

SOLUCIÓN NUMÉRICA PARA EL FLUJO DE FERROFLUIDO
INDUCIDO POR UN CAMPO MAGNÉTICO ROTATIVO
EN EL LÍMITE DE CERO AMPLITUD DEL CAMPO

VICTOR ALFONSO PEÑA CRUZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICOQUÍMICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA QUÍMICA
BUCARAMANGA

2011

SOLUCIÓN NUMÉRICA PARA EL FLUJO DE FERROFLUIDO
INDUCIDO POR UN CAMPO MAGNÉTICO ROTATIVO
EN EL LÍMITE DE CERO AMPLITUD DEL CAMPO

VICTOR ALFONSO PEÑA CRUZ

Tesis de grado presentada como requisito parcial para optar el título de

Ingeniero Químico

Director

Arlex Chaves Guerrero

Ingeniero Químico, Ph.D

Codirector

David Fuentes Diaz

Ingeniero Mecánico, Ph.D

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICOQUÍMICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA QUÍMICA
BUCARAMANGA

2011

AGRADECIMIENTOS

Agradezco de manera especial y sincera al Dr. Arlex Chaves Guerrero por aceptarme para realizar esta tesis bajo su dirección, por su bondad e inagotable paciencia, su apoyo y confianza en mi trabajo y por su aporte invaluable, no solamente en el desarrollo de esta tesis, sino también en mi formación como investigador.

Quiero agradecer al Dr. David Fuentes por su importante aporte y participación activa en el desarrollo de esta tesis y por sus valiosas asesorías en la programación de métodos numéricos.

Doy gracias a la Universidad Industrial de Santander, en especial a la escuela de Ingeniería Química y a su excelente cuerpo de profesores por las enseñanzas impartidas que están contribuyendo a mi formación como persona profesional.

A mis Padres L.A.P.Alvarez y B.P.Alvares, mis maestros de toda la vida.

A mis Madres R.E.C.Sandoval y M.O.Sandoval.

A L.X.R.Silva.

A mi familia por ser la base fundamental de mi desarrollo personal.

A todos los que con su mano bondadosa y sus sabios consejos me han ayudado.

Tabla de Contenido

1	INTRODUCCIÓN	14
2	MARCO TEÓRICO	18
2.1	Análisis conceptual del flujo	18
2.2	Ecuaciones ferrohodinámicas	19
3	METODOLOGÍA	23
3.1	Etapas del proyecto	23
3.2	Modelo matemático	24
3.2.1	Adimensionalización de las ecuaciones	24
3.2.2	Problema hidrodinámico	25
3.2.3	Problema magnético	26
3.2.4	Densidad de fuerza y torque magnéticos	30
3.3	Discretización de las ecuaciones ferrohodinámicas	31
3.3.1	Problema hidrodinámico	31
3.3.2	Discretización del problema electrodinámico:	32
3.4	Estrategia numérica	33
4	RESULTADOS Y ANÁLISIS	36
4.1	Comparación solución numérica versus asintótica	36
4.2	Perfiles de velocidad lineal y angular a diferentes condiciones de H , κ y Ω	38
4.3	Comparación cualitativa de los resultados numéricos frente a reportes experimentales	40

5	CONCLUSIONES	43
6	RECOMENDACIONES	44

Lista de Figuras

2-1	Las figuras muestran las dos geometrías bajo las cuales se modeló el flujo del ferrofluido. La Figura a) muestra el contenedor cilíndrico, con el ferrofluido ubicado en el espacio entre $0 < r < R_0$. La Figura b) muestra el caso del contenedor anular formado por dos cilindros coaxiales y el ferrofluido llenando el espacio entre $R_1 < r < R_2$. Para nuestro caso hemos asumido que $R_2 \rightarrow R_3$. En ambos casos, la componente θ de la velocidad lineal y la componente z de la velocidad angular fueron obtenidos. En ambas geometrías se asume que los cilindros son infinitamente largos. También se asume que la columna de ferrofluido está sometida a un campo magnético rotando perpendicularmente al eje del cilindro. El campo magnético es modelado como una distribución de corriente superficial en la dirección z , $\mathbf{K}(r, t, \theta) \mathbf{i}_z$. Figuras tomadas de referencias [17] y [20].	19
3-1	Diagrama de flujo del procedimiento iterativo para solucionar el sistema de ecuaciones ferrohodinámicas.	35
4-1	Comparación de resultados numéricos con respecto a la solución asintótica reportada en la literatura [22], a) perfil de velocidad lineal para el caso del contenedor cilíndrico, obtenido para $\kappa = 33$, $\Omega = 85$ Hz y $H = 3.0$ mT; b) perfil de velocidad lineal para el caso del contenedor anular, obtenido con $\kappa = 20$, $\Omega = 75$ Hz y $H = 2.0$ mT.	37

4-2	Perfiles de velocidad a) lineal y b) angular para ferrofluido en un cilindro hueco. En ambos casos la amplitud del campo magnético permanece constante a 5 mT y frecuencia de rotación del campo de 85 Hz.	39
4-3	Perfiles de velocidad a) lineal y b) angular para ferrofluido en el espacio anular de cilindros concéntricos. En ambos casos la amplitud del campo magnético permanece constante a 5 mT y frecuencia de rotación del campo de 85 Hz.	40
4-4	Perfiles de velocidad lineal para flujo en geometría cilíndrica con un valor de $\kappa = 100$. La Figura a) muestra el efecto de la frecuencia sobre el flujo para una amplitud constante del campo magnético de 12.3 mT. La Figura b) muestra el efecto de la amplitud del campo magnético sobre el flujo para una frecuencia de 85 Hz.	41
4-5	Perfiles de velocidad lineal para flujo en geometría cilíndrica para un valor de $\kappa = 100$. La Figura a) muestra el efecto de la frecuencia sobre el flujo para una amplitud constante del campo magnético de 12.3 mT. La Figura b) muestra el efecto de la amplitud del campo magnético sobre el flujo para una frecuencia de 85 Hz.	42
4-6	a) resultados experimentales de la dependencia del perfil de velocidad lineal con respecto a la frecuencia del campo magnético, con amplitud constante de 15.5 mT, para el caso anular; tomado de la referencia [22]. b) resultados experimentales de la dependencia del perfil de velocidad lineal con respecto a la amplitud del campo magnético con frecuencia constante de 85 Hz, para el caso cilíndrico; tomado de la referencia [20].	42

Lista de Tablas

3.1	Condiciones de frontera de la velocidad lineal y angular, para los dos casos de estudio: contenedor cilíndrico y anular.	26
3.2	Condiciones de frontera de la función potencial escalar, para los dos casos de estudio: contenedor cilíndrico y anular.	29
3.3	Discretización de las condiciones de frontera de la velocidad lineal y angular para los dos casos de estudio: contenedor cilíndrico y anular.	32
3.4	Propiedades físicas y magnéticas a temperatura ambiente para ferrofluidos en base queroseno EMG900-2.	34

RESUMEN

TÍTULO: *SOLUCIÓN NUMÉRICA PARA EL FLUJO DE FERROFLUIDO INDUCIDO POR UN CAMPO MAGNÉTICO ROTATIVO EN EL LÍMITE DE CERO AMPLITUD DEL CAMPO*¹

AUTOR: *VICTOR ALFONSO PEÑA CRUZ*²

PALABRAS CLAVE: Ferrofluido, campo magnetico rotante, ecuaciones ferrohídrodinámicas, diferencias finitas, solución asintótica.

Ferrofluidos son usados en la fabricación de sellos mecánicos para discos duros de computador y en otros dispositivos electrónicos, en sistemas para separación de materiales, en numerosas aplicaciones mecánicas, en generadores electromecánicos a escala nanométrica, aplicaciones en micro-actuadores, amortiguadores y acelerómetros, también se han desarrollado varias aplicaciones biomédicas. En este trabajo se reporta el análisis y solución numérica del conjunto de ecuaciones ferrohídrodinámicas para el flujo de ferrofluido inducido por un campo magnético rotando, en dos geometrías diferentes: *i*) en un contenedor cilíndrico y *ii*) en el espacio anular entre dos cilindros concéntricos. El modelo matemático para ambos problemas fue basado en la teoría de la difusión de momento angular interno (DMAI) de Zaitsev y Shliomis, se tuvieron en cuenta los términos que involucran los vectores de velocidad lineal y angular en la ecuación de magnetización; la solución numérica se realizó usando el método de diferencias finitas (FDM) de primer orden en el seno del fluido y de segundo orden en las condiciones de frontera, los algoritmos se implementaron usando el lenguaje de programación *Visual C++ 2008*, donde se diseñó un procedimiento iterativo que involucra la fuerza y el torque magnéticos. La solución numérica obtenida es válida para suspensiones coloidales infinitamente diluidas y para bajas frecuencias y amplitudes de campo magnético, los resultados numéricos fueron comparados con las soluciones asintóticas presentadas por Chaves *et al*, obteniéndose un porcentaje de error igual a 3.18 % pero con un excelente acuerdo cuantitativo. La solución para la geometría anular es la primera solución numérica que se reporta para este caso.

¹Tesis.

²Facultad de Ingenierías Físico Químicas. Escuela de Ingeniería Química. Director Arlex Chaves Guerrero. Codirector David Fuentes Diaz

ABSTRACT

TITLE: *NUMERICAL SOLUTION FOR THE FERROFLUID FLOW INDUCED BY A ROTATING MAGNETIC FIELD IN THE LIMIT OF ZERO AMPLITUDE FIELD*³

AUTHOR: *VICTOR ALFONSO PEÑA CRUZ*⁴

KEY WORDS: Ferrofluid, rotating magnetic field, ferrohydrodynamics equations, finite differences, asymptotic solution.

Ferrofluids are used in the manufacture of mechanical seals for computer hard drives and others electronic devices, systems of material separation, numerous mechanic applications, in electromagnetic nanoscale generators, applications in micro-pistons, shock absorber, acelerometers, and have also developed several biomedical applications. this paper reports an analysis and numerical solution of set of equations ferrohydrodynamics for a ferrofluid flow which is induced by rotating of an electromagnetic field in two different geometries: *i*) in a cylindrical container, and *ii*) in the annular space between two concentric cylinders. The mathematical model for both problems was based on the spin diffusion theory (DMAI), due to Zaitsev and Shliomis, then were taken intoaccount the terms which involve the lineal speed and angular speed vectors in the equation of magnetization, the numerical solution was performed using the finite difference method (FDM) first order within the fluid and second-order boundary conditions, the algorithms were implemented using the programming language *Visual C++ 2008* where design is an iterative procedure involving the magnetic force and torque. The numerical solution obtained can be used by infinitely dilute colloidal suspensions and low frequencies and amplitudes of magnetic field, the numerical results were compared with the asymptotic solutions presented by Chaves *et al*, obtaining an error rate equal to 3.18%, but with an excellent quantitative agreement. The solution for the annular geometry is the first numerical solution that is reported for this case.

