Contribuciones de la modelación matemática al estudio del concepto de integral

Shirley Johana Toloza Peña

Trabajo de grado para optar el título de Magister en Educación Matemática

Director:

Jorge Enrique Fiallo Leal

Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Universidad Industrial De Santander

Facultad De Ciencias

Escuela De Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2022

Dedicatoria

A Uliser y Aurora, mis padres, quienes a pesar de las dificultades de la vida, me enseñaron que con su ayuda y la de Dios todo se puede.

Agradecimientos

A Dios, el que siempre me ha demostrado su amor y me ha brindado de fortaleza para poder llegar a esta meta en mi vida.

A mis padres, Aurora y Ulises, quienes son el motor de mi vida, su apoyo incondicional, su esfuerzo por quererme tanto.

A Daniel por su amor, motivación y apoyo incondicional.

Al Dr. Jorge Enrique Fiallo, mi director de tesis, quien me apoyó en todo momento.

Gracias por tantas enseñanzas, motivaciones y comprensiones.

A mis evaluadores, Dr. Fernando Hitt y Dra. Sandra Evely Parada, por los aportes realizados durante mi proceso de aprendizaje que permitieron enriquecer mi proyecto de investigación.

A mis profesores Mg. Luis Ángel Pérez y Dra, Johanna Mendoza, quienes con su entrega, motivación y apoyo enriquecieron mi proceso de aprendizaje.

A la Dra. Sandra Evely Parada, quien con su entrega y enseñanzas fortaleció mi formación académica.

A la Escuela de Matemáticas de la UIS y el grupo de investigación EDUMAT-UIS por el apoyo brindado para la asistencia a eventos académicos.

A Cristian quien me impulso a mejorar cada día y me apoyo en momentos difíciles.

A Cristian y Alonso, mis compañeros de maestría, quienes con sus aportes, apoyo y motivación me dieron fuerzas para lograr culminar con éxito.

A todos ustedes ¡Muchas gracias!

Tabla de Contenido

Lista de Tablas

Lista de Figuras

RESUMEN

TÍTULO: CONTRIBUCIONES DE LA MODELACIÒN MATEMÁTICA AL ESTUDIO DEL CONCEPTO DE INTEGRAL[1]

AUTOR: SHIRLEY JOHANA TOLOZA PEÑA[2]

PALABRAS CLAVE: INTEGRAL, MODELACIÒN MATEMÀTICA, MODELO, PROBLEMA AUTÉNTICO, CONTRIBUCIONES, ENTREVISTA ESTRUCTURADA.

DESCRIPCIÓN:

En este documento presentamos resultados de una investigación de corte didáctico, que tuvo como objetivo: reconocer las contribuciones de la modelación matemática de problemas auténticos en el estudio del concepto de integral.

Para lograr el objetivo, se utilizaron elementos teóricos de la modelación matemática desde la didáctica; estos elementos nos permitieron diseñar, implementar y evaluar problemas auténticos: descarga de un archivo, comportamiento de trasmisión de un virus y modelación del área bajo la curva de una función potencia. Estos problemas involucraron en su solución el concepto de integral y estuvieron relacionados con la vida cotidiana de los participantes.

A partir de los datos recogidos y su respectivo análisis, se reconocieron cuatro contribuciones de la modelación matemática para el estudio del concepto de integral: Modelación matemática de un problema auténtico como desencadenador de motivación, Modelación matemática de un problema auténtico como desencadenador de modelos del concepto de integral, Significados asociados al concepto de integral y por último Modelación y tecnología en el estudio del concepto de integral.

Finalmente, con los resultados encontrados en esta investigación se espera sean útiles a estudiantes, profesores e instituciones de educación superior.

[1] Trabajo de grado
[2] Escuela de matemáticas. Maestría en Educación Matemática. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal. Doctor en Didáctica de las matemáticas

ABSTRACT

TITLE: CONTRIBUTIONS OF MATHEMATICAL MODELING TO THE STUDY OF THE CONCEPT OF INTEGRAL[3]

AUTHOR: SHIRLEY JOHANA TOLOZA PEÑA[4]

KEY WORDS: INTEGRAL, MATHEMATICAL MODELING, MODEL, AUTHENTIC PROBLEM, CONTRIBUTIONS, STRUCTURED INTERVIEW.

DESCRIPTION:

In this paper we present results of a didactic research, which aimed to recognize the contributions of the mathematical modeling of authentic problems in the study of the concept of integral.

To achieve the objective, theoretical elements of mathematical modeling from didactics were used; these elements allowed us to design, implement and evaluate authentic problems: downloading a file, virus transmission behavior and modeling the area under the curve of a power function. These problems involved in their solution the concept of integral and were related to the daily life of the participants.

From the data collected and their respective analysis, four contributions of mathematical modeling were recognized for the study of the concept of integral: Mathematical modeling of an authentic problem as a trigger for motivation, Mathematical modeling of an authentic problem as a trigger for integral concept models, Meanings associated with integral concept and finally Modeling and technology in the study of integral concept.

Finally, with the results found in this research is expected to be useful to students, teachers and institutions of higher education.

[3] Undergraduate work

[4] School of mathematics. Master in Mathematical Education. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal. Doctor in Didactics of Mathematics

Introducción

Según Hitt (2003) desde la investigación en educación matemática se han evidenciado varios problemas en el aprendizaje del cálculo, debido entre otras razones, a la cantidad de tópicos que están relacionados y al pobre manejo de algunos subconceptos. Subconceptos que obstaculizan el desarrollo profundo de otros objetos matemáticos de estudio del cálculo, como: función, límite, continuidad, derivada e integral.

Sobre la integral; el problema que tienen los estudiantes y algunos profesores (Robles, Tellechea y Font, 2014) para desarrollar un concepto profundo, es que, con frecuencia se considera suficiente que el estudiante comprenda que la función integral es la antiderivada de la función, para lograr el objetivo del curso, pero no es suficientemente representativa de la complejidad del objeto matemático.

Muñoz (2000) afirma que para lograr la articulación entre lo algorítmico y lo conceptual de la integral es necesario hacer uso de situaciones problemas. En este sentido, Cetina (2015) refiere que las situaciones problemas se pueden considerar como aplicaciones en la que se concibe del modo matemático o como un proceso de modelación

Cetina (2015) refiere que las situaciones problemas se pueden considerar como aplicaciones que sigue la ruta de las matemáticas -> realidad y se preguntan ¿Dónde puedo usar esta particular pieza de conocimiento matemático? Entendiendo que el modelo ya fue aprendido y construido; o como proceso de modelación matemática que es de la realidad <-> matemáticas y la pregunta es ¿Qué matemáticas puedo usar para resolver este problema?

Desde la modelación matemática, el modelo tiene que ser construido a través de comprender, estructurar, matematizar, interpretar y validar el problema.

Dado que existen distintos enfoques de la modelación matemática, en nuestra investigación utilizamos el propuesto por Villa-Ochoa y col. (2009), permitiéndonos estudiar problemas auténticos que conllevan a la creación de modelos para dar solución a las situaciones que pongan en juego el concepto de integral.

En particular, en la Universidad Industrial de Santander el concepto de integral es estudiado en el curso de Cálculo II, que hace parte del ciclo básico de los programas de ciencias e ingenierías. La investigación de la que desprende este reporte se desarrolló con una muestra de estudiantes que aún no han llevado el curso y se asume un enfoque de investigación de corte didáctico.

Este documento está organizado de la siguiente manera: en el primer capítulo se presenta la problemática, la pregunta, objetivo de investigación y el contexto. En el segundo capítulo se muestran una descripción de la revisión bibliográfica referente al concepto de integral y otras en el marco de la modelación matemática. En el tercer capítulo se exponen los aspectos teóricos, conceptuales y metodológicos de la modelación matemática, sobre los cuales se sustenta la investigación en cuanto al diseño y análisis de las actividades. En el cuarto capítulo se presenta de forma detallada la metodología empleada para el diseño y análisis de las actividades. En el quinto capítulo se presentan los resultados del análisis de los datos en relación con el proceso de modelación matemática y el reconocimiento de las contribuciones de esta. Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas.

1. Planteamiento de la investigación

En la primera sección de este capítulo se describe la problemática actual que contextualiza y delimita el problema; en la segunda, se presenta de manera explícita la pregunta de investigación y el objetivo.

1.1. Ámbito y problemática de la investigación

El cálculo, permite estudiar el cambio, la variación y acumulación que se produce en diversos fenómenos. La integral se destaca por el proceso de anti-derivación que es común en la ingeniería y en la ciencia y se utiliza para realizar el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y solidos de revolución (Aranda, 2015).

Robles, Tellechea, & Font (2014) exponen que los procesos de variación y acumulación son importantes en la actividad que llevan a cabo los estudiantes en un curso de cálculo diferencial e integral, ya que en estos cursos se trabajan problemas como el de determinar la velocidad instantánea en un punto, esta se asocia con el cálculo de la pendiente de la recta tangente y la distancia recorrida por un móvil, siendo la función positiva, se asocia con el área bajo la curva, pero el enfoque que se proporciona en los cursos es algebraico, casi no se hace alusión a lo geométrico o cualquier otra representación o modelo, lo que obstaculiza el uso de las ideas intuitivas de los estudiantes y los procesos de comprensión del concepto.

Muñoz (2000) refiere que existe un desequilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico, es decir, se acostumbra a los estudiantes a realizar procedimientos para calcular integrales por sus métodos, usando la ejercitación centrada en una práctica algorítmica y algebraica, no haciendo un manejo de la parte conceptual, e indicando que el concepto se da cuando los estudiantes llegan abordar aplicaciones de la integral.

En las instituciones de educación superior, según Tejero (2015) en los cursos de cálculo, en los que se involucra el concepto de integral, el orden temático se inicia con el cálculo de áreas por exhaución, si la función es positiva, se analiza la integral de Riemann, se da la definición de función integrable, se demuestra el primer y el segundo teorema fundamental del cálculo, se practica los métodos de integración y se resuelven las primeras aplicaciones al cálculo de integrales.”

El orden de contenidos antes descrito no es ajeno a lo que se plantea actualmente en la Universidad Industrial de Santander (UIS) para el curso de cálculo II (cálculo integral) que además es guiado por el libro de cálculo de una variable transcendentes tempranas de Zill y Wright (2011), organizado por los capítulos de integrales, aplicaciones de la integral y técnicas de integración.

Adicionalmente, es natural ver que, en el cálculo, las representaciones muchas veces se limitan a ser las que presentan los libros de textos; estas imágenes conceptuales son representaciones estáticas y limitadas, que restringen la naturaleza dinámica de los objetos, lo cual conduce a desarrollar una imagen limitada del concepto en cuestión (Tall y Sheath, 1983).

Las representaciones limitadas de los conceptos matemáticos, entre los cuales está el de integral, hacen que el proceso de acumulación no tenga sentido, sino que prevalece la interpretación analítica o algorítmica en su enseñanza. Orton (1983) en su estudio sobre la comprensión que el estudiante tiene de la integración, concluye que la comprensión de la integración como límite de una suma, constituyen el obstáculo principal, debido a la interpretación geométrica que involucra el proceso de acumulación.

Cordero (1992) muestra que el profesor y los estudiantes aprenden a decir lo que es la integral y su representación geométrica, sin embargo, el autor no alcanza a ver una metodología que le permita estudiar fenómenos de variación continua o acumulación, sino que la integral es concebida como una herramienta que provee algoritmos eficientes. En este mismo sentido, Corberan (1996) expresa que los estudiantes no tienen una claridad del concepto de integral, porque recitan la interpretación geométrica, pero sin comprender la noción de área, por lo cual se les hace difícil ver la acumulación.

En un estudio más reciente, Bressoud, Ghedamsi, Martinez-Luaces y Törner (2016) refiere que el aprendizaje del concepto de integral no es inmediato o automático, en parte, porque la enseñanza ha estado fundamentada en aspectos procedimentales, pero también por la naturaleza del concepto ya que no basta con aprender procedimientos o resolver tareas puestas en libros de textos.

Se requiere de investigaciones que permitan a los alumnos estudiar el concepto de integral Ustra y Ustra (2015); esto significa poner la atención en cuestiones de la comprensión y en los usos que tienen en ciertas prácticas profesionales, y una línea de investigación que permite esto es la modelación matemática.

La modelación puede hacerse de formas diferentes, que simplifican la situación y seleccionan una manera de representarla mental, gestual, gráfica o por medio de símbolos aritméticos o algebraicos, para poder formular y resolver los problemas relacionados con ella. Un buen modelo permite buscar distintos caminos de solución, estimar una solución aproximada o darse cuenta de si una aparente solución es significativa o no tiene sentido.

1.2. Pregunta y objetivo de Investigación

Concibiendo la idea de que la modelación matemática proporciona la posibilidad de desarrollar habilidades hacia el pensamiento matemático y nos muestra su utilidad para la comunidad en la que vivimos específicamente en el progreso científico y tecnológico (Ustra y Ustra, 2015), esta investigación pretende responder a la pregunta:

- ¿Cómo la modelación matemática de problemas auténticos contribuye al estudio del concepto de integral a estudiantes universitarios?

La cual se pretende responder con el logro del objetivo de investigación.

- Reconocer las contribuciones de la modelación matemática al estudio del concepto de integral a estudiantes universitarios.

2. Antecedentes y revisión bibliográfica

El presente apartado pretende dar cuenta de la revisión bibliográfica realizada, para la cual se analizaron algunos artículos, tesis y libros publicados a nivel nacional e internacional asociados con la problemática descrita en el apartado anterior. A continuación, se describen algunos trabajos que guardan relación con los aspectos de la presente investigación, como lo son: uso de la modelación matemática en el aula de clase en sus diversas perspectivas, investigaciones referentes a la enseñanza del concepto de integral y algunas investigaciones que hacen uso de las tecnologías para la enseñanza del concepto de integral.

2.1. Estudios que han abordado la modelación matemática

La modelación matemática desde la perspectiva de la didáctica se ha consolidado como una línea de investigación en la Educación Matemática. Pero cuando se habla de modelación matemática quizás no se comprenda lo mismo; autores como Kaiser y Sriraman (2006) han expresado que no hay una definición totalitaria u homogénea de lo que es la modelación matemática, tampoco de la forma como se puede desarrollar; pero sí se ha visto para esclarecer en el aula escolar la funcionalidad y los usos de la matemática en nuestra realidad. Actualmente existen investigaciones internacionales y nacionales que tienen como base la modelación matemática. Algunas de estas investigaciones son:

Heuvel-Panhuizen (2003) concibe la modelación matemática como un proceso de matematización de la realidad en el sentido de Freudenthal (1968, citado en Heuvel-Panhuizen, 2003, p.11), que parte de una situación del contexto real para el estudiante, es decir, contexto de la vida cotidiana o contextos reales en la mente del estudiante. Así promueve el uso del modelo de barra, dentro de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje y la pone en funcionamiento con estudiantes de secundaria media de Estados Unidos, un resultado de la investigación es que los modelos se utilizan como herramienta para mejorar la comprensión de los conceptos.

En Borromeo y Col. (2006) se realiza un análisis de la manera en que los estudiantes resuelven un determinado problema, que relaciona la realidad y la matemática (desde un punto de vista cognitivo-psicológico) mostrando ciclos de modelación empíricos y comparados con el ciclo de modelación planteado por Blum y Leiss (2007). Concluyendo que la variedad de enfoques y objetivos dentro del modelado sigue creciendo, surgiendo más ciclos de modelación empíricos.

Barbosa (2009) concibe la modelación matemática como entorno de aprendizaje, se plantean situaciones problema en base a la vida cotidiana; uno de estos problemas es la posibilidad de tener energía eléctrica racionada, el estudio da a conocer las reflexiones de los estudiantes sobre el papel de la matemática en la solución del problema. Los estudiantes de esta investigación eran profesores de la Universidad Estatal de Feira de Santana, en el noroeste brasileño.

Los resultados es que los participantes logran producir tres tipos de reflexiones sobre el papel de la matemática en la vida cotidiana. Evidenciando ideas referentes a lo matemático (hace referencia a las ideas, los conceptos y algoritmos matemáticos), las técnicas (que atiende a las representaciones de la situación-problema en términos matemáticos) y lo reflexivo (concierne los criterios utilizados en la construcción de un Modelo Matemático y sus resultados).

En Londoño, Jaramillo y Bossio (2013), la modelación matemática se estudia como un proceso para generar modelos lineales, a partir de una situación del contexto, considerando un grupo de estudiantes que cursan el grado décimo de una institución rural de la Región de Urabá, las situaciones que trabajan son el cultivo de plátano y el proceso de exportación, tomando así construcciones propias de los estudiantes, desarrollados desde sus experiencias y prácticas en un contexto sociocultural.

En las investigaciones antes citadas se puede ver y reconocer que existen variantes en la concepción de realidad que van desde la vida cotidiana o de impacto para la sociedad, hasta contextos que sean reales para los estudiantes. Es decir, contextos que puedan ser creados mentalmente.

A continuación, se darán a conocer referentes en cuanto a las perspectivas y clasificaciones de modelación matemática.

2.1.1. Perspectivas de la modelación matemática

Algunas investigaciones (e.g. Doerr y Pratt, 2008; Kaiser y Sriraman, 2006; Kaiser, 1995; Villa-Ochoa, 2013) dan a conocer perspectivas de la modelación matemática. En Cetina (2015) se realiza un análisis detallado de estas, las cuales puede verse resumidas en la Tabla 1**.**

Tabla 1. Perspectivas de la Modelación Matemática

Fuente: Síntesis realizado por el autor basado en Cetina (2015)

Nombre de la Perspectiva	**Objetivos**	**Antecedentes**
Modelación realista	Metas pragmático-utilitaria, es decir, resolución de problemas del mundo real e incentivación de competencias de modelación para desarrollo laboral.	Pragmatismo anglosajón y la matemática aplicada

Modelación contextual	Temas relacionados al sujeto y objetivos psicológicos, es decir, la resolución de problemas matemáticos	Debate americano sobre la resolución de problemas, así como la práctica escolar cotidiana, experimentos de laboratorio psicológicos.
Situaciones que provocan modelos	Objetivos psicológicos, transferencia de modelos a un nuevo problema	Debate americano sobre la resolución de problemas
A. Modelación Didáctica B. Modelación Conceptual	Objetivos pedagógicos y relacionados con el sujeto. A. La estructuración y promoción de los procesos de aprendizaje B. Introducción y desarrollo de conceptos	Teorías didácticas y teorías del aprendizaje.
Modelación socio-crítica	Objetivos pedagógicos, tal como la comprensión critica del mundo circundante	Enfoque socio-crítico en sociología política
Epistemológica o modelación teórica	Objetivos orientados a la teoría, es decir, la promoción del desarrollo de la teoría	Epistemología romana
Modelación Cognitiva	La investigación como objetivo: analizar y comprender los procesos cognitivos que toman lugar durante los procesos de modelación. Objetivos psicológicos: promoción de los procesos de pensamiento matemático mediante el uso de modelos como imágenes mentales o incluso imágenes físicas; haciendo hincapié en el modelado como un proceso mental, como la abstracción o la generalización	Psicología Cognitiva

2.1.2. Clasificaciones de la modelación matemática

En Doerr y Pratt (2008) se establece una clasificación que distingue dos tipos de perspectivas:

La epistemológica: muestra la conexión entre el mundo real y el mundo de los modelos matemáticos. En esta perspectiva se evidencian dos bases epistemológicas, una de estas es la que expresa que los modelos matemáticos están separados del mundo que va a ser modelado, es decir, que logre una explicación de la realidad a la que está involucrado el sujeto y el mundo de los modelos matemáticos; y la segunda, plantea que la modelación es un proceso cíclico que interactúa constantemente, entre el mundo de los modelos y la realidad o situaciones reales, cercanas, entre otras al sujeto.

La psicológica: muestra los aspectos que están relacionados con las actividades que llegan a hacer los estudiantes cuando empiezan a involucrarse en procesos de modelación, estos procesos no siguen un estándar o un orden sobre lo que debe realizar primero, pero lo que mencionan es que sí se ha caracterizado por transitar en ciclos. Es importante señalar que se ve como alguien experto en la situación, ya ha dado una caracterización del modelo que tienen una pre-construcción y cómo el estudiante inicia ese proceso desde lo que empieza a comprender de la situación problema o fenómeno establecido.

En un estudio Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona (2017) presentan una tipología de tareas de modelación que emerge después de analizar propuestas reportadas en la línea de investigación de la modelación matemática. La tipología ofrece cuatro categorías:

Enunciados verbales realistas: Son textos en los que se describe una situación más o menos familiar y se plantea una pregunta cuantitativa que se puede resolver con la ayuda de las matemáticas. Esta categoría tiene dos subcategorías: Enunciados verbales realistas y problemas auténticos presentados como enunciados verbales.

Construcción de representaciones: La construcción de representaciones es una actividad inherente a la mayoría de las visiones sobre modelación. Esta categoría tiene dos subcategorías: Representaciones gráficas y modelación de las formas (simulación).

Modelación a través de proyectos: Los proyectos representan una tarea abierta que posibilita desarrollar procesos amplios de indagación y resolución de problemas.

Uso y análisis de modelos: proporcionan una experiencia para estudiar las matemáticas a partir de modelos ya construidos.

Existen más investigaciones en las que se aborda las clasificaciones y perspectivas de la modelación matemática, sin embargo, las ya presentadas tienen algo en común y es que responden a la necesidad de resaltar la modelación matemática en una perspectiva educativa.

2.1.3. Investigaciones realizadas en Colombia sobre modelación matemática

Para este apartado, se toma el estudio realizado por Villa-Ochoa y Alencar (2019), quienes muestran un panorama de las investigaciones sobre la modelación matemática en Colombia y en Brasil en el ámbito de la Educación Matemática. Para Colombia tiene en cuenta, el banco de datos del GrupLAC de investigación que hace parte de Colciencias y la verificó con la información que posee La Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática (RECOMEM).

En esta búsqueda se dan categorías de similitud o semejanza que permitieran ver los enfoques teóricos, metodológicos y los usos de la modelación matemática como campo investigativo. Estas categorías fueron:

1. Herramienta para: Enseñar y aprender matemática, desarrollar habilidades y competencias, resolver problemas por medio de la matemática, formación política, crítica y democrática y establecer ambientes contextualizados e interdisciplinarios con la matemática.
2. Objeto de estudio: Aprender a modelar, relación con otros enfoques y teorías y estudio de la investigación sobre modelación.

Se presenta un resumen en Tabla 2 sobre las categorías y los autores más relevantes de cada una de estas.

Tabla 2. Frecuencia de documentos por subcategoría

Fuente: Villa-Ochoa y Alencar (2019)

Uso de la modelación	**Subcategorías**	**Descripción**	**Número de publicaciones y principales autores**
Herramienta	Enseñar y Aprender matemática	Se usa la modelación como metodología para la enseñanza de un concepto	(10) Autores: (e.g. Peña, Morales y Cruz, 2018; Rivera, 2018; Toledo y Cruz, 2018; Zapata et al. 2018)
	Desarrollar Habilidades y Competencias	Se focalizan en promover capacidades para la representación, abstracción, organización de datos, entre otros, análisis de modelos	(3) Autores: (e.g. Agudelo y García, 2016; Olmos, Sarmiento y Montealegre, 2016; Villa, 2018)
	Resolver problemas por medio de la matemática	Investigaciones que buscan la identificación de situaciones problemáticas en un contexto particular y, a partir de la matemática, ofrecer una solución.	(5) Autores: (e.g. Cárdenas y Suarez, 2018)
	Formación política, critica y democrática	El propósito central de estas investigaciones es promover actitudes y visiones críticas	(5) Autores: (Barbosa y Araujo, 2006; Bustos, Novoa, 2013)
	Establecer ambientes contextualizados e interdisciplinarios con la matemática.	Establecer conexiones entre las matemáticas y otros contextos o áreas del conocimiento.	(9) ¿Autores?
Objeto de estudio	Aprender a modelar	La atención se centra establecer y promover las condiciones para que los estudiantes aprendan a modelar	(2) Autores: (Rendón et.al, 2016; Villa, 2015)
	Relación con otros enfoque y teorías	Encontrar sentido cuando se desarrollan los procesos de modelación.	(2) Autores: (Olmos et.al, 2016; Plaza,2016)
	Comprensión de la modelación	Estudios que centran los usos, comprensiones y perspectivas de la modelación	(4) Autores: (Parra y Villa, 2015; Villa 2017)

A continuación, se presentan trabajos realizados en Educación Matemática referentes al concepto de Integral.

2.2. Algunas investigaciones en las que se concibe el concepto de integral

Por otra parte, como se mencionó en la problemática, el concepto de integral ha dado lugar a un gran número de investigaciones. Entre estas, se encuentran las que dan cuenta de concepciones y dificultades que tanto estudiantes, como profesores, presentan en la comprensión de dicho concepto. A continuación, se presenta una breve síntesis de lo encontrado en las investigaciones revisadas.

Los estudios realizados por Cordero (1991a, 1991b y 2003), refieren sobre la construcción de la noción de integración, el objetivo principal de estas investigaciones es encontrar características de las formas de conocer el concepto de integral y el diseño de situaciones de aprendizaje para resignificar, a través de la noción de acumulación como una base epistemológica que expresa la funcionalidad del conocimiento matemático.

Cordero (1991a, 1991b) muestra resultados de estudios sobre las concepciones de los profesores y estudiantes ante este concepto, aplicando una encuesta cuyas preguntas trataron sobre la definición de la integral y el cálculo de primitivas. En cuanto a la definición de integral encuentra que los profesores y estudiantes se limitan a la definición de la integral por medio de la "resta" $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ en lugar de considerarla como el "límite de una suma"; sin embargo, no alcanzan a reconocer la relación que guardan las función f y F, en la cual $f = F'$.

Respecto al área bajo una curva, Cordero (1991a, 1991b) identifica que los profesores y estudiantes aprenden a "decir" que la "resta" calcula el área bajo la curva, pero no pueden explicar por qué; y el cálculo de primitivas, lo entienden como un procedimiento algebraico.

Para superar estas dificultades Cordero (2003) presenta el rol del fenómeno de la acumulación como una categoría del conocimiento de la integral en su producción institucional. Así mismo, ofrece un marco de referencia para hacer de esa matemática un conocimiento funcional como finalidad didáctica y sugiere que la enseñanza enfoque más la atención en situaciones específicas de variación continua como la acumulación.

En Thompson y Silverman (2008) se plantea que el proceso de acumulación es fundamental para la integración, esta idea no es sencilla; por ello muestran la intención de: explicar la complejidad de entender la estructura de funciones de acumulación y señalar enfoques para ayudar a los estudiantes a comprender y conceptualizar dicho proceso.

En Muñoz (2010) se parte de la problemática de la separación entre lo conceptual y lo algorítmico en la enseñanza del cálculo integral, acudiendo a una aproximación teórica socio-epistemológica y la teoría de los campos conceptuales, hace un análisis del concepto de integral desde las dimensiones epistemológica, didáctica y cognitiva, considerando una especie de campo de prácticas sociales organizadas alrededor de tres ejes: predicción, acumulación y constantificación de lo variable (sustituir lo variable por lo constante bajo ciertas condiciones).

Dados los tres ejes mencionados, se conduce a un conjunto de situaciones problema que le dan sentido al concepto de integral y a partir de esto, se investiga las construcciones de los estudiantes cuando interactúan con estas situaciones que involucran otros conceptos. El autor considera que estas situaciones son aquellas que plantean problemas específicos que se derivan de los fenómenos de variación. Enfatiza en que se establecen una serie de categorías de cada una, en donde se derivan tres posibles situaciones, en las que se involucra la predicción, acumulación y transformación.

En Jácome (2019) se brinda una caracterización sobre la comprensión del teorema Fundamental del Cálculo utilizando como marco teórico la Educación Matemática Realista, la cual brinda un modelo para caracterizar los niveles de comprensión de los estudiantes, en este se resalta la importancia del uso de subconceptos, y conceptos del cálculo y la importancia entre la articulación de los procesos de variación y acumulación, haciendo énfasis en el apropiado uso de principios como los de reinvención guiada e interacción, para lograr las ideas necesarias en los estudiantes.

Las investigaciones mencionadas en este apartado evidencian que la interpretación geométrica del concepto de integral puede llevar a los estudiantes a ver el área como un fluido y calcular su acumulación; proporcionando representaciones dinámicas.

2.3. Investigaciones en las que se proporcionan resultados del uso de la tecnología para el aprendizaje del concepto de integral

En Hitt (1998) se expresa que el uso de las nuevas tecnologías para el aula como calculadoras graficadoras y microcomputadoras permite un mayor acceso a la representación de los conceptos matemáticos, dado que promueve la articulación entre diferentes representaciones de los conceptos, lo que facilita un nivel más importante en el aprendizaje de las matemáticas. Para el caso específico de la integral, el autor plantea que las tecnologías permiten superar las dificultades que se pueden presentar en el cálculo integral, como la interpretación inadecuada del área bajo la curva.

En este mismo sentido se encuentran investigaciones que hacen uso de las tecnologías para la enseñanza del cálculo integral, un ejemplo es el estudio de Gutiérrez y col. (2014) quienes toman aspectos teóricos de la visualización, en los resultados señalan el caso de que la obtención de primitivas si no es acompañado de un registro visual puede llevar a errores conceptuales. Como el ejemplo de $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$, el cual puede resolverse calculando una primitiva y sustituyendo los límites de integración, pero esta función es discontinua en cero, lo que no permitiría obtener su antiderivada. Los autores muestran un diseño de actividades realizadas en la calculadora en línea Wólfram.

En Morales, Gutiérrez y Ariza (2016) se presenta una guía para el diseño de objetos virtuales de aprendizaje (OVA), con la plataforma Moodle para orientar a los profesores en la implementación de estrategias didácticas que mejoren el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo integral. Los autores no hablan del proceso de acumulación, pero es utilizado en el diseño de las actividades para que los estudiantes construyan el aprendizaje. Aplicado el diseño se concluye que el uso de las tecnologías posibilita el aprendizaje de temas del cálculo integral, específicamente, para estudiar el concepto de área bajo la curva, como resultado se evidencia que la guía facilitó a los profesores la creación del OVA y a los estudiantes les posibilitó su aprendizaje.

Con las anteriores investigaciones fue posible tener un acercamiento inicial sobre la modelación matemática en el estudio del concepto de integral y reconocer los beneficios que ofrece dicho proceso al aprendizaje de los estudiantes.

3. ASPECTOS TEÓRICOS

En este apartado se presentan los referentes teóricos usados en la investigación que están relacionados con aspectos fundamentales como: La modelación matemática entendida como un proceso en el aula de clase, el modelo matemático como un sistema, las situaciones problemas como problemas auténticos en el sentido de Kaiser y Schwarz (2010), y las contribuciones de la modelación matemática al estudio de los conceptos matemáticos.

3.1. Modelación Matemática

Varios investigadores consideran que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas deben estar ligados a procesos de modelación matemática (Congresos del CERME, ICME, PRIMAS-Projet, 2007-2013)La influencia de esta línea de investigación se hace presente, pero cuando se habla de modelación matemática quizás no se comprenda lo mismo, autores como Kaiser y Sriraman (2006) han expresado que no hay una definición totalitaria u homogénea de lo que es la modelación matemática, tampoco de la forma como se puede desarrollar, debido a que se han presentado diferentes maneras de concebirla con diferentes enfoques y perspectivas; por lo que se hace necesario para esta investigación dar a conocer algunas maneras de concebir la modelación matemática en el aula de clase, y de referirnos algunos términos asociados a este proceso, además de mostrar nuestra postura.

3.1.1. Modelación matemática como proceso en el aula de clase

En la Educación matemática una de las líneas de investigación es la modelación matemática, la cual ha sido explicada en los antecedentes como una línea que establece una conexión entre dos entes, a saber, los modelos matemáticos y los fenómenos reales o situaciones que pueden derivar de otras disciplinas.

La modelación en palabras de Blomhøj (2004) es la que establece enlaces entre situaciones cercanas a la vida de los estudiantes y la matemática; argumentando que estas pueden generar una motivación en el aprendizaje de la matemática, porque da un apoyo cognitivo a las conceptualizaciones de los alumnos y establece a la matemática como un medio para describir y entender lo que sucede a su alrededor.

Así mismo, Londoño y Muñoz (2011) han expresado que el objetivo escolar es que los estudiantes puedan relacionar la matemática con otras disciplinas. En la educación superior, cada uno se especializa en un conocimiento, pero cuando abordan las situaciones no son capaces de manejarlas, porque el dominio conceptual básico no es adecuado, y es porque ese contenido matemático nunca lo apropiaron, no lo construyeron, sino que el profesor les presentó un constructo ya elaborado, lo que los limita a hacer un uso eficaz de algoritmos y procedimientos repetitivos. Estos autores consideran que la modelación admite la actividad matemática desde el "hacer" a través de situaciones problema que involucran aspectos de la vida diaria, contextos de los estudiantes y los procesos matemáticos, en acciones como:

- Identificar las matemáticas específicas en un contexto general.
- Formular y visualizar un problema de diferentes maneras.
- Transferir un fenómeno del mundo real con diferentes representaciones a un modelo matemático conocido.

Así mismo, consideran que estas actividades pueden ser parte de procesos básicos de la modelación, en la que se creería que existe una relación activa entre las situaciones y las matemáticas. El identificar, visualizar, formular y transferir, exige al estudiante buscar una representación en lenguaje matemático.

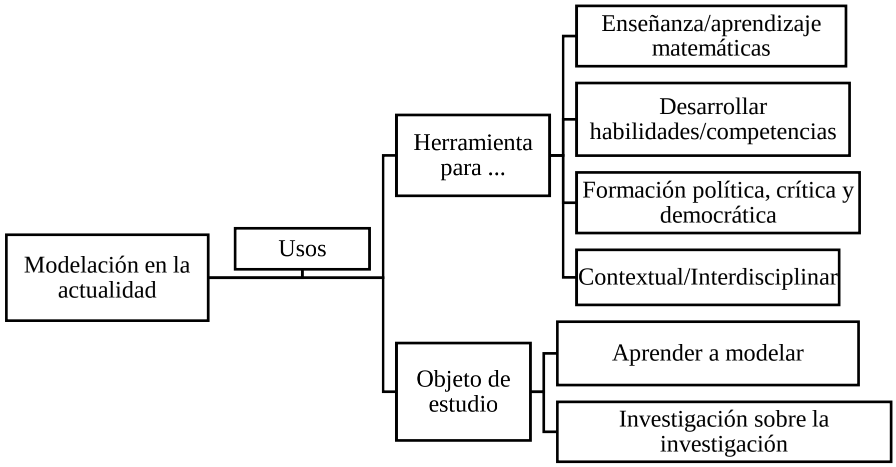
Por otro lado, la modelación matemática como proceso de aula ha estado y sigue en discusión a nivel internacional, desde los puntos de vista de diversos autores. En Londoño y

Muñoz (2011) se ha expresado que es un reto para los investigadores y docentes articularla con el currículo, como una manera de atribuir significado en correspondencia entre lo real y lo matemático. En cuanto a esto, Blum y Leiss (2007, como se citó en Londoño y Muñoz, 2011), consideran que la modelación debe estar de forma explícita en los currículos, dado que es una manera de vincular a los estudiantes que no están motivados hacia la actividad matemática.

