

**MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS DE CUARTO  
ORDEN, EN EL DOMINIO TEMPORAL CON MALLA  
VARIABLE; PARA SIMULAR LA PROPAGACIÓN DE  
ONDAS SÍSMICAS EN UN MEDIO FRACTURADO**

FRANCISCO GAMBOA ORTEGA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
2009

MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS DE CUARTO  
ORDEN, EN EL DOMINIO TEMPORAL CON MALLA  
VARIABLE; PARA SIMULAR LA PROPAGACIÓN DE  
ONDAS SÍSMICAS EN UN MEDIO FRACTURADO

TRABAJO DE GRADO  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

FRANCISCO GAMBOA ORTEGA

DIRECTORA: DRA. MARIA DEL CARMEN LASPRILLA ÁLVAREZ  
CODIRECTOR: MSC. HERLING GONZÁLEZ ÁLVAREZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
2009

*A Dios,  
por permitirme culminar con éxito esta importante etapa académica.*

*A Lucio y Zoraida, mi papá y mi mamá,  
quienes con su gran apoyo, esfuerzo y dedicación  
me han brindado la mejor oportunidad de mi vida.  
Gracias por confiar en mi, y  
por estar siempre conmigo en cada momento.  
Los quiero mucho.*

*A todas las personas que con su compañía y amistad  
hicieron especial e inolvidable este paso por la Universidad,  
Jairo, Cesar, Sasha, Pablo.  
Gracias por estar ahí, porque realmente me divertí  
y porque sé que puedo contar con cada uno de ustedes en cada momento.  
Recuerden que también pueden contar conmigo siempre.*

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco inicialmente al Dr. William Agudelo, por permitirme hacer parte del Grupo de Investigación en Geofísica y a la Dra. María del Carmen Álvarez por su guía y gran colaboración en el desarrollo del trabajo

A Herling González por su colaboración en esta tesis, su sentido del humor amenizó bastante todo el trabajo, y su pilera le dió una mejor dirección.

A todos los compañeros del grupo, quienes de alguna manera hicieron su contribución al trabajo a partir de su experiencia.

---

---

# RESUMEN

---

---

**TITULO:** MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS DE CUARTO ORDEN, EN EL DOMINIO TEMPORAL CON MALLA VARIABLE; PARA SIMULAR LA PROPAGACIÓN DE ONDAS SÍSMICAS EN UN MEDIO FRACTURADO.<sup>a</sup>

**AUTOR:** Francisco Gamboa Ortega.<sup>b</sup>

**PALABRAS CLAVES:** Diferencias Finitas, Dominio del Tiempo FDTD (Finite-Difference Time Domain), Malla Variable, Malla Intercalada, Fractura.

## CONTENIDO:

Se desarrolló un esquema numérico usando diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) que utiliza el concepto de malla variable. Para tal fin se discretizaron las ecuaciones que modelan una onda elástica propagándose en un medio continuo (Ecuaciones de Navier ). El campo de velocidad es función de los esfuerzos. La simulación de la fractura se realiza mediante la variación de la malla computacional en la vecindad de la discontinuidad. Para modelar la propagación de ondas en un medio se usaron fronteras artificiales intentando eliminar las reflexiones en los límites del dominio computacional finito. Distintas aproximaciones han logrado atenuar parcialmente estas señales no deseadas. La implantación de fronteras perfectamente acopladas (PML<sup>c</sup>) elimina estas reflexiones en un medio continuo. El uso de métodos finitos o elementos finitos requiere un modelo discreto espacialmente; esto da lugar a remanentes de tales reflexiones. Una disminución en el tamaño de la grilla redundante en la atenuación de las reflexiones pero incrementa el consumo de recursos computacionales. En este trabajo se muestran los resultados cuando se introduce una función de atenuación a la solución por PML en la zona de absorción, logrando una atenuación satisfactoria sin incrementar apreciablemente el uso de recursos mecánicos. Las simulaciones se hicieron usando diferencias finitas, en modelos simples de capas planas con buzamiento y diferentes parámetros elásticos.

---

<sup>a</sup>Proyecto de Grado.

<sup>b</sup>Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Directora: Dra. Maria del Carmen Lasprilla.  
Codirector: MSc. Herling Gonzáles

<sup>c</sup>Perfect Model Layer

---

---

# ABSTRACT

---

---

**TITLE:** METHOD OF FINITE DIFFERENCES OF FOURTH ORDER, IN TEMPORARY DOMAIN WITH VARIABLE-GRID; TO SIMULATE THE SPREAD OF SEISMIC WAVES IN A FRACTURED MEDIUM.<sup>d</sup>

**AUTHOR:** Francisco Gamboa Ortega <sup>e</sup>

**KEYWORDS:** Finite-Differences Time Domain FDTD, Variable-grid, Staggered-grid, Fracture.

**ABSTRACT:** A numerical scheme was developed by using Finite-Differences Time Domain (FDTD) which uses the variable-grid concept. To do so, the equations that model an elastic wave propagating in a continuous medium were discretized (Navier Equations). The velocity field is function of the stress. The fracture simulation is done by varying the computational-grid in the vicinity of discontinuity. Artificial borders were used to model the wave propagation in a medium trying to avoid reflections in the boundaries of the finite computational domain. Different approximations have partially attenuated these unwanted signals. The Perfect Model Layer (PML<sup>f</sup>) implementation avoids these reflections in a continuous medium. The use of finite methods or finite elements requires of a spatially discrete model; this provokes remainders of such reflections. A decrease in the size of the grid results in the attenuation of the reflections but increases the consumption of computational resources. Results of the inclusion of an attenuating function in the PML solution in the absorption zone are listed in this present work; in the way, a satisfactory attenuation is obtained with no increasing of mechanic resources. Simulations were done by using finite differences in simple models of dipping plain layers and different elastic parameters.

---

<sup>d</sup>Degree Project.

<sup>e</sup>Faculty of Sciences. Physics School. Director: Dra. Maria del Carmen Lasprilla.  
Codirector: MSc. Herling González.

<sup>f</sup>Perfect Model Layer

---

---

# ÍNDICE GENERAL

---

---

<b>ÍNDICE GENERAL</b>	<b>3</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	<b>6</b>
<b>ÍNDICE DE TABLAS</b>	<b>8</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>2. MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO</b>	<b>3</b>
2.1. Elastodinámica Linealizada . . . . .	3
2.1.1. El Tensor de Deformación . . . . .	3
2.1.2. El Tensor de Esfuerzo . . . . .	5
2.1.3. El Tensor Elasticidad . . . . .	6
2.2. La Ecuación de Movimiento . . . . .	8
2.2.1. Medio Isótropo . . . . .	9
2.2.2. Medio Anisótropo TI (Transversal Isotropy) . . . . .	10
2.2.3. Anisotropía de Thomsen o Anisotropía Débil . . . . .	15
<b>3. DE CONTINUO A DISCRETO</b>	<b>17</b>

3.1. Método en Diferencias Finitas . . . . .	17
3.2. Construcción de un Esquema en Diferencias Finitas . . . . .	19
3.2.1. Propiedades de un Esquema en Diferencias Finita . . . . .	20
3.3. Un Ejemplo de Esquema en Diferencias Finitas . . . . .	21
3.3.1. Operador de Cuarto Orden . . . . .	22
3.3.2. Condición de Estabilidad y Dispersión . . . . .	23
3.4. Justificación del uso de Métodos Numéricos en la Solución de EDP . . .	23
<b>4. EL MÉTODO DE MALLA VARIABLE</b>	<b>25</b>
4.1. Operador de Cuarto Orden en Diferencias Finitas Para una Malla Variable . . . . .	25
4.1.1. Solución de la Ecuación de Onda 1D con una Malla Variable . . . . .	29
4.2. ALCANCE Y APLICACIÓN DEL MÉTODO DE MALLA VARIABLE	32
4.2.1. Modelo . . . . .	33
4.2.2. Aplicando Malla Variable al Modelo . . . . .	35
4.2.3. Modelo con Anisotropía . . . . .	37
4.3. Modelo con Variación de Parámetros . . . . .	39
4.4. Modelado de la Fuente. . . . .	40
4.5. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA . . . . .	40
4.6. El Problema de Estabilidad . . . . .	41
<b>5. CONDICIONES ABSORBENTES</b>	<b>42</b>
5.1. Condiciones de Frontera Absorbente 1D (asignación de campo en la frontera) . . . . .	42

5.2. Condiciones de Frontera Absorbente Capas Perfectamente Acopladas PML	44
5.3. Función de Atenuación . . . . .	46
5.4. Esquema en Diferencias Finitas para La Región PML . . . . .	47
5.5. Ejemplo . . . . .	48
5.6. Método Simplificado de la Representación de una Discontinuidad en un Medio Isótropo . . . . .	52
<b>6. CONCLUSIONES</b>	<b>54</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>59</b>
<b>7. ANEXOS</b>	<b>61</b>
7.1. Discretización de las Ecuaciones [2.25] en DFDT . . . . .	61
7.2. Ponencias . . . . .	62

---

---

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

---

1.1. Modelo Sísmico, rayos y frentes de onda. . . . .	1
2.1. Ejemplo de un medio con alineamiento vertical. . . . .	11
2.2. Simetría Hexagonal o medio VTI. . . . .	12
2.3. a) Presenta un medio isótropo se puede observar que el frente de onda es circular ( $V_{grupo} = V_{fase}$ ). b) Medio anisótropo: presenta un frente de onda elíptico ( $V_{grupo} \neq V_{fase}$ ). . . . .	15
3.1. Relación entre las diferentes aproximaciones a la derivada. . . . .	18
4.1. Malla con nodos espaciados no uniformes en la dirección x. $\Delta_i(i = 4)$ son usados para calcular el operador $D_x$ centrado entre (a) el nodo $i$ e $i + 1$ (b) centrado en el nodo $i$ . . . . .	26
4.2. Variación de pulso de Gauss en el espacio y en el tiempo sin fronteras absorbentes. . . . .	29
4.3. Malla con nodos espacialmente no uniformes en la dirección x. Centrado en el nodo $i$ . . . . .	31
4.4. Modelo de una Fractura Vertical. . . . .	33
4.5. Espaciados en la vecindad de la fractura. las grillas horizontales se suavizan de 6cm a 1mm con un factor de de 3 sobre una región de 11.7 cm de ancho. El espaciado vertical es de 6 cm en toda la malla. La fractura tiene unas dimensiones de 4mm por 10.56m de largo. . . . .	35

4.6.	Representación de una fractura vertical en un modelo FD en una columna con anisotropía en las celdas . . . . .	37
4.7.	Snapshots de la componente horizontal de la velocidad. P es la onda primaria y Pdp-Pds son las ondas difractadas, el modelo <i>funciona con el método de variación de parámetros elásticos</i> . . . . .	39
5.1.	Variación del pulso Gaussiano en el espacio y en el tiempo con fronteras absorbentes. . . . .	43
5.2.	Capas PML. . . . .	48
5.3.	Modelo sísmico y perturbación Gaussiana con Capas PML, Las simulaciones se hicieron usando diferencias finitas, modelo simple de capas planas con buzamiento. . . . .	50
5.4.	modelo sísmico sin PML. . . . .	51
5.5.	Representación cartesiana de una fractura. . . . .	52
6.1.	Visualización de la onda cuando pasa por la fractura implementando anisotropía. . . . .	55
6.2.	Visualización de la onda cuando pasa por la fractura implementando malla variable. P corresponde a la onda incidente, Pdp la onda convertida P o reflejada y Pds la onda S convertida transmitida. . . . .	56
6.3.	modelo sísmico con PML. . . . .	57
7.1.	Carta de Aceptación para Publicación. . . . .	63
7.2.	Certificado. . . . .	64

---

---

# ÍNDICE DE TABLAS

---

---

5.1. Parámetros físicos y numéricos para la propagación de la onda en el modelo simple con capas. . . . .	49
---	----

# CAPÍTULO 1

---

---

## INTRODUCCIÓN

---

---

En la sísmica de reflexión básicamente se utiliza una fuente explosiva para excitar el medio. La señal generada se propaga hacia el subsuelo y genera reflexiones hacia arriba en cada interfaz durante la propagación. Estas reflexiones llegan a la superficie y son captadas por un arreglo de geófonos localizados adecuadamente alrededor del sitio de la explosión (figura [I.1]).

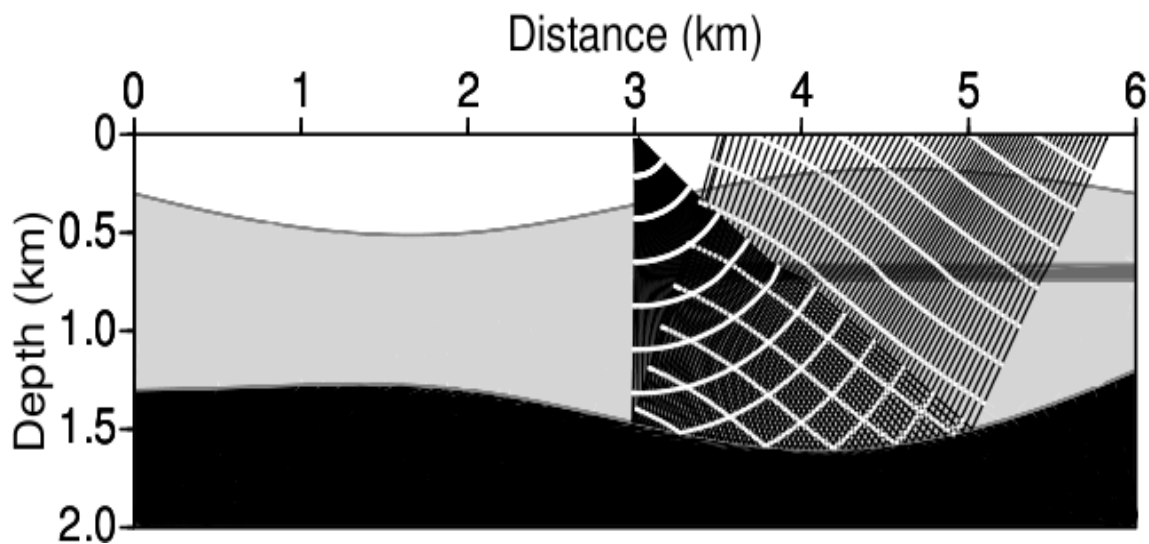


Figura I.1: Modelo Sísmico, rayos y frentes de onda.

El procesamiento y posterior análisis de estas señales suele producir una imagen parecida a la distribución de las capas en el subsuelo. En una primera aproximación el

modelado de fenómenos ondulatorios consiste en simular los frentes de onda mientras se propagan. Estos frentes de onda representan regiones del espacio al reflejarse sobre esté. La dinámica de un medio continuo permite simular este fenómeno mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales denominadas ecuaciones de Navier. Estas ecuaciones representan las ecuaciones de Newton para un continuo y describen el movimiento relativo de los puntos del medio provocado por los esfuerzos internos y las fuerzas de volumen aplicadas al mismo. Desde el punto de vista matemático, las ecuaciones de Navier contienen bastantes incógnitas lo que las hace un sistema difícil de describir, razón por la cual deben complementarse con algún conjunto de relaciones empíricas entre los esfuerzos y la cinemática que describe al movimiento, también llamado relaciones constitutivas. En general cuando se disponga de un conjunto de relaciones constitutivas las ecuaciones de Navier-Stokes suelen mantener su carácter de no linealidad por lo que son extraordinariamente complicadas y en general es necesario recurrir a la búsqueda de soluciones a través de métodos numéricos.

Estos métodos numéricos permiten describir las ecuaciones de Navier en una fórmula discreta en el espacio y en el tiempo, y trasladan esta formulación a un algoritmo que puede ser resuelto numéricamente por un código computacional. Entre las diferentes formas de discretización posible una de las más simples y de mayor confiabilidad es el Método de Diferencias Finitas. El presente trabajo pretende describir una aplicación de este método para simular la propagación de una onda elástica en un medio continuo, usando una malla variable que permite mejorar la solución de las ecuaciones cuando los cambios de interfaz son muy fuertes, reduciendo el tamaño de la malla en la vecindad de la discontinuidad.

Aquí las condiciones de frontera absorbentes son necesarias para simular adecuadamente la propagación de los campos de velocidades y esfuerzos una vez que éstos han llegado a la frontera de la malla de simulación. En algoritmos de FDTD<sup>9</sup>, los valores de los campos se determinan mediante un cálculo de los campos en los puntos vecinos. El problema consiste en que en la frontera de la malla de simulación, este cálculo no se puede dar porque no conocemos el valor del campo fuera de la malla de simulación, ya que consideramos que fuera de la malla no existen fuentes.

