \right)$  para cada valor de  $w_j^2$ , También se puede expandir la inversa empleando (2-29) en términos como:

$$\left( -w_j^2 M_{22} + K_{22} \right)^{-1} = K_{22}^{-1} + w_j^2 K_{22}^{-1} M_{22} K_{22}^{-1} + \dots \quad (2-30)$$

Se Procede a reemplazar (2-30) en (2-29) y dejamos los términos de  $w_j^2$ , estos términos contienen la mayor potencia.

$$\left( -w_j^2 M_R + K_R \right) x_1 = 0 \quad (2-31)$$

Donde

$$M_R = M_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}M_{21} - M_{12}K_{22}^{-1}K_{21} + K_{12}K_{22}^{-1}M_{22}K_{22}^{-1}K_{12} \quad (2-32)$$

$$K_R = K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21} \quad (2-33)$$

La validez de esta reducción se basa en la aproximación de términos expandidos en la Ec. (2-31), con la solución en la Ec. (2-31). Podemos usar los resultados para satisfacer la Ec. (2-29), o esta solución de la Ec. (2-31) se puede emplear como punto de inicio de la Ec. (2-29).

Obteniendo la solución para el sub-vector  $x_1$  y  $w_j^2$  calculamos el vector modal  $x_2$  que se calcula por medio de la Ec. (2-28).

Sin embargo si los valores obtenidos de  $x_1$  y  $w_j^2$  de (2-31), pueden dar la misma aproximación de la Ec. (2-30), por tanto podemos usar de la simplificación de la inversa como:

$$x_2 = -\left(K_{22}^{-1} + w_j^2 M_{22}K_{22}^{-1}\right)\left(-w_j^2 M_{21} + K_{21}\right) x_1 \quad (2-34)$$

Quedando el vector modal completo como:

$$x_n = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (2-35)$$

## 2.5 EXPANSIÓN EXACTO

La formulación del problema dinámico se indica en (2-11) . Este sistema se divide sobre la base de grados de libertad primario ( $p$ ) y secundario ( $s$ ) en donde la masa y la rigidez corresponden a la base del modelo de elementos finitos y las frecuencias naturales medidas experimentalmente.

$$\left( \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{sp} & K_{ss} \end{bmatrix} - \omega_j^2 \begin{bmatrix} M_{pp} & M_{ps} \\ M_{sp} & M_{ss} \end{bmatrix} \right) \begin{cases} \varphi_{pj} \\ \varphi_{sj} \end{cases} = 0 \begin{matrix} \rightarrow a \\ \rightarrow b \end{matrix} \quad (2-36)$$

Donde  $j$  corresponde a la  $j$  -ésima forma modal y  $n$  es el número de grados de libertad.

Al resolver (2-36) en forma de filas tenemos:

$$\left( K_{pp} - \omega_j^2 M_{pp} \right) \varphi_{pj} + \left( K_{ps} - \omega_j^2 M_{ps} \right) \varphi_{sj} = 0 \quad (2-36a)$$

$$\left( K_{sp} - \omega_j^2 M_{sp} \right) \varphi_{pj} + \left( K_{ss} - \omega_j^2 M_{ss} \right) \varphi_{sj} = 0 \quad (2-36b)$$

En el análisis modal solo faltaría hallar  $\varphi_{sj}$ . Para calcular el vector modal faltante procedemos a emplear la transformada de la matriz:

$$\varphi_{sj} = T \varphi_{pj} \quad (2-37)$$

Donde  $T$  es la matriz de transformación y se obtiene de (2-36b):

$$T = \left( K_{sp} - \omega_j^2 M_{sp} \right)^{-1} * \left( K_{ss} - \omega_j^2 M_{ss} \right) \quad (2-38)$$

La matriz de transformación dada (2-38) muestra que la expansión de los modos

debe realizarse para cada modo a la vez, siendo necesario el conocimiento de las frecuencias naturales.

Obteniendo las formas modales nos queda el sistema:

$$\varphi_n = \begin{Bmatrix} \varphi_{pj} \\ \varphi_{sj} \end{Bmatrix} \quad (2-39)$$

## 2.6 EXPANSIÓN EXACTA MODIFICADA (Gysin, 1990)

Este método emplea la inclusión de todos los términos de la matriz de masa y la matriz de rigidez de la Ec. (2-36) A través de una modificación empleada en la Ec. (2-38):

$$\begin{bmatrix} K_{pp} - w_j^2 M_{pp} \\ K_{sp} - w_j^2 M_{sp} \end{bmatrix} = [A_1] \quad (2-40)$$

$$\begin{bmatrix} K_{ps} - w_j^2 M_{ps} \\ K_{ss} - w_j^2 M_{ss} \end{bmatrix} = [A_2] \quad (2-41)$$

Los valores  $A_1$  y  $A_2$  muestra que la expansión de los modos debe realizarse para cada modo a la vez, siendo necesario el conocimiento de las frecuencias naturales.

Al reemplazar (2-40) y (2-41) en la (2-36a) y (2-36b) nos queda:

$$A_1^* \varphi_{pj} + A_2^* \varphi_{sj} = 0 \quad (2-42)$$

Lo que nos lleva a la transformación de la matriz  $T$ :

$$T = -A_2^+ * A_1 \quad (2-43)$$

Para finalizar debemos sustituir Ec. (2-43) en la Ec. (2-37) Para obtener las formas modales faltantes.

## 2.7 EXPANSIÓN DYNAMIC (Miller, 1980)

Considerando unos problemas de valores propios de un sistema discreto, el problema de vibración libre se describe como:

$$\begin{bmatrix} [M_{pp}] & [M_{ps}] \\ [M_{sp}] & [M_{pp}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [k_{pp}] & [k_{ps}] \\ [k_{sp}] & [k_{pp}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_p \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow a \\ \rightarrow b \end{matrix} \quad (2-44)$$

Donde  $M$  = Matriz de masa;  $K$  = Matriz de rigidez;  $\ddot{x}$  = Aceleración; para un sistema de problemas en valores propios.

$$\ddot{x} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_s \end{Bmatrix} = -\omega_j^2 \begin{Bmatrix} x_p \\ x_s \end{Bmatrix} \quad (2-45)$$

Donde  $\omega_j^2$  = valores propios o frecuencias angulares, y sustituyendo (2-45) en (2-44) tenemos:

$$\left( -\omega_j^2 \begin{bmatrix} M_{pp} & M_{ps} \\ M_{sp} & M_{ss} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{sp} & K_{pp} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x_p \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow a \\ \rightarrow b \end{matrix} \quad (2-46)$$

Al resolver el sistema (2-46) en forma de filas nos queda:

$$\left( K_{pp} - \omega_j^2 M_{pp} \right) x_p + \left( K_{ps} - \omega_j^2 M_{ps} \right) x_s = 0 \quad (2-46a)$$

$$\left( K_{sp} - \omega_j^2 M_{sp} \right) x_p + \left( K_{ss} - \omega_j^2 M_{ss} \right) x_s = 0 \quad (2-46b)$$

En el análisis modal solo faltaría hallar  $x_2$ . Para calcular el vector modal faltante procedemos a emplear la transformada de la matriz:

$$x_s = -T x_p \quad (2-47)$$

Donde  $T$  = Matriz de transformación y la obtenemos de la forma:

$$T = K_{SS}^{-1} K_{sp} + \omega_j^2 - K_{SS}^{-1} M_{sp} + K_{SS}^{-1} M_{ss} K_{SS}^{-1} K_{sp} \quad (2-48)$$

## 2.8 EXPANSIÓN SEREP (O'Callahan, Avitabile, Riemer, 1989)

Este método nos proporciona una mejor selección arbitraria de los modos del sistema, también se emplea las formas modales analíticas y experimentales del modelo completo del sistema relacionándolo con los grados libertad *primario* o *activos* ( $a$ ) y *secundarios* o *eliminados* ( $d$ ). Este método emplea un movimiento de vibración libre como:

$$M_n \ddot{x}_n + K_n x_n = 0 \quad (2-49)$$

De esta ecuación surgen las formas modales experimentales:

$$[E_n] = \begin{bmatrix} E_a \\ E_d \end{bmatrix} = [T_u][E_a] \quad (2-50)$$

Dónde:

$T_u$  Es la transformación de la matriz y  $E_n$  son las formas modales experimentales completas. Esta matriz de transformación la utilizamos para expandir los grados de libertad y se puede obtener de la forma:

$$[T_u] = [u_n] u_a^g \quad (2-51)$$

$u_n$  Son las formas modales analíticas completas.

Al reordenar  $T_u$  tenemos:

$$[T_u] = \begin{bmatrix} u_a & u_a^g \\ u_d & u_a \end{bmatrix} \quad (2-51a)$$

Donde  $u_a^g$  es la inversa generalizada o pseudo inversa que se obtiene como:

Si  $u_a$  es una matriz de dimensiones  $(axm)$  donde  $(a)$  son los grados de libertad activos y  $(m)$  es el rango del vector modal entonces tenemos dos tipos aplicar:

**Tipo A:**  $a \geq m$

El rango lo marca  $(m)$ , y nos quiere decir que el número de ecuaciones es mayor o igual al número de incógnitas. Quedando la inversa generalizada o pseudo inversa como:

$$u_a^g = u_a^T (u_a u_a^T)^{-1} u_a \quad (2-52)$$

**Tipo B:**  $a \leq m$

El rango lo marca  $(a)$  y nos dice que el número de ecuaciones es menor o igual al número de incógnitas quedando la inversa generalizada o pseudo inversa como:

$$u_a^g = u_a (u_a u_a^T)^{-1} u_a^T \quad (2-53a)$$

Ahora de acuerdo al tipo de rango aplicamos la ecuación (2-45) y tendríamos:

Obsérvese que los grados de libertad primarios suele tener unos cambios como se ve en la siguiente ecuación:

$$E_{a \text{ exp}} = [u_a] u_a^s [u_a] \quad (2-54)$$

Y los grados de libertad secundarios cambian, quedando de la forma:

$$E_{d \text{ exp}} = [u_d] u_a^s [u_a] \quad (2-55)$$

## 2.9 MÉTODOS DE CORRELACIÓN

El “Modal Assurance Criterion” (MAC) es un escalar de relación constante; la relación que se causa entre los dos vectores modales tanto analíticos como experimentales.

El valor de MAC puede dar una indicación como para validar el factor del modelo a escala. Mientras que cierta implicación del MAC son dependientes a los cálculos de las formas modales analíticas y experimentales.

Los criterios a desarrollar para calcular la correlación entre los datos analíticos y experimentales se debe realizar por medio de vectores que representan los modos de vibración. De acuerdo con esta forma podemos decir que si los dos vectores representan el mismo modo de vibración, ambos vectores deberían ser proporcionales entre sí. Definiendo el “Modal Assurance Criterion” (MAC):

$$MAC = \frac{\left[ \begin{array}{cc} U_j & E_j \end{array} \right]^2}{\left[ \begin{array}{cc} U_j & U_j \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} E_j & E_j \end{array} \right]} \quad (2-56)$$

Donde  $U_j$  = vector de modo de vibración analítico,  $E_j$  = vector de modo de vibración experimental.

Para saber si las formas modales se relacionan, se toman los criterios de la técnica aplicada MAC:

- Los valores del MAC deben oscilar entre 0 y 1.
- Si los MAC se acercan a cero quiere decir que hay poca o ninguna correlación entre los dos vectores, por lo tanto se puede afirmar que representan modos de vibrar diferente, esto puede ser debido a:
  - El sistema es no estacionario. Este puede ocurrir cuando el sistema es sometido a cambios en la masa y la rigidez durante el periodo de pruebas.
  - El sistema es no lineal. La linealidad en el sistema es necesario en diferentes funciones de frecuencia de respuesta generalizando las diferentes excitaciones de posición y excitaciones de señal.
  - Hay ruido en el vector modal analítico.
  - El vector modal para los parámetros de estimación son inválidos. La función de frecuencia de respuesta en las mediciones de algunos datos contiene errores dando un parámetro de estimación modal no consistente con los datos (Allemang & Brown, 1982)
- Si los MAC toman el valor de uno, indica que hay un grado de similitud entre los dos vectores modales analizados, por lo tanto podemos afirmar que la proporcionalidad es perfecta entre los vectores analizados.

A la hora de llevar a cabo el cálculo del MAC surge un problema fundamental que es la diferencia de tamaños existentes entre el modelo experimental y el modelo de elementos finitos.

Por otro parte, los modelos experimentales no precisan de tantos grados de libertad para determinar adecuadamente las frecuencias. Por lo tanto, para evaluar el MAC es necesario compatibilizar de alguna forma el diferente número de grados de libertad de ambos modelos, lo cual se puede realizar mediante condensación o expansión, siendo la técnica más indicada a emplear.

### 3. DETECCIÓN DE DAÑO

#### 3.1 INTRODUCCIÓN

Los daños estructurales a menudo se producen por una pérdida en la rigidez de uno o más miembros que causan una reducción en el módulo de elasticidad del material, afectando las frecuencias y las formas modales del sistema. Al utilizar pruebas dinámicas para determinar los modos de vibración de las estructuras, cualquier disminución en sus valores puede interpretarse como una pérdida de su rigidez. Sin embargo, para poder detectar con cierta precisión el daño de una estructura puede ser necesario que sus frecuencias de vibración tengan un cambio mínimo del 5% aproximadamente (Creed, 1995). Estas metodologías después de producir el daño, se presentan diversas alteraciones en las propiedades de dicha estructura (matriz de masa, rigidez del modelo de elementos finitos), lo que implica que se producen cambios en las frecuencias naturales, formas modales. Muchos métodos han sido desarrollados para detectar la ubicación y el tamaño del daño.

Cuando se desea proponer una metodología para detección de daño basada en vibraciones los siguientes aspectos deben ser tenidos en cuenta:

- Adams et al (1978), Cawley e Adams (1979) presentaron su método: la relación entre el cambio de frecuencias en cualquiera de los modos en función de la ubicación de daño. Las relaciones de los cambios de frecuencias es debido a los posibles escenarios de daño con base al modelo de elementos finitos.
- Cornwell, Doebling e Farrar (1999) empleando variaciones en la energía de deformación para detectar daños en placas. La principal característica del método es que no precisa de un modelo de elementos finitos correlacionado ni de formas modales normalizadas. Las formas modales deben estar definidas para todos los

grados de libertad del modelo de elementos finitos.

- Kim e Chun (2004) presentando una metodología de detección de daño a nivel de que utiliza cambios en las formas modales y frecuencias naturales. La principal característica de esta metodología y que así precisa de un modo para obtener buenos resultados, es la utilización de varios modos que mejoraría los resultados así formulando un segundo problema de optimización.
- Lim and Kashangaki (1994) desarrollo los mejores vectores propios y lograr que se calculen en base a un candidato para asumir el caso de daño.
- Li, Yang e James (2006) localizaron daño en estructuras 3D mediante descomposición de energía de deformación modal para cada elemento como contribución debidas a coordenadas axiales y transversales. Con esta descomposición los autores procuran hacer que el método sea menos sensible a la posición de daño y a tipo de modo utilizado.

### 3.2 METODOLOGÍA DE LOCALIZACIÓN DE DAÑO

Existen diversas metodologías para la detección de daño estructural basadas en los cambios de parámetros de formas modales formulada en las últimas décadas. En este trabajo se revisó la metodología de localización de daño que utiliza como parámetros en las variaciones de la energía de deformación modal, variaciones de las formas modales y frecuencias naturales. Ahora seguiremos con la formulación de una de ellas.

**3.2.1 Metodología basada en energía.** La energía de deformación modal (*MSE*) elemental se define como un producto de la matriz de rigidez del elemento y la segunda potencia del componente de las formas modales. Para *j*-ésimo elemento y el *i*-ésimo modo, el *MSE* antes y después de la ocurrencia de daño pueden ser definidos como (SHI et al., 1998):

$$MSE = \varphi_i^T [K_j] \varphi_i \quad (3-1)$$

$$MSE_{ij}^d = \varphi_{di}^T [K_{dj}] \varphi_{di} \quad (3-2)$$

En el cual  $\varphi_i$  corresponde a la forma modal  $i$ ,  $K_j$  es la matriz de rigidez global del elemento y  $d$  se trata del elemento damnificado.

La disminución de la rigidez de un elemento afecta las propiedades físicas como lo son las formas modales, de hecho esto permite obtener una gran variación de MSE del elemento damnificado y pequeñas variaciones en los otros elementos. Partiendo de esta suposición (Shi and Law, 1998) propusieron localizar daño mediante una relación de cambios de energía modal (*MSECR*):

$$MSECR_j^i = \frac{|MSE_{ij}^d - MSE_{ij}|}{MSE_{ij}} \quad (3-3)$$

Si consideramos *MSE* para  $m$  modos,  $MSECR_j$  para el  $j$ -ésimo elemento se define como:

$$MSECR_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{MSECR_j^i}{MSECR_{\max}^i} \quad (3-4)$$

Law, Shi and Zhang (1998) consideran un aumento en la energía de deformación modal elemental significaría una reducción en energía cinética elemental y la proporción de la energía de deformación en las formas modales a la energía cinética de cada elemento puede ser un indicador más sensible que cualquier cambio en la rigidez de la energía de deformación de las formas modales. Un parámetro más sensible al daño, cuando comparo con *MSE*, puede ser formulado por medio de la relación entre *MSE* y el coeficiente de energía elemental  $EEQ_{ij}$  asociado al elemento  $j$  en el modo  $i$  para condiciones inicial y damnificada; Se considera que no hay variación en la matriz de masa en la estructura y se expresa

como:

$$EEQ_{ij} = \frac{\varphi_i^T [K_j] \varphi_i}{\varphi_i^T [M_j] \varphi_i} \quad (3-5)$$

$$EEQ_{dij} = \frac{\varphi_{di}^T [K_{dj}] \varphi_{di}}{\varphi_{di}^T [M_j] \varphi_{di}} \quad (3-6)$$

Donde  $M_j$  es la matriz de masa del elemento.

La relación de diferencia del coeficiente de energía elemental  $EEQDR_{ij}$  se presenta como:

$$EEQDR_{ij} = \frac{|EEQ_{ij} - EEQ_{dij}|}{EEQ_{ij}} \quad (3-7)$$

Cuando utilizamos el número de modos  $m$  y  $MSECR_j$  de  $j$ -ésimo elemento se define como:

$$EEQDR_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{EEQDR_j^i}{EEQDR_{\max}^i} \quad (3-8)$$

Las dos propuestas anteriores necesitan que sean previstas las formas modales completas para la realización de localización de daño.

Los elementos damnificados serán aquellos que presenten mayores valores relativos de los coeficientes  $MSECR_j$  y  $EEQDR_j$  dados en las Ec. (3-4) Y (3-8) respectivamente. Unos pocos modos de vibración son necesarios para obtener una buena precisión en la localización.

## 4. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

### 4.1 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

El método de elementos finitos es un procedimiento general de discretización (LI, YANG, & S., 2006) de los problemas continuos planteados por expresiones definidas matemáticamente.

Este método permite calcular las relaciones entre fuerzas, desplazamientos para cada miembro de la estructura y después procede al ensamble del conjunto siguiendo un procedimiento definido que consiste en establecer el equilibrio local en cada “nudo” o punto de unión de la estructura. A partir de tales ecuaciones se puede obtener los desplazamientos desconocidos. En el ámbito de detección de daño el método de los elementos finitos es utilizado para la representación de las condiciones iniciales y actuales de la estructura.

Un elemento tipo viga presentan los grados de libertad mostrados en la en la Figura 1. Que presenta un grado de libertad transversal y uno rotacional.

Figura 1. Elemento finito para Viga



Para un elemento finito de viga y considerando el modelo de Euler-Bernoulli, obteniéndose las matrices de masa y de rigidez:

$$M = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

Donde:

$\rho$  = Densidad del elemento,  $A$  = área del elemento,  $L$  = Longitud del elemento.

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12L & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12L & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

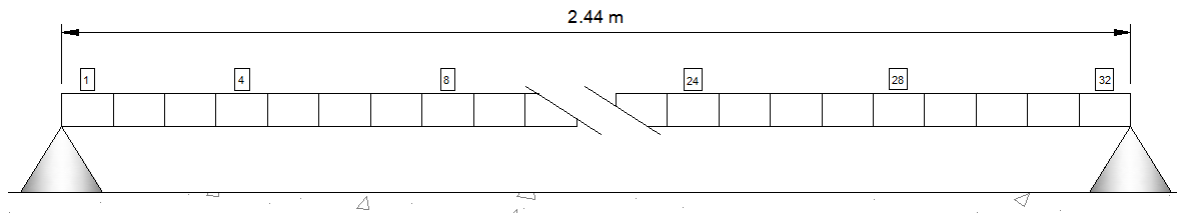
Siendo  $I$  = Inercia de la sección transversal del elemento,  $E$  = Módulo de elasticidad del elemento.

La matriz de rigidez dada en la Ec. (4-2) Es idéntica a la matriz de rigidez estática, una vez que en la aproximación del campo de desplazamientos que fueron empleadas funciones de forma idéntica a los análisis estáticos de vigas.

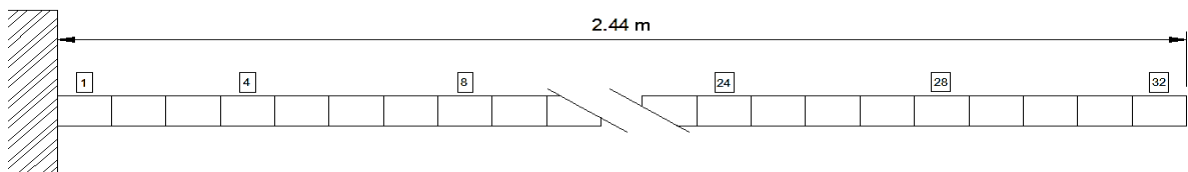
#### 4.2 ESTRUCTURAS ANALIZADAS

Las metodologías de detección de daño a ser estudiadas serán aplicadas sobre estructuras tipo viga como son: viga simplemente apoyada, viga en voladizo. Las figuras tomadas como ejemplo son mostradas en la Figura 2.

Figura 2. Estructuras tipo viga



(a) Simplemente apoyada



(b) En cantiliver.

Las vigas, simplemente apoyada y en cantilever tienen una longitud de  $2.44m$  y sus divisiones son tomadas por el método de elementos finitos (véase, Figura 2) Las estructuras anteriores se encuentran constituidas por un único tipo de material, y con la sección constante (véase, Tabla 1).

Tabla 1. Definición del tipo de material y del tipo de sección utilizada

<b>Tipo</b>	<b>Propiedades</b>	<b>Valor</b>
Material	Módulo de elasticidad	$199.95E9 \text{ N / m}^2$
	Densidad	$7.8371 \text{ Kg / m}^3$
Sección	Área	$0.00304 \text{ m}^2$
	Momento de Inercia	$4.29E-5 \text{ m}^4$

Es muy importante el saber cómo se encuentra la conectividad de la estructura que para las formas modales leídos es importantes saber cuáles son los desplazamientos verticales y rotacionales (véase, Tabla 2).