Villa-Ochoa y Alencar (2019) afirman que, en la investigación en educación matemática, la modelación se puede reconocer por su uso como herramienta: considerándose un medio para lograr un fin (Villa-Ochoa y col. 2018); y como práctica: considerada la modelación como el fin, o la práctica que se puede estudiar por sí misma (Julie y Mudaly, 2007).

Teniendo en cuenta estos usos, Villa-Ochoa y col. (2018) ofrecen una tipología de usos de la modelación matemática en la investigación en educación matemática (Figura 1). En este sentido, para esta investigación se toma el uso de la modelación matemática como una herramienta para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.

Figura 1 Usos de la modelación matemática Villa-Ochoa y col. (2018)



En Colombia, la modelación como herramienta para enseñar y aprender matemática en los últimos 20 años ha sido de interés por la enseñanza de temas relacionados con el estudio del cálculo (Villa-ochoa y Alencar, 2019) algunas investigaciones realizadas bajo este uso son (Villa-Ochoa y col. 2018), (Molina-Toro y colaboradores, 2018), (Peña-Páez y Morales-García, 2016), (Cruz y Medina, 2013).

El uso de la modelación como herramienta permite establecer conexiones con las tecnologías digitales para realizar la simulación (Peña-Paez y Morales-García, 2016). También este uso permite traer reflexiones sobre la producción de significados matemáticos articulados a los significados de los objetos en los contextos y profesiones en que se modelan Rozal (2017).

Teniendo en cuenta que, esta investigación pretende reconocer las contribuciones de la modelación matemática al estudio del concepto de integral involucrados en situaciones propias de sus contextos y de otras ciencias, hacemos uso de la modelación matemática como herramienta para la enseñanza y el aprendizaje, y como el proceso de estudio de fenómenos que pueden derivar, tanto desde los contextos cotidianos de los estudiantes, como de otras disciplinas académicas. Dicho proceso de estudio involucra el uso y la construcción de modelos y otras herramientas matemáticas con las cuales puede ofrecerse una compresión del fenómeno y resolver el problema (Villa-Ochoa, 2010, pág. 9).

Esta concepción del proceso de modelación no aborda las interpretaciones que se hacen en cuanto a los términos como "realidad" o "representación", tanto de manera filosófica como conceptual. En la concepción de modelo matemático se realiza la diferencia que tomamos de representación y modelo. Cabe resaltar, que la modelación matemática, implica que los estudiantes utilicen sus conocimientos previos y los apliquen en la estructuración de conceptos, de acuerdo con la necesidad que le propician abordar el problema, fenómeno o situación planteada para ser interpretada y comprendida.

3.1.2. Problemas Auténticos

Lo expuesto anteriormente, nos lleva a pensar en cómo se pueden involucrar las situaciones cotidianas o de otras ciencias en el aula escolar, y a su vez, indagar en el currículo escolar porque este nos permite contar con una referencia de cómo se puede materializar.

La modelación como proceso, permite que se relacione las situaciones de la cotidianidad o de otras ciencias a través de modelos matemáticos que dan solución a la situación o la describe. Por ende, estas situaciones deben ser muy bien pensadas, casi que se pueden llamar "*problemas auténticos*" como han sido denominados por Káiser y Schwarz (2010) quienes también indican que estos problemas sean de interés para el estudiante. Esto sugiere ir más allá de considerar solo situaciones inventadas, lejanas, inusuales y ocultas. Alsina (2007) da una caracterización de estas situaciones.

Consideramos para esta investigación los denominados problemas auténticos por Kaiser y Schwarz (2010) con el fin de involucrar vínculos más fuertes entre las matemáticas y el conocimiento extraescolar. Algunos autores como Bonotto (2007) afirman que estos problemas auténticos permiten:

i. Cambiar el tipo de actividad destinada hacia situaciones problemáticas menos estereotipadas.
ii. Involucran características de autenticidad; por ejemplo, autenticidad de contexto, de actividad o de impacto.

En Blum y Borromeo-Ferri (2009) se muestra un tipo de enunciado auténtico, en el que se planteaba como contexto un polideportivo de Filipinas que ilustra un par de zapatos, que son considerados, los zapatos más grandes del mundo, con un ancho de 2,37 m y un largo de 5,29 m; en el problema se pregunta ¿Qué tan alto sería un gigante para que pueda utilizar estos zapatos? Este problema auténtico se desarrolló con dos estudiantes del noveno grado (jóvenes de aproximadamente 15 años) del German Hauptschule. Para los estudiantes resultó cercano y familiar el problema, pero si alguno de ellos no conociera un polideportivo y no hubiese visto el par de zapatos, el problema no representaría autenticidad personal. Por ende, es importante tener claro la población a la cuál va dirigido el problema auténtico.

Este tipo de problemas auténticos siguen manteniendo una visión de la modelación como construcción de modelos a partir de una situación o fenómeno. Así se evidencia, que se requiere construir un modelo que permita explicar lo relativo al problema planteado. El problema no necesariamente debe estar sujeto a un único modelo, este pude ser visto desde diferentes representaciones, por ello se considera más importante su construcción, porque a partir del problema cercano al estudiante, se enriquece de símbolos y de comprensión desde la matemática.

Autores representativos como Blum y Leiss (2007) y Borromeo-Ferri (2006) han estudiado el ciclo de la modelación como se muestra en la Figura 2y en la Figura 3.

Figura 2 Ciclo de modelación. Blum y Leiss (2007)

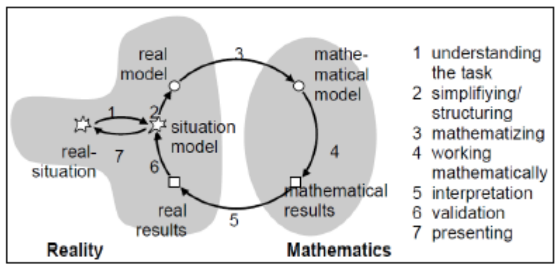
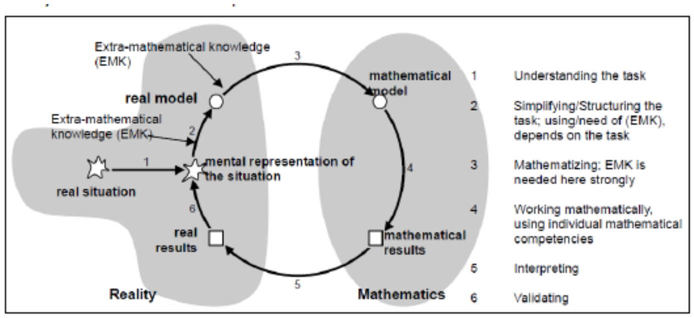


Figura 3 Ciclo de modelación. Borromeo-Ferri (2006)



El modelo construido no es único, es decir, no todos los estudiantes deben llegar a implementar el mismo modelo para dar solución al problema auténtico, pero sí, durante este proceso se resalta la importancia de que, construir el modelo puede llevar algunos procesos como identificar variables, reconocer los factores que influyen y los que no, validar el modelo e interpretar las soluciones en términos matemáticos al problema real o de la vida cotidiana.

Para el cierre del ciclo se debe dar la validación del modelo, para comparar que realmente pueda describir la situación y sus resultados o soluciones estén de acuerdo con lo que sucede y se pueda comunicar o presentar el problema inicialmente planteado.

En esta investigación se tuvo en cuenta estas fases, pero no se proporcionó un análisis detallado del proceso realizado por los estudiantes para construir el modelo, dado que se centró la mirada en las contribuciones de la modelación al estudio del concepto de integral. Sin embargo, se toma una postura frente al modelo matemático que se explica a continuación.

3.1.3. Modelo matemático en el proceso de modelación

Londoño y Muñoz (2011) establecen que la construcción de modelos matemáticos inicia desde el fenómeno o situación problema planteado, que es un momento en el que no se tienen acceso directo a las matemáticas, en palabras de Blum y Leiss (2007), en el mundo extra-matemático.

El modelo matemático en la literatura se puede ver desde dos enfoques. En primer lugar, como el producto o el resultante que permite describir el fenómeno estudiado a través de relaciones simbólicas. En segundo lugar, como un proceso de aprendizaje, en el que se toma en cuenta al estudiante que trata de representar con ese modelo, qué significados le atribuye y cómo es su interacción con el modelo y con la situación que lo está representando.

Como se mencionó en el apartado anterior, es necesario que estas ideas se materialicen en el currículo. En Colombia no existen muchas modificaciones a la Educación Superior, porque se ha dado autonomía a las Universidades de llevar a cabo sus clases, por lo que nos remitimos a lo establecido por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, en donde se conceptualiza el modelo matemático visto como producto de la siguiente manera:

> *Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema –a veces se dice también "una estructura" que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo (MEN, 2006, p. 52).*

En Londoño y Muñoz (2011) mencionan las siguientes categorías, basados en autores que toman características similares para definir modelo:

1. Algunas definiciones de modelo basado en estructuras matemáticas:

Rutherford (1978, citado en Londoño y Muñoz, 2011) define como modelo matemático a un sistema de ecuaciones matemáticas que permiten representar leyes y la solución reflejan el comportamiento de una situación; Biembengunt y Hein (2004, citado en Londoño y Muñoz, 2011) definen modelo matemático de una situación problema como, un conjunto de símbolos y de relaciones matemáticas que representan el fenómeno en cuestión. Por último, Villa-Ochoa, Quintero, Arboleda, Castaño y Ocampo (2009) caracteriza modelo matemático como un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar aspectos de la situación problema.

2. Algunas definiciones de modelo basado en proceso de aprendizaje son:

Giordano, Weir y Fox (1997, citado en Londoño y Muñoz, 2011) define modelo matemático como una construcción matemática diseñada a estudiar una situación problema; afirmando que el modelo puede incluir gráficas, símbolos y construcciones experimentales.

Blomhøj (2004) plantea modelo matemático como una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones con una situación o fenómeno de naturaleza no matemática. Blum y Leiss (2007) definen modelo como la matematización del problema planteado en la situación problema al mundo matemático, entendiéndolo a través del ciclo de modelación, donde este modelo pasa por procesos como la validación.

En coherencia con nuestra anterior postura respecto a la modelación como herramienta y proceso, se asume "un modelo matemático como un conjunto de símbolos, representaciones y relaciones matemáticas para explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación" (Villa-Ochoa y col. 2009a, pág. 162).

3.2. Contribuciones de la modelación matemática

La modelación matemática ha sido abordada tanto a nivel nacional como internacional, destacando importantes grupos, congresos como el ICTMA, RELME, RECOMEM. En estos espacios se han discutido aspectos como: las ventajas de trabajar con modelación matemática desde la perspectiva educativa, sus contribuciones al aula de clase, y su utilización para la formación de profesores.

Por ejemplo, Brito-Vallina, Alemán-Romero, Fraga-Guerra, Para-García y Arias-de Tapia (2011) han expresado que la modelación matemática, propicia ventajas para lograr una comprensión de los contenidos a desarrollar y el interés que puede emerger en el estudiante por la matemática en sí, promueve que el estudiante investigue sobre el tema a tratar y pueda atribuir un significado generando un sentido crítico, principalmente en la formulación y validación del modelo. Los autores resaltan que la modelación matemática posibilita que los futuros profesionales enfrenten problemas relacionados con su disciplina y que: generen una visión crítica para transformar la realidad en pro de su mejoramiento, se propicie la integración de las matemáticas con otras áreas, se genere interés frente a la aplicabilidad, se desarrolle habilidad en el uso de tecnología, y se mejore la aprehensión de los conceptos matemáticos.

Villa-Ochoa, González-Gómez y Carmona-Mesa (2018) expresan que la modelación matemática permite que los estudiantes les adjudiquen a los objetos matemáticos diversidad de significados e interpretaciones, teniendo como resultado que los significados y las comprensiones de los objetos matemáticos guardan relación con las acciones y las practicas que se involucran en las situaciones problema.

En Cordero (2003) en cuanto a la definición de integral, afirma que los profesores y estudiantes, cuando se les pregunta por la definición de integral, se inclinan más por la "resta" $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, en contraste a considerarla como el "límite de una suma", que sería el significado asociado en el área bajo la curva $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon)\Delta x_i$.

Lo que se ha evidenciado en Cordero (2003), es que los estudiantes pueden llegar a decir que el área bajo la curva es la resta, pero se presenta dificulta al ver igualdad en la expresión $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon)\Delta x_i = F(b) - F(a)$. La modelación matemática puede ayudar a superar esta dificultad, teniendo en cuenta lo que afirma Molina-Toro, Villa-Ochoa y Suárez (2018), la modelación ofrece posibilidades para el estudio de la matemática, ya que promueve el desarrollo de capacidades como la experimentación, la abstracción la resolución de las situaciones problema y la producción de significados articulados en los contextos.

Para efectos de la investigación, se quiere mostrar los modelos involucrados en el concepto de la integral en sus diferentes interpretaciones como área bajo la curva y como parte del teorema fundamental del cálculo; desde una dinámica de modelación, en el cual se involucren problemas auténticos; para que los estudiantes puedan así establecer relaciones entre la matemática y el mundo que los rodea. Sabemos que estas conexiones no son sencillas de establecer, por ende, se realizó un análisis detallado de cómo abordarlas de tal forma que los estudiantes sientan la necesidad de solucionar o describir la situación.

De este modo, los modelos no son dados a priori por el profesor, éstos son construidos por el estudiante según su modo de relacionarse con la situación. Así, cobra relevancia el proceso de modelación y no sólo el resultado matemático.

4. Diseño de la investigación

Este proyecto se enmarca en un enfoque de investigación cualitativa, de tipo descriptivo-interpretativo (Martínez, 2006) y fue diseñado para reconocer las contribuciones de la modelación matemática al estudio del concepto de integral. Encontrar estas contribuciones implicó procesos de descripción, observación, reflexión y análisis sobre las interacciones y acciones grupales e individuales que influenciaron en el proceso de modelación realizado por los estudiantes universitarios. Como opción metodológica se trabajó en la entrevista estructurada basada en tareas (Goldin, 2000):

> Las entrevistas estructuradas basadas en tareas para el estudio del comportamiento matemático, implica mínimamente un sujeto (un resolutor de problemas) y un entrevistador (el clínico), interactuando en relación con una o más tareas (preguntas, problemas o actividades) introducidas para el sujeto por el entrevistador de una manera planificada de antemano. El último componente justifica el término basada en tareas. Así que las interacciones de los sujetos no son sólo con los entrevistadores, sino con el entorno de la tarea. La entrevista en grupo con dos o más sujetos cae

> también en el ámbito de esta discusión, lo que lleva a la necesidad de ampliar nuestras interpretaciones de algunas de las ideas (Goldin, 2000, p. 519)

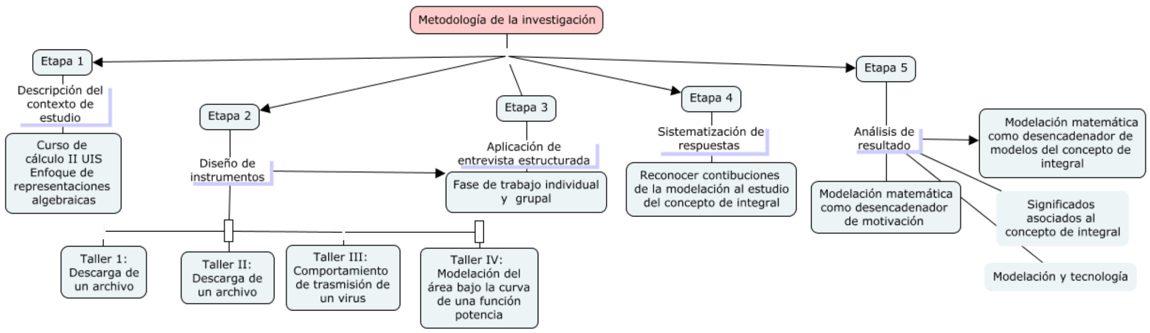
Se optó por realizar entrevistas grupales, como expresa Rojas (2012), estas entrevistas ofrecen un ambiente menos artificial y tenso para cada uno de los entrevistados, la atención del entrevistador-investigador, no se centra de manera permanente en el trabajo de un solo estudiantes, los estudiantes pueden interactuar entre sí y acoger o poner en discusión los argumentos considerados.

Goldin (2000) plantea que es necesario considerar contingencias que se pueden dar en la entrevista. También se anticipa que en algún momento se hace necesario ajustar la entrevista debido a que pueda surgir una situación que sea importante para la investigación.

En los siguientes apartados de este capítulo se describe toda la información sobre el contexto en el que se desarrolla la investigación, el diseño de las situaciones, la implementación de las actividades, la población, los instrumentos de recolección y análisis de datos.

En la Figura 4, resumimos las cinco etapas que conformaron la metodología de la investigación. A continuación, se describen en qué consistió cada una y los resultados de algunas de ellas.

Figura 4 Descripción de metodología de investigación



4.1. Aspectos generales del curso (contexto del estudio)

En la Universidad Industrial de Santander, el curso de cálculo integral o cálculo II, se desarrolla en 60 hora semestrales (4 horas por semana). Cada clase se considera de dos horas y hace referencia a una sección del libro guía *Cálculo de una variable trascendente tempranas* (Zill y Wright, 2011).

Para el desarrollo del curso se propone un cronograma con ejercicios indicados que corresponden a la misma sección del material teórico, pero el profesor puede decidir si los cambia, los reduce o los amplia según las necesidades y las características del curso.

La integral se presenta inicialmente como anti-derivada y se introduce la notación de integral indefinida, posteriormente se dan a conocer fórmulas de integración como se logra ver en Figura 5.

Figura 5 Formulas de integración. Zill y Wright (2011)

Fórmula de diferenciación	Fórmula de integración	Fórmula de diferenciación	Fórmula de integración
1. $\frac{d}{dx}x = 1$	$\int dx = x + C$	**10.** $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}x + C$
2. $\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n (n \neq -1)$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	**11.** $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x + C$
3. $\frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	**12.** $\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1}\lvert x\rvert + C$
4. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	**13.** $\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b)$, $(b > 0, b \neq 1)$	$\int b^x\,dx = \frac{b^x}{\ln b} + C$
5. $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	**14.** $\frac{d}{dx}e^x = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
6. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	**15.** $\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$	$\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$
7. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$	**16.** $\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$	$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$
8. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$		
9. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$		

El enfoque resulta operacional y mecánico (Muñoz, 2000), los estudiantes al iniciar el estudio abordan problemas donde se priorizan las representaciones algebraicas, más que a las representaciones geométricas. El estudio del área, dado que no se ve el movimiento o el dinamismo del concepto de integral, se muestra una inducción a las reglas de integración siendo un proceso memorístico.

Esta investigación se realizó con estudiantes que iban a iniciar el curso de cálculo II y que habían aprobado el curso de cálculo diferencial o cálculo I. Un aspecto importante en el contexto es que la investigación fue implementada durante aislamiento preventivo decretado por el gobierno nacional para evitar la propagación del virus COVID-19.

4.1.1. Población

La selección de los estudiantes no fue aleatoria, se estableció de manera intencional durante un curso de Cálculo I, donde el profesor-investigador cumplía el papel de profesor y realizó capacitaciones de manejo de tecnologías digitales y uso del software de geometría dinámica GeoGebra. Del grupo total de estudiantes que terminaron el curso de Cálculo I, se seleccionaron los siguientes cuatro estudiantes que realizarían el proceso de modelación de problemas auténticos. Valeria (seudónimo), estudiante de ingeniería química, una de las estudiantes más destacadas en cálculo diferencial, realizaba procedimientos analíticos.

Daniel, estudiante de ingeniería industrial, abordaba los problemas de manera mecánica y procedimental, es decir, siempre estaba en búsqueda del algoritmo. Diana, estudiante de ingeniería química, realizaba procesos tanto analíticos como mecánicos con preferencia hacia resolver los problemas de manera geométrica. Finalmente, Camilo, estudiante de ingeniería electrónica destacado por su buen desempeño en el curso de cálculo diferencial.

4.2. Aspectos metodológicos específicos

4.2.1. Diseño de instrumentos

En esta investigación se diseñaron tres problemas auténticos, considerando los elementos teóricos expuestos por Káiser y Schwartz (2010) y Villa-Ochoa (2013) y los aspectos metodológicos de Fiallo y Parada (2018) en el diseño e implementación de las actividades. En total se diseñaron cuatro talleres, con tres actividades en cada uno, estas tenían como propósito la creación de un modelo matemático relacionado con el concepto de integral.

Tabla 3. Estructura del diseño de instrumentos

Fuente: Creación propia

Taller / Tarea	Taller 1	Taller 2	Taller 3	Taller 4
1. Trabajo individual	Descarga de un archivo	Descarga de un archivo	Comportamiento de trasmisión del virus COVID-19	Modelación del área bajo la curva de una función potencia
2. Trabajo grupal	Socialización de resultados. Preguntas de la entrevista estructurada			

En el taller 1 (ver https://www.geogebra.org/group/stream/id/V7HCUchd5), se presenta el problema auténtico descarga un archivo, este problema surge de analizar la función velocidad de internet, el significado del área de esta función y la revisión epistemológica del concepto de integral realizada por (Bobadilla, 2012).

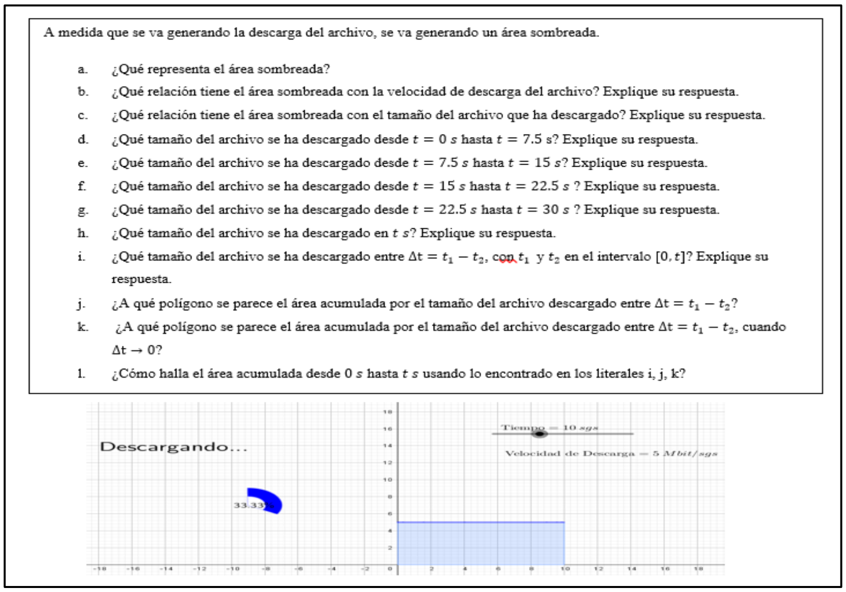
En Bobadilla (2012) se encuentra que hubo una preocupación por tratar de proporcionar un modelo que permitiera hallar el área, lo que lleva a establecer métodos como los indivisibles de Cavalieri, los infinitesimales desarrollados por Kepler y muchos otros matemáticos que lograron obtener modelos para hallar el área bajo la curva de una función.

Este problema es realmente cercano a los estudiantes, dado que en algún momento han tenido que descargar un archivo en su computadora, incluso en sus teléfonos inteligentes cuando se quiere descargar una aplicación, los usuarios están pensando en el espacio que posee el teléfono y el tamaño de la aplicación para saber si pueden obtenerla. En este sentido, este fenómeno tiene las características dadas por Kaiser y Schwarz (2010), cuando hablan de problemas auténticos. Para este taller se tiene en cuenta los siguientes aspectos para cada actividad:

Trabajo individual: en la primera parte se explicita el problema central de todo el taller, se realiza la fase de información y exploración libre propuesta en Fiallo y Parada (2018), fase en la que se espera que los estudiantes perciban la necesidad de utilizar nuevos conceptos y de aclarar conceptos del curso de cálculo diferencial. En esta fase se tiene en cuenta la entrevista estructurada (Tabla 4), para atender las preguntas de los estudiantes, asociadas a la solución del problema y para ir obteniendo información de las estrategias y modelos creados por ellos.

Trabajo grupal: Al finalizar el taller se realiza la fase de socialización de los resultados obtenidos en la que los estudiantes comunican las soluciones y las discuten en grupo. En esta fase se realiza la entrevista estructurada.

Figura 6 Taller I, Actividad 1


A medida que se va generando la descarga del archivo, se va generando un área sombreada.

a. ¿Qué representa el área sombreada?
b. ¿Qué relación tiene el área sombreada con la velocidad de descarga del archivo? Explique su respuesta.
c. ¿Qué relación tiene el área sombreada con el tamaño del archivo que ha descargado? Explique su respuesta.
d. ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 0\ s$ hasta $t = 7.5$ s? Explique su respuesta.
e. ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 7.5\ s$ hasta $t = 15\ s$? Explique su respuesta.
f. ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 15\ s$ hasta $t = 22.5\ s$? Explique su respuesta.
g. ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 22.5\ s$ hasta $t = 30\ s$? Explique su respuesta.
h. ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en $t\ s$? Explique su respuesta.
i. ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado entre $\Delta t = t_1 - t_2$, con t_1 y t_2 en el intervalo $[0, t]$? Explique su respuesta.
j. ¿A qué polígono se parece el área acumulada por el tamaño del archivo descargado entre $\Delta t = t_1 - t_2$?
k. ¿A qué polígono se parece el área acumulada por el tamaño del archivo descargado entre $\Delta t = t_1 - t_2$, cuando $\Delta t \to 0$?
l. ¿Cómo halla el área acumulada desde $0\ s$ hasta $t\ s$ usando lo encontrado en los literales i, j, k?

Esta actividad va acompañada de una simulación de descarga del archivo, realizado con el software de geometría dinámica GeoGebra que permite explorar y observar ideas conceptuales de objetos matemáticos a través, de las representaciones algebraicas, geométricas y tabulares. La simulación permite ver el proceso de acumulación que se involucra en el concepto de integral (Muñoz, 2010).

Se espera que los estudiantes logren identificar que el área sombreada que se va generando a partir de la descarga del archivo, corresponde al valor de Megabits descargados, los estudiantes pueden considerar que son equivalentes, pues la relación de ambos resulta ser un producto de área, que es el valor de la velocidad constante por el tiempo que ha transcurrido. Las preguntas están direccionadas a que los estudiantes reconozcan el proceso de acumulación que está involucrado en el concepto de integral y creen un modelo en el que reconozcan el tamaño del archivo en intervalos de tiempo específicos, como en intervalos de tiempo cualesquiera, $[t_1, t_2]$.

Así mismo, se busca que los estudiantes logren reconocer que el polígono formado es un rectángulo, y que a medida que va transcurriendo el tiempo se van adicionando rectángulos de igual altura. A continuación, se muestran las tareas y las preguntas que pueden ser tomadas durante el trabajo grupal como parte del guion en la entrevista.

Tabla 4 Entrevista Estructurada Taller I, Actividad 1

Tarea	***Posibles respuestas***	***Contra Preguntas***
Trabajo individual		
Abra el archivo Fenómeno 1.1 el cual muestra una simulación de descarga de un archivo a medida que pasa el tiempo (t). Anime el deslizador t (ubíquese sobre el deslizador, haga clic derecho y oprima la opción animación). **Teniendo en cuenta los datos y las representaciones de la simulación conteste las siguientes preguntas:** a. **¿Qué relación tiene la velocidad de la descarga del archivo con el tamaño del archivo?**	***R1.*** Usar la idea intuitiva de que el tamaño del archivo se asocia a la velocidad de descarga, teniendo en cuenta que la velocidad del internet asociado depende de la cantidad de Megas que pueda tener. ***R2.*** Aparece el porcentaje de descarga, entonces si conocemos cuál es el tamaño total del archivo, se podría realizar una regla de tres y encontrar la cantidad de tamaño descargado. ***R3.*** Conocer la velocidad o la ecuación de la velocidad en cualquier instante y a partir de esta encontrar una ecuación que ayude a conocer el tamaño en cualquier instante de tiempo. ***R4.*** Relación lineal ***R5.*** Relación constante ***R6.*** Usar a idea de que la velocidad es igual a la distancia sobre el tiempo $v = \frac{x}{t}$, asociarla con que se pueda usar lo mismo en este fenómeno, es decir, que el ta (tamaño del archivo) se relacione como distancia, es decir, $$v = \frac{T}{t}$$	***CR1.*** ¿Qué factores se asocian directamente a esta descarga? ***CR2.*** Si no conocieras el porcentaje en los 5 segundos ¿Qué información necesitaría? ***CR3.*** ¿Por qué? ¿Cuál sería esta relación? ***CR4.*** y ***CR5.*** ¿Por qué? ***CR6.*** ¿En cualquier fenómeno, se tiene esta relación? ¿Cuál será la expresión para el tamaño del archivo en cualquier instante de tiempo?

b. **¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en el primer s? Explique su respuesta.**	***R1.*** Utilizando el modelo encontrado anteriormente $v = \frac{T}{t}$. Se despeja $T = v * t$, luego se realiza $ta = 5Mbits\ * 1\ s = 5Mbits$. ***R2.*** Se podría pensar en que la velocidad es constante, entonces por cada segundo se descarga 5 Mbits	***CR1.*** ¿Qué pasaría si la velocidad no fuera constante? ¿Seguiría cumpliendo? ***CR2.*** ¿Qué pasaría si la velocidad no fuera constante? ¿Qué pasaría si el tiempo no fuera en un segundo, sino en 0? 35 s?
c. **¿Qué tamaño del archivo se ha descargado a los 2 s? Explique su respuesta.**	***R1.*** Utilizando el modelo encontrado anteriormente $v = \frac{T}{t}$. Se despeja $T = v * t$, luego se realiza $T = 5Mbits\ * 2s = 10Mbits$. ***R2.*** Se podría pensar en que la velocidad es constante, entonces por cada segundo se descarga 5 Mbits, luego en 2 segundos se descargan 10 Mbits.	***CR1.*** ¿Por qué el modelo encontrado funciona? ***CR2.*** ¿Qué pasaría si el tiempo no fuera en un segundo, sino en 1? 35 s?
d. **¿Qué tamaño del archivo se ha descargado a los 3 s? Explique su respuesta.**	***R1.*** Utilizando el modelo encontrado anteriormente $v = \frac{T}{t}$. Se despeja $T = v * t$ luego se realiza $T = 5Mbits\ * 3s = 15Mbits$. ***R2.*** Se podría pensar en que la velocidad es constante, entonces por cada segundo, se descarga 5 Mbits, luego en 3 segundos se descargarían 15 Megabits.	***CR1.*** ¿Por qué? ***CR2.*** ¿Cuál será el tamaño del archivo, en los segundos 4? 5 s?
e. **¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en t s? Explique su respuesta.**	***R1.*** Utilizando el modelo encontrado $v = \frac{T}{t}$. Se despeja $T = v * t$, para cualquier tiempo. ***R2.*** Se podría pensar en que la velocidad es constante, entonces por cada segundo, se descarga 3 Mbits, como es para un valor cualquiera de *t* se puede realizar, $T = 5 * t$	***CR.*** ¿Cómo obtuvo este modelo? ¿Se cumple para todos los fenómenos? ¿Qué condiciones debe tener?
A medida que se va generando la descarga del archivo, se va generando un área sombreada. a. **¿Qué representa el área sombreada?**	***R1.*** Representa los Megabits descargados. ***R2.*** Representa el porcentaje de descarga. ***R3.*** Se encuentra el tiempo y los valores de velocidad de descarga.	***CR1.*** ¿Por qué? ***CR2.*** ¿Qué relación puede presentar el porcentaje de descarga con el tamaño de descarga del archivo? ***CR3.*** ¿Existe alguna relación a medida que pasa el tiempo?

b.	**¿Qué relación tiene el área sombreada con la velocidad de descarga del archivo? Explique su respuesta.**	***R1.*** El valor del área sombreada en los instantes de tiempo representa el tamaño del archivo en esos instantes de tiempo. ***R2.*** El $As = tv$, luego la velocidad es $v = \frac{As}{t}$. ***R3.*** El área depende del tiempo, luego $A(t) = 5t$.	***C1.*** ¿Se cumple en cualquier instante de tiempo? ***C2.*** ¿Por qué? ***C3.*** ¿Por qué?
c.	**¿Qué relación tiene el área sombreada con el tamaño del archivo que ha descargado? Explique su respuesta.**	***R1.*** Representan lo mismo, el área bajo la función de velocidad es igual al tamaño del archivo en un instante de tiempo cualesquiera. ***R2.*** El tamaño del archivo total es 150 Megabits, y se cumple cuando el tiempo es 30 s, luego $T = 150 * \frac{t}{30} = 5t = vt$. ***R3.*** Por una regla de tres $A(t)$ es al porcentaje descargado $100\ \%$ es a 150 Megabits.	***C1.*** ¿Por qué? ***C2.*** Explica el procedimiento realizado ¿Siempre se cumple? ***C3.*** ¿Por qué usar regla de tres? ¿Qué relación encontró para deducir esto?
d.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 0\ s$ hasta $t = 7.5$ s? Explique su respuesta.**	***R1.*** Para el tiempo de 7.5 segundos sería $T = 5 * 7.5 = 37.5$. Luego sería restarle al tamaño de los 7.5 segundos a lo descargado a los 0 segundos, pero sería lo mismo. ***R2.*** Como la descarga tiene un porcentaje, en el tiempo $t = 7.5$s, la descarga lleva un porcentaje de 25 %. ***R3.*** El modelo encontrado del tamaño de la descarga es $T = 5 * t$. Como son valores, solo sería remplazar en la ecuación por $T = 5 * (t_1 - t_0) =????$.	***CR1.*** y **CR3.** ¿Por qué la idea de restar los valores que están entre estos dos valores? ***CR2.*** Si ha descargado el 25 % del archivo ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado?
e.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 7.5\ s$ hasta $t = 15\ s$? Explique su respuesta.**	***R1.*** Para el tiempo de 7.5 segundos sería $T = 5 * 7.5 = 37.5$. Luego sería restarle al tamaño de los 7.5 segundos a lo descargado a los 15 segundos $T = 5 * 15 = 75$. $75 - 37.5 = 37.5$. ***R2.*** Como la descarga tiene un porcentaje, en el tiempo $t = 7.5$s, la descarga lleva un porcentaje de 25 %. A los 15s lleva un porcentaje de 50%, luego entre el tiempo $t = 7.5s\ y\ t = 15s$ lleva el 25% del archivo descargado. ***R3.*** El modelo encontrado del tamaño de la descarga es $T = 5 * t$. Como son valores, solo sería remplazar en la ecuación por $T =$	***CR1.*** y **CR3.** ¿Por qué la idea de restar los valores que están, entre estos dos valores? ***CR2.*** Si ha descargado el 25 % del archivo ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado?