---

<sup>9</sup>Finite Difference Time Domain

## CAPÍTULO 2

---

---

# MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO

---

---

### 2.1 Elastodinámica Linealizada

La mecánica y electrodinámica de medios continuos estudian el comportamiento de la materia sin considerar su granularidad (estructura atómica). Esta aproximación es válida siempre que las condiciones experimentales no alcancen los límites en que los efectos cuánticos hacen su aparición. Para el modelo de fenómenos ondulatorios, la idea de granularidad puede ser bastante no trivial, pues depende prácticamente de la relación entre el espectro de longitudes de onda que se propagan y las dimensiones de los objetos explorados. Mostraremos las cantidades fundamentales para el desarrollo de la teoría de elasticidad, a saber:

- El tensor de deformación
- El tensor de esfuerzos
- El tensor de elasticidad

#### 2.1.1. El Tensor de Deformación

El concepto de deformación es fundamental en elastodinámica. Describe el cambio de las posiciones relativas de las partículas que componen un sólido en la aproximación de medios continuos.

Mostraremos el aparato matemático que describe de forma general la deformación de un sólido elástico. Para ello, necesitamos describir cuantitativamente la deformación local en cada punto dentro del sólido. Veremos que dicha descripción es posible asignando un conjunto de seis números a cada punto. Dichos números son las componentes de un tensor simétrico que se llama tensor de deformación.

Definimos deformación unitaria homogénea cuando el sólido es deformado a lo largo de una sola dirección del sistema de referencia. Dado que tenemos un sólido elástico lineal, se cumple que:

$$\frac{u_x}{x} = \frac{\Delta L}{L}, \quad (2.1)$$

$$u_x = e_{xx}x, \quad (2.2)$$

donde  $u_x$  se denomina el campo de desplazamiento,  $x$  la posición de la partícula,  $L$  la longitud del sólido y  $\Delta L$  el cambio de la longitud después de la deformación. Cuando la deformación es *no homogénea*, las otras dimensiones participan, ahora  $e_{xx} = e_{xx}(x, y, z)$  pero  $e_{xx}$  sigue describiendo localmente la deformación en la dirección  $x$ , por lo que generalizamos:

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Todo el análisis anterior vale también para  $z$  y para  $y$ , por lo que:

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad (2.4)$$

$$e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (2.5)$$

Estas describen las deformaciones compresionales y tensionales, es decir que van a lo largo de uno de los ejes del sistema de referencia.

Las deformaciones tipo cizalla en que los cambios de posición son diagonales y hay ángulos involucrados, se pueden escribir de forma general como:

$$e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (2.6)$$

$$e_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

Las componentes del tensor admiten interpretaciones físicas relativamente simples: El elemento diagonal  $\varepsilon_{ij}$ , también denotado  $\varepsilon_i$ , representa los cambios relativos de longitud en la dirección  $i$ . La suma  $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  es igual al cambio de volumen relativo del cuerpo. Los elementos  $\varepsilon_{ij}$  con  $i \neq j$  representan deformaciones angulares, más concretamente la variación del ángulo recto entre las direcciones ortogonales  $i$  y  $j$ . Por tanto la distorsión o cambio de forma viene caracterizada por 3 componentes de este tensor deformación  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{13}$ ,  $\varepsilon_{23}$ .

Esto permite caracterizar las deformaciones en el caso de muy pequeñas deformaciones (inferiores en valor absoluto a 0,01). En coordenadas cartesianas dicho tensor se expresa en términos de las componentes del campo de desplazamientos como sigue:

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (2.7)$$

Análogamente para  $e_{xz}$ ,  $e_{zx}$ ,  $e_{yz}$ ,  $e_{zy}$ . El tensor deformación tiene entonces nueve componentes:

$$\begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Escrito con la notación formal, el tensor se puede escribir como:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.9)$$

$i, j = 1, 2, 3.$

### 2.1.2. El Tensor de Esfuerzo

Dos tipos de fuerza pueden actuar sobre un sólido:

**Fuerzas de Cuerpo:** son de gran alcance y actúan sobre todas las partículas del sólido y son proporcionales a su masa y volumen<sup>h</sup>. Son ejemplo la fuerza gravitatoria, la fuerza electrostática y magnetostática

---

<sup>h</sup>ver:<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/examples/P2Lb.pdf>

**Fuerzas de Superficie:** su efecto no se produce de una vez sobre todas las partículas del sólido, sino que es transmitido progresivamente a todas ellas via las fuerzas restauradoras entre partículas vecinas (esfuerzo). Los esfuerzos internos de un sólido sometido a deformación pueden ser descritos por medio de un tensor de rango dos denominado tensor esfuerzo.

Sea un elemento de superficie  $\Delta_y\Delta_z$  perpendicular al eje  $x$ . Una fuerza  $\Delta F$  aplicado a dicho elemento se descompone en sus tres componentes  $\Delta F_x$ ,  $\Delta F_y$  y  $\Delta F_z$  definimos entonces estas tres cantidades:

$$\tau_{xx} = \frac{\Delta F_x}{\Delta y \Delta z}, \quad (2.10)$$

$$\tau_{yx} = \frac{\Delta F_y}{\Delta y \Delta z}, \quad (2.11)$$

$$\tau_{zx} = \frac{\Delta F_z}{\Delta y \Delta z}. \quad (2.12)$$

El primer índice se refiere a la componente de la fuerza y el segundo índice se refiere al eje coordenado perpendicular al elemento del área, análogamente podemos imaginar los elementos de área  $\Delta_x\Delta_y$  y  $\Delta_x\Delta_z$  perpendiculares al eje  $z$  y al eje  $y$  respectivamente, esto forma nueve entradas del tensor esfuerzo que podemos escribir como:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

*Veremos que en particular las deformaciones homogéneas van asociadas a los elementos de la diagonal  $e_{ii}$ , así como los esfuerzos a lo largo de los ejes estan asociados a la diagonal  $\tau_{kk}$  del tensor esfuerzo.*

### 2.1.3. El Tensor Elasticidad

Las ecuaciones dinámicas de la teoría de elasticidad (denominadas ecuaciones de Navier) relacionan el vector de desplazamiento con el tensor de esfuerzos, sin embargo estas ecuaciones no son suficientes para encontrar el estado de esfuerzos y deformación de un sólido arbitrario. Para lograr condiciones de integrabilidad de las ecuaciones, es

menester un conjunto de relaciones constitutivas entre el tensor de esfuerzos, el vector de desplazamiento infinitesimal y sus derivadas, esto es una relación con la siguiente forma general:

$$\tau = \tau(\vec{u}, \partial \vec{u}, \dot{\vec{u}}, \dots). \quad (2.14)$$

Las relaciones constitutivas más sencillas corresponden a una linealización en que sólo aparecen las derivadas espaciales de  $\vec{u}$

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \tau_{ij}^{(0)} + \left. \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial_p u_l} \right|_{\vec{u}^0 \rightarrow 0} \partial_p u_l + \dots \\ &\approx \tau_{ij}^{(0)} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial_p u_l} \Big|_{\vec{u}^0 \rightarrow 0} \partial_p u_l + \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

En esta aproximación, válida en el límite ( $\partial_i u_p \ll 1$ ), el término de orden cero  $\tau_{ij}^{(0)}$  representa el estado natural de esfuerzo del sistema antes de que ocurra cualquier cambio en la posición relativa de los puntos del medio con respecto a un estado de referencia caracterizado por el vector  $\vec{u}$ .

Como ya hemos visto, la información acerca de la deformación está codificada en las componentes del tensor  $e$ ,

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.16)$$

$$i, j = 1, 3,$$

expresión que al sustituirse en las relaciones constitutivas [2.15], permiten expresar las relaciones esfuerzo-deformación en la forma:

$$\begin{aligned} \widetilde{\tau}_{ij} &\approx \left. \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial_p u_l} \right|_{\vec{u}^0 \rightarrow 0} \partial_p u_l \\ &= C_{ijkl} e_{kl}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Donde  $\widetilde{\tau}_{ij} = \tau_{ij} - \tau_{ij}^0$  representa la desviación del estado de esfuerzos natural del medio y  $C_{ijkl} \equiv \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial p_{kl}} \Big|_{\vec{u}^0 \rightarrow 0}$ . La igualdad [2.17] tiene una interpretación física bastante sencilla, describe un material en que los esfuerzos asociados a las deformaciones son proporcionales a estas, de tal suerte que la ecuación tensorial  $\tau = Ce$  que denominaremos **Ley de Hooke** no es más que la generalización del modelo simplificado de un resorte ( $F = \kappa x$ ).

## 2.2 La Ecuación de Movimiento

La relación entre el esfuerzo y la tensión para un medio elástico (ley de Hooke) esta dada por:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.18)$$

El tensor de cuarto orden  $C_{ijkl}$  describe las propiedades del medio, los dos primeros subíndices estan relacionados con la tensión y los dos últimos con la deformación, la expresión  $\varepsilon_{kl}$  es la deformación y esta dada por la ecuación:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial u_k}{\partial x_l}. \quad k, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.19)$$

Es importante recordar que la expresión anterior no presenta una relación matricial sino por el contrario es una relación tensorial, por lo tanto obedece al álgebra tensorial; por ello es posible relacionar el tensor elasticidad  $C_{ijkl}$  (81 componentes) con el tensor deformación)  $\varepsilon_{kl}$  (9 componentes). El tensor elasticidad puede tender a reducirse de 81 constantes elásticas a 21 debido a la simetría intrínseca de los tensores de esfuerzo y deformación, lo cual hace que el tensor de constantes elásticas se reduzca a 36 componentes. Más adelante explicaremos esta reducción de componentes, por ahora nos interesa deducir la ecuación que nos permite describir el problema a solucionar.

Teniendo en cuenta la ecuación general (Ecuación de Movimiento<sup>i</sup>):

$$\tau_{ji,j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (2.20)$$

donde  $\rho$  es la densidad del medio,  $f_i$  son las fuerzas de volumen y  $u_i$  es el desplazamiento de una partícula en un tiempo  $t$  y posición  $x_j$ . Si sustituimos la ecuación [2.18] en [2.20]:

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.21)$$

esta ecuación de movimiento recibe el nombre de Ecuación de Cauchy (Slawinsky, 2003). Para un medio continuo, elástico, lineal y tridimensional, despreciando las fuerzas de

<sup>i</sup>Segunda Ley de Newton aplicada a un pequeño elemento de volumen.

volumen la ecuación [2.21] se reescribe como:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.22)$$

donde  $v_i$  es la velocidad de la partícula en la dirección  $i$  en un tiempo  $t$ . Esta ecuación representa el modelo a estudiar (propagación de la onda en un medio).

### 2.2.1. Medio Isótropo

Para un medio isótropo las propiedades físicas no varían con respecto a la dirección de polarización, la representación del tensor de elasticidad para el medio isótropo esta dada por la matriz de Voigt (Thomsen, 2003) con dos términos independientes llamados parametros de Lamé:

$$C_{\text{Iso}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & & & \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & & & \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{44} & \\ & & & & & C_{44} \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

$$C_{11} = \lambda + 2\mu, \quad C_{12} = \lambda, \quad C_{44} = \mu. \quad (2.24)$$

El tensor de elasticidad presente en la ecuación de onda puede ser escrito de esta manera compacta (matriz [2.23]) debido a sus características simétricas<sup>j</sup>; es por ello que aparece como una matriz 6X6. La notación de Voigt define:

$$C_{ijkl} \rightarrow C_{mn}.$$

Esto lleva a que el tensor se reduzca de 36 constantes a 21. El cambio es de la forma tal, que los "ij" (ó kl) cambian a "m" (ó n) siguiendo la regla:

$$11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6.$$

---

<sup>j</sup>La corteza terrestre es considerada como un sólido deformable isotérmico y/o adiabático, es decir la constante de tiempo de disipación de calor es mayor que el período de la onda sísmica propagándose en el medio (no hay transferencia de calor).

Para obtener las ecuaciones que representan la propagación de la onda en un medio isótropo las cuales nos interesa resolver numéricamente, tomamos la matriz [2.23] la reemplazamos en la ecuación de onda [2.22] y posteriormente desarrollamos la sumatoria hasta 2 debido a que nos interesa el caso en dos dimensiones. Así obtenemos el conjunto de ecuaciones de conservación del momentum y las de esfuerzo para el medio isótropo en dos dimensiones:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \\
\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}, \\
\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} &= C_{11} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\
\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} &= C_{12} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{11} \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} &= C_{44} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right),
\end{aligned} \tag{2.25}$$

donde  $(v_x, v_z)$  son las componentes de la velocidad,  $(\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz})$  son los esfuerzos principales y de corte,  $\rho$  es la densidad de masa.

### 2.2.2. Medio Anisótropo TI (Transversal Isotropy)

Este grupo de anisotropía se puede clasificar en dos subgrupos como lo es la anisotropía polar (VTI<sup>k</sup>) y la a anisotropía acimutal (HTI<sup>l</sup>). El primero posee un eje de simetría vertical, mientras que el segundo presenta un eje de simetría horizontal.

La anisotropía puede ser entendida como la variación de las propiedades físicas respecto a la dirección; esta se da en todas las escalas desde los núcleos de muestras hasta yacimientos y es causada por alineamientos de cristales, planos de sedimentación, o uniones de fracturas ver figura [2.2]

---

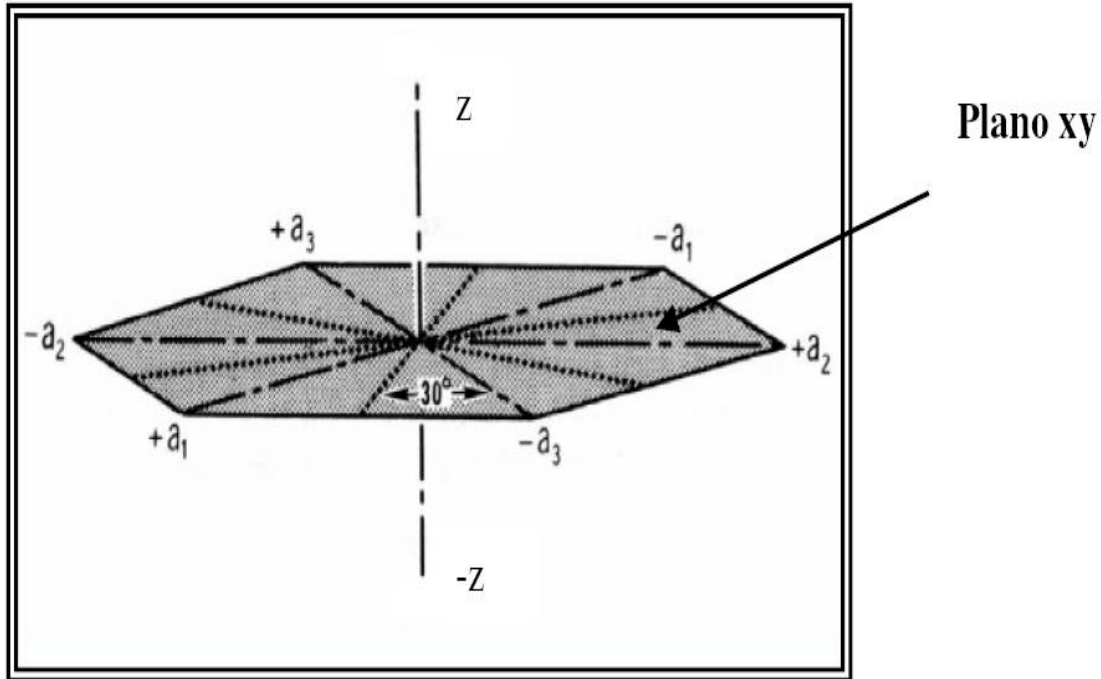
<sup>k</sup>Vertical Transversal Isotropy with axis of symmetry

<sup>l</sup>Horizontal Transversal Isotropy with axis of symmetry



**Figura 2.1:** Ejemplo de un medio con alineamiento vertical.

Si la roca posee simetría, existen relaciones entre las componentes del tensor de elasticidad, de manera tal que el número total de componentes independientes es menor a 21. Por ejemplo una roca que presenta un tipo de simetría hexagonal (medio VTI) contiene cuatro ejes donde tres de ellos se encuentran en el plano  $xy$  separados por  $120^\circ$  y el cuarto se encuentra perpendicular a los otros tres (eje  $Z$ ). Este sistema posee seis elementos de simetría los cuales son:  $E$  (Elemento unitario),  $C_z$ ,  $C_{2y}$ ,  $C_2$ ,  $C_6$ ,  $C_{2x}$ . El término  $C_{nk}$  representa la rotación, el subíndice "n" corresponde al ángulo de rotación (el ángulo de rotación está dado por  $\frac{2\pi}{n}$ ) el subíndice "k" corresponde al eje en el cual se realiza la rotación (x,y,z).



**Figura 2.2:** Simetría Hexagonal o medio VTI.

Si utilizamos el elemento de simetría  $C_6$  que corresponde a la rotación de  $120^\circ$  esta rotación causa que el tensor de elasticidad sólo cinco componentes permanezcan constantes y las demás varíen con respecto a la rotación (Landau, 1969). Al variar estas componentes la ley de conservación de la energía no se cumple, por lo tanto las mismas deben hacerse cero de manera que se pueda cumplir con esta ley. En consecuencia podemos decir que un sistema hexagonal se caracteriza por tener cinco constantes elásticas en el tensor elasticidad las cuales son:  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{33}$ ,  $C_{44}$ . Además es importante señalar que, si se realiza una deformación en el plano  $xy$ , esta queda determinada por dos módulos de elasticidad solamente, es decir, las propiedades elásticas de un cristal hexagonal son isótropas en el plano perpendicular al eje  $z$ .