Tabla 2. Conectividad de los elementos de las estructuras tipo viga.

<b>Elemento</b>	<b>No Inicial</b>	<b>No Final</b>	<b>Elemento</b>	<b>No Inicial</b>	<b>No Final</b>
I	1	4	XVII	33	36
II	3	6	XVIII	35	38
III	5	8	XIX	37	40
IV	7	10	XX	39	42
V	9	12	XXI	41	44
VI	11	14	XXII	43	46
VII	13	16	XXIII	45	48
VIII	15	18	XXIV	47	50
IX	17	20	XXV	49	52
X	19	22	XXVI	51	54
XI	21	24	XXVII	53	56
XII	23	26	XXVIII	55	58
XIII	25	28	XXIX	57	60
XIV	27	30	XXX	59	62
XV	29	32	XXXI	61	64
XVI	31	34	XXXII	63	66

### 4.3 ESCENARIOS DE DAÑO

En el presente trabajo el daño en el elemento  $j$  será asumido como una disminución en la rigidez de ese elemento, y es representado por el coeficiente de reducción  $\beta_i$ . Este coeficiente toma el valor de 0 cuando el elemento no presenta daño, y al tomar el valor de 1 indicaría la pérdida total del elemento. La matriz de rigidez damnificada del elemento  $j$  es calculada multiplicándose la matriz de rigidez original por el factor  $(1 - \beta_i)$ .

Diversos escenarios de daño son considerados para la evaluación del desempeño de las metodologías estudiadas (véase, Tabla 3).

Tabla 3. Escenarios de daño estudiados.

Estructura	Código	Elem.	Daño	Modos
Viga simplemente apoyada	VS1	7	0,3	M2
	VS3	3	0,5	
		24	0,35	
Viga en Cantiliver	VC1	4	0,3	M10
	VC3	20	0,25	
		29	0,3	

Tabla 4. Tipos incompletos en las formas modales experimentales leídas.

Identificador	Configuración
IY	Solo grados de libertad verticales leídos
I1	Mediciones verticales en los nodos 3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39,41, 43,45,47,49,51,53,55,57,59,61,63,*65
I2	Mediciones verticales en los nodos 3,7,9,11,13,15,19,21,23,27,29,33,35,37,39,41, 45,47,51,53,55,57,59,61,63
I3	Mediciones verticales en los nodos 5,9,13,17,21,25,29,33,37,41,45,49,53,57,61
I4	Mediciones verticales en los nodos 7,17,25,33,41,49,57,63

\*65 Este grado de libertad vertical será utilizado para la viga en voladizo.

De igual forma, son estudiados diversos tipos incompletos de los datos experimentales (véase, Tabla 4) siendo la configuración I1 la utilizada para representar las mediciones experimentales reales. Debido a que experimentalmente solo unos pocos modos pueden ser medidos. En el presente trabajo fue considerado que únicamente se dispone de los primeros diez modos de vibración.

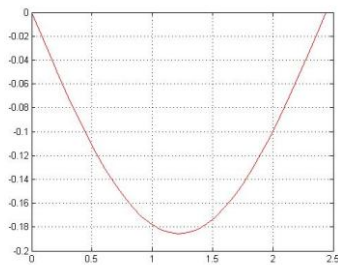
Como notación para los diversos casos de daño será utilizado el código formado por el identificador del escenario de daño, y por el tipo de incompletos. Por ejemplo, el caso VS1- I1-M2 representa un escenario de daño simple para la viga simplemente apoyada con incompletos en los datos tipo I1 empleando la toma de los dos primeros modos fundamentales tipo M2.

## 5. RESULTADOS

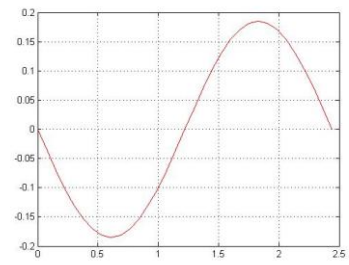
### 5.1 VIGA SIMPLEMENTE APOYADA

Para los ejemplos de viga simplemente apoyada (véase, Figuras 2.a) para los escenarios de daño (véase, Tabla 3), los resultados son presentados. Los datos referencia a los modos fundamentales de la estructura tipo viga simplemente apoyada, (véase, Figura 2.a) que son tenidos en cuenta para el estudio posterior de la metodología de detección de daño (véase, Figuras 3).

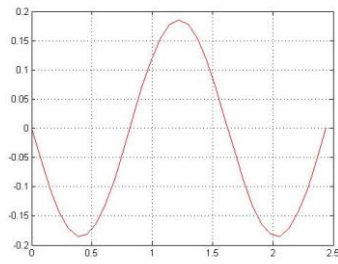
Figura 3. Detección de daños



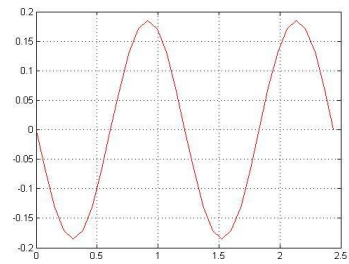
(a) Primer Modo



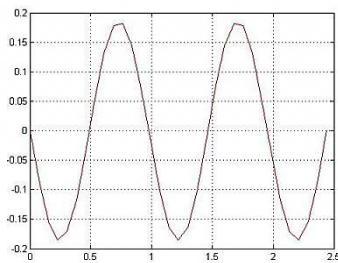
(b) Segundo Modo



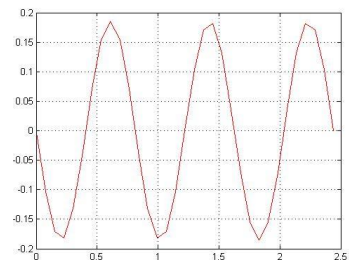
(c) Tercer Modo



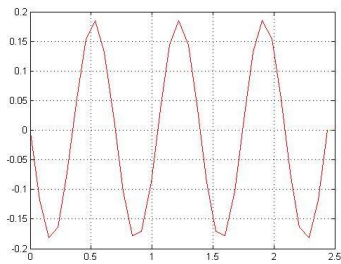
(d) Cuarto Modo



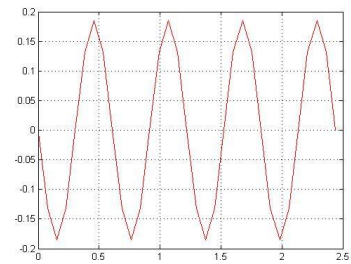
(e) Quinto Modo



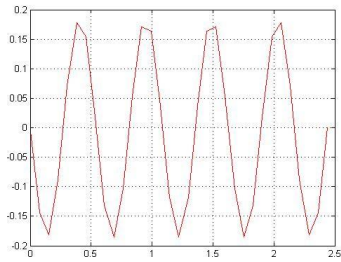
(f) Sexto Modo



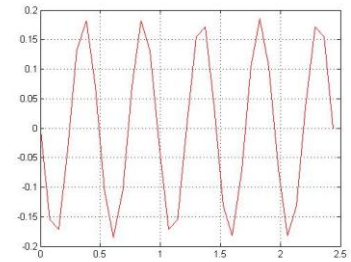
**(g) Séptimo Modo**



**(h) Octavo Modo**



**(i) Noveno Modo**



**(j) Decimo Modo**

Las Tablas 5 y 6 hacen referencia a las frecuencias de los elementos damnificados y los cambios que sufren al aplicarle el daño a los elementos.

Tabla 5. V.S. Frecuencias Naturales en distintos elementos con daño (ver Tabla 3)

<b>Ejemplos VS</b>							
<b>Frecuencias Naturales (Hz)</b>							
<b>Modo</b>	<b>Sin Daño</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D7</b>	<b>D11</b>	<b>D12</b>	<b>D13</b>
1	158,312	158,276	158,017	157,563	156,774	155,681	156,001
2	633,250	632,677	628,826	625,672	626,889	625,756	629,109
3	1424,820	1422,036	1404,865	1408,838	1424,639	1422,951	1418,620
4	2533,041	2524,756	2480,338	2523,071	2510,576	2486,394	2495,194
5	3957,970	3939,299	3858,277	3956,798	3918,304	3931,129	3955,371
6	5699,720	5664,766	5551,578	5669,544	5696,912	5673,405	5631,915
7	7758,496	7701,417	7575,692	7670,233	7696,319	7622,268	7694,886
8	10134,628	10050,945	9940,677	10036,195	10034,958	10100,582	10105,681
9	12828,618	12716,348	12648,460	12783,862	12815,021	12719,181	12651,569
10	15841,185	15701,445	15693,397	15823,178	15727,016	15608,800	15804,716

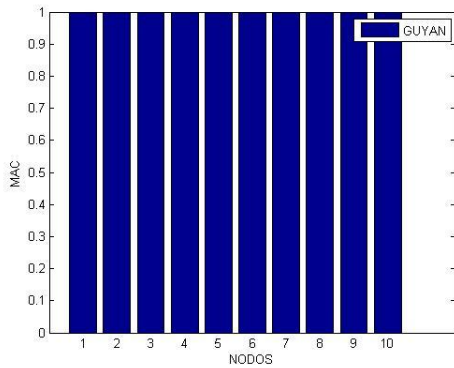
Tabla 6 V.S. Frecuencias Naturales en distintos elementos con daño (ver, Tabla 3)

<b>Ejemplos VS</b>						
<b>Frecuencias Naturales (Hz)</b>						
<b>Modo</b>	<b>Sin Daño</b>	<b>D15</b>	<b>D16</b>	<b>D24</b>	<b>D30</b>	<b>D32</b>
1	158,312	156,278	155,721	156,867	158,260	158,306
2	633,250	632,529	633,117	623,140	632,468	633,142
3	1424,820	1409,877	1402,675	1416,756	1421,275	1424,277
4	2533,041	2522,895	2531,000	2530,981	2523,498	2531,347
5	3957,970	3930,456	3900,937	3911,940	3939,195	3953,901
6	5699,720	5657,701	5689,988	5622,863	5670,219	5691,448
7	7758,496	7730,962	7657,291	7734,199	7719,807	7743,529
8	10134,628	10033,725	10106,115	10105,230	10091,371	10109,795
9	12828,618	12809,783	12680,344	12665,166	12787,125	12790,106
10	15841,185	15668,209	15777,692	15676,678	15807,164	15784,632

De las Tablas 5 y 6, queda claro que la presencia de daño en la estructura modifica las frecuencias naturales del sistema, pero no provee la suficiente información necesaria para localizar el daño en la estructura.

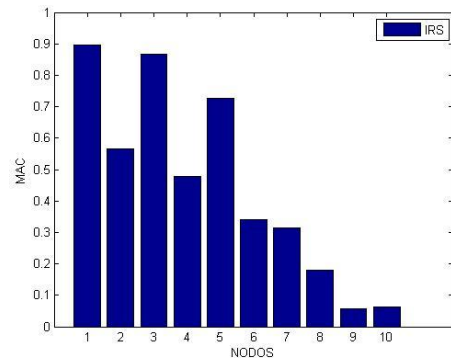
Aplicando la metodología original de la correlación de los datos, a los métodos de expansiones modales estudiadas; la correlación (MAC) ayuda a la obtención y a la visualización de las técnicas que se ajusta al modelo original, y dan los mejores resultados. En las Figuras presentadas puede ser observado, que para el caso de la viga simplemente apoyada para el escenario de daño **VS1-I1** (véase Figura 2.a y Tabla 4), con una correlación de los datos que permite saber cuáles son los métodos de expansión modal se ajustan al modelo original. En el método de correlación aplicado se busca que los MAC sean iguales a uno para obtener una mejor correlación (véase, Figura 4).

Figura 4 Resultados del escenario múltiple de daño VS1-I1

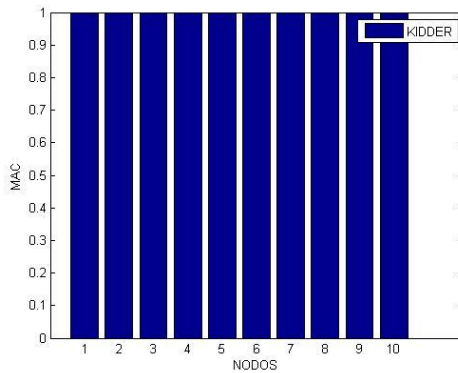


Mac Guyan

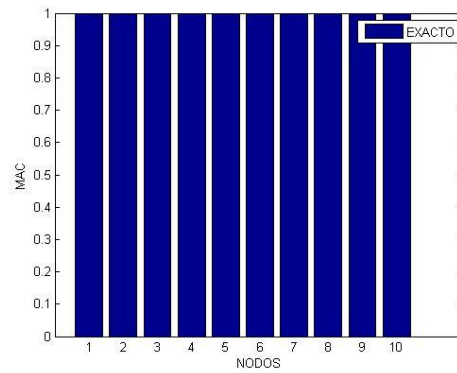
(a)



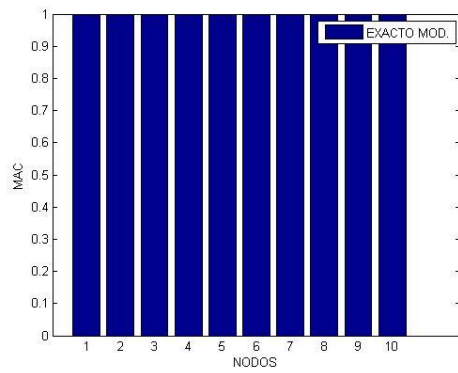
(b) Mac IRS



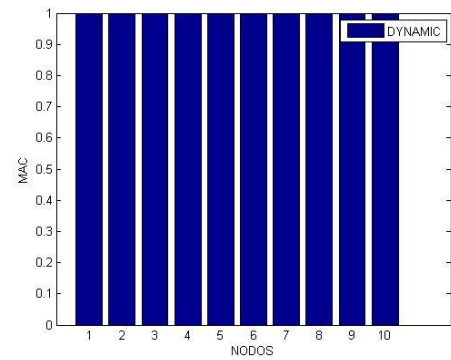
(c) Mac Kidder



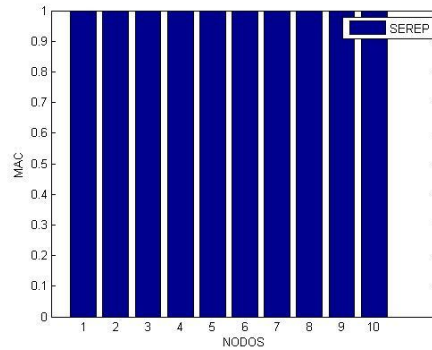
(d) Mac Exacto



(e) Mac Exacto Modificado



(f) Mac Dynamic



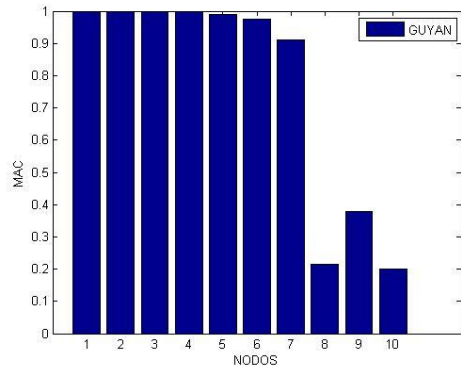
(g) Mac Serep

Los resultados presentados en la Figura 4 para el escenario de daño **VS1-I1**, las metodologías que mejor correlación de los datos es la figura 4, numerales a, c, d, e, f , g.

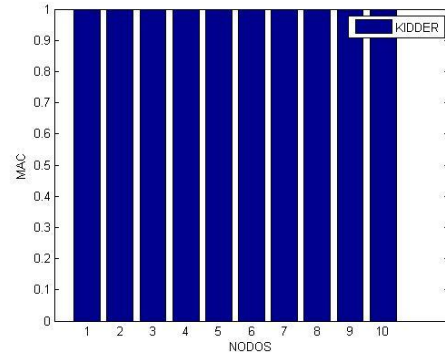
La Figura 4.b no presenta la mejor correlacion, estos se debe a que requiere una adición de la matriz identidad (vease, Ec. 2–22), para completar el vector de transformacion de la matriz. Por tanto este metodo no se tendra en cuenta para la deteccion de daño ya que no se ajusta al modelo original.

Para el escenario de daño **VS1-I4** se obtienen los siguientes MAC (véase, Figura 5).

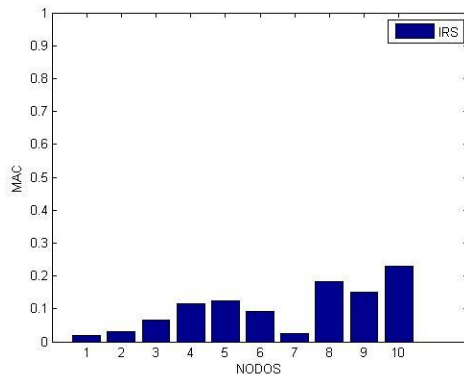
Figura 5. Resultados del escenario de daño VS1-I4



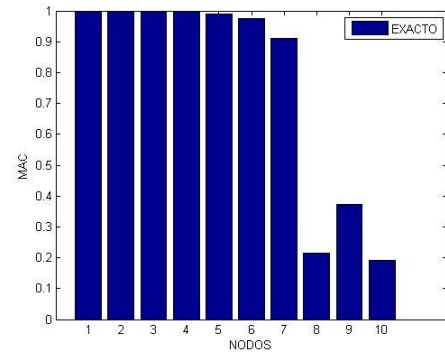
(a) Mac Guyan



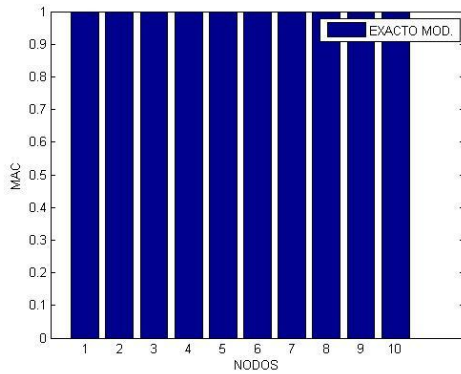
(b) Mac Kidder



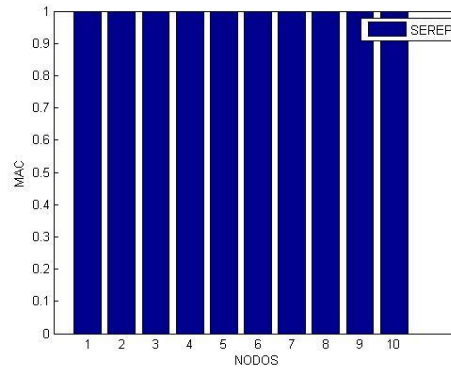
(c) Mac IRS



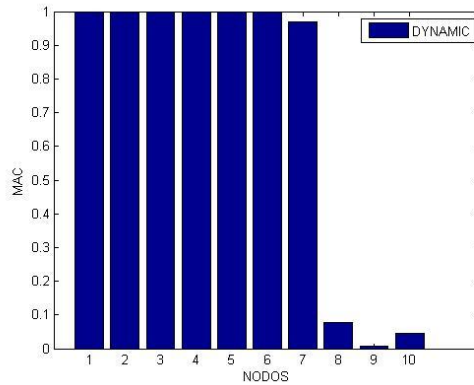
(d) Mac Exacto



(e) Mac Exacto Modificado



(f) Mac Serep



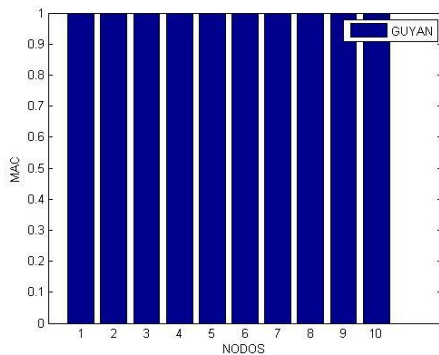
(g) Mac Dynamic

En la Figura 5 para el caso de la viga simplemente apoyada (véase, Figura 2.a y Tabla 3), con una correlación de los datos que permite saber cuáles son los métodos que mejor se ajustan al modelo original. Los datos que mejor se ajustan al modelo original para el escenario de daño VS1-I4 son las enumeradas b, e, f de la figura 5.