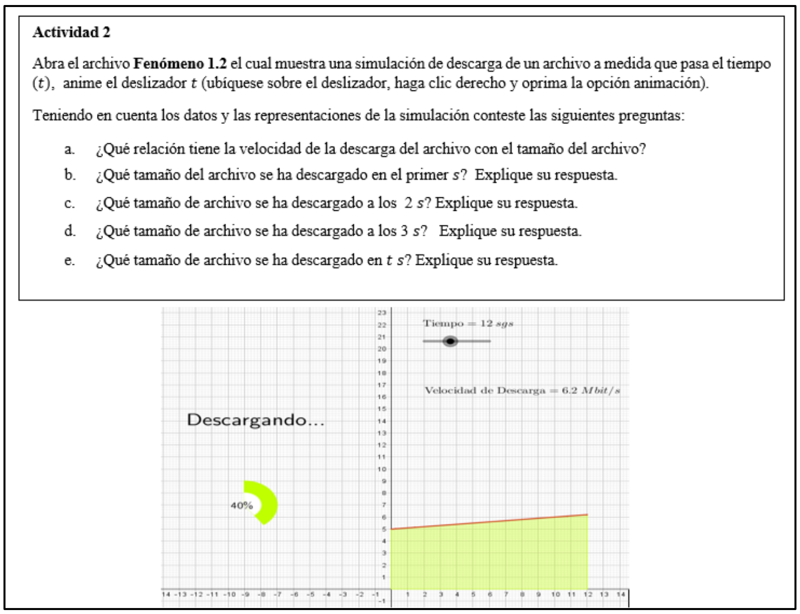
		$5*(t_1-t_0)=5*(15-7.5)=$ $5*7.5=37.5$	
f.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t=15\ s$ hasta $t=22.5\ s$? Explique su respuesta.**	***R1.*** Para el tiempo de 15 segundos sería $T=5*15=75.$ Luego sería restarle al tamaño de los 15 segundos a lo descargado a los 22.5 segundos. $T=5*22.5=112.5.$ $112.5-\ 75=37.5.$ ***R2.*** Como la descarga tiene un porcentaje, en el tiempo $t=15$ s, la descarga lleva un porcentaje de 50 %. A los 15 s lleva un porcentaje de 75%, luego entre el tiempo $t=15s\ y\ t=22.5s$ Tiene un 25% del archivo descargado. ***R3.*** El modelo encontrado del tamaño de la descarga es $T=5*t.$ Como son valores, solo sería remplazar en la ecuación por $T=5*(t_1-t_0)=5*(22.5-15)=$ $5*7.5=37.5$	***CR1.*** y **CR3.** ¿Por qué la idea de restar los valores que están, entre estos dos valores? ***CR2.*** Si ha descargado el 25 % del archivo ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en estos intervalos de tiempo?
g.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t=22.5\ s$ hasta $t=30\ s$? Explique su respuesta.**	***R1.*** Para el tiempo de 22.5 segundos sería $T=5*22.5=112.5$ Luego para saber entre los dos sería restarle al tamaño de los 30 segundos, lo descargado a los t=30s. $T=5*30=150$ Luego $150-112.5=37.5$ ***R2.*** Como la descarga tiene un porcentaje, en el tiempo $t=22.5$ s, la descarga lleva un porcentaje de 75 %. A los 30 s lleva un porcentaje de 100 %, luego entre el tiempo $t=22.5\ s\ y\ t=30\ s$ ***R3.*** El modelo encontrado del tamaño de la descarga es $T=5*t.$ Como son valores, solo sería remplazar en la ecuación por $T=5*(t_1-t_0)=5*(30-22.5)=$ $5*7.5=37.5$	***CR1.*** y **CR3.** ¿Por qué la idea de restar los valores que están, entre estos dos valores? ***CR2.*** Si ha descargado el 25 % del archivo ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado?

h.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en t s? Explique su respuesta.**	***R1.*** El tamaño del archivo es el área bajo la función de velocidad que es constante. ***R2.*** $T = 5 * t$ ***R3.*** $T(t) = \frac{t}{3}$, donde t=tiempo, T es el tamaño del archivo.	***CR.*** ¿Por qué?
i.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado entre $\Delta t = t_2 - t_1$, con t_1 y t_2 en el intervalo $[0, t]$? Explique su respuesta.**	***R1.*** El modelo encontrado del tamaño de la descarga es $T = 5 * t$. Como son valores, solo sería remplazar en la ecuación por $T = 5 * (t_2 - t_1)$. ***R2.*** El modelo encontrado del tamaño de la descarga es $T = 5 * t$. Como son valores, solo sería remplazar en la ecuación por $T = 5 * (t_2) - 5 * (t_1)$.	***CR.*** ¿Por qué?
j.	**¿A qué polígono se parece el área acumulada por el tamaño del archivo descargado entre $\Delta t = t_2 - t_1$?**	***R1.*** A un rectángulo ***R2.*** A un rectángulo que se va expandiendo ***R3.*** A un rectángulo que es parte del que describe el mayor, limitado en los intervalos de tiempo.	***CR.*** ¿Por qué?
k.	**¿A qué polígono se parece el área acumulada por el tamaño del archivo descargado entre $\Delta t = t_2 - t_1$, cuando $\Delta t \to 0$?**	***R1***. Se parece a un rectángulo cuya base es muy pequeña, se vuelven un segmento. La base de este rectángulo es la diferencia entre los tiempos, luego a medida que el tiempo sea muy cercano, el rectángulo se va asemejando al segmento.	***CR.*** ¿Si la velocidad no fuera constante, se formarían rectángulos?
l.	**¿Cómo halla el área acumulada desde $0\,s$ hasta $t\,s$ usando lo encontrado en los literales i, j, k?**	***R1.*** Sería la expresión encontrada, de $T = 5 * t$. ***R2.*** Haciendo el producto entre el tiempo total por la velocidad constante. ***R3.*** Dividir la región en rectángulos y sumar el área de cada rectángulo, ese sería el área total.	***CR1.*** ¿Qué pasaría si no tuviera la expresión? ***CR2.*** ¿Y si el área formada no fuera siempre un rectángulo? ***CR3.*** ¿Por qué?

Cabe resaltar que para las demás actividades se aplica la misma estructura de los apartados anteriores *trabajo individual* y *trabajo grupal.* Sin embargo, al terminar cada actividad se da a conocer un avance en cuanto al desarrollo del problema auténtico.

La actividad 2 (Figura 7) va acompañada de la simulación de descarga del archivo, graficando la función lineal en relación con la velocidad de descarga; la simulación permite explorar y observar las ideas conceptuales de acumulación y variación y plantear modelos matemáticos. En esta actividad se realizan las mismas preguntas de la actividad 1.

Figura 7 Taller I, Actividad 2


Actividad 2

Abra el archivo **Fenómeno 1.2** el cual muestra una simulación de descarga de un archivo a medida que pasa el tiempo (t), anime el deslizador t (ubíquese sobre el deslizador, haga clic derecho y oprima la opción animación).

Teniendo en cuenta los datos y las representaciones de la simulación conteste las siguientes preguntas:

a. ¿Qué relación tiene la velocidad de la descarga del archivo con el tamaño del archivo?
b. ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en el primer s? Explique su respuesta.
c. ¿Qué tamaño de archivo se ha descargado a los 2 s? Explique su respuesta.
d. ¿Qué tamaño de archivo se ha descargado a los 3 s? Explique su respuesta.
e. ¿Qué tamaño de archivo se ha descargado en t s? Explique su respuesta.

Con ese taller, se esperaba que los estudiantes logren visualizar el proceso de acumulación, esto permite que logren asociar conceptos como sumatoria y límite de una función, para la creación del modelo matemático que permita obtener el tamaño del archivo descargado en t segundos. También se espera que los estudiantes realicen el cálculo de áreas utilizando el área del triángulo y del rectángulo, logren identificar que $\Delta t \to 0$, para calcular el área sombreada.

A continuación, se exponen las tareas y las preguntas que pueden ser tomadas durante el trabajo individual y grupal, como parte del guion en la entrevista estructurada.

Tabla 5 Entrevista estructurada, Taller I, Actividad 2.

Tarea	***Posibles respuestas***	***Contra Preguntas***
Trabajo individual		
Abra el archivo Fenómeno 1.2 el cual muestra una simulación de descarga de un archivo a medida que pasa el tiempo (t). Anime el deslizador t (ubíquese sobre el deslizador, haga clic derecho y oprima la opción animación). **Teniendo en cuenta los datos y las representaciones de la simulación conteste las siguientes preguntas:** **¿Qué relación tiene la velocidad de la descarga del archivo con el tamaño del archivo?**	***R1.*** Aparece el porcentaje de descarga, entonces si conocemos cuál es el tamaño total del archivo, se podría realizar una regla de tres y encontrar la cantidad de tamaño descargado. ***R2.*** Conocer la velocidad o la ecuación de la velocidad en cualquier instante y a partir de esta encontrar una ecuación que ayude a conocer el tamaño en cualquier instante de tiempo. ***R3.*** Relación lineal ***R4.*** El tamaño de descarga es el área bajo la curva de la función velocidad.	***CR1.*** ¿Qué factores se asocian directamente a esta descarga? ***CR2.*** Si no conocieras el porcentaje en los 5 segundos ¿Qué información necesitaría? ***CR3.*** ¿Por qué? ¿Cuál sería esta relación? ***CR4.*** ¿En cualquier fenómeno, se tiene esta relación? ¿Cuál será la expresión para el tamaño del archivo en cualquier instante de tiempo?
¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en el primer s? Explique su respuesta.	***R1.*** En el primer segundo la velocidad es 5.1 $Mbits$ es decir, la velocidad ya no es constante como en el fenómeno anterior, por tanto, se debe hallar el área bajo a la curva, Sería $T(1) = 5(1) + \frac{(0.1)(1)(1)}{2}$ ***R2.*** Se podría pensar en que la velocidad va aumentando en 0.1 $\frac{Megabit}{s}$, luego sería hallar el valor del rectángulo y el triángulo que forma la curva.	***CR1.*** ¿Qué comportamiento tiene la velocidad? ***CR2.*** ¿Por qué?
¿Qué tamaño del archivo se ha descargado a los 2 s? Explique su respuesta.	***R1.*** En el primer segundo la velocidad es 5.2 $Mbits$ es decir, la velocidad ya no es constante como en el fenómeno anterior, por tanto, se debe hallar el área bajo a la curva, Sería $T(2) = 5(2) + \frac{(0.1)(2)(2)}{2}$ ***R2.*** Se podría pensar en que la velocidad va aumentando en 0.1 $\frac{Megabit}{s}$, luego sería hallar el valor del rectángulo y el triángulo que forma la curva.	***CR1.*** ¿Por qué el modelo encontrado funciona? ***CR2.*** ¿Qué pasaría si el tiempo no fuera en un segundo, sino en 1,35 s?
¿Qué tamaño del archivo se ha descargado a los 3 s? Explique su respuesta.	***R1.*** En el primer segundo la velocidad es 5.1 $Mbits$ es decir, la velocidad ya no es constante como en el fenómeno anterior, por tanto, se debe hallar el área bajo a la curva, Sería $T(3) = 5(3) + \frac{(0.1)(3)(3)}{2}$	***CR1.*** ¿Por qué?

	R2. Se podría pensar en que la velocidad va aumentando en 0.1 $\frac{Megabit}{s}$, luego sería hallar el valor del rectángulo y el triángulo que forma la curva.	***CR2.*** ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado a los 4,5?
¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en t s? Explique su respuesta.	***R1.*** Utilizando el modelo encontrado es: $$T(t) = 5(t) + \frac{(0.1)(t)(t)}{2}$$ ***R2.*** Se podría pensar en el fenómeno anterior en el que se deduce que el área bajo la curva de la función representa el tamaño del archivo descargado, luego es la suma entre el rectángulo $5t$, mas el área del triángulo de la parte de arriba que sería la base t, por la altura que sería $(0.1)t$, esto dividido en 2.	***CR.*** ¿Cómo obtuviste este modelo? ¿Se cumple para todos los fenómenos? ¿Qué condiciones debe tener?
A medida que se va generando la descarga del archivo, se va generando un área sombreada. ¿Qué representa el área sombreada?	***R1.*** Representa los Megabits descargados. ***R2.*** Representa el porcentaje de descarga. ***R3.*** Se encuentra el tiempo y los valores de velocidad de descarga.	***CR1.*** ¿Por qué? ***CR2.*** ¿Qué relación puede presentar el porcentaje de descarga con el tamaño de descarga del archivo? ***CR3.*** ¿Existe alguna relación a medida que pasa el tiempo?
¿Qué relación tiene el área sombreada con la velocidad de descarga del archivo? Explique su respuesta.	***R1.*** El valor del área sombreada en los instantes de tiempo representa el tamaño del archivo en esos instantes de tiempo. ***R2.*** El tamaño del archivo representa el área bajo la función velocidad, en este caso no se ve una relación directa como en el problema anterior, dado que aquí la velocidad es creciente linealmente, luego depende netamente del tiempo. ***R3.*** El área depende del tiempo, por la relación encontrada anteriormente.	***CR1.*** ¿Se cumple en cualquier instante de tiempo? ***CR2 y CR3.*** ¿Por qué? ***CR3.*** ¿Por qué?
¿Qué relación tiene el área sombreada con el tamaño del archivo que ha descargado? Explique su respuesta.	***R1.*** Representan lo mismo, el área bajo la función velocidad es igual al tamaño del archivo en un instante de tiempo cualesquiera. ***R2.*** El tamaño del archivo se puede encontrar a través de dividir el área en rectángulos y sumar cada una de sus respectivas áreas.	***CR1.*** ¿Por qué? ***CR2.*** Explica el procedimiento realizado ¿Siempre cumple? ***CR3.*** ¿Qué relación encontró para deducir esto?

	R3. El tamaño del archivo se puede encontrar a través de dividir en dos regiones el rectángulo 5t y el triángulo formado en la parte superior.	
¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 0\ s$ hasta $t = 7.5$ s? Explique su respuesta.	***R1.*** Para el tiempo de 7.5 segundos sería $T(7.5) = 5(7.5) + \frac{(0.1)(7.5)(7.5)}{2}$ Luego para saber entre los dos sería restarle al tamaño de los 7.5 segundos, lo descargado a los 0 segundos, pero sería lo mismo. ***R2.*** Como la descarga tiene un porcentaje, en el tiempo $t = 7.5$ s, la descarga lleva un porcentaje de 25 %. ***R3.*** El modelo encontrado del tamaño de la descarga es $T(t) = 5(t) + \frac{(0.1)(t)(t)}{2}$. Como son valores, solo sería remplazar en la ecuación.	***CR1.*** y **CR3.** ¿Por qué la idea de restar los valores que están, entre estos dos valores? ***CR2.*** Si ha descargado el 25 % del archivo ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado?
Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 7.5\ s$ hasta $t = 15\ s$? Explique su respuesta.	***R1.*** Para el tiempo de 7.5 segundos sería $T(7.5) = 5(7.5) + \frac{(0.1)(7.5)(7.5)}{2} = 40.312$ Luego para saber entre los dos sería restarle al tamaño de los 7.5 segundos, lo descargado a los 15 segundos. $T(t) = 5(15) + \frac{(0.1)(15)(15)}{2} = 86.25$ $86.25 - 40.312$ ***R2.*** Como la descarga tiene un porcentaje, en el tiempo $t = 7.5$ s, la descarga lleva un porcentaje de 25 %. A los 15 s lleva un porcentaje de 50%, luego entre el tiempo $t = 7.5s\ y\ t = 15s$ lleva el 25% del archivo descargado. ***R3.*** El modelo encontrado del tamaño de la descarga es $T(t) = 5(t) + \frac{(0.1)(t)(t)}{2}$. Como son valores, solo sería remplazar en la ecuación por $T(15 - 7.5) = 5(15 - 7.5) + \frac{(0.1)(15-7.5)^2}{2}$	***CR1.*** y **CR3.** ¿Por qué la idea de restar los valores que están, entre estos dos valores? ***CR2.*** Si ha descargado el 25 % del archivo ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado? ***CR3.*** ¿Por qué?
¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 15\ s$ hasta $t = 22.5\ s$? Explique su respuesta.	***R1.*** Para el tiempo de 15 segundos sería $T(15) = 5(15) + \frac{(0.1)(15)(15)}{2} = 86.25$	***CR1.*** y **CR3.** ¿Por qué la idea de restar los valores que están, entre estos dos valores?

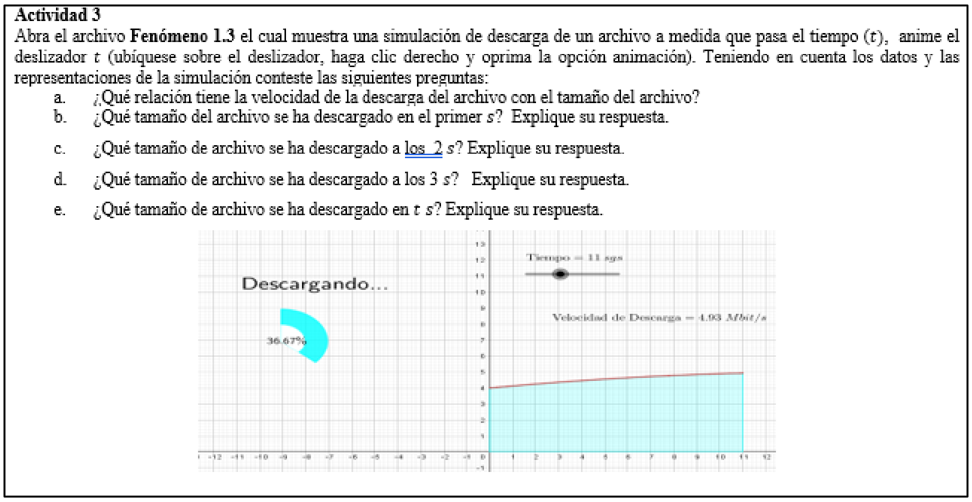
	Luego para saber entre los dos sería restarle al tamaño de los 15 segundos, lo descargado a los 22.5 segundos. $T(t) = 5(22.5) + \frac{(0.1)(22.5)(22.5)}{2} = 137.8$ $137.8 - 86.25$ ***R2.*** Como la descarga tiene un porcentaje, en el tiempo $t = 15$ s, la descarga lleva un porcentaje de 50 %. A los 22.5 s lleva un porcentaje de 75%, luego entre el tiempo $t = 15s\ y\ t = 22.5s$ lleva el 25% del archivo descargado. ***R3.*** El modelo encontrado del tamaño de la descarga es $T(t) = 5(t) + \frac{(0.1)(t)(t)}{2}$. Como son valores, solo sería remplazar en la ecuación por $T(22.5 - 15) = 5(22.5 - 15) + \frac{(0.1)(22.5-15)^2}{2}$	***CR2.*** Si ha descargado el 25 % del archivo ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado? ***CR3.*** ¿Por qué?
¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 22.5\ s$ hasta $t = 30\ s$? Explique su respuesta.	***R1.*** Para el tiempo de 22.5 segundos sería $T(22.5) = 5(22.5) + \frac{(0.1)(22.5)(22.5)}{2} = 137.8$ Luego para saber entre los dos sería restarle al tamaño de los 22.5 segundos, lo descargado a los 30 segundos. $T(30) = 5(30) + \frac{(0.1)(30)(30)}{2} = 195$ $195 - 137.8$ ***R2.*** Como la descarga tiene un porcentaje, en el tiempo $t = 22.5$ s, la descarga lleva un porcentaje de 75 %. A los 30 s lleva un porcentaje de 100%, luego entre el tiempo $t = 22.5\ s\ y\ t = 30\ s$ lleva el 25% del archivo descargado. ***R3.*** El modelo encontrado del tamaño de la descarga es $T(t) = 5(t) + \frac{(0.1)(t)(t)}{2}$. Como son valores, solo sería remplazar en la ecuación por $T(30 - 22.5) = 5(30 - 22.5) + \frac{(0.1)(30-22.5)^2}{2}$	***CR1.*** y **CR3.** ¿Por qué la idea de restar los valores que están, entre estos dos valores? ***CR2.*** Si ha descargado el 25 % del archivo ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado? ***CR3.*** ¿Por qué?

¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en t s? Explique su respuesta.	***R1.*** El tamaño del archivo es el área bajo la función de velocidad que es lineal. ***R2.*** $T(t) = 5(t) + \frac{(0.1)(t)(t)}{2}$	***CR.*** ¿Por qué?
¿Qué tamaño del archivo se ha descargado entre $\Delta t = t_2 - t_1$, con t_1 y t_2 en el intervalo $[0, t]$? Explique su respuesta.	***R1.*** El modelo encontrado del tamaño de la descarga es $T(t) = 5(t) + \frac{(0.1)(t)(t)}{2}$, como son valores, solo sería remplazar en la ecuación por $(t_2 - t_1)$. ***R2.*** El modelo encontrado del tamaño de la descarga es $T(\mathrm{t}) = 5(\mathrm{t}) + \frac{(0.1)(\mathrm{t})(\mathrm{t})}{2}$, se debe hallar cada valor por separado y realizar la resta.	***CR.*** ¿Por qué?
¿A qué polígono se parece el área acumulada por el tamaño del archivo descargado entre $\Delta t = t_2 - t_1$?	***R1.*** A un trapecio ***R2.*** A un rectángulo y un triángulo que se unen para formar el trapecio. Podría ser un rectángulo si es limitado en los intervalos de tiempo muy cercanos.	***CR.*** ¿Por qué?
¿A qué polígono se parece el área acumulada por el tamaño del archivo descargado entre $\Delta t = t_2 - t_1$, cuando $\Delta t \to 0$?	***R1***. Se parece a un rectángulo cuya base es muy pequeña, se vuelven un segmento. La base de este rectángulo es la diferencia entre los tiempos, luego a medida que el tiempo sea muy cercano, el rectángulo se va asemejando al segmento.	***CR.*** ¿Si la velocidad no fuera lineal, se formaría rectángulos?
¿Cómo halla el área acumulada desde $0\,s$ hasta $t\,s$ usando lo encontrado en los literales i, j, k?	***R1.*** Sería la expresión encontrada, de $T(t) = 5(t) + \frac{(0.1)(t)(t)}{2}$ ***R2.*** Haciendo la suma entre el área del rectángulo formado y el área del triángulo formado. ***R3.*** Dividir la región en rectángulos y sumar el área de cada rectángulo, ese sería el área total.	***CR1.*** ¿Qué pasaría si no tuviera la expresión? ***CR2.*** ¿Y si el área fuera irregular? ***CR3.*** ¿Por qué?

La actividad 3 (Figura 8) va acompaña de una simulación de descarga del archivo. La velocidad de descarga es una función parabólica. La simulación permite explorar y observar el área bajo la curva de la función, para así plantear modelos matemáticos, tanto en las fases de trabajo individual como en las de trabajo grupal.

Durante el desarrollo de esta tarea, se observa y se escucha los argumentos de los estudiantes, para así realizar preguntas a modo de entrevista sobre las ideas de acumulación, orientando hacia la definición de la integral como área. Los estudiantes pueden llegar a conclusiones de que se deben utilizar muchos rectángulos y triángulos, pero pueden llegar a ver el área formada por rectángulos con base infinitamente pequeña.

Figura 8 Taller I, Actividad 3



Actividad 3

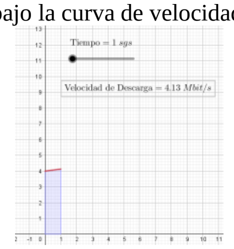
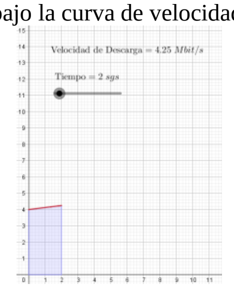
Abra el archivo **Fenómeno 1.3** el cual muestra una simulación de descarga de un archivo a medida que pasa el tiempo (t), anime el deslizador t (ubíquese sobre el deslizador, haga clic derecho y oprima la opción animación). Teniendo en cuenta los datos y las representaciones de la simulación conteste las siguientes preguntas:

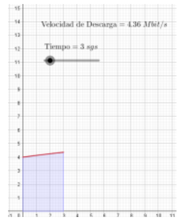
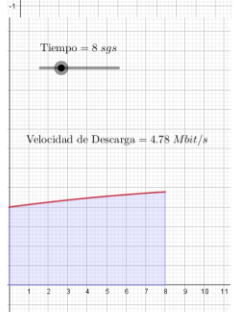
a. ¿Qué relación tiene la velocidad de la descarga del archivo con el tamaño del archivo?
b. ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en el primer s? Explique su respuesta.
c. ¿Qué tamaño de archivo se ha descargado a los 2 s? Explique su respuesta.
d. ¿Qué tamaño de archivo se ha descargado a los 3 s? Explique su respuesta.
e. ¿Qué tamaño de archivo se ha descargado en t s? Explique su respuesta.

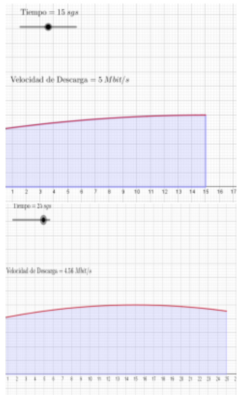
A continuación, se exponen las tareas y las preguntas que pueden ser tomadas durante el trabajo individual y grupal como parte del guion en la entrevista estructurada.

Tabla 6 Entrevista estructurada, Taller I, actividad 3.

Tarea	***Posibles respuestas***	***Contra Preguntas***
Trabajo individual		
Abra el archivo Fenómeno 1.3 el cual muestra una simulación de descarga de un archivo a medida que pasa el tiempo (t). Anime el deslizador t (ubíquese sobre el deslizador, haga clic derecho y oprima la opción animación). Teniendo en cuenta los datos y las representaciones de la simulación conteste las siguientes preguntas: a. **¿Qué relación tiene la velocidad de la descarga del archivo con el tamaño del archivo?**	***R1.*** Usar la idea intuitiva de que se asocia a la velocidad de descarga, teniendo en cuenta que hay una dependencia de la velocidad del internet asociado a la cantidad de Megas que pueda tener. ***R2.*** La regla de tres no sirve como se vio en las actividades anteriores, el tamaño del archivo equivale al área bajo la curva de la función velocidad, esa sería la relación. ***R3.*** Conocer la velocidad o la ecuación de la velocidad en cualquier instante y a partir de esta encontrar una ecuación que ayude a	***CR1.*** ¿Qué factores se asocian directamente a esta descarga? ***CR2.*** ¿Se puede expresar esa relación algebraicamente? ***CR3.*** ¿Por qué? ¿Cuál sería esta relación? ***CR4.*** ¿Por qué? ***CR5.*** ¿En cualquier fenómeno se tiene esta relación?

		conocer el tamaño en cualquier instante de tiempo. ***R4.*** Relación variable ***R5.*** El tamaño de descarga es el área bajo la curva de la función velocidad.	¿Cuál será la expresión para el tamaño del archivo en cualquier instante de tiempo?
b.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en el primer s? Explique su respuesta.**	***R1.*** En el primer segundo la velocidad es $4.13\,\frac{Mbit}{s}$, por tanto, se debe hallar el área bajo la curva de velocidad.  Se puede dividir la región en un rectángulo y el triángulo que se forma en la parte superior. Algo como el modelo encontrado anteriormente. $$T(1) = 4(1) + \frac{(1)(0.13)}{2}$$ ***R2.*** Se podría pensar que la velocidad va aumentando en el primer segundo, pero no es igual en cada segundo, su aumento no es lineal, usaría la estrategia de hallar el área bajo la curva.	***CR1.*** ¿Qué comportamiento tiene la velocidad? ***CR2.*** ¿Qué método utilizar para hallar el área bajo la curva?
c.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado a los 2 s? Explique su respuesta.**	***R1.*** A los 2 segundos la velocidad es $4.25\,\frac{Mbit}{s}$, por tanto, se debe hallar el área bajo la curva de velocidad.  Se puede dividir la región en un rectángulo y el triángulo que se forma en la parte superior. Algo similar al modelo encontrado anteriormente. $$T(2) = 4(2) + \frac{(2)(0.25)}{2}$$ ***R2.*** Se podría pensar en que la velocidad va aumentando a los dos segundos, pero no es igual en cada	***CR1.*** ¿Por qué el modelo encontrado funciona? ***CR2.*** ¿Qué pasaría si el tiempo no fuera dos segundos, sino en 2?35 s? ¿Se sigue formando el triángulo?

		segundo, su aumento no es lineal, usaría la estrategia de hallar el área bajo la curva.	
d.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado a los 3 s? Explique su respuesta.**	***R1.*** En el tercer segundo la velocidad es $4.36\frac{Mbit}{s}$, por tanto, se debe hallar el área bajo la curva de velocidad. Su aumento no es el mismo.  Se puede dividir la región en un rectángulo y el triángulo que se forma en la parte superior. Algo como el modelo encontrado anteriormente. $T(1) = 4(3) + \frac{(3)(0.36)}{2}$ ***R2.*** Se podría pensar en que la velocidad va aumentando en el tercer segundo, pero no es igual en cada segundo, su aumento no es lineal, usaría la estrategia de hallar el área bajo la curva.	***CR1.*** ¿Por qué? ***CR2.*** ¿Qué tamaño se ha descargado a los 4,5 s?
e.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en t s? Explique su respuesta.**	***R1.*** Se podría seguir calculando de la forma de sumar el área del rectángulo más el área del triángulo, pero hasta t=4s, si se aumenta ya no se forma un triángulo sino un segmento parabólico.  	***CR.*** ¿Obtuvo un modelo? ¿Se cumple para todos los fenómenos? ¿Qué condiciones debe tener?

	En el tiempo t=13 s se ve que se forma una parábola y en t=25s ya se ve la forma de la parábola.  Luego se debe buscar una forma de encontrar esta área. Sugeriría, el rectángulo que siempre se forma con área $4t$ y a través de triángulos aproximarlos al área. ***R2.*** Una forma de aproximarse al área bajo la curva dada, que es de forma parabólica, sería utilizar rectángulos con base muy pequeña que se inscriban bajo la curva.	
A medida que se va generando la descarga del archivo, se va generando un área sombreada. a. **¿Qué representa el área sombreada?**	***R1.*** Representa los Megabits descargados. . ***R2.*** Se encuentra el tiempo y los valores de velocidad de descarga.	***CR1.*** ¿Por qué? ***CR2.*** ¿Existe alguna relación a medida que pasa el tiempo?
b. **¿Qué relación tiene el área sombreada con la velocidad de descarga del archivo? Explique su respuesta.**	***R1.*** El valor del área sombreada en los instantes de tiempo representa el tamaño del archivo en esos instantes de tiempo. ***R2.*** El tamaño del archivo representa el área bajo la función velocidad, en este caso no se ve una relación directa como en el primer y segundo problema, dado que aquí la velocidad no aumenta a la misma razón. ***R3.*** El área depende del tiempo y se forma bajo la gráfica de la velocidad.	***C1.*** ¿Se cumple en cualquier instante de tiempo? ***C2.*** ¿Por qué? ***C3.*** ¿Por qué?
c. **¿Qué relación tiene el área sombreada con el tamaño del archivo que ha descargado? Explique su respuesta.**	***R1.*** Representan lo mismo, el área bajo la función de velocidad es igual al tamaño del archivo en un instante de tiempo cualesquiera. ***R2.*** El tamaño del archivo se puede encontrar dividiendo el área en rectángulos y sumar cada una de sus respectivas áreas.	***C1.*** ¿Por qué? ***C2.*** Explique el procedimiento realizado ¿Siempre cumple? ¿Qué relación encontró para deducir esto?
d. **¿Qué tamaño del archivo se ha descargado**	***R1.*** No lo sé.	***CR.*** ¿De dónde surge la idea de aproximar por rectángulos? ¿Existe

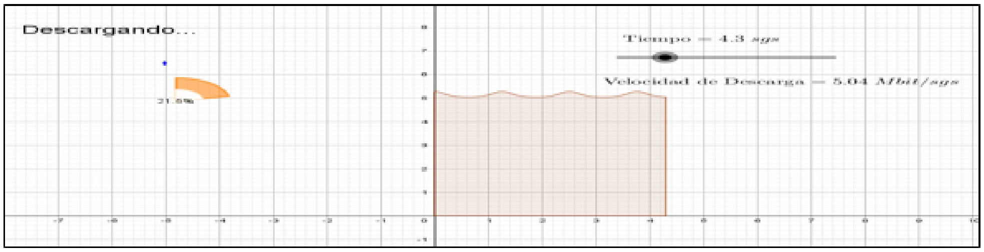
	desde $t = 0\ s$ hasta $t = 7.5\ s$? Explique su respuesta.	***R2.*** Traté de utilizar el modelo encontrado en la actividad anterior pero no logré encontrar algo común en ellos, por tanto, usé el comando *suma inferior*, pregunté cómo se llama la función si es v, dado que es la velocidad, luego creé un deslizador con $0 \leq n \leq 1000$, que me va a representar el número de rectángulos, luego en el tiempo $t = 7\ s$ porque no se muestra en $t = 7.5\ s$	alguna expresión algebraica que me permita deducir el área, usando este método? ¿Conoce el comando suma inferior o suma superior? ¿Qué valor de incremento tiene el tiempo?
e.	**Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 7.5\ s$ hasta $t = 15\ s$? Explique su respuesta.**	***R1.*** Realizando nuevamente el proceso anterior, para $t = 15$. El valor es aproximadamente 69.98 que representan los Megabits descargados. Y en el tiempo $t = 7.5$ el valor aproximado es de: 33.12 Megabits. Luego entre estos dos valores, será la resta de ambos.	***CR1.*** ¿Por qué la idea de restar los valores que están, entre estos dos valores? ¿Existe alguna expresión algebraica que me permita deducir el área, usando este método? ¿Conoce el comando suma inferior o suma superior? ¿Qué valor de incremento tiene el tiempo?
f.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 15\ s$ hasta $t = 22.5\ s$? Explique su respuesta.**	***R1.*** Realizando nuevamente el proceso anterior, para $t = 22.5$. El valor es aproximadamente 106.85 que representan los Megabits descargados. con un numero de 542 rectángulos inscritos. Y en el tiempo $t = 15$ el valor aproximado es de: 69.98 Megabits. Luego entre estos dos valores, será la resta de ambos.	***CR1.*** ¿Por qué la idea de restar los valores que están, entre estos dos valores? ¿Hasta cuantos rectángulos se puede aproximar? ¿Existe alguna expresión algebraica que me permita deducir el área, usando este método? ¿Conoce el comando suma inferior o suma superior? ¿Qué valor de incremento tiene el tiempo?
g.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 22.5\ s$ hasta $t = 30\ s$? Explique su respuesta.**	***R1.*** Realizando nuevamente el proceso anterior, para $t = 30$. El valor es aproximadamente 139.94 que representan los Megabits descargados. con un numero de 542 rectángulos inscritos. Y en el tiempo $t = 22.5$ el valor aproximado es de: 106.85 Megabits. Luego entre estos dos valores, será la resta de ambos.	***CR1.*** ¿Por qué la idea de restar los valores que están, entre estos dos valores? ¿Hasta cuantos rectángulos se puede aproximar? ¿Existe alguna expresión algebraica que me permita deducir el área, usando este método? ¿Conoce el comando suma inferior o suma superior? ¿Qué valor de incremento tiene el tiempo?
h.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en $t\ s$? Explique su respuesta.**	***R1.*** En cualquier instante de tiempo es la suma de los rectángulos inscritos bajo la curva, entre más rectángulos estén mayor será aproximado el área. ***R2.*** Eso sería la sumatoria de las áreas de los rectángulos.	***CR.*** ¿Por qué? ¿Qué longitud debe tener el tamaño de cada rectángulo?
i.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado entre $\Delta t = t_2 - t_1$, con t_1 y t_2 en el intervalo $[0, t]$? Explique su respuesta.**	***R1.*** Si t_1 y t_2 tienen una distancia importante, es necesario inscribir rectángulos con bases más pequeñas, que logren dar un valor aproximado del área. ***R2.*** $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t}$, donde el $\Delta t = t_2 - t_1, y\ f(t_i) es\ la\ altura\ de\ los\ rectán$	***CR.*** ¿Por qué?
j.	**¿A qué polígono se parece el área**	***R1.*** A un trapecio al inicio, luego se forma un rectángulo con un segmento parabólico.	***CR.*** ¿Por qué?

	acumulada por el tamaño del archivo descargado entre $\Delta t = t_2 - t_1$?	***R2.*** Podría ser un rectángulo si es limitado en los intervalos de tiempo muy cercanos.	
k.	**¿A qué polígono se parece el área acumulada por el tamaño del archivo descargado entre $\Delta t = t_2 - t_1$, cuando $\Delta t \to 0$?**	***R1***. Se parece a un rectángulo cuya base es muy pequeña, parece un segmento. La base de este rectángulo es la diferencia entre los tiempos, luego a medida que el tiempo sea muy cercano, el rectángulo se va asemejando al segmento.	***CR.*** ¿Cómo sumar el área de cada rectángulo?
l.	**¿Cómo halla el área acumulada desde $0\,s$ hasta $t\,s$ usando lo encontrado en los literales i, j, k?**	***R1.*** Sería la expresión encontrada, de $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$, pero aplicando el límite, mostrando que el número de intervalos tienda a ser infinito. ***R2.*** Dividir la región en rectángulos y sumar el área de cada rectángulo, ese sería el área total.	***CR1.*** ¿Por qué la idea de límite? ***CR2.*** ¿Por qué?