Un material transversalmente isótropo (VTI) está completamente especificado por cinco constantes elásticas, no obstante Thomsen (1986) introdujo tres parámetros <sup>n</sup> anisótropos,  $\varepsilon$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$ .

$\eta$  y  $\sigma$  dependen de estos 3 últimos parámetro,  $\eta$  es llamado anelipticidad y describe la

<sup>n</sup>La magnitud de la anisotropía depende de diversos factores como: porosidad, compactación y tipos de arcilla presente en la misma. Estos parámetros son obtenidos de forma experimental con diferentes muestras (Wang, 2002).

anisotropía en la onda P,  $\sigma$  describe la anisotropía de la onda S y son representados en términos de las constantes de la matriz de Voigt:

$$\varepsilon = \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}}, \quad (2.26)$$

$$\gamma = \frac{C_{66} - C_{44}}{2C_{44}}, \quad (2.27)$$

$$\delta = \frac{(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})^2}{2C_{33}(C_{33} - C_{44})}, \quad (2.28)$$

$$C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}, \quad (2.29)$$

$$\eta = (\varepsilon - \delta)/(1 + 2\delta), \quad (2.30)$$

$$\sigma = \left( \frac{\alpha_0}{\beta_0} \right)^2 (\varepsilon - \delta), \quad (2.31)$$

donde  $\alpha_0$  y  $\beta_0$  son las velocidades de la onda P y S (más adelante se definirán estas velocidades). Por lo tanto la matriz de Voigt para un medio con anisotropía VTI es representada como:

$$C_{\text{Polar}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & & & \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{44} & \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Las ecuaciones de movimiento para un medio VTI en términos de las velocidades, esfuerzos y los coeficientes elásticos son obtenidas reemplazando la matriz anterior en la ecuación de onda [2.22]:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \\
\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}, \\
\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} &= C_{11} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\
\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} &= C_{13} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} &= C_{44} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Este conjunto de cinco ecuaciones diferenciales hiperbólicas lineales de primer orden acopladas representan la propagación en un espacio plano  $xz$  de las ondas elásticas en un medio con anisotropía VTI y los coeficientes o los valores que acompañan a las derivadas están dadas por las expresiones arriba calculadas. Con estas ecuaciones ya se podrán modelar las ondas para este medio que representa este tipo de anisotropía.

Para obtener los valores de los coeficientes elásticos se despeja cada uno de ellos en términos de la velocidad del medio, los parámetros de Thomsen dadas por las ecuaciones [2.26] hasta la [2.28]. Se debe tener claro que esta propagación es a lo largo del eje de simetría y la velocidad de la onda P es la velocidad a lo largo del eje  $z$ . El valor de  $C_{33}$  corresponde a:

$$C_{33} = \alpha^2 \rho,$$

donde  $\alpha$  es la velocidad de las ondas P (PRIMARIAS o PRIMAE) que son ondas longitudinales o compresionales, lo cual significa que el suelo es alternadamente comprimido y dilatado en la dirección de la propagación. Estas ondas generalmente viajan a una velocidad 1.73 veces de las ondas S (onda transversal a está) y pueden viajar a través de cualquier tipo de material (velocidades típicas son 330m/s en el aire, 1450m/s en el agua y cerca de 5000m/s en el granito) y  $\rho$  la densidad de masa. Análogamente para:

$$C_{44} = \beta^2 \rho,$$

el término  $\beta$  corresponde a la velocidad de la onda S (SECUNDARIAS o SECUNDARAE) las cuales son ondas en que el desplazamiento es transversal a la dirección de propagación. Su velocidad es levemente menor que la velocidad de las ondas primarias. Debido a ello, éstas aparecen en el terreno algo después que las primeras. Estas ondas son las que generan las oscilaciones durante el movimiento propiamente tal.

$C_{11}$  puede ser hallado despejando la ecuación [2.26] obteniéndose en función de las velocidades de la onda P, la densidad de masa y  $\epsilon$

$$C_{11} = \alpha^2 \rho (1 + 2\epsilon).$$

$C_{13}$  es obtenida del despeje de la ecuación [2.26] en función de las velocidades de la onda P y S, la densidad de masa y  $\delta$

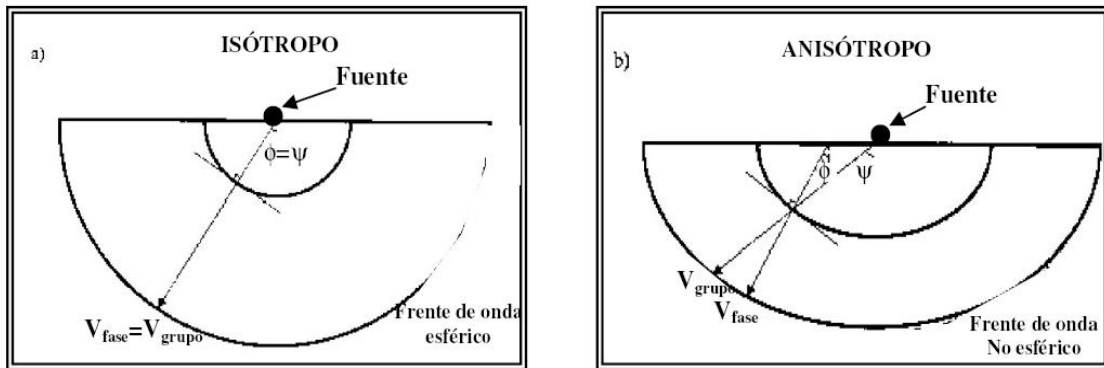
$$C_{13} = \rho \left\{ \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)[\alpha^2(2\delta + 1) - \beta^2]} - \beta^2 \right\}.$$

$C_{12}$  se obtiene a partir de los resultados hallados para  $C_{11}$  y  $C_{66}$ .

$$C_{12} = C_{11} - 2C_{66}.$$

Otra forma, es el caso especial donde la anisotropía es causada por una estratificación delgada. Estos parámetros de anisotropía son una combinación apropiada de los módulos elásticos, además son adimensionales y se reducen a cero en presencia de un medio isótropo.

### 2.2.3. Anisotropía de Thomsen o Anisotropía Débil



**Figura 2.3:** a) Presenta un medio isótropo se puede observar que el frente de onda es circular ( $V_{grupo} = V_{fase}$ ). b) Medio anisótropo: presenta un frente de onda elíptico ( $V_{grupo} \neq V_{fase}$ ).

Thomsen (1986) al reunir varios campos medidos con isotropía transversal concluyó que en la mayoría de los casos la anisotropía es débil (el radio es cercano a uno), debido a que los parámetros tienen valores menores que 0.2 aún cuando los materiales que lo constituyen son altamente anisótropos. Thomsen deduce las ecuaciones para las velocidades

de fase para la anisotropía débil en términos de los parámetros encontrados.

$$v_p(\theta) \approx \alpha(1 + \delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \epsilon \sin^4 \theta), \quad (2.34)$$

$$v_{sv}(\theta) \approx \beta(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}(\epsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta), \quad (2.35)$$

$$v_\theta \approx \beta(1 + \gamma \sin^2 \theta), \quad (2.36)$$

donde  $\theta$  es el ángulo de fase<sup>n</sup> para la onda a lo largo del vector de propagación. La velocidad de grupo puede ser derivada desde el ángulo de fase  $\theta$  y la velocidad de fase  $v(\theta)$ .

$$\frac{dv}{d\theta} = \left[ \frac{C_{66} - C_{44}}{\rho\tau} \right] \sin \theta \cos \theta, \tau = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (2.37)$$

La figura [2.3] muestra que el frente de onda para el medio isótropo es circular y para el medio anisótropo no lo es, entonces los planos de rayos que conforman el frente de onda en esta posición deberán estar viajando en la dirección normal del frente de onda, es decir el ángulo  $\theta$ , así el frente de onda se expande a lo largo de las normales de los frentes de onda, pero la energía viaja a lo largo de los rayos. Estos ángulos son diferentes, por lo que necesariamente están a diferentes velocidades. La forma del frente de onda depende de la velocidad de grupo (velocidad con la que viaja un tren de ondas) y la velocidad de fase (velocidad con la cual un punto de fase constante viaja perpendicular en dirección normal a la superficie de la onda). Para un medio isótropo la velocidad de grupo es equivalente a la velocidad de fase, mientras que para medio anisótropo ocurre la dispersión, es decir la velocidad de fase es distinta a la de grupo, esto principalmente se debe a que la velocidad varía con respecto a la frecuencia.

---

<sup>n</sup>Ángulo normal al frente de onda

# CAPÍTULO 3

---

---

## DE CONTINUO A DISCRETO

---

---

### 3.1 Método en Diferencias Finitas

El Método en Diferencias Finitas se basan en redes de puntos o nodos en los que se obtienen los valores aproximados de la solución de la ecuación que se desea resolver. Es necesario trabajar en intervalos discretos para la variación de las variables. El algoritmo para calcular dichas aproximaciones se obtiene discretizando la ecuación en derivadas parciales a resolver. Para ello, se reemplazan las derivadas en la ecuación representativa del problema por fórmulas adecuadas de diferencias finitas. Existen diferentes fórmulas que aproximan las derivadas, tanto las correspondientes al tiempo como a la de espacio. A continuación, describiremos las más comunes para las derivadas de primer orden respecto al tiempo ó espacio.

- Fórmula de diferencias hacia adelante (forward differences)

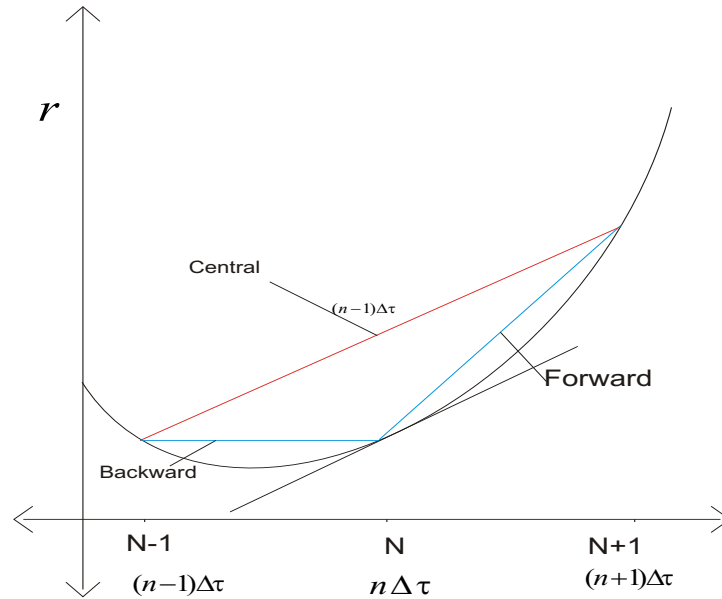
$$\frac{\partial U}{\partial r}(n\Delta\tau, j\Delta r) \simeq \frac{U_{i+1}^n - U_j^n}{\Delta r}. \quad (3.1)$$

- Fórmula de diferencias hacia atrás (backward difference).

$$\frac{\partial U}{\partial r}(n\Delta\tau, j\Delta r) \simeq \frac{U_i^n - U_{j-1}^n}{\Delta r}. \quad (3.2)$$

- Fórmula de diferencias centradas (central difference).

$$\frac{\partial U}{\partial r}(n\Delta\tau, j\Delta r) \simeq \frac{U_{i+1}^n - U_{j-1}^n}{\Delta r}. \quad (3.3)$$



**Figura 3.1:** Relación entre las diferentes aproximaciones a la derivada.

Estas fórmulas pretenden aproximar la pendiente de la recta tangente a la función en un punto (derivada) por medio de la pendiente de una recta secante, como se observa en la figura [3.1]. Todas las aproximaciones no son iguales y algunas son mejores que otras, dependiendo incluso de la ecuación. Por ejemplo, en lo que se refiere a las anteriormente citadas las diferencias hacia adelante y las diferencias hacia atrás producen un error en la aproximación del orden  $\Delta r$  mientras que en las diferencias centradas es de  $(\Delta r)^2$ , Strickwerda(1986). La elección de un tipo de fórmula u otra dependerá de las características de cada problema a resolver, la derivada con que se quiere aproximar la solución.

Para discretizar la derivada de segundo orden, lo más habitual es utilizar la fórmula de diferencias centradas de segundo orden definidas por:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \simeq \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta r^2}. \quad (3.4)$$

Obviamente no es suficiente con discretizar las derivadas parciales que aparecen en la ecuación, es necesario también discretizar todas las funciones que en ella aparecen. El

resultado final es un sistema de ecuaciones algebraicas, en este caso lineal, donde las incógnitas son las aproximaciones a la solución buscada.

Fundamentalmente existen dos tipos de métodos en Diferencias Finitas: los explícitos y los implícitos. Se estudia el método explícito en esta tesis ya que este permite obtener de cada ecuación la solución en un nivel de tiempo  $n + 1$ , y en un nodo de la variable de estado  $j$  (ver figura [3.1]), a partir de los valores conocidos en niveles de tiempo anterior, sin necesidad de recurrir a otros valores en el nivel  $n + 1$ .

Los valores de la aproximación numérica en el nivel  $n + 1$  se obtiene mediante la aproximación en el nivel  $n$  y  $n - 1$ . Por tanto, para iterar este proceso en el tiempo debemos partir de la aproximación a la solución en el instante 0. Para ello, consideremos como dato inicial la discretización de la condición inicial:

$$U(0, r; T) = g(r) = U_j^0 = g(r_j). \quad (3.5)$$

La construcción de un esquema de diferencias finitas para la solución de un problema esta dado por:

- Construir un modelo discreto de diferencias finitas para el problema físico.
- Definir condiciones iniciales, de frontera con un campo de velocidades, una fuente perturbadora y cubrir la región computacional por medio de una malla.
- Aproximar las derivadas de la ecuación diferencial a resolver, mediante diferencias finitas.
- Aproximar las condiciones iniciales y de frontera en los puntos de la malla.
- Realizar un análisis del modelo de Diferencias Finitas
  - El orden de aproximación
  - Estudiar la consistencia
  - Estabilidad y convergencia

## 3.2 Construcción de un Esquema en Diferencias Finitas

El conjunto de ecuaciones diferenciales que resuelven determinado problema (en este caso una onda sísmica) se puede escribir de forma compacta a través de operadores diferenciales  $L$  y  $D$ , para la variable del campo  $u(p)$ , donde  $p$  representa el valor del campo

en el espacio discreto a evaluar. Consideremos en este desarrollo ecuaciones diferenciales no homogéneas y las funciones  $\varphi$  y  $\psi$ . El conjunto de ecuaciones diferenciales que se aplican al dominio  $\Omega$  que representa el problema físico junto con las condiciones iniciales o de frontera son:

$$\begin{aligned} L\{u(p)\} &= \varphi(p), \\ D\{u(p)\} &= \psi(p), \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde  $p \in \Omega$ . La discretización del dominio implica que el dominio continuo  $\Omega$  en tiempo y espacio será descrito por una región de puntos los cuales se denotaran por  $\Omega_k^n$ . Ahora bien, las ecuaciones [3.6], evaluadas en ese conjunto de puntos permiten la aproximación de los operadores lineales de las ecuaciones del sistema  $L_k^n$  y el operador de las condiciones iniciales  $D_k^n$ , esto significa que discretizamos tanto en tiempo como en espacio los operadores diferenciales. La aplicación de estos operadores en un dominio local aproxima la función solución  $u(p)$ , la cual se denota como  $u_k^n$  de forma discreta.

Una vez realizadas estas operaciones las ecuaciones diferenciales quedarán:

$$\begin{aligned} L_k^n\{u(p)_k^n\} &= \varphi(p), \\ D_k^n\{u(p)_k^n\} &= \psi(p). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Para que este esquema sea válido se necesita que  $u_k^n$  sea una aproximación de  $u(p)$  en puntos discretizados del dominio.  $u_k^n$  está unívocamente definida por el esquema de diferencias finitas. Para esto se cumple que el esquema debe ser *consistente*, *estable* y *convergente*.

### 3.2.1. Propiedades de un Esquema en Diferencias Finita

#### ▪ *Consistencia*

El sistema de ecuaciones es consistente si la aproximación está construida de tal forma que se recuperen las dichas ecuaciones originales, si  $\delta t, \delta x, \delta z \rightarrow 0$ .

Ahora se define el error local de truncamiento  $\tau$  y  $\beta$ , para la aproximación de los operadores diferenciales.

$$\tau\{f(p)\} = L\{f(p)\} - L_k^n\{f(p)\}, \tag{3.8}$$

$$\beta\{f(p)\} = D\{f(p)\} - D_k^n\{f(p)\},$$

donde  $p \in \Omega_k^n$  y  $f(p)$  es una función de buen comportamiento. Así la aproximación de las ecuaciones mediante las fórmulas de Diferencias Finitas será consistente de la siguiente manera:

$$\tau\{f(p)\} \rightarrow 0,$$

$$\beta\{f(p)\} \rightarrow 0,$$

$$\delta x \rightarrow 0,$$

$$\delta l \rightarrow 0.$$

#### ■ *Estabilidad*

La estabilidad permite conocer el crecimiento o no crecimiento de los errores que se propagan en la malla. Si estos convergen a un valor y no crece indefinidamente mientras hay iteraciones.

$$\|u_k^n\| \leq k(L_k^n\{u_k^n(p)\} + D_k^n\{u_k^n(p)\}).$$

Para cualquier función  $u_k^n$  en el dominio  $\Omega_k^n$ . Ahora si la ecuación es válida para todos los  $\delta x$  y  $\delta t$  el esquema es incondicionalmente estable. Si sólo es valido para cierto valores, es condicion estable.