³Thesis

⁴Faculty of physical Chemical Engineering. Chemical Engineering School. Director Arlex Chaves Guerrero. Codirector David Fuentes Diaz.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Ferrofluidos son suspensiones coloidales de nano partículas magnéticas de diámetro entre 10 a 15 nm en agua o en un hidrocarburo. Este tamaño hace que las partículas puedan ser consideradas como de un solo dominio el cual posee su respectivo momento magnético. Típicamente, estas nanopartículas (magnetita) están recubiertas de una capa de surfactante que previene que las partículas se adhieran unas a otras lo que puede llegar a desestabilizar el coloide [1]. En la actualidad estos ferrofluidos son usados en: la fabricación de sellos mecánicos usados en discos duros de computador y en otros dispositivos electrónicos, en sistemas para separación de materiales [2], en modelación y estudio de dinámica gravitacional en ambientes controlados [3], en la fabricación de generadores electromecánicos a escala nanométrica [4], aplicaciones mecánicas en micro-actuadores, amortiguadores y acelerómetros con fluidos magnéticos [5, 6] y también se han desarrollado numerosas aplicaciones biomédicas [7, 8]. Estos ferrofluidos se diferencian de fluidos tradicionales en que responden reológicamente a la presencia de un campo magnético externo ya sea estacionario, rotando o alternando. Como ejemplo de estos comportamientos la literatura menciona el incremento de la viscosidad del ferrofluido en presencia de campos magnéticos estacionarios, el decrecimiento de la viscosidad en CM rotando o alternando [9, 10] e incluso la generación de flujo como respuesta a un campo magnético rotativo siendo este el foco de atención de este trabajo. El flujo de un ferrofluido en un contenedor de geometría cilíndrica y generado por un campo magnético rotativo (*Spin Up Flow*) fue observado por primera vez en 1967 por Moskowitz y Rosensweig [11]. Posteriormente en 1969, *Zaitsev* y *Shliomis* [12] propusieron una teoría para explicar el mecanismo generador de flujo que asume

que este es producido por la difusión del momento angular interno (DMAI) de las partículas hacia la matriz del fluido con posterior conversión hacia movimiento macroscópico. Para entender más el fundamento de esta teoría, se debe tener en cuenta el carácter paramagnético de las nanopartículas que conforman el ferrofluido. Este comportamiento paramagnético de las partículas suspendidas en el líquido hace que estas tiendan a alinear su vector de momento magnético en la dirección del campo. Por lo tanto, cuando el campo magnético externo es desplazado de su posición original, se genera inmediatamente un torque ($\mu_o \mathbf{M} \times \mathbf{H}$) que tiende a alinear el momento magnético de la partícula en la dirección del campo magnético. Esta alineación puede llevarse a cabo por dos mecanismos diferentes: *i*) un mecanismo de relajación de *Néel* en el cuál el vector de momento magnético rota dentro de la partícula sin rotación de la misma en el líquido y *ii*) por medio del mecanismo de relajación *Browniano*, mediante el cual el vector de momento magnético se reacomoda por rotación de la partícula en el líquido [13, 14, 15] siendo este mecanismo de relajación importante en la generación del flujo. Se sabe que para partículas magnéticas con diámetros mayores de 10 nm el mecanismo de relajación es dominado por el mecanismo *Browniano*¹. Teniendo en cuenta este comportamiento paramagnético y un mecanismo de relajación Browniano, se espera que un campo magnético rotativo genere rotación de las partículas en la matriz del líquido. Esto tiene otra gran implicación: cuando el ferrofluido no está sometido a un campo magnético, las partículas giran a una velocidad angular (ω) igual a la mitad de la vorticidad local del fluido ($\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$). En este caso, el ferrofluido se comporta como un fluido Newtoniano caracterizado por un tensor de esfuerzos viscosos simétrico. No obstante, en presencia de un campo magnético rotando o alternando, las partículas tienen una velocidad angular diferente a la vorticidad del fluido generando esfuerzos antisimétricos dentro del líquido ($\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \omega$). Por tanto, es necesario tener en cuenta la ecuación de balance de momento angular interno, además del balance de momento lineal a la hora de describir el flujo de estos fluidos. La teoría de difusión del momento angular interno está basada en la presunción de que el momento angular interno de las partículas es difundido hacia la matriz del líquido generando pequeños micro vórtices y movimiento macroscópico del fluido [12, 16]. Sin embargo, ésta teoría se ha enfrentado con varios dilemas, como por ejem-

¹Expresiones para los tiempos de relajación *Browniano* (τ_B) y de *Néel* (τ_N) son presentadas en la referencia [1].

plo el hecho de que el parámetro fenomenológico que caracteriza la difusión del MAI conocido como "spin viscosity" ($\hat{\eta}$) no ha podido ser determinado ni experimental ni analíticamente. Más aún, muchos investigadores se han inclinado por tomar $\hat{\eta} = 0$ en sus análisis basados en argumentos dimensionales los cuales predicen su valor como despreciable. No obstante, estos análisis realizados con $\hat{\eta} = 0$, no predicen flujo, contradiciendo la evidencia experimental actual que ha probado la existencia de este al interior del fluido [17]. Por otro lado, no ha sido posible obtener una solución analítica del problema sin la presunción de campos bajos, debido al acoplamiento entre el problema magnético e hidrodinámico que ha sido resuelto asumiendo que la amplitud del campo magnético tiende a cero y despreciando los términos de la ecuación de magnetización que involucran los vectores de velocidad angular ($\boldsymbol{\omega}$) y lineal (\mathbf{v}) [18, 19]. Con el propósito de determinar soluciones analíticas del problema de flujo a amplitudes moderadas del campo magnético, Chaves *et al.* [20] usaron el método de perturbación regular con parámetro de perturbación $\varepsilon \equiv \frac{\mu_0 \chi K^2 \tau}{\zeta} = \frac{2}{3} \alpha^2$ para obtener expresiones para el perfil de velocidad. Sin embargo, solo se pudo obtener la solución de cero y primer orden alrededor del parámetro de perturbación ε para el flujo de ferrofluido en contenedor cilíndrico y cero orden para el caso de flujo del ferrofluido entre el espacio anular de cilindros coaxiales. No obstante a pesar de las limitaciones de la solución obtenida, estos resultados fueron usados para realizar una comparación cualitativa de las características principales del flujo medido experimentalmente y las predicciones de la teoría encontrándose buen acuerdo y además se obtuvo un valor estimado del orden de magnitud de $\hat{\eta}$.

Este proyecto tiene como objetivo obtener soluciones numéricas para dos diferentes casos: 1) el flujo de un ferrofluido en un contenedor cilíndrico y 2) el flujo de ferrofluido en el espacio anular entre dos cilindros concéntricos y verificar el efecto de los términos $\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{M})$ y $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ de la ecuación de magnetización sobre los perfiles de velocidad. En ambos casos se asume que el cilindro(s) son de longitud infinita. Soluciones numéricas de las ecuaciones ferrohídrodinámicas para el primer caso han sido reportadas en la literatura separadamente por Finlayson [21] y Elborai [2], quienes usaron el software de elementos finitos *COMSOL Multiphysics*®. No obstante, para el caso de cilindros concéntricos, no ha sido reportado aún análisis numéricos en la literatura.

Inicialmente éste trabajo se enfocó a dar la solución numérica del problema de flujo a altos

campos asumiendo una dependencia de los vectores de campo magnético y magnetización como las dadas en las *Ecms.* (2.2) a (2.5). No obstante, esta aproximación introduce un tercer armónico en la solución lo cual implica asumir una nueva forma de la solución, lo que resulto difícil a este nivel del proyecto. Por tal razón, se optó por obtener una solución en el límite de bajos campos para los dos casos antes mencionados, obteniéndose perfiles de velocidad angular y lineal similares a los reportados analíticamente por Chaves *et al.* [20, 22]. Además, para la solución del problema de flujo en el anulo, se consiguió tener en cuenta los términos que involucran velocidad angular y lineal, que no han sido considerados en las soluciones analíticas presentadas en la literatura.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se describen los dos problemas de flujo que se modelaron, las ecuaciones ferrohodinámicas necesarias para la descripción del flujo de ferrofluidos y además se hace una breve descripción del significado físico detrás de cada uno de los términos más relevantes de estas ecuaciones.

2.1 Análisis conceptual del flujo

Se debe tener en cuenta que estos análisis numéricos realizados para las dos geometrías de interés serán validados con las soluciones asintóticas obtenidas en las referencias [20, 22], por tal razón deben ser realizados bajo las mismas suposiciones hechas en dichos análisis. La solución numérica que se obtuvo contempla dos casos de estudio diferentes: *i*) el flujo de ferrofluido en un contenedor cilíndrico, y *ii*) el flujo generado en el espacio anular entre dos cilindros concéntricos. Ambas situaciones son esquematizadas en las Figura 2-1 *a*) y *b*) respectivamente. En ambas situaciones se asume que la columna de ferrofluido es lo suficientemente larga en la dirección axial de tal forma que los efectos de borde pueden ser considerados como despreciables. Al igual que para los resultados experimentales reportados en la literatura como para éste análisis, se asume que los cilindros son construidos de materiales no magnéticos y que el estator es envuelto en un material de permeabilidad magnética infinita ($\mu \rightarrow \infty$). En ambos casos, los recipientes cilíndricos con el ferrofluido son puestos en el centro de un estator de un motor eléctrico, el cual bajo la excitación de dos señales de corriente sinusoidales y desfasadas en 60° generan un

campo magnético rotativo.

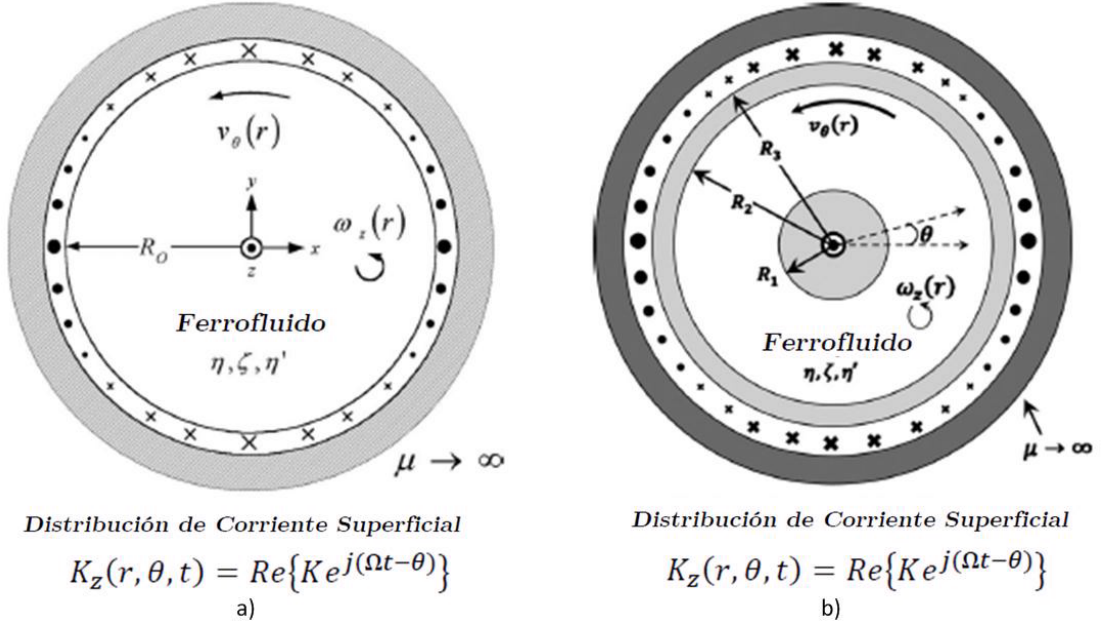


Figura 2-1: Las figuras muestran las dos geometrías bajo las cuales se modeló el flujo del ferrofluido. La Figura a) muestra el contenedor cilíndrico, con el ferrofluido ubicado en el espacio entre $0 < r < R_0$. La Figura b) muestra el caso del contenedor anular formado por dos cilindros coaxiales y el ferrofluido llenando el espacio entre $R_1 < r < R_2$. Para nuestro caso hemos asumido que $R_2 \rightarrow R_3$. En ambos casos, la componente θ de la velocidad lineal y la componente z de la velocidad angular fueron obtenidos. En ambas geometrías se asume que los cilindros son infinitamente largos. También se asume que la columna de ferrofluido está sometida a un campo magnético rotando perpendicularmente al eje del cilindro. El campo magnético es modelado como una distribución de corriente superficial en la dirección z , $\mathbf{K}(r, t, \theta) \mathbf{i}_z$. Figuras tomadas de referencias [17] y [20].

2.2 Ecuaciones ferrohodinámicas

Ferrohodinámica es la rama de la mecánica de fluidos que estudia el comportamiento de fluidos que son afectados por campos magnéticos externos, pero que no son conductores de electricidad y por lo tanto no hay flujos de corriente en el fluido, caso contrario a lo que sucede en la Magnetohodinámica [1]. El conjunto de ecuaciones ferrohodinámicas está constituido por la ecuación de continuidad para un fluido incompresible (Ecn. (2.1)), la ecuación de balance

de momento lineal (*Ecn.* (2.2)) y la ecuación de balance de momento angular interno (*Ecn.* (2.3)), estas ecuaciones describen el comportamiento hidrodinámico del fluido. Adicionalmente es necesario incluir para el problema magnético la ecuación de magnetización (*Ecn.* (2.4)) y las ecuaciones de Maxwell en el límite magneto-cuasiestático (*Ecn.* (2.5)), para fluidos no conductores [23, 1]. Cada una de estas ecuaciones con sus respectivas condiciones de frontera.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} - \nabla p - 2\zeta \nabla \times \left(\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right) + \eta \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (2.2)$$

$$\rho I \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H} + \eta' \nabla^2 \boldsymbol{\omega} - 2\zeta \left(\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{M}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} - \frac{1}{\tau} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_{eq}), \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{H}) = 0. \quad (2.5)$$

Las condiciones de frontera para el campo magnético son las siguientes:

$$\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{H} + \mathbf{M})_a - (\mathbf{H} + \mathbf{M})_b] = 0, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_b] = \mathbf{K}, \quad (2.7)$$

mientras que las condiciones de frontera para la velocidad traslacional son las típicas condiciones de no-deslizamiento y no penetración. Las condiciones de frontera para la *Ecn.* (2.3) serán usadas como en la referencia [20], no obstante ésta es una simplificación de una condición de frontera más general, como es discutido mas afondo en la misma referencia.