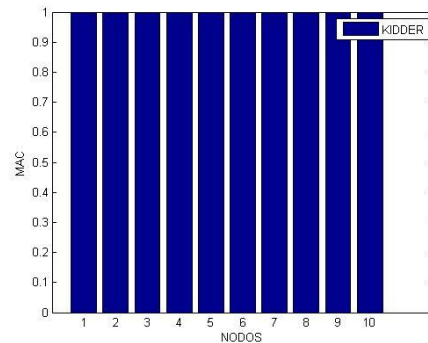
## 5.2 ESCENARIO MULTIPLE DE DAÑO

Para el escenario de daño múltiple aplicando la metodología de correlacion para identificar cual es el método que mejor se ajusta al modelo original, en este caso para el escenario de daño **VS3-I1** se obtienen los resultados:

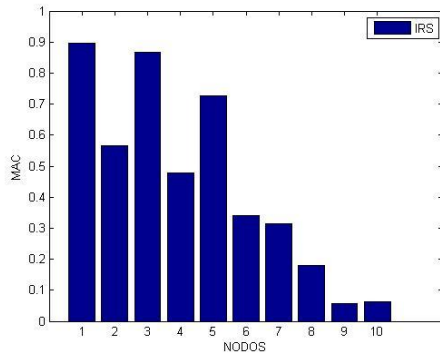
Figura 6. Resultados del escenario múltiple de daño VS3-I1



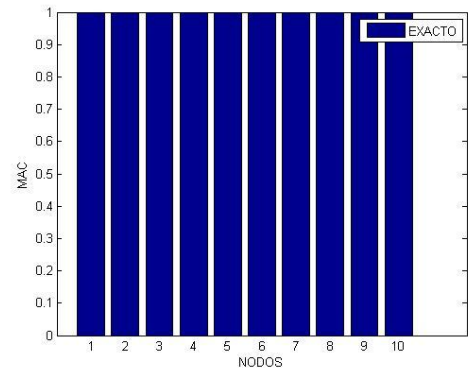
(a) Mac Guyan



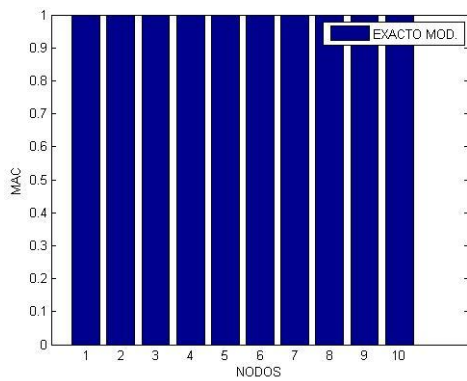
(b) Mac Kidder



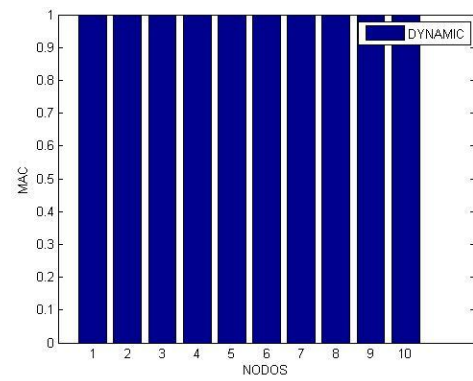
(c) Mac IRS



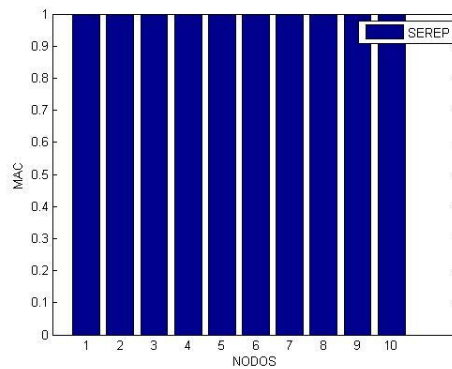
(d) Mac Exacto



(e) Exacto Modificado



(f) Mac Dynamic

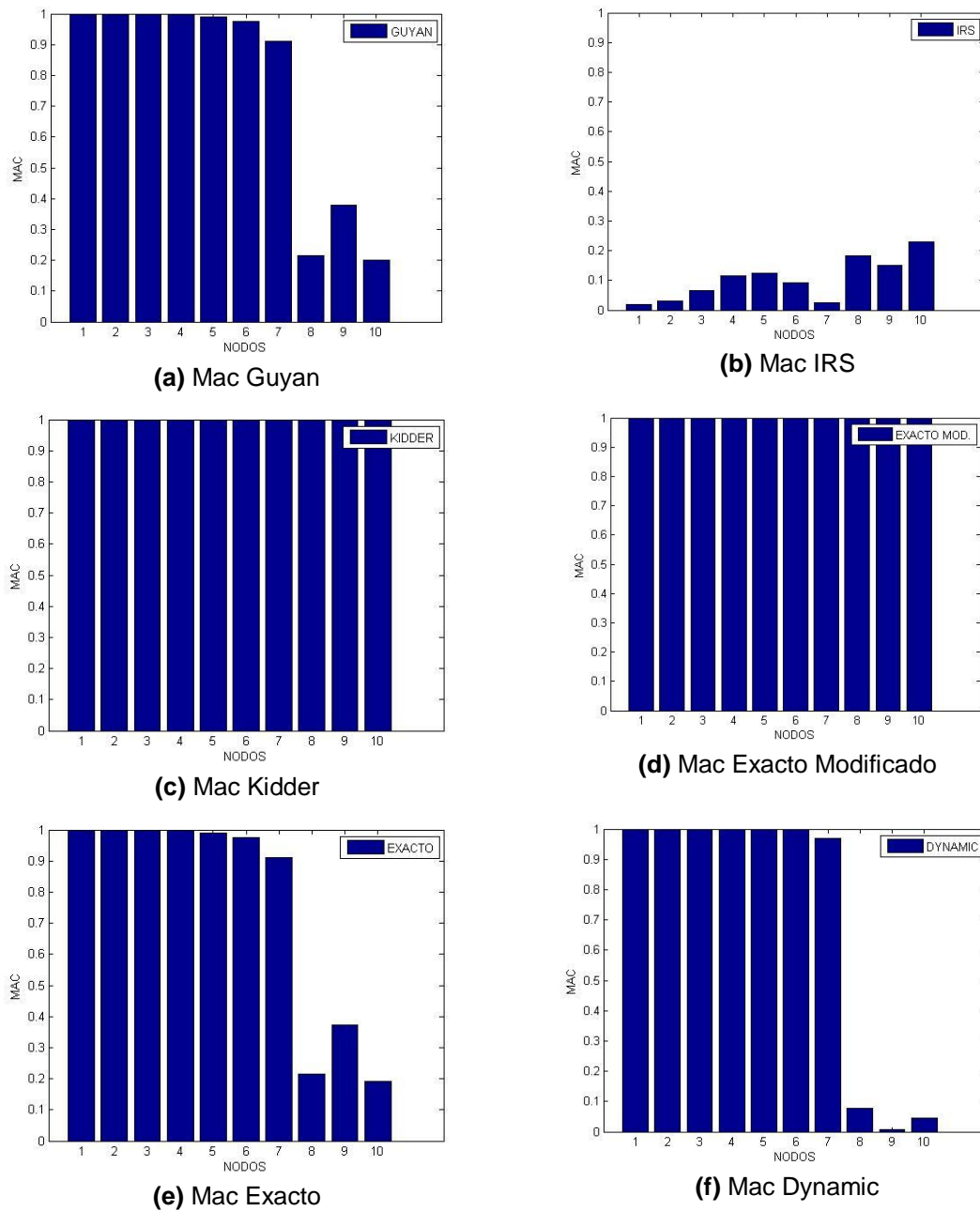


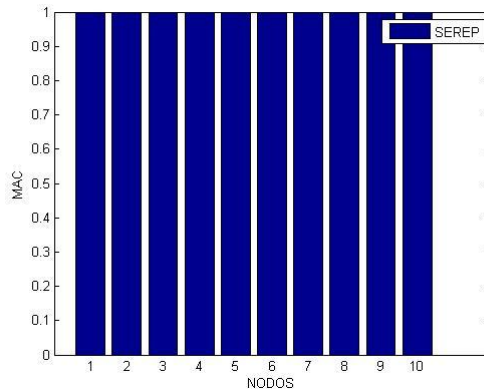
(g) Mac Serep

En la estructura el escenario de daño múltiple tipo **VS3-I1** (véase, Tabla 4), los resultados de las técnicas de expansión se ajustan al modelo original. Las Figuras 6 numerales a, b, d, e, f, g la correlación de los datos se ajusta al modelo original. Determinando que la Figura 6.c, es la que menos se ajusta al modelo debido a la ampliación de la matriz de transformación.

Para el escenario de daño **VS3-I4** obtenemos los MAC para poder determinar las metodologías de expansión modal que mejor se ajusten al modelo original (vease, Figura 7).

Figura 7. Resultados del escenario de daño VS3-I4





(g) Mac Serep

Para el escenario de daño **VS3-I4**, los resultados presentados en la Figura 7 con una correlación de los datos, que permite saber cuáles son los métodos que mejor se ajustan al modelo original, en este caso fueron óptimos para las Figuras 7 numerales c, d, g. No se toma en cuenta las metodologías que no se ajustan al modelo original para la detección de daño.

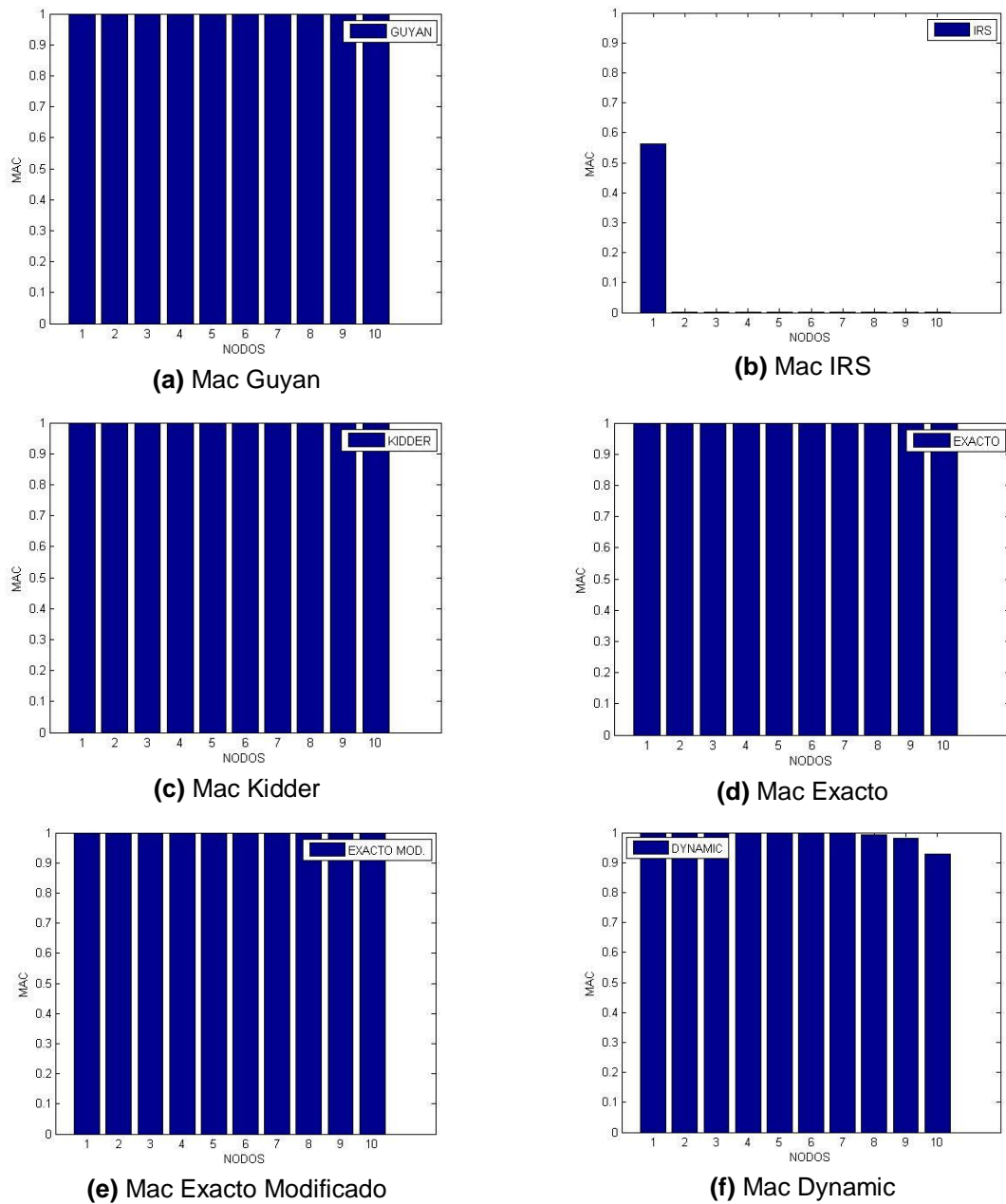
### 5.3 VIGA EN CANTILEVER

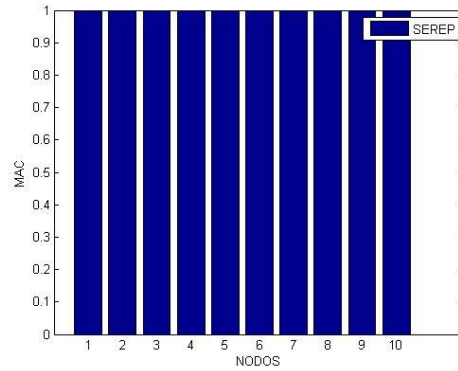
Tabla 7 V.C Frecuencias Naturales en distintos elementos con daño (ver, Tabla 3)

Ejemplo VC				
Frecuencias Naturales del sistema (Hz)				
Modo	Sin Daño	D4	D20	D29
1	56,3983112	55,3381622	56,3411751	56,3976855
2	353,442293	351,347083	350,153073	353,326691
3	989,650824	988,886791	983,317328	987,7581
4	1939,33442	1938,10996	1936,75695	1929,2589
5	3205,91195	3193,62636	3174,69577	3175,66811
6	4789,23097	4751,88793	4783,63431	4727,60046
7	6689,45888	6621,8714	6648,659	6596,48222
8	8906,85526	8820,2229	8847,10528	8798,13466
9	11441,8266	11358,5669	11430,3662	11341,7842
10	14294,9698	14235,2616	14169,1197	14224,055

Para el ejemplo de la viga en cantilever se emplean los escenarios de daño **VC1-I1** (véase, la Tabla 3), los resultados de la correlación de los datos de las metodologías de expansión modal son presentados (vease, figura 8).

Figura 8. Resultados de los escenarios de daño **VC1-I1**



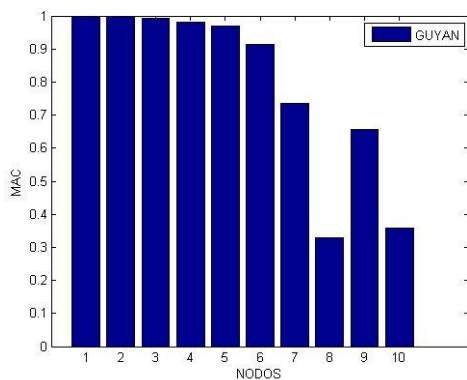


(g) Mac Serep

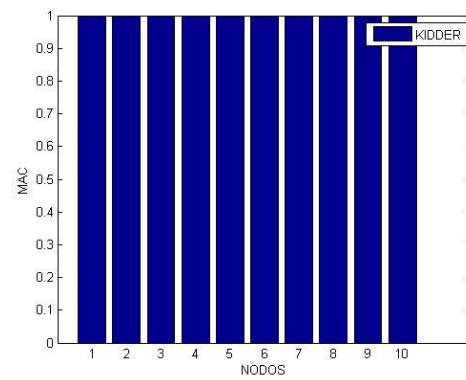
La viga en cantiliver con el es escenario de daño **VC1-I1** (vease, Tabla 3) se puede obtener buenos resultados (vease, Figura 8) ya que estos metodos al aplicar la correlacion de los datos podemos ver que se ajustan al modelo original. Los metodos seleccionados (vease numerales a, c, d, e, f, g de la figura 8).

Para el escenario de daño **VC1-I4** se obtienen la correlacion de los datos (vease, figura 9).

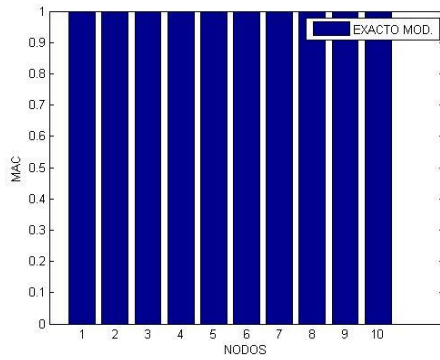
Figura 9. Correlación de datos escenario de daño VC1-I4



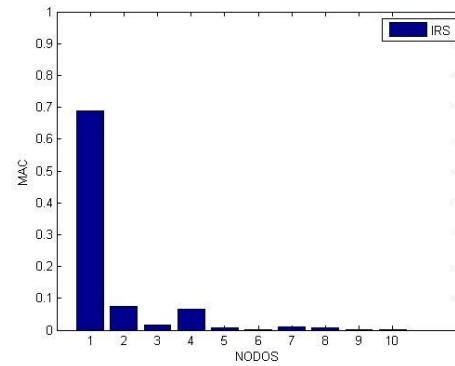
(a) Mac Guyan



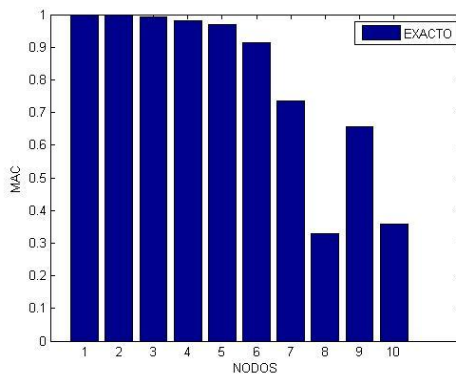
(b) Mac Kidder



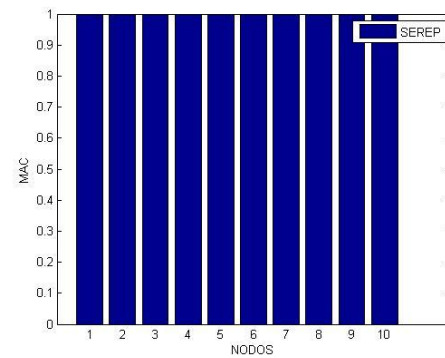
(c) Mac Exacto Modificado



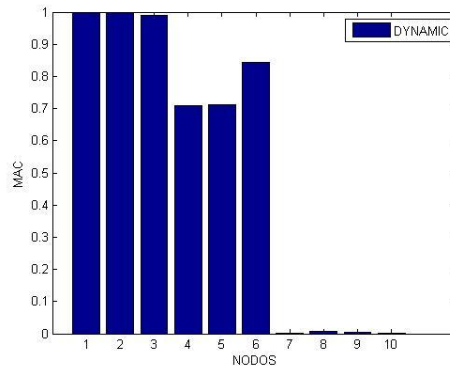
(d) Mac IRS



(e) Mac Exacto



(f) Mac Serep



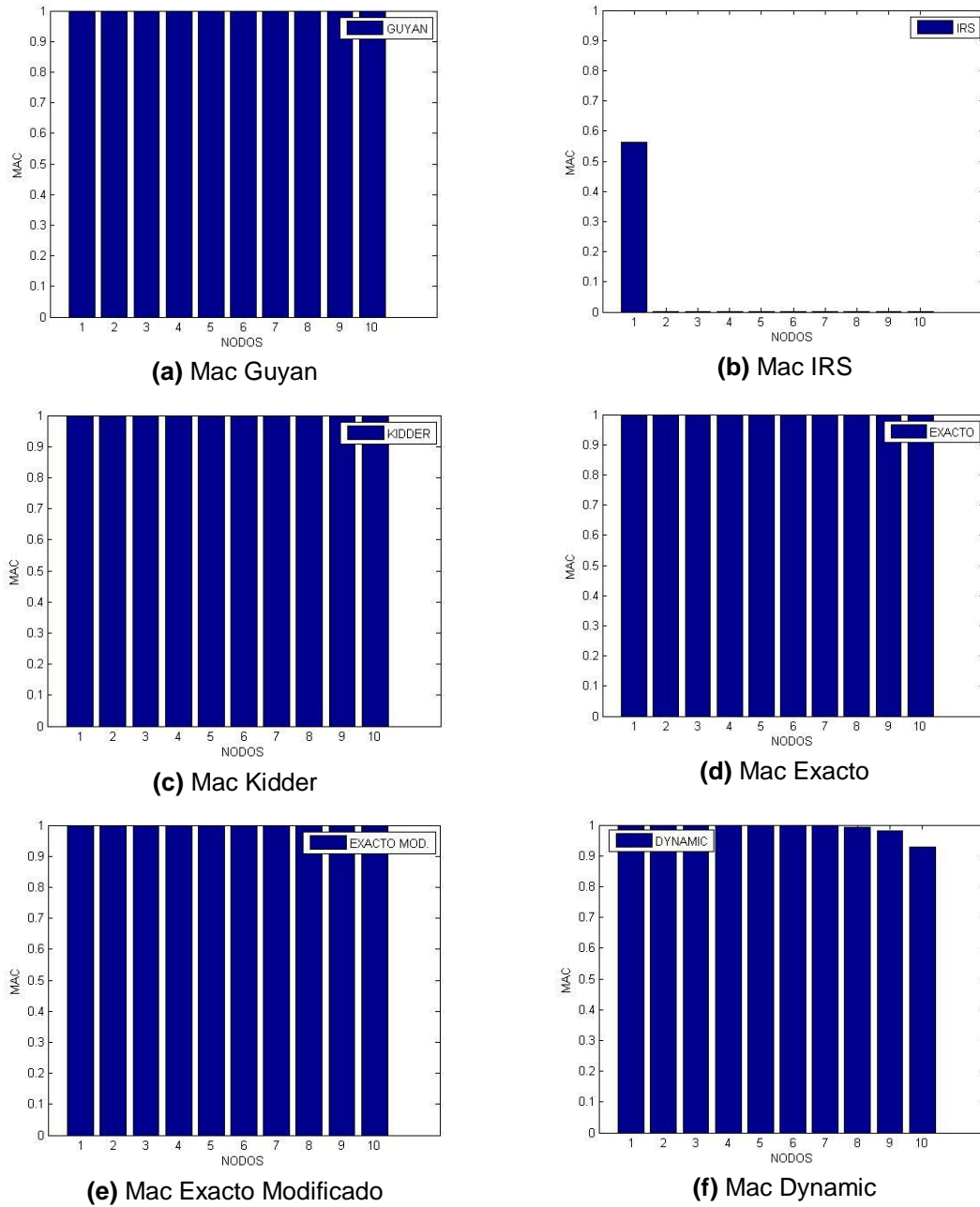
(g) Mac Dynamic

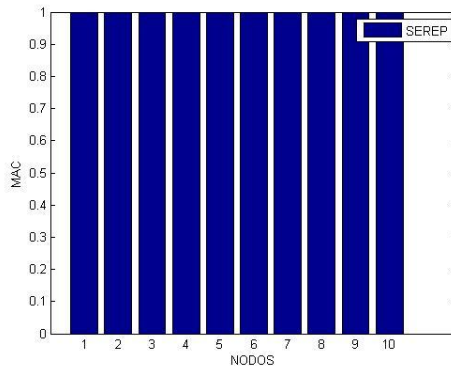
Para los escenarios de daño **VC1-14** los resultados obtenidos dan una mejor correlación, para ciertos métodos que se ajustan al modelo original (véase, Figura 9) de los cuales se toman los que mejor se correlacionan como son Figura 9 numerales b, c, f para la utilización de las metodologías de detección de daño.

**5.3.1 Escenario de daño múltiple.** Para el escenario de daño VC3-11 se obtienen

los siguientes resultados (véase, Figura 10).

Figura 10. Resultados del escenario de daño VC3-I1



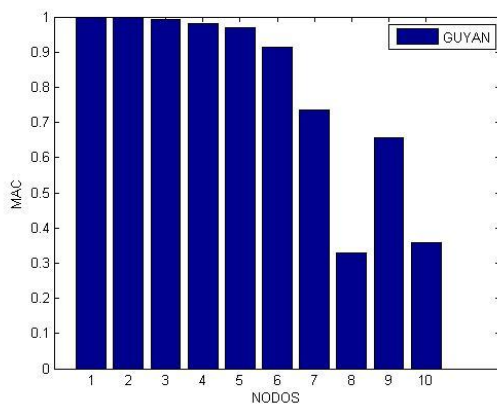


(g) Mac Serep

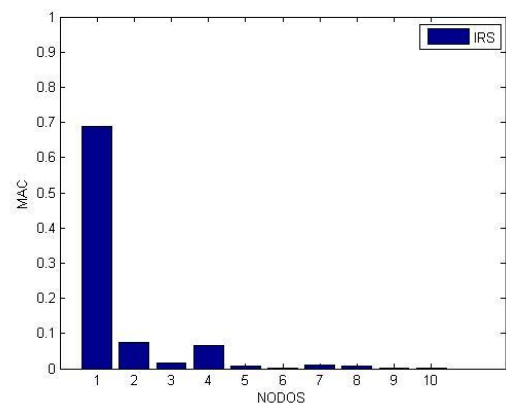
Los resultados fueron óptimos para el tipo de escenario empleado **VC3-I1** ya que la mejor correlación nos permite saber si los modelos se ajustan al modelo original, teniendo en cuenta este criterio se tomaron los mejores (véase, Figura 10, numerales a, c, d, e, g).