### 3.3 Un Ejemplo de Esquema en Diferencias Finitas

Usando una aproximación de segundo orden para las derivadas en el tiempo, la solución de las ecuaciones [2.23] del medio isótropo puede ser expresada de forma discreta como

$$\begin{aligned}
v_x|_{i+1/2,j}^{n+1} &= v_x|_{i+1/2,j}^n + b_{i+1/2,j}\delta t (D_x\tau_{xx} + D_z\tau_{xz})|_{i+1/2,j}^n, \\
v_z|_{i,j+1/2}^{n+1} &= v_z|_{i,j+1/2}^n + b_{i,j+1/2}\delta t (D_x\tau_{xz} + D_z\tau_{zz})|_{i,j+1/2}^n, \\
\tau_{xx}|_{i,j}^{n+1/2} &= \tau_{xx}|_{i,j}^{n-1/2} + \delta t (C_{11}D_xv_x + C_{12}D_zv_z)|_{i,j}^n, \\
\tau_{zz}|_{i,j}^{n+1/2} &= \tau_{zz}|_{i,j}^{n-1/2} + \delta t (C_{12}D_xv_x + C_{11}D_zv_z)|_{i,j}^n, \\
\tau_{xz}|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} &= \tau_{xz}|_{i+1/2,j+1/2}^{n-1/2} + \delta t (C_{44}D_zv_x + C_{44}D_xv_z)|_{i+1/2,j+1/2}^n,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

y para [2.33] del medio VTI es:

$$\begin{aligned}
v_x|_{i+1/2,j}^{n+1} &= v_x|_{i+1/2,j}^n + b_{i+1/2,j}\delta t (D_x\tau_{xx} + D_z\tau_{xz})|_{i+1/2,j}^n, \\
v_z|_{i,j+1/2}^{n+1} &= v_z|_{i,j+1/2}^n + b_{i,j+1/2}\delta t (D_x\tau_{xz} + D_z\tau_{zz})|_{i,j+1/2}^n, \\
\tau_{xx}|_{i,j}^{n+1/2} &= \tau_{xx}|_{i,j}^{n-1/2} + \delta t (C_{11}D_xv_x + C_{13}D_zv_z)|_{i,j}^n, \\
\tau_{zz}|_{i,j}^{n+1/2} &= \tau_{zz}|_{i,j}^{n-1/2} + \delta t (C_{13}D_xv_x + C_{33}D_zv_z)|_{i,j}^n, \\
\tau_{xz}|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} &= \tau_{xz}|_{i+1/2,j+1/2}^{n-1/2} + \delta t (C_{44}D_zv_x + C_{44}D_xv_z)|_{i+1/2,j+1/2}^n.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

En los dos conjuntos de ecuaciones [3.9] y [3.10] los subíndices  $i$  y  $j$  representan las componentes espaciales en dirección  $x$  y  $z$  respectivamente,  $n$  es el índice del tiempo,  $\delta t$  el paso del tiempo, el parametro  $b_{i,j}$  es el inverso de la densidad y  $D_\alpha$  representa el operador centrado de diferencias finitas de la derivada espacial de  $\partial/\partial\alpha$  con respecto a la variable  $\alpha$ .

### 3.3.1. Operador de Cuarto Orden

Las derivadas espaciales de las ecuaciones de movimiento de los medios isótropos y VTI discretizadas estan dadas de la forma:

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} \simeq D_\alpha v_\alpha|_{i,j}^n, \tag{3.11}$$

donde  $D_\alpha$  representa la forma discreta del operador diferencias  $\frac{\partial}{\partial \alpha}$  actuando en la variable  $v_\alpha$ , y evaluada en los puntos  $(x, z) = (i\delta x, j\delta z)$ , con un espaciado  $\delta h$  uniforme

en la malla, el operador de cuarto orden en diferencias finitas puede escribirse como (Levander, 1988):

$$D_x v_x|_{i,j}^n \simeq \frac{1}{\delta h} \left[ \frac{9}{8} (v_x|_{i+1/2,j}^n - v_x|_{i-1/2,j}^n) - \frac{1}{24} (v_x|_{i+3/2,j}^n - v_x|_{i-3/2,j}^n) \right]. \quad (3.12)$$

### 3.3.2. Condición de Estabilidad y Dispersión

Para los esquemas numéricos dados en las ecuaciones [3.9] y [3.10] es indispensable la condición de estabilidad y según el trabajo de Levander (1988) tal condición esta dada por la expresión:

$$\delta t \leq 0,606 \left( \frac{\delta h}{v_{max}} \right), \quad (3.13)$$

donde  $v_{max}$  es el valor de la velocidad máxima del medio y esta se refiere a la velocidad de la onda compresional y la otra condición importante en el esquema es la de mínima dispersión en la malla (Levander, 1988)

$$f < \left( \frac{v_{min}}{10\delta h} \right), \quad (3.14)$$

donde  $f$  es la frecuencia máxima de la onda y  $v_{min}$  la velocidad mínima de la onda. Una buena regla es trabajar para que la longitud de onda sea del orden de 8 a 10 veces el tamaño de la celda.

## 3.4 Justificación del uso de Métodos Numéricos en la Solución de EDP

Los métodos de aproximación analítica a la solución de EDP, proporcionan frecuentemente información útil acerca del comportamiento de la solución en valores críticos de la variable dependiente, pero tienden a ser más difíciles de aplicar que los métodos numéricos. Entre las consideraciones que justifican el uso de métodos numéricos para solucionar ciertos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales se encuentran:

- La evaluación numérica de las soluciones analíticas es a menudo una tarea laboriosa y computacionalmente ineficiente, mientras que los métodos numéricos generalmente proporcionan soluciones numéricas adecuadas, de manera más simple y eficiente. En este trabajo la aproximación a la solución de la ecuación por el método de diferencias finitas demostró ser fácil de usar y mostró resultados acordes a la realidad, al igual que permitió hacer iteraciones con un mayor número de puntos (malla escalonada). Nos interesaba mejorar este método porque pensamos que le faltan cosas como por ejemplo la adaptación del mallado computacional a una superficie sin que esto implique inestabilidad numérica, así como el cálculo erróneo de la solución en los límites del modelo computacional.

## CAPÍTULO 4

---

---

### EL MÉTODO DE MALLA VARIABLE

---

---

#### 4.1 Operador de Cuarto Orden en Diferencias Finitas Para una Malla Variable

Para solucionar la ecuación de onda que modela un problema sísmico en un espacio continuo se plantea un método numérico que lleva estas ecuaciones a un espacio discreto; para ello se define dicho operador que permite aproximar la solución sobre los vértices de una malla variable Pitarka (1999). Un ejemplo de modelo es el utilizado por Levander (1988) para representar la propagación de la onda elástica 2D un medio isótropo .

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \quad (4.1)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (4.3)$$

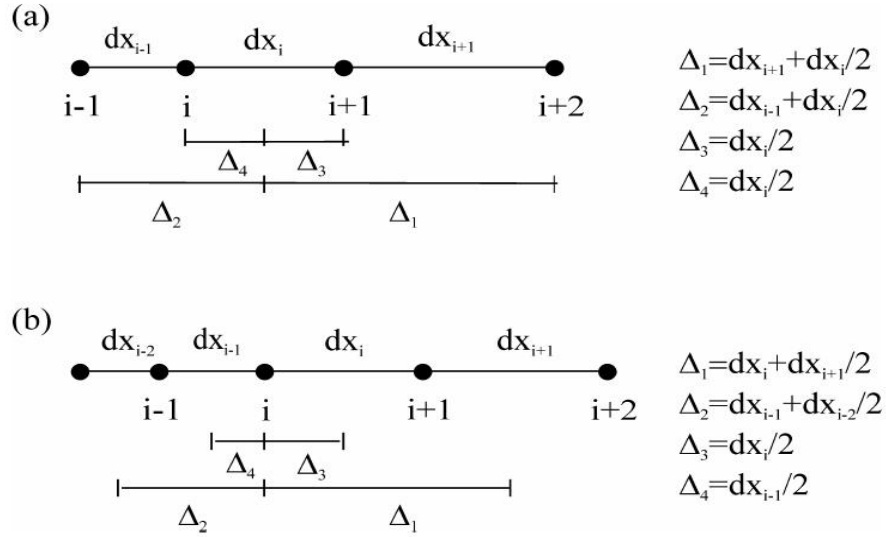
$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right). \quad (4.5)$$

Supongamos que el campo variable  $g(x, z)$  representa las velocidades  $(v_x, v_z)$  así como también el campo de esfuerzo  $(\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz})$ . El operador de cuarto orden actuando con respecto a  $x$  sobre el campo variable  $g(x, z)$  es representado por la ecuación :

$$\frac{\partial g(x, z)}{\partial x} = D_x g = c_1 g(x + \Delta_1, z) + c_2 g(x - \Delta_2, z) + c_3 g(x + \Delta_3, z) + c_4 g(x - \Delta_4, z), \quad (4.6)$$

donde  $c_i$  son los coeficientes (son variables) a determinar,  $\Delta_i$  es el incremento y puede ser expresado en términos de la malla variable  $dx$  como lo muestra la figura [4.1]



**Figura 4.1:** Malla con nodos espaciados no uniformes en la dirección  $x$ .  $\Delta_i$  ( $i = 4$ ) son usados para calcular el operador  $D_x$  centrado entre (a) el nodo  $i$  e  $i + 1$  (b) centrado en el nodo  $i$ .

Teniendo en cuenta la transformada de Fourier :

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(k) \exp(ikx) dk,$$

y derivando con respecto a  $x$  tenemos:

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (ik) G(k) \exp(ikx) dx = ikg(x). \quad (4.7)$$

Analogamente para los valores de:

$$\begin{aligned}
 c_i g(x \pm \Delta_i) &= c_i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(k) \exp[i(x \pm \Delta_i)k] dk \\
 &= \frac{c_i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(k) \exp(ikx) e^{\pm \Delta_i ik} dk \\
 &= c_i e^{\pm \Delta_i ik} g(x).
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Mediante esta deducción la ecuación [4.6] se reescribe:

$$ik = c_1 \exp(ik\Delta_1) + c_2 \exp(-ik\Delta_2) + c_3 \exp(ik\Delta_3) + c_4 \exp(-ik\Delta_4). \tag{4.9}$$

Usando la expansión de Taylor para la función:

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!},$$

y aproximando hasta cuarto orden cada término exponencial de la ecuación [4.9]:

$$\begin{aligned}
 ik &= c_1 \left( 1 + ik\Delta_1 + \frac{(ik\Delta_1)^2}{2!} + \frac{(ik\Delta_1)^3}{3!} \right) \\
 &+ c_2 \left( 1 - ik\Delta_2 + \frac{(-ik\Delta_2)^2}{2!} + \frac{(-ik\Delta_2)^3}{3!} \right) \\
 &+ c_3 \left( 1 + ik\Delta_3 + \frac{(ik\Delta_3)^2}{2!} + \frac{(ik\Delta_3)^3}{3!} \right) \\
 &+ c_4 \left( 1 - ik\Delta_4 + \frac{(-ik\Delta_4)^2}{2!} + \frac{(-ik\Delta_4)^3}{3!} \right).
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Igualando los ordenes de igual magnitud:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0,$$

$$\Delta_1 c_1 - \Delta_2 c_2 + \Delta_3 c_3 - \Delta_4 c_4 = 1,$$

$$\Delta_1^2 c_1 + \Delta_2^2 c_2 + \Delta_3^2 c_3 + \Delta_4^2 c_4 = 0,$$

$$-\Delta_1^3 c_1 + \Delta_2^3 c_2 - \Delta_3^3 c_3 + \Delta_4^3 c_4 = 0.$$

Reorganizando estas cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas obtenemos los valores de las constantes  $c_i$  en términos de los desplazamientos  $\Delta_i$ . Para ello se realiza la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \Delta_1 & -\Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 \\ \Delta_1^2 & \Delta_2^2 & \Delta_3^2 & \Delta_4^2 \\ -\Delta_1^3 & \Delta_2^3 & -\Delta_3^3 & \Delta_4^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

El método de diferencias finitas aproxima la solución de la ecuación de onda en los vértices de una malla, la figura [4.1] muestra las posiciones para los valores de la velocidad y el esfuerzo en una dimensión; esto permite interpolar los valores de la solución de la ecuación en función de los esfuerzos o velocidades. Así por ejemplo si se requiere evaluar una ecuación teniendo en cuenta las posiciones y el dominio temporal deben seguir el siguiente algoritmo:

### Forma Continua

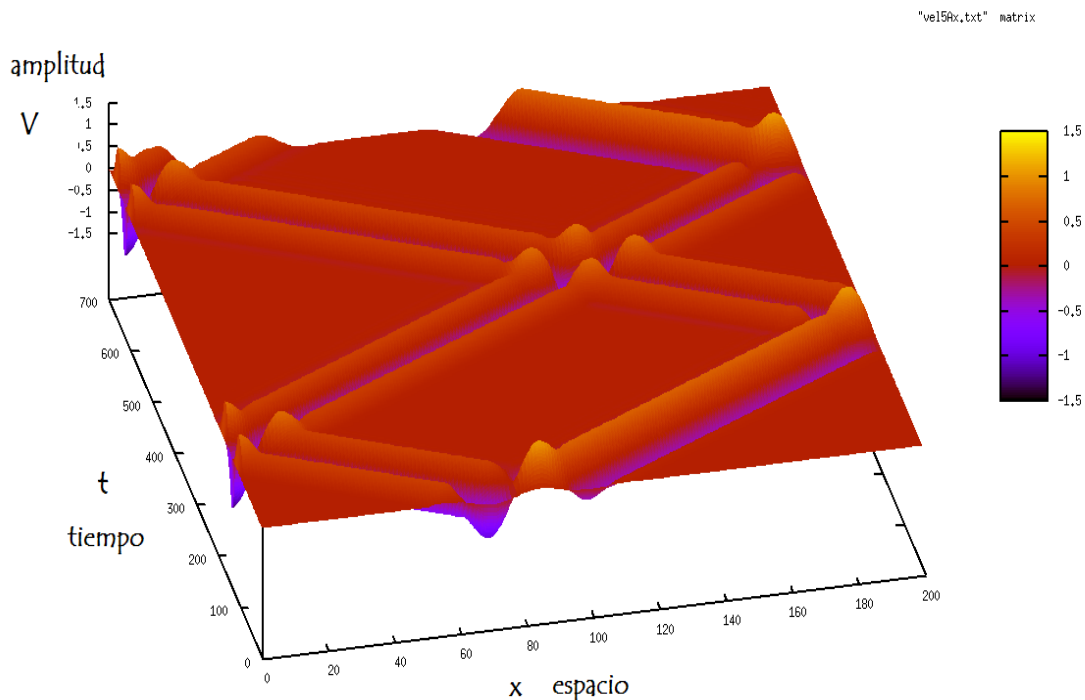
$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}, \quad (4.12)$$

### Forma Discreta, FD

$$\rho(i) \frac{V_x^{n+1/2}(i) - V_x^{n-1/2}(i)}{\delta t} = c_1 \tau_{xx}^n(i + \Delta_1) + c_2 \tau_{xx}^n(i + \Delta_2) + c_3 \tau_{xx}^n(i + \Delta_3) + c_4 \tau_{xx}^n(i + \Delta_4), \quad (4.13)$$

donde  $n$  representa la evolución temporal y  $\rho$  la densidad volumétrica del medio. La discretización de la ecuación [4.13] muestra una aproximación de segundo orden en el tiempo y de cuarto orden para una malla variable en el espacio. Los valores de  $c_1, c_2, c_3, c_4$  son calculados mediante la matriz propuesta en [4.11]

### 4.1.1. Solución de la Ecuación de Onda 1D con una Malla Variable



**Figura 4.2:** Variación de pulso de Gauss en el espacio y en el tiempo sin fronteras absorbentes.

EL método se aplicó inicialmente a la ecuación de onda en una dimensión como lo muestra la figura [4.2]. Aquí observamos como el pulso Gauss se propaga correctamente en el espacio tiempo, y como la onda se refleja en el límite computacional (se usaron 200 nodos en el espacio y 200 iteraciones en el tiempo) por efectos del método que no soluciona el problema fuera del mallado computacional. Cabe destacar que las condiciones de estabilidad son las mismas que se utilizaron para el modelo con una malla escalonada (Staggered-grid), La grafica [4.2] muestra la propagación de un pulso gaussiano en un medio isótropo cuyos ejes representan la evolución de la amplitud (en este caso la velocidad eje z), la posición (eje x) y el tiempo (eje y). Para tal fin se transforman las derivadas de segundo orden en derivadas de primer orden, obteniendo ecuaciones que se acoplan y solucionan la ecuación original, un ejemplo del método es presentado en el siguiente algoritmo, donde se tomó la ecuación de onda acústica y se desarrolló para una dimensión:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4.14)$$

donde  $U(x, t)$  representa la posición de la partícula en el espacio y tiempo. El término de la izquierda se representa en función de las velocidades, de esta manera se puede bajar el orden de la derivada