Descripción de los términos de las ecuaciones

Como fue mencionado en la introducción, cuando las partículas del ferrofluido experimentan torques magnéticos ($\mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H} \neq \mathbf{0}$) el tensor de esfuerzos viscosos posee una parte antisimétrica la cual es representada por el tercer término del lado derecho de la *Ecn.* (2.2). Este término es caracterizado por un coeficiente fenomenológico conocido como la viscosidad de vórtice (ζ)

y para el cual *Brenner* [24] obtuvo la siguiente expresión

$$\zeta = 1.5\phi_h\eta_0, \quad (2.8)$$

la cual es aplicable en el límite de dilución infinita. En esta expresión, ϕ_h es la fracción volumétrica hidrodinámica de las partículas en suspensión y η_0 es la viscosidad dinámica del fluido en el cual están suspendidas las partículas. En la misma ecuación, el término $\mu_0\mathbf{M} \cdot \nabla\mathbf{H}$ representa la fuerza magnética por unidad de volumen que actúa sobre el ferrofluido (fuerza de cuerpo similar a la fuerza ejercida por la gravedad sobre un fluido) debido a gradientes del campo magnético. En otras palabras es la forma como el campo magnético externo introduce momento lineal al fluido. Este tipo de fuerza es conocida con el nombre de *fuerza tipo Kelvin*. En *Ecn. (2.2)*, \mathbf{M} es el vector de magnetización del ferrofluido y \mathbf{H} es el vector del campo magnético. En la *Ecn. (2.3)*, I es el momento de inercia promedio de las partículas por unidad de masa. El primer término del lado derecho de la *Ecn. (2.3)* ($\mu_0\mathbf{M} \times \mathbf{H}$) representa el torque magnético por unidad de volumen generado por un campo externo sobre las partículas del fluido. De modo similar al caso de la *fuerzas tipo Kelvin*, la densidad de torque magnético puede ser mirado como el momento angular que es introducido en el ferrofluido por el campo magnético externo. El segundo término de la *Ecn. (2.3)* representa la difusión del momento angular interno. Este término es caracterizado por el coeficiente fenomenológico de spin viscosity η' , el cual ya fue tratado en la introducción de este documento. La *Ecn. (2.4)*, se conoce con el nombre de Ecuación de Relajación de Magnetización de Shliomis [25] y tiene en cuenta la alineación local de las partículas por efecto del campo magnético. En la *Ecn. (2.4)*, el primer término del lado derecho representa el efecto de la rotación de las partículas sobre el proceso de magnetización del ferrofluido, es decir la rotación de las partículas cambia el vector de magnetización del ferrofluido por un ángulo igual a la cantidad $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ en una unidad de tiempo. El segundo término muestra que la razón de cambio de la magnetización es proporcional a la diferencia entre el vector de magnetización y su valor de equilibrio (\mathbf{M}_{eq}). En esta ecuación, τ es el tiempo de relajación efectivo de las partículas [17]. Una expresión para la magnetización

de equilibrio es dada por la ecuación de *Langevin*

$$\frac{\mathbf{M}_{eq}}{\phi M_d} = L(\alpha) \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|} = \left[\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right] \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}, \alpha = \frac{\mu_0 M_d H V_c}{k_B T} \quad (2.9)$$

donde α es conocido como el parámetro de *Langevin* y representa la relación entre fuerzas magnéticas y Brownianas que impiden o favorecen la alineación del momento magnético de las partículas en la dirección del campo. Finalmente, tenemos las ecuaciones de Maxwell en el límite magnetocuasiestático, (*Ecn.* (2.5)) que completan el conjunto de ecuaciones ferrohídrodinámicas.

Capítulo 3

METODOLOGÍA

En este capítulo se obtiene los modelos matemáticos usados para obtener las soluciones numéricas y la estrategia de cálculo empleada en la resolución del sistema.

3.1 Etapas del proyecto

1. Se realizó una revisión bibliográfica sobre los análisis teóricos para el flujo de ferrofluidos en las geometrías de interés.
2. Modelo matemático
 - (a) Se adimensionalizaron las ecuaciones ferrohodinámicas usando las variables adimensionales obtenidas de la referencia [20].
 - (b) Las ecuaciones ferrohodinámicas fueron escritas por componentes asumiendo que $\mathbf{v} = v_\theta(r) \mathbf{i}_\theta$, $\omega = \omega_z(r) \mathbf{i}_z$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(r, \theta, t)$ y $\mathbf{M} = \mathbf{M}(r, \theta, t)$.
 - (c) Se asumió que las soluciones para \mathbf{H} y \mathbf{M} tienen una forma funcional similar a la dada por la Ecn. (3.13).
3. Solución numérica
 - (a) Se discretizaron las ecuaciones utilizando el método de diferencias finitas.
 - (b) Se plateó una estrategia para desarrollar los algoritmos que condujeron a la solución numérica.

4. Se presentaron y analizaron los resultados obtenidos haciendo comparaciones con resultados analíticos reportados en las referencias [22, 26, 20].

3.2 Modelo matemático

Para el desarrollo del modelo matemático se utilizó la metodología empleada por Elborai [2] la cual incluye la función potencial magnético escalar con el objetivo de reducir el problema magnético de cuatro variables independientes (M_θ , M_r , H_r , H_θ) a una variable dependiente, el potencial magnético escalar, reduciendo la complejidad para la programación del código.

3.2.1 Adimensionalización de las ecuaciones

En la solución de ambos problemas se despreciaron los efectos inerciales en la ecuación de balance de momento lineal y angular ya que estos son flujos de bajo número de Reynolds y el momento de inercia de las partículas I por unidad de masa es despreciable. Adicionalmente, no existe un gradiente de presión en la dirección θ , solo existe un gradiente de presión en dirección radial que tiene como objeto balancear la fuerza centrípeta generada por la geometría curvilínea de ambos problemas.

Las *Ecns.* (2.1) a (2.5) fueron hechas adimensionales y de “orden uno” introduciendo las siguientes escalas de longitud y tiempo para el problema hidrodinámico y magnético obtenidas en la referencia [20],

$$\tilde{\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{M}}{\chi K}; \quad \tilde{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{H}}{K}; \quad \tilde{\nabla} = R_o \nabla; \quad \tilde{r} = \frac{r}{R_o}; \quad \tilde{t} = \Omega_f t; \quad (3.1)$$

$$\tilde{p} = \frac{\zeta p}{\mu_o \eta \chi K^2 \tilde{\Omega}_f}; \quad \tilde{\omega} = \frac{\zeta \omega}{\mu_o \chi K^2 \tilde{\Omega}_f}; \quad \tilde{\mathbf{v}} = \frac{\zeta \mathbf{v}}{\mu_o \chi K^2 \tilde{\Omega}_f R_o}. \quad (3.2)$$

En estas ecuaciones el símbolo “-” sobre una variable significa que es adimensional. En las *Ecns.* (3.1) y (3.2) χ es la susceptibilidad magnética inicial del ferrofluido, K es la amplitud del campo magnético, R_o es el radio del cilindro y Ω_f es la frecuencia de rotación del campo, en *radianes/s.* Usando las *Ecns.* (3.1) y (3.2) en las *Ecns.* (2.2) a (2.5) y despreciando efectos

inerciales se obtiene:

$$\mathbf{0} = \frac{\zeta}{\eta\tilde{\Omega}_f} \tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}} - \tilde{\nabla} \tilde{p} + 2 \frac{\zeta}{\eta} \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{\eta_e}{\eta} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{0} = \frac{1}{\tilde{\Omega}_f} \tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}} + 2 \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} - 4 \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad (3.4)$$

$$\tilde{\Omega}_f \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\Omega}_f \varepsilon \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\Omega}_f \varepsilon \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{M}} - \tilde{\mathbf{M}} + \frac{\mathbf{M}_{eq}}{\chi_i K}, \quad (3.5)$$

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0}, \quad (3.6)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot (\chi_i \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{H}}) = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

En las *Ecns.* (3.3) a (3.7), se definió el parámetro dimensional η_e y el adimensional κ como se muestran en las ecuaciones (3.8).

$$\eta_e \equiv \eta + \zeta, \quad \kappa^2 \equiv \frac{4\eta R_O^2 \zeta}{\eta_e \eta'}. \quad (3.8)$$

3.2.2 Problema hidrodinámico

Como ya fue mencionado anteriormente, se asume que los vectores de velocidad lineal y angular están dados por: $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{v}_\theta(\tilde{r}) \mathbf{i}_\theta$ y $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\omega}_z(\tilde{r}) \mathbf{i}_z$, por lo que las ecuaciones de balance de momento lineal y momento angular interno para dichas componentes son:

$$0 = \frac{\zeta}{\eta\tilde{\Omega}_f} \langle f_\theta \rangle_t - 2 \frac{\zeta}{\eta} \frac{d\tilde{\omega}_z}{d\tilde{r}} + \frac{\eta_e}{\eta} \left[\frac{d^2 \tilde{v}_\theta}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d\tilde{v}_\theta}{d\tilde{r}} - \frac{\tilde{v}_\theta}{\tilde{r}^2} \right], \quad (3.9)$$

$$0 = \frac{1}{\tilde{\Omega}_f} \langle l_z \rangle_t + 2 \left(\frac{\tilde{v}_\theta}{\tilde{r}} + \frac{d\tilde{v}_\theta}{d\tilde{r}} \right) - 4\tilde{\omega}_z + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \left(\frac{d^2 \tilde{\omega}_z}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d\tilde{\omega}_z}{d\tilde{r}} \right). \quad (3.10)$$

Las ecuaciones (3.9) y (3.10) están sujetas a las condiciones de frontera que se muestran en la Tabla 3.1 para ambas geometrías. La condición de frontera en $\tilde{r} = 0$ es válida ya que existe simetría axial.

Frontera	Contenedor Cilíndrico	Contenedor Anular
$\tilde{r} = 0$	$\frac{d\tilde{\omega}_z}{d\tilde{r}} = 0, \quad \frac{d\tilde{v}_\theta}{d\tilde{r}} = 0.$	<i>no aplica</i>
$\tilde{r} = 1$	$\tilde{\omega}_z = 0, \quad \tilde{v}_\theta = 0.$	$\tilde{\omega}_z = 0, \quad \tilde{v}_\theta = 0.$
$\tilde{r} = \frac{R_1}{R_0} = \gamma$	<i>no aplica</i>	$\tilde{\omega}_z = 0, \quad \tilde{v}_\theta = 0.$

Tabla 3.1: Condiciones de frontera de la velocidad lineal y angular, para los dos casos de estudio: contenedor cilíndrico y anular.