En el escenario de daño aplicado **VC3-I4** se ajustaron al modelo original (véase, Figura 11).

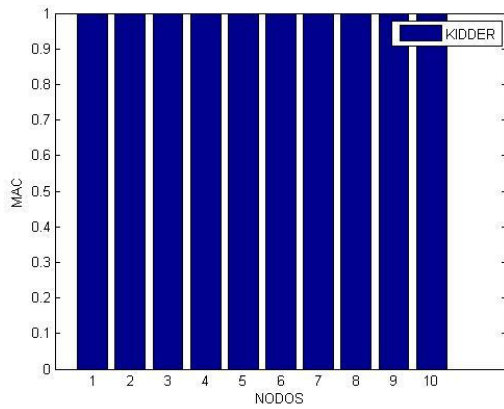
Figura 11. Resultados del escenario de daño VC3-I4



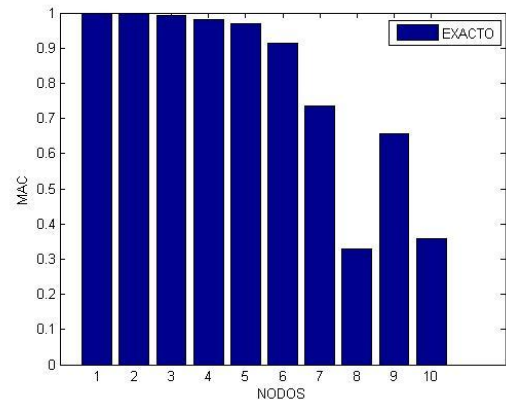
(a) Mac Guyan



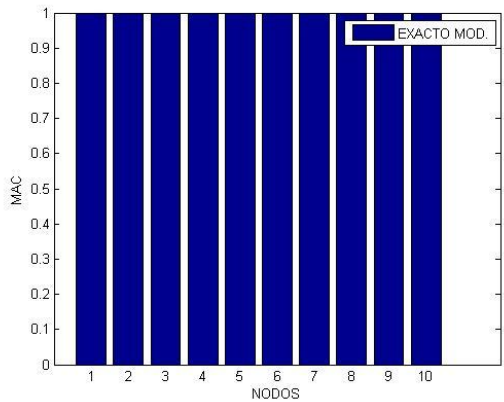
(b) Mac IRS



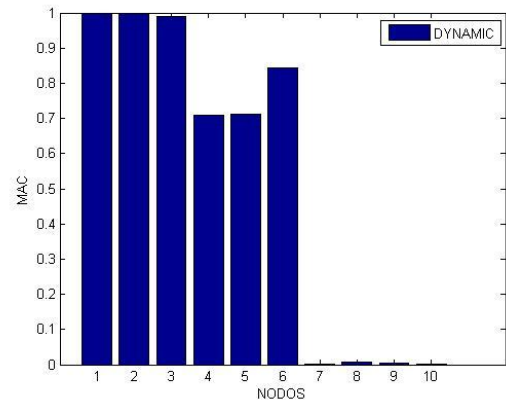
(c) Mac Kidder



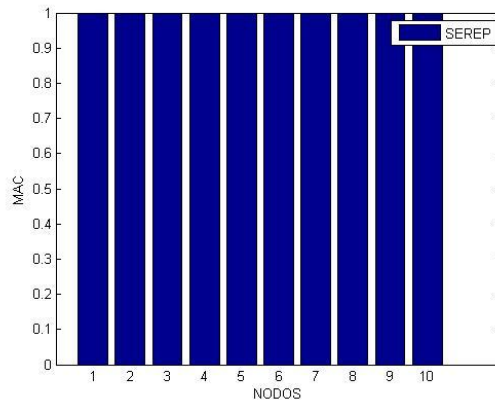
(d) Mac Exacto



(e) Mac Exacto Modificado



(f) Mac Dynamic



(g) Mac Serep

Para el escenario de daño **VC3-I4** las metodologías de expansión modal que mejor se correlacionan (véase, Figura 11, numerales c, e, g) dando el mejor ajuste con el modelo original.

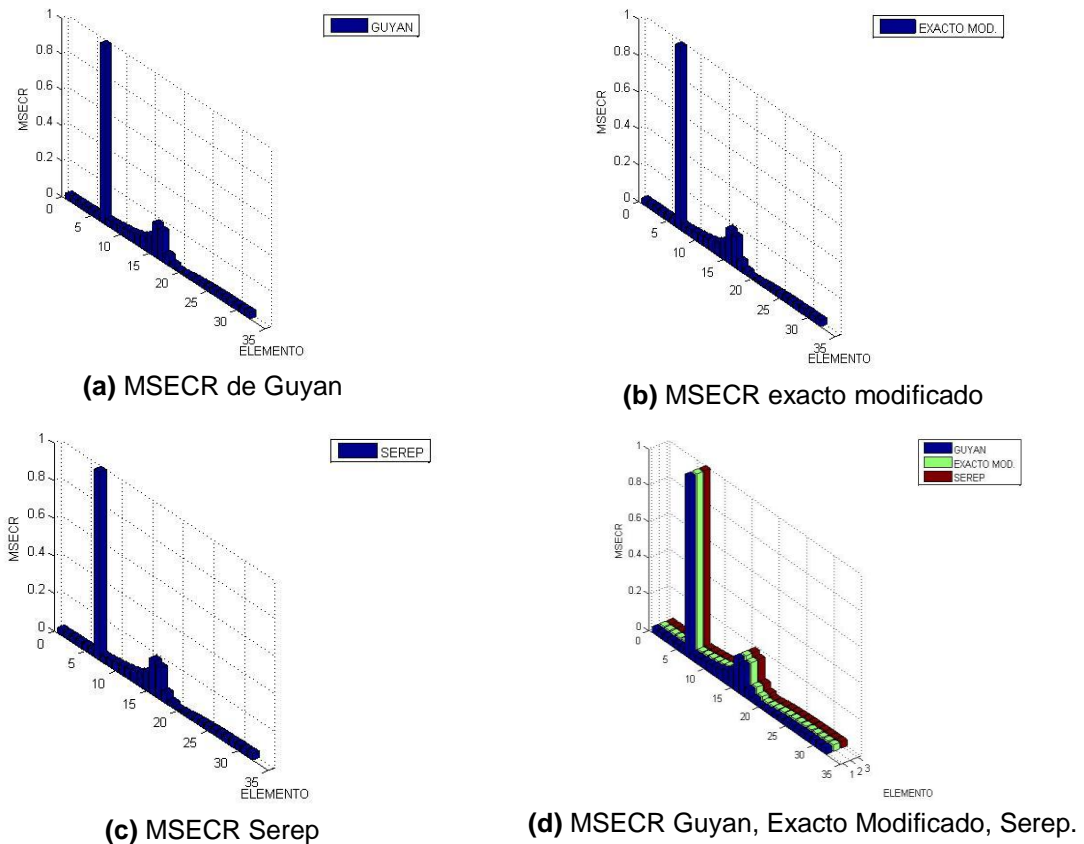
Finalmente podemos concluir que las metodologías de correlación son aplicadas para identificar si los datos obtenidos experimentalmente se ajustan al modelo original. Esta identificación es importante para detectar el mejor método de expansión modal a utilizar en la detección de daño. De acuerdo con los resultados se tomaron las mejores metodologías de expansión que se correlacionan con el modelo original para detección de daño del elemento dañado.

### 5.3.2 Detección de daño

#### 5.3.2.1 Viga Simplemente Apoyada

- **Método MSECR.** Para el escenario de daño VS1-I1-M2 se tomaron las metodologías mencionadas (véase, Figura 4) de acuerdo a los resultados obtenidos de los MAC y a sus formas modales verticales leídas.

Figura 12. Resultados del escenario de daño VS1-I1-M2

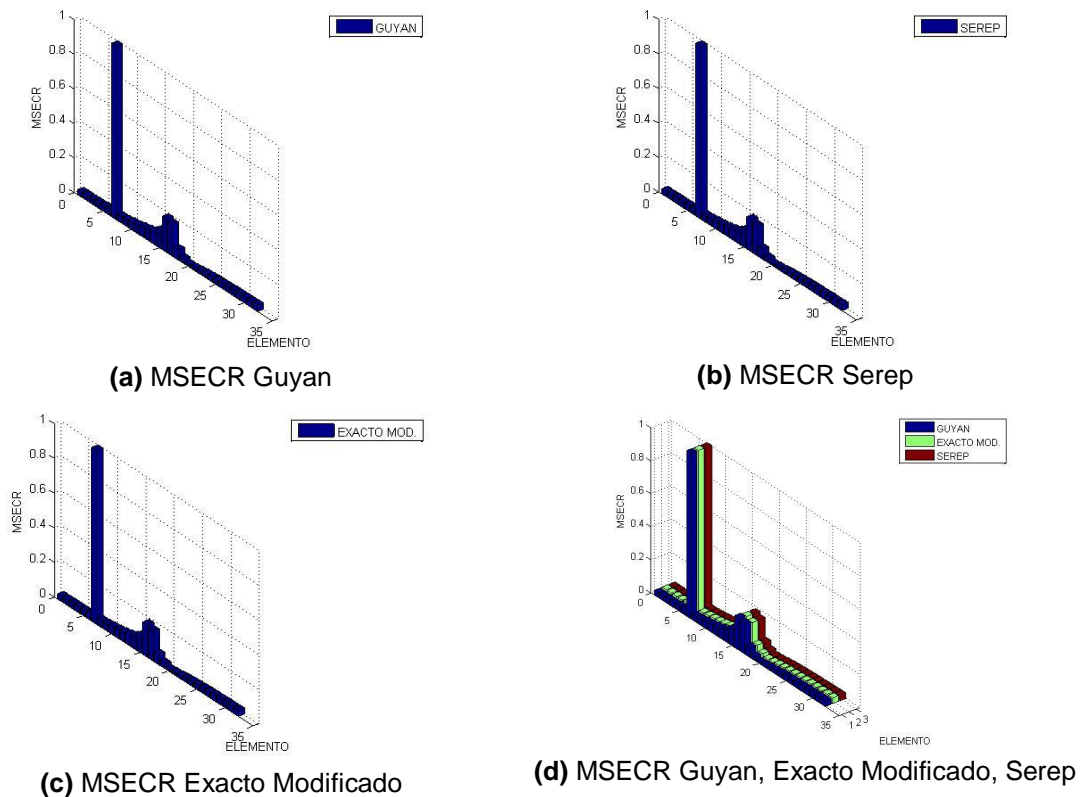


De acuerdo con las metodologías que dieron mejores MAC los cuales fueron los seleccionados (véase, Figura 4), es de tener en cuenta que el método de expansión de Guyan fue tomado para observar los diversos cambios entre los elementos y mirar a gran escala el error que presenta una metodología que no da una buena correlación de datos.

Observando la figura 12 para el escenario de daño **VS1-I1-M2** se presenta detección de daño en el elemento dañado (véase, Tabla 3), pero también podemos identificar cambios en otros elementos que fueron afectados (véase, Figura 12).

En el escenario de daño **VS1-I4-M2** se obtiene identificación del daño del elemento dañado. (Véase, Figura 13).

Figura 13. Resultados del escenario de daño VS1-I4-M2

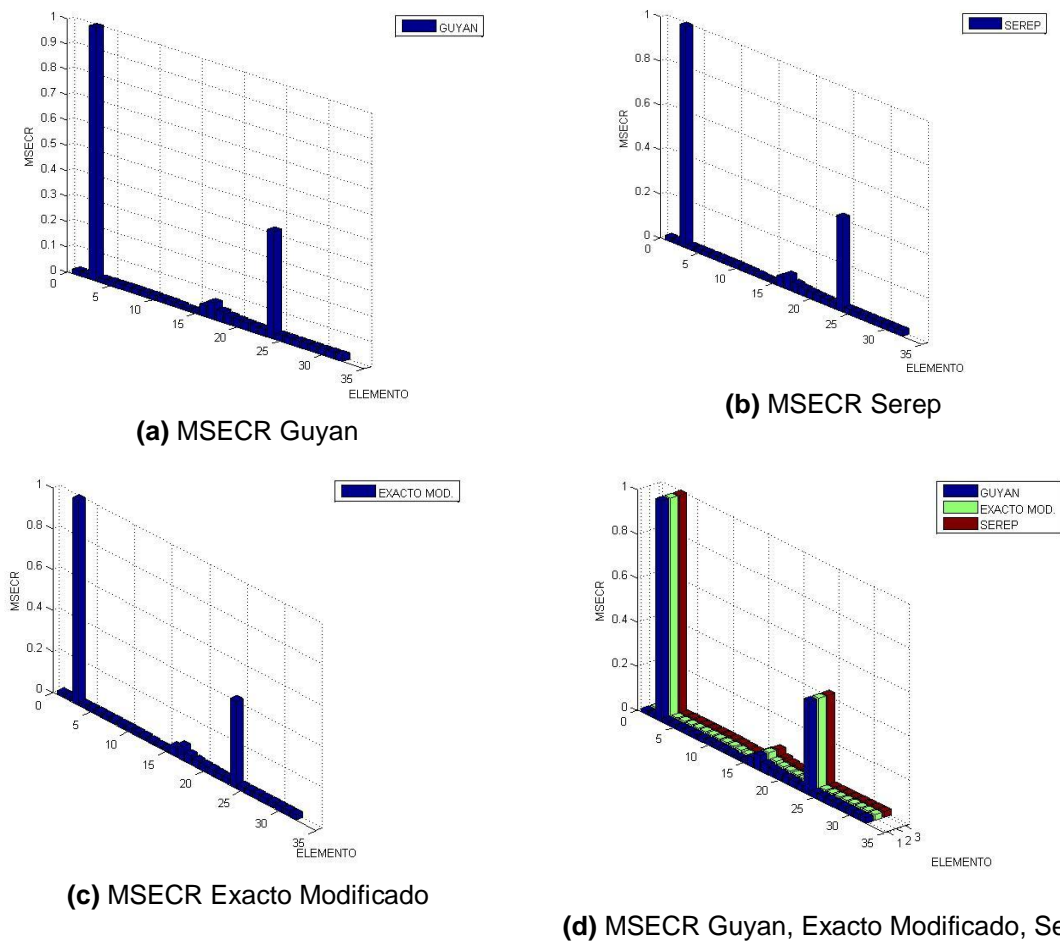


En la Figura 13 se puede observar que el método MSECR presenta buenos resultados e identificando el elemento dañado (véase, Figura 13).

Al comparar los escenarios de daños empleados, se percibe que para la toma de pocos modos de vibración con una buena correlación no existe la diferencia suficiente entre tomar las formas modales leídas al 100% y al 25% (véase, Tabla 4), ya que la detección de daño en los elementos dañado es la esperada.

El daño múltiple en la estructura se emplea de acuerdo al escenario de daño **VS3-I1-M2** (véase, Tabla 3).

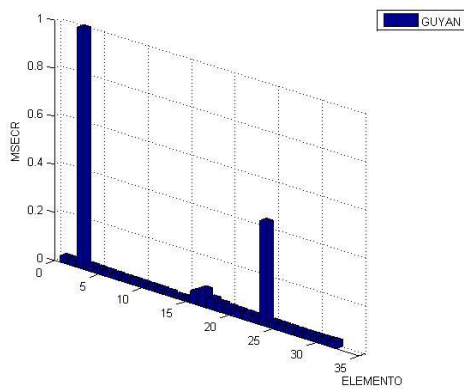
Figura 14. Resultados escenario de daño VS3-I1-M2



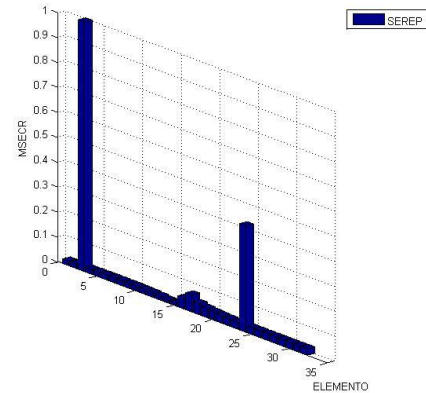
Los métodos de expansión empleados para la detección de daño (véase, Figura 14) presentan resultados que satisfacen, ya que la estructura es de daño múltiple, y el método MSECR detecta el daño en las elementos damnificados en su proporción de daño aplicado.

Este tipo de escenarios de daño **VS3-I4-M2** (véase, Tabla 3) nos detecta el daño en los elementos escogidos.

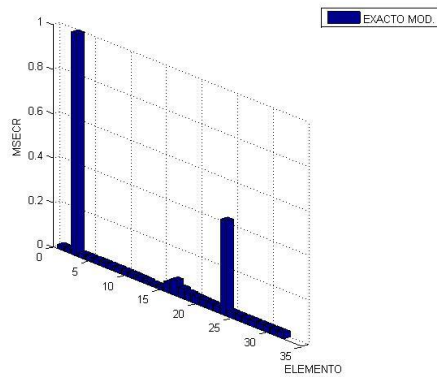
Figura 15. Resultados escenario de daño VS3-I4-M2



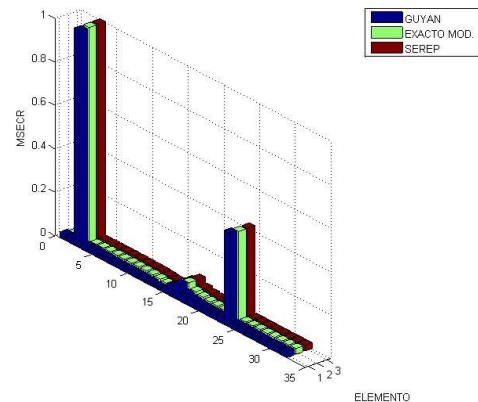
(a) MSECR Guyan



(b) MSECR Serep



(c) MSECR Exacto Modificado



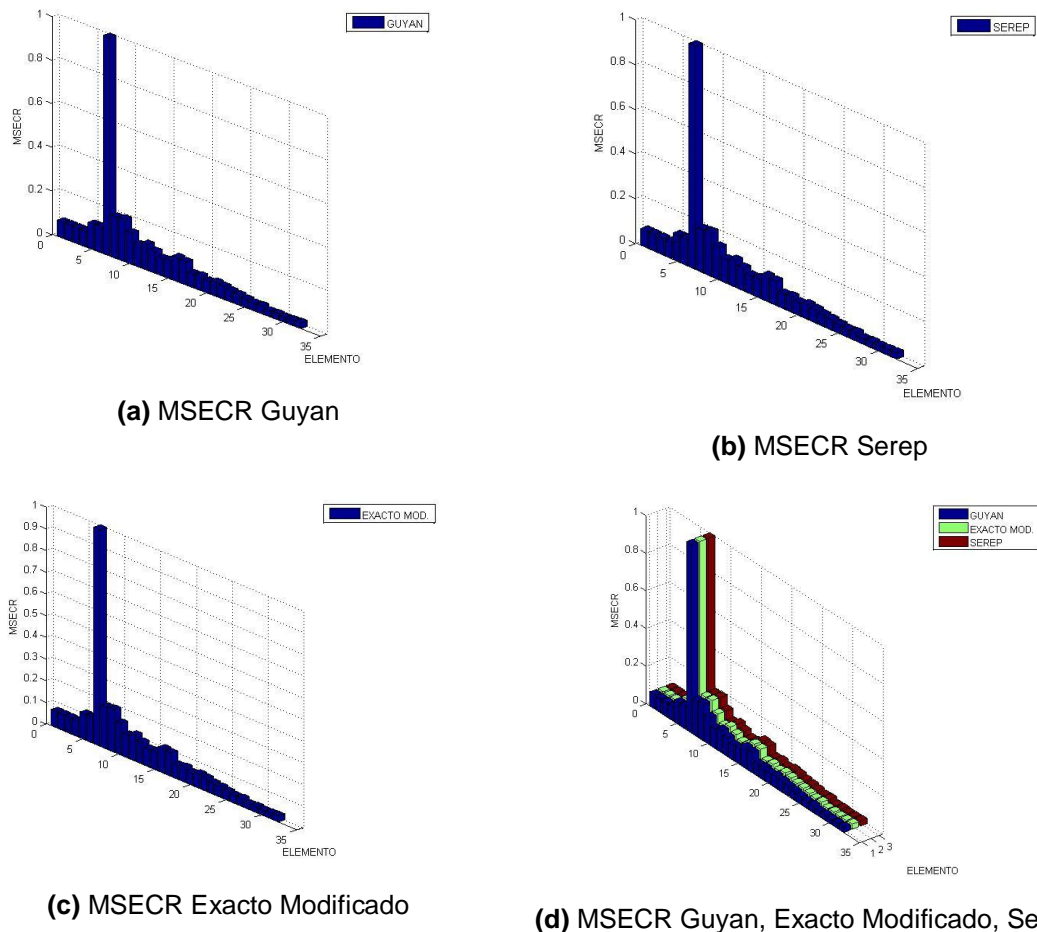
(d) MSECR Guyan, Exacto Modificada, Serep

Al observar la Figura 15 para el escenario de daño **VS3-I4-M2** no se presenta ninguna diferencia al cambiar el número de formas modales leída (véase, Tabla 4),

donde las metodologías de expansión aplicadas a la detección de daño son óptimas para la detección de los elementos damnificados, detectando el daño en la proporción aplicada (véase, Tabla 3).

De acuerdo con la Tabla 3 se implementó el escenario de daño **VS1-I1-M10** para poder comparar los diferentes comportamientos que sufrían las metodologías de expansión modal en los métodos de detección de daño (véase, Figura 16).