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}, \quad (4.15)$$

donde  $V(x, t)$  es la velocidad. El término de la derecha de la ecuación [4.14] se representa como:

$$-c^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -c^2 \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right) \quad (4.16)$$

$$\Rightarrow -c^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad (4.17)$$

donde:

$$\tau = -c^2 \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}, \quad (4.18)$$

derivando la ecuación [4.18] con respecto al tiempo:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial V(x, t)}{\partial x}. \quad (4.19)$$

Entonces reemplazando las ecuaciones [4.19] y [4.15] en la ecuación [4.14] se baja el orden y se obtiene el sistema de ecuaciones acopladas:

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \tau(x, t)}{\partial x}, \quad (4.20)$$

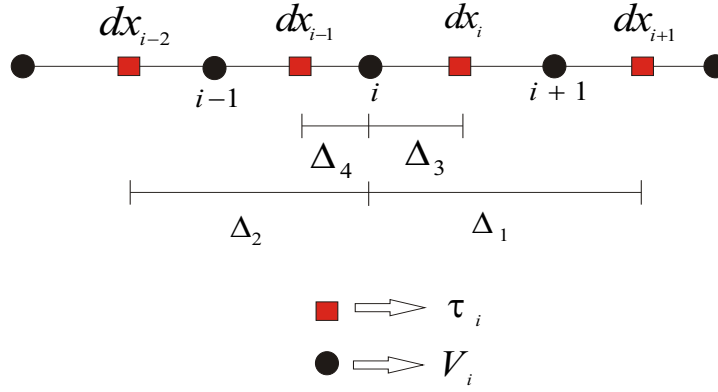
$$\frac{\partial \tau(x, t)}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial V(x, t)}{\partial x}. \quad (4.21)$$

Posteriormente se dispone a discretizar estas ecuaciones acopladas las cuales generan dos soluciones para la el campo  $V(x, t)$  y  $\tau(x, t)$ .

$$\rho(i) \frac{V_i^{n+1/2} - V_i^{n-1/2}}{\delta t} = c_1 \tau_{i+\Delta_1}^n + c_2 \tau_{i+\Delta_2}^n + c_3 \tau_{i+\Delta_3}^n + c_4 \tau_{i+\Delta_4}^n, \quad (4.22)$$

$$\frac{\tau_i^{n+1/2} - \tau_i^{n-1/2}}{\delta t} = -c^2 (c_1 V_{i+\Delta_1}^n + c_2 V_{i+\Delta_2}^n + c_3 V_{i+\Delta_3}^n + c_4 V_{i+\Delta_4}^n). \quad (4.23)$$

Los valores de  $c_1, c_2, c_3, c_4$  son calculados mediante la matriz propuesta en [4.11]. Al considerar la ecuación [4.22] en el punto  $(x, t)$  y la ecuación [4.23] en el punto  $(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \frac{\Delta t}{2})$  se logra describir una situación en donde los campos están intercalados.



**Figura 4.3:** Malla con nodos espacialmente no uniformes en la dirección  $x$ . Centrado en el nodo  $i$ .

En cada punto del espacio, el valor del campo se obtiene de los valores de los campos vecinos. Esta forma de escribir las ecuaciones de la ecuación de onda es ilustrado en la figura [4.3]. El campo  $V_i^{n+1/2}(k)$  es *inducido* por el valor del campo un paso temporal anterior  $V_i^{n-1/2}(k)$  más la contribución de los esfuerzos  $\tau_i^n(k+1/2)$  y  $\tau_i^n(k-1/2)$ . estos campos están en puntos espaciales contiguos y un medio tiempo espacial anterior.

La implementación de las ecuaciones [4.22] y [4.23] en un algoritmo computacional requiere dos vectores unidimensionales, uno para  $V_i$  y otro para  $\tau_i$ , para describir la coordenada espacial. En cada tiempo  $n$  los campos son calculados en c++ mediante estas dos líneas de programación:

$$V2[i] = V2[i] + (0,5) * ((c3) * T1[i+1] + (c4) * T1[i] + (c1) * T1[i+2] + (c2) * T1[i-1]); \quad (4.24)$$

$$T2[i] = T2[i] + (0,5) * ((c3) * V2[i] + (c4) * V2[i-1] + (c1) * V2[i+1] + (c2) * V2[i-2]). \quad (4.25)$$

En estas relaciones ya no existe el superíndice. El tiempo es una variable explícita en el FDTD. En la primera de estas ecuaciones, el nuevo valor de  $V2[i]$  a la izquierda de la igualdad para el tiempo  $(n + 1/2)$  proviene del antiguo valor de  $V2[i]$  al tiempo  $(n - 1/2)$  que la máquina ya ha calculado y tenía en la memoria más los campos o esfuerzos  $T2[i - 1]$  y  $T2[i]$  propios del tiempo  $n$ . Para el vector  $T2$  los índices se han redondeado de los índices  $i + 1/2$  y  $i - 1/2$  a  $i$  y  $i - 1$  para poder especificar la posición de los campos en el arreglo computacional.

El programa comienza inicializando constantes y parámetros. Los campos de velocidades y esfuerzos son inicializados a cero. El cálculo comienza obteniendo los campos de velocidades en cada nodo usando los esfuerzos. El programa itera el procedimiento al siguiente valor temporal, en la figura [4.2] se muestra el resultado del programa para 700 iteraciones temporales.

A medida que el pulso se propaga en el tiempo, se extiende hacia afuera del centro de la malla espacial. El programa no detiene la simulación antes de tocar el límite de la malla de simulación creando reflexiones artificiales, para ello es importante implementar un método de absorción de la onda.

## 4.2 ALCANCE Y APLICACIÓN DEL MÉTODO DE MALLA VARIABLE

Antes de la aplicación del método de Malla Variable a un problema específico, mostraremos hacia donde está dirigido este planteamiento matemático, en otras palabras que objetivos trataremos de lograr con la implementación de esta técnica para la solución numérica de la ecuación de onda.

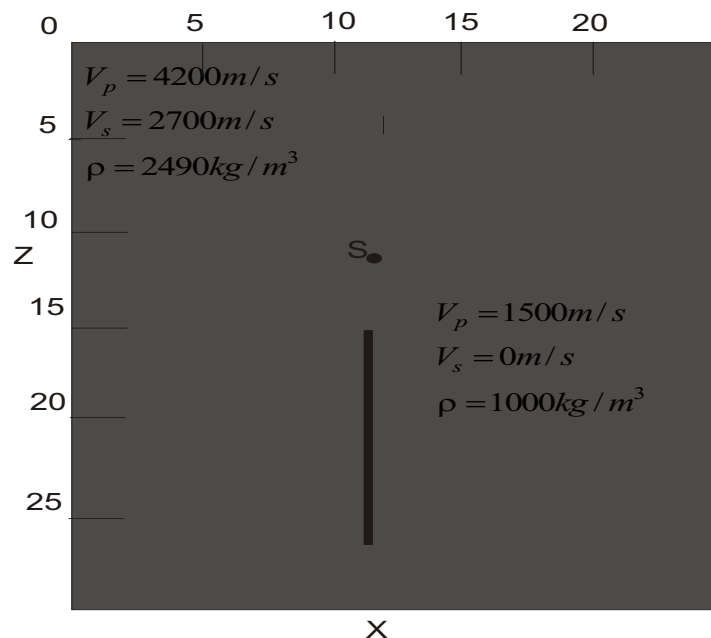
### Objetivo General

Implementar la técnica para modelar movimiento sísmico en un medio elástico (aquí se utilizó DFDT de cuarto orden en una Malla Variable), posteriormente trataremos de simular la propagación de la onda en un medio con una fractura, compararemos este método propuesto con la técnica ya existente que corresponde a la inclusión de anisotropía y con el método de sólo variación de parámetros (densidad) del medio fracturado (Torres, 2008), para describir una fractura computacionalmente. El método más

acorde a la realidad es el que obedece a las ecuaciones analíticas, en este caso el que incluye propiedades anisótropas en la fractura (presenta alto consumo computacional), esté nos permitirá observar como es la correcta propagación de la onda cuando atraviesa una interfaz en este caso una fractura y validar el método de Malla Variable y el método de Variación de Parámetros elásticos.

### 4.2.1. Modelo

Se pretende usar los métodos de Malla Variable, Variación de Parámetros e Inclusión de Anisotropía para obtener la simulación de una onda sísmica propagándose en un medio heterogéneo mediante un modelo sencillo en el plano  $x - z$  sobre el dominio del tiempo (figura [4.4]).



**Figura 4.4:** Modelo de una Fracura Vertical.

La figura [4.4] muestra una falla vertical llena de un material cuya velocidad de onda S es cercana a cero (cizallamiento despreciable) con 4 mm de ancho y 10.56m de largo en un medio homogéneo elastico. Una fuente puntual en S localizada en (12.78m,12m),

una onda Ricker  $\tilde{n}$  con una frecuencia central de 3kHz inicia la propagación.

Para minimizar la dispersión numérica durante los cálculos computacionales, la discretización espacial obedece al siguiente criterio (Pitarka, 1999):

$$h_{max} < \frac{V_{min}}{5f_{max}}, \quad (4.26)$$

donde  $h_{max}$  es la grilla más grande,  $V_{min}$  es la velocidad mínima de propagación en este caso la velocidad de la Onda S,  $f_{max}$  es la máxima frecuencia de propagación de la señal.

La condición de estabilidad de cuarto orden espacial en 2D con un espaciamento  $h$  es (Levander.1988)

$$\Delta t < \frac{1}{\sqrt{2}(|\alpha_1| + |\alpha_2|)\frac{h}{V_{max}}}, \quad (4.27)$$

ó

$$\Delta t < 0,606 \frac{h}{V_{max}},$$

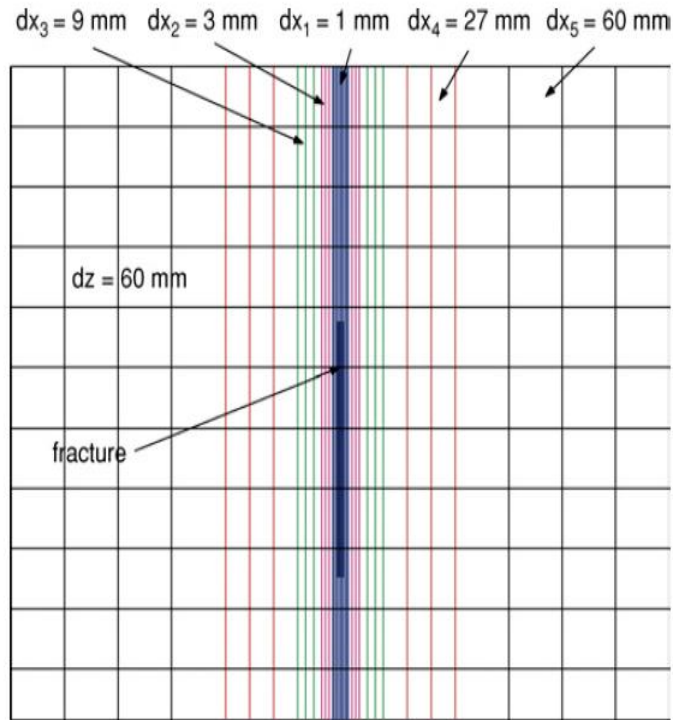
donde  $\alpha_1 = 9/8^o$  y  $\alpha_2 = -1/24$  son los coeficientes de cuarto orden para la aproximación espacial de las primeras derivadas.  $V_{max}$  es la velocidad maxima en el medio, en este caso la velocidad de la Onda P

---

$\tilde{n}$ pulso de tipo Gauss

<sup>o</sup>estos valores son variables en el Método de Malla Variable

### 4.2.2. Aplicando Malla Variable al Modelo



**Figura 4.5:** Espaciados en la vecindad de la fractura. las grillas horizontales se suavizan de 6cm a 1mm con un factor de de 3 sobre una region de 11.7 cm de ancho. El espaciado vertical es de 6 cm en toda la malla. La fractura tiene unas dimensiones de 4mm por 10.56m de largo.

Para la simulación en este caso, las grillas horizontales (en la cual se pretende representar la solución de las ecuaciones de onda) se incrementan de 1mm a 6cm con un factor de 3 sobre una región de 11.7 cm ver figura [4.5]. Cabe aclarar que la solución numérica está ubicada sobre los vértices de los rectángulos formados en el mallado, la idea en este caso es acercar dichas soluciones a la interfaz entre el medio isótropo y la fractura mejorando así la visualización de la onda en la simulación. el mallado vertical permanece constante con 6 cm de ancho por celda esto permite reducir calculos. La idea básica es observar que también funciona la adaptación de la malla en la vecindad de la fractura al igual que la estabilidad del método. Los parámetros en el medio homogéneo son  $\lambda = 7,614Gpa$ ,  $\mu = 18,152pa^p$ ,

Para incorporar la fractura se introducen los parámetros de la fractura (Chuling W., Harrys J., Nihel K., Nakagawa S, 2005) . En esta aproximación las celdas que contienen la fractura son reemplazadas por grillas mucho más pequeñas. Los parámetros en los medios son calculados con el tensor de rigidez del medio. A su vez las velocidades de fase y

<sup>p</sup>pascal

de grupo pueden ser determinadas con los parámetros isótropos. En este caso las velocidades de la onda P y la onda S dependen de las constantes de Lamé  $\lambda$  y  $\mu$  y de la densidad del medio. De la ecuación de onda que gobierna las propagaciones compresionales o longitudinales que en sismica es llamada (Slawinski, 2003) **Onda P** obtenemos esta velocidad:

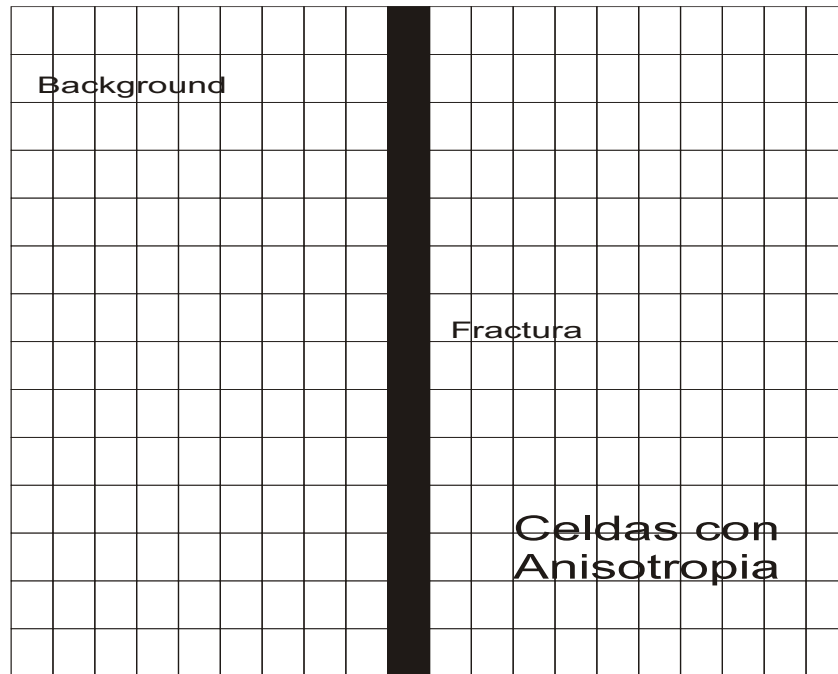
$$v \equiv \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (4.28)$$

análogamente para la onda transversal conocida como **Onda S** tenemos:

$$v \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (4.29)$$

Para el caso en que se hace inclusión de anisotropía el medio en el cual se realiza esta simulación posee simetría HTI. En este método (Malla Variable) la matriz de Voigt [2.23] no se modifica caso contrario con el modelo de inclusión anisótropa.

### 4.2.3. Modelo con Anisotropía



**Figura 4.6:** Representación de una fractura vertical en un modelo FD en una columna con anisotropía en las celdas .

En este caso la fractura se introduce con una aproximación similar a la anterior (Chunling Wu, 2005). En esta aproximación las celdas que contienen la fractura son reemplazadas por grillas con propiedades anisotropas (HTI) ver figura [4.6].