En el taller II (https://www.geogebra.org/group/stream/id/VCvxed2ra), se presenta nuevamente el problema auténtico de descarga de un archivo, con el fin de introducir la definición de integral como el límite de la suma de las áreas de los rectángulos inscritos entre la curva y el eje positivo de las x, con base infinitesimal y altura $f(x)$.

En la actividad 1 (Figura 9), se presenta la simulación de descarga de un archivo. La velocidad de descarga es una función sinusoidal, es una de las funciones que tienen mayor semejanza con el comportamiento de la velocidad de descarga del archivo en los programas reales. Las mejores conexiones a internet son las que su variación es nula, es decir, la velocidad de descarga es constante, pero en la vida real se presentan variaciones que hace que la conexión no sea óptima.

Figura 9 Taller II, Actividad 1



Para determinar el tamaño de descarga de archivo, los estudiantes deben crear el modelo utilizando áreas de figuras conocidas e inscribiendo estas figuras en el área irregular e ir sumando; creando así el modelo matemático para dar solución a la actividad.

A continuación, se exponen las tareas y las preguntas que pueden ser tomadas durante el trabajo grupal, como parte del guion en la entrevista estructurada.

Tabla 7 Entrevista estructurada, Taller II, actividad 1.

Tarea	***Posibles respuestas***	***Contra Preguntas***
Trabajo individual		
Abra el archivo Fenómeno 2.1 el cual muestra una simulación de descarga de un archivo a medida que pasa el tiempo (t) muy cercana a la proporcionada por el medidor de datos proporcionado por la empresa ETB. Anime el deslizador t. **Teniendo en cuenta los datos y las representaciones de la simulación conteste las siguientes preguntas:** a. **¿Es posible describir el comportamiento de la velocidad de descarga a través de una función? ¿Por qué?**	***R1.*** De la velocidad de descarga si es posible, el máximo valor que llega a tomar es $5.26\frac{Mbit}{s}$ y el menor valor es $5.04\frac{Mbit}{s}$, entonces, el valor medio estaría entre $5.15\frac{Mbit}{s}$. La función tiene un comportamiento similar a la función coseno y esta desplazada 5.15 unidades; sería algo como: $$f(t)=\frac{1}{10}\cos(t)+5.15$$ ***R2.*** Se podrían tomar los valores de la velocidad y hacer una regresión de dos variables para conocer cuál es la función que modela mejor el problema. ***R3.*** Es posible, pero no es necesario, lo que realmente interesa es el comportamiento y el área bajo la curva de esto.	***CR1.*** ¿Qué factores se asocian directamente a esta descarga? ***CR2.*** ¿Por qué es importante dar una aproximación a la función? ***CR3.*** ¿Por qué el área bajo la curva? ¿Para qué se obtienen los valores de la velocidad de descarga?
b. **¿Qué significado tiene el área sombreada bajo la**	***R1.*** Según lo desarrollado en el anterior taller, es el tamaño del	***CR1.*** Pero el comportamiento es diferente a lo que se ha visto en el

	curva de la función velocidad de descarga de un archivo? Explique su respuesta.	archivo que va siendo descargado a medida que pasa el tiempo. ***R2.*** No tiene significado. ***R3.*** Es el tamaño del archivo descargado que se calcula a través de la integral desde el tiempo $t = 0$ hasta el tiempo t, el cuál varía entre $0 \leq t \leq 30$.	taller anterior, ¿Por qué se seguiría cumpliendo? ***CR2.*** ¿Por qué no tiene significado? ***CR3.*** ¿Qué es la integral?
c.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado a los 2 s? Explique su respuesta.**	***R1.*** Debe ser un valor muy cercano a $10.23\ Mibt$ ***R2.*** El área bajo la curva de la función velocidad de descarga representa el tamaño del archivo que está siendo descargado, para hallar esa área nos podemos aproximar con un rectángulo de base 2 s, y de altura $5\frac{Mbit}{s}$, lo que faltaría lo que queda en la parte de arriba. ***R3.*** Sería aproximar el área por rectángulos de base pequeña, con 4 rectángulos bastaría y sumar el área de estos rectángulos.	***CR1.*** ¿Cómo deduce este valor? ***CR2.*** ¿Cómo hallar la parte que tiene una forma irregular en la curva? ***CR3.*** ¿Qué altura toman los rectángulos?, Si son 4 rectángulos ¿Qué longitud de base tendría cada rectángulo?
d.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado a los 3 s? Explique su respuesta.**	***R1.*** Debe ser un valor muy cercano a $16.5\ Mibt$ ***R2.*** El área bajo la curva de la función velocidad de descarga representa el tamaño del archivo que está siendo descargado, para hallar esa área nos podemos aproximar con un rectángulo de base 3 s, y de altura $5\frac{Mbit}{s}$, lo que faltaría lo que queda en la parte de arriba. ***R3.*** Sería aproximar el área por rectángulos de base pequeña, con 8 rectángulos bastaría, y sumar el área de estos rectángulos.	***CR1.*** ¿Cómo deduce este valor? ***CR2.*** ¿Cómo hallar la parte que tiene una forma irregular en la curva? ***CR3.*** ¿Qué altura toman los rectángulos?, Si son 8 rectángulos ¿Qué longitud de base tendría cada rectángulo?
e.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en t s? Explique su respuesta.**	***R1.*** Para un valor de t cualquiera siempre va a estar el valor del rectángulo $5t$, pero faltaría la parte del área con forma irregular. ***R2.*** Es difícil calcular para cualquier valor de t siempre se debe dar su valor especifico, es decir, si es $t = 1,2,5, \ldots, 30$ ***R3.*** Tendría que dividir el intervalo dado en tamaños iguales, crear rectángulos con base los subintervalos creados y la altura	***CR1.*** ¿Cómo sería hallar el valor del área que tiene forma irregular? ***CR2.*** ¿Existe alguna relación al determinar el tamaño de descarga en cada uno de estos tiempos? ***CR3.*** ¿Qué longitud tienen esos subintervalos? ¿Qué cantidad de rectángulos se deben crear? ***CR4.*** ¿Cómo obtuviste este modelo? ¿Esta expresión no indica la cantidad a la cual tiende el valor de n.

		igual al valor de la velocidad en los extremos de cada intervalo, para luego sumarlos. ***R4.*** $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t_i$	
f.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 0\ s$ hasta $t = 5.5\ s$? Explique su respuesta.**	***R1.*** Sería lo mismo que encontrar el tamaño del archivo descargado en $t = 5.5s$ ya que en $t = 0\ s$ no se ha descargado un tamaño del archivo. ***R2.*** Debe ser aproximadamente $5.27\frac{Megabit}{s} * 5.5\ s\ \approx 29$	***CR1.*** ¿Por qué? Calcule el valor. ***CR2.*** ¿Por qué? ¿Cómo lo calculo?
g.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 5.5\ s$ hasta $t = 11.6\ s$? Explique su respuesta.**	***R1.*** Sería hallar el valor del área hasta el tiempo $t = 11.6\ s$ y restarle el valor del área hasta el tiempo $t = 5.5\ s$. así se conoce que tamaño de archivo se ha descargado entre estos tiempos. ***R2.*** Calculo el valor del área en el tiempo $t = 11.6\ s$, que es aproximadamente $5.27\frac{Megabit}{s} * 11.6\ s\ \approx 61\ Mbit$, y el valor en $t = 5.5\ s$, que es aproximadamente $29\ Mbit$. Luego resto estos dos valores: $61 - 29 = 32.132$, por lo que el valor sería $32.132\ Mbit$.	***CR1.*** Realice el procedimiento. ¿Por qué considera la resta? ***CR2.*** ¿Por qué considera la resta? ¿Cómo calculo estos valores?
h.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 11.6\ s$ hasta $t = 14.5s$? Explique su respuesta.**	***R1.*** Sería hallar el valor del área hasta el tiempo $t = 14.5\ s$ y restarle el valor del área hasta el tiempo $t = 11.6\ s$, así se conoce que tamaño de archivo se ha descargado entre estos tiempos. ***R2.*** Calculo el valor del área en el tiempo $t = 14.5\ s$, que es aproximadamente $5.27\frac{Megabit}{s} * 14.5\ s\ \approx 76.4\ Mbit$, y el valor en $t = 11.6\ s$, que es aproximadamente $61\ Mbit$. Luego resto estos dos valores: $76.4 - 61 = 15.4$, por lo que el valor sería $15.4\ \ Mbit$.	***CR1.*** Realice el procedimiento. ¿Por qué considera la resta? ***CR2.*** ¿Por qué considera la resta? ¿Cómo calculo estos valores?
i.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 14.5\ s$ hasta $t = 20\ s$? Explique su respuesta.**	***R1.*** Seria hallar el valor del área hasta el tiempo $t = 20\ s$ y restarle el valor del área hasta el tiempo $t = 14.5\ s$ asi, se conoce que tamaño de archivo se ha descargado entre estos tiempos. ***R2.*** Si calculamos el valor del área en el tiempo $t = 20\,s$ es aproximadamente $5.27\frac{Megabit}{s} * 20\ s\ \approx 105.4\ \ Mbit$. Y el valor en $t = 14.5\ s$ es aproximadamente $76.4\ \ Mbit$.	***CR1.*** Realice el procedimiento. ¿Por qué considera la resta? ***CR2.*** ¿Por qué considera la resta? ¿Cómo calculo estos valores?

	Luego entre estos dos valores sería la resta $105.4 - 76.4 = 29$, luego el valor sería 29 $Mbit$.	

Durante el desarrollo de esta tarea, se observa y se escuchan los argumentos de los estudiantes, sobre las ideas de acumulación, enfocadas hacia la definición del concepto de integral y el modelo más apropiado para determinar el tamaño del archivo en cualquier instante de tiempo t.

En la actividad 2 se presenta la simulación de la actividad 1, pero se añade la herramienta de suma inferior y de suma superior que viene en el software de GeoGebra (https://www.geogebra.org/group/stream/id/VCvxed2ra); esto permite explorar y observar ideas conceptuales como el límite, la sumatoria, área y función. Los estudiantes pueden llegar al modelo matemático del área como el $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i$, donde n representa el número de rectángulos inscritos, y $f(x_i)\Delta x_i$ representa el área de cada uno de los rectángulos. Las preguntas están orientadas a reconocer el proceso de acumulación que está involucrado en el concepto de integral.

A continuación, se muestran las tareas y las preguntas que pueden ser tomadas durante el trabajo grupal como parte del guion en la entrevista.

Tabla 8 Entrevista estructurada, Taller II, actividad 2

Tarea	***Posibles respuestas***	***Contra Preguntas***
Trabajo individual		
Abra el archivo Fenómeno 2.2. El cual muestra la simulación de descarga de un archivo a medida que pasa el tiempo (t). Anime el deslizador (t). Ubíquese en la parte superior y seleccione la casilla Suma Superior e incremente el valor del deslizador n en una unidad, puede utilizar las	***R1.*** Al incrementar el valor de n, aparecen rectángulos inscritos por encima de la curva de la función velocidad. ***R2.*** Se generan rectángulos en el área sombreada y aparece el valor del área.	***CR.*** ¿Qué relación tiene estos rectángulos con el tamaño del archivo que está siendo descargado?

flechas de desplazamiento de su teclado. **En la hoja de trabajo. Conteste las siguientes preguntas:** **a. ¿Qué sucede al incrementar el valor del deslizador n?**		
b. ¿Qué relación hay entre n y la longitud de los subintervalos?	***R1.*** La longitud de los rectángulos depende de n.	***CR1.*** ¿Existe alguna expresión algebraica?
c. ¿Qué sucede a medida que aumenta n, con la longitud de los subintervalos?	***R1.*** A medida que se incrementa el valor de n la longitud de la base de los rectángulos es más pequeña.	***CR1.*** ¿Qué pasaría en un tiempo específico t, si inicia con un rectángulo, con dos rectángulos, con quinientos rectángulos.
d. ¿Qué altura toma cada uno de los rectángulos?	***R1.*** Pues la altura depende del valor que toma la cantidad de rectángulos, la altura es el valor del extremo derecho del subintervalo. ***R2.*** Es el valor de la velocidad máxima, porque siempre el rectángulo queda por encima de la curva, y toma la imagen mayor.	***CR1.*** ¿Por qué? ***CR2.*** De un ejemplo.
e. ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado a los 2 s, con $n = 1, n = 6$? Explique su respuesta.	***R1.*** Con $n = 2$ en el tiempo $t = 2s$ es 10.54 $Mbit$. Con $n = 6$ en el tiempo $t = 2s$ es 10.36 $Mbit$. Cuando n es mayor se va acercando más al valor del área.	***CR.*** ¿Qué pasaría si $n = 500$?
f. ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado a los 3 s, con $n = 3, n = 15$? Explique su respuesta.	***R1.*** Con $n = 3$ en el tiempo $t = 3s$ es 15.82 $Mbit$. Con $n = 15$ en el tiempo $t = 3s$ es 15.51 $Mbit$. Cuando n es mayor se va acercando más al valor del área.	***CR.*** ¿Qué pasaría si $n = 500$? ¿Cuál sería el valor?
g. ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado a los t s, con $n = 3, n = 40, n = 120$? Explique su respuesta.	***R.*** Para hallar el tamaño del archivo se debe hallar el área bajo la curva. Cuando el tiempo es $t\ sgs$ si $n = 3$ varía el tamaño, por ejemplo, si $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$, los rectángulos se ajustan a la forma de la curva y la longitud de la base de cada intervalo debe ser $3 * \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, y el tamaño del archivo sería: Tamaño del archivo= $\left(\frac{1}{2}\right)(5.27) + \left(\frac{1}{2}\right)(5.13) + \left(\frac{1}{2}\right)(5.27) = 7.835$. Pero para valores de t mayores a $t = \frac{3}{2}$ el área es $5.27 * t$. Cuando $n = 40$, la longitud de intervalo depende de t y de n , es decir, $\Delta t = \frac{t_2 - t_1}{40}$, y el valor de la altura sigue siendo la mayor imagen	***CR.*** ¿Qué pasaría si $n = 500$? ¿Cuál sería el valor? ¿Se cumpliría para cualquier función?

		de la función en ese intervalo de tiempo. Por ejemplo, si $t = 20$, entonces la longitud de los intervalos es $\Delta t = \frac{20-0}{40} = \frac{1}{2}$ Entonces el área de la función sería: $A = \left(\frac{1}{2}\right) f(t_1) + \left(\frac{1}{2}\right) f(t_2) + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right) f(t_{20})$ Con $t_1, t_2. t_3, \ldots, t_{20}$ los valores de tiempo que toman el mayor valor de imagen.	
h.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 0\ s$ hasta $t = 5.5\ s$, con $n = 20, n = 30 = 60$, cuando $n \to \infty$? Explique su respuesta.**	***R1.*** El tamaño entre $t = 0s$, hasta $t = 55\ s$, es el mismo tamaño hasta el tiempo $t = 55\ s$, el cuál es el valor del área bajo la curva. Si lo hacemos a través del software con $n = 20$ el tamaño del archivo sería $28,49\ Mbit$, con $n = 30$ el tamaño del archivo sería $28,4\ Mbit$, con $n = 60$ el tamaño del archivo sería $28,31\ Mbit$. Cuando $n \to \infty$ el tamaño del archivo tendría al valor más exacto del área. ***R2.*** El tamaño entre $t = 0s$, hasta $t = 55\ s$, es el mismo tamaño hasta el tiempo $t = 55\ s$, el cuál es el valor del área bajo la curva. Si lo hacemos a través del software con $n = 20$ el tamaño del archivo sería $28,49\ Mbit$, con $n = 30$ el tamaño del archivo sería $28,4\ Mbit$, con $n = 60$ el tamaño del archivo sería $28,31\ Mbit$. Cuando $n \to \infty$ el tamaño del archivo tendría al valor más exacto del área. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t_i$.	***CR1.*** ¿Existe alguna expresión para esto? ***CR2.*** ¿Por qué utilizar el límite?
i.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 5.5\ s$ hasta $t = 11.6\ s$, con $n = 20, n = 30 = 60$, cuando $n \to \infty$? Explique su respuesta.**	***R1.*** El tamaño entre $t = 11.6\ s$ y $t = 5.5\ s$ es calculando el valor en el tiempo final que es $t = 14.5\ s$ y restarle el que lleva en $t = 5.5\ s$. El tamaño hasta el tiempo $t = 11{,}6\ s$, el cuál es el valor del área bajo la curva. Si lo hacemos a través del software con $n = 20$ el tamaño del archivo sería $60,66\ Mbit$, con $n = 30$ el tamaño del archivo sería $60{,}31\ Mbit$, con $n = 60$ el tamaño del archivo sería $59{,}91\ Mbit$. Luego el valor del tamaño de descarga sería la resta en:	***CR1.*** ¿Existe alguna expresión para esto? ***CR2.*** ¿Por qué utilizar el límite?

		$n = 20 \;\; 60,66 - 28.49 = 32{,}17$ $n = 30 \;\; 60,31 - 28.4 = 31{,}91$ $n = 60 \;\; 59,91 - 28{,}31 = 31{,}6$ Cuando $n \to \infty$ el tamaño del archivo tendría al valor más exacto del área. ***R2.*** El tamaño entre $t = 11.6\, s$ y $t = 5.5\, s$ es calculando el valor en el tiempo final que es $t = 14.5\, s$ y restarle el que lleva en $t = 5.5\, s$. El tamaño hasta el tiempo $t = 11{,}6\, s$, el cuál es el valor del área bajo la curva. Si lo hacemos a través del software con $n = 20$ el tamaño del archivo sería $60,66\, Mbit$, con $n = 30$ el tamaño del archivo sería $60{,}31\; Mbit$, con $n = 60$ el tamaño del archivo sería $59{,}91\, Mbit$. Luego el valor del tamaño de descarga sería la resta en: $n = 20 \;\; 60,66 - 28.49 = 32{,}17$ $n = 30 \;\; 60,31 - 28.4 = 31{,}91$ $n = 60 \;\; 59,91 - 28{,}31 = 31{,}6$ Cuando $n \to \infty$ el tamaño del archivo tendría al valor más exacto del área. $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta t_i}$**.**	
j.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 11.6\, s$ hasta $t = 14.5s$, con $n = 20, n = 30 = 60$? Explique su respuesta.**	***R1.*** El tamaño entre $t = 14,5\, s$ y $t = 11{,}6\, s$ es calculando el valor en el tiempo final que es $t = 14{,}5\, s$ y restarle el que lleva en $t = 11{,}6\, s$. El tamaño hasta el tiempo $t = 14{,}5\, s$, el cuál es el valor del área bajo la curva. Si lo hacemos a través del software con $n = 20$ el tamaño del archivo sería $76,09\, Mbit$, con $n = 30$ el tamaño del archivo sería $75,57\; Mbit$, con $n = 60$ el tamaño del archivo sería $74{,}98\, Mbit$. Luego el valor del tamaño de descarga sería la resta en: $n = 20 \;\; 76{,}09 - 60,66 = 15{,}43$ $n = 30 \;\; 75{,}57 - 60,31 = 15{,}26$ $n = 60 \;\; 74{,}98 - 59,91 = 15{,}07$ Cuando $n \to \infty$ el tamaño del archivo tendría al valor más exacto del área. ***R2.*** El tamaño entre $t = 14,5\, s$ y $t = 11{,}6\, s$ es calculando el valor en	***CR1.*** ¿Existe alguna expresión para esto? ***CR2.*** ¿Por qué utilizar el límite?

		el tiempo final que es $t = 14{,}5\ s$ y restarle el que lleva en $t = 11{,}6\ s$. El tamaño hasta el tiempo $t = 14{,}5\ s$, el cuál es el valor del área bajo la curva. Si lo hacemos a través del software con $n = 20$ el tamaño del archivo sería $76{,}09\ Mbit$, con $n = 30$ el tamaño del archivo sería $75{,}57\ Mbit$, con $n = 60$ el tamaño del archivo sería $74{,}98\ Mbit$. Luego el valor del tamaño de descarga sería la resta en: $n = 20\ \ 76{,}09 - 60{,}66 = 15{,}43$ $n = 30\ \ 75{,}57 - 60{,}31 = 15{,}26$ $n = 60\ \ 74{,}98 - 59{,}91 = 15{,}07$ Cuando $n \to \infty$ el tamaño del archivo tendría al valor más exacto del área. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta t_i$.	
k.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado desde $t = 14.5\ s$ hasta $t = 20\ s$ con $n = 20, n = 30 = 60,$ cuando $n \to \infty$? Explique su respuesta.**	***R1.*** El tamaño entre $t = 20\ s$ y $t = 14{,}5\ s$ es calculando el valor en el tiempo final que es $t = 20\ s$ y restarle el que lleva en $t = 14{,}5\ s$ El tamaño hasta el tiempo $t = 20\ s$, el cuál es el valor del área bajo la curva. Si lo hacemos a través del software con $n = 20$ el tamaño del archivo sería $105{,}37\ Mbit$, con $n = 30$ el tamaño del archivo sería $104{,}74\ Mbit$, con $n = 60$ el tamaño del archivo sería $103{,}67\ Mbit$. Luego el valor del tamaño de descarga sería la resta en: $n = 20\ \ 105{,}37 - 76{,}09 = 29{,}28$ $n = 30\ \ 104{,}04 - 75{,}57 = 29{,}17$ $n = 60\ \ 102{,}67 - 74{,}98 = 27{,}69$ Cuando $n \to \infty$ el tamaño del archivo tendría al valor más exacto del área. ***R2.*** El tamaño entre $t = 20\ s$ y $t = 14{,}5\ s$ es calculando el valor en el tiempo final que es $t = 20\ s$ y restarle el que lleva en $t = 14{,}5\ s$ El tamaño hasta el tiempo $t = 20\ s$, el cuál es el valor del área bajo la curva. Si lo hacemos a través del software con $n = 20$ el tamaño del archivo	***CR1.*** ¿Existe alguna expresión para esto? ***CR2.*** ¿Por qué utilizar el límite?

		sería $105,37\ Mbit$, con $n = 30$ el tamaño del archivo sería $104,74\ Mbit$, $n = 60$ el tamaño del archivo sería $103{,}67\ Mbit$. Luego el valor del tamaño de descarga sería la resta en: $n = 20\ \ 105{,}37 - 76{,}09 = 29{,}28$ $n = 30\ \ 104{,}04 - 75{,}57 = 29{,}17$ $n = 60\ \ 102{,}67 - 74{,}98 = 27{,}69$ Cuando $n \to \infty$ el tamaño del archivo tendría al valor más exacto del área. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t_i$.	
l.	**Busque una expresión para la longitud de los subintervalos para cualquier n, en un intervalo $[t_1, t_2]$, con $t_1, t_2 \in [0, t]$.**	***R1.*** La longitud depende del valor de t. ***R2.*** Se toma el valor del tiempo final t_2, se le resta el valor del tiempo inicial t_1. Y se divide en el número de intervalos n. $(t_2 - t_1)/n$	***CR1.*** ¿Por qué depende de un valor exacto? ***CR2.*** ¿Por qué?
m.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado entre $\Delta t = t_1 - t_2$, con t_1 y t_2 en el intervalo $[0, t]$? Explique su respuesta.**	***R1.*** Sería la sumatoria de las áreas de los rectángulos hasta t_2, restando la sumatoria de áreas de los rectángulos hasta t_1	***CR.*** ¿Por qué?
n.	**¿Cómo hallar el área acumulada desde $0\ s$ hasta $t\ s$? De una expresión algebraica.**	***R1.*** Sería $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t_i$	***CR.*** ¿Por qué?

En la actividad 3, presenta la misma simulación de la actividad 2, esta simulación es ligada a la suma superior, es decir, a los rectángulos inscritos en la curva que toman el valor del extremo del subintervalo mayor, lo que se quiere es que los estudiantes también logren ver la diferencia entre la suma superior e inferior y reconocer cuál es el t_i que toma la función que me permite acercar al valor más próximo del área bajo la curva.

Tabla 9 Entrevista estructurada, Taller II, actividad 3

Tarea	***Posibles respuestas***	***Contra Preguntas***

En el fenómeno 2.2. Desmarque la casilla de Suma Superior y marque la casilla Suma Inferior. En la hoja de trabajo. Conteste las siguientes preguntas: **a. ¿Qué diferencia existe entre la Suma Superior y la Suma Inferior?**	***R1.*** La suma superior inscribe rectángulos por encima de la curva de la función velocidad de descarga, la suma inferior inscribe rectángulos por debajo de la curva de la función velocidad de descarga. ***R2.*** No existe ninguna diferencia.	***CR.*** ¿Qué sucede con las alturas?
b. ¿Qué altura toma cada uno de los rectángulos?	***R1.*** La suma superior toma el valor máximo que este entre el intervalo $[t_1, t_2]$ mientras que la suma inferior toma el valor mínimo que este entre el intervalo $[t_1, t_2]$. ***R2.*** Toman igual altura.	***CR1.*** De un ejemplo. ***CR2.*** Desmarque suma inferior y vuelva a marcar suma superior, ¿Existe alguna diferencia?
c. ¿Qué relación hay entre $\boldsymbol{n}$ y la longitud de los subintervalos?	***R1.*** La longitud de los subintervalos depende del valor de n. ***R2.*** No tiene ninguna relación	***CR1.*** De un ejemplo. ***CR2.*** Aumente el valor de n.¿Que pasa con la longitud de la base de los rectángulos?
d. ¿¿Qué tamaño del archivo se ha descargado a los t s, con $\boldsymbol{n = 3, n = 40, n = 120\ y\ n = 500}$? Explique su respuesta.	***R.*** Para hallar el tamaño del archivo se debe hallar el área bajo la curva. Cuando el tiempo es $t\ sgs$ si $n = 3$ varía el tamaño, por ejemplo, si $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$, los rectángulos se ajustan a la forma de la curva y la longitud de la base de cada intervalo debe ser $3 * \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, y el tamaño del archivo sería: Tamaño del archivo= $\left(\frac{1}{2}\right)(5.27) + \left(\frac{1}{2}\right)(5.13) + \left(\frac{1}{2}\right)(5.27) = 7.835.$ Pero para valores de t menores a $t = \frac{3}{2}$ El área es $5.27 * t$. Cuando $n = 40$, la longitud de intervalo depende de t y de n , es decir, $\Delta t = \frac{t_2 - t_1}{40}$, y el valor de la altura sigue siendo la menor imagen de la función en ese intervalo de tiempo. Por ejemplo, si $t = 20,$ entonces la longitud de los intervalos es $\Delta t = \frac{20-0}{40} = \frac{1}{2}$ Entonces el área de la función sería: $A = \left(\frac{1}{2}\right) f(t_1) + \left(\frac{1}{2}\right) f(t_2) + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right) f(t_{20})$ Con $t_1, t_2. t_3, \ldots, t_{20}$ los valores de tiempo que toman mínimo valor de imagen.	***CR.*** ¿Qué pasaría si $n = 500$? ¿Cuál sería el valor? ¿Se cumpliría para cualquier función?
e. Busque una expresión para la longitud de los subintervalos para cualquier $\boldsymbol{n}$.	***R1.*** La longitud depende del valor de t.	***CR1.*** ¿Por qué depende de un valor exacto? ***CR2.*** ¿Por qué?

		R2. Se toma el valor del tiempo final t_2, se le resta el valor del tiempo inicial t_1. Y se divide en el número de intervalos n. $(t_2 - t_1)/n$	
f.	**¿Qué tamaño del archivo se ha descargado entre $\Delta t = t_1 - t_2$, con t_1 y t_2 en el intervalo $[0, t]$? Explique su respuesta.**	***R1.*** Sería la sumatoria de las áreas de los rectángulos hasta t_2, restando la sumatoria de áreas de los rectángulos hasta t_1	***CR.*** ¿Por qué?
g.	**¿Cómo hallar el área acumulada desde 0 s hasta t s?**	***R1.*** Sería $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t_i$	***CR.*** ¿Por qué?

En el taller 3 (https://www.geogebra.org/group/stream/id/VFV62F5kH) se presenta el problema auténtico de *comportamiento de trasmisión de un virus*. Se presenta un apartado de trabajo individual en el que se presenta la fase de información y exploración libre expuesta en Fiallo y Parada (2018); un apartado de trabajo grupal en el que se da la fase de comunicando y compartiendo, en la que el profesor-investigador promueve la participación de los estudiantes con el propósito que comuniquen sus ideas.

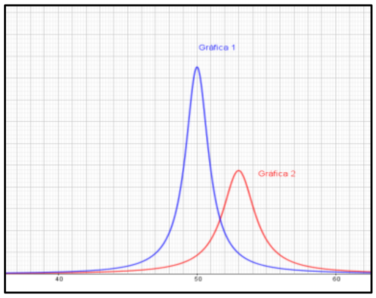
Todas las actividades de este taller presentan una simulación que le permite a los estudiantes, realizar el proceso de modelación y extraer significados y aprendizajes que lograron obtener del concepto de integral en los talleres anteriores y utilizarlos al momento de usar el modelo SIR.

El modelo SIR, fue creado en 1927 por W. O. Kermack y A.G. Mckednrick, este permite modelar una enfermedad que se desarrolla a lo largo del tiempo a través de considerar tres variables, los individuos susceptibles (S), es decir, aquello que no han enfermado anteriormente y pueden resultar infectados al entrar en contacto con el virus; los individuos infectados (I), es decir, los que están en condiciones de transmitir el virus y por tanto la enfermedad a los individuos susceptibles y los individuos recuperados (R), es decir, aquellos individuos que se curaron de la enfermedad y ya no están en condiciones de trasmitir el virus a otras personas.

El modelo SIR fue utilizado para estudiar el nuevo virus COVID-19, a causa de tener poca información sobre los efectos que puede tener en el cuerpo humano, por tanto, en la actividad 1 se presentan dos graficas (Figura 10) que representan la cantidad de personas que se han recuperado de la enfermedad cada día; al realizar el estudio de estas graficas los estudiantes pueden extraer significados como el área bajo la curva representa la cantidad acumulada o el valor aproximado de la cantidad de personas que han sido recuperadas hasta un tiempo t.

Para el trazo de las gráficas se tuvo en cuenta las informaciones publicadas por Neil Ferguson modelador y epidemiólogo en su cuenta de ***Twitter*** usando el modelo SIR. Estas dos graficas representan las variaciones, pero en una de ellas se muestra cómo sería el comportamiento de la cantidad de personas recuperadas si se toman medidas de prevención como el uso de tapabocas y el aislamiento preventivo, y la otra grafica se muestra sin tomar las medidas de prevención. Cabe resaltar que esto no se les dice a los estudiantes, se espera que lo deduzcan a partir del estudio de las gráficas.

Figura 10 Taller III, Actividad 1



A continuación, se muestra las tareas y las preguntas que pueden ser tomadas durante el trabajo individual y grupal como parte del guion en la entrevista.