Figura 16. Resultados escenario de daño VS1-I1-M10



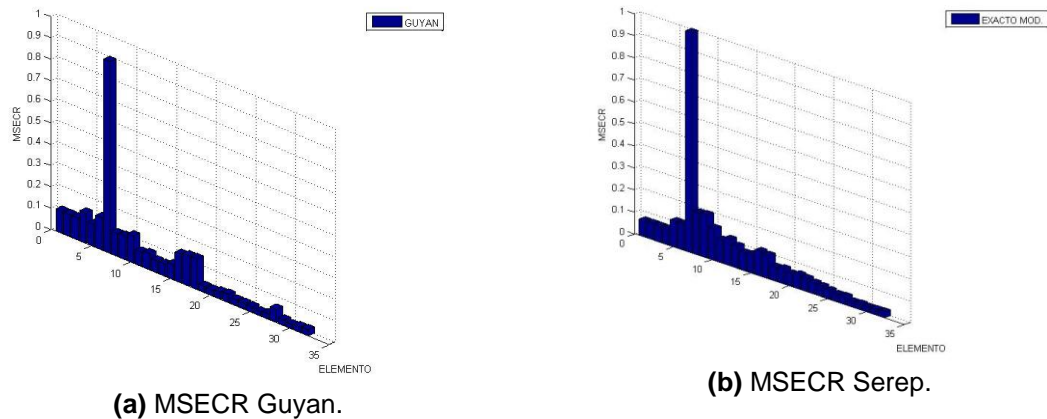
De acuerdo con los resultados presentados (véase, Figura 16) el escenario de daño **VS1-I1-M10** se obtienen buenos resultados de las técnicas de expansión

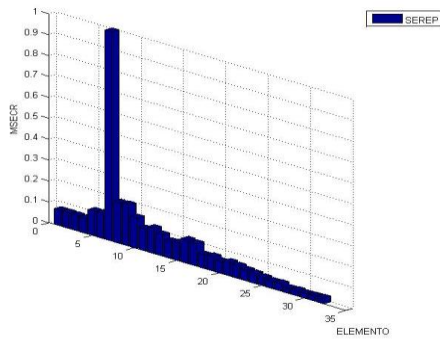
modal empleadas para la detección de daño. Este escenario sufre diversos cambios en la detección de daño del elemento, ya que se identifica los elementos que se encuentran cercanos al elemento dañado.

Al realizar la comparación con el escenario de daño **VS1-I1-M2** (véase, Figura 12) se observa los cambio que pueden sufrir las metodologías de detección de daño al variar la cantidad de modos de vibración, al aumentar el número de modos de vibración en las metodologías se van a ver elementos dañados cercanos al elemento que sufrió el daño. Las técnicas de expansión modal escogidas de acuerdo a la correlación de los datos, identifican el daño en los dos escenarios estudiados y comparados.

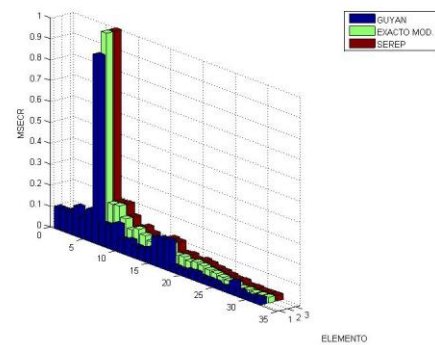
En el escenario de daño **VS1-I4-M10** (véase, Tabla 3) las técnicas de expansión modal empleadas en las metodologías de detección de daño genera los siguientes resultados (véase, Figura 17).

Figura 17. Resultados escenario de daño VS1-I4-M10





(c) MSECR Exacto Modificado.



(d) MSECR Guyan, Exacto Modificado, Serep.

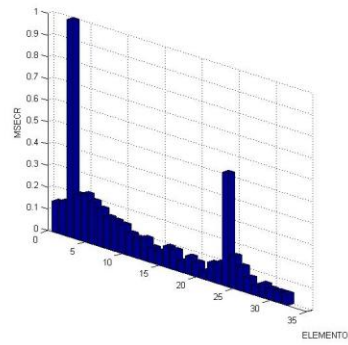
Para el escenario de daño **VS1-I4-M10** (véase, Figura 17) se puede observar que el método Guyan (tomado por visualización de las metodologías), es el que menos se ajusta al modelo identificado en la correlación de datos MAC, que es empleado en las metodologías de detección de daño (véase, Figura 17).

Estas técnicas de expansión modal pueden ser descartadas al obtener los resultados del método de correlación MAC ya que el método de Guyan no se ajustó completamente al modelo original. La técnica de expansión de Guyan sufrió ciertos cambios al tomar pocas formas modales leídas, dando así una baja detección en el elemento dañado.

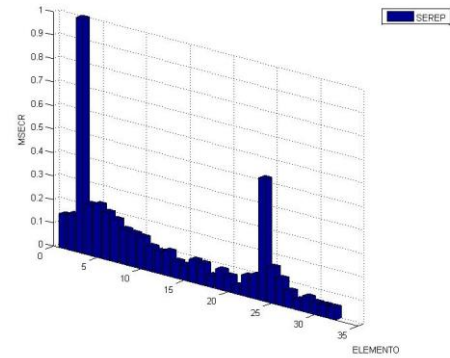
Al comparar los escenarios de daño **VS1-I4-M2** (véase, Figura 13) **y VS1-I4-M10** (véase, Figura 17) se puede concluir que al cambiar la cantidad de modos de vibración en la metodología de detección de daño, se obtiene un porcentaje mayor al identificar el daño en elementos cercanos, al elemento dañado. Entre más modos de vibración se tomen, los elementos cercanos al elemento dañado, se ven afectados en cierto porcentaje de daño.

En el escenario de daño **VS3-I1-M10** (véase, Tabla 3) las técnicas de expansión modal se escogieron de acuerdo a la correlación de los datos (véase, Figura 6), y son empleadas para la detección de daño de los elementos (véase, Figura 18).

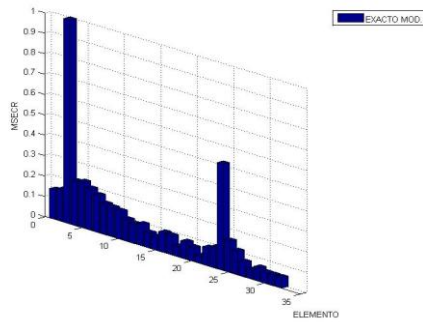
Figura 18. Resultados escenario de daño VS3-I1-M10



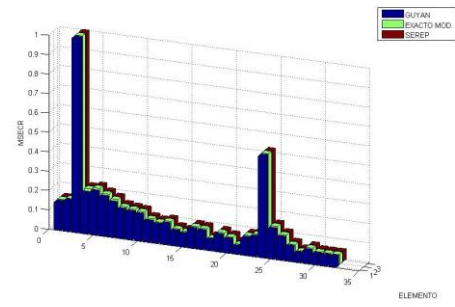
(a) MSECR Guyan.



(b) MSECR Serep.



(c) MSECR Exacto Modificado.

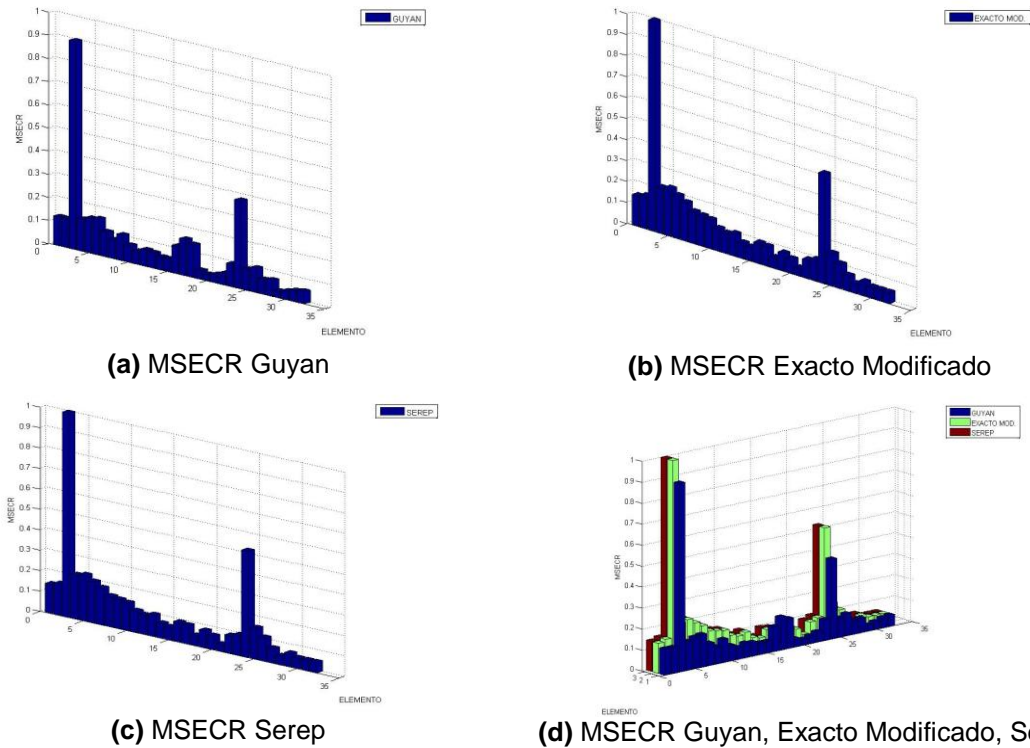


(d) MSECR Guyan, Exacto Modificado, Serep.

Observando las técnicas de expansión modal empleadas para la detección de daño. El escenario de daño **VS3-I1-M10**, se observa que las técnicas escogidas detectan el daño múltiple de la estructura en sus proporciones asignadas (véase, Figura 18).

El escenario de daño **VS3-I4-M10** se obtuvo los resultados de acuerdo a las criterios asignados (véase, Tabla 4)

Figura 19. Resultados escenario de daño VS3-I4-M10



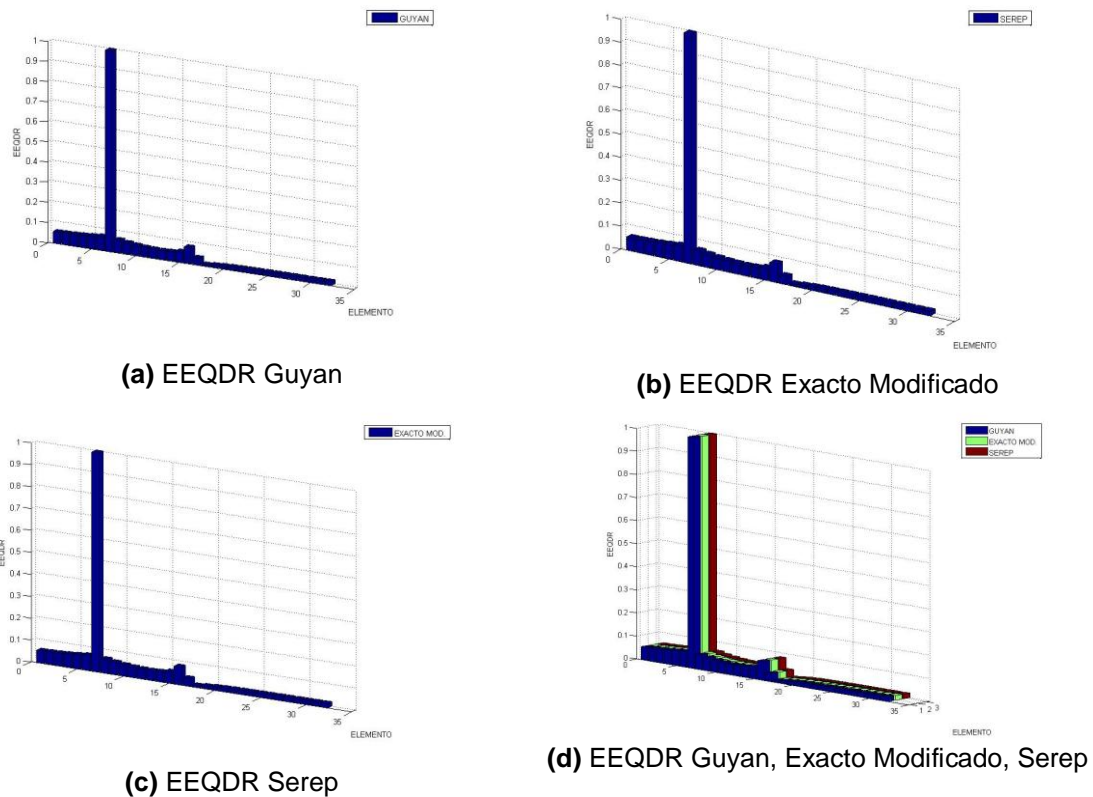
Se puede observar en el escenario de daño **VS3-I4-M10** (véase, Figura 19) los cambios que se producen al seleccionar formas modales incompletas leídas I4 ya que el modelo de Guyan no se ajusta al modelo (MAC), por tanto al aplicar el daño se están afectando elementos cercanos al elemento dañado.

Al comparar los escenarios de daño **VS3-I4-M2** (véase, Figura 15) y **VS3-I4-M10** (véase, Figura 19), al tomar una cantidad mayor de modos de vibración se observa el daño en los elementos dañados, siendo afectadas en una proporción menor los elementos cercanos a los elementos dañados. La técnica de expansión de Guyan al aumentar los modos de vibración no da buenos resultados, esto se predice en la determinación de los MAC (véase, Figura 7) al emplear las metodologías de detección de daño para esta técnica de Guyan detecta debidamente los elementos dañados pero se ven afectados los elementos cercanos a los elementos dañados (véase, Figura 19). Esto se

puede predecir de acuerdo a la correlación de las técnicas de expansión modal estudiadas.

- **Método EEQDR.** Para el escenario de daño VS1-I1-M2 (véase, Tabla 3) se obtuvieron los siguientes resultados (véase, Figura 20).

Figura 20. Resultados escenario de daño VS1-I1-M2



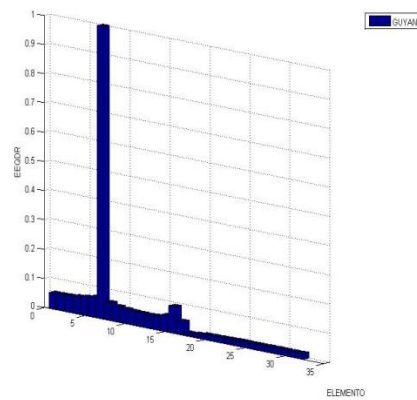
En el escenario de daño **VS1-I1-M2** (véase, Figura 20) las técnicas de expansión modal se correlacionan debidamente, y se obtiene la detección del daño en el elemento damnificado.

Al comprar las metodologías de detección de daño MSECR (véase, Figura12) y EEQDR (véase, Figura 20) en el escenario de daño (véase, Tabla 3) no presenta cambio en los resultados, dando buena respuesta en la detección del elemento

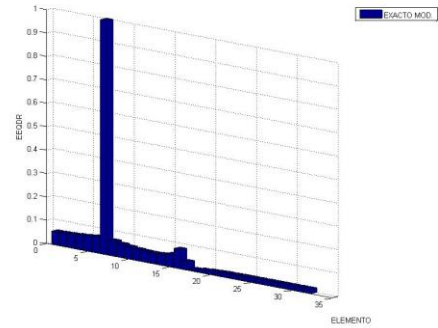
damnificado los dos métodos estudiados.

En el escenario de daño **VS1-I4-M2** el método de detección de daño utilizado presenta los siguientes resultados (véase, Figura 21).

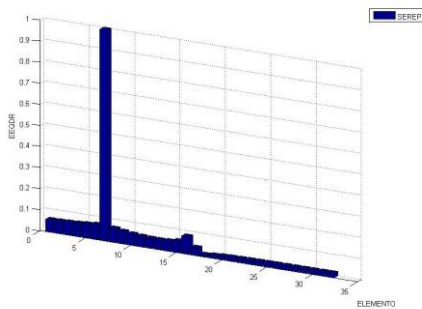
Figura 21. Resultados escenario de daño VS1-I4-M2



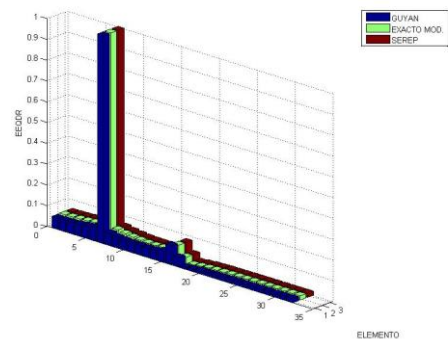
(a) EEQDR Guyan



(b) EEQDR Exacto Modificado



(c) EEQDR Serep



(d) EEQDR Guyan, Exacto Modificado, Serep

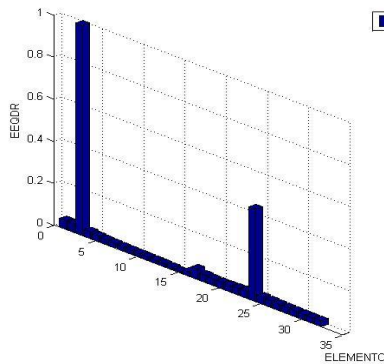
Los métodos de expansión modal escogidos para el escenario de daño **VS1-I4-M2** (véase, Figura 21) detecta el daño en el elemento damnificado afectándose el elemento del centro de la estructura estudiada (véase, Figura 5).

Al comparar los métodos de detección de daño MSECR (véase, Figura 13) y EEQDR (véase, Figura 21) las respuestas de estos métodos son óptimas para este tipo de escenarios ya que no presentan ciertos cambios en la detección del

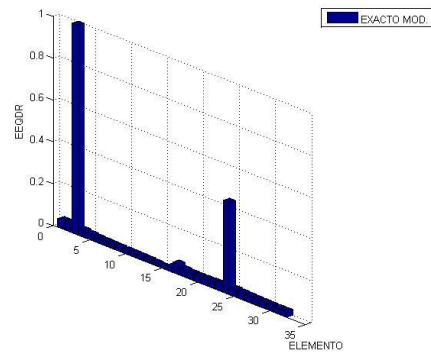
elemento dañado.

En el escenario de daño **VS3-I1-M2** los datos de mejor correlación presenta los siguientes resultados (véase, Figura 22).

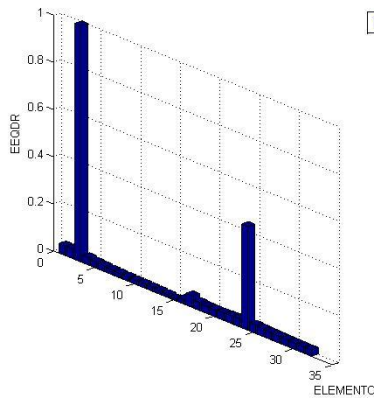
Figura 22. Resultados del escenario de daño VS3-I1-M2



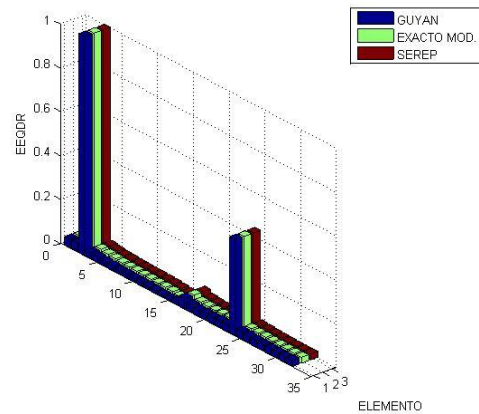
(a) EEQDR Guyan



(b) EEQDR Exacto Modificado



(c) EEQDR Serrep



(d) EEQDR Guyan, Exacto Modificado, Serrep

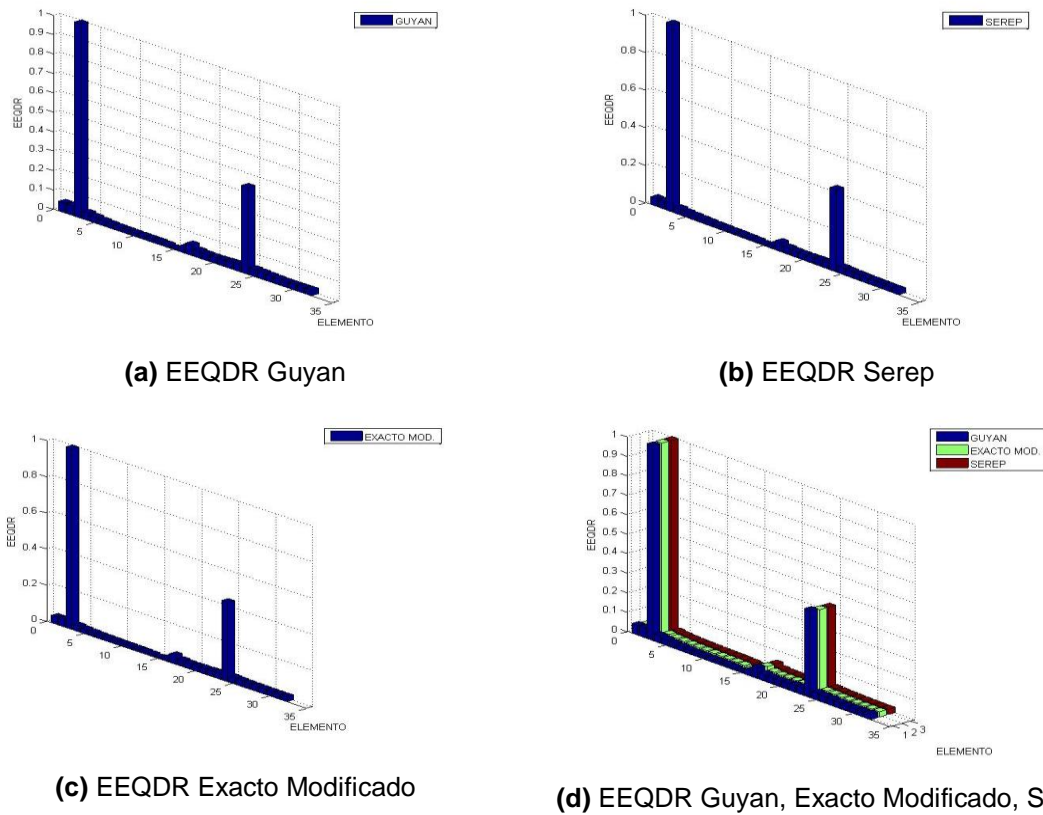
En el escenario de daño **VS3-I1-M2** (véase, Tabla 3), los datos con los dos primeros modos de vibración escogidos, se detecta el daño en los elementos dañados en su proporción (véase, Figura 22).

Las metodologías de detección de daño MSECR (Véase, Figura 14) y EEQDR (véase, Figura 22) se obtienen detección óptima de los elementos dañados en

las condiciones estudiadas, presentando resultados de detección similares entre sí.

En el escenario de daño **VS3-I4-M2** (Véase, Tabla 3) se presentan los resultados obtenidos (véase, Figura 23).