Thomsen introdujo tres parámetros anisótropos,  $\epsilon$ ,  $\delta$ , y  $\gamma$ , para describir la anisotropía débil. Estos parámetros pueden ser calculados con el tensor de rigidez del medio anisótropo. A su vez las velocidades de fase y de grupo pueden ser determinadas con dichos parámetros anisótropos de Thomsen. La dificultad para calcular los tres parámetros, es obtener el tensor de rigidez, que defina el medio elástico sobre el cual se propagan las ondas. Hudson (1998) desarrolló una teoría sobre el tensor de rigidez en un medio elástico con determinada densidad de inclusiones para longitudes de ondas sísmicas. En este método se introdujera la variación de una o más propiedades de un material homogéneo con respecto al acimut. También llamado isotropía transversal con eje de simetría horizontal (HTI) en las celdas donde ubicamos la fractura. Este tipo de anisotropía matemáticamente representa lo mismo que un medio con anisotropía polar, excepto por la rotación del eje de simetría, sin embargo, en el contexto geológico, el

medio se representa por un sistema de fracturas verticales todas paralelas entre si. La matriz de Voigt en ese método si es modificada y posee la siguiente forma:

$$C_{\text{HTI}} = \begin{pmatrix} C_{33} & C_{13} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{66} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{44} \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Afuera de la fractura (Background) la matriz de Voigt corresponde a la matriz isótropa [2.23], las ecuaciones a discretizar en este caso quedan expresadas en términos de las velocidades, esfuerzos y los coeficientes elásticos son:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} &= C_{33} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} &= C_{12} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{11} \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} &= C_{66} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde

$$C_{66} = \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}).$$

Las variables requeridas para calcular el medio equivalente en cada celda son los parámetros de Lamé  $\lambda$  y  $\mu$ , la longitud de la fractura es perpendicular al eje  $x$ , los cuatro parámetros independientes para un modelo 2D anisotrópo en el plano  $x - z$  son mostrados en la matriz [4.30].

### 4.3 Modelo con Variación de Parámetros

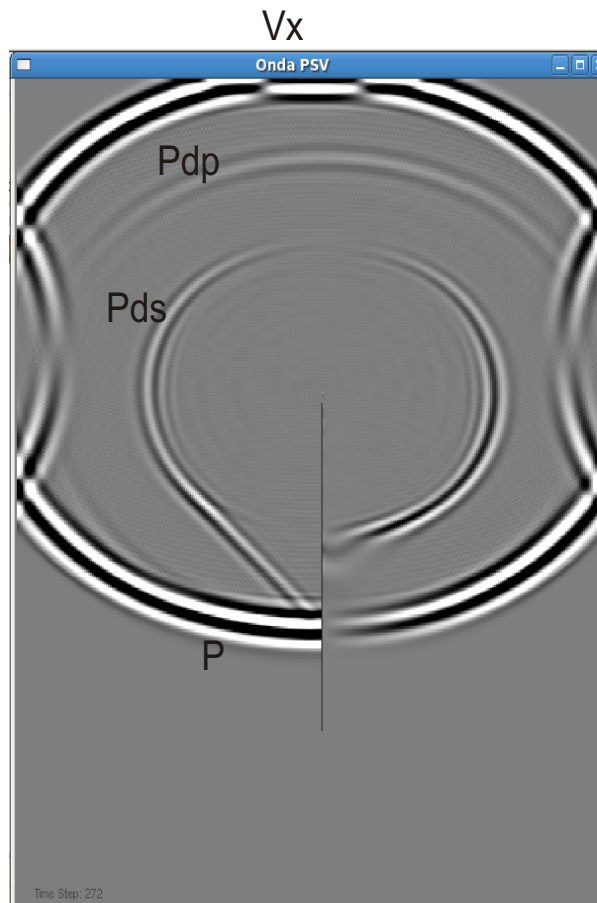


Figura 4.7: Snapshots de la componente horizontal de la velocidad. P es la onda primaria y Pdp-Pds son las ondas difractadas, el modelo *funciona con el método de variación de parámetros elásticos*.

Este método es el más sencillo, consiste en cambiar los parámetros elásticos de los medios (fractura y background) o constantes de Lamé. Aquí supondremos una velocidad de onda S es casi cero esto indica que el cizallamiento es despreciable ( $\mu \approx 0$ ) y los valores de  $\lambda$  y  $\rho$  difieren con respecto a la fractura y el background. La gráfica [3.7] muestra el resultado obtenido con este método. Allí se visualiza la propagación de la onda o solución de la ecuación para el campo de velocidad  $V_x$  y las reflexiones producidas en el límite computacional causadas por la fuente perturbadora.

## 4.4 Modelado de la Fuente.

Se modeló la fuente mediante la siguiente función perturbadora dependiente del tiempo y la frecuencia de propagación de la onda sísmica. Esta fuente esta definida en un nodo de la malla  $(x_s, z_s)$  y esta asignada a los esfuerzos  $\tau_{xx}$  y  $\tau_{zz}$  utilizando la siguiente función de Gauss.

$$f_s(t) = \left[ 1 - 2 \left( \frac{\omega_0(t - t_0)}{2} \right)^2 \right] \exp \left[ -\frac{\omega_0(t - t_0)^2}{2} \right], \quad (4.32)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia angular,  $t_0$  es el tiempo en el cual es activada la fuente y esta dado en términos de la frecuencia de la ondícula  $f$  usando la expresion  $t_0 = (3/2)f$ . La amplitud de la fuente es la misma utilizada en trabajo de grado por Torres , 2007 y obedece a parámetros de estabilidad del método de DFDT.

La fuente debe asignar la función en el tiempo deseado a componentes específicas del campo de velocidades o esfuerzos en el mallado FDTD. De esta manera, se consigue modelar una onda que irradia. El único inconveniente que presenta este tipo de fuente es que cuando la excitación se acaba, en el punto del limite de la malla se forza a que el campo sean cero, hecho que es equivalente a tener en esa posición un conductor perfecto que nos reflejará los campos que lleguen hasta allí (reflexión). La forma de mitigar este inconveniente es aplicar fronteras absorbentes.

Por ejemplo, en un mallado bidimensional se puede establecer la siguiente fuente para  $E_z$  en un punto determinado  $i$  para generar una senoide continua con frecuencia  $y/o$ , de perturbación que comenzará en el instante  $n = 0$ .

$$V_z|_{i,j}^n = V_0 \sin(2\pi f_0 n \Delta t), \quad (4.33)$$

permitiendo hacer continua la onda y simular una absorción en el limite computacional evitando las reflexiones.

## 4.5 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las figura [3.7] muestra el problema de una fractura que no se resuelve bien con el método tradicional (malla equidistante) además de las reflexiones no deseadas en los limites computacionales del modelo.

El problema de interés consiste en solucionar el conjunto de ecuaciones que representan el modelo, en esté caso una onda 2D propagándose en un medio Isótropo -homogéneo,

o anisótropo-heterogéneo (siendo este último el más acorde a la realidad), en el interior del dominio computacional. La idea básica del Método de Diferencias Finitas permite la solución discreta de las ecuaciones de onda en los vértices de una malla; en este caso *una malla variable que permite dar mayor definición a los cambios bruscos de velocidad en alguna discontinuidad ó fractura del medio*, cuando la onda se propague.

Una vez escogida la discretización de las derivadas parciales se aproximan por deltas de malla sustituidas por un conjunto de ecuaciones algebraicas que contienen los valores de las funciones en diferentes puntos de la malla. Lo que se busca es encontrar valores aproximados a los valores de las funciones incógnita en los vértices de la malla variable, (velocidades y esfuerzos) la cual es densa en la vecindad de la discontinuidad ó fractura.

Al utilizar estas ecuaciones en un algoritmo discreto se hace necesario limitar la dimensión del modelo por cuestión de costo computacional. Para evitar reflexiones artificiales en la frontera del modelo computacional se propone un esquema de condiciones absorbentes.

Los resultados obtenidos con la aplicación de la malla variable permiten visualizar una correcta propagación de la onda a través de la fractura.

## 4.6 El Problema de Estabilidad

Para asegurar la estabilidad numérica del algoritmo es necesario limitar el valor del incremento de tiempo. Según el criterio de estabilidad de Courant (Levander A., 1988) se debe cumplir que:

$$\Delta t \leq \frac{1}{c_{max} \left\{ \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right\}}, \quad (4.34)$$

donde  $C_{max}$  es la velocidad máxima en la región modelada. la ecuación anterior es la misma usada por levander en sus modelos.

# CAPÍTULO 5

---

---

## CONDICIONES ABSORBENTES

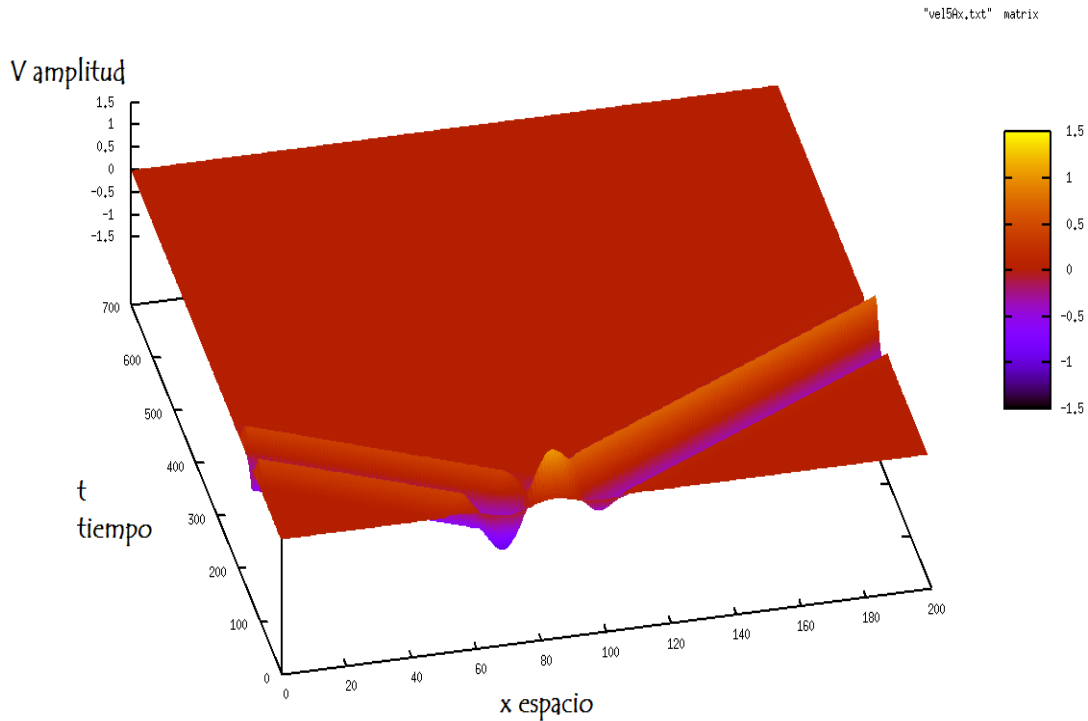
---

---

En muchas ocasiones se intenta modelar una estructura que se encuentra situada en el espacio libre, con un cuerpo dispersor y con una fuente perturbadora. Infortunadamente, la región a modelar por FDTD es necesariamente finita. de tal manera que los campos que se propagan llegan a los límites de la región y se reflejan. Es conveniente aplicar algoritmos en los límites de la región FDTD para que absorban la propagación, simulando como si se diera en el espacio libre donde la onda se propaga continuamente fuera de la región de interés. Estos algoritmos reciben el nombre de condición de radiación en la frontera (RBC -Radiation Boundary Condition -) o condición de absorción en los límites (ABC - Absorbing Boundary Condition ).

### 5.1 Condiciones de Frontera Absorbente 1D (asignación de campo en la frontera)

Las condiciones de frontera absorbentes son necesarias para simular adecuadamente la propagación de los campos una vez que éstos han llegado a la frontera de nuestra malla de simulación. En el algoritmo de FDTD, los valores de los campos se determinan mediante un promedio de los campos en los puntos vecinos. El problema consiste en que en la frontera de la malla de simulación, este promedio no se puede dar porque no conocemos el valor del campo fuera de la malla. De esta forma, si la simulación continúa, los campos toman valores espurios (Ghisays Ruiz, 1998) ver figura [4.2].



**Figura 5.1:** Variación del pulso Gaussiano en el espacio y en el tiempo con fronteras absorbentes.

Físicamente, se espera que los campos se propaguen hacia afuera de la malla de simulación, ya que se considera que fuera de la malla no existe fuentes. La distancia que la onda viaja es un paso temporal determinado por la relación:

$$V_x^n(1) = V_x^{n-2}(2).$$

Con esta expresión estamos asignando el valor del campo en la frontera en lugar de calcularlo. Esta condición es fácil de implementar. Solamente es necesario guardar el valor de  $V_x(2)$  en un par de pasos temporales y luego asignarlos a  $V_x(1)$ . La figura 5.1 muestra la propagación de una onda Gaussiana. En esta ocasión, la onda pasa la frontera sin reflexión, que es lo que se espera que ocurra.

Esta frontera de absorción está ligada a la ecuación:

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{2c}, \quad (5.1)$$

que corresponde a la condición de estabilidad, es por ello que los campos se guardan en 2 pasos de tiempo por paso espacial.

## 5.2 Condiciones de Frontera Absorbente Capas Perfectamente Acopladas PML

El fundamento del método PML es introducir una capa absorbente de grosor finito alrededor del modelo (Collino F., Chysoula T., 1998), que minimice las reflexiones espurias. Dado su aplicabilidad en distintos campos, se presenta una generalización del método para su mejor comprensión. Se denomina dominio computacional el área correspondiente al modelo y PML a la zona amortiguada. Sea  $v$  un campo escalar con condición inicial  $v_0$  que se propaga en dirección  $x$  sujeto a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - A \frac{\partial v}{\partial y} - B \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5.2)$$

El principio básico es acoplar la ecuación [5.2] en el dominio computacional con otra en la zona de atenuación tal que no obtenga reflexiones en la interfase que separa los dominios, con un decaimiento de la onda en la zona PML (Collino F., Chysoula T., 1998).

Si el campo completo  $v = v^{\parallel} + v^{\perp}$  se separa en sus componentes perpendicular  $v^{\perp}$  y paralela  $v^{\parallel}$  a la interfase, la ecuación [5.2] se descompone en el sistema de ecuaciones acoplada:

$$\frac{\partial v^{\perp}}{\partial t} - A \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial v^{\parallel}}{\partial t} - B \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Sea una función  $d(x)$  nula en el dominio computacional y positiva en la zona PML, la cual lleva a cabo la atenuación en la zona PML. Similar a  $v$  se define ahora una nueva función  $\hat{u} = u^{\perp} + u^{\parallel}$  con condición inicial que es solución del sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial u^{\perp}}{\partial t} + d(x)u^{\perp} - A \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial u^{\parallel}}{\partial t} - B \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

La solución armónica del sistema [5.2] con frecuencia angular satisface la ecuación:

$$i\omega\tilde{v} - A\frac{\partial\hat{v}}{\partial x} - B\frac{\partial\hat{v}}{\partial y} = 0. \quad (5.5)$$

De igual forma para el sistema acoplado de ecuaciones [5.2] se tiene

$$[i\omega + d(x)]\hat{u}^\perp - A\frac{\partial\hat{u}}{\partial x} = 0, \quad (5.6)$$

$$i\omega\hat{u}^\parallel - B\frac{\partial\hat{u}}{\partial y} = 0.$$

EL sistema de ecuaciones [5.6] es equivalente a:

$$i\omega\hat{u}^\perp \frac{i\omega}{i\omega + d(x)} A \frac{\hat{u}}{\partial x} = 0, \quad (5.7)$$

$$i\omega\hat{u}^\parallel - B\frac{\partial\hat{u}}{\partial y} = 0.$$

De la expresión [5.6] y de su comparación con el sistema [5.2] se deduce que la introducción de capas PML consiste en realizar la sustitución

$$\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \hat{x}} = \frac{i\omega}{i\omega + d(x)} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (5.8)$$

La expresión 5.6 representa un cambio a variable compleja por

$$\hat{x} = x - \frac{i}{\omega} \int_0^x d(s) ds. \quad (5.9)$$

Se busca una solución al sistema de ecuaciones [5.6] mediante ondas planas  $u = u^\parallel + u^\perp$

$$\begin{aligned} u^\parallel &= a^\parallel \exp[-i(k_x \hat{x}(x) + k_y y - \omega t)], \\ u^\perp &= a^\perp \exp[-i(k_x \hat{x}(x) + k_y y - \omega t)]. \end{aligned}$$

La onda plana

$$u = v_0 \exp[-i(k_x x + k_y y - \omega t)] \exp[-\frac{k_x}{\omega} \int_0^k d(s) ds],$$

con inicial  $v_0$  será solución del sistema [5.6] y representa la solución en el dominio computacional sin reflexión en la interfase con un factor de amortiguamiento

$$\alpha_d = \exp[-\frac{k_x}{\omega} \int_0^k d(s) ds],$$

en la zona PML en dirección x. Un estudio más detallado sobre la aplicación del método PML en distintos fenómenos elastodinámicos se puede consultar en Collino F., Chysoula T., (1998).

### 5.3 Función de Atenuación

Es un método extremadamente simple y capaz de amortiguar la amplitud de una onda en una zona de atenuación alrededor del modelo donde se quiere simular un fenómeno sísmico. De acuerdo con Cêrjan (1985), en la simulación por diferencias finitas se aplica una función de peso a las secciones que representan el estado del fenómeno en el tiempo actual y en el previo, en todos los puntos que se encuentran dentro de la zona de amortiguamiento.