Tabla 10 Entrevista estructurada, Taller III, actividad 1

Tarea	***Posibles respuestas***	***Contra preguntas***
Trabajo grupal		
Actividad 1 **Abra el archivo Fenómeno 3 el cual representa la relación de la cantidad de recuperaciones diarias de la enfermedad Covid-19 en función del tiempo t(días). Estas graficas son basadas en los datos publicados por Neil Ferguson, quien es un modelador, epidemiólogo de enfermedades infecciosas, y director de J-IDEA y del centro MRC para el análisis global de enfermedades infecciosas.** **Teniendo en cuenta lo visto en el archivo, conteste las siguientes preguntas:** **a. ¿Cuántas personas se han recuperado hasta el día 20 en el gráfico 1?**	R1. Para realizar el cálculo hay que sumar las recuperaciones desde el inicio del contagio hasta el día que se quiere calcular. R2. En GeoGebra se puede introducir el comando integral en la barra de entrada y señalar la función en área va a resultar el área bajo la curva que sería aproximadamente 253 personas R3. Al hacer clic derecho sobre la gráfica se muestra cual es la función luego esa función es la que se puede integrar, luego utilizando el teorema fundamental del Cálculo, y un cambio de variable se obtiene que es aproximadamente 253 personas. R4. Sería $\sum_{i=0}^{20} Recuperados$	CR1. Explique el cálculo para hallar estas recuperaciones. CR2. ¿Por qué introducir el comando integral? CR3. ¿Qué es el TFC? ¿A qué hace referencia con cambio de variables? CR4. ¿Qué significa recuperados?
b. ¿Cuántas personas se han recuperado hasta el día 40 en el gráfico 1?	R1. Para realiza el cálculo hay que sumar las recuperaciones desde el inicio del contagio hasta el día 40 que se quiere calcular. R2. En GeoGebra se puede introducir el comando integral en la barra de entrada y señalar la función en área va a resultar el área bajo la	CR1. Explique el cálculo para hallar estas recuperaciones. CR2. ¿Por qué introducir el comando integral? CR3. ¿Qué es el TFC? ¿A qué hace referencia con cambio de variables?

	curva que sería aproximadamente 1514 personas R3. Al hacer clic derecho sobre la gráfica se muestra cual es la función luego esa función es la que se puede integrar, luego utilizando el teorema fundamental del Cálculo, y un cambio de variable se obtiene que es aproximadamente 1514 personas. R4. Sería $$\sum_{i=0}^{40} Recuperados$$	CR4. ¿Qué significa recuperados?
c. ¿Cuántas personas se han recuperado hasta el día t en el gráfico 1?	R1. No es fácil realizarlo para t, dado que se tendría que sumar cada altura de la función. R2. La cantidad de personas recuperadas corresponde al área bajo la curva de la función, por lo desarrollado en los talleres anteriores es $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} r(t_i)\Delta t$$ Si se tiene que $n \to \infty$ entonces $\Delta t \to 0$. R3. En GeoGebra se puede introducir el comando integral en la barra de entrada y señalar la función en área va a resultar el área bajo la curva que sería $$\int_0^t \frac{1900}{(x-50)^2+1}dx$$ R4. Al hacer clic derecho sobre la gráfica se muestra cual es la función $f(x) = \frac{1900}{(x-50)^2+1}$ luego esa función es la que se puede integrar, luego utilizando el teorema fundamental del Cálculo, y un cambio de variable se obtiene $$\int_0^t \frac{1900}{(x-50)^2+1}dx$$ Hallando el área bajo la gráfica en el intervalo. R5. Sería $$\sum_{i=0}^{t} Recuperados$$	CR1 y CR2. ¿Por qué? CR3. ¿Por qué introducir el comando integral? CR3. ¿Por qué utilizar el TFC? CR4. ¿Qué significa recuperados? De un ejemplo.

d.	**¿Cuántas personas se han recuperado hasta el día 20 en el gráfico 2?**	R1. Para realizar el cálculo hay que sumar los recuperados desde el inicio del contagio hasta el día que se quiere calcular. R2. En GeoGebra se puede introducir el comando integral en la barra de entrada y señalar la función en área va a resultar el área bajo la curva que sería aproximadamente 217 personas R3. Al hacer clic derecho sobre la gráfica se muestra cual es la función luego esa función es la que se puede integrar, luego utilizando el teorema fundamental del Cálculo, y reglas de integración se obtiene que es aproximadamente 217 personas. R4. Sería $$\sum_{i=0}^{20} Recuperados$$	CR1. Explique el cálculo para hallar la cantidad de personas que se han recuperado hasta el día 20. CR2. ¿Por qué introducir el comando integral? CR3. ¿Qué es el TFC? ¿A qué regla de derivación hace referencia? CR4. ¿Qué significa recuperados?
e.	**¿Cuántas personas se han recuperado hasta el día 40 en el gráfico 2?**	R1. Para realizar el cálculo hay que sumar los recuperados desde el inicio del contagio hasta el día que se quiere calcular. R2. En GeoGebra se puede introducir el comando integral en la barra de entrada y señalar la función en área va a resultar el área bajo la curva que sería aproximadamente 1097 personas R3. Al hacer clic derecho sobre la gráfica se muestra cual es la función luego esa función es la que se puede integrar, luego utilizando el teorema fundamental del Cálculo, y reglas de integración se obtiene que es aproximadamente 1097 personas. R4. Sería $$\sum_{i=0}^{40} Recuperados$$	CR1. Explique el cálculo para hallar la cantidad de personas que se han recuperado hasta el día 20. CR2. ¿Por qué introducir el comando integral? CR3. ¿Qué es el TFC? ¿A qué regla de derivación hace referencia? CR4. ¿Qué significa recuperados?
f.	**¿Cuántas personas se han recuperado hasta el día t en el gráfico 2?**	R1. No es fácil realizarlo para t, dado que se tendría que sumar cada altura de la función. R2. La cantidad de personas recuperadas corresponde al área bajo la curva de la función, por lo desarrollado en los talleres anteriores es $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} r(t_i)\Delta t$$	CR1 ¿Por qué? CR2. ¿Quién es $r(t_i)$? CR3. ¿Por qué introducir el comando integral? CR3. ¿Por qué utilizar el TFC? CR4. ¿Qué significa recuperados? De un ejemplo.

		Si se tiene que $n \to \infty$ entonces $\Delta t \to 0$. R3. En GeoGebra se puede introducir el comando integral en la barra de entrada y señalar la función en área va a resultar el área bajo la curva que sería $\int_{0}^{t} \frac{1900}{(x-53)^2+2}\,dx$ R4. Al hacer clic derecho sobre la gráfica se muestra cual es la función $f(x) = \frac{1900}{(x-53)^2+2}$ luego esa función es la que se puede integrar, luego utilizando el teorema fundamental del Cálculo, y un cambio de variable se obtiene $\int_{0}^{t} \frac{1900}{(x-53)^2+2}\,dx$ Hallando el área bajo la gráfica en el intervalo. R5. Sería $\sum_{i=0}^{t} Recuperados$	
g.	**¿Cuál es la relación entre el número de personas que se recuperan en el gráfico 1 y el gráfico 2 cuando han pasado 41 días con 11 horas?**	R1. Se podría calcular la división de los recuperados en el grafico 1 y en el grafico 2. R2. Se han recuperado más personas en el grafica 1 que en la gráfica 2. R3. A medida que pasa el tiempo la cantidad de recuperaciones es mayor en la gráfica 1. En el tiempo de $t = 41.47$ como el tiempo es 41 días con 11 horas. R4. Se pueden calcular la cantidad de recuperados en cada gráfico. $\int_{0}^{41.47} \frac{1900}{(x-53)^2+2}\,dx$ y $\int_{0}^{41.47} \frac{1900}{(x-50)^2+1}\,dx$	CR1. ¿Cómo haría ese cálculo? CR2. ¿Por qué? CR3. ¿Por qué? CR4. ¿Qué resultados obtuvo? ¿Puede dar una conjetura?
h.	**¿Cuál es la relación entre el número de personas que se recuperan en el gráfico 1 y el gráfico 2 cuando han**	R1. Se podría calcular la división de los recuperados en el grafico 1 y en el grafico 2.	CR1. ¿Cómo haría ese cálculo? CR2. ¿Por qué? CR3. ¿Por qué?

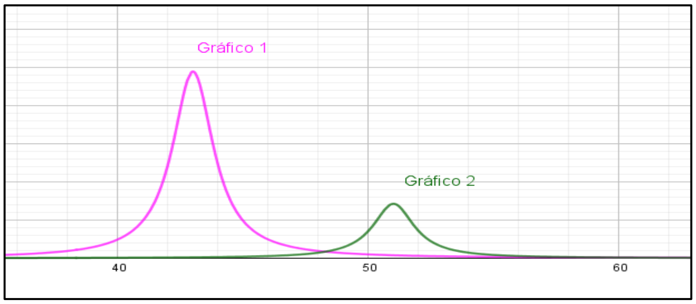
	pasado 45 días con 6 horas?	R2. Se han recuperado más personas en el grafica 1 que en la gráfica 2. R3. A medida que pasa el tiempo la cantidad de recuperaciones es mayor en la gráfica 1. En el tiempo de $t = 45.25$ como el tiempo es 45 días con 6 horas. R4. Se pueden calcular la cantidad de recuperados en cada gráfico. $\int_{0}^{45.25} \frac{1900}{(x-53)^2+2} dx$ y $\int_{0}^{45.25} \frac{1900}{(x-50)^2+1} dx$	CR4. ¿Qué resultados obtuvo? ¿Puede dar una conjetura?
i.	**¿Cuál es la relación entre el número de personas que se recuperan en el gráfico 1 y el gráfico 2 cuando han pasado 51 días con 14 horas?**	R1. Se podría calcular la división de los recuperados en el grafico 1 y en el grafico 2. R2. Se han recuperado más personas en el grafica 1 que en la gráfica 2. R3. A medida que pasa el tiempo la cantidad de recuperaciones es mayor en la gráfica 1. En el tiempo de $t = 51.58$ como el tiempo es 51 días con 14 horas. R4. Se pueden calcular la cantidad de recuperados en cada gráfico. $\int_{0}^{51.58} \frac{1900}{(x-53)^2+2} dx$ y $\int_{0}^{51.58} \frac{1900}{(x-50)^2+1} dx$	CR1. ¿Cómo haría ese cálculo? CR2. ¿Por qué? CR3. ¿Por qué? CR4. ¿Qué resultados obtuvo? ¿Puede dar una conjetura?
j.	**¿En qué modelo se recuperaron más personas entre $\boldsymbol{t = 46\ días}$ $\boldsymbol{t = 52\ días}$? Explique su respuesta.**	R1. En el grafico 1 ya que $\int_{46}^{52} \frac{1900}{(x-50)^2+1} dx = 46226$ $\int_{46}^{52} \frac{1900}{(x-53)^2+2} dx = 10156$ R2. En el gráfico 1 ya que hay mayor cantidad de contagiados.	CR1. ¿Qué quiere decir en el modelo su respuesta? CR2. ¿Cómo se comprueba matemáticamente?

El problema auténtico llega a tener significado en los estudiantes por ser un tema de actualidad y de la realidad. Se observan en las respuestas de los estudiantes, la relación que establecen entre el problema y el concepto de integral, cuando manifiestan que la cantidad de personas que se han recuperado hasta determinado día t es el área bajo la curva.

En la actividad 2, se estudia el comportamiento de dos gráficas que representan la cantidad de personas que fallecen diariamente, es decir, las variaciones diarias de muertes causadas por el virus (Figura 11), al realizar el estudio de estas graficas los estudiantes pueden extraer significados como el área bajo la curva representa la cantidad de personas que han fallecido hasta determinado día o el valor acumulado, que se deriva de sumar la cantidad de personas que han fallecido cada día. Para este estudio los estudiantes deben utilizar el modelo encontrado en el taller 2 y el modelo SIR de manera implícita, dado que para utilizar el modelo necesita de presaberes posiblemente no han desarrollado hasta el momento.

Para el trazo de las gráficas se tuvieron en cuenta las informaciones publicadas por Neil Ferguson, modelador y epidemiólogo, en su cuenta de Twitter usando el modelo SIR. Estas dos gráficas representan las variaciones de muertes o fallecimientos, pero en una de ellas se muestra cómo sería el comportamiento de la cantidad de personas fallecidas si se toman medidas de prevención como el uso de tapabocas y el aislamiento preventivo, y la otra grafica se muestra sin tomar las medidas de prevención. Cabe resaltar que esto no se les dice a los estudiantes, se espera que lo deduzcan a partir del estudio de las gráficas.

Figura 11 Taller III, Actividad 2



A continuación, se muestran las tareas y las preguntas que pueden ser tomadas durante el trabajo individual y grupal como parte del guion en la entrevista.

Tabla 11 Entrevista estructurada, Taller III actividad 2

Tarea	***Posibles respuestas***	***Contra preguntas***
Trabajo grupal		
Actividad 2 **Abra el archivo Fenómeno 3.1, el cual representa la relación de la cantidad de fallecimientos diarios de la enfermedad Covid-19 en función del tiempo t(días). Estas graficas son basadas en los datos publicados por Neil Ferguson, quien es un modelador, epidemiólogo de enfermedades infecciosas. Director de J-IDEA y el centro MRC para el análisis global de enfermedades infecciosas.** **Teniendo en cuenta el archivo Fenómeno 3.1, conteste las siguientes preguntas:** **a. ¿Cuántas personas han fallecido hasta el día 20 en el gráfico 1?**	R1. Para realizar el cálculo hay que sumar los fallecimientos desde el inicio del contagio hasta el día que se quiere calcular. R2. En GeoGebra se puede introducir el comando integral en la barra de entrada y señalar la función en área va a resultar el área bajo la curva que sería aproximadamente 20 personas R3. Al hacer clic derecho sobre la gráfica se muestra cual es la función luego esa función es la que se puede integrar, luego utilizando el teorema fundamental del Cálculo, y aplicando una regla de integración se obtiene que es aproximadamente 20 personas. R4. Sería $$\sum_{i=0}^{20} Fallecidos$$	CR1. Explique el cálculo para hallar estos fallecimientos. CR2. ¿Por qué introducir el comando integral? CR3. ¿Qué es el TFC? ¿A qué hace referencia con una regla de integración? CR4. ¿Qué significa fallecidos?
¿Cuántas personas han fallecido hasta el día 40 en el gráfico 1?	R1. Para realiza el cálculo hay que sumar los fallecidos desde el inicio del contagio hasta el día 40 que se quiere calcular. R2. En GeoGebra se puede introducir el comando integral en la barra de entrada y señalar la función	CR1. Explique el cálculo para hallar estas fallecidos. CR2. ¿Por qué introducir el comando integral?

	en área va a resultar el área bajo la curva que sería aproximadamente 292 personas. R3. Al hacer clic derecho sobre la gráfica se muestra cual es la función luego esa función es la que se puede integrar, luego utilizando el teorema fundamental del Cálculo, y un cambio de variable se obtiene que es aproximadamente 292 personas. R4. Sería $$\sum_{i=0}^{40} Fallecimientos$$	CR3. ¿Qué es el TFC? ¿A qué hace referencia con cambio de variables? CR4. ¿Qué significa fallecidos?
¿Cuántas personas han fallecido hasta el día t en el gráfico 1?	R1. No es fácil realizarlo para t, dado que se tendría que sumar cada altura de la función. R2. La cantidad de personas fallecidas corresponde al área bajo la curva de la función, por lo desarrollado en los talleres anteriores es $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} f(t_i)\Delta t$$ Si se tiene que $n \to \infty$ entonces $\Delta t \to 0$. R3. En GeoGebra se puede introducir el comando integral en la barra de entrada y señalar la función en área va a resultar el área bajo la curva que sería $$\int_0^t \frac{978}{(x-43)^2+1}\,dx$$ R4. Al hacer clic derecho sobre la gráfica se muestra cual es la función $f(x) = \frac{978}{(x-43)^2+1}$ luego esa función es la que se puede integrar, luego utilizando el teorema fundamental del Cálculo, y un cambio de variable se obtiene $$\int_0^t \frac{978}{(x-43)^2+1}\,dx$$ Hallando el área bajo la gráfica en el intervalo. R5. Sería $$\sum_{i=0}^{t} fallecimientos$$	CR1 y CR2. ¿Por qué? CR3. ¿Por qué introducir el comando integral? CR3. ¿Por qué utilizar el TFC? CR4. ¿Qué significa fallecimientos? De un ejemplo.

¿Cuántas personas han fallecido hasta el día 20 en el gráfico 2?	R1. Para realizar el cálculo hay que sumar los fallecimientos desde el inicio del contagio hasta el día que se quiere calcular. R2. En GeoGebra se puede introducir el comando integral en la barra de entrada y señalar la función en área va a resultar el área bajo la curva que sería aproximadamente 4 personas R3. Al hacer clic derecho sobre la gráfica se muestra cual es la función luego esa función es la que se puede integrar, luego utilizando el teorema fundamental del Cálculo, y reglas de integración se obtiene que es aproximadamente 4 personas. R4. Sería $\sum_{i=0}^{20} fallecimientos$	CR1. Explique el cálculo para hallar la cantidad de personas que se han fallecido hasta el día 20. CR2. ¿Por qué introducir el comando integral? CR3. ¿Qué es el TFC? ¿A qué regla de derivación hace referencia? CR4. ¿Qué significa fallecimientos?
¿Cuántas personas han fallecido hasta el día 40 en el gráfico 2?	R1. Para realizar el cálculo hay que sumar los fallecimientos desde el inicio del contagio hasta el día que se quiere calcular. R2. En GeoGebra se puede introducir el comando integral en la barra de entrada y señalar la función en área va a resultar el área bajo la curva que sería aproximadamente 20 personas R3. Al hacer clic derecho sobre la gráfica se muestra cual es la función luego esa función es la que se puede integrar, luego utilizando el teorema fundamental del Cálculo, y reglas de integración se obtiene que es aproximadamente 20 personas. R4. Sería $\sum_{i=0}^{40} fallecimientos$	CR1. Explique el cálculo para hallar la cantidad de personas que han fallecido hasta el día 20. CR2. ¿Por qué introducir el comando integral? CR3. ¿Qué es el TFC? ¿A qué regla de derivación hace referencia? CR4. ¿Qué significa fallecimientos?
¿Cuántas personas han fallecido hasta el día t en el gráfico 2?	R1. No es fácil realizarlo para t, dado que se tendría que sumar cada altura de la función. R2. La cantidad de personas fallecidas corresponde al área bajo la curva de la función, por lo desarrollado en los talleres anteriores es $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} f(t_i)\Delta t$	CR1 ¿Por qué? CR2. ¿Quién es $f(t_i)$? CR3. ¿Por qué introducir el comando integral? CR3. ¿Por qué utilizar el TFC? CR4. ¿Qué significa fallecimientos? De un ejemplo.

	Si se tiene que $n \to \infty$ entonces $\Delta t \to 0$. R3. En GeoGebra se puede introducir el comando integral en la barra de entrada y señalar la función en área va a resultar el área bajo la curva que sería $\int_0^t \frac{285}{(x-51)^2+1}dx$ R4. Al hacer clic derecho sobre la gráfica se muestra cual es la función $f(x) = \frac{285}{(x-51)^2+1}$ luego esa función es la que se puede integrar, luego utilizando el teorema fundamental del Cálculo, y un cambio de variable se obtiene $\int_0^t \frac{285}{(x-51)^2+1}dx$ Hallando el área bajo la gráfica en el intervalo. R5. Sería $\sum_{i=0}^{t} fallecimientos$	
¿Cuál es la relación entre el número de personas que fallecen en el gráfico 1 y el gráfico 2 cuando han pasado 41 días con 11 horas?	R1. Se podría calcular la división de los fallecidos en el grafico 1 y en el grafico 2. R2. Han fallecido más personas en el grafica 1 que en la gráfica 2. R3. A medida que pasa el tiempo la cantidad de fallecidos es mayor en la gráfica 1. En el tiempo de $t = 41.47$ como el tiempo es 41 días con 11 horas. R4. Se pueden calcular la cantidad de fallecidos en cada gráfico. $\int_0^{41.47} \frac{285}{(x-51)^2+1}dx$ y $\int_0^{41.47} \frac{978}{(x-43)^2+1}dx$	CR1. ¿Cómo haría ese cálculo? CR2. ¿Por qué? CR3. ¿Por qué? CR4. ¿Qué resultados obtuvo? ¿Puede dar una conjetura?
¿Cuál es la relación entre el número de personas que fallecen en el gráfico 1 y el gráfico 2	R1. Se podría calcular la división de los fallecimientos en el grafico 1 y en el grafico 2.	CR1. ¿Cómo haría ese cálculo? CR2. ¿Por qué?

cuando han pasado 45 días con 6 horas?	R2. Han fallecido más personas en el grafica 1 que en la gráfica 2. R3. A medida que pasa el tiempo la cantidad de fallecidos es mayor en la gráfica 1. En el tiempo de $t = 45.25$ como el tiempo es 45 días con 6 horas. R4. Se pueden calcular la cantidad de fallecidos en cada gráfico. $\int_{0}^{45.25} \frac{285}{(x-51)^2+1}dx$ y $\int_{0}^{45.25} \frac{978}{(x-43)^2+1}dx$	CR3. ¿Por qué? CR4. ¿Qué resultados obtuvo? ¿Puede dar una conjetura?
¿Cuál es la relación entre el número de personas que fallecen en el gráfico 1 y el gráfico 2 cuando han pasado 51 días con 14 horas?	R1. Se podría calcular la división de los fallecimientos en el grafico 1 y en el grafico 2. R2. Han fallecido más personas en el grafica 1 que en la gráfica 2. R3. A medida que pasa el tiempo la cantidad de fallecidos es mayor en la gráfica 1. En el tiempo de $t = 51.58$ como el tiempo es 51 días con 14 horas. R4. Se pueden calcular la cantidad de fallecidos en cada gráfico. $\int_{0}^{51.58} \frac{285}{(x-51)^2+1}dx$ y $\int_{0}^{51.58} \frac{978}{(x-43)^2+1}dx$	CR1. ¿Cómo haría ese cálculo? CR2. ¿Por qué? CR3. ¿Por qué? CR4. ¿Qué resultados obtuvo? ¿Puede dar una conjetura?
¿En qué modelo han fallecido más personas entre $t = 46\ días$ y el tiempo $t = 52\ días$? Explica tu respuesta.	R1. En el grafico 2 ya que $\int_{46}^{52} \frac{285}{(x-51)^2+1}dx = 615$ y $\int_{46}^{52} \frac{978}{(x-43)^2+1}dx = 206$ R2. En el gráfico 2 ya que hay mayor cantidad de contagiados.	CR1. ¿Qué quiere decir en el modelo su respuesta? CR2. ¿Cómo se comprueba matemáticamente?

En la actividad 3 los estudiantes tienen el modelo SIR en una representación tabular (Ver https://www.geogebra.org/group/stream/id/VFV62F5kH), a través de GeoGebra, se involucran todas las variables como la variación de las personas susceptibles a ser contagiadas, la cantidad de contagios diarios, la tasa de mortalidad, la tasa de interacción promedio, entre otras.

Se pretende que los estudiantes logren ver el proceso de acumulación a través del análisis de las variables de recuperaciones y fallecimientos utilizados anteriormente.

Además, se espera que al utilizar el modelo SIR con los datos actuales registrados por las entidades gubernamentales en Colombia, se logre predecir la cantidad de contagios hasta un día determinado; incluso comprender la importancia de hacer uso de las medidas de prevención.

Tabla 12 Entrevista estructurada, Taller III actividad 3

Tarea	***Posibles respuestas***	***Contra preguntas***
Trabajo grupal		
Actividad 3 **Abra el archivo Fenómeno 3.2. En el cual encontrará una simulación del modelo SIR, para una población como Bucaramanga (este modelo son los resultados que se pueden obtener, si no se manejan las medidas de prevención como lo es la cuarentena, el uso de elementos de bioseguridad, entre otras).** **Teniendo en cuenta la información presentada. En la hoja de trabajo responda** **a. ¿Qué relación existe entre la columna de recuperaciones con la columna de recuperadas? Explique su respuesta.**	R1. En la representación se puede ver que la columna de recuperaciones son las variaciones diarias, es decir, las personas que se logran recuperar por día. R2. Que, si realizamos la gráfica de la función recuperaciones, en la columna **recuperados** sería el área bajo la curva de la función.	CR1 Y CR2. ¿Por qué?

b. **¿Qué relación existe entre la columna de fallecimientos con la columna de fallecidos? Explique su respuesta.**	R1. En la representación se puede ver que la columna de fallecimientos son las variaciones diarias, es decir, las personas que fallecen por día. R2. Que, si realizamos la gráfica de la función fallecimientos, en la columna fallecidos sería el área bajo la curva de la función.	CR1 Y CR2. ¿Por qué?
En Colombia según el Ministerio de Salud (2020), el día 16 de marzo del 2020 se presentaban dos casos en el país, el 13 de marzo del 2020 ya había 22 casos, es decir se incrementó el número de infectados en 7 días. **Teniendo en cuenta esto, si decimos que la velocidad de contagio, o de número de personas contagiadas es proporcional al número de personas infectadas, es decir, $\frac{dN}{dt} = KN$, con k un valor constante, si queremos saber la proporcionalidad ¿Qué deberíamos hacer? ¿Qué modelo utilizar para resolver la ecuación diferencial?**	R1. No se puede determinar R2. Para resolver la ecuación diferencial se debe integrar a ambos lados de la igualdad, ya que el número de personas contagiadas es la sumatoria de los contagios diarios. R3. Aplicando integral a ambos lados se tendría la función $N = ce^{kt}$	CR1. ¿Por qué? CR2. ¿Cómo sería la sumatoria? CR3. ¿Cómo desarrolla la integral a ambos lados de la igualdad?

Al finalizar, compartir las ideas utilizadas para resolver cada actividad, fase *comunicando y compartiendo* expuesta en Fiallo y Parada (2018), puedan realizar una discusión del proceso de modelación realizado por cada uno en el sentido del uso del modelo SIR y de los posibles significados y aprendizajes extraídos de esto.

En el taller 4 (https://www.geogebra.org/group/stream/id/VuPWy3NTM), se tiene como problema auténtico la modelación del área bajo la curva de una función potencia (Figura 12) y no como una regla de integración que se debe mecanizar (Robles, Tellechea y Font, 2014). Este problema surge de la revisión epistemológica del concepto de integral.

Figura 12 Introducción Taller IV

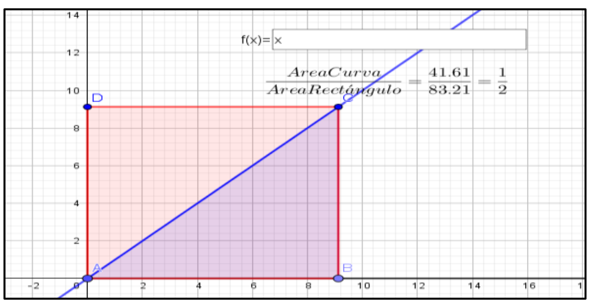
Las funciones potencia fueron el primer tipo de funciones que se pudieron integrar, son aquellas funciones de la forma $f(x) = x^n$. Lo que se pretendía era calcular el área bajo la gráfica de una función potencia. Este problema fue resuelto antes del trabajo de Newton y Leibniz.

Después de la cuadratura de un segmento de parábola por Arquímedes (que murió el 212 a. c.), Cavalieri (hacia 1630) fue el primero que tuvo un éxito en una cuestión semejante. Después de Cavalieri, otros matemáticos, como Torricelli, Roberval, Wallis y Fermat, trabajaron y resolvieron el problema completamente. La principal idea que siguieron tanto Arquímedes como Cavalieri, Torricelli, Fermat y otros (varios años antes de Newton, Leibniz, Cauchy o Riemann) fue dividir el intervalo de integración en rectángulos muy delgados y calcular el área sumando el área de todos esos rectángulos.

Cavalieri dividió el intervalo en partes iguales y fue capaz de calcular la integral hasta el caso n=9. La cuadratura de curvas de la forma $y = x^k$, con k no necesariamente un número natural fue atacado sistemáticamente por John Wallis (1616-1703). Los exponentes racionales y negativos fueron introducidos por él (1655). Wallis tuvo una influencia decisiva en el desarrollo matemático de Newton.

La actividad 1, se acompaña de una simulación en GeoGebra con las ideas que tuvieron los matemáticos Jhon Wallis, Descartes y Newton (Figura 13), de hacer la comparación entre el área de un rectángulo inscrito y el área bajo la curva de la función potencia $f(x) = x$, para encontrar que la razón siempre es $\frac{1}{2}$ y haciendo un despeje se encuentre el modelo $\int x dx = \frac{1}{2}x^2$; cabe resaltar que esto funciona con las funciones potencia y considerando que el exponente es un valor mayor a cero.

Figura 13 Taller 4 Actividad 1



A continuación, se muestran las tareas y las preguntas que pueden ser tomadas durante el trabajo individual y grupal, como parte del guion en la entrevista estructurada.

Tabla 13 Entrevista estructurada, Taller IV actividad 1

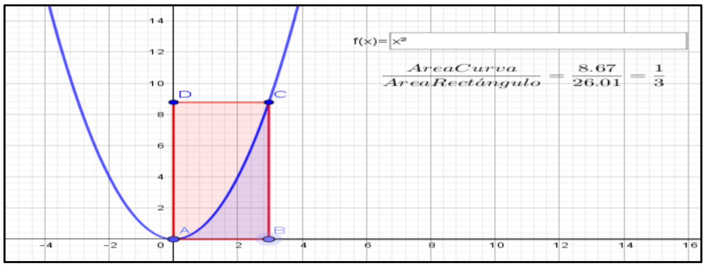
Tarea	***Posibles respuestas***	***Contra preguntas***
Trabajo grupal		
Actividad 1 **Abra el archivo IntFunPotN.ggb, el cual muestra una función**	R1. Representa la integral de $f(x) = x$ en el intervalo que se escoja o depende del valor de x del punto B.	CR. ¿Por qué?

$f(x) = x$, la cual es una función potencia porque tiene la forma $f(x) = x^n$, con $n > 0$. Mueva el punto B, alrededor del eje positivo de las *x*. **En la hoja de trabajo. Conteste las siguientes preguntas:** **a. ¿Qué representa el área de la curva?**	R2. Representa $\int_0^x f(x)dx$ R3. Representa $lím_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ R4. Es el área de un triángulo	
b. ¿Qué representa el área del rectángulo? ¿Cuál es la base del rectángulo? ¿Cuál es la altura?	R1. Es un rectángulo inscrito entre los ejes positivos. Depende del valor de la componente x en el punto B.Y la altura es el valor de la imagen, es decir, $f(x)$ R2. El área del rectángulo representa una manera de aproximación, la base será el valor Δx, la altura sería el valor de x evaluado en la función. R3. El área del rectángulo representa el doble del área bajo la gráfica de $f(x)$ en un intervalo dado entre 0 y *x* o sea que representa el doble del valor de la integral.	CR1. ¿Se va hacia el valor negativo? CR2. ¿Se aproxima a qué? CR3. ¿Qué sucede con otra función potencia? ¿Aun cumple que es el doble?
c. En el intervalo $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ ¿Cuál es el valor del área bajo la curva? ¿Cuál es el valor del área del rectángulo formado? ¿Cuál es el valor del cociente entre el valor del área bajo la curva y el área del rectángulo? Explique su respuesta.	R1. Para hallar el área bajo la curva se calcula la integral $\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\| = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$ El valor del cociente es ½ sin importar el intervalo. R2. El área bajo la curva usando conceptos geométricos sería el área de un triángulo, la base sería *x* y la altura también sería *x* por que la función *f(x)=x*, luego el área sería. $$Ac = \frac{x * x}{2} = \frac{x^2}{2}$$ El valor del cociente siempre es 1/2.	CR1. ¿Cómo deduce que $\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\| = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$? CR2. ¿Si fuera otra función como y=x^2? ¿Qué valor tendría en el intervalo asignado?
d. En el intervalo $[\mathbf{0}, \mathbf{10}]$ ¿Cuál es el valor del área bajo la curva? ¿Cuál es el valor del área del rectángulo formado? ¿Cuál es el valor del cociente entre el valor del área bajo la curva y el área del rectángulo? Explique su respuesta.	R1. Para hallar el área bajo la curva se calcula la integral $\int_0^{10} xdx = \frac{x^2}{2}\| = \frac{10^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{100}{2} = 50$ El valor del cociente es ½ sin importar el intervalo. R2. El área bajo la curva usando conceptos geométricos sería el área de un triángulo, la base sería *x* y la altura también sería *x* por que la función *f(x)=x*, luego el área sería. $$Ac = \frac{x * x}{2} = \frac{x^2}{2}$$ El valor del cociente siempre es 1/2.	CR1. ¿Cómo deduce que $\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\| = \frac{10^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{100}{2} = 50$? CR2. ¿Si fuera otra función como y=x^2? ¿Qué valor tendría en el intervalo asignado?

e.	**En el intervalo $[\mathbf{0}\,, \boldsymbol{x}]$ ¿Cuál es el valor del área bajo la curva? ¿Cuál es el valor del área del rectángulo formado? ¿Cuál es el valor del cociente entre el valor del área bajo la curva y el área del rectángulo? Explique su respuesta.**	R1. En el intervalo de $[0, x]$ el área bajo la curva es $\int_0^x x dx = \frac{x^2}{2}$, el área del rectángulo es $A_r = x^2$ El valor del cociente es $\frac{1}{2}$. R2. El área bajo la curva usando conceptos geométricos sería el área de un triángulo, la base sería *x* y la altura también sería *x* por que la función *f(x)=x*, luego el área sería. $Ac = \frac{x * x}{2} = \frac{x^2}{2}$ El área del rectángulo sería El valor del cociente siempre es 1/2.	CR. ¿Por qué?
f.	**Escriba la expresión algebraica que me permita obtener el área bajo la curva de la función. Explique su respuesta.**	R1. Se tiene que $\int_a^b xdx$ siendo [a, b] un intervalo escogido en la gráfica que esta entre 0 y *x* ya que el área bajo la gráfica de una función se puede encontrar con la integral definida. R2. $\int_0^x xdx = \frac{x^2}{2}$ R3. $A = \frac{base*altura}{2} = \frac{x^2}{2}$	CR1. ¿A qué es igual $\int_a^b xdx$? CR2. ¿Qué significa? CR3. ¿Cumple para todas las funciones?

En la actividad 2 se acompaña con la función $f(x) = x^2$ (Figura 14), se utiliza la idea de comparar el área del rectángulo inscrito entre el eje *y* con el eje *x* y el valor del área bajo la curva de la función, encontrando que la relación siempre es $\frac{1}{3}$, pero encontrar un modelo del área bajo la curva, los estudiantes pueden hallar el área del rectángulo y hacer un despeje. Se realiza el mismo procedimiento para las funciones $g(x) = x^3, h(x) = x^4, i(x) = x^5$ y de forma general para $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Se espera que los estudiantes encuentren el modelo $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ con $n \in \mathbb{N}$, atribuyendo el significado de que el concepto de integral es el área bajo la curva.

Figura 14 Taller IV, Actividad 2



A continuación, se muestran las tareas y las preguntas que pueden ser tomadas durante el trabajo grupal como parte del guion en la entrevista.