Figura 23. Resultados escenario de daño VS3-I4-M2



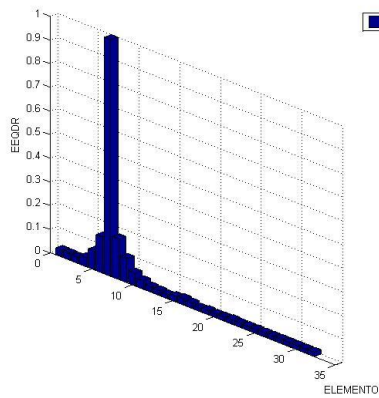
En el escenario de daño **VS3-I4-M2** (véase, Figura 23), formas modales leídas I4 se obtienen buenos resultados, al emplear las técnicas de expansión modal, y con M2 modos de vibración tomados las metodologías de detección de daño detectan los elementos damnificados en la estructura.

Al comparar las metodologías de detección de daño MSECR (véase, Figura 15) y EEQDR (véase, Figura 23), presentan resultados óptimos ya que solo están

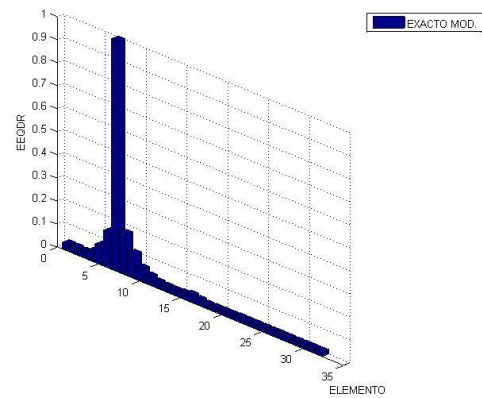
siendo afectados los elementos damnificados.

Para el escenario de daño **VS1-I1-M10** (véase, Tabla 3), se presenta los resultados metodologías empleadas para la detección de daño (véase, Figura 24).

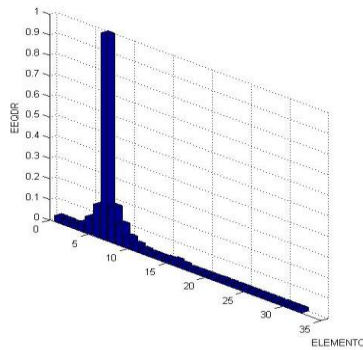
Figura 24. Resultados escenario de daño VS1-I1-M10



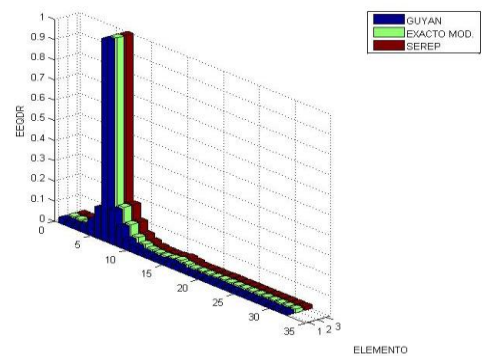
(a) EEQDR Guyan



(b) EEQDR Exacto Modificado



(c) EEQDR Serep



(d) EEQDR Guyan, Exacto Modificado, Serep

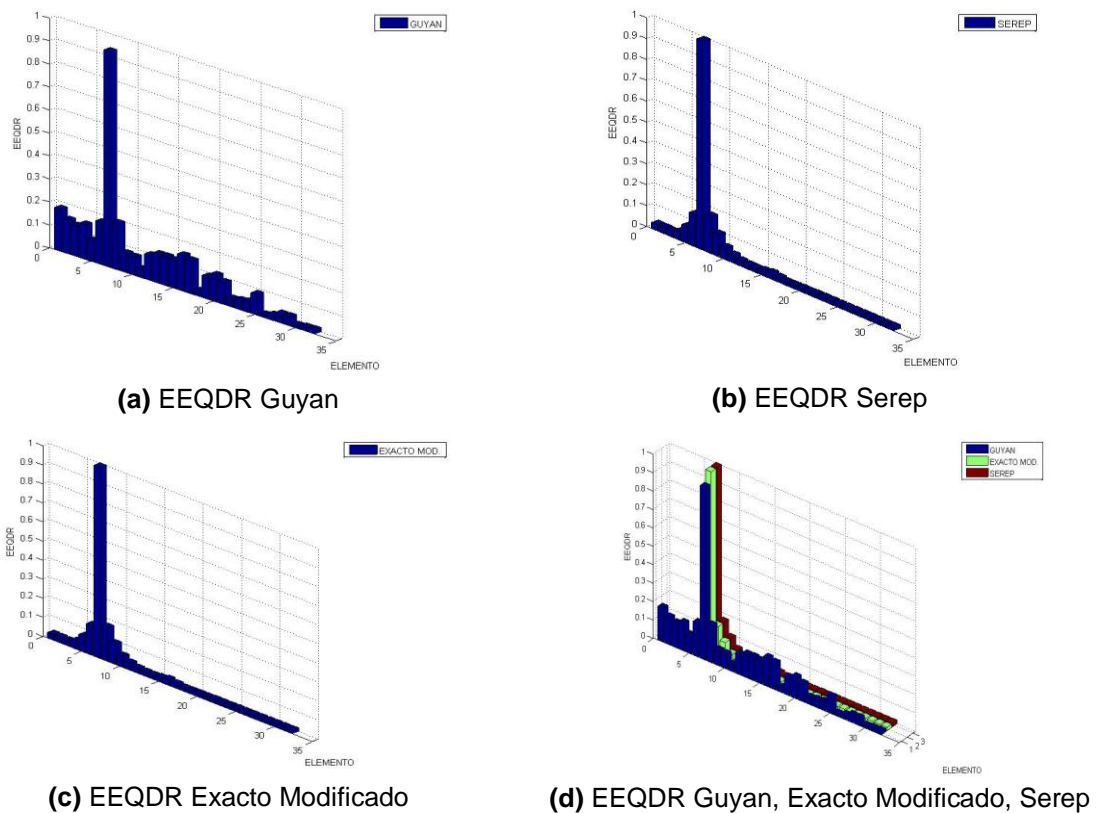
En el escenario de daño **VS1-I1-M10** (véase, Figura 24) se observa la detección del daño del elemento damnificado. Las técnicas de expansión modal que se escogieron de acuerdo a su correlación (véase, Figura 4) al emplearlas en las metodologías de detección de daño presentan buenos resultados.

Al comparar las metodologías de detección de daño MSECR (véase, Figura 16) Y

EEQDR (véase, Figura 24) se observa grandes diferencias en la detección del daño debido a que EEQDR presenta solo el daño en el elemento dañado y con poco daño en los elementos aledaños al elementos dañado, mientras que el método MSECRC presenta daño en toda la estructura en ciertas proporciones para elementos que no fueron dañados.

En escenario de daño **VS1-I4-M10** (véase, Tabla 3) los resultados son presentados (véase, Figura 25).

Figura 25. Resultados escenario daño VS1-I4-M10



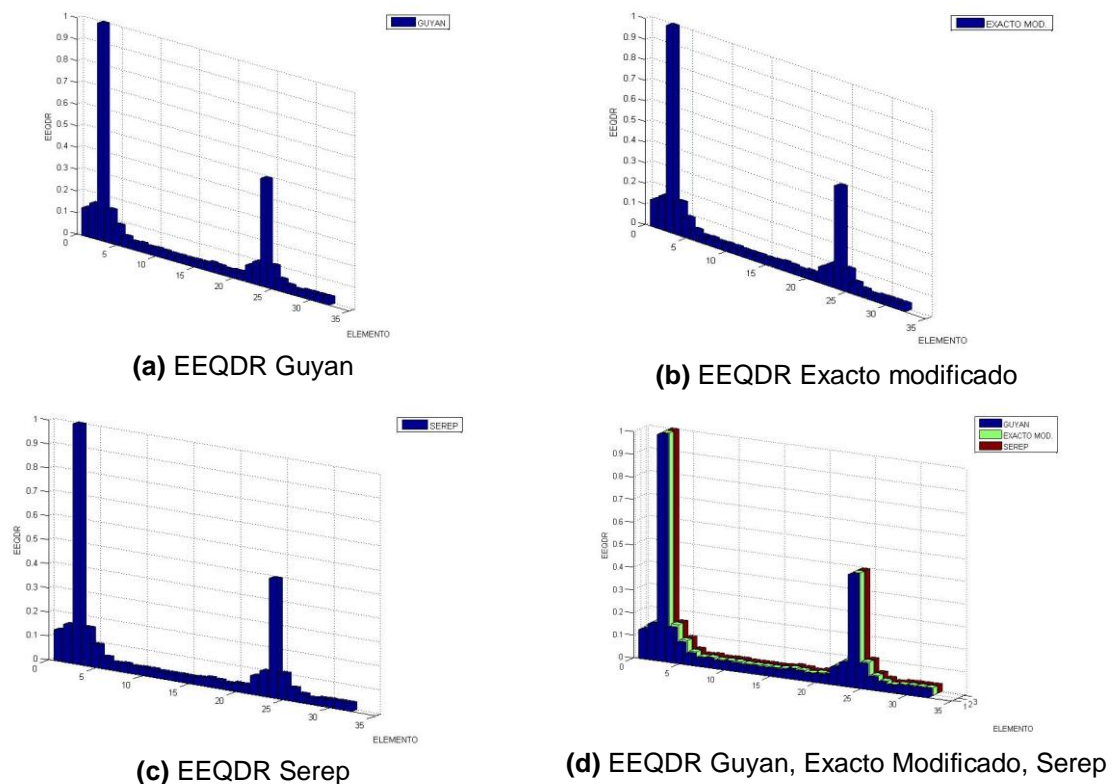
Para el escenario de daño **VS1-I4-M10** (véase, Figura 25) se observa que la metodología de detección de daño empleando la técnica de expansión de Guyan no presenta buenos resultados, ya que ve afectado todos los elementos de la estructura. Empleando la técnica de expansión Exacto Modificado y Serep se

obtienen los buenos resultados, además se detecta el elemento dañado. También se puede observar que si influye la cantidad de número de modos seleccionados para la detección de daño.

Al comparar las metodologías de detección de daño MSECR (véase, Figura 17) y EEQDR (véase, Figura 25), las técnicas de expansión modal que mejor se ajustan para ser empleadas en las metodologías de detección de daño son Exacto Modificado y Serep, pero en el método de MSECR están siendo afectados ciertos elementos a lo largo de la estructura, por tanto EEQDR solo nos muestra el elementos dañado y algunos daños que sufre los elementos más cercanos al afectado.

En el escenario de daño **VS3-I1-M10** (véase, Tabla 3) los resultados son presentados (véase, Figura 26).

Figura 26. Resultados escenario de daño VS3-I1-M10

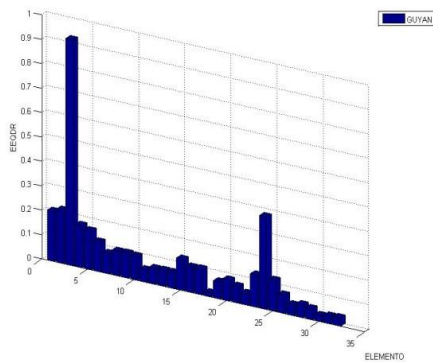


Observando el escenario de daño **VS3-I1-M10** (véase, Figura 26) se detecta el daño en los elementos damnificados en su proporción, solo se ven afectados los elementos cercanos al elemento damnificado.

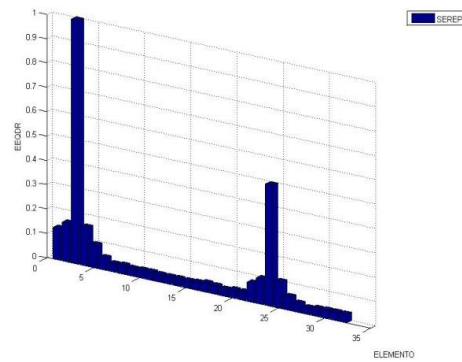
Al comparar los métodos de detección de daño MSECR (véase, Figura 18) y EEQDR (véase, Figura 26) se observa que el método MSECR presenta daños notables en los elementos que no fueron damnificados, a lo largo de la estructura, estos cambios se debe al tipo de metodología usada para la detección de daño.

En el escenario de daño **VS3-I4-M10** se presenta los siguientes resultados (véase, Figura 27).

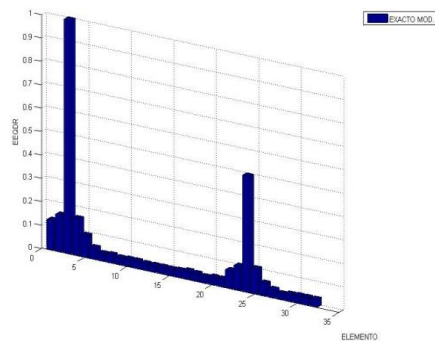
Figura 27. Resultado escenario de daño VS3-I4-M10



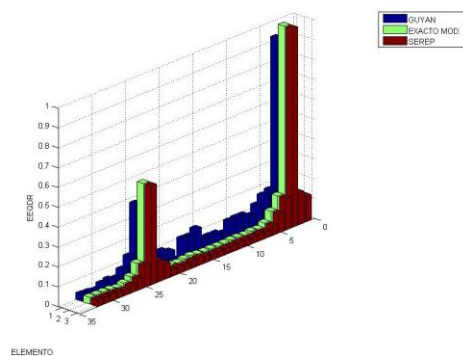
(a) EEQDR Guyan



(b) EEQDR Serep



(c) EEQDR Exacto Modificado



(d) EEQDR Guyan, Exacto Modificado, Serep

En el escenario de daño **VS3-I4-M10** (véase, Figura 27) se observa que las

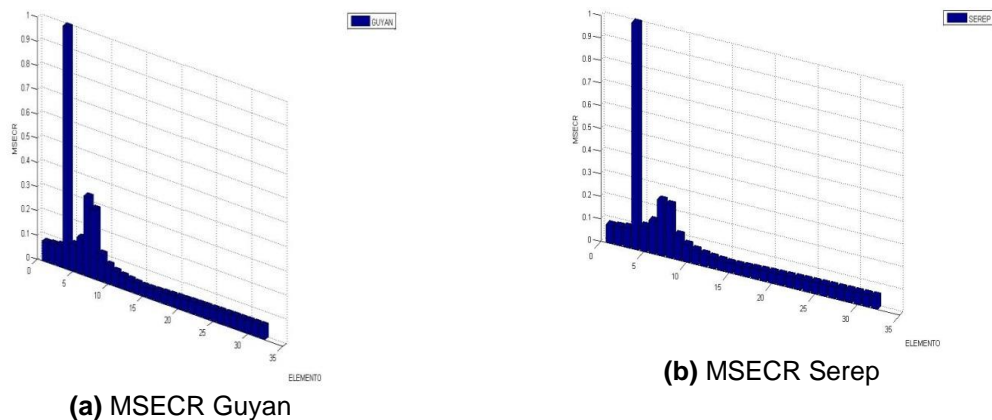
técnicas de expansión modal detectan el daño en los elementos damnificados. La técnica de expansión de Guyan utilizada para la detección de daño presenta daño en todos los elementos de la estructura siendo resultados errados. La técnica de expansión modal Exacto Modificado y Serep detectan el daño y no afecta los elementos a lo largo de la estructura.

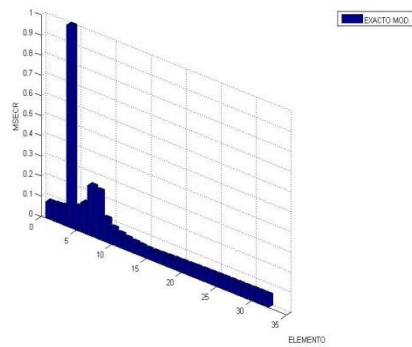
Al comparar los métodos MSECR (véase, Figura 19) y EEQDR (véase, Figura 27), el método de MSECR detecta el daño en el elemento damnificado pero también se ven afectados todos los elementos a lo largo de la estructura por el daño aplicado. El método EEQDR solo presenta daño en los elementos damnificados y en los elementos que están cerca del elemento dañado.

### 5.3.3 Viga en Cantilever

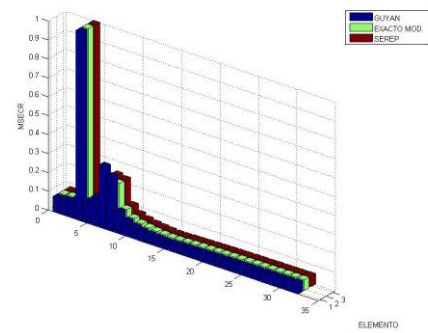
- **Método MSECR.** En el escenario de daño VC1-I1-M2 (vease, Tabla 3) los resultados son mostrados (véase, Figura 28).

Figura 28. Resultados escenario de daño VC1-I1-M2





(c) MSECR Exacto Modificado

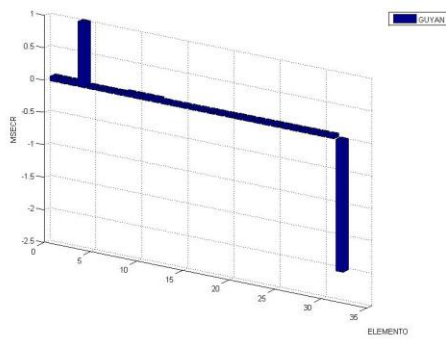


(d) MSECR Guyan, Exacto Modificado, Serep

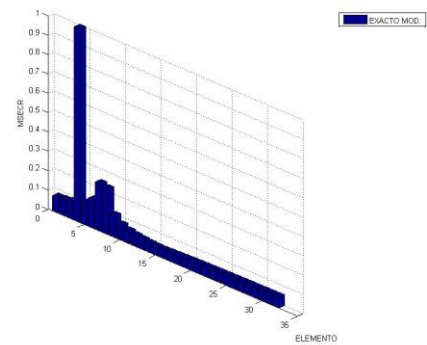
Para el escenario de daño **VC1-I1-M2** (véase, Figura 28) se detectan los elementos damnificados aunque se afecta en un porcentaje alto a los elementos cercanos al elemento donde se produjo el daño.

Para el escenario de daño **VC1-I4-M2** (véase, Tabla 3) se presentan los resultados obtenidos (véase, Figura 29).

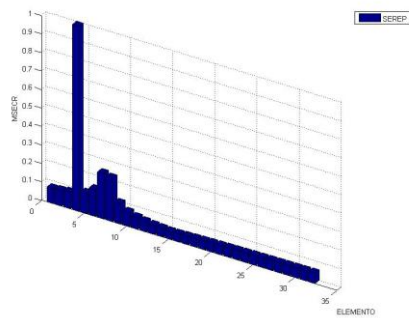
Figura 29. Resultados escenario de daño VC1-I4-M2



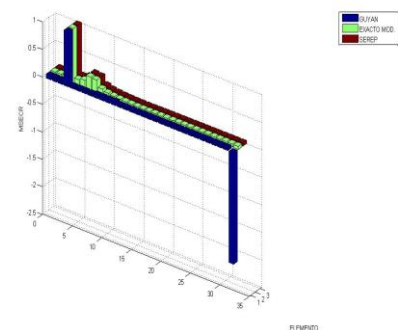
(a) MSECR Guyan



(b) MSECR Exacto Modificado



(c) MSECR Serep

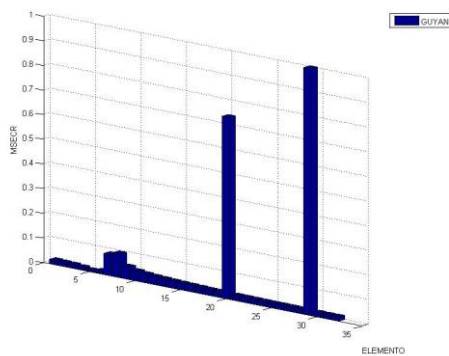


(d) MSECR Guyan, Exacto Modificado, Serep

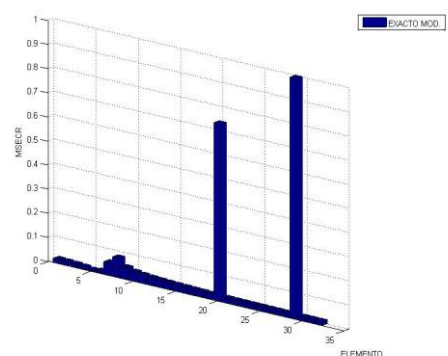
Para el escenario de daño **VC1-I4-M2** (véase, Figura 29) se observa que el método de expansión de Guyan aplicado en la detección de detecta el elemento dañado pero en el elemento de final de la viga se produce cambios no son coherentes por tanto este método no es óptimo para la detección de daño. Las técnicas de expansión modal Exacto Modificado y Serep presentan los mejores resultados detectando el elemento dañado y los elementos cercanos al daño.

En el escenario de daño **VC3-I1-M2** (véase, Tabla 3) los resultados son presentados (véase, Figura 30).