La función tiene la forma:

$$\alpha_d(i) = \exp[-0,0015(Z - i)^2], \quad (5.10)$$

donde  $Z$  es el número de nodos en la zona amortiguada en dirección del eje cartesiano,  $i$  indica i-nodo dentro de la misma en esa dirección y la amplitud corresponde a un valor dado por condiciones de estabilidad del método (Torres, 2008).

## 5.4 Esquema en Diferencias Finitas para La Región PML

Este esquema usa una malla intercalada<sup>q</sup> (anexo). Para esto  $v_x$  es calculado en el punto  $(i, j)$  y  $v_z$  en el punto  $(i + 1/2, j + 1/2)$ ,  $\tau_{xx}$  y  $\tau_{yy}$  en  $(i + 1/2, j)$  y  $\tau(i, j + 1/2)$ . El modelo PML asociado a el esquema FDTD de Virieux es escrito así (fue aplicado a las ecuaciones [4.1] a [4.5]):

$$\begin{aligned}
 v &= v^{\parallel} + v^{\perp}, \\
 \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + d(x) \right) v_x &\perp = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}, \\
 \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + d(x) \right) v_y &\perp = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}, \\
 \left( \frac{\partial}{\partial t} + d(x) \right) \tau_{xx} &\perp = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\
 \left( \frac{\partial}{\partial t} + d(x) \right) \tau_{yy} &\perp = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\
 \left( \frac{\partial}{\partial t} + d(x) \right) \tau_{xy} &\perp = \mu \frac{\partial v_y}{\partial x},
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}
 \tau &= \tau^{\parallel} + \tau^{\perp}, \\
 \rho \frac{v_x^{\parallel}}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \\
 \rho \frac{v_y^{\parallel}}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}, \\
 \frac{\tau_{xx}^{\parallel}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y}, \\
 \frac{\tau_{yy}^{\parallel}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial y}, \\
 \frac{\tau_{xy}^{\parallel}}{\partial t} &= \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}.
 \end{aligned}$$

El sistema previo de ecuaciones corresponde al modelo PML en las esquinas, donde se requiere un amortiguamiento doble en ambas direcciones. Para el cálculo de la solución

---

<sup>q</sup>Consiste en un mallado donde se intercalan las soluciones de la ecuación de onda. En nuestro caso las velocidades van seguidas de los esfuerzos y posteriormente las velocidades

dentro las capas PML en la dirección  $x$  se usa el mismo sistema de ecuaciones pero con  $d^y = 0$ , mientras que para la capa PML en la dirección  $y$  se toma  $d^x = 0$ . La figura [4.2] presenta los 4 valores de  $d^x$  y  $d^y$  para las diferentes capas PML.

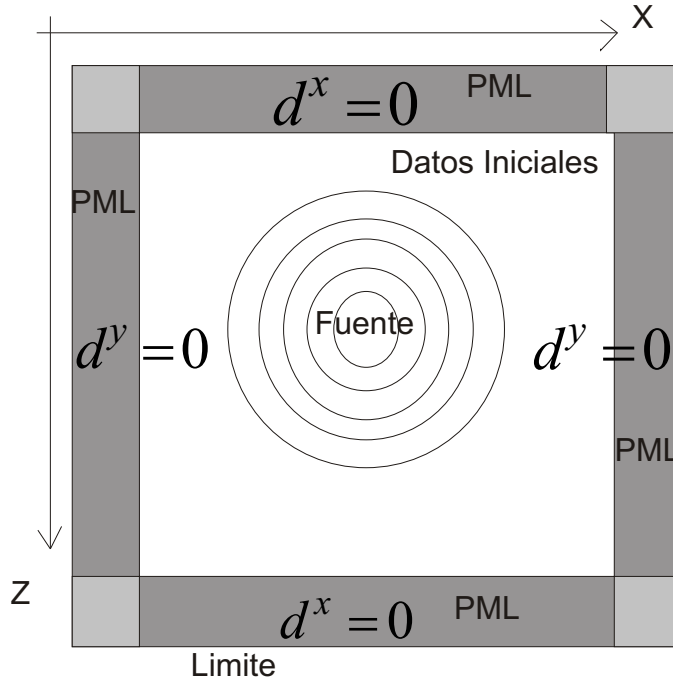


Figura 5.2: Capas PML.

## 5.5 Ejemplo

Para la aplicación de las fronteras absorbentes con PML se utilizó un modelo de capas planas con buzamiento  $r$  en un medio isótropo en el cual se propagó una onda elástica. Se visualizó el campo de velocidades de dos formas diferentes offset vs profundidad y offset<sup>s</sup> vs tiempo. Los parámetros utilizados se describen en la tabla [5.1]. La grafica [figura 4.3] muestra el resultado de la visualización de la ecuación de onda en el medio con diferentes capas planas. Vemos como las fronteras absorben la onda y evitan las reflexiones en el limite computacional, lo mismo se realiza para la grafica [[figura 4.4]] la cual no posee absorción en las fronteras. La idea principalmente es ver la efectividad del método de capas perfectamente acopladas para la absorción de las ondas en los límites

<sup>r</sup>sentido u orientación de la inclinación de los estratos en un relieve de plegamiento formado en rocas sedimentarias

<sup>s</sup>distancia fuente receptor

del modelo. El modelo consiste de cinco capas con diferentes velocidades (o parámetros elásticos) Los valores correspondientes para los parámetros de los medios dependen de la densidad del material y son obtenidas mediante las siguientes relaciones:

$$\lambda = \rho(V_{max}^2 - 2V_{min}^2), \quad (5.12)$$

$$\mu = \rho V_{min}^2, \quad (5.13)$$

donde  $V_{max}$  y  $V_{min}$  corresponden a las velocidades de la onda p y de la onda s respectivamente y son:

$$V_{max} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (5.14)$$

$$V_{min} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (5.15)$$

Parámetro	Tipo	Valor
$\delta l$	Paso de Tiempo	0,016[s]
$\delta x$	Tamaño de Celda	50,125[m]
$Nx$	Desplazamiento Horizontal	200[Km]
$Nz$	Profundidad	400[Km]
$\rho_1$	Densidad de masa	2000[Kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_2$	Densidad de masa	3000[Kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_3$	Densidad de masa	4000[Kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_4$	Densidad de masa	5000[Kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_5$	Densidad de masa	6000[Kg/m <sup>3</sup> ]

Tabla 5.1: Parámetros físicos y numéricos para la propagacion de la onda en el modelo simple con capas.

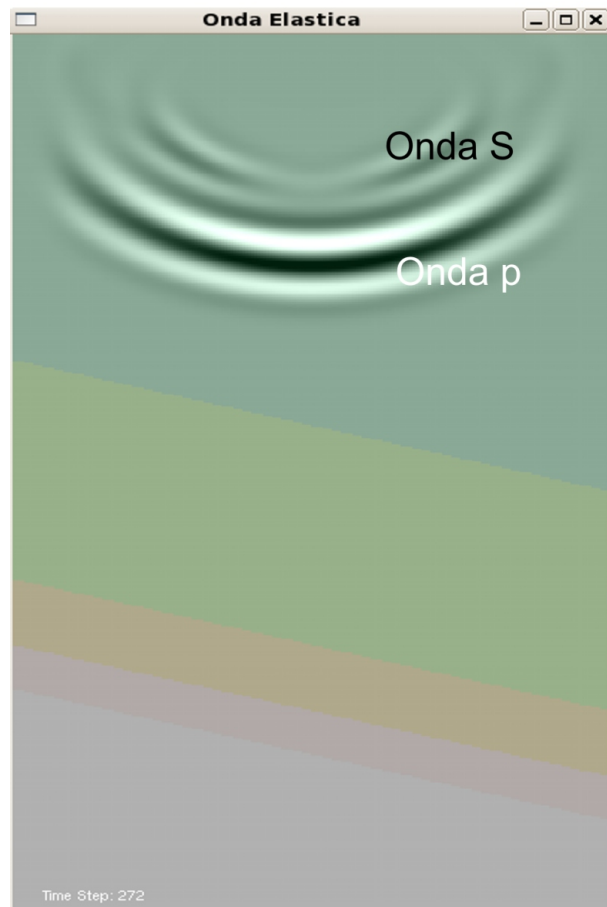


Figura 5.3: Modelo sísmico y perturbación Gaussiana con Capas PML, Las simulaciones se hicieron usando diferencias finitas, modelo simple de capas planas con buzamiento.

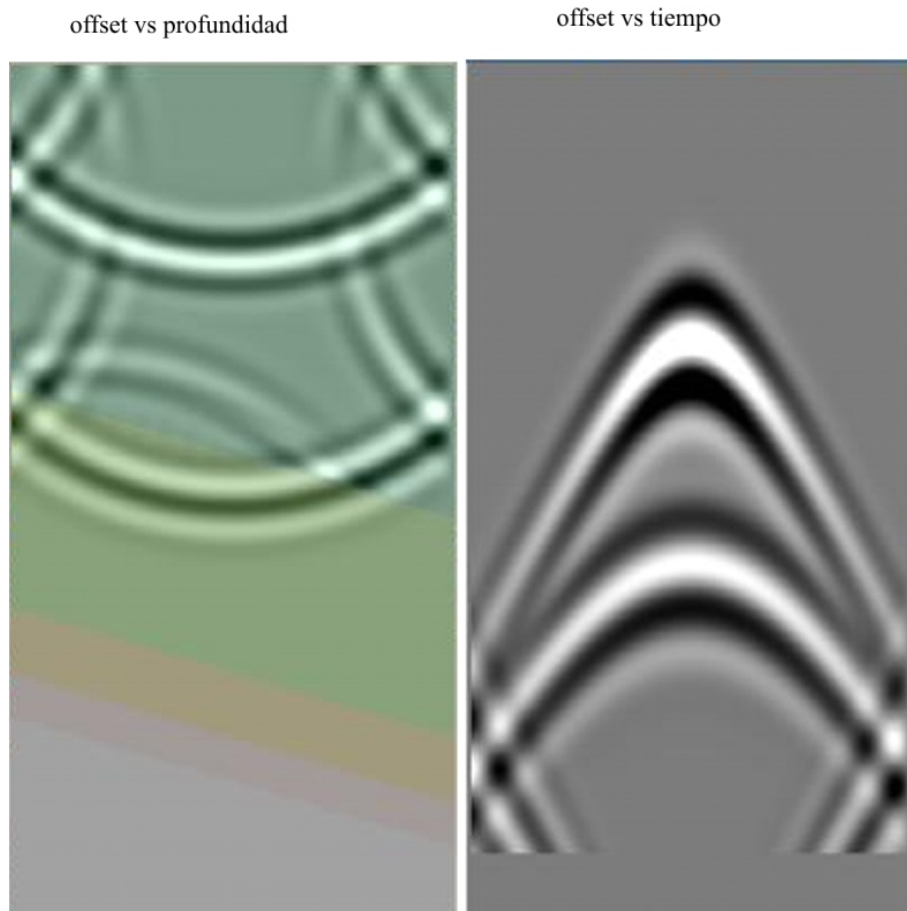
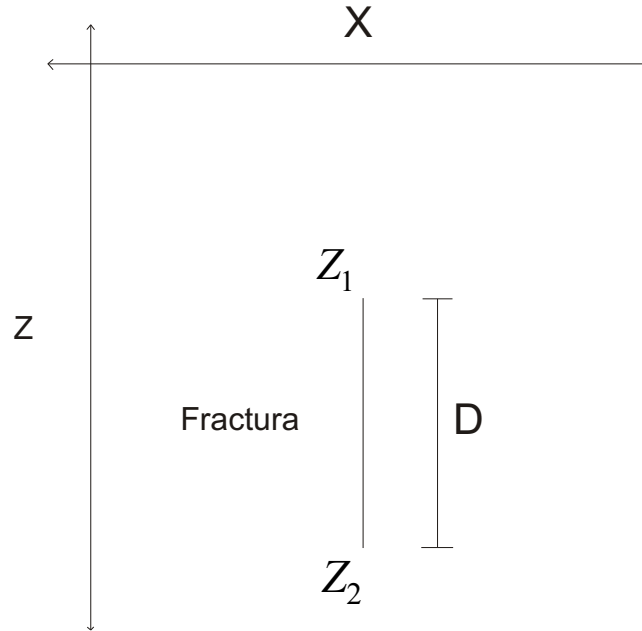


Figura 5.4: modelo sísmico sin PML.

Cuando una onda sísmica encuentra un cambio en las propiedades elásticas del material, como es el caso de una interfase entre dos capas geológicas; parte de la energía incidente se refleja (ondas reflejadas) y el resto se transmite (ondas refractadas) con cambios en la dirección de propagación, en la velocidad y en el modo de vibración. La visualización de este fenómeno en tiempo y offset (distancia entre geófonos) permite obtener información del contacto de las ondas elásticas entre capas como lo muestra la figura [figura 4.4].

## 5.6 Método Simplificado de la Representación de una Discontinuidad en un Medio Isótropo



**Figura 5.5:** Representación cartesiana de una fractura.

Este método es planteado para simular el mismo fenómeno con un enfoque diferente, se tendría en cuenta como un trabajo a futuro. Supongamos la ecuación de onda de la siguiente manera (ecuación 4.14):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \alpha \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \beta \frac{\partial u_1}{\partial x},$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son los parámetros del medio y  $u_1$ ,  $u_2$ , son los correspondientes campos solución de la ecuación de onda (velocidades y esfuerzos en el caso elástico).

Las ecuaciones 5.16 se representan en forma de operador matricial de la siguiente manera en función de los parámetros del medio:

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_0 \frac{\partial}{\partial x} \\ \beta_0 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} \\ \beta_1 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

donde  $\alpha_0$  y  $\beta_0$  son los parámetros en todo el medio isótropo y  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ , son los parámetros correspondientes a la discontinuidad.

La solución para la representación de la fractura se puede describir de la siguiente manera:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_0 \frac{\partial}{\partial x} \\ \beta_0 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (\alpha_1 - \alpha_0) \frac{\partial}{\partial x} \\ (\beta_1 - \beta_0) \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} * \exp\left(\frac{-x^2}{d^2}\right) \theta(z_2 - z_1) \theta(z_2 - z), \quad (5.19)$$

donde  $\theta(x)$  es una función que es igual a cero fuera de la discontinuidad y cerca retorna 1.  $D$  es la longitud de la fractura como lo muestra la figura [figura 4.5].