Tabla 14 Entrevista estructurada. Taller IV Actividad 2

Tarea	*Posibles respuestas*	*Contra preguntas*
Trabajo grupal		
Actividad 2 **En el mismo archivo IntFunPotN.ggb, en la casilla de entrada de $f(x) =$, ubicada en el lado superior derecho, introduzca la función $f(x) = x^2$ y responda las siguientes preguntas:** a. **En el intervalo $[0,1]$ ¿Cuál es el valor del área bajo la curva? ¿Cuál es el valor del área del rectángulo formado? ¿Cuál es el valor del cociente entre el valor del área bajo la curva y el área del rectángulo? Explique su respuesta.**	R1. En este caso no se puede hallar el área con el modelo de hallar el área de un triángulo, pero si se puede hacer uso del teorema fundamental del cálculo. R2. En el intervalo de $[0,1]$, como el área de la curva sobre el área del rectángulo es 3, y el área del rectángulo es lado por lado, y el área del rectángulo es 1*1, luego el área bajo la curva en ese valor es $\frac{1}{3}$. El valor del cociente es $\frac{1}{3}$, y el área del rectángulo formado es 1.	CR1. ¿Cómo sería el uso del teorema fundamental del cálculo? CR2. ¿Por qué se cumple que la razón es 1/.3?
b. **En el intervalo $[0,10]$ ¿Cuál es el valor del área bajo la curva? ¿Cuál es el valor del área del rectángulo formado? ¿Cuál es el valor del cociente entre el valor del área bajo la curva y el área del rectángulo? Explique su respuesta.**	R1. En este caso no se puede hallar el área con el modelo de hallar el área de un triángulo, pero si se puede hacer uso del teorema fundamental del cálculo. R2. En el intervalo de $[0,10]$, como el área de la curva sobre el área del rectángulo es 1000, y el área del rectángulo es lado por lado, y el área del rectángulo es 1*1000, luego el área bajo la curva en ese valor es $\frac{1000}{3}$. El valor del cociente es $\frac{1}{3}$, y el área del rectángulo formado es 1000.	CR1. ¿Cómo sería el uso del teorema fundamental del cálculo? CR2. ¿Por qué se cumple que la razón es 1/.3?

c.	**En el intervalo de $[0, x]$ ¿Cuál es el valor del área bajo la curva? ¿Cuál es el valor del área del rectángulo formado? ¿Cuál es el valor del cociente entre el valor del área bajo la curva y el área del rectángulo? Explique su respuesta.**	R1. $\int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3}$ R2. En el intervalo de $[0, x]$, como el área de la curva sobre el área del rectángulo es 1/3 , y el área del rectángulo es lado por lado, y el área del rectángulo es $x * x^2 = x^3$, luego el área bajo la curva en ese valor es $\frac{x^3}{3}$. El valor del cociente es $\frac{1}{3}$, y el área del rectángulo formado es x^3. R3. $lím_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i$	CR. ¿Por qué?
d.	**Escriba la expresión algebraica que le permita obtener el área bajo la curva de la función. Explique su respuesta.**	R1. $\int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3}$ R2. El área bajo la curva es el valor $\frac{x^3}{3}$. R3. $lím_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i$	CR. ¿Por qué?
e.	**Pruebe con $n = 3, n = 4, n = 5$, $n \in \mathbb{N}$, Escriba la expresión algebraica que me permita obtener el área bajo la curva de la función para cada n. Explique sus respuestas.**	En este ítem se espera que los estudiantes lo resuelvan de manera semejante a la expuesta en la actividad anterior. Para una función de la forma $f(x) = x^n$ se pueden tener las siguientes respuestas. R1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ R2. Es $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ R3. $lím_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} x_i^n \Delta x_i$	CR. ¿Por qué?

Dada la generalización obtenida en la actividad 2, con los valores de la función potencia naturales con $n \in \mathbb{N}$. Se realiza en la actividad 3, encontrar el modelo para $n \in \mathbb{Q}$, es decir, para las funciones potencia $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ con $p,\ q \in \mathbb{N}$ y $q \neq 0$. Epistemológicamente Newton se cuestionaba cómo hallar una generalización para estas funciones y a través de un procedimiento similar al dado en la actividad 1 y 2, logró encontrar la integral de esta función; se espera que los estudiantes a través de lo realizado en las actividades anteriores, encuentren un modelo para la integral de $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$, el modelo general es $\int x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{1}{1+\frac{p}{q}} x^{\frac{p}{q}+1} + c$, o sería lo mismo que $\int x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{q}{p+q} x^{\frac{p+q}{q}} + c$.

La siguiente cuestión es si se puede realizar el procedimiento para los valores de $n \in$ I; para finalizar la actividad se deja que ellos logren crear un modelo que les permita obtener el resultado y decir, si también se cumple para estos valores, aspecto que también analizó Newton y que, al hacerlo, estableció la relación entre la derivada y la integral, considerando un carácter operacional, el cual consiste en hallar funciones primitivas a partir de su función derivada.

Tabla 15 Entrevista estructurada, Taller IV Actividad 3

Tarea	***Posibles respuestas***	***Contra preguntas***
Trabajo grupal		
Actividad 3 **Las funciones potencias tiene la forma $f(x) = x^n$, con $n \neq -1$, es decir, que n puede ser de la formar $n = \frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{Z}$, con $q \neq 0$. Reescribiendo, la función sería de la forma $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$.** **Abra el archivo IntFunPotQ.ggb el cual muestra una función $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, la cual es una función potencia porque tiene la forma $f(x) = x^n$, con $n > 0$. Mueva el punto B, alrededor del eje positivo de las *x*.** **En la hoja de trabajo. Conteste las siguientes preguntas:** **a. En el intervalo de $[0\,,1]$ ¿Cuál es el valor del área bajo la curva? ¿Cuál es el valor del área del rectángulo formado? ¿Cuál es el valor del cociente entre el valor del área bajo la curva y el área del rectángulo? Explique su respuesta.**	R1. En este caso no se están manejando las funciones potencia, con números naturales, sino con números racionales, lo cual no sabría si se cumple la misma razón anterior, aunque la razón entre las curvas es $\frac{2}{3}$. R2. En el intervalo de $[0\,,1]$, como el área de la curva sobre el área del rectángulo es 2/3, y el área del rectángulo es lado por lado, y el área del rectángulo es $1 * \sqrt{1} = 1$, luego el área bajo la curva en ese valor es $\frac{2}{3}$. El valor del cociente es $\frac{2}{3}$, y el área del rectángulo formado es 1.	CR1. ¿Por qué no sabe si cumple o no? CR2. ¿Por qué se cumple que la razón es 2/.3?
b. En el intervalo de $[0\,,10]$ ¿Cuál es el valor del área bajo la curva? ¿Cuál es el valor del área del rectángulo formado? ¿Cuál es el valor del cociente entre el valor del área bajo la curva y el área del rectángulo? Explique su respuesta.	R1. En este caso no se están manejando las funciones potencia, con números naturales, sino con números racionales, lo cual no sabría si se cumple la misma razón anterior, aunque la razón entre las curvas es $\frac{2}{3}$. R2. En el intervalo de $[0\,,1]$, como el área de la curva sobre el área del rectángulo es 2/3, y el área del	CR1. ¿Por qué no sabe si cumple o no? CR2. ¿Por qué se cumple que la razón es 2/.3? ¿Por qué el área del rectángulo es $10\sqrt{10}$?

		rectángulo es lado por lado, y el área del rectángulo es $10 * \sqrt{10} = 10\sqrt{10}$, luego el área bajo la curva en ese valor es $\frac{10\sqrt{10}}{3}$. El valor del cociente es $\frac{2}{3}$, y el área del rectángulo formado es $10\sqrt{10}$.	
c.	**En el intervalo $[0\,,x]$ ¿Cuál es el valor del área bajo la curva? ¿Cuál es el valor del área del rectángulo formado? ¿Cuál es el valor del cociente entre el valor del área bajo la curva y el área del rectángulo? Explique su respuesta.**	R1. Como no se puede utilizar una aproximación teórica, se podría usar el teorema fundamental del cálculo, en el que se tiene que $$\int_0^x \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}(x)^{\frac{3}{2}}$$ El valor del cociente es $\frac{2}{3}$ y el área del rectángulo es $x * \sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ R2. En el intervalo de $[0\,,x]$, como el cociente del área de la curva sobre el área del rectángulo es 2/3, y el área del rectángulo es lado por lado, y el área del rectángulo es $x * \sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$, luego el área bajo la curva en ese valor es $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$. El valor del cociente es $\frac{2}{3}$, y el área del rectángulo formado es $x^{\frac{3}{2}}$	CR1. ¿Cómo halla este resultado del teorema fundamental del cálculo? CR2. ¿Qué relación tiene con la integral?
d.	**Escriba la expresión algebraica que le permita obtener el área bajo la curva de la función. Explique su respuesta.**	R1. $$\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$ R2. Ac= $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$ R3. $lím_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{2}} \Delta x_i$	CR. ¿Por qué?
e.	**Pruebe con $n = \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$, Escriba la expresión algebraica que me permite obtener el área bajo la curva de la función para cada n. Explique sus respuestas**	En este ítem se espera que los estudiantes desarrollen de manera semejante a la función $f(x) = \sqrt{x}$, dado que esta se reescribe de la forma $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, los modelos que pueden surgir para $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$, es: R1. $$\int x^{\frac{p}{q}}dx = \frac{q}{p+q}x^{\frac{p+q}{q}} + c$$ R2. Ac= $\frac{qx^{\frac{p+q}{q}}}{p+q}$ R3. $lím_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\frac{p}{q}} \Delta x_i$	CR. ¿Por qué?

Pruebe con $n = \pi, e$ Escriba la expresión algebraica que me permita obtener el área bajo la curva de la función para cada n. Explique sus respuestas.	R1. La forma en la que varía el cociente conforme cambia el n en la función sigue el patrón $\frac{1}{n+1}$, el área del rectángulo sigue el patrón A=x^{n+1} conforme cambia el *n* en la función. $$\int x^e dx = \frac{1}{e+1}x^{e+1} + c$$ $$\int x^\pi dx = \frac{1}{\pi+1}x^{\pi+1} + c$$ R2. Utilizando la forma de hallar el área del rectángulo que es más sencilla y utilizando la razón se tiene que Ac=$\frac{1}{\pi+1}x^{\pi+1}$ Ac= $\frac{1}{e+1}x^{e+1}$	CR1. ¿Es decir que cumple la regla para todo valor de n? CR2. ¿Qué relación guarda este resultado con la integral?

A continuación, se presenta las técnicas de recolección de información de la investigación y la manera de abordarlas.

4.2.2. Recolección de información

Teniendo en cuenta la importancia de disponer de diversos instrumentos de recolección de información, se cuenta con entrevistas grabadas en audio video, utilizando la plataforma de Microsoft Teams, la cual fue el medio por el cual se realizaron los encuentros sincrónicos con los estudiantes. Estas fueron realizadas al grupo de estudiantes seleccionados.

A partir de los planteamientos de Goldin (2000, p.519):

> (…) se prevé la observación y registro de lo que sucede durante la entrevista para su posterior análisis: a través de grabaciones de audio y/o video, notas de los observadores, y trabajo del sujeto. Explícita previsión se hace también para contingencias, como las que pueden ocurrir a medida que avanza la entrevista,

posiblemente por medio de secuencias de ramificación de preguntas heurísticas, sugerencias, problemas relacionados en secuencia, preguntas retrospectivas, u otras intervenciones por parte del clínico [entrevistador].

Las actividades se implementaron al finalizar el segundo periodo académico del año 2019 (2019-II) en tiempo de aislamiento preventivo para evitar el contagio del virus COVID-19. Se resalta el compromiso y la responsabilidad de los estudiantes en el desarrollo de los talleres. Inicialmente se realizaron de manera individual siguiendo la fase de *información y exploración libre* expuesta por Fiallo y Parada (2018).

Posteriormente, se realiza una socialización de las respuestas brindadas por los estudiantes, esta es la fase *comunicando y compartiendo.* La duración de cada taller fue aproximadamente de 4 a 5 horas diarias.

Se hizo uso del portal www.geogebra.org, en el cual los estudiantes pueden crear un perfil para compartir ideas académicas. Este portal tiene una herramienta de aula virtual de GeoGebra (AVG), en ella se realizaron los cuatro talleres y fueron asignadas a los perfiles de cada estudiante. Las ventajas de utilizar el AVG, es que las respuestas de cada estudiante son guardadas y subidas en una nube, que no se eliminan con el tiempo.

Las videograbaciones y las respuestas en la nube, a través, del portal AVG se constituyen la principal fuente de datos reportados y analizados en esta investigación. Las entrevistas se realizaron en los encuentros sincrónicos, a través de la plataforma de Microsoft Teams y Microsoft Stream, al iniciar cada entrevista se saludaba a cada uno de los estudiantes, y se les solicitaba permiso para grabar cada sesión.

4.2.3. Recolección de datos

El proceso de recolección de datos se realizó en dos momentos. El primero fue a través de las actividades individuales basadas en los talleres y los problemas auténticos. El segundo se realizó en la implementación de la entrevista estructurada, la cual fue grabada en video para compartir. Cabe resaltar que durante la implementación se realizaron más preguntas acerca del trabajo realizado a pesar de contar con preguntas ya planteadas, como dice Goldin (2000) existen contingencias que pueden no proveerse.

4.2.4. Análisis de los datos

Se realiza un análisis de las respuestas brindadas por los estudiantes en el trabajo individual. El interés se centra en reconocer las contribuciones que da la modelación matemática al estudio del concepto de integral, por tanto, el proceso de modelación de problemas auténticos trae consigo beneficios expresados a lo largo del documento.

Finalmente, en la última etapa de la metodología de investigación se analizó el proceso de modelación matemática realizada por los estudiantes, los datos recolectados durante el desarrollo de los talleres, las fases de exploración y socialización y la entrevista estructurada, nos permitieron responder a nuestra pregunta de investigación, por medio de cinco contribuciones: Modelación matemática de problemas auténticos como desencadenador de motivación, modelación matemática de problemas auténticos como desencadenador de modelos del concepto de integral, significados asociados al concepto de integral y modelación y tecnología.

5. Algunas contribuciones de la modelación matemática al estudio del concepto de integral a estudiantes universitarios

En este capítulo se presentan contribuciones de la modelación matemática al estudio del concepto de integral, identificadas en el trabajo de cuatro estudiantes a quienes designamos con los seudónimos de Valeria, Daniel, Diana y Camilo estudiantes de ingeniería de la Universidad Industrial de Santander.

El análisis de datos se realizó de manera individual y colectiva, teniendo en cuenta la metodología propuesta por Fiallo y Parada (2018). Se identificaron cuatro contribuciones: Modelación matemática de problemas auténticos como desencadenador de motivación, Modelación matemática de problemas auténticos como desencadenador de modelos del concepto de integral, Significados asociados al concepto al concepto de integral, Modelación matemática y tecnología en el estudio del concepto de integral. En algunos episodios se subrayaron, momentos claves para el desarrollo de la investigación.

5.1. Modelación matemática de problemas auténticos como desencadenador de motivación

Villa-Ochoa y col. (2014) refieren que los problemas relacionados en contextos cercanos a los estudiantes, los motiva a producir ideas para modelar la situación y eso genera apropiación del concepto matemático. En nuestra investigación resaltamos esta contribución en dos problemas auténticos: Descarga de un archivo y Comportamiento de trasmisión de un virus. En la modelación del área bajo la curva de una función potencia se enfatizó en el dominio matemático.

5.1.1. Modelación matemática de descarga de un archivo como desencadenador de motivación

El problema auténtico descarga del archivo es un contexto cercano a los estudiantes y a las personas que estamos inmersas en las tecnologías digitales, la mayor parte del tiempo se descargan archivos, documentos, recursos bibliográficos, entre otros archivos.

En la modelación matemática se resalta la importancia de enlazar el problema auténtico (contexto de la vida real) con las matemáticas, pero motivarse a lograr ese enlace fue una de las contribuciones logrados en el desarrollo de los talleres. Esa motivación logra reconocerse en las trascripciones de videograbaciones de las entrevistas estructuradas. En las transcripciones se utiliza el simbolismo: I para la investigadora, V para la estudiante Valeria, D para el estudiante Daniel, DI para la estudiante Diana y C para el estudiante Camilo.

Tabla 16 Episodio 1 Trascripción de video grabación Descarga del archivo

1. I: Alguno abrió el enlace del medidor de descarga de ETB
2. C: Yo profe.
3. I: ¿Qué viste?
4. C: pues profe vi la velocidad de descarga, la velocidad de subida y otras dos cosas que no identifique y líneas.
5. I: ¿Viste las líneas? ¿Qué significa velocidad de descarga y velocidad de subida?
6. C: Si profe, un diagrama de cada cosa
7. DI: son rayitas
8. C: Es muy similar a las que produce el sonido como la frecuencia.
9. V: yo creo que es el valor de la velocidad.
10. I: ¿Cuánto varía?
11. D: no mucho profe
12. I: ¿Por qué?
13. D: hay mucha variación, pero tiende a ser constante
14. C: En el de subida si me varío un poco porque empezó como muy abajo y luego empezó a subir.
15. I: ¿Fue la misma, de carga que de descarga?
16. C: La de subida fue mayor que la de descarga
17. C: En la mía fue la misma tanto en descarga como en carga, pero es por mi velocidad de internet.

En la Tabla 16, los estudiantes reconocen la velocidad de carga y descarga dependiendo de su conexión a internet. La intención de interpretar los gráficos que muestra el medidor de internet relacionándolo con la variación, reconociendo así variables como la velocidad y el tiempo.

De acuerdo con Blum y colaboradores (2007) y Blum y Borromeo (2009), el proceso de modelación matemática puede desarrollarse mediante los siguientes momentos cíclicos: *1) Comprensión de la situación 2) simplificación y estructuración 3) Matematización 4) Trabajo matemático 5) Interpretación 6) Validación 7) Exposición*. Por lo que, en el anterior episodio observamos un primer momento de *comprensión de la situación*, ya que los estudiantes intentan relacionar los diagramas que visualizan en el simulador con sus experiencias cotidianos o lo que han visto en otras disciplinas. De este modo, los estudiantes fueron transformando las ideas empíricas referidas a todos aquellos aspectos que reconocen del contexto, hacia análisis de relaciones con estrategias matemáticas. Así mismo, en el proceso de apropiación del problema auténtico propuestos por Kaiser y Schwarz (2010), podemos decir, que se crean en los estudiantes diferentes intereses y cuestionamientos generados por ellos mismos, que les exige buscar en el campo de las matemáticas aquello que les ayude a legitimar sus ideas, aspectos evidenciados en las líneas 6 y 13 de la Tabla 16.

Estamos de acuerdo con Villa-Ochoa y col. (2014) en el que los resultados muestran que el proceso de modelación es abierto y no rígido, lo cual evidenciamos en las tareas y modos de actuar no predefinidos de los estudiantes, éstas las desarrollamos en cadena según las propuestas de los participantes, de las necesidades y de sus acciones.

En la Tabla 16 se logra ver en las líneas 4, 8 y 13 que los estudiantes están acostumbrados a utilizar problemas que correspondían al campo mismo de las matemáticas con el objetivo de aplicar una definición o un proceso algorítmico. Partir de un problema auténtico resulta ser diferente y llamativo y generar motivación. En la investigación que estamos reportando, los estudiantes tomaron alrededor de 4 a 6 horas diarias, trabajando en las actividades, no descansaron porque les parecía muy llamativo el problema.

Tabla 17 Episodio 2 Trascripción de video grabación Descarga del archivo

1. I: vamos a tomar un descanso de 20 minutos.
2. V: No profe, yo no quiero descansar, porque voy a seguir pensando en cómo determinar el tamaño del archivo.
3. DI: Profe mejor no, yo realmente quiero saber, cuál es la manera más sencilla de encontrar el tamaño del archivo, cuando la velocidad no es constante, porque cuando es constante ya se cual es.
4. I: ¿Qué piensa Camilo y Daniel?
5. C: Es que yo creo que se desarrolla con la integral, pero no me acuerdo mucho de eso, solo me acuerdo de que la aproximación es por rectángulos.
6. D: profe mejor no descansemos y sigamos trabajando en el problema.
7. I: Ok, no vamos a descansar, Daniel ¿Qué es la integral?
8. C: profe es que no recuerdo bien ¿puedo investigar?
9. I: Claro que si

En la Tabla 17 se evidencia, que el problema auténtico resultó motivador para los estudiantes, que los llevó a investigar sobre los conceptos matemáticos involucrados en el problema, en este caso sobre la integral y como ésta se define para poder resolver el problema planteado, lo que hizo que el estudiante fuera el protagonista de este proceso.

Como se expresó en el apartado anterior, el problema auténtico de descarga de un archivo se realizó en dos talleres: Taller I con tres actividades que se aumentaba su nivel de dificultad, Taller II con dos actividades.

Comentarios con respecto al aumento de dificultad de cada actividad, expresaba mayor motivación por parte de los estudiantes.

Figura 15 Comentario Valeria sobre la complejidad de los problemas

Este archivo es más complejo que el anterior pero igual resulta interesante la animación y el cambio de las variables

En la Figura 15, el estudiante muestra un empoderamiento y reto para resolver el problema, aspecto ya señalado en el estudio de Villa-Ochoa y col. (2018), aunque estos autores lo muestran con énfasis hacia el concepto de derivada, se logra percibir un empoderamiento, similar al ocurrido en esta investigación.

En el siguiente episodio (Tabla 18) corresponde a la entrevista estructurada planteada en la Tabla 5, se resalta la motivación que los estudiantes obtienen al momento de hacer comparaciones de sus estrategias para hallar el área bajo la curva de la función velocidad de descarga del archivo y la dedicación aún si presentaban dificultades, buscaron soluciones, continuaron y lograron reconocer errores realizados en los procedimientos.

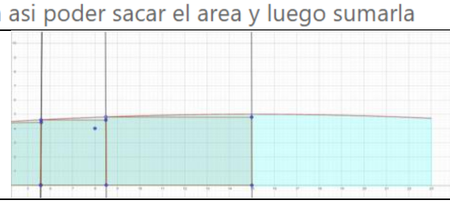
Tabla 18. Episodio 3 Trascripción de video grabación Descarga del archivo

1. C: para el intervalo de 0 a 7.5 s, lo que hice fue sacar el rectángulo, para ello saqué el lado por lado, es decir, para sacar el área del rectángulo y eso me dio 35, y luego le sume el área del rectángulo que me daba 2.625 para que el área total me dio 37.625 Mbits
2. V: a mí me dio diferente 40.3 aproximadamente
3. I: ¿Hiciste lo mismo?
4. V: Si lo que pasa es que yo dije base por altura, pero como el intervalo de 0 a 7.5s, para el área del rectángulo multipliqué 5*7.5 y luego en el área del triángulo me dio 2.8125
5. I: ¿Me puedes repetir Valeria?
6. V: que el área del rectángulo como el intervalo es de 0 a 7.5, entonces la base es 7.5 y la altura seria 5 para el rectángulo, entonces saque el área y lo del rectángulo me da 37.5
7. I: y te falta la del triángulo
8. V: la del triángulo la altura 0.75 y la base 7.5 entonces use la fórmula del área del triángulo y medio 2.8125
9. I: En total entonces ¿cuánto te dio?
10. V: en total sumándolos aproximadamente 40.3 Mbits
11. I: ¿Si el proceso es igual, porque los valores son diferentes?
12. C: Profe, soy yo, estaba hallando mal el área del rectángulo.

Este procedimiento descrito muestra motivación por parte de los estudiantes de dar los valores solicitados, se logra ver un empoderamiento de su propio aprendizaje, por ejemplo, las líneas 4, 6 y 8, muestran la seguridad con la de Valeria expresa su procedimiento y se empodera tanto del procedimiento, que Camilo, aunque con la misma idea, logra reconocer los cálculos mal realizados que no le permitieron obtener el mismo resultado.

El diseño e implementación del problema auténtico de descarga del archivo contribuyó para que los estudiantes pudieran inferir el proceso de acumulación en el concepto de integral, también hizo que los estudiantes centraran más su atención en la interpretación del resultado que en los cálculos aritméticos. Un ejemplo de esta situación la podemos ver en la Tabla 19.

Tabla 19 Episodio 4 Respuestas de los estudiantes en Descarga del Archivo, Taller I Actividad 3

Estrategia utilizada por Valeria	En los 3 primeros segundos intenté sacar el tamaño del archivo usando el área de un trapecio, intenté hacer lo del área bajo la curva también pero no pude porque no tengo la función.
Estrategia utilizada por Camilo	Para lograr sacar el area bajo la curva, se puede dividir todo el intervalo en rectangulos, para asi poder sacar el area y luego sumarla
Estrategia utilizada por Diana	

El problema hace que los estudiantes tomen las riendas de su propio aprendizaje, es decir, busquen diferentes estrategias para hallar la solución al problema, teniendo en cuenta el proceso de acumulación.

En la Tabla 19, se puede observar en la respuesta de Valeria, que está buscando diferentes estrategias, aunque no ha encontrado alguna. Sin embargo, se ve un interés por aplicar un mecanismo que le permita hallar el área bajo la curva. Valeria manifiesta un obstáculo para ella, que es no tener la expresión algébrica de la función, es decir, de alguna manera está buscando utilizar una representación algebraica que le permita tener la solución al problema. En parte esto se atribuye a que la enseñanza y el aprendizaje del cálculo como lo manifiesta Hitt (2003), en donde se da prioridad a las representaciones algebraicas y procedimientos algorítmicos.

Camilo da un argumento geométrico para hallar el área bajo la curva de la función e involucra el proceso de acumulación al manifestar que cada área debe ser sumada para hallar el valor del tamaño del archivo en un determinado tiempo t (Figura 33).

Diana utiliza el AVG y sus herramientas en búsqueda de dar solución al problema (Figura 41), utiliza lo que en la epistemología del concepto de integral se dio (Londoño, 2011), al construir rectángulos aproximados con diferente valor en la base que le permita cubrir la mayor área posible bajo la curva.

En Bobadilla (2012) se expresa que el tiempo utilizado por grandes matemáticos y pensadores para utilizar un método de aproximación del área, fue prolongado, gracias al uso de tecnologías digitales, el AVG y demás herramientas logramos obtener procedimientos similares en corto periodo de tiempo. Este aspecto se desarrolla con profundidad en los siguientes apartados.

Cada vez que iba aumentando la dificultad de las actividades, los estudiantes se interesaban y empoderaban del procedimiento para solucionar el problema. Algunos comentarios al respecto (Figura 16), se evidenciaron en el taller II del problema auténtico de descarga del archivo, las actividades estaban orientadas al uso de la herramienta *sumas inferiores y sumas superiores* de GeoGebra para el cálculo del área bajo la curva:

Figura 16 Comentarios sobre Taller II, Actividad 2 Descarga de un archivo

Valeria:

Me pareció curioso que la gráfica en este caso tuviera forma de gráfica coseno transformada

Me parece que es una buena idea agregarle a la función la herramienta para sacar el área bajo la curva definiendo un número de rectángulos ya que hace más sencillos los cálculos

Es muy interesante, es una forma sencilla y muy aproximada de saber el area bajo la curva

Me parece interesante y práctico que se pueda hallar el área bajo la curva definiendo un número de rectángulos de dos maneras distintas

Camilo:

Es muy interesante que tomando valores diferentes de la altura se puede tener valores muy aproximados al valor real

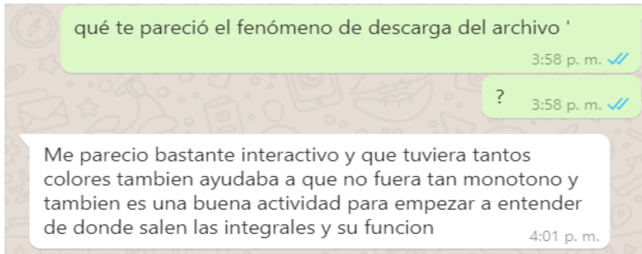
Es muy interesante, es una forma sencilla y muy aproximada de saber el area bajo la curva

En las siguientes secciones se dejan ver los resultados del análisis detallado de los modelos obtenidos por los estudiantes, se reconoce que los contextos y las tecnologías digitales ofrecen comprensión del concepto de integral e involucra el proceso de acumulación.

La apropiación del problema de descarga del archivo se convierte en los estudiantes en un problema cotidiano, dado que casi todos los días están descargando archivos, ya sea por motivos académicos, o por compartir en una red social, en la que deben descargar fotos, stickers, aplicaciones. Se proporciona una riqueza en cuanto a su contenido cultural y social, discutir estos temas conllevó a empoderar a los estudiantes de la situación con el propósito de generar procesos de simplificación y construcción del modelo referente al concepto de integral.

En una de las preguntas realizadas a los estudiantes al finalizar el problema auténtico de descarga del archivo (Figura 17) Valeria manifiesta:

Figura 17 Respuesta de Valeria sobre Fenómeno de descarga de archivo



En este fragmento la estudiante justificó que el diseño de la actividad no era monótono y es una buena actividad para entender el concepto de integral, por lo cual, resaltamos que surge un aprendizaje y un empoderamiento de la estudiante para poder concluirlo.

Los estudiantes en el desarrollo de las actividades lograron reconocer el área bajo la curva de la función velocidad como el tamaño del archivo, buscaron diferentes estrategias para hacer el cálculo de este, como calcular el área rectángulo inferior y luego sumar el área del triángulo superior, o calcular la recta que pasa por dos puntos de velocidad para hallar la altura del triángulo en un modelo general o utilizar la fórmula para hallar el área de un trapecio y así crear el modelo que describa el fenómeno con los cambios indicados. Cuando se presentan la misma situación de descarga del archivo, pero con la velocidad con una variación parabólica los estudiantes, iniciaron una búsqueda de herramientas matemáticas, e incluso al manejo del software como herramienta, aspecto que se evidencia en los siguientes apartados.

5.1.2. Modelación matemática del comportamiento de trasmisión de un virus como desencadenador de motivación

A finales del mes de diciembre de 2019 y comienzos de enero de 2020 inició el brote del coronavirus Sars-CoV-2 por todo el mundo; en el mes de marzo se declaró por la Organización Mundial de la Salud (OMS) la enfermedad como una pandemia mundial. En Colombia ha afectado la economía, el sistema de salud y otros ámbitos.

Para estudiar este virus se toman varios modelos epidemiólogos que describen el comportamiento de trasmisión (Modelo SEIR, Modelo SIR, Modelo SIRS), el modelo SIR es el modelo epidemiológico más sencillo de utilizar el cual se utilizó en esta investigación.

En el problema auténtico de *comportamiento de trasmisión de un virus* los estudiantes manifestaron su interés por conocer el problema, algunos comentarios al respecto fueron:

Figura 18 Comentarios sobre el problema auténtico del comportamiento de trasmisión de un virus

Valeria:

1.Interesante que una pandemia se pueda relacionar con la matematica y hasta tenga un modelo, de esta manera es posible predecir el comportamiento del virus

Diana:

Me parece interesante que ya hayan identificado un modelo para relacionar la variación de la enfermedad COVID-19 ya que es muy reciente.

Camilo

Es interesante que se introduzca al tema una problema de lo que actualmente estamos viviendo

Daniel

Me pareció interesante trabajar un problema reciente usando conceptos matemáticos ya que nos permite entender la forma en la que se obtienen los datos pertinentes para poder analizar y entender este problema.

En la Figura 18, se evidencia cómo los estudiantes lograron obtener motivación por trabajar los conceptos matemáticos involucrados en el problema auténtico, Londoño y Muñoz

(2011) expresan que la motivación hacia la matemática logra que los estudiantes generen estructuras de aprendizaje.

Como se mencionó en el apartado anterior, el problema auténtico de comportamiento de trasmisión de un virus se desarrolló en el taller III, a través de tres actividades, en las dos actividades iniciales planteadas en este taller, consistía en la presentación de dos gráficas que representan las variaciones diarias de recuperados y las variaciones diarias de fallecimientos. El proceso de análisis de las mismas permitió generar interés en los estudiantes, para conocer la cantidad de personas recuperadas de la enfermedad hasta determinado día t, o conocer la cantidad de personas fallecidas por la enfermedad hasta determinado día t, les hacía obtener información predecible, como se logra ver en la Figura 19.

Figura 19 Comentario de Camilo sobre las gráficas de comportamiento de trasmisión de un virus

Camilo:

Me parece interesante que se muestre el comportamiento de dos gráficas ya que presentan diferentes variaciones del mismo problema

El modelo SIR es un modelo matemático derivado del estudio de algunas enfermedades como la Influenza, es estudiado para modelar el comportamiento de trasmisión y analizar las formas en las que se pueda evitar el contagio, entenderlo no es sencillo, por la cantidad de variables que involucra como: la cantidad de contagios, la cantidad de recuperados, la cantidad de infectados, la cantidad de muertes, entre otras variables, que al analizarlas en un instante de tiempo t no es sencillo; pero estos modelos involucrados en la situación logran interés en los estudiantes y de alguna manera lo intentan investigar por sí mismos, logrando lo que Villa-Ochoa, y col. (2018) un empoderamiento de su formación matemática (Tabla 20).

Tabla 20 Episodio 4 Trascripción de video grabación Comportamiento de trasmisión de un virus

1. C: Profe, estaba mirando algo en internet, como con unas diferenciaciones ahí, pero hay varias cosas y le dan como unas constantes, pero no entiendo, dan unas constantes de recuperados y una de infectados.
2. I: ese modelo es interesante se llama el modelo SIR, ahorita no se está manejando el SIR, sino que se está manejando uno que se llama el modelo SEIR, el SIR tiene algunas limitaciones porque este considera que todas las muertes son por causa del virus, no tiene en cuenta que se muere por otra causa.
3. C: Ah, sí.
4. I: ¿Qué más investigó?
5. C: Nada más, es difícil entenderlo, pero es lo que está pasando

El problema auténtico de comportamiento de trasmisión de un virus, realmente generó una motivación en los estudiantes, por querer conocer la problemática del mundo actual en términos matemáticos y lograr un impacto cultural, en la forma de pensar y analizar la situación, logrando percibir la importancia que tienen las medidas de prevención y lo importante que es cuidar la salud y cuidar la salud de las personas que nos rodean, además de reconocer que se puede utilizar el concepto de integral para modelar, predecir y tomar decisiones.

5.2. Modelación matemática de un problema auténtico como desencadenador de modelos del concepto de integral.

Villa-Ochoa y col. (2014) refieren que los problemas relacionados en contextos cercanos o familiares a los estudiantes pueden producir ideas para intentar modelar mediante modelos o simbolismo matemáticos la situación y eso genera apropiación.