3.2.3 Problema magnético

A diferencia de $\tilde{\mathbf{v}}$ y $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$, los vectores de campo magnético y magnetización son funciones dependientes del tiempo (t), el ángulo acimutal (θ) y el radio (r), por lo que la ecuación de magnetización (3.5) escrita por componentes es:

$$\tilde{\Omega}_f \frac{\partial \tilde{M}_r}{\partial t} + \tilde{\Omega}_f \varepsilon \tilde{v}_\theta \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{M}_r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{M}_\theta}{\tilde{r}} \right) = -\tilde{\Omega}_f \varepsilon \tilde{\omega}_z \tilde{M}_\theta - \tilde{M}_r + \tilde{H}_r, \quad (3.11)$$

$$\tilde{\Omega}_f \frac{\partial \tilde{M}_\theta}{\partial t} + \tilde{\Omega}_f \varepsilon \tilde{v}_\theta \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{M}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tilde{M}_r}{\tilde{r}} \right) = \tilde{\Omega}_f \varepsilon \tilde{\omega}_z \tilde{M}_r - \tilde{M}_\theta + \tilde{H}_\theta. \quad (3.12)$$

En las *Ecns.* (3.11) y (3.12) fue usada la aproximación $\mathbf{M}_{eq} \approx \chi_i \mathbf{H}$ [26], de tal forma que ésta solución numérica es *válida sólo para amplitudes del campo magnético que tienden a cero.*

Un campo magnético rotativo se puede idealizar como una distribución de corriente superficial viajando a través del embobinado de un estator, el cual es típicamente modelado usando una distribución de corriente superficial dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{K}(r, t, \theta) = \text{Re} \left\{ K e^{j(\Omega t - \theta)} \right\}. \quad (3.13)$$

Por tal razón, en la literatura se suele suponer una dependencia funcional para los vectores $\tilde{\mathbf{H}}$,

$\tilde{\mathbf{M}}$ y para el potencial escalar $\tilde{\Psi}(\tilde{r}, \theta, \tilde{t})$ similar a la de la *Ecns.* (3.13)

$$\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}) = \text{Re} \left\{ \left[\tilde{h}_r(\tilde{r})\mathbf{i}_r + \tilde{h}_\theta(\tilde{r})\mathbf{i}_\theta \right] e^{j(\tilde{t}-\theta)} \right\}, \quad (3.14)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}) = \text{Re} \left\{ [\tilde{m}_r(\tilde{r})\mathbf{i}_r + \tilde{m}_\theta(\tilde{r})\mathbf{i}_\theta] e^{j(\tilde{t}-\theta)} \right\}, \quad (3.15)$$

$$\tilde{\Psi}(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}) = \text{Re} \left\{ \tilde{\psi}(\tilde{r})e^{j(\tilde{t}-\theta)} \right\}. \quad (3.16)$$

En este caso $\tilde{h}_r, \tilde{h}_\theta, \tilde{m}_r, \tilde{m}_\theta$ son las componentes *complejas* adimensionales de los vectores del campo magnético y la magnetización respectivamente. En las ecuaciones anteriores, Re hace referencia a que $\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}), \tilde{\mathbf{M}}(\tilde{r}, \theta, \tilde{t})$ y $\tilde{\Psi}(\tilde{r}, \theta, \tilde{t})$ son la parte real de las funciones complejas contenidas en los corchetes y j es el número imaginario definido como $j \equiv \sqrt{-1}$. Usando las *Ecns.* (3.14) y (3.15) en las *Ecns.* (3.11) y (3.12), se obtiene el siguiente sistema algebraico para \tilde{m}_r y \tilde{m}_θ

$$\left(1 + j\Omega - \frac{\varepsilon\tilde{\Omega}_f j\tilde{v}_\theta}{\tilde{r}} \right) \tilde{m}_r + \left(\varepsilon\tilde{\Omega}_f\tilde{\omega}_z - \frac{\varepsilon\tilde{\Omega}_f\tilde{v}_\theta}{\tilde{r}} \right) \tilde{m}_\theta - \tilde{h}_r = 0, \quad (3.17)$$

$$\left(1 + j\tilde{\Omega}_f - \frac{\varepsilon\tilde{\Omega}_f j\tilde{v}_\theta}{\tilde{r}} \right) \tilde{m}_\theta - \left(\varepsilon\tilde{\Omega}_f\tilde{\omega}_z - \frac{\varepsilon\tilde{\Omega}_f\tilde{v}_\theta}{\tilde{r}} \right) \tilde{m}_r - \tilde{h}_\theta = 0. \quad (3.18)$$

Como se puede ver en este caso la dependencia del tiempo ya no es explícita lo que facilita la solución del problema caso contrario cuando se usa la *Ecns.* 2.9 para la \mathbf{M}_{eq} . Con el fin de abreviar las *Ecns.* (3.17) y (3.18) se definieron las funciones $\alpha(\tilde{r})$ y $\beta(\tilde{r})$ como sigue:

$$\alpha(\tilde{r}) \equiv 1 - \frac{\varepsilon\tilde{v}_\theta(\tilde{r})}{\tilde{r}}, \quad (3.19)$$

$$\beta(\tilde{r}) \equiv \tilde{\omega}_z(\tilde{r}) - \frac{\tilde{v}_\theta(\tilde{r})}{\tilde{r}}. \quad (3.20)$$

Resolviendo el sistema algebraico de las *Ecns.* (3.17) y (3.18) para $\tilde{m}_r(\tilde{r})$ y $\tilde{m}_\theta(\tilde{r})$, se obtienen expresiones explícitas para las componentes complejas de la magnetización

$$\tilde{m}_r(\tilde{r}) = \frac{\tilde{h}_r + j\tilde{\Omega}_f\tilde{h}_r\alpha - \varepsilon\tilde{\Omega}_f\tilde{h}_\theta\beta}{-[-j + \tilde{\Omega}_f\alpha]^2 + \varepsilon^2\tilde{\Omega}_f^2\beta^2}, \quad (3.21)$$

$$\tilde{m}_\theta(\tilde{r}) = \frac{\tilde{h}_\theta + j\tilde{\Omega}_f\tilde{h}_\theta\alpha + \varepsilon\tilde{\Omega}_f\tilde{h}_r\beta}{-[-j + \tilde{\Omega}_f\alpha]^2 + \varepsilon^2\tilde{\Omega}_f^2\beta^2}. \quad (3.22)$$

A diferencia de los trabajos que se tomaron como referencia, aquí se usa la función potencial magnética escalar. Se sabe que cualquier campo vector irrotacional puede ser escrito como el gradiente de una función potencial escalar. Usando este hecho se puede reescribir el vector de campo magnético [21, 2] como:

$$\mathbf{H} = -\nabla\Psi \quad (3.23)$$

cuyas componentes estarían dadas por:

$$\tilde{H}_r = -\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\tilde{r}}, \quad (3.24)$$

$$\tilde{H}_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\theta}. \quad (3.25)$$

En estas ecuaciones se usó como variable adimensional $\tilde{\Psi} \equiv \frac{\Psi}{R_0K}$. Adicionalmente, se pueden obtener las componentes complejas del vector de campo magnético en términos de la función potencial escalar compleja usando las *Ecns.* (3.14), (3.16), (3.24) y (3.25)

$$\tilde{h}_r(\tilde{r}) = -\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}, \quad (3.26)$$

$$\tilde{h}_\theta(\tilde{r}) = \frac{j\tilde{\psi}}{\tilde{r}}, \quad (3.27)$$

e igualmente se pueden reescribir las *Ecns.* (3.21) y (3.22) en función de $\tilde{\psi}$

$$\tilde{m}_r(\tilde{r}) = \frac{j\varepsilon\tilde{\Omega}_f\beta\tilde{\psi} + \tilde{r}\left[1 + j\tilde{\Omega}_f\alpha\right]\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}}{\tilde{r}\left\{\left[-j + \tilde{\Omega}_f\alpha\right]^2 - \varepsilon^2\tilde{\Omega}_f^2\beta^2\right\}}, \quad (3.28)$$

$$\tilde{m}_\theta(\tilde{r}) = \frac{-\left[j - \tilde{\Omega}_f\alpha\right]\tilde{\psi} + \tilde{r}\varepsilon\tilde{\Omega}_f\beta\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}}{\tilde{r}\left\{\left[-j + \tilde{\Omega}_f\alpha\right]^2 - \varepsilon^2\tilde{\Omega}_f^2\beta^2\right\}}. \quad (3.29)$$

Ahora se muestra el procedimiento para reescribir la *Ecn.* (3.7) en términos de la función potencial escalar. Usando la *Ecn.* (3.23) en la *Ecn.* (3.7) se obtiene:

$$\nabla\cdot\left(-\nabla\tilde{\Psi}\right) = -\nabla\cdot\tilde{\mathbf{M}}_o \nabla^2\tilde{\Psi} = \chi\nabla\cdot\tilde{\mathbf{M}} \quad (3.30)$$

y que en forma explícita es:

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(r \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \theta^2} = \chi_i \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial (\tilde{r} \tilde{M}_r)}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{M}_\theta}{\partial \theta} \right]. \quad (3.31)$$

Nótese que la expresión (3.30) toma la forma de la ecuación de Poisson. Usando *Ecn.* (3.15) y (3.16) en la *Ecn.* (3.31), y teniendo en cuenta las *Ecn.*(3.28) y (3.29) se obtiene la *Ecn.* (3.7) en términos de la función potencial escalar compleja

$$\tilde{\psi}'' + \frac{\tilde{\psi}'(\tilde{r})}{\tilde{r}} - \frac{\tilde{\psi}(\tilde{r})}{\tilde{r}^2} = \frac{\chi \tilde{m}_r}{\tilde{r}} - \frac{j \chi \tilde{m}_\theta}{\tilde{r}} + \chi \tilde{m}'_r \quad (3.32)$$

donde los superíndices “ ’ ” “ ” ” significan las derivadas de primero y segundo orden de la respectiva función. En *Ecn.* (3.32) el último término esta dado por

$$\begin{aligned} \chi \tilde{m}'_r(\tilde{r}) = & \frac{-j \chi}{\left[\tilde{r} \left(-j + \tilde{\Omega}_f \alpha \right)^2 - \tilde{r} \varepsilon^2 \tilde{\Omega}_f^2 \beta^2 \right]^2} \left\{ \varepsilon^3 \tilde{\Omega}_f^3 \beta^3 \left[-\tilde{\psi} + \tilde{r} \tilde{\psi}' \right] + \varepsilon \tilde{\Omega}_f \left[-j + \right. \right. \\ & \tilde{\Omega}_f \alpha \left. \right] \beta \left[\tilde{\psi} \left[-j + \tilde{\Omega}_f \alpha + 2 \tilde{r} \tilde{\Omega}_f \alpha' \right] - \tilde{r} \left(-j + \tilde{\Omega}_f \alpha + 2 \tilde{r} \varepsilon \tilde{\Omega}_f \beta' \right) \tilde{\psi}' \right] - \\ & \tilde{r} \left[-j + \tilde{\Omega}_f \alpha \right]^2 \left[\varepsilon \tilde{\Omega}_f \tilde{\psi} \beta' - \tilde{r} \tilde{\Omega}_f \alpha' \tilde{\psi}' + \tilde{r} \left(-j + \tilde{\Omega}_f \alpha \right) \tilde{\psi}'' \right] + \tilde{r} \varepsilon^2 \tilde{\Omega}_f^2 \beta^2 \times \\ & \left. \left[-\varepsilon \tilde{\Omega}_f \tilde{\psi} \beta' + \tilde{r} \tilde{\Omega}_f \alpha' \tilde{\psi}' + \tilde{r} \left(-j + \tilde{\Omega}_f \alpha \right) \tilde{\psi}'' \right] \right\} \quad (3.33) \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera para la ecuación diferencial (3.32) son dadas en la Tabla 3.2:

Frontera	Contenedor Cilíndrico	Contenedor Anular
$\tilde{r} = 0$	$\tilde{\psi}'(\tilde{r}) = 0$	<i>No aplica</i>
$\tilde{r} = 1$	$\tilde{\psi}(\tilde{r}) = j$	$\tilde{\psi}(\tilde{r}) = j$
$\tilde{r} = \frac{R_1}{R_0} = \gamma$	<i>No aplica</i>	$\tilde{\psi}(\gamma) = \gamma \left\{ -\tilde{\psi}'(\tilde{r}) + \chi \tilde{m}_r(\tilde{r}) \right\}$

Tabla 3.2: Condiciones de frontera de la función potencial escalar, para los dos casos de estudio: contenedor cilíndrico y anular.

Donde para determinar la condición de frontera en $\tilde{r} = \gamma$, se tuvo en cuenta que dentro

del cilindro interior sólido existe un campo magnético uniforme cuya expresión también fue determinada.