# CAPÍTULO 6

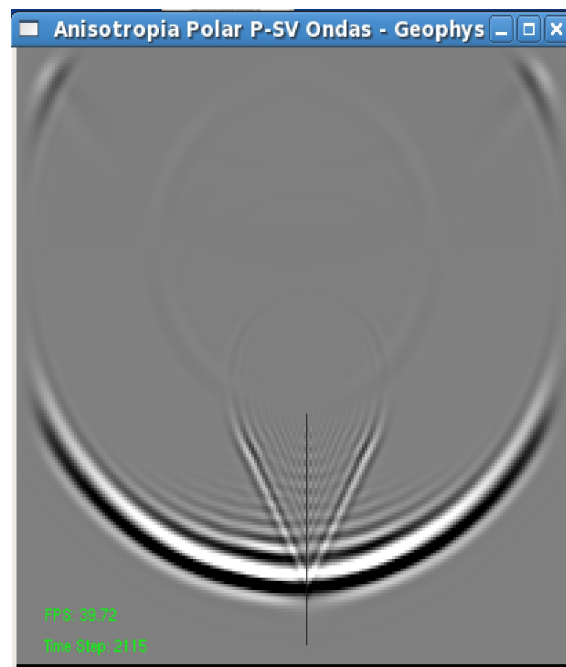
---

---

## CONCLUSIONES

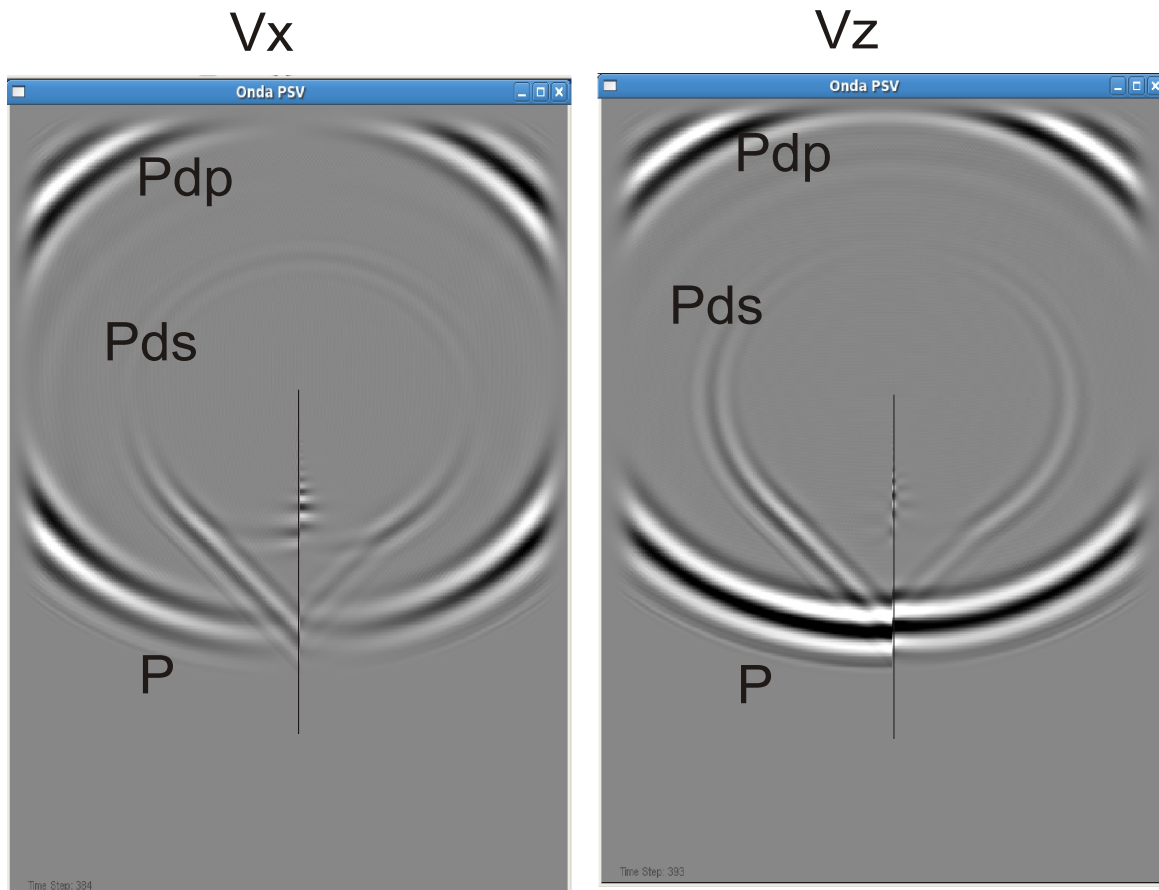
---

---

 $V_x$  $V_z$ 

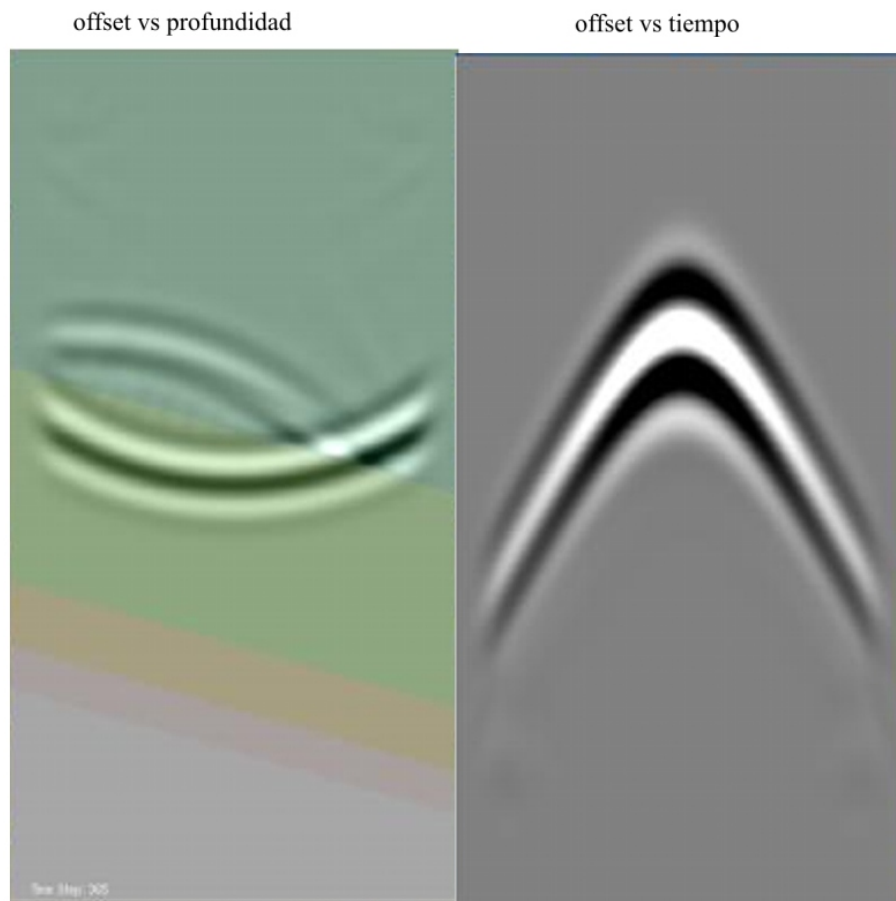
**Figura 6.1:** Visualización de la onda cuando pasa por la fractura implementando anisotropía.

Se comparó numéricamente el modelo de un medio fracturado, el cual poseía una velocidad de onda S cercana a cero (cizallamiento casi nulo) en la fractura utilizando tres métodos; el tradicional que corresponde a implantar solamente las condiciones de fractura en el medio o variación de parámetros (figura [3.7]), el segundo método de inclusión de anisotropía (figura [5.1]) y por último el que corresponde a la variación del mallado en la vecindad de la fractura (figura [5.2]). El método tradicional no muestra resultados acordes debido a la separación en los vértices del mallado cerca a la discontinuidad los cuales generan una mala visualización en la dispersión de la onda. La variación de la malla en los vértices en la discontinuidad, por lo tanto permite visualizar mejor el fenómeno de dispersión de la onda cuando atraviesa la interfaz de la fractura (figura [5.2]), sin embargo cerca a la frontera de la fractura existen problemas de ruido, generando pequeñas fuentes artificiales. La simulación con inclusión de anisotropía muestra un resultado mejor al esperado aunque el tiempo de simulación es mucho más grande que el de Malla Variable.



**Figura 6.2:** Visualización de la onda cuando pasa por la fractura implementando malla variable. P corresponde a la onda incidente, Pdp la onda convertida P o reflejada y Pds la onda S convertida transmitida.

Por otra parte los resultados obtenidos indican que aunque el método PML permite obtener sismogramas sintéticos con una apreciable atenuación de las reflexiones de bordes, estos registros manifiestan la presencia de reflexiones parásitas que disminuyen la calidad de la información. La técnica de uso aislado de una función de atenuación en una zona de absorción, como se sabe (Collino,1998), tampoco suministra resultados efectivos. Sin embargo la aplicación conjunta de estos dos enfoques permite obtener sismogramas con una evidente atenuación de las reflexiones no artificiales. El método PML mostró ser efectivo y capaz de lograr eliminar las reflexiones en los límites de modelos sísmicos, permitiendo aclarar los reflectores más profundos. La aplicación de la técnica a datos sintéticos muestra que las reflexiones producidas por los bordes del modelo desaparecen, realzando la información de interés.



**Figura 6.3:** modelo sísmico con PML.

Las figura [5.2] y [5.3] muestran los resultados esperados con respecto a lo que concierne a la propagación de onda en la fractura y en la absorción de la onda en la frontera. Para el caso de la malla variable observamos que la dispersión de la onda es muy similar a la que ocurre con la simulación de la onda mediante el método de inclusión de anisotropía. Por

otra parte es claro que la implementación de fronteras absorbentes mejoran la calidad de las imágenes pero que no todas las técnicas son muy buenas, en este caso la función de atenuación sola no funciona conforme a lo esperado y es necesario combinar esta función con la técnica del PML. Por otra parte la utilización de más puntos en las iteraciones dentro de la malla mejora sustancialmente los resultados razón es por ello que se recomienda utilizar una malla escalonada o intercalada para estas simulaciones en diferencias finitas. Se recomienda utilizar métodos adicionales para continuar con la investigación en la mejora de estas visualizaciones. En el trabajo se incluyó un método alternativo propuesto por el profesor Iliak Mikhailov (Profesor de Física UIS) pero del cual no se obtuvieron resultados .

---

---

# BIBLIOGRAFÍA

---

---

- [1] Cêrjan, C., Kosloff, D., Kosloff, R., 1985, “A Nonreflecting Boundary Condition for Discrete Acoustic and Elastic Wave Equations” *Geophysics*, **50**: 705-708.
- [2] Chuling W., Harrys J., Nihel K., Nakagawa S, (JULY-AUGUST 2005), “Two-Dimensional Finite-Difference Seismic Modeling of an Open Fluid-Filled Fracture: Comparison of Thin Layer and Linear-Slip model” *Geophysics*, **70**: 57-62
- [3] Collino F., Chysoula T., 1998, “ Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media” *Institut National de Recher en Informatique et en Automatique*, thème 4 - Simulation et optimisation de systemes complex Projet Ondes Rapport de recherche No 3471: 28.
- [4] Ghisays Ruiz., 1998, “Método Híbrido de Fronteras no Reflectivas en Límites de Modelos Sísmicos” *Rev.Acad.Colomb.Cienc*, **30** (115):209-214.
- [5] Hudson., 1998, “Limitations of ground-based solar irradiance estimates due to atmospheric variations” *Journal of gophysical research*, **108** No.D14: 4400.
- [6] Slawinski, M.A., 2003 “Seismic waves and rays inelastic media” *Univ. of Newfound*, **6**:421-429.
- [7] Strikwerda, 1986 “Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations”, **3**: 870-891.
- [8] Pitarka A., 1999, “Elastic Finite-Difference Modeling of Seismic Motion Using Staggered Grids With Nonuniform Spacing” *Bulleting of the Seismic Society of America*, **89**: 54-68.
- [9] Torres J., 2008, “ Estudio Numérico de la Propagacion de Ondas sísmicas P-Svy Sh en un Medio Elástico con Anisotropía Polar” *Grupo de Geofísica convenio 005 del 2005 UIS-ICP*
- [10] Thomsen L., 1986, “Weak elastic anisotropy” *Geophysics*, **51**: 1954-1966.
- [11] Leandau., Lifshiz. E., 1969, “Teoría de la Elasticidad” *Reverté S.A, Barcelona*, **7**.

- [12] Levander A., 1988, "Fourth-Order finite-difference P-SV seismograms" *Geophysics*, **53**: 1425-1436
- [13] Wang, Z., 2002, "Seismic anisotropy in sedimentary rocks, part 2: Laboratory data" *Geophysics*, **67**: 1423-1444

# CAPÍTULO 7

---

---

## ANEXOS

---

---

### 7.1 Discretización de las Ecuaciones [2.25] en DFDT

$$v_x |_{i,j}^n = v_x^x |_{i,j}^n + v_x^y |_{i,j}^n,$$

$$\frac{v_x^x |_{i,j}^{n+1} - v_x^x |_{i,j}^n}{\Delta t} + d_i^x \frac{v_x^x |_{i,j}^{n+1} + v_x^x |_{i,j}^n}{2} = \frac{\tau_{xx} |_{i+1/2,j}^{n+1/2} - \tau_{xx} |_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\rho h},$$

$$\frac{v_x^y |_{i,j}^{n+1} - v_x^y |_{i,j}^n}{\Delta t} + d_i^y \frac{v_x^y |_{i,j}^{n+1} + v_x^y |_{i,j}^n}{2} = \frac{\tau_{xy} |_{i,j+1/2}^{n+1/2} - \tau_{xy} |_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{\rho h}.$$

$$v_y |_{i+1/2,j+1/2}^n = v_y^x |_{i+1/2,j+1/2}^n + v_y^y |_{i+1/2,j+1/2}^n,$$

$$\frac{v_y^x |_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - v_y^x |_{i+1/2,j+1/2}^n}{\Delta t} + d_{i+1/2}^x \frac{v_y^x |_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} + v_y^x |_{i+1/2,j+1/2}^n}{2} = \frac{\tau_{xy} |_{i+1,j+1/2}^{n+1/2} - \tau_{xy} |_{i,j+1/2}^{n+1/2}}{\rho h},$$

$$\frac{v_y^y |_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - v_y^y |_{i+1/2,j+1/2}^n}{\Delta t} + d_{i+1/2}^y \frac{v_y^y |_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} + v_y^y |_{i+1/2,j+1/2}^n}{2} = \frac{\tau_{yy} |_{i+1/2,j+1}^{n+1/2} - \tau_{yy} |_{i+1/2,j}^{n+1/2}}{\rho h}.$$

$$\tau_{xx} |_{i+1/2,j}^{n+1/2} = \tau_{xx}^x |_{i+1/2,j}^{n+1/2} + \tau_{xx}^y |_{i+1/2,j}^{n+1/2},$$

$$\frac{\tau_{xx} |_{i+1/2,j}^{n+1/2} - \tau_{xx} |_{i+1/2,j}^{n-1/2}}{\Delta t} + d_{i+1/2}^x \frac{\tau_{xx} |_{i+1/2,j}^{n+1/2} + \tau_{xx} |_{i+1/2,j}^{n-1/2}}{2} = (\lambda + 2\mu) \frac{v_x |_{i+1,j}^n - v_x |_{i,j}^n}{h},$$

$$\frac{\tau_{xy} |_{i+1/2,j}^{n+1/2} - \tau_{xy} |_{i+1/2,j}^{n-1/2}}{\Delta t} + d_j^y \frac{\tau_{xy} |_{i+1/2,j}^{n+1/2} + \tau_{xy} |_{i+1/2,j}^{n-1/2}}{2} = \lambda \frac{v_y |_{i+1/2,j+1/2}^n - v_y |_{i+1/2,j-1/2}^n}{h}.$$

$$\tau_{yy} |_{i+1/2,j}^{n+1/2} = \tau_{yy}^x |_{i+1/2,j}^{n+1/2} + \tau_{yy}^y |_{i+1/2,j}^{n+1/2},$$

$$\frac{\tau_{yy}^x |_{i+1/2,j}^{n+1/2} - \tau_{yy}^x |_{i+1/2,j}^{n-1/2}}{\Delta t} + d_{i+1/2}^x \frac{\tau_{yy}^x |_{i+1/2,j}^{n+1/2} + \tau_{yy}^x |_{i+1/2,j}^{n-1/2}}{2} = \lambda \frac{v_x |_{i+1,j}^n - v_x |_{i,j}^n}{h},$$

$$\frac{\tau_{yy}^y |_{i+1/2,j}^{n+1/2} - \tau_{yy}^y |_{i+1/2,j}^{n-1/2}}{\Delta t} + d_j^y \frac{\tau_{yy}^y |_{i+1/2,j}^{n+1/2} + \tau_{yy}^y |_{i+1/2,j}^{n-1/2}}{2} = (\lambda + 2\mu) \frac{v_y |_{i+1/2,j+1/2}^n - v_y |_{i+1/2,j-1/2}^n}{h}.$$

$$\tau_{xy} |_{i,j+1/2}^{n+1/2} = \tau_{xy}^x |_{i,j+1/2}^{n+1/2} + \tau_{xy}^y |_{i,j+1/2}^{n+1/2},$$

$$\frac{\tau_{xy}^x |_{i,j+1/2}^{n+1/2} - \tau_{xy}^x |_{i,j+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} + d_i^x \frac{\tau_{xy}^x |_{i,j+1/2}^{n+1/2} + \tau_{xy}^x |_{i,j+1/2}^{n-1/2}}{2} = \mu \frac{v_y |_{i+1/2,j+1/2}^n - v_y |_{i-1/2,j+1/2}^n}{h},$$

$$\frac{\tau_{xy}^y |_{i,j+1/2}^{n+1/2} - \tau_{xy}^y |_{i,j+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} + d_{j+1/2}^y \frac{\tau_{xy}^y |_{i,j+1/2}^{n+1/2} + \tau_{xy}^y |_{i,j+1/2}^{n-1/2}}{2} = \mu \frac{v_x |_{i,j+1}^n - v_x |_{i,j}^n}{h}.$$

## 7.2 Ponencias



Santa Fe, 12 de setiembre de 2008

Gamboa ortega, Francisco

Estimado autor,

Por la presente, me complace comunicarle que, como resultado de la evaluación del trabajo final “**METODO DE DIFERENCIAS FINITAS DOMINIO TEMPORAL DE CUARTO ORDEN CON MALLA VARIABLE PARA SIMULAR LA PROPAGACION DE ONDAS SISMICAS EN FRACTURAS**”, de los autores Gamboa Ortega, Francisco ; Gonzalez, Herling ; Guevara, Saul ; Lasprilla, Maria del Carmen; el mismo ha sido aceptado para ser publicado en las actas del próximo XVII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF2008) a realizarse desde el 10 al 13 de noviembre de 2008, en la ciudad de San Luis (Argentina).

Le hago notar que la política editorial del congreso es que, para que el trabajo sea incluido en las actas, al menos uno de los autores deberá registrarse y abonar la inscripción al congreso antes del 30 de setiembre de 2008. El procedimiento para registración está detallado en el sitio: <http://www.cimec.org.ar/ocs2/index.php/enief/index/announcement/view/8>.

Esperando contar con su presencia en el Congreso, me despido de Ud. muy atentamente.



Alberto Cardona  
Comité Organizador ENIEF 2008

---

Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería



CIMEC - INTEC  
Giemes 3450  
3000 - Santa Fe - Argentina

Tel: +54-342- 451 1594 / 95 x 1013  
Fax: +54-342- 451 1169  
e-mail: <acardona@intec.unl.edu.ar>

**Figura 7.1:** Carta de Aceptación para Publicación.



Figura 7.2: Certificado.