Los modelos particulares que construyen los estudiantes derivan del contexto de los problemas que están trabajando, logrando establecer relaciones matemáticas derivadas del proceso de modelación matemática. En esta investigación se consideró la postura de Villa-Ochoa y col. (2009) sobre el modelo como un conjunto de símbolos, representaciones y relaciones matemáticas para explicar, predecir y solucionar aspectos de un problema. Los modelos particulares que dan a conocer los estudiantes tienen una funcionalidad más allá de dar formalidad, sino que representan algo para el estudiante, adquiere un significado. A continuación, se describe por taller y actividad de cada problema autentico la forma en que los estudiantes realizaron el proceso de modelación.

5.2.1. Modelación matemática de descarga de un archivo como desencadenador de modelos del concepto de integral.

Las situaciones involucradas en el problema de descarga de un archivo se constituyeron en el punto de partida para que los estudiantes construyeran modelos matemáticos, reconociendo a la vez en sus experiencias cotidianas la posibilidad de acercarse a la matemática escolar.

En el taller I, Actividad 1, la velocidad de descarga del archivo es constante, en la cual se buscaba que los estudiantes respondieran a las siguientes preguntas ¿Qué relación tiene la velocidad de la descarga del archivo con el tamaño del archivo? ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en el primer segundo? Explique su respuesta ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en el 2 s? Explique su respuesta, ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en el 3 s? Explique su respuesta y ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en t segundos? Explique su respuesta.

El caso de Camilo: crea un modelo algebraico (Figura 20) de la relación entre la velocidad de descarga y el tamaño del archivo que se ha descargado en la variable *t*. Al iniciar la situación el estudiante no veía ninguna relación porque la velocidad de descarga es constante, pero a medida que va desarrollando las siguientes preguntas logra decir que por cada segundo que pasa debe descargar 5 Mb.

Figura 20 Caso de Camilo Taller I, Actividad 1

Camilo:

A) No tienen ninguna relación, ya que la velocidad no varia en ningún momento de la descarga.

B)Se ha descargado 5 Mb debido a la velocidad de descarga es 5 Mb/Seg

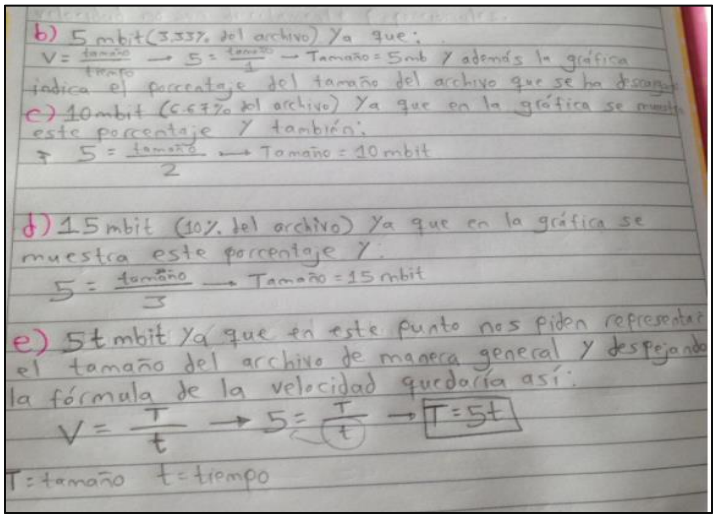
C) Se ha descargado 10 Mb debido a que a duplicarse el tiempo y la velocidad de descarga sigue siendo constante el tamaño del archivo se duplica

D) Se ha descargado 15 Mb ya que al aumentar el tiempo aumenta el tamaño del archivo

E) Se ha descargado 5t tomado la velocidad de descarga y el tiempo como una variable

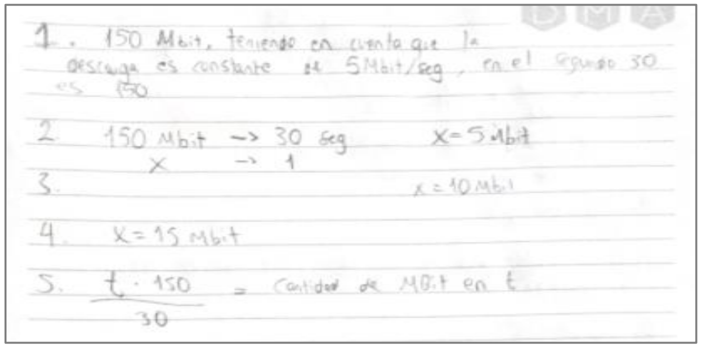
Valeria al igual que Camilo al iniciar la actividad no logró encontrar una relación entre el tamaño del archivo (Figura 21) y la velocidad de descarga argumentando que la velocidad es constante lo que de alguna manera no hace variar el tamaño del archivo. A medida que va desarrollando las actividades Valeria toma en cuenta, el porcentaje de descarga del archivo, pero justifica sus respuestas a través de una representación espontanea que es $v = \frac{tamaño}{tiempo}$; al finalizar el desarrollo de la actividad muestra un modelo matemático en el que representa $v = velocidad, t = tiempo$ y $T = tamaño\ del\ archivo$. Al escribir el modelo $T = 5t$. Ella menciona que hay una equivalencia entre lo que parece un modelo conocido que la llevó a utilizarlo en la situación.

Figura 21 Caso Valeria, Taller I, Actividad 1



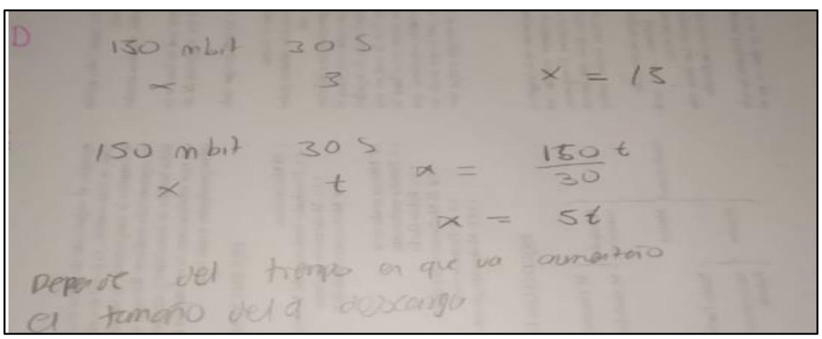
En el caso de Daniel, él afirma que la relación entre la velocidad de descarga y el tamaño del archivo es de 150Mbit, llevando a pensar el producto entre la velocidad de descarga que es constante y el tiempo que dura la descarga del archivo, que es 30 segundos. El modelo algebraico que realiza Daniel (Figura 22) está basado en una regla de tres simple, llegando a plantear el modelo de $\frac{t*150}{30} = cantidad\ de\ Mbit\ en\ t.$ Al simplificar este modelo tendríamos el mismo planteado por Valeria y por Camilo, pero su procedimiento para hallarlo es diferente.

Figura 22 Caso Daniel, Taller I, Actividad 1



El caso de Diana: ella no dio una afirmación acerca de la relación entre la velocidad de descarga del archivo y el tamaño del archivo descargado, sin embargo, al igual que Daniel, utilizó una regla de tres simple, para determinar un modelo que le permitiera describir la situación. Diana llamó al tamaño del archivo *x*, tomando como modelo $x = 5t$. (Figura 23).

Figura 23 Caso Diana, Taller I, Actividad 1



En cada caso, al finalizar de responder las preguntas, los estudiantes encontraron un modelo similar para resolver la situación. Sin embargo, no ven la relación con el concepto de integral (porque aún no se estaba orientando hacia el concepto en específico), solo obtuvieron el modelo matemático para resolver la situación en específico.

El diseño de las actividades tenía como objetivo que los estudiantes crearan el modelo para resolver el problema auténtico, pero a la vez, lograran estudiar con profundidad el concepto involucrado en la situación. Así como lo expresa Chamizo y Guerrero (2010) el modelo no debería quedar solo en ser validado para resolver la situación problema, sino que puede ir más allá en la matemática.

En la actividad anterior (Taller I, Actividad 1) se logró identificar que los estudiantes pasan por los momentos del ciclo de modelación planteado por Blum et al. 2007 y Blum y Borromeo (2009), desarrollándose los momentos de *1) Comprensión de la situación 2) simplificación y estructuración 3) Matematización 4) Trabajo matemático 5) Interpretación 6) Validación.* Aunque el objetivo de esta investigación no es describir el proceso de modelación, este se da de manera permanente.

En el momento de la socialización, ningún estudiante utilizó el área sombreada bajo la curva de la función de descarga de velocidad. Debido a las preguntas diseñadas en la entrevista estructurada como: ¿Qué representa el área sombreada? ¿Por qué? ¿Qué relación tiene el área sombreada con el tamaño del archivo que ha descargado? ¿Por qué? Se orientó una discusión en los estudiantes sobre qué representaba esa área (Tabla 21).

Tabla 21 Episodio 6 Entrevista estructurada Taller I, Actividad 1

1. V: El área tiene una relación directamente proporcional con el tamaño del archivo, porque a medida que va avanzando la descarga, el área se hace mayor.
2. I: ¿Qué relación específicamente?
3. V: No se profe.
4. C: El área sombreada termina siendo igual al tamaño del archivo.
5. Di: el tamaño viene siendo lo que está en el plano cartesiano.
6. I: ¿Por qué?
7. Di: Es que ahí lo que está graficando es velocidad con respecto al tiempo.
8. D: Si se hace los cálculos da igual el área con la formula.
9. I: ¿Por qué?
10. Di: No se profe, pero funciona.
11. D: Si profe, el tamaño del archivo.

En la Tabla 21 se logra observar que los estudiantes discuten sobre la relación entre el modelo algebraico encontrado y el significado atribuido al área bajo la curva de la función velocidad de descarga. En este momento la relación no era del todo clara, porque realizaron el proceso de validación del modelo bajo argumentos empíricos. Sin embargo, lo aceptan como verdadero, en Villa-Ochoa y col. (2009) se expresa que la verdadera importancia de un modelo matemático radica en tener un lenguaje conciso que expresa las ideas; para los estudiantes el modelo $T = 5t$ reflejaba sus ideas y lo relacionaban con el área bajo la curva de la función.

En la Figura 24, Camilo argumenta que el área sombreada es el tamaño del archivo, toma el $A = b * h, \quad b = t\ , \quad A = 5 * b, A = 5 * t;$ de esta manera él valida el argumento planteado de porque el área bajo la curva de la función velocidad sería el tamaño del archivo; En la fase de socialización usando la metodología de Fiallo y Parada (2018), el estudiante da a conocer su argumento y sus compañeros lo validan.

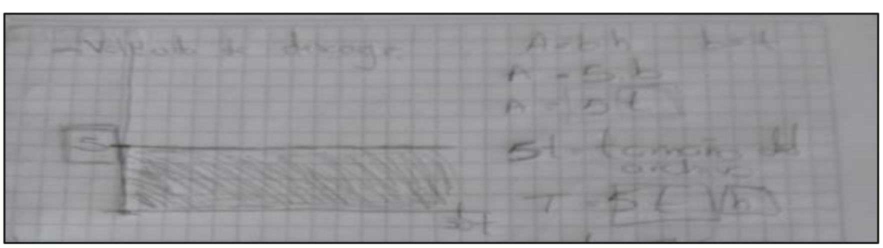
Estudios como Doorman y Gravemeijer (2009) y Londoño y Muñoz (2011) resaltan que, para el planteamiento de un modelo matemático, se debe terne en cuenta que los estudiantes implicados, poseen de conocimientos previos, que infieren en las estrategias planteadas para poder dar solución al problema planteado.

Figura 24 Relación área sombreada y tamaño del archivo el caso de Camilo

$A = b * h \quad b = t$

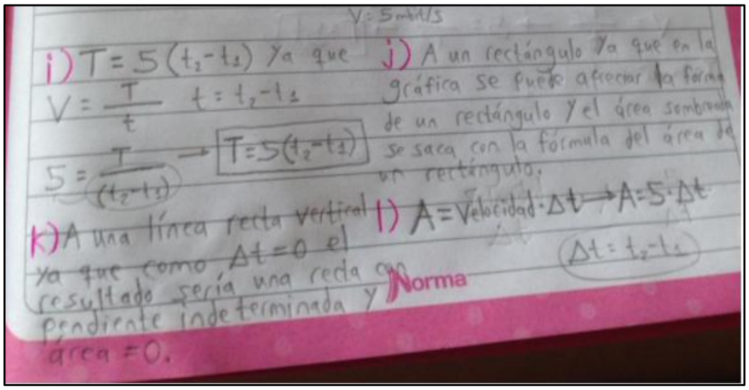
Así mismo, en esta actividad (Taller I, actividad 1), se realizaron preguntas a los estudiantes como: ¿A qué polígono se parece el área acumulada por el tamaño del archivo descargado entre $\Delta t = t_2 - t_1$?¿A qué polígono se parece el área acumulada por el tamaño del archivo descargado entre $\Delta t = t_2 - t_1$ cuando $\Delta t \to 0$?¿Cómo halla el área acumulada desde $t = 0s$ hasta t? Las preguntas planteadas estuvieron orientadas a desarrollar el proceso de acumulación en los estudiantes; este proceso hace parte del concepto de Integral (Robles, Tellecea y Font, 2014) y lo entendemos en el sentido de Thompson (1994), Thompson y Silverman (2007) y Kouropatov (2008) como una suma que consta de un gran número de términos muy pequeños.

Al cuestionar con estas preguntas, obtuvimos respuestas como la de Valeria (Figura 25) en la cual establece que si el intervalo de tiempo tiende a cero ($\Delta t \to 0$), entonces el polígono al que se va a parecer es un rectángulo, si el $\Delta t = 0$, entonces no sería un rectángulo sino una línea recta con pendiente indeterminada, pero al finalizar para responder la pregunta ¿Cómo halla el área acumulada desde $t = 0s$ hasta t? Toma el modelo $A = velocidad * \Delta t$, $A = 5\Delta t$. En estos modelos ella reconoce que



es el acumulado de todos los intervalos de tiempo (de los rectángulos que se forman cuando $\Delta t \to 0$), pero aún no considera el concepto de sumatoria.

Figura 25 Proceso de acumulación Valeria Taller I Actividad 1



Como se mencionó en el apartado de planteamiento del problema, este proceso no es automático ni sencillo de visualizar; las demás actividades están diseñadas para perfeccionar este proceso. A partir del razonamiento de Valeria los demás estudiantes reconocen su argumento, pero siguen basándose en modelos que les permitan dar solución a la pregunta planteada.

En el taller I, Actividad 2, la velocidad de descarga del archivo era una función lineal, y se planteaban las siguientes preguntas a los estudiantes: ¿Qué relación tiene la velocidad de la descarga del archivo con el tamaño del archivo? ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en el primer s? Explique su respuesta ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en el 2 s? Explique su respuesta, ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en el 3 s? Explique su respuesta y ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en t segundos? Explique su respuesta.

El caso de Camilo: plantea inicialmente que no hay relación entre la velocidad de descarga del archivo con el tamaño del archivo (Figura 26), a pesar de que, en la discusión anterior, ya se había mencionado y aceptado que, el área bajo la curva de la función velocidad sería el tamaño del archivo. Para calcular el tamaño de archivo en determinado tiempo t, dio sus valores especifico y planteó un modelo matemático para determinarlo en t segundos (Figura 27).

Figura 26 Caso Camilo, Taller I, Actividad 2

Camilo:

A) No tiene ninguna relación

B) En el segundo 1 se han descargado 10.1 Mb

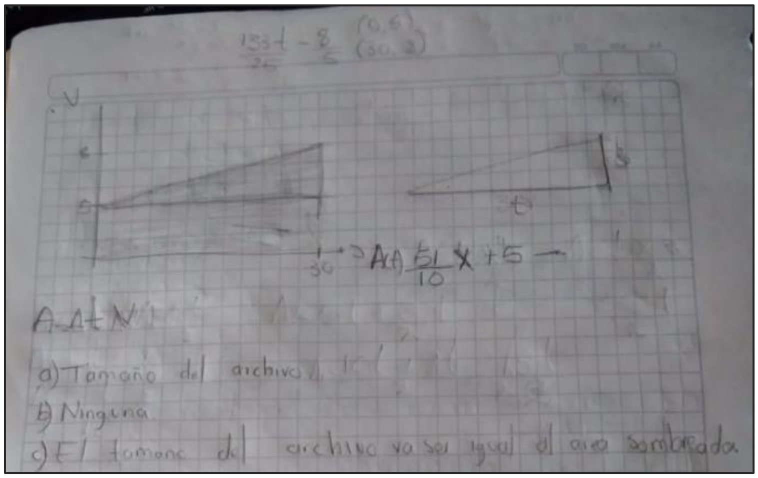
c) en el segundo 2 se ha descargado 15.2 Mb

d)En el tercer segundo se ha descargado 20.3 Mb

E) En el t segundos se ha descargado Tamaño= 51t/10+5

El modelo planteado por Camilo fue: $Tamaño = \frac{51t}{10} + 5$, para conocer el proceso de modelación realizado por el estudiante, se plantearon preguntas como: ¿Cómo obtuviste este modelo? ¿Se cumple para todos los fenómenos? ¿Qué condiciones debe tener? Para lo cual el estudiante afirma que, para crear el modelo, tuvo en cuenta que es una recta, por lo cual tomó dos puntos en la recta y calculo la ecuación de la recta (Figura 27).

Figura 27 Caso Camilo, Taller I, Actividad 2 Entrevista estructurada



A pesar de expresar que no hay relación entre la velocidad de descarga del archivo y el tamaño del archivo el estudiante si toma en cuenta el área bajo la curva, como se logra ver en la Figura 27, divide el área en dos polígonos un rectángulo y un triángulo. Para determinar el área bajo la curva de la función velocidad de descarga, inicialmente toma el área del rectángulo como $5x$, donde x representaría el tiempo y para el área del triángulo escoge los puntos (0,5) y (30,8) en la recta halla la ecuación de la recta $y = \frac{x}{10} + 5$.

Camilo realizó el ciclo de modelación (Blum y Leiss, 2007) porque simplificó y estructuró, hizo el proceso de matematización, realizó un modelo matemático, lo interpretó, pero en la validación plantea el modelo $5x + \frac{x}{10} + 5 = \frac{51}{10}x + 5$ (discusión en grupo, Tabla 22) logra reconocer que no es el modelo adecuado para la situación, porque el área del triángulo lo confunde con la función velocidad de descarga.

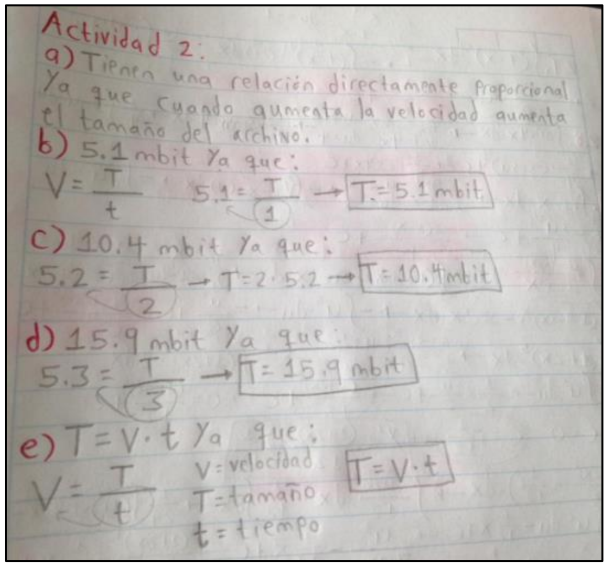
Tabla 22 Episodio 7 Entrevista estructurada Taller I, Actividad 2

1.	I: ¿Para qué haya la pendiente?
2.	C: Para encontrar la ecuación de la recta
3.	I: ¿Encontró la ecuación de la recta?
4.	C: Ah, ya entendí, si me quedó mal. la altura está siendo definida por la ecuación de la recta, luego para hallar la altura del triángulo debo restar la que se tiene del rectángulo.
5.	D: yo lo que hice fue hallar el cateto, después de haber hallado la inclinación de la línea, haber hallado la función de la línea, pero no sé.

La pregunta ¿Para qué haya la pendiente? Le permite a Camilo reconocer la confusión de la función velocidad con el área del triángulo. Villa-Ochoa (2007) expresa que la construcción de un modelo no se hace de manera inmediata, sino que requiere de tiempo en el que el modelador pone en cuenta sus conocimientos matemáticos y de la situación.

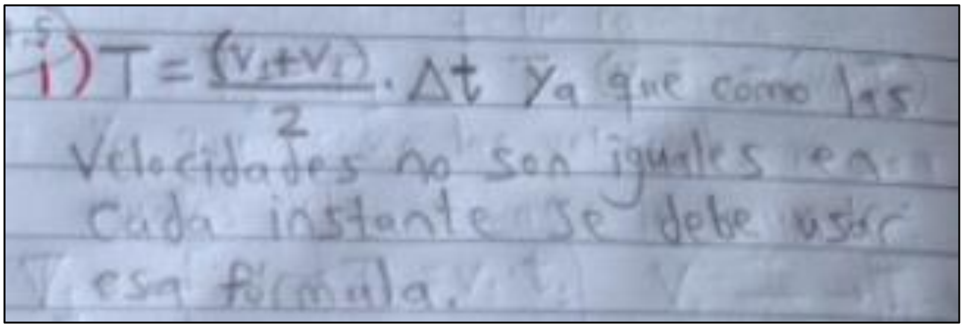
El caso de Valeria: ella tuvo en cuenta el modelo creado en la actividad anterior, argumentado que $T = V * t$, donde $T = tamaño\ del\ archivo,\ V = velocidad\ y\ t = tiempo$. Sin embargo, tiene en cuenta que la velocidad no es constante, por tanto, en el modelo escribe simplemente V (Figura 28). En su procedimiento no aclara si está utilizando el área bajo la gráfica de la función velocidad descarga, aspecto que se aclara al momento de la discusión que se dio posteriormente (Tabla 23).

Figura 28 Caso Valeria Taller I actividad 2



Durante el proceso de construcción del modelo, Valeria reconoce que la velocidad de descarga del archivo no es constante, al realizarle preguntas como: ¿Qué modelo determina el tamaño del archivo en t s? Utiliza el modelo para hallar el área de un trapecio y lo emplea para hallar el área bajo la curva. En este momento, Valeria tiene en cuenta lo discutido en la actividad anterior (Figura 29) y cambia el modelo planteado en la Figura 28.

Figura 29 Caso Valeria Entrevista estructurada Taller I actividad 2



Al momento de la interacción con el investigador, Valeria manifiesta que el área bajo la función velocidad de descarga es el tamaño del archivo (Tabla 23) y por ello utiliza la ecuación para hallar el área de un trapecio.

Tabla 23 Episodio 8 Entrevista estructurada Taller I, Actividad 2

1. D: yo lo que hice fue sumar las velocidades en los instantes de tiempo anteriores.
2. V: Yo en esa usé el área del trapecio para hallarla, sume los dos lados, dividí en dos y multipliqué por delta de tiempo. Me dio 40.3
3. C: Me da diferente 43.25
4. Di: Te dio 43.12 Mbit
5. I: ¿Cómo surgen estos valores?
6. V: Como nosotros dijimos que era el área, es bajo la línea o bajo la función, lo más seguro es que tengamos que hallar esa área, entonces utilicé la fórmula del trapecio
7. C: A mí me falta hallar la altura del triángulo
8. D: Yo sumando las velocidades

Las argumentaciones de Valeria están orientadas a validar la afirmación de que el área bajo la curva de la función velocidad de descarga es el tamaño del archivo. Sin embargo, hay que especificar qué significa los valores v_1 y v_2, proceso que se refleja en detalle en la discusión entre pares y con el investigador.

El caso de Daniel: él inicialmente no plantea un modelo matemático para determinar el tamaño del archivo en un instante de tiempo t. En la Figura 30, el responde **NS/NR** que significa "No sé, no respondo". Sin embargo, determina valores del tamaño del archivo en instantes de tiempo $1\ s, 2\ s\ y\ 3s$.

En la interacción con el investigador se le pregunta a Daniel: ¿Qué procedimiento realiza para determinar estos valores? Respondiendo: *yo lo que hice fue sumar las velocidades en los instantes de tiempo anteriores.*

Figura 30 Caso Daniel, Taller I actividad 2

Daniel:

A)La velocidad aumenta 0,1 Mbit cada segundo, pero como el tamaño del archivo actúa como una constante no se tiene ninguna relación
B)En el segundo 1 se han descargado 10,1 Mbit
C)En el segundo 2 se han descargado 15,3 Mbit
D)En el segundo 3 se han descargado 20,4 Mbit
E)NS/NR

El estudiante tiene conocimiento del proceso de acumulación involucrado en la situación, sumando las cantidades de las velocidades en los tiempos anteriores, sin embargo, no se logra identificar que considere el área bajo la curva o utilice algún modelo con relación al área. Por tanto, no logra construir un modelo matemático que le permita dar solución al problema (Villa-Ochoa y col. 2010).

El procedimiento realizado por Daniel se observa en detalle en la Figura 31, ya que, para determinar el tamaño del archivo en un tiempo determinado, realiza la suma de las velocidades anteriores a la velocidad en el tiempo indicado t. El detalle es que él inicialmente sí plantea que el área sombreada sería el tamaño del archivo, parecía tener una confusión.

Figura 31 Caso Daniel, entrevista estructurada, Taller I, actividad 2

A)El área sombreada representa el tamaño del archivo
B)A medida que la velocidad aumenta el área bajo la linea también lo hace, por lo tanto son directamente proporcionales
C)La relación es que cada vez que se aumenta la velocidad de descarga, se muestra que descarga mayor cantidad de archivo
D)En ese intervalo se descargan 54,3 Mbit, puesto que al hacer esta sumatoria de 5+5,1+5,2+...+5,75=54,3 Mbit
E)En este intervalo se descargaron 54,95 Mbit
F)En este intervalo se descargaron 62,05 Mbit
G)En este intervalo se descargaron 68,45 Mbit

En la discusión junto a los compañeros (Tabla 24), se logra identificar que Daniel si consideró tener el área bajo la curva y posiblemente la vio como la suma de rectángulos, pero a esos rectángulos solo les tuvo en cuenta la altura y no su base.

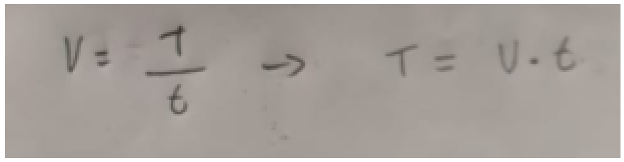
Tabla 24 Episodio 9 Entrevista estructurada Taller I, Actividad 2

1. D: Profe lo que yo había hecho de sumar las velocidades quedó mal.
2. I: ¿Por qué? Daniel
3. D: Si, es como dice, es que yo solo estaba tomando las alturas y es el área tenía que verlo como tal.
4. I: ¿Por qué solo estaba tomando las alturas?
5. D: Si profe, falta multiplicar por la base

Como ya se mencionó, Robles, Tellechea y Font (2014) expresan que el proceso de acumulación involucrado en el concepto de integral no es inmediato para los estudiantes, pero Daniel muestra una idea intuitiva del proceso de acumulación, intentando dividir el área en rectángulos y considerando su área; las alturas son los valores de las velocidades.

El caso de Diana: al igual que Valeria tiene en cuenta el modelo creado en la situación anterior, pero reconoce que la velocidad de descarga no es constante, sino que presenta una variación (Figura 32); planteando como modelo $T = v * t$, donde $T = tamaño\ del\ archivo, v = velocidad\ de\ descarga\ y\ t = tiempo$.

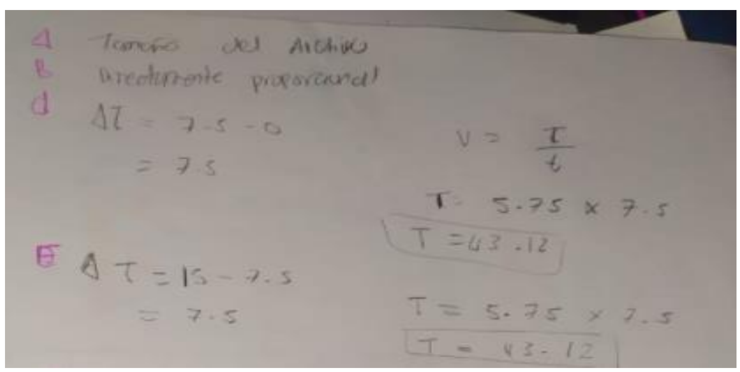
Figura 32 Caso Diana, Taller I actividad 2



A pesar de que, en la discusión de la actividad anterior, se concluyó que el área sombreada representaba el tamaño del archivo, Diana parece no tomarlo en cuenta y mantiene el modelo de la situación anterior cuando la velocidad de descarga era una función constante.

Valeria a diferencia de Diana, reconoció el área como tamaño del archivo descargado en t segundos y buscó el área de un trapecio para determinarla. Pero Diana sigue utilizando el modelo de la situación anterior (Figura 33), inicialmente dice que el área sombreada es el tamaño del archivo, pero sigue utilizando el modelo $v = \frac{T}{t}$.

Figura 33 Caso Diana, Entrevista estructurada, Taller I, Actividad 2



Al momento de pedirle a los estudiantes un modelo matemático que representara el tamaño del archivo en un instante de tiempo t, los modelos son diferentes, el modelo planteado por Valeria, Daniel y por Camilo están basados en obtener una expresión algebraica que permita determinar el área bajo a la curva de la función velocidad. El modelo planteado por Diana sigue siendo el de la situación anterior.

Los modelos son diferentes, es decir, que el proceso de modelación no es único, tampoco es rígido, los modelos pueden ir cambiando para los estudiantes conforme las discusiones entre pares.

Tabla 25 Episodio 10 Entrevista estructurada Taller I, Actividad 2

1. D: Yo lo que hice fue sumar las velocidades en los instantes de tiempo anteriores.
2. V: Yo en esa usé el área del trapecio para hallarla, sume los dos lados, dividí en dos y multipliqué por delta de tiempo. Me dio 40.3
3. C: Me da diferente 43.25
4. D: Me dio 43.12 Mbit
5. I: ¿Cómo surgen estos valores?
6. V: Como nosotros dijimos que era el área, es bajo la línea o bajo la función, lo más seguro es que tengamos que hallar esa área, entonces utilicé la fórmula del trapecio
7. C: A mí me falta hallar la altura del triángulo
8. D: Yo, sumando las velocidades
9. C: Tengo una duda, como hago para hallar el área del triángulo si no tengo ningún valor, yo halle la pendiente.
10. I: ¿Para que haya la pendiente?
11. C: Para encontrar la ecuación de la recta
12. I: ¿Encontró la ecuación de la recta?
13. C: Ah ya entendí, si me quedó mal, la altura está siendo definida por la ecuación de la recta, luego para hallar la altura del triángulo debo restar la que se tiene del rectángulo.
14. Di: Yo lo que hice fue hallar el cateto, después de haber hallado la inclinación de la línea, haber hallado la función de la línea, pero no sé.
15. I: No entendí, me explicas, por favor
16. Di: No, es mejor como lo plantea Camilo. Lo haré así.
17. V: Creo que ya medio $y = \frac{1}{10}t + 5$, bueno si. $v = \frac{1}{10}t + 5$
18. I: ¿Qué significan estas ecuaciones?
19. V: Esta es la recta, es decir, la función velocidad, para generar en cualquier t el valor del tamaño del archivo sería, el del área sombreada, es decir, el área sería $5t + \frac{t\left(\frac{1}{10}t\right)}{2}$
20. C: Si a mí me dio igual.
21. D: Profe lo que yo había hecho de sumar las velocidades quedó mal.
22. I: ¿Por qué? Daniel
23. D: Si, es como dice, es que yo solo estaba tomando las alturas y es el área tenía que verlo como tal.
24. I: Vamos a volver a retomar el problema, según lo discutido.

En la discusión (Tabla 25), Daniel reconoce que estuvo sumando las velocidades, pero que no tomó en cuenta la base, es decir, los intervalos de tiempo (líneas 8 y 21 y 23); Valeria en la fase individual había proporcionado una expresión algebraica para hallar el área de un trapecio, pero en términos generales, $T = \frac{v_1+v_2}{2} * \Delta t$ donde $v_1\ y\ v_2$ son la velocidad inicial y final respectivamente. Pero en la discusión, Valeria toma la idea de Camilo de hallar la recta de la función velocidad y encuentra el modelo apropiado para el problema $T = 5t + \frac{t\left(\frac{1}{10}t\right)}{2}$ (renglón 19). A partir de este razonamiento los demás compañeros reconocen los errores cometidos y aceptan este modelo como el ideal para resolver el problema.

En los cursos de cálculo II o Cálculo Integral se enseña el procedimiento para calcular una integral definida con el método de aproximación *regla del trapecio.* Esta regla según Peña (2015) es uno de los métodos que más utilizó Newton cuando el grado del polinomio es uno.

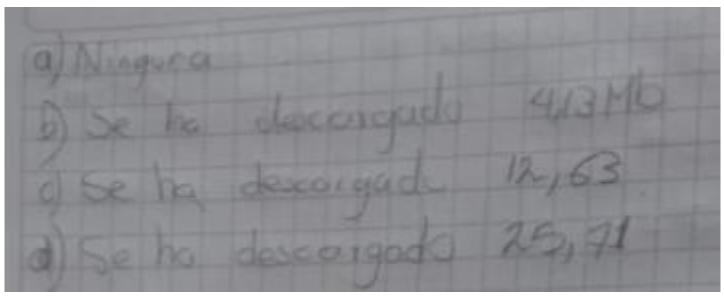
En esta investigación esta idea de aproximación por trapecio surge a través de la modelación del problema auténtico. No se dieron indicaciones a los estudiantes del método, sino que surge a través de los procedimientos y la interpretación del tamaño del archivo como área bajo la curva de la función velocidad.

Valeria fue la estudiante que utilizó inicialmente la regla, sin conocerla a profundidad, por el aspecto del área bajo la curva de la función positiva velocidad de descarga. Los demás compañeros optaron por dividir el área y encontrarla forma de modelar la situación. Se considera que este problema puede ser utilizado para profesores que quieren dar un acercamiento a los métodos de aproximación de la integral.