3.2.4 Densidad de fuerza y torque magnéticos

Con el fin de completar las *Ecns.* (3.3) y (3.4), resta determinar las expresiones para las densidades de fuerza ($\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}}$) y torque ($\tilde{\mathbf{l}} = \tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}}$) magnéticos. Bajo las suposiciones hechas en la sección 3.1, es fácil comprobar que sólo existen las componente axial de la densidad torque magnético [26] y las componentes acimutal y radial de la densidad de fuerza magnética (f_θ, f_r). No obstante, la componente radial de la densidad de fuerza magnética no contribuye al flujo y por tanto no será determinada. Las expresiones para las densidades de torque magnético y fuerza magnética respectivamente son:

$$l_z = \tilde{M}_r \tilde{H}_\theta - \tilde{M}_\theta \tilde{H}_r, \quad (3.34)$$

$$f_\theta = \tilde{M}_r \frac{\partial \tilde{H}_\theta}{\partial \tilde{r}} + \tilde{M}_\theta \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{H}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tilde{H}_r}{\tilde{r}} \right). \quad (3.35)$$

No obstante, con el fin de usar estas expresiones en las ecuaciones de balance de momento lineal y angular se usaron sus respectivos promedios en el tiempo $\langle l_z \rangle_t$ y $\langle f_\theta \rangle_t$. Las cuales para funciones complejas están dadas por [27]:

$$\langle l_z \rangle_t = \frac{1}{4} \left[\left(\tilde{m}_r^* \tilde{h}_\theta + \tilde{m}_r \tilde{h}_\theta^* \right) - \left(\tilde{m}_\theta^* \tilde{h}_r + \tilde{m}_\theta \tilde{h}_r^* \right) \right]. \quad (3.36)$$

$$\langle f_\theta \rangle_t = \frac{1}{4} \left[\tilde{m}_r^* \frac{\partial \tilde{h}_\theta}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{m}_\theta^*}{\tilde{r}} \left(\tilde{h}_r - j \tilde{h}_\theta \right) \right] + \frac{1}{4} \left[\tilde{m}_r \frac{\partial \tilde{h}_\theta^*}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{m}_\theta}{\tilde{r}} \left(\tilde{h}_r - j \tilde{h}_\theta \right)^* \right] \quad (3.37)$$

Usando las *Ecns.* (3.28), (3.29) (3.26) y (3.29) en las *Ecns.* (3.34) y (3.35) se obtienen las respectivas expresiones para densidad de torque magnético y fuerza magnética, en términos de

la función potencial escalar compleja:

$$\langle l_z \rangle_t = \frac{\tilde{\Omega}_f}{2 \left\{ \tilde{\Omega}_f^4 \alpha^4 + \left(1 + \varepsilon^2 \tilde{\Omega}_f^2 \beta^2 \right)^2 + 2\alpha^2 \tilde{\Omega}_f^2 \left(1 - \varepsilon^2 \tilde{\Omega}_f^2 \beta^2 \right) \right\}} \times \\ \left\{ \varepsilon \beta \left(\left| \tilde{h}_r \right|^2 + \left| \tilde{h}_\theta \right|^2 \right) \left[\tilde{\Omega}_f^2 \left(\alpha^2 - \varepsilon^2 \beta^2 \right) - 1 \right] - j \tilde{h}_\theta^* \tilde{h}_r \alpha \times \right. \\ \left. \left[1 + \tilde{\Omega}_f^2 \left(\alpha^2 - \varepsilon^2 \beta^2 \right) \right] + j \tilde{h}_r^* \tilde{h}_\theta \alpha \left[1 + \tilde{\Omega}_f^2 \left(\alpha^2 - \varepsilon^2 \beta^2 \right) \right] \right\} \quad (3.38)$$

$$\langle f_\theta \rangle_t = \frac{\tilde{\Omega}_f \left(\alpha + \varepsilon \beta \right) \left[\left| \tilde{\psi} \right|^2 + \tilde{r} \left(\tilde{r} \left| \tilde{\psi}' \right|^2 - \tilde{\psi}'^* \tilde{\psi} - \tilde{\psi}' \tilde{\psi}^* \right) \right]}{2\tilde{r}^3 \left[\tilde{\Omega}_f^2 \left(\alpha + \varepsilon \beta \right)^2 + 1 \right]}, \quad (3.39)$$

En estas ecuaciones el superíndice (*) indica el conjugado de la respectiva función. Del mismo modo, la *Ecn* (3.37) puede ser escrita en función del potencial magnético complejo escalar, para la ecuación anterior se ha definido \tilde{h}_θ^* y \tilde{h}_r^* como los conjugados de las componentes del campo magnético $\tilde{h}_\theta(\tilde{r})$ y $\tilde{h}_r(\tilde{r})$ respectivamente. Estas componentes son dadas por las ecuaciones (3.26) y (3.27).

3.3 Discretización de las ecuaciones ferrohodinámicas

3.3.1 Problema hidrodinámico

La solución numérica se realizó usando el método de diferencias finitas. En la discretización se usaron diferencias finitas de primer orden con excepción, de las condiciones de frontera en las que se usaron de segundo orden [28]. La forma discretizada de las *Ecns*. (3.9) y (3.10) es:

$$0 = \frac{\zeta}{\eta \tilde{\Omega}_f} \left(\langle f_\theta \rangle_t \right)_i - 2 \frac{\zeta}{\eta} \frac{\tilde{\omega}_{i+1} - \tilde{\omega}_{i-1}}{2(\Delta r)} + \frac{\eta_e}{\eta} \left(\frac{\tilde{v}_{i-1} - 2\tilde{v}_i + \tilde{v}_{i+1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{\tilde{r}_i} \frac{\tilde{v}_{i+1} - \tilde{v}_{i-1}}{2\Delta r} - \frac{\tilde{v}_i}{\tilde{r}_i^2} \right), \quad (3.40)$$

$$0 = \frac{1}{\tilde{\Omega}_f} \left(\langle l_z \rangle_t \right)_i + 2 \left(\frac{\tilde{v}_i}{\tilde{r}_i} + \frac{\tilde{v}_{i+1} - \tilde{v}_{i-1}}{2(\Delta r)} \right) - 4\tilde{\omega}_i + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \left(\frac{\tilde{\omega}_{i-1} - 2\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_{i+1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{\tilde{r}_i} \frac{\tilde{\omega}_{i+1} - \tilde{\omega}_{i-1}}{2(\Delta r)} \right). \quad (3.41)$$

En estas ecuaciones se definió $\tilde{v}_\theta(\tilde{r}) \equiv \tilde{v}$, $\tilde{\omega}_z(\tilde{r}) \equiv \tilde{\omega}$ y $\tilde{\psi}(\tilde{r}) \equiv \tilde{\psi}$, con el fin de abreviar la notación de las ecuaciones. Adicionalmente, el subíndice i indica un nodo particular de la partición y n representa el número de particiones tomadas en dirección radial. Así mismo, las

condiciones de frontera discretizadas son presentadas en la siguiente tabla:

Frontera	Contenedor Cilíndrico	Contenedor Anular
$\tilde{r}_{i=0} = 0$	$-3\tilde{v}_i + 4\tilde{v}_{i+1} - \tilde{v}_{i+2} = 0,$ $-3\tilde{\omega}_i + 4\tilde{\omega}_{i+1} - \tilde{\omega}_{i+2} = 0.$	<i>no aplica</i>
$\tilde{r}_{i=n+1} = 1$	$\tilde{\omega}_{n+1} = 0, \quad \tilde{v}_{n+1} = 0.$	$\tilde{\omega}_{n+1} = 0, \quad \tilde{v}_{n+1} = 0.$
$\tilde{r}_{i=0} = \frac{R_1}{R_0} = \gamma$	<i>no aplica</i>	$\tilde{\omega}_{i=0} = 0, \quad \tilde{v}_{i=0} = 0.$

Tabla 3.3: Discretización de las condiciones de frontera de la velocidad lineal y angular para los dos casos de estudio: contenedor cilíndrico y anular.

3.3.2 Discretización del problema electrodinámico:

Este problema está definido mediante las *Ecns.* (3.32), (3.28), (3.29), (3.33) y las expresiones para la densidad de fuerza y torque magnético; luego del procedimiento de discretización se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\chi \tilde{m}_r(\tilde{r})_i}{\tilde{r}_i} - \frac{j\chi \tilde{m}_\theta(\tilde{r})_i}{\tilde{r}_i} + \chi \tilde{m}'_r(\tilde{r})_i = \frac{\tilde{\psi}_{i-1} - 2\tilde{\psi}_i + \tilde{\psi}_{i+1}}{(\Delta\tilde{r})^2} + \frac{1}{\tilde{r}_i} \frac{\tilde{\psi}_{i+1} - \tilde{\psi}_{i-1}}{2(\Delta\tilde{r})} - \frac{\tilde{\psi}_i}{\tilde{r}_i^2}. \quad (3.42)$$

La ecuación (3.42) está sujeta a las condiciones de frontera de la tabla 3.2, además $\tilde{m}_r(\tilde{r})_i$, $\tilde{m}_\theta(\tilde{r})_i$ y $\chi \tilde{m}'_r(\tilde{r})_i$ son:

$$\tilde{m}_r(\tilde{r})_i = \frac{j\varepsilon\tilde{\Omega}_f\beta_i\tilde{\psi}_i + \tilde{r} \left[1 + j\tilde{\Omega}_f\alpha_i \right] \left(\frac{\tilde{\psi}_{i+1} - \tilde{\psi}_{i-1}}{2(\Delta\tilde{r})} \right)}{\tilde{r} \left\{ \left[-j + \tilde{\Omega}_f\alpha_i \right]^2 - \varepsilon^2\tilde{\Omega}_f^2\beta_i^2 \right\}}, \quad (3.43)$$

$$\tilde{m}_\theta(\tilde{r})_i = \frac{- \left[j - \tilde{\Omega}_f\alpha_i \right] \tilde{\psi}_i + \tilde{r}\varepsilon\tilde{\Omega}_f\beta_i \left(\frac{\tilde{\psi}_{i+1} - \tilde{\psi}_{i-1}}{2(\Delta\tilde{r})} \right)}{\tilde{r} \left\{ \left[-j + \tilde{\Omega}_f\alpha_i \right]^2 - \varepsilon^2\tilde{\Omega}_f^2\beta_i^2 \right\}}. \quad (3.44)$$

Donde el último término de la *Ecn.* (3.42) fue determinado como

$$\begin{aligned}
\chi \tilde{m}'_r(\tilde{r})_i = & \frac{-j\chi}{\left[\tilde{r} \left(-j + \tilde{\Omega}_f \alpha_i \right)^2 - \tilde{r} \varepsilon^2 \tilde{\Omega}_f^2 \beta_i^2 \right]^2} \left\{ \varepsilon^3 \tilde{\Omega}_f^3 \beta_i^3 \left(-\tilde{\psi}_i + \tilde{r} \frac{\tilde{\psi}_{i+1} - \tilde{\psi}_{i-1}}{2(\Delta\tilde{r})} \right) + \varepsilon \tilde{\Omega}_f^* \right. \\
& \left. \left(-j + \tilde{\Omega}_f \alpha_i \right) \beta_i \left[\tilde{\psi}_i \left(-j + \tilde{\Omega}_f \alpha_i + 2\tilde{r} \tilde{\Omega}_f \alpha'_i \right) - \tilde{r} - j + \tilde{\Omega}_f \alpha_i + 2\tilde{r} \varepsilon \tilde{\Omega}_f \beta'_i \frac{\tilde{\psi}_{i+1} - \tilde{\psi}_{i-1}}{2(\Delta\tilde{r})} \right] - \right. \\
& \tilde{r} \left(-j + \tilde{\Omega}_f \alpha_i \right)^2 \left[\varepsilon \tilde{\Omega}_f \tilde{\psi}_i \beta'_i - \tilde{r} \tilde{\Omega}_f \alpha'_i \frac{\tilde{\psi}_{i+1} - \tilde{\psi}_{i-1}}{2(\Delta\tilde{r})} + \tilde{r} \left(-j + \tilde{\Omega}_f \alpha_i \right) \frac{\tilde{\psi}_{i-1} - 2\tilde{\psi}_i + \tilde{\psi}_{i+1}}{(\Delta\tilde{r})^2} \right] + \\
& \left. \tilde{r} \varepsilon^2 \tilde{\Omega}_f^2 \beta_i^2 \left[-\varepsilon \tilde{\Omega}_f \tilde{\psi}_i \beta'_i + \tilde{r} \tilde{\Omega}_f \alpha'_i \frac{\tilde{\psi}_{i+1} - \tilde{\psi}_{i-1}}{2(\Delta\tilde{r})} + \tilde{r} \left(-j + \tilde{\Omega}_f \alpha_i \right) \frac{\tilde{\psi}_{i-1} - 2\tilde{\psi}_i + \tilde{\psi}_{i+1}}{(\Delta\tilde{r})^2} \right] \right\}. \quad (3.45)
\end{aligned}$$

Así mismos en las *Ecns.* (3.43), (3.44) y (3.45), las funciones $\alpha(\tilde{r})$, $\beta(\tilde{r})$, $\alpha'(\tilde{r})$, y $\beta'(\tilde{r})$ se han discretizado de la siguiente forma

$$\alpha_i = 1 - \frac{\varepsilon \tilde{v}_i}{\tilde{r}_i}; \quad \alpha'_i = \frac{\tilde{v}_i}{\tilde{r}_i^2} - \frac{1}{\tilde{r}_i} \frac{\tilde{v}_{i+1} - \tilde{v}_{i-1}}{2 \Delta r}, \quad (3.46)$$

$$\beta_i = \tilde{\omega}_i - \frac{\tilde{v}_i}{\tilde{r}_i}; \quad \beta'_i = \frac{\tilde{v}_i}{\tilde{r}_i^2} - \frac{1}{\tilde{r}_i} \frac{\tilde{v}_{i+1} - \tilde{v}_{i-1}}{2 \Delta r} + \frac{\tilde{\omega}_{i+1} - \tilde{\omega}_{i-1}}{2(\Delta r)}. \quad (3.47)$$

Finalmente, el sistema de ecuaciones para el flujo queda totalmente especificado con la discretización de las ecuaciones (3.38) y (3.39).