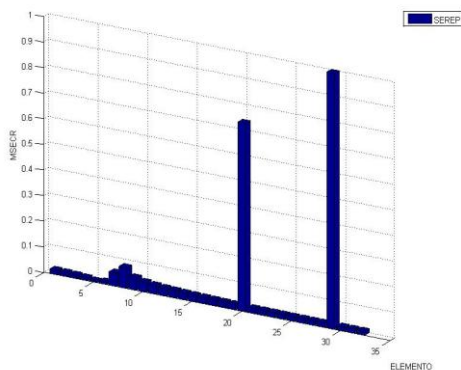
Figura 30. Resultado escenario de daño VC3-I1-M2



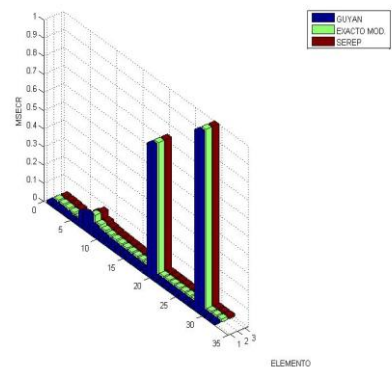
(a) MSECR Guyan



(b) MSECR Exacto Modificado



(c) MSECR Serep



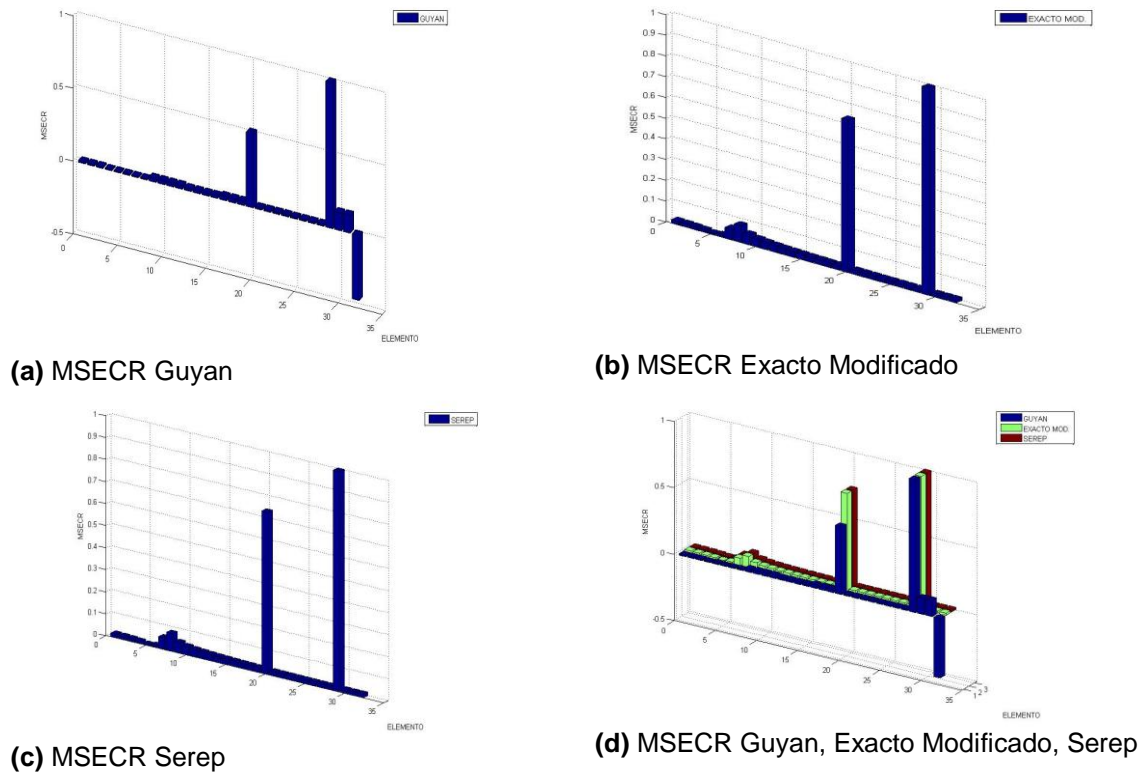
(d) MSECR Guyan, Exacto Modificado, Serep

Para este tipo de escenario **VC3-I1-M2** (véase, Figura 30) las técnicas de expansión modal empleadas para la detección de daño detectan el daño múltiple

en los elementos damnificados en su proporción (véase, Tabla 3).

Para el escenario de daño **VC3-I4-M2** (véase, Tabla 3) se presentan los siguientes resultados (véase, Figura 31).

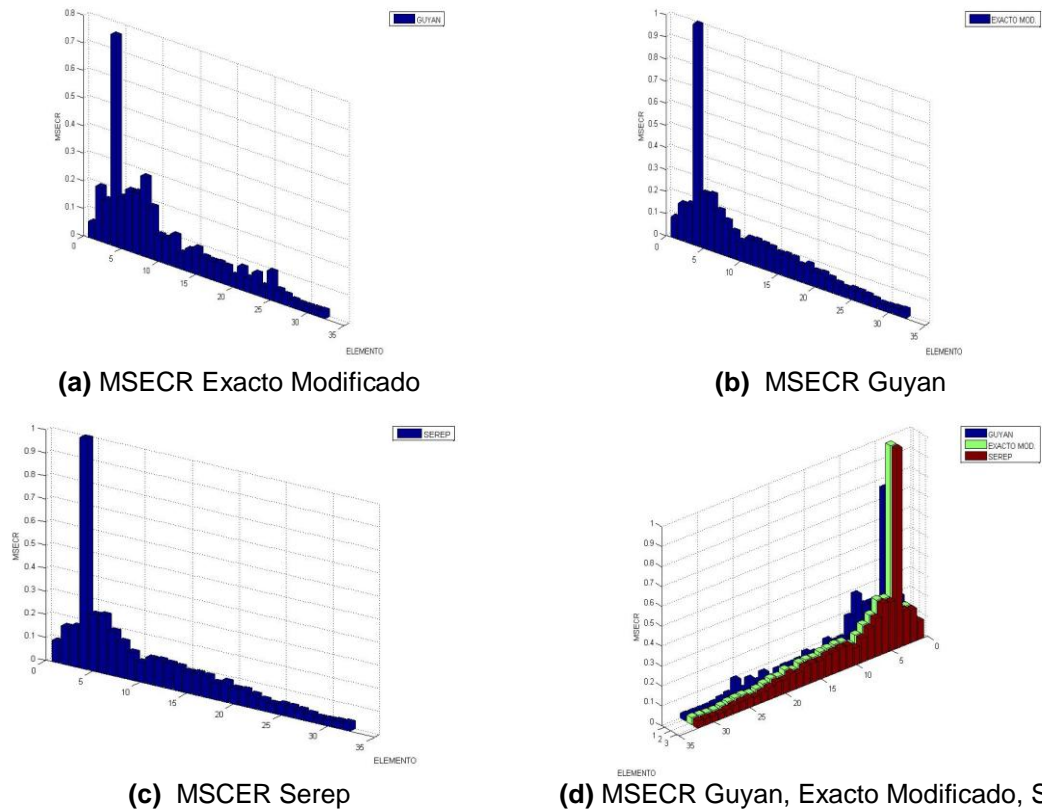
Figura 31. Resultados escenario de daño VC3-I4-M2



Para el escenario de daño **VC3-I4-M2** (véase, Figura 31) debido al cambio de los grados de libertad verticales el método de detección de daño empleando la técnica de expansión de Guyan presenta poca detección en los elementos damnificados, afectando otros elementos que no sufrieron cambios (véase, Figura 31)

Para el escenario de daño **VC1-I1-M10** (véase, Tabla 3) los resultados obtenidos son presentados (véase, Figura 32).

Figura 32. Resultados escenario de daño VC1-I1-M10

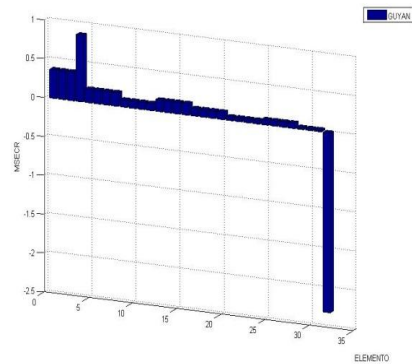


Para este tipo de escenarios **VC1-I1-M10** (véase, Figura 32) la técnica de expansión Guyan empleada para la detección de daño no es tan efectiva en detectar el daño en el elemento damnificado. También presenta daño en elementos que no fueron afectados en un alto porcentaje.

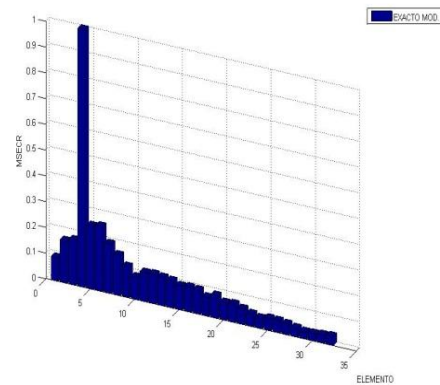
Si se compara los escenarios de daño **VC1- I1-M2** (véase, Figura 28) y **VC1- I1-M10** (véase, Figura 32), la cantidad de modos de vibración empleados para la detección afectan notablemente los resultados, ya que entre mayor sea la cantidad de modos de vibración tomados para el análisis el daño va afectar los elementos de la estructura en forma continua.

Para el escenario de daño **VC1-I4-M10** (véase, Tabla 3) Se presentan los siguientes resultados (véase, Figura 33).

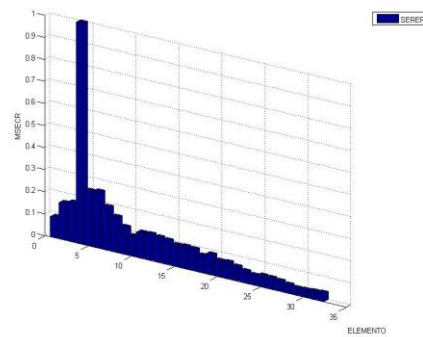
Figura 33. Resultados escenario de daño VC1-I4-M10



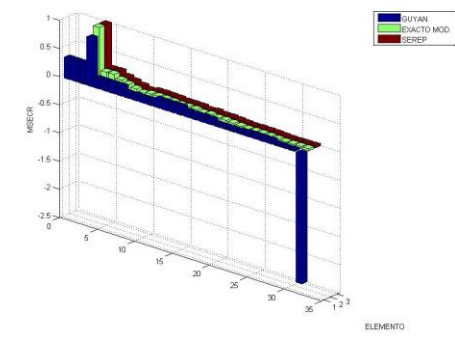
(a) MSECR Guyan



(b) MSECR Exacto Modificado



(c) MSECR Serep



(d) MSECR Guyan, Exacto Modificado, Serep

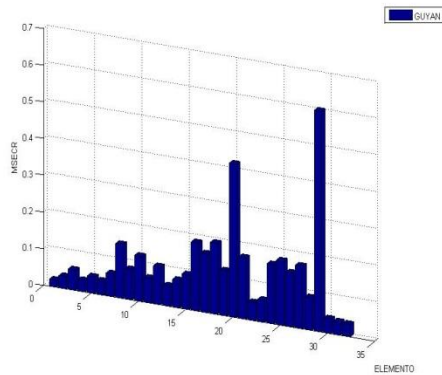
Para el escenario de daño **VC1-I4-M10** (véase, Figura 33) se presentan cambios drásticos en la metodología de detección de daño; empleando la técnica de expansión de Guyan se ve afectados elementos que no poseen daño, con un alto deterioro en los elementos a lo largo de la estructura.

Las técnicas de expansión modal Exacto Modificado y Serep empleadas para la detección de daño, son las que mejor detectan el daño en la estructura.

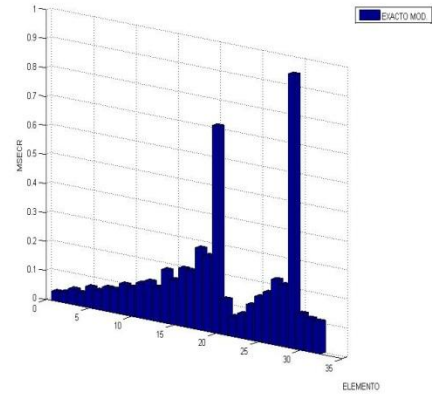
Al comparar los escenarios **VC1-I4-M2** (véase, Figura 29) y **VC1-I4-M10** (véase, Figura 33) se observa que el método de detección de daño sufre cambios al emplear mayor cantidad de modos de vibración.

Para el escenario de daño **VC3-I1-M10** (véase, Tabla 3) Se presentan los siguientes resultados (véase, Figura 34).

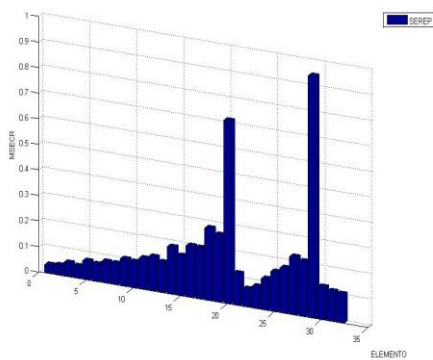
Figura 34. Resultados escena de daño VC3-I1-M10



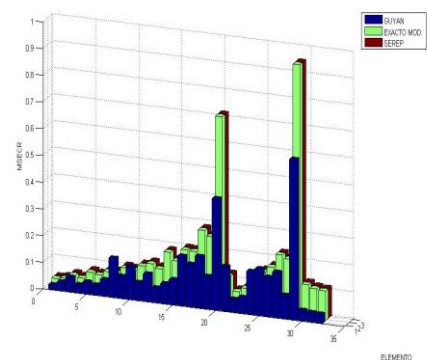
(a) MSECR Guyan



(b) MSECR Exacto Modificado



(c) MSECR Serep



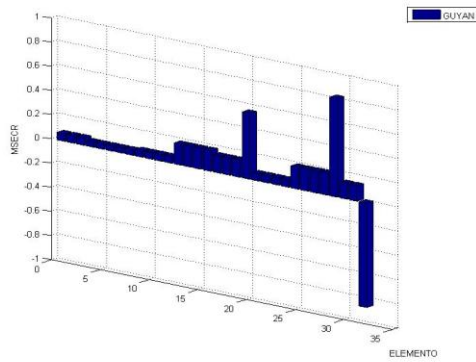
(d) MSECR Guyan, Exacto Modificado, Serep

Para el presente escenario de daño **VC3-I1-M10** (véase, Figura 34), la técnica de expansión modal de Guyan empleada para la detección de daño se observa que los daños en los elementos damnificados son detectados, pero detecta daños notables en elementos cerca al elemento dañado.

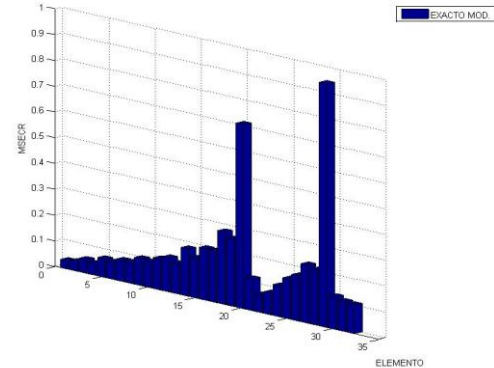
Si se compara el escenario de daño **VC3-I1-M2** (véase, Figura 30) y **VC3-I1-M10** (véase, Figura 34) se puede observar que es muy importante la cantidad de modos para la detección de daño ya que se puede afectar otros elementos y estos pueden ser detectados por las metodologías de detección de daño.

Para el escenario de daño **VC3-I4-M10** (véase, Tabla 3) los resultados son presentados (véase, Figura 35).

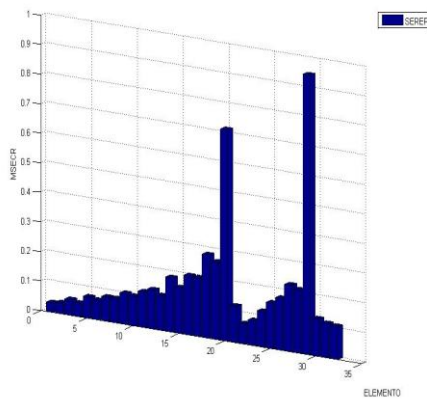
Figura 35. Resultados escenario de daño VC3-I4-M10



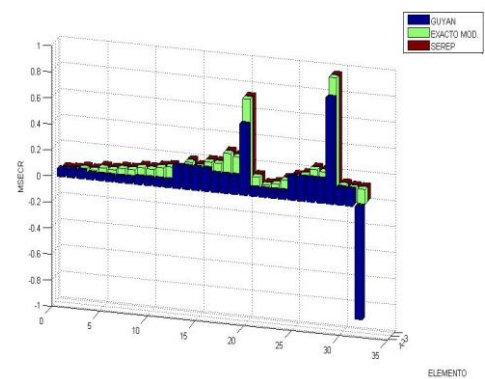
(a) MSECR Guyan



(b) MSECR Exacto Modificado



(c) MSECR Serep



(d) MSECR Guyan, Exacto Modificado, Serep

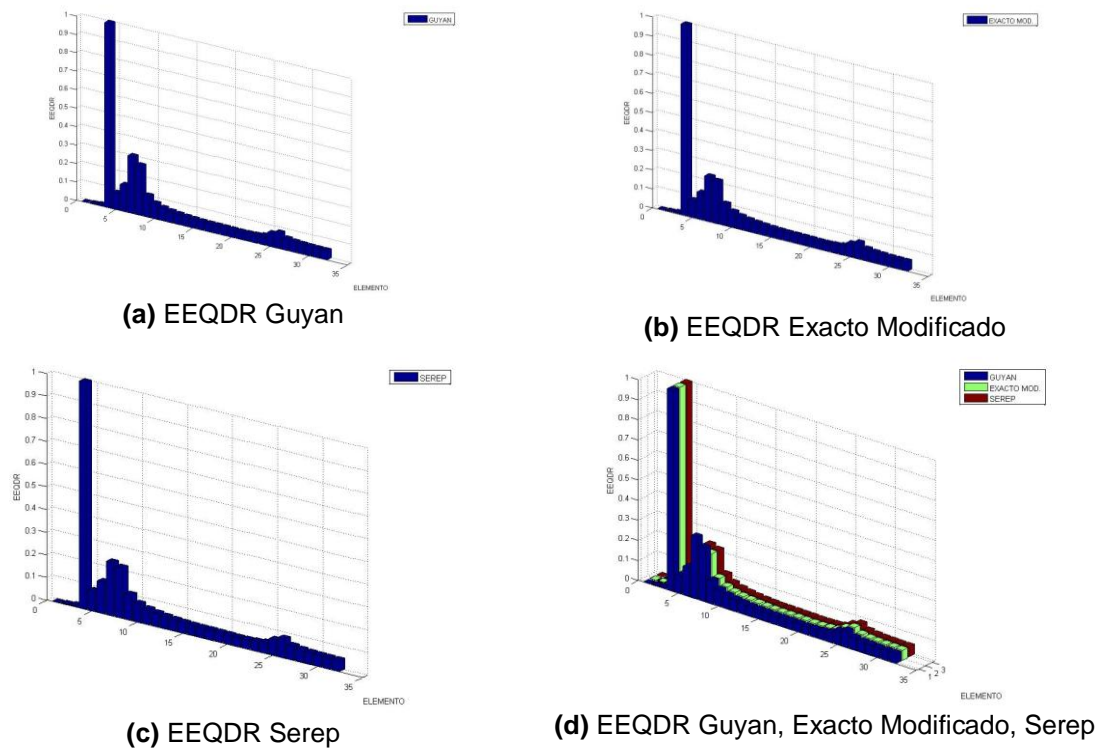
En este escenario de daño **VC3-I4-M10** (véase, Figura 35) se corrobora que la técnica de expansión de Guyan empleada para la detección de daño no da los resultados deseados, se detecta los daños en los elementos damnificados en un bajo porcentaje comparada con las otras técnicas.

Al comparar los escenarios de daño **VC3-I4-M2** (véase, Figura 31) y **VC3-I4-M10** (véase, Figura 35) se puede inferir que al aumentar la cantidad de modos de

vibración para la detección de daño se ven afectados más elementos a lo largo de la estructura en pero ambas condiciones me detectan el daño en el elemento damnificado.

- **Método EEQDR.** Para el escenario de daño **VC1-I1-M2** (véase, Tabla 3) Se presenta los siguientes resultados (véase, Figura 36).

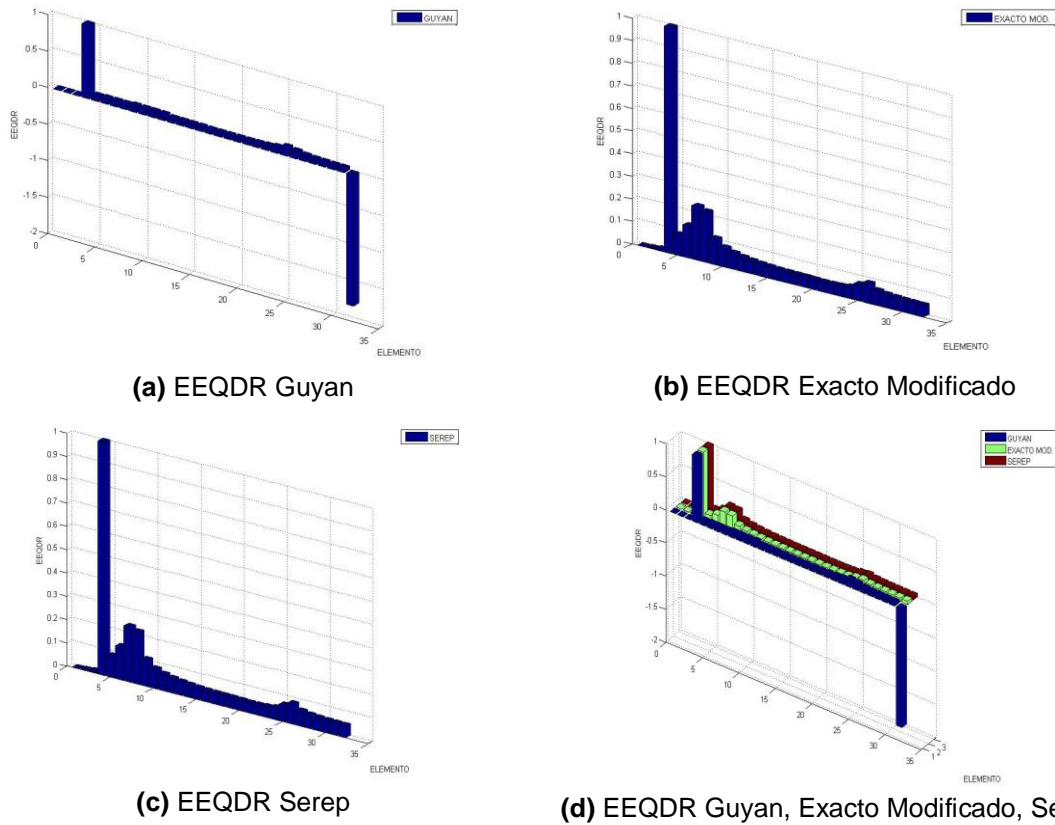
Figura 36. Resultados escenario de daño VC1-I1-M2



Para el escenario de daño **VC1-I1-M2** (véase, Figura 36) se identifica que la técnica de expansión modal de Guyan presenta algunos daños a lo largo de la estructura, y detectando un mayor porcentaje en los elementos continuos al elemento damnificado.

Para el escenario de daño **VC1-I4-M2** los resultados presentados (véase, Figura 37).