En el taller I, Actividad 3, la velocidad de descarga del archivo está ligada a una función parabólica, y se planteaban las siguientes preguntas a los estudiantes: ¿Qué relación tiene la velocidad de la descarga del archivo con el tamaño del archivo? ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en el primer s? Explique su respuesta ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en el 2 s? Explique su respuesta, ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en el 3 s? Explique su respuesta y ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado en t segundos? Explique su respuesta

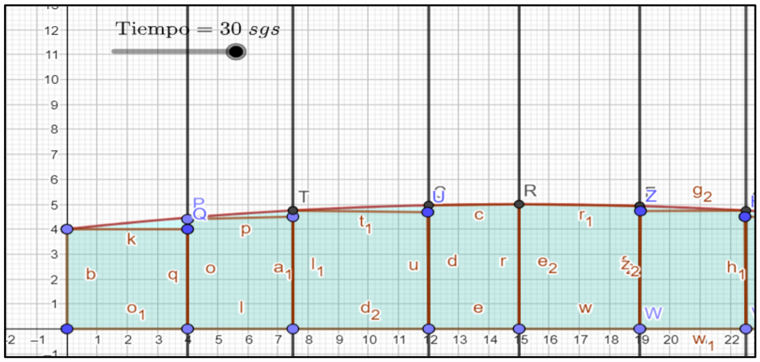
El caso de Camilo: Camilo después de haberse enfrentado a las dos actividades anteriores, en la actividad 3 inicialmente no logra construir un modelo matemático para determinar el tamaño del archivo en un instante de tiempo t, sin embargo, para los valores de $t = 1\ s$, $t = 2\ s$ y $t = 3\ s$ (Figura 34).

Figura 34 Caso Camilo, Taller I, Actividad 3



Al pedirle una explicación de cómo determinó los valores, Camilo proporciona un enlace a través del AVG, con el que muestra su proceso de modelación matemática (Figura 35), se evidencia la influencia de la interpretación del tamaño del archivo como área bajo la curva de la función velocidad.

Figura 35 Caso Camilo, entrevista estructurada, Taller I, Actividad 3



A partir del área bajo la curva, Camilo construye rectángulos inscritos entre el eje x, y la curva, el valor de las bases de los rectángulos es de diferente medida. El estudiante no planteó un modelo algebraico, sin embargo, la construcción geométrica realizada lleva a cabo un proceso de modelación en términos de Blum y Leiss (2007).

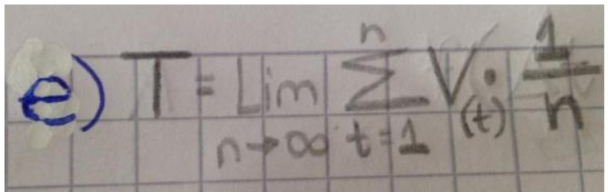
El caso de Valeria: utiliza el modelo matemático que construyó en la actividad anterior, con la idea de aproximar el área bajo la curva inscribiendo trapecios, pero no logra obtener un modelo matemático para determinar el tamaño del archivo en un instante de tiempo t. Esto se evidencia en la Figura 36, en la cual Valeria comenta que lo intentó en los tres primeros segundos por el comportamiento de la función velocidad, pero no logró realizar una generalización. Valeria también comparte a través del AVG el siguiente enlace con la construcción geométrica realizada: https://www.geogebra.org/classic/n6euqa7s

Figura 36 Comentario Valeria Taller I, Actividad 3

En los 3 primeros segundos intenté sacar el tamaño del archivo usando el área de un trapecio, intenté hacer lo del área bajo la curva también pero no pude porque no tengo la función.

El comentario de Valeria no es explícito, porque dice "***hacer lo del área bajo la curva***", pero no indica a que se refiere con esta frase. Para lo cual se cuestiona a la estudiante de manera individual ¿Qué significa "***hacer lo del área bajo la curva"***? La estudiante responde con un modelo matemático (Figura 37) afirmando que este es el modelo para determinar el área bajo la curva, pero que no puede porque no tiene la función velocidad.

Figura 37 Caso Valeria, Taller I, Actividad 3



El modelo planteado por Valeria resulta fundamental, porque la estudiante, pasa de tener una idea de aproximación por trapecios a verlo como la suma de áreas de infinitos rectángulos inscritos bajo la curva de la función velocidad. Este cambio surge de la validación del modelo creado, al modelo que pueda resolver el problema.

El caso de Daniel: Daniel realiza un comentario sobre cómo determinar el tamaño del archivo (Figura 38), tomando como equivalencia determinar el área bajo la curva, dividiendo el intervalo en rectángulos e inicia la idea de sumar cada una de estas áreas.

Figura 38 Comentario de Daniel, Taller I, Actividad 3

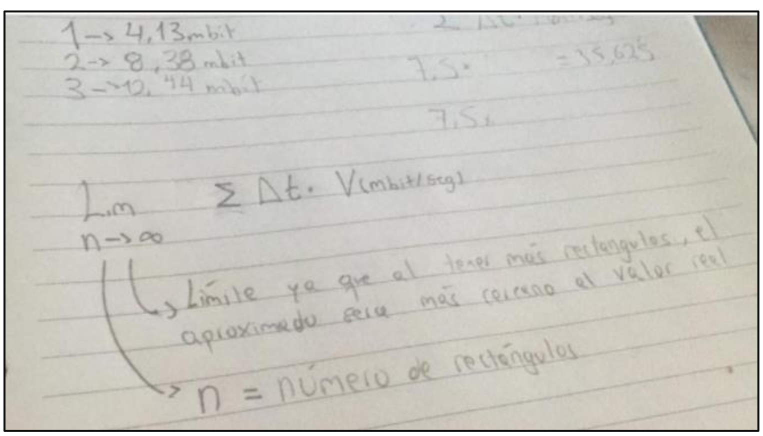
Para lograr sacar el area bajo la curva, se puede dividir todo el intervalo en rectangulos, para asi poder sacar el area y luego sumarla

Es pertinente recordar que los estudiantes aún no habían pasado por un curso de cálculo integral, estas ideas emergieron a partir de la modelación del problema auténtico, ya que produce interés por parte de los estudiantes a investigar sobre el concepto de integral a través de su interpretación geométrica, en una primera instancia, como área bajo la curva de la función. Posteriormente, se generaliza esta idea al cálculo de la integral en donde la función no es necesariamente positiva.

Daniel realiza un modelo algebraico de la relación entre el tamaño del archivo que se ha descargado y el área bajo la curva de la función velocidad (Figura 39), en el modelo explica que utiliza límite porque al tener más rectángulos, el aproximado será más cercano al valor real.

El concepto de límite involucra ideas intuitivas sobre el infinito que en ocasiones puede ser de dificultad para los estudiantes (Hitt ,2005), incluso para los profesores. En esta investigación el concepto de límite surge de manera intuitiva ante la idea de hacer la suma de áreas de infinitos rectángulos, como es el caso de Daniel, cabe resaltar que ellos ya estudiaron el concepto en su curso de cálculo diferencial, por ende, puede que allá surgido de manera intuitiva en los estudiantes.

Figura 39 Caso Daniel, Taller I, Actividad 3



En la Figura 39, se logra identificar la representación simbólica del concepto de sumatoria $\sum \Delta t * V$ y afirma que:

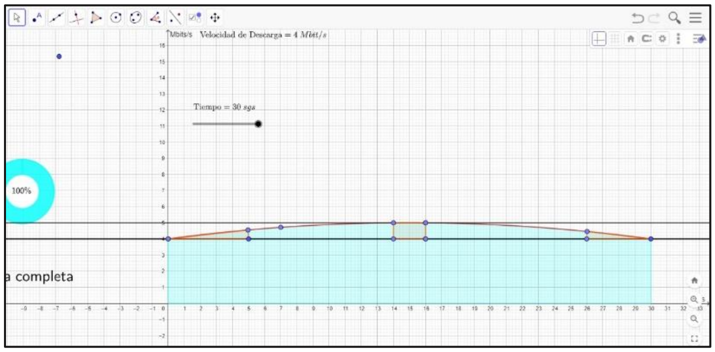
"Límite ya que, al tener más rectángulos, el aproximado será más cercano al valor real"

Daniel afirma que n es el numero de rectángulos, pero en la sumatoria, no indica, cual es el mínimo y cual es máximo, es decir, $\sum_{i=1}^{n} \Delta t * V$. Se puede ver que la construcción del modelo no es inmediata, porque lleva a cabo su proceso de modelación matemática en el sentido de Villa-Ochoa (2010). Daniel valida su modelo y lo toma como verdadero, pero al pedirle valores específicos, realiza el cálculo de las áreas lo cual resulta extenso. En la discusión se razona sobre esto para conocer una manera de determinarlo de manera más rápida.

El caso de Diana: Diana no encontró un modelo algebraico para la solución del problema, solo dio a conocer su construcción geométrica a través del AVG, en su proceso de modelación, en enlace es: https://www.geogebra.org/classic/pt4zatdh.

En la Figura 40, se muestra la construcción geométrica realizada por Diana, ella dividió el área bajo la curva de la función velocidad de descarga, en un rectángulo de altura 5 y base 30 y el área restante, inscribe triángulos y rectángulos para aproximarse al valor del área bajo la curva y así determinar el tamaño del archivo descargado.

Figura 40 Caso Diana, Taller I, Actividad 3

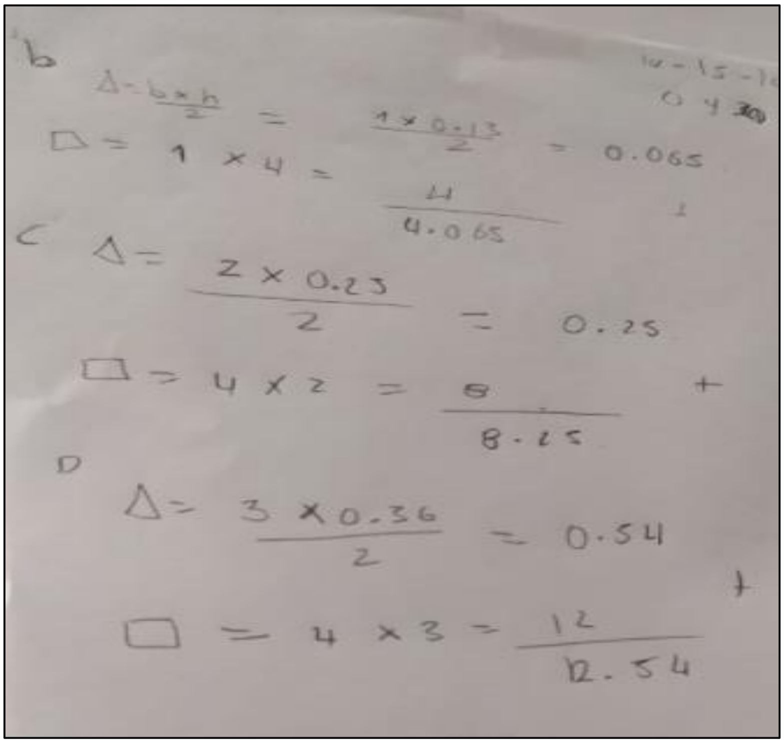


GeoGebra y el AVG jugaron un papel importante en la modelación realizada por los estudiantes, por ejemplo, si Diana no hubiese tenido la facilidad de la tecnología del software y del aula virtual de GeoGebra, difícilmente hubiese llegado a construir los polígonos y calcular el área en menos de una hora.

Epistemológicamente, la construcción geométrica es la forma en que los matemáticos como Newton, Leibniz, entre otros realizaron aproximaciones inscribiendo polígonos en el área que querían determinar. Londoño (2011) da a conocer la forma en la que se inició; esta construcción y los años en que se tardó para llegar al modelo del concepto de integral que conocemos como $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$.

Algunas de las aproximaciones realizadas por Diana se logran ver en la Figura 41. En la que suma el área del rectángulo en el segundo de tiempo indicado, con el área del polígono inscrito ya sea un triángulo u otro rectángulo.

Figura 41 Caso Diana, aproximaciones Taller I, actividad 3



De esta manera Diana, lograba proporcionar el valor del tamaño descargado en instantes de tiempo específicos, pero no logró plantear un modelo matemático algebraico para determinar el tamaño del archivo en un instante de tiempo t.

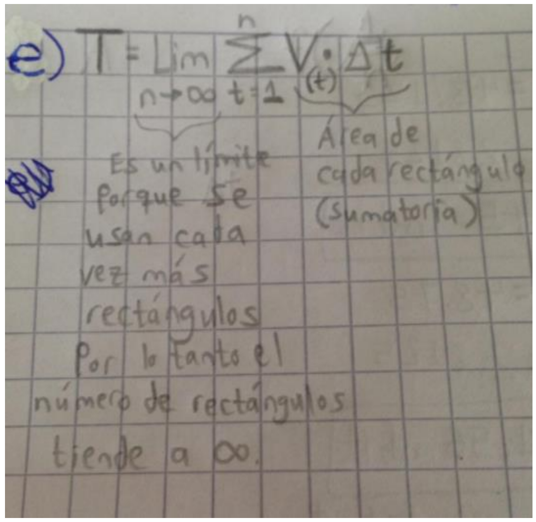
En la socialización, los estudiantes convergen a la idea de determinar el área bajo la curva de la función para encontrar el tamaño del archivo en un instante de tiempo t. Inicialmente los estudiantes discuten de no conocer el procedimiento para determinar el área (Tabla 26), pero surgen ideas como determinar el área de una parábola, hacer aproximación inscribiendo rectángulos y sumando sus respectivas áreas.

Tabla 26 Episodio 11 Taller I, Actividad 3

1. I: ¿Valeria, cuéntame qué has pensado?
2. V: Pues para resolver lo de la relación que tiene el tamaño y la velocidad, pensé como dividirlo en intervalos, pero en una parte me confundí porque pues al principio empieza siendo directamente proporcionales, luego hay un momento en el que la velocidad se mantiene, pero después de eso, no sé si decir que son directamente proporcionales o que vuelven a lo mismo. No sé cómo decir eso
3. I: ¿Me puedes explicar lo de dividirlo en intervalos?
4. V: Si profe es el área de los rectángulos.
5. Di: Yo la verdad estoy haciendo líneas, pero sigo pensando
6. D: Es que es sacar el área bajo la curva, pero es que sin saber cómo.
7. Di: Con el área de un círculo
8. D: No, con limites
9. Di: Voy a buscar como era el área de una parábola.

Al momento de pedirles hallar el modelo algebraico, que representa el tamaño del archivo en un instante de tiempo t a partir de la velocidad de descarga, el modelo creado por Valeria y Daniel hace referencia al límite de la sumatoria de áreas de infinitos rectángulos. El modelo de Valeria es el que más se discutió en la socialización (Figura 42), donde T es el tamaño del archivo descargado, $V_t * \Delta t$ es el área de cada rectángulo y $T = \lim_{n \to \infty} \sum_{t=1}^{n} V_t * \Delta t$.

Figura 42 Socialización Taller I, Actividad 3



Este modelo es planteado por Valeria, pero inicialmente ella planteaba el modelo de la Figura 37, donde $V_t * \frac{1}{n}$ era el área de cada rectángulo, pero en parte de su reflexión individual está que son intervalos de tiempo Δt.

De acuerdo con el modelo de la Figura 42, se muestra el siguiente episodio con el fin de aclarar los subconceptos involucrados en este modelo algebraico y el significado del modelo.

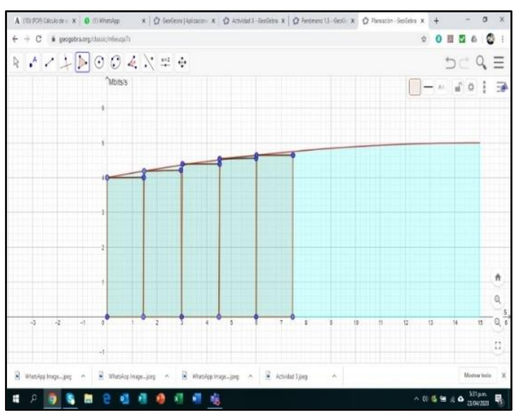
Tabla 27 Episodio 12 Socialización Taller I, Actividad 3

1. I: ¿Valeria, nos puedes explicar el modelo planteado?
2. V: Pues más que todo lo que hice fue, pues obviamente dividir la gráfica de rectángulos que trataran de tener un ancho igual que sería el **delta de t**, y tratar de sacar el área de cada uno y sumarlos.
3. I: ¿Por qué la idea de dividir la gráfica?
4. V: Si, pues lo puse en la forma general**, pero realmente resolviendo el proceso se hace un numero especifico de rectángulos**.
5. C: Se queda como cierto margen de error.
6. Di: Profesora, yo puse la gráfica que hice, formé los rectángulos, pues dando a entender que había, que en realidad no hay, por eso hay un margen de error, que había triángulos encima de estos y hacer técnicamente el mismo procedimiento de los puntos iniciales.
7. C: Yo también creo que es así, infinitos rectángulos para evitar ese margen de error.
8. D: Yo creo que es así o sino tocaría sumar las áreas de esos triángulos.

En la Tabla 27, la idea de aproximar por rectángulos surge a través de preguntas como ¿Qué tamaño del archivo se ha descargado entre $\Delta t = t_2 - t_1$, con t_1y t_2, en el intervalo $[o, t]$? ¿A qué polígono se parece el área acumulada por el tamaño del archivo descargado entre $\Delta t = t_2 - t_1$, cuando $\Delta t \to 0$?

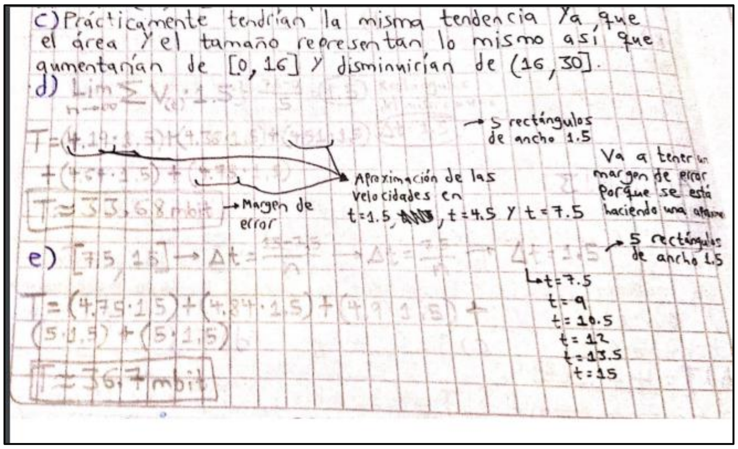
El margen de error mencionado en la discusión (Tabla 27), es clave para entender la tendencia del número de rectángulos a infinito. El AVG nos permitió obtener las construcciones de los estudiantes al tratar de responder las preguntas planteadas e ir viendo su proceso de modelación matemática. Por ejemplo, Valeria, toma los valores de los rectángulos de igual tamaño de la base (Figura 43). Sin embargo, por falta de precisión deja algunos rectángulos con bases de diferente tamaño.

Figura 43 Caso Valeria Socialización Taller I, Actividad 3



En los cálculos realizados para determinar el tamaño del archivo en tiempos específicos como $t = 14s, t = 16\ s$, entre otros. Valeria muestra el proceso de determinar el área de cada rectángulo e irla sumando para obtener el valor solicitado (Figura 44).

Figura 44 Valeria Socialización Taller I, Actividad 3



En las actividades anteriores se evidenció que los estudiantes no utilizaban el proceso de acumulación para plantear un modelo matemático algebraico, se tenía en cuenta en los cálculos específicos, pero no en la generalización.

En esta actividad se da a conocer el proceso de acumulación y parece que los estudiantes lo entienden como la sumatoria de todos los anteriores al valor del tiempo solicitado. El margen de error les permite reconocer que son valores aproximados.

Camilo, muestra un enlace con su construcción geométrica a través del AVG: https://www.geogebra.org/classic/cpbtgfss; en ella se puede apreciar, que el valor de la base de los rectángulos no es igual, sino que es adecuada para proporcionar una mejor aproximación del área bajo la curva y un menor margen de error; incluso en la Figura 45, menciona que es imposible abarcar todos los puntos de la curva. Por esto es tan importante reconocer el límite cuando el número de rectángulos tiende a infinito y la base del rectángulo tienda a cero.

Figura 45 Valeria Socialización Taller I, Actividad 3

> Los datos que se va a mostrar en la preguntas de e a la g son aproximaciones que tienen un gran margen de error debido a que es una curva y es imposible abarcar todos los puntos de esta misma.
> https://www.geogebra.org/classic/cpbtgfss

Con la socialización, los estudiantes caen en la cuenta de la importancia de construir un modelo matemático que permita dar solución al problema, cambiar variables, validar un nuevo modelo para la situación e irlo perfeccionando. En esta investigación se pretendía que los estudiantes no solo solucionaran el problema, sino que a través de ciertos cambios en las situaciones surgiera el modelo matemático para el concepto de integral.

Resaltamos que la simulación del fenómeno creada en el software de GeoGebra permite que el procedimiento de división infinitesimal y acumulación sea más fácil para los estudiantes.

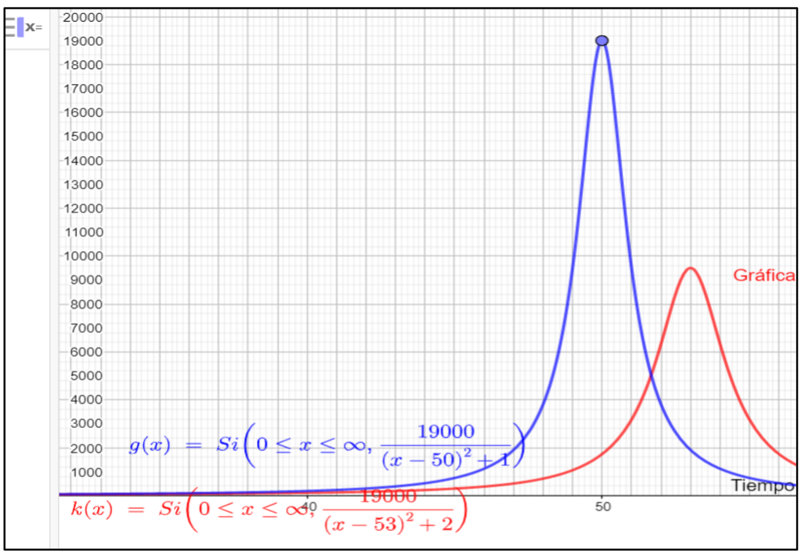
5.2.2. Modelación matemática de comportamiento de trasmisión de un virus como desencadenador de modelos del concepto de integral.

Las situaciones involucradas en el problema del comportamiento de trasmisión de un virus pedían determinar la cantidad de fallecimientos y de recuperados, a partir de las variaciones diarias de fallecidos y recuperados respectivamente.

En el taller III, Actividad 1, se buscaba que los estudiantes respondieran a las siguientes preguntas: ¿Cuántas personas se han recuperado hasta el día 20 en el grafico 1? ¿Cuántas personas se han recuperado hasta el día 40 en el grafico 1? ¿Cuántas personas se han recuperado hasta el día t en el grafico 1? ¿Cuántas personas se han recuperado hasta el día 20 en el grafico 2? ¿Cuántas personas se han recuperado hasta el día 40 en el grafico 2? ¿Cuántas personas se han recuperado hasta el día t en el grafico 2?

El caso de Valeria: en la fase individual, realizó la exploración del archivo de GeoGebra en el que se visualizaban las dos graficas que representaban las variaciones diarias de recuperados de dos poblaciones diferentes. La representación algebraica de las gráficas no se visualiza en el archivo de GeoGebra; pero, ella utiliza las herramientas y halla la expresión algebraica de las funciones y; comparte el enlace del AVG https://www.geogebra.org/classic/qfctyb4z. (Figura 46).

Figura 46 Caso Valeria, Taller III, Actividad 1

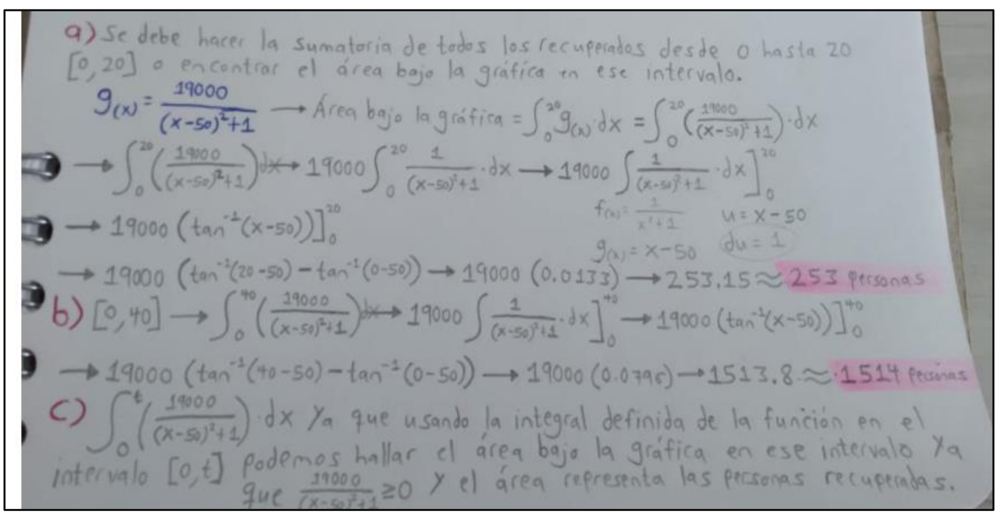


Con la representación algebraica de las funciones, Valeria expresa que se debe realizar la sumatoria de todos los recuperados desde 0 hasta 20 $[0,20]$ o encontrar el área bajo la gráfica en ese intervalo. Este problema es una de las aplicaciones del cálculo integral y se refuerza el proceso de acumulación, como la suma de un gran número de pequeños términos.

Para responder la pregunta ¿Cuántas personas se han recuperado hasta el día 20 en el gráfico 1? Valeria, en la Figura 47, hace uso del teorema fundamental del cálculo (vale la pena aclarar que los estudiantes no habían pasado por un proceso de institucionalización del teorema).

Sin embargo, utiliza el proceso de acumulación afirmando *"se debe hacer la sumatoria de todos los recuperados desde 0 hasta 20* [0,20] *o encontrar el área bajo la gráfica en ese intervalo"* (Figura 47); Valeria realiza una búsqueda en internet de la antiderivada de la función $g(x) = \frac{19000}{(x-50)^2+1}$, encuentra el procedimiento para determinarla usando la integral de la función, aplica propiedades de la integración y halla el valor de personas recuperadas hasta el día 20.

Figura 47 Caso Valeria, Taller III, Actividad 1, gráfico 1


a) Se debe hacer la sumatoria de todos los recuperados desde 0 hasta 20 [0,20] o encontrar el área bajo la gráfica en ese intervalo.

$g_{(x)} = \frac{19000}{(x-50)^2+1} \longrightarrow$ Área bajo la gráfica $= \int_0^{20} g_{(x)} \cdot dx = \int_0^{20} \left(\frac{19000}{(x-50)^2+1}\right) \cdot dx$

$\longrightarrow \int_0^{20} \left(\frac{19000}{(x-50)^2+1}\right) dx \longrightarrow 19000 \int_0^{20} \frac{1}{(x-50)^2+1} \cdot dx \longrightarrow 19000 \left.\int \frac{1}{(x-50)^2+1} \cdot dx\right]_0^{20}$

$f_{(x)} = \frac{1}{x^2+1}$ $u = x-50$

$g_{(x)} = x-50$ $du = 1$

$\longrightarrow 19000 \left.(\tan^{-1}(x-50))\right]_0^{20}$

$\longrightarrow 19000 \left(\tan^{-1}(20-50) - \tan^{-1}(0-50)\right) \longrightarrow 19000\ (0.0133) \longrightarrow 253.15 \approx 253$ personas

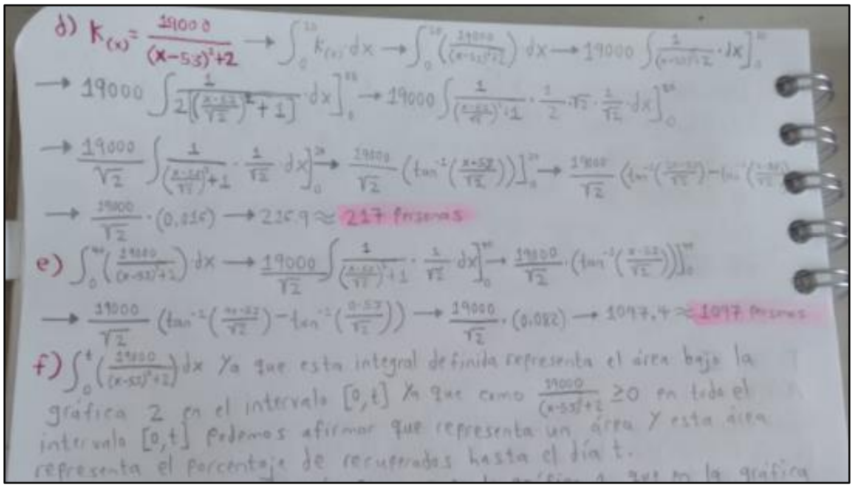
b) $[0,40] \longrightarrow \int_0^{40} \left(\frac{19000}{(x-50)^2+1}\right) dx \longrightarrow 19000 \left.\int \frac{1}{(x-50)^2+1} \cdot dx\right]_0^{40} \longrightarrow 19000 \left.(\tan^{-1}(x-50))\right]_0^{40}$

$\longrightarrow 19000 \left(\tan^{-1}(40-50) - \tan^{-1}(0-50)\right) \longrightarrow 19000\ (0.0796) \longrightarrow 1513.8 \approx 1514$ personas

c) $\int_0^{t} \left(\frac{19000}{(x-50)^2+1}\right) \cdot dx$ Ya que usando la integral definida de la función en el intervalo $[0,t]$ podemos hallar el área bajo la gráfica en ese intervalo. Ya que $\frac{19000}{(x-50)^2+1} \geq 0$ y el área representa las personas recuperadas.

Valeria utilizó la técnica de integración por sustitución, tomando como referente la función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ y como antiderivada de la función $y = tan^{-1}\,x$, para realizar el procedimiento de la gráfica 1, para la función de la gráfica 2.

Figura 48 Caso Valeria, Taller III, Actividad 1, grafico 2



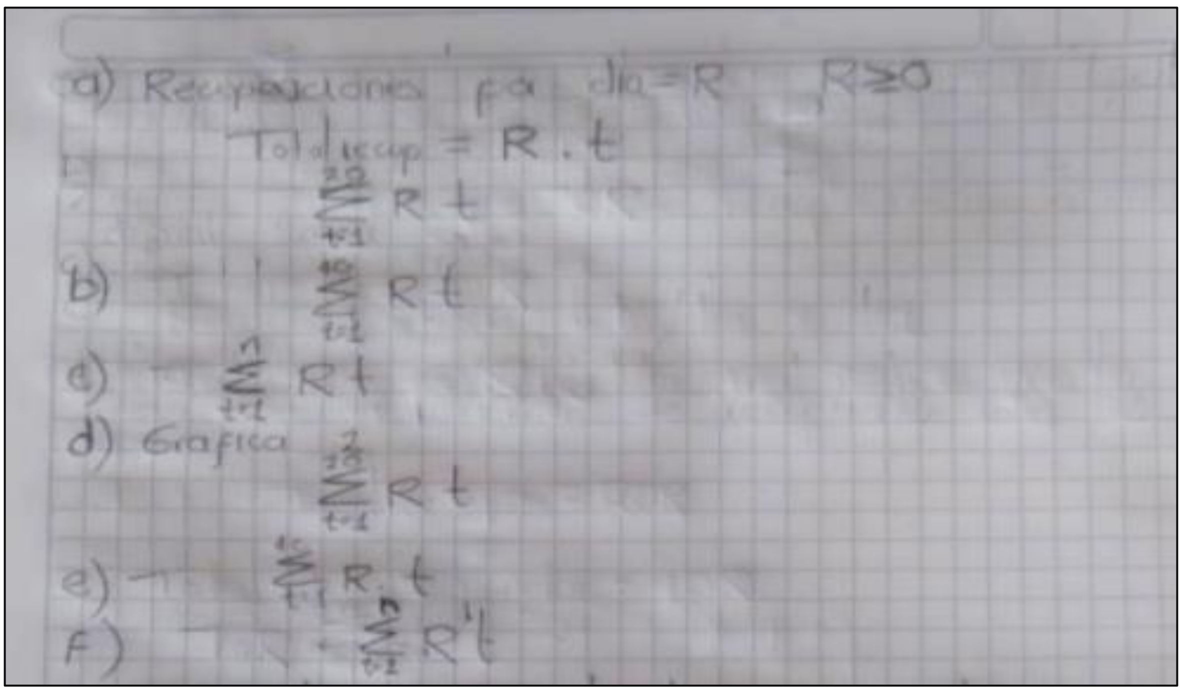
En la Figura 48, Valeria, relaciona el proceso de acumulación con la antiderivada de la función para poder hallar solución al problema. En esta actividad la estudiante muestra el modelo del TFC y lo valida realizando su ciclo de modelación matemática.

Una de las observaciones que realiza Muñoz (2000) y Muñoz (2010) es el desequilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. Es decir, que a los estudiantes se les enseñan procedimientos para calcular integrales a través de la ejercitación y de manera separada de la parte conceptual. En el caso de Valeria para este taller III, actividad 1, se utilizan los procedimientos partiendo desde lo conceptual, desde el proceso de acumulación y la aparente razón de que el área bajo la curva es una función que resulta ser la antiderivada.

El caso de Camilo: al igual que su compañera Valeria, afirma que la cantidad de recuperados es la sumatoria de las recuperaciones por día “R”, expresando a $R \geq 0$. Expresa el modelo $Totalrecup = R * t \sum_{t=1}^{20} R * t$ (Figura 49). Aunque no es explicito, porqué $R * t$, podemos deducir que, al tomar el producto de recuperados por tiempo hace referencia al área de rectángulos formados bajo área de la curva de la función; sin embargo, Camilo no logra responder a la pregunta ¿Cuántas personas se han recuperado hasta el día 20 en el grafico 1? Solo da el modelo matemático.

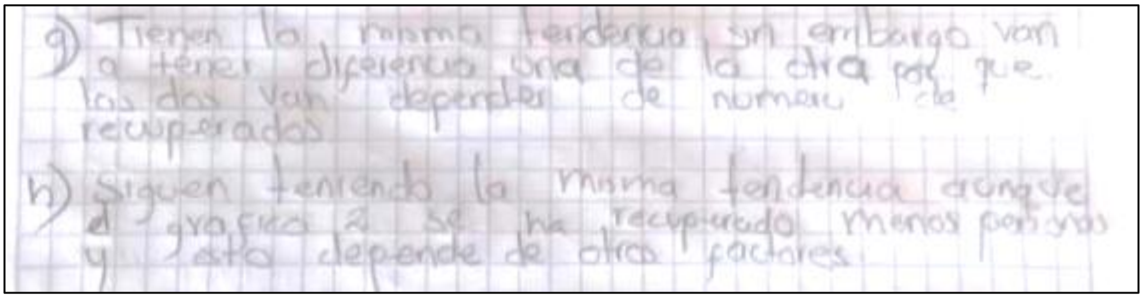