3.4 Estrategia numérica

Se implementaron algoritmos usando el lenguaje de programación *Visual C++ 2008*. El procedimiento general usado para obtener la solución numérica es descrito en la Figura 3-1. Como se puede ver de ésta figura, se implementó un procedimiento iterativo con el fin de romper el acoplamiento entre los problemas hidrodinámico y magnético. Las iteraciones se inician suponiendo valores para la densidad de fuerza magnética $\langle f_\theta \rangle_t$ y el torque magnético $\langle l_z \rangle_t$, estos valores son usados para solucionar el problema hidrodinámico descrito mediante las ecuaciones (3.40) y (3.41), de donde se obtiene un primer estimado para $\tilde{v}_\theta(\tilde{r})$ y $\tilde{\omega}_z(\tilde{r})$. Posteriormente estos resultados fueron usados para solucionar el problema electrodinámico descrito con las

ecuaciones (3.42) a (3.47), obteniéndose la solución para la función potencial escalar $\tilde{\psi}(\tilde{r})$; con $\tilde{\psi}(\tilde{r})$ se hace una nueva estimación de $\langle f_\theta \rangle_t$ y $\langle l_z \rangle_t$ para iniciar una nueva iteración. Se usó el método de Gaus-Seidel para solucionar simultáneamente los sistemas de ecuaciones involucrados en el algoritmo. También se implementó el criterio de convergencia absoluta mostrado en las inecuaciones (3.48) para las funciones de densidad de fuerza y torque magnético

$$\left\| \{ \langle f_\theta(\tilde{r}) \rangle_t \}_i^{(n+1)} - \{ \langle f_\theta(\tilde{r}) \rangle_t \}_i^{(n)} \right\| \leq \epsilon \quad \text{y} \quad \left\| \{ \langle l_z(\tilde{r}) \rangle_t \}_i^{(n+1)} - \{ \langle l_z(\tilde{r}) \rangle_t \}_i^{(n)} \right\| \leq \epsilon, \quad (3.48)$$

donde $\{ \langle f_\theta(\tilde{r}) \rangle_t \}_i^{(n+1)}$ y $\{ \langle l_z(\tilde{r}) \rangle_t \}_i^{(n+1)}$ son las soluciones en la iteración actual y $\{ \langle f_\theta(\tilde{r}) \rangle_t \}_i^{(n)}$ y $\{ \langle l_z(\tilde{r}) \rangle_t \}_i^{(n)}$ son las soluciones en la iteración anterior. En la Ecn. 3.48, ϵ es el valor de tolerancia igual a 1×10^{-10} . Para disminuir el tiempo de cálculo computacional fué necesario usar el concepto de sobrerelajación sucesiva (SOR) [29].

Las propiedades físicas y magnéticas del ferrofluido necesarias para obtener la solución se dan en la Tabla 3.4 y fueron obtenidas de la referencia [20].

Ferrofluido	η ($N \text{ s } m^{-2}$)	ρ (Kg/m^3)	$\mu_o M_s$ (mT)	χ	ϕ_h	τ (s)
EMG900_2	4.5×10^{-3}	1030	23.9	1.19	0.043	1.9×10^{-6}

Tabla 3.4: Propiedades físicas y magnéticas a temperatura ambiente para ferrofluidos en base queroseno EMG900-2.

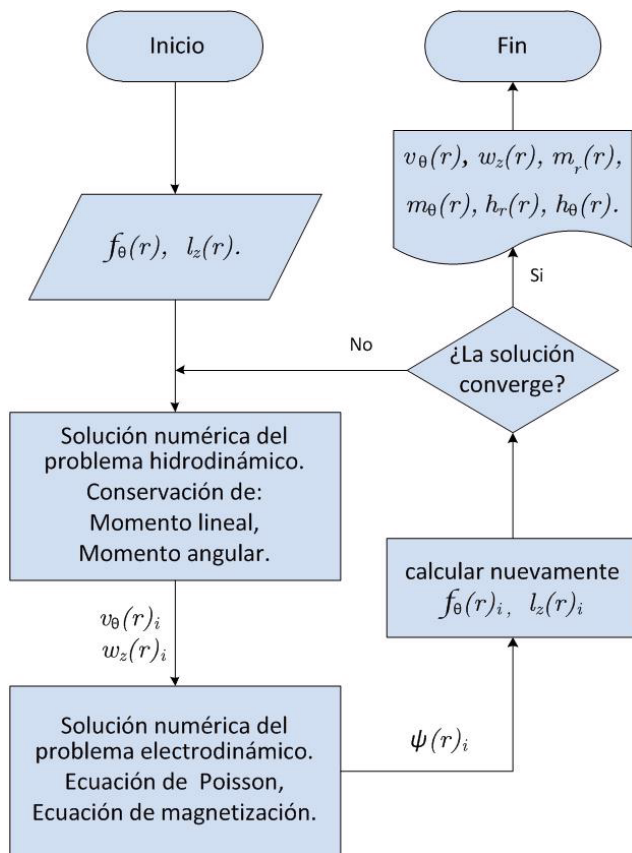


Figura 3-1: Diagrama de flujo del procedimiento iterativo para solucionar el sistema de ecuaciones ferrohídrodinámicas.

Capítulo 4

RESULTADOS Y ANÁLISIS

4.1 Comparación solución numérica versus asintótica

Las soluciones numéricas obtenidas en este trabajo fueron comparadas con respecto a las soluciones asintóticas reportadas en las referencias [20, 22]. Los perfiles de velocidad lineal obtenidos numéricamente y los analíticos son presentados en la Figura 4-1 para ambas geometrías. Como se puede observar de la Figura 4-1, existe una diferencia en la magnitud de los perfiles de velocidad entre la solución asintótica y la numérica, la cual fue estimada en 3.18%. Esta desviación es atribuida principalmente a que las ecuaciones fueron discretizadas usando diferencias finitas de primer orden. No obstante, como es mostrado abajo, existe acuerdo de tipo cualitativo entre ambas soluciones. Una solución numérica similar fue obtenida por Finlayson [21] usando el código comercial *COMSOL Multiphysics*® basado en elementos finitos, para el caso de ferrofluido en un cilindro hueco. A diferencia de los resultados que se presentan en este trabajo, los resultados numéricos de Finlayson predicen que para campos magnéticos altos ($\varepsilon = 155$) la dirección de flujo cambia de sentido, es decir, contra-rotación entre el campo magnético y flujo. Tal comportamiento es explicado por Finlayson como una consecuencia de la no uniformidad del torque magnético, el cual según sus resultados, se incrementa cerca de la superficie del cilindro.

A diferencia de esta modelación en la cual se ha utilizado una función potencial escalar magnética para modelar el campo magnético que incluye como condición de frontera una distribución de corriente superficial, Finlayson usó un modelo de un dominio donde emplea una

condición de frontera escalar dada por la expresión

$$\psi = K = H_o [x \cos(\Omega t) + y \sin(\Omega t)].$$

No obstante, tal diferencia en el cálculo del campo magnético no debe cambiar el comportamiento de flujo como es mencionado por Khushrushahi *et al.* [30]. Adicionalmente, Finlayson resuelve el problema magnético en forma transitoria ($\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$) y el hidrodinámico en estado estable ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) sin usar expresiones promediadas para las densidades de torque y fuerza magnética, lo que puede generar la no uniformidad de la densidad del torque magnético cerca de la pared y el efecto de contra-rotación del flujo a campos altos.

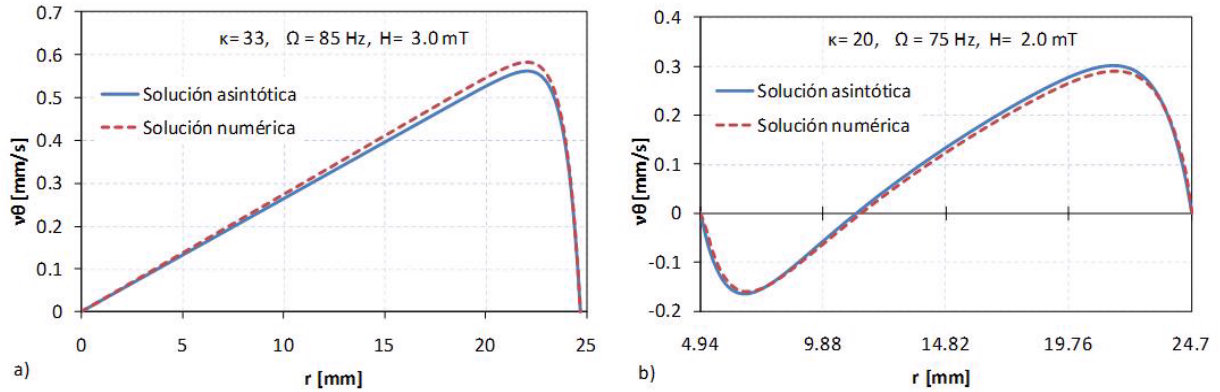


Figura 4-1: Comparación de resultados numéricos con respecto a la solución asintótica reportada en la literatura [22], a) perfil de velocidad lineal para el caso del contenedor cilíndrico, obtenido para $\kappa=33$, $\Omega=85$ Hz y $H=3.0$ mT; b) perfil de velocidad lineal para el caso del contenedor anular, obtenido con $\kappa=20$, $\Omega=75$ Hz y $H=2.0$ mT.

Cabe aclarar, que tal fenómeno de contra-rotación del campo magnético fue observado experimentalmente por Chaves *et al.* [17], solo en la región cercana a la interface aire fluido y que puede ser explicado como un resultado de la acción de esfuerzos magnéticos superficiales generados en la interface aire fluido como ha sido explicado por Rosensweig *et al.* [31]. No obstante, para el interior del volumen del fluido no ha sido observado experimentalmente contra rotación de campo y flujo a amplitudes del campo magnético moderadas.

Se debe resaltar, que esta es la primera solución numérica que se obtiene para flujo de

ferrofluido en una geometría anular. A diferencia de la solución asintótica presentada en la referencia [22], el modelo matemático usado en esta tesis, tiene en cuenta los términos $\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{M})$ y $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ de la ecuación de magnetización (Ecn. (2.4)), no obstante, no se alcanza a percibir algún efecto importante sobre los perfiles de velocidad por comparación de ambas soluciones.

4.2 Perfiles de velocidad lineal y angular a diferentes condiciones de H , κ y Ω

Con el fin de seguir la comparación cualitativa entre las soluciones asintóticas y numéricas, se obtuvieron perfiles de velocidad para diferentes valores del parámetro κ manteniendo constante la amplitud del campo magnético H y la frecuencia Ω . Los perfiles de velocidad lineal y angular para el caso de ferrofluido en el cilindro hueco, se muestran en la Figura 4-2 a) y b) y los del caso anular en la Figura 4-3 a) y b). Estos resultados muestran una clara dependencia del flujo con respecto al parámetro adimensional κ , tanto para el caso cilíndrico como para el caso anular, lo que está de acuerdo a las predicciones del análisis asintótico. En otras palabras, la magnitud del flujo tiende a cero conforme $\kappa \rightarrow \infty$ ($\eta' \rightarrow 0$). Este resultado indica que el efecto del "couple stresses" $[\nabla^2 \boldsymbol{\omega}]$ es importante en la generación del flujo, situación que ha sido demostrada en varios trabajos analíticos donde los "couple stresses" han sido despreciados haciendo $\eta' = 0$ lo que ha resultado en cero flujo, contradiciendo la actual evidencia experimental. También se debe decir que este análisis numérico para el caso de la geometría anular, permitió obtener perfiles de velocidad para valores de $\kappa > 40$, a diferencia de la solución asintótica que presentaba problemas de convergencia al calcular una de las integrales numéricas que resulta al resolver la ecuación de momento angular interno, la cual tiene forma de una Ecuación de Bessel Modificada No-Homogénea.

Así mismo, se hicieron gráficas de perfiles de velocidad lineal para evaluar el efecto de la amplitud del campo magnético y la frecuencia sobre el flujo, para ambas geometrías. Las figuras 4-4 a) y b) y 4-5 a) y b) muestran la influencia de la frecuencia y la amplitud del campo magnético sobre el perfil de velocidad para las geometrías cilíndrica y anular respectivamente. No obstante, cabe anotar que las soluciones asintóticas usadas como referencia para evaluar la

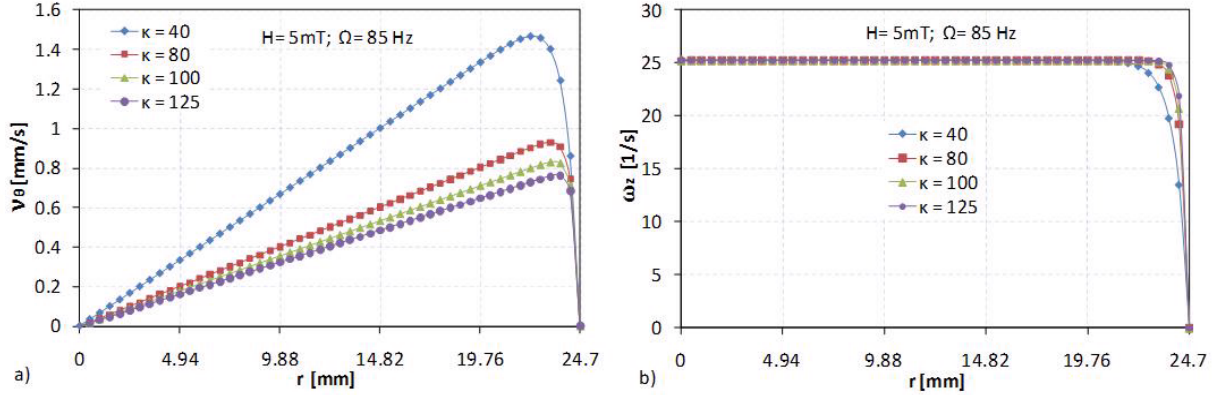


Figura 4-2: Perfiles de velocidad a) lineal y b) angular para ferrofluido en un cilindro hueco. En ambos casos la amplitud del campo magnético permanece constante a 5 mT y frecuencia de rotación del campo de 85 Hz .

solución real son validas para valores del parámetro de perturbación

$$\varepsilon \equiv \frac{\mu_0 \chi K^2 \tau}{\zeta} = \frac{2}{3} \alpha^2,$$

que tiende a cero, o lo que es lo mismo para magnitudes del campo que tienden a cero ($K \rightarrow 0$). Para dar una idea de la situación, actuales soluciones asintóticas asumen que $\mathbf{M}_{eq} \approx \chi_i \mathbf{H}$. Esto es equivalente a asumir que la función de Langevin ($L(\alpha)$ en la Ecn. (2.9)) es aproximada usando solo el primer término $\mathcal{O}(\alpha)$ de una serie de potencias. No obstante, la contribución de primer orden considera hasta el segundo orden de la serie de potencias, de este modo los términos de corrección hasta orden tres $\mathcal{O}(\alpha^3)$ fueron incluidos en el análisis asintótico. En otras palabras, para no obtener desviaciones de la \mathbf{M}_{eq} en el análisis asintótico cuando se evalúan los perfiles de velocidad a un campo magnético de amplitud de 5 mT se debería obtener términos de corrección de hasta $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$, no obstante, solo se pudieron conseguir términos de $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$ para el caso cilíndrico y $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ para la geometría anular. Esto demuestra la necesidad de obtener soluciones numéricas que apliquen a cualquier valor de amplitud del campo magnético.

Por otro lado puede ser verificado que existe acuerdo cualitativo entre los perfiles de velocidad dados por las soluciones asintóticas y numéricas en cuento a efectos del campo magnético y la frecuencia.

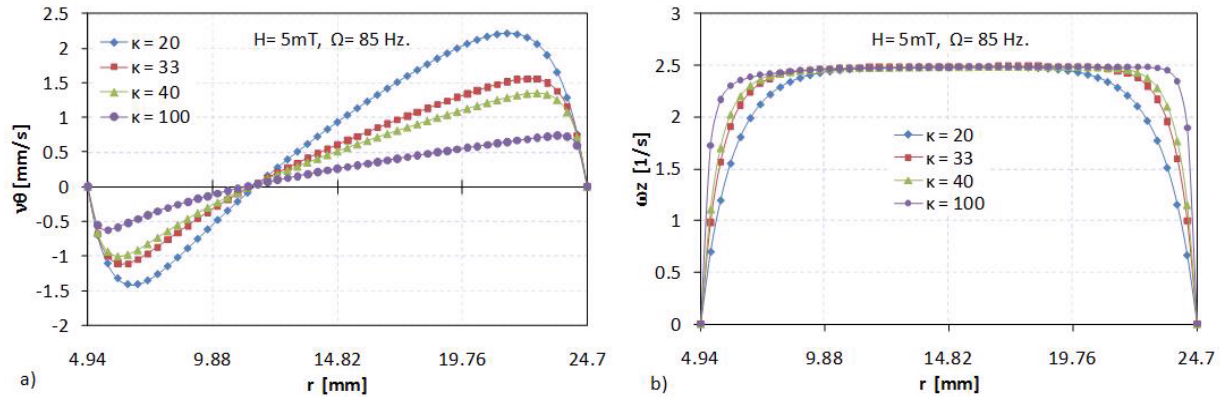


Figura 4-3: Perfiles de velocidad a) lineal y b) angular para ferrofluido en el espacio anular de cilindros concéntricos. En ambos casos la amplitud del campo magnético permanece constante a 5 mT y frecuencia de rotación del campo de 85 Hz.

4.3 Comparación cualitativa de los resultados numéricos frente a reportes experimentales

La Figura 4-6, muestra perfiles de velocidad lineal para el flujo de ferrofluido inducido por un campo magnético rotando y obtenidos usando el método de perfiles de velocidad por ultrasonido (UPV), reportado en la referencia [17] para los dos casos estudiados. Como puede ser observado de estas figuras, aún no es posible hacer mediciones de velocidad cerca de las paredes de los cilindros, debido a limitaciones de los equipos; estos reportes se compararon de forma cualitativa con las soluciones asintóticas y las soluciones numérica referenciadas en este documento. Queda claro que existen discrepancias entre los perfiles de velocidad experimentales y los obtenidos por los análisis presentados aquí y que son basados en la teoría de difusión del momento angular interno. Es bueno recordar que existen varias teorías que han intentado describir el mecanismo por el cual el flujo es producido, sin embargo, la que mejor explica las observaciones experimentales es la teoría de difusión del momento angular interno (DMAI). Además debe tenerse en cuenta que algunos de los parámetros usados en este y otros trabajos son en la actualidad obtenidos para soluciones coloidales diluidas (ζ), o que existen solo valores estimados de orden de magnitud (τ), o que aun no se han determinado ni experimental ni analíticamente (η) y bajo la restricción de amplitudes de campo magnético que tienden a cero,

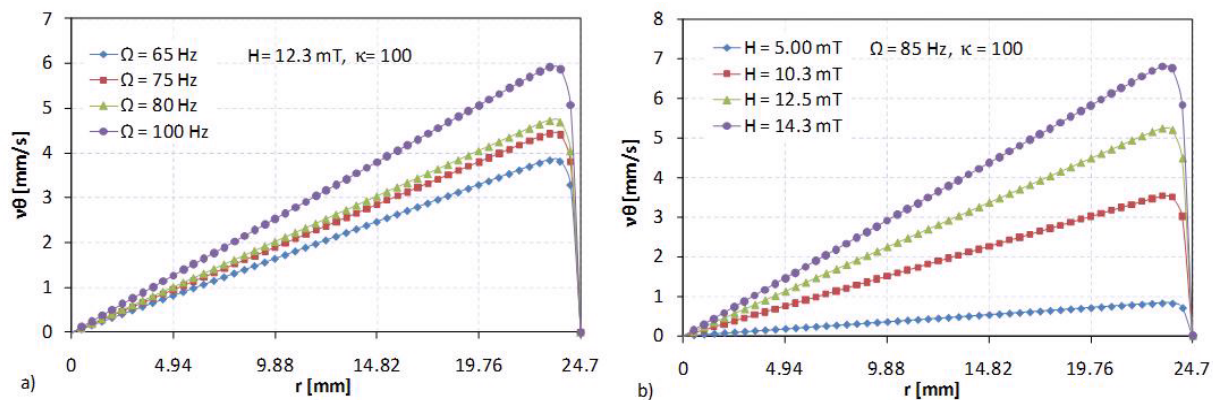


Figura 4-4: Perfiles de velocidad lineal para flujo en geometría cilíndrica con un valor de $\kappa = 100$. La Figura a) muestra el efecto de la frecuencia sobre el flujo para una amplitud constante del campo magnético de 12.3 mT. La Figura b) muestra el efecto de la amplitud del campo magnético sobre el flujo para una frecuencia de 85 Hz.

lo cual solo permite hacer comparaciones de carácter cualitativo entre predicciones teóricas y evidencia experimental.

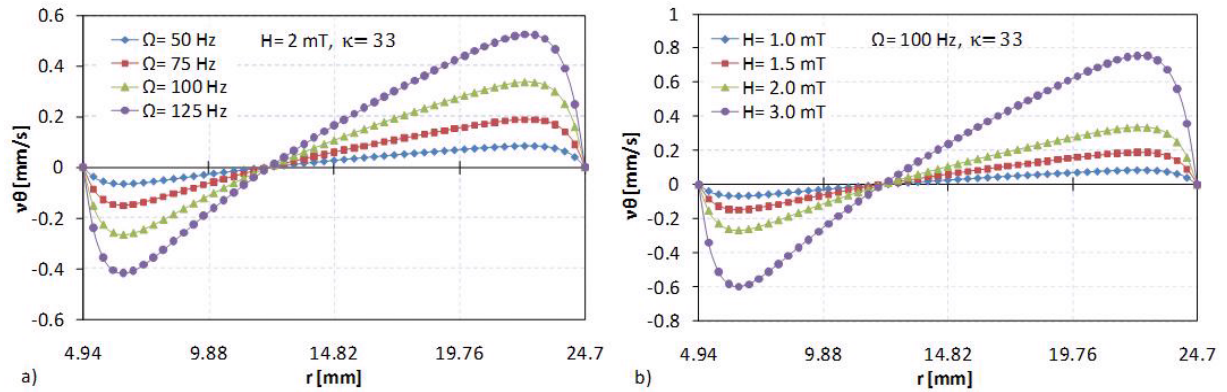


Figura 4-5: Perfiles de velocidad lineal para flujo en geometría cilíndrica para un valor de $\kappa = 100$. La Figura a) muestra el efecto de la frecuencia sobre el flujo para una amplitud constante del campo magnético de 12.3 mT. La Figura b) muestra el efecto de la amplitud del campo magnético sobre el flujo para una frecuencia de 85 Hz.

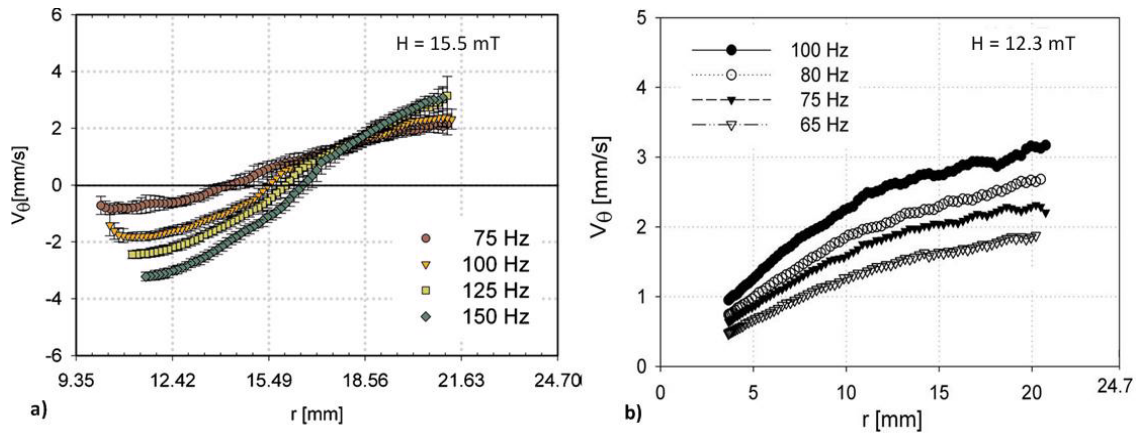


Figura 4-6: a) resultados experimentales de la dependencia del perfil de velocidad lineal con respecto a la frecuencia del campo magnético, con amplitud constante de 15.5 mT, para el caso anular; tomado de la referencia [22]. b) resultados experimentales de la dependencia del perfil de velocidad lineal con respecto a la amplitud del campo magnético con frecuencia constante de 85 Hz, para el caso cilíndrico; tomado de la referencia [20].

Capítulo 5

CONCLUSIONES

- Las soluciones numéricas para geometría anular y cilíndrica fueron obtenidas usando el método de diferencias finitas y fueron encontradas en buen acuerdo con las soluciones asintóticas presentadas en las referencias [20, 22].
- La solución para la geometría anular es la primera solución numérica que se reporta para este caso.
- La solución numérica para el caso anular a diferencia de la presentada en la literatura tiene en cuenta los términos $\nabla \cdot (\mathbf{vM})$ y $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ en la ecuación de magnetización. No obstante, fue encontrado que estos tienen un limitado efecto sobre los perfiles de velocidad bajo las suposiciones para las que fue realizado el análisis.
- A diferencia de la solución numérica presentada por Finlayson, las soluciones numéricas de esta tesis NO predicen contra-rotación entre fluido y campo, para ninguna amplitud del campo magnético. No obstante, es necesario realizar un análisis más profundo en orden a determinar el efecto de densidades de fuerzas y torques magnéticas no promediadas en el tiempo.

Capítulo 6

RECOMENDACIONES

- Se debe obtener soluciones numéricas para el flujo valida para campos altos.
- Se debe obtener mejores estimados para los parámetros fenomenológicos empleados en las ecuaciones ferrohodinámicas.
- Se debe evaluar el uso de otras ecuaciones de magnetización sobre los perfiles de velocidad.

Citas Bibliográficas

- [1] Rosensweig, R. E., *Ferrohydrodynamics*, Dover Publications, Mineola, NY, 1997.
- [2] Elborai, S. M., *Ferrofluid Surface and Volume Flows in Uniform Rotating Magnetic Fields*, Ph.d. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA. 2006.
- [3] Rosensweig, R. E., Browaeys, J., J.C., B., Zebib, A., and Perzynski, R., “Laboratory study of spherical convection in simulated central gravity.” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 83, 1999, pp. 4904–4907.
- [4] Zahn, M., “Magnetic fluid and nanoparticle applications to nanotechnology,” *Journal of Nanoparticle Research*, Vol. 3, 2001, pp. 73–78.
- [5] Mao, L. and Koser, H., “Ferrohydrodynamic pumping in spatially traveling sinusoidally time-varying magnetic fields,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 289, 2005.
- [6] Krauss, R., Reimann, B., Richter, R., Rehberg, I., and Liu, M., “Fluid pumped by magnetic stress,” *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 86, 2005.
- [7] Odenbach, S., “Ferrofluids magnetically controlled suspensions,” *Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects*, Vol. 217, 2003, pp. 171–178.
- [8] Kim, D., Voit, W., Zapka, W., Bjelke, B., Muhammed, M., and Rao, K., “Biomedical application of ferrofluids containing magnetite nanoparticles,” *Mat. Res. Soc. Symp. Proc.*, Vol. 676, 2001.
- [9] Shliomis, M. I. and Morozov, K. I., “Negative viscosity of ferrofluid under alternating magnetic field,” *Physics of Fluids*, Vol. 6, No. 8, 1994, pp. 2855–2861.

- [10] Rinaldi, C., Chaves, A., Elborai, S., He, X., and Zahn, M., “Magnetic fluid rheology and flows,” *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, Vol. 10, 2005, pp. 141–157.
- [11] Moskowitz, R. and Rosensweig, R., “Nonmechanical torque-driven flow of a ferromagnetic fluid by an electromagnetic field,” *Applied Physics Letters*, Vol. 11, No. 10, 1967, pp. 301–303.
- [12] Zaitsev, V. M. and Shliomis, Mark, I., “Entrainment of ferromagnetic suspension by a rotating field,” *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 10, 1969, pp. 696–700.
- [13] Rinaldi, C., “Effect of the particle size distribution on Brownian and Néel relaxations times of ferrofluids,” Personal Communication 2005.
- [14] Rosenthal, A. D., Rinaldi, C., Franklin, T., and Zahn, M., “Torque measurements in spin-up flow of ferrofluids,” *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 126, 2004, pp. 198–205.
- [15] Lehlooh, A. F., Mahmood, S. H., and Williams, J. M., “On the particle size dependence of the magnetic anisotropy energy constant,” *Physica B*, Vol. 321, No. 1-4, 2002, pp. 159–162.
- [16] Dahler, J. S. and Scriven, L. E., “Angular momentum of continua,” *Nature*, Vol. 192, No. 4797, 1961, pp. 36–37.
- [17] Chaves, A., Rinaldi, C., Elborai, S., He, X., and Zahn, M., “Bulk flow in ferrofluids in a uniform rotating magnetic field,” *Physical Review Letters*, Vol. 96, No. 19, 2006, pp. 194501.
- [18] Shliomis, M. I., “Ferrohydrodynamics: Testing a third magnetization equation,” *Physical Review E*, Vol. 64, No. 06051(R), 2001.
- [19] Pshenichnikov, A. F., Lebedev, A. V., and Shliomis, M. I., “On the rotational effect in nonuniform magnetic fluids,” *Magnetohydrodynamics*, Vol. 36, No. 4, 2000, pp. 275–281.
- [20] Chaves, A., Rinaldi, C., and Zahn, M., “Spin-up flow of ferrofluids: Asymptotic theory and experimental measurements,” *Physics of fluids*, Vol. 20, No. 053102, 2008.

- [21] Finlayson, B. A., “Modeling a Ferrofluid in a Rotating Magnetic Field,” *Proceedings of the COMSOL Conference 2007, Boston*, Vol. National Science Foundation: Award No. 0347044, 2007.
- [22] Chaves, A., Torres-Diaz, I., and Rinaldi, C., “Flow of ferrofluid in an annular gap in a rotating magnetic field,” *physics of fluids*, Vol. 22, 2010.
- [23] Rosensweig, R. E., “Continuum equations for magnetic and dielectric fluids with internal rotations,” *Journal of Chemical Physics*, Vol. 121, No. 3, 2000, pp. 1228–1242.
- [24] Brenner, H., “Rheology of two-phase systems,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 2, 1970, pp. 137–176.
- [25] Shliomis, M. I., “Concerning one gyromagnetic effect in a liquid paramagnet,” *Sov. Phys. JETP*, Vol. 39, No. 4, 1974, pp. 701–704.
- [26] Chaves, A., Gutman, F., and Rinaldi, C., “Torque and bulk flow of ferrofluid in an annular gap subjected to a rotating magnetic field,” *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 129, 2007, pp. 412–422.
- [27] Melcher, J. R., *Continuum Electromechanics*, MIT Press, Cambridge, MA, 1981.
- [28] Hoffmann, A. K. and Chiang, T. S., *Computational fluid dynamics*, Engineering Education System, Wichita, Kansas, 2000.
- [29] Necati Ozisik, M., *Heat conduction*, Jhon Wiley y Sons, INC., New York, 1993.
- [30] Khushrushahi, S. and Zahn, M., “An Analysis of Spin-diffusion Dominated Ferrofluid Spin-up Flows in Uniform Rotating Magnetic Fields,” *Submitted to the COMSOL Conference 2011, Boston*, 2011.
- [31] Rosensweig, R. E., Popplewell, J., and Johnston, R. J., “Magnetic fluid motion in rotating field,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 85, 1990, pp. 171–180.

Bibliografía

- Brenner, H., “Rheology of two-phase systems,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 2, 1970, pp. 137–176.
- Chaves, A., Gutman, F., and Rinaldi, C., “Torque and bulk flow of ferrofluid in an annular gap subjected to a rotating magnetic . . . field,” *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 129, 2007, pp. 412–422.
- Chaves, A., Rinaldi, C., and Zahn, M., “Spin-up flow of ferrofluids: Asymptotic theory and experimental measurements,” *Physics of fluids*, Vol. 20, No. 053102, 2008.
- Chaves, A., Rinaldi, C., Elborai, S., He, X., and Zahn, M., “Bulk flow in ferrofluids in a uniform rotating magnetic . . . field,” *Physical Review Letters*, Vol. 96, No. 19, 2006, pp. 194501.
- Chaves, A., Torres-Diaz, I., and Rinaldi, C., “Flow of ferrofluid in an annular gap in a rotating magnetic field,” *physics of fluids*, Vol. 22, 2010.
- Dahler, J. S. and Scriven, L. E., “Angular momentum of continua,” *Nature*, Vol. 192, No. 4797, 1961, pp. 36–37.
- Elborai, S. M., *Ferrofluid Surface and Volume Flows in Uniform Rotating Magnetic Fields*, Ph.d. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA. 2006.
- Finlayson, B. A., “Modeling a Ferrofluid in a Rotating Magnetic Field,” *Proceedings of the COMSOL Conference 2007*, Boston, Vol. National Science Foundation: Award No. 0347044, 2007.
- Hofmann, A. K. and Chiang, T. S., *Computational fluid dynamics*, Engineering Education System, Wichita, Kansas, 2000.
- Khushrushahi, S. and Zahn, M., “An Analysis of Spin-difusion Dominated Ferrofluid Spin-up Flows in Uniform Rotating Magnetic Fields,” *Submitted to the COMSOL Conference 2011*, Boston, 2011.

- Kim, D., Voit, W., Zapka, W., Bjelke, B., Muhammed, M., and Rao, K., “Biomedical application of ferrofluids containing magnetite nanoparticles,” *Mat. Res. Soc. Symp. Proc*, Vol. 676, 2001.
- Krauss, R., Reimann, B., Richter, R., Rehberg, I., and Liu, M., “Fluid pumped by magnetic stress,” *Appl. Phys. Lett*, Vol. 86, 2005.
- Lehlooh, A. F., Mahmood, S. H., and Williams, J. M., “On the particle size dependence of the magnetic anisotropy energy constant,” *Physica B*, Vol. 321, No. 1-4, 2002, pp. 159–162.
- Mao, L. and Koser, H., “Ferrohydrodynamic pumping in spatially traveling sinusoidally time-varying magnetic ... fields,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 289, 2005.
- Melcher, J. R., *Continuum Electromechanics*, MIT Press, Cambridge, MA, 1981.
- Moskowitz, R. and Rosensweig, R., “Nonmechanical torque driven flow of a ferromagnetic fluid by an electromagnetic ... field,” *Applied Physics Letters*, Vol. 11, No. 10, 1967, pp. 301,303.
- Necati Ozisik, M., *Heat conduction*, Jhon Wiley y Sons, INC., New York, 1993.
- Odenbach, S., “Ferrofluids magnetically controlled suspensions,” *Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects*, Vol. 217, 2003, pp. 171–178.
- Pshenichnikov, A. F., Lebedev, A. V., and Shliomis, M. I., “On the rotational effect in nonuniform magnetic fluids,” *Magneto hydrodynamics*, Vol. 36, No. 4, 2000, pp. 275–281.
- Rinaldi, C., “Effect of the particle size distribution on Brownian and Néel relaxations times of ferrofluids,” *Personal Communication* 2005.
- Rinaldi, C., Chaves, A., Elborai, S., He, X., and Zahn, M., “Magnetic fluid rheology and flows,” *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, Vol. 10, 2005, pp. 141–157.
- Rosensweig, R. E., “Continuum equations for magnetic and dielectric fluids with internal rotations,” *Journal of Chemical Physics*, Vol. 121, No. 3, 2000, pp. 1228–1242.

- Rosensweig, R. E., Browaeys, J., J.C., B., Zebib, A., and Perzynski, R., “Laboratory study of spherical convection in simulated central gravity.” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 83, 1999, pp. 4904 $\frac{1}{2}$ U4907.
- Rosensweig, R. E., *Ferrohydrodynamics*, Dover Publications, Mineola, NY, 1997.
- Rosensweig, R. E., Popplewell, J., and Johnston, R. J., “Magnetic fluid motion in rotating field,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 85, 1990, pp. 171–180.
- Rosenthal, A. D., Rinaldi, C., Franklin, T., and Zahn, M., “Torque measurements in spin-up flow of ferrofluids,” *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 126, 2004, pp. 198–205.
- Shliomis, M. I. and Morozov, K. I., “Negative viscosity of ferrofluid under alternating magnetic field,” *Physics of Fluids*, Vol. 6, No. 8, 1994, pp. 2855–2861.
- Shliomis, M. I., “Concerning one gyromagnetic effect in a liquid paramagnet,” *Sov. Phys. JETP*, Vol. 39, No. 4, 1974, pp. 701–704.
- Shliomis, M. I., “Ferrohydrodynamics: Testing a third magnetization equation,” *Physical Review E*, Vol. 64, No. 06051(R), 2001.
- Zahn, M., “Magnetic fluid and nanoparticle applications to nanotechnology,” *Journal of Nanoparticle Research*, Vol. 3, 2001, pp. 73 $\frac{1}{2}$ U78.
- Zaitsev, V. M. and Shliomis, Mark, I., “Entrainment of ferromagnetic suspension by a rotating field,” *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 10, 1969, pp. 696, 700.