Figura 37. Resultados escenario de daño VC1-I4-M2



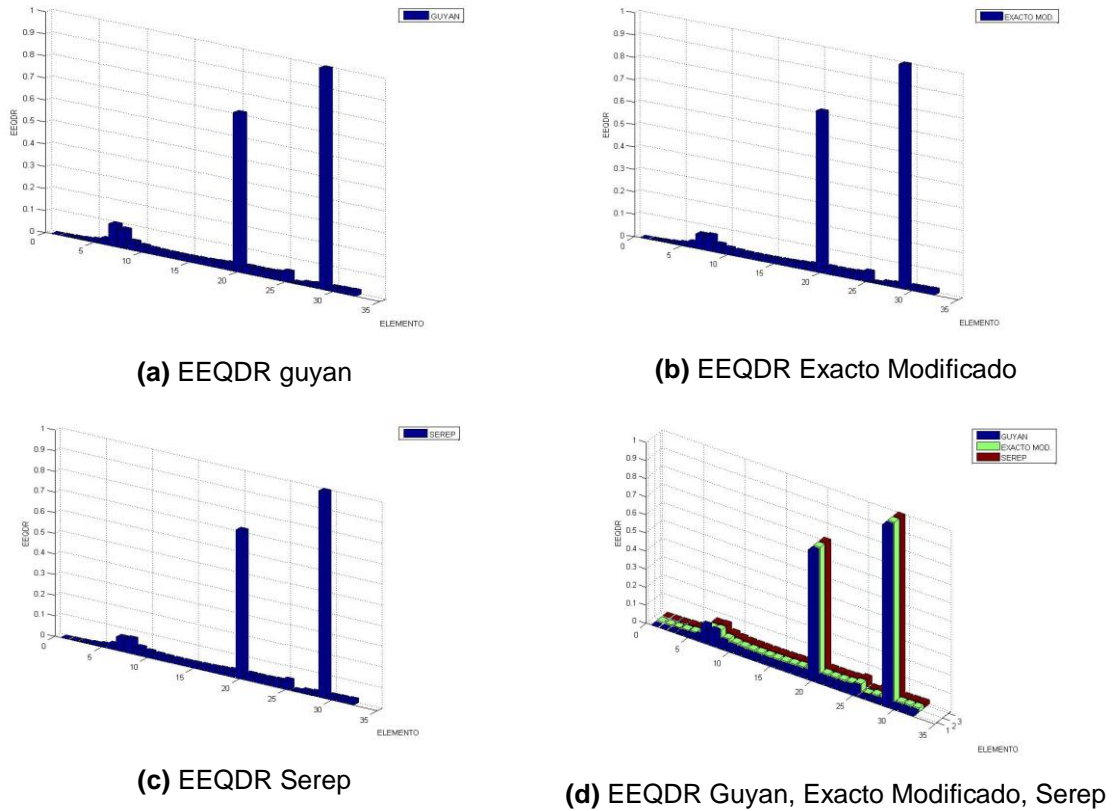
Para este escenario de daño **VC1-I4-M2** (véase, Figura 37) se observa que la técnica de expansión de Guyan aplicada para la metodología de detección de daño, detecta daño del elemento dañado. En el elemento final de la estructura presenta datos que no se ajustan al modelo. Esto sucede debido al cambio de grados de libertad verticales leídos.

Al comparar los escenarios **VC1-I1-M2** (véase, Figura 36) y **VC1-I4-M2** (véase, Figura 37) la técnica de expansión de Guyan aplicada para la detección de daño, sufre anomalías en la detección de daño debido al cambio de los grados de libertad leídos, detectando daños a en los elementos que no fueron dañados a lo largo de la estructura.

Para el escenario de daño **VC3-I1-M2** (véase, Tabla 3) los resultados obtenidos

son presentados (véase, Figura 38).

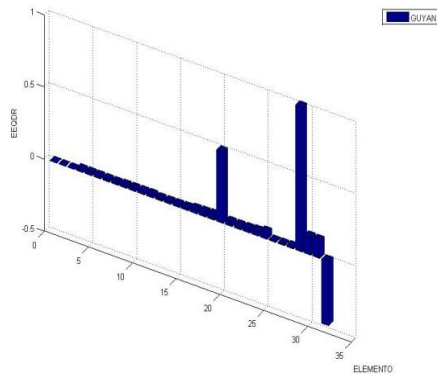
Figura 38. Resultados escenario de daños VC3-I1-M2



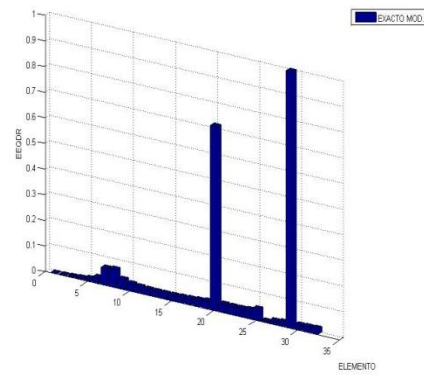
Para el escenario de daño estudiado **VC3-I1-M2** (véase, Figura 38) se observa que las técnicas de expansión modal escogidas para los métodos de detección de daño detectan los elementos damnificados en su proporción

Para el escenario de daño **VC3-I4-M2** (véase, Tabla 3) los resultados obtenidos son presentados (véase, Figura 39).

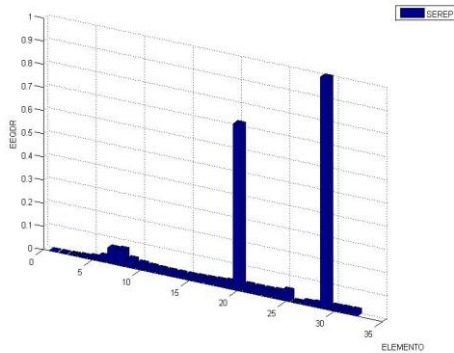
Figura 39. Resultados escenario de daños VC3-I4-M2



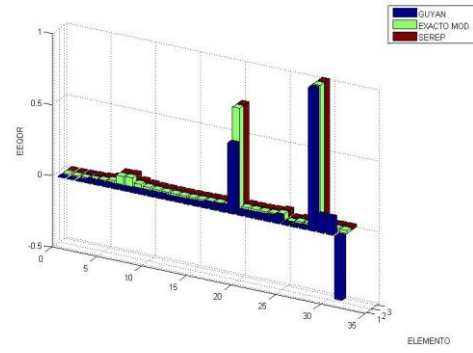
(a) EEQDR Guyan



(b) EEQDR Exacto Modificado



(c) EEQDR Serep



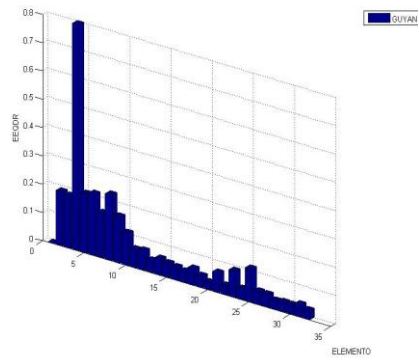
(d) EEQDR Guyan, Exacto Modificado, Serep

El escenario de daño **VC3-I4-M2** (véase, Figura 39) se observa que la técnica de expansión Guyan empleada para la detección de daño, no viable ya que no detecta en la proporción indicada los elementos dañificados y en algunos elementos presentan un alto porcentaje de daño.

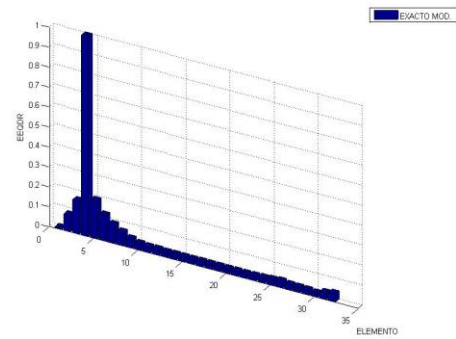
Al comparar **VC3-I1-M2** (véase, Figura 38) y **VC3-I4-M2** (véase, Figura 39) el método de expansión de Guyan se ve afectado por la cantidad de grados de libertad verticales leídos, ya que empleando los otros métodos dan óptimos los resultados.

Para el escenario de daño **VC1-I1-M10** (véase, Tabla 3) los resultados obtenidos se presentan (véase, Figura 40).

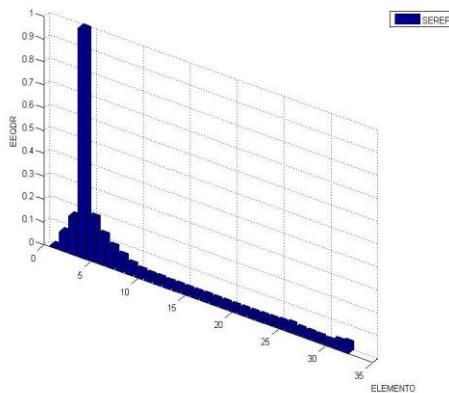
Figura 40. Resultados escenario de daño VC1-I1-M10



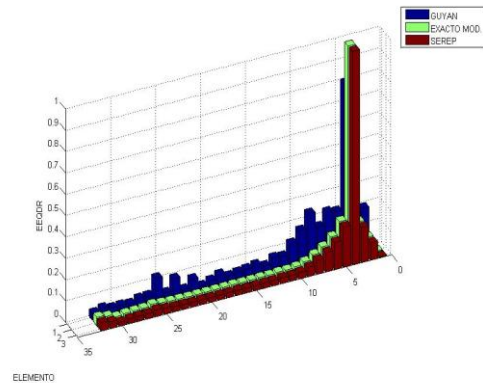
(a) EEQDR Guyan



(b) EEQDR Exacto Modificado



(c) EEQDR Serep

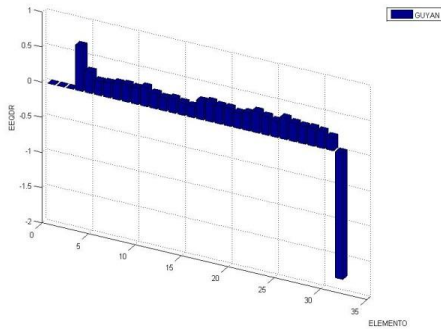


(d) EEQDR Guyan, Exacto Modificado, Serep

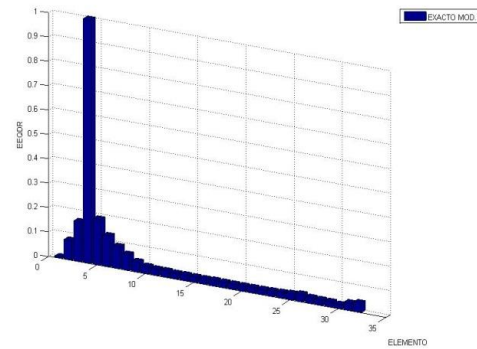
Para el escenario de daño **VC1-I1-M10** (véase, Figura 40) la técnica de expansión de Guyan aplicada para la detección de daño detecta el daño en el elemento dañado, pero presentando un alto porcentaje de daño en los elementos cercanos al dañado.

Para el escenario de daño **VC1-I4-M10** (véase, Tabla 3) los resultados son presentados (véase, Figura 41).

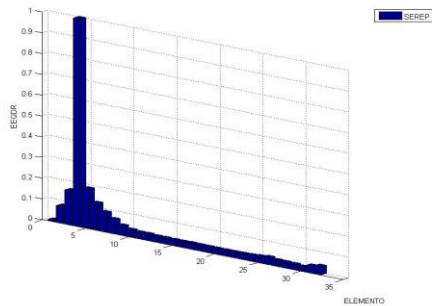
Figura 41. Resultados escenario de daño VC1-I4-M10



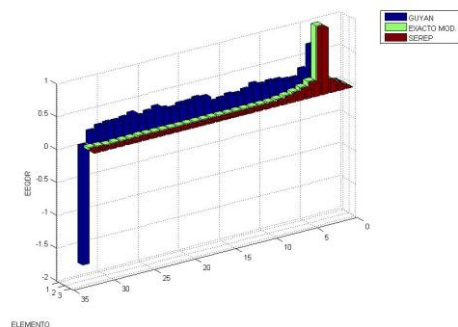
(a) EEQDR Guyan



(b) EEQDR Exacto Modificado



(c) EEQDR Serep



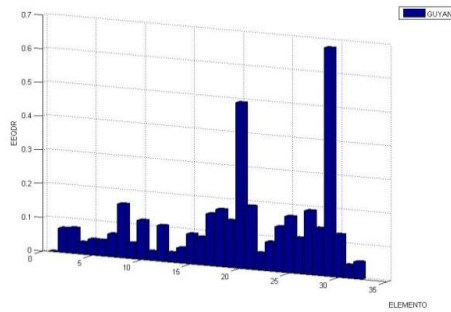
(d) EEQDR Guyan, Exacto Modificado, Serep

En el escenario de daño estudiado **VC1-I4-M10** (véase, Figura 41) se observa notablemente que la técnica de expansión de Guyan es la que menos se ajusta al modelo para la detección de daño.

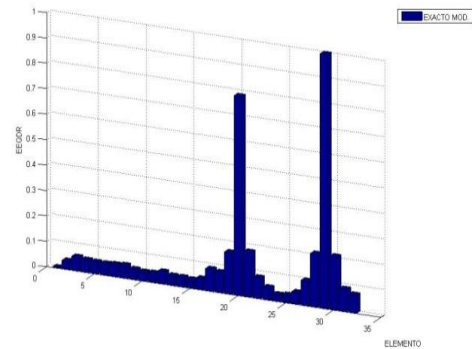
Al comparar los escenarios **VC1-I4-M2** (véase, Figura 37 ) y **VC1-I4-M10** (véase, Figura 41 ) se puede observar que al aumentar el número de modos de vibración la estructura solo presenta daños en los elementos de los lados del elemento dañado y en los elementos continuos presentan un daño mínimo.

Para el escenario de daño **VC3-I1-M10** (véase, Tabla 3) los resultados son presentados (véase, Figura 42).

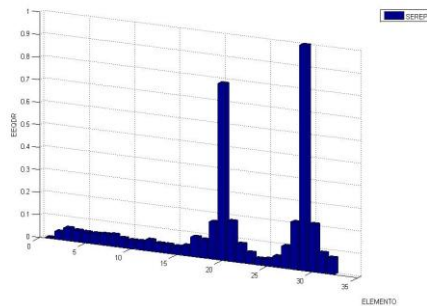
Figura 42. Resultados escenario de daño VC3-I1-M10



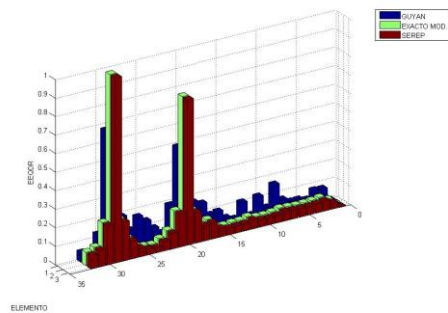
(a) EEQDR Guyan



(b) EEQDR Exacto Modificado



(c) EEQDR Serep



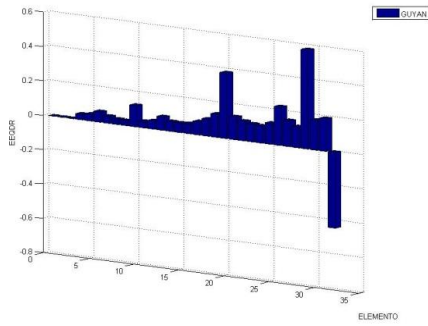
(d) EEQDR Guyan, Exacto Modificado, Serep

Para el escenario de daño múltiple de daño **VC3-I1-M10** (véase, Figura 42) la técnica de expansión de Guyan aplicada para la detección de daño presenta un daño continuo en los elementos de la estructura, esto puede suceder debido al aumento de los modos de vibración.

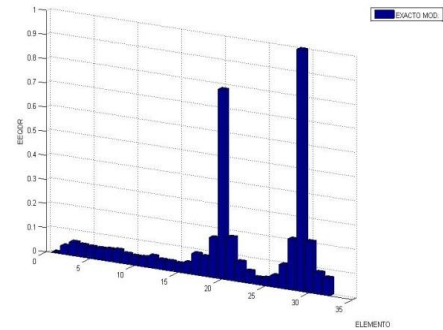
Al comparar **VC3-I1-M2** (véase, Figura 38) y **VC3-I1-M10** (véase, Figura 42) que al aumentar el número de modos esta metodología detecta el daño en los elementos damnificados.

Para el escenario de daño **VC3-I4-M10** (véase, Tabla 3) Se presentan los siguientes resultados (véase, Figura 43).

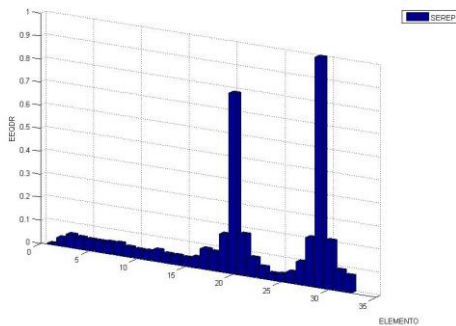
Figura 43. Resultados escenario de daño VC3-I4-M10



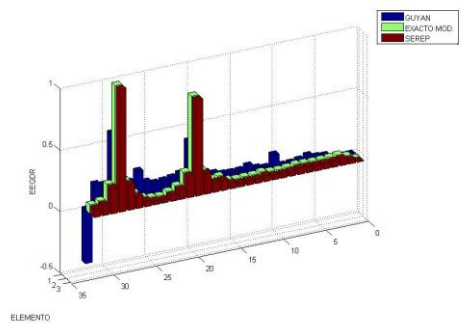
(a) EEQDR Guyan



(b) EEQDR Exacto Modificado



(c) EEQDR Serep



(d) EEQDR Guyan, Exacto Modificado, Serep

Para el escenario de daño **VC3-I4-M10** (véase, Figura 43) la técnica de expansión de Guyan detecta en bajo porcentaje los elementos damnificados, produciendo daño en los elementos a lo largo de la estructura que no fueron afectados.

Al comparar los métodos de detección de daño MSECR y EEQDR se puede notar la diferencia, ya que el método MSECR afecta en gran proporción a los elementos que no sufrieron daño.

El método EEQDR es el más óptimo ya que los elementos que no fueron afectados son detectados con un mínimo rango de daño.

## CONCLUSIONES

- No es posible definir de antemano la cantidad de modos de vibración a utilizar para la detección de daño de los elementos. Debido a que los modos de vibración influye en las metodologías de detección de daño.
- Las técnicas de expansión modal de la que se obtienen mejores resultados son: Expansión de Kidder, Expansión de Exacto Modificado, Expansión de Serep. Las técnicas se ajustan tanto para pocos grados de libertad leídos, como para todos los grados de libertad del modelo leídos. Siendo estas técnicas las más confiables para la implementación en las metodologías de detección de daño en vigas.
- La metodología de detección de daño EEQDR presenta resultados más confiables en la detección de los elementos damnificados vigas.
- Del número de grados de libertad monitoreados para las técnicas de expansión modal, cuantos mas grados de libertad medidos mejor son los resultados en vigas.
- Los resultados muestran que las mediciones experimentales, para las metodologías de detección de daño basada en energías, consigue detectar cuales elementos han sido damnificados en la estructura
- Cuando las mediciones son incompletas el desempeño de las metodologías no es confiable y disminuye la calidad de la información.
- La implementación de las técnicas de expansión modal para la detección de daño es viable para la identificación de elementos damnificados.

- Las frecuencias se ven afectadas de acuerdo a la distancia del apoyo: Si el elemento dañado se encuentra cerca de un apoyo sus frecuencias no tiene grandes disminuciones, y si el elemento se encuentra alejado del apoyo sus frecuencias disminuyen notablemente.
- Se debe recurrir de técnicas de expansión modal cuando las formas modales son incompletas la cual afecta negativamente el desempeño de las metodologías de detección de daño como se ven en las ejemplos estudiados.

## RECOMENDACIONES

- Definir una metodología de localización de daño que permita encontrar de una forma confiable el elemento damnificado.
- Utilizar las técnicas de expansión modal de mejor correlación de datos para la localización de daño.
- Estudio del problema de localización óptima de sensores.

## BIBLIOGRAFÍA

Allemang, R. J., & Brown, D. L. (1982). A Coefficient for Modal Vector Analysis. *Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conferente & Exhibit*, 109-116.

Balmes, E. (2000). Review and Evaluation of Shape Expansion Methods. *International Modal Analysis Conference*, 555–561.

Begambre, O. (s.f.). Detecção de dano a partir da resposta dinâmica da estrutura: estudo analítico com aplicação a estruturas do tipo viga. *Dissertação de Mestrado*, Universidade de São Paulo.

Begambre, O., Correa, R., & Laier, J. (2010). Deteccion daño estructural empleando el vector de fuerza residual modificado y el algoritmo simulated annealing (SA). *Revista de ingenieria de Universidad de Medellin*, 9, 25-35.

Cawley, P., & Adams, R. (1979). The location of defects in structures from measurements of natural frequencies. *The Journal of Strain Analysis for Engineering*, 49-57.

CORNWELL, P. D. (1999). Application of the Strain Energy Damage Detection Method to Plate-like Structures. *Journal of Sound and Vibration*, 224(2), 359-374.

Doebling, S., Farrar, C., & Prime, M. (1998). A Summary Review of Vibration-Based Damage Identification Methods. 30, 91-105.

Fadel, L., De Menezes, R., & Fadel, L. (2006). Mode shape expansion from data-based system identification procedures. *Mecánica Computacional*, XXV, 1593-

1602.

Farrar, C., Doebling, S., & Nix, D. (2001). Vibration-based structural damage identification. *350*, 131-149.

Guyan, R. (s.f.). Reduction of Mass and Striffness Matrices. *AIAA Journal*, *3*(2), 380.

Gysin, H. (1990). Comparison of Expansion Methods for FE Modeling Error Localization. 195-204.

Kidder, R. L. (1973). Reduction of Structural Frequency Equations. *AIAA Journal*, *11*(6), 892.

KIM, H. C. (2004). Structural Damage Assessment of Building Structures Using Dynamic Experimental Data. *The structural design of tall and special buildings* *13*, 1-8.

Law, S., Shi, Z., & Zhang, L. (1998). Structural Damage Detection From Incomplete and Noisy Modal Test Data. *Journal of Engineering Mechanics*, *124*, 1280-1288.

LI, H., YANG, H., & S., J. (2006). Modal Strain Energy Decomposition Method for Damage Localization in 3D Frame Structures. *132*, 429-437.

Lim, T. a. (1994). Structural Damage Detection of Space Truss Structures Using Best Achievable Eigenvectors. *AAIA J.*, *32*(No. 5), 1049-1057.

Miller, C. (1980). Dynamic Reduction of Structural Models. *ASCE*, 106(ST10), 2097 - 2108.

O'Callahan, J. (1989). A Procedure for an Improved Reduced System. *VII International Modal Analysis Conference*, 17-21.

O'Callahan, J., Avitabile, P., & Riemer, R. (1989). "System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP)". *Modal analysis and controls laboratory*, 29-37.

Shi, Z. Y. (1998). Structural Damage Localization From Modal Strain Energy Change. 218(5), 822-844.

Villalba, J. D. (2009). Detecção de dano em estruturas utilizando algoritmos geneticos e parametros dinamicos. *Dissertação de Mestrado*, Universidade de São Paulo.

## **BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA**

Avitabile, P. (1998). Overview of analytical and experimental modal model correlation techniques. Disponible en Internet: *URL:[http://faculty.uml.edu/pavitabile/downloads/Peter\\_Avitabile\\_Thesis\\_theory\\_sections.pdf](http://faculty.uml.edu/pavitabile/downloads/Peter_Avitabile_Thesis_theory_sections.pdf)* . [Consulta: 12 de Marzo de 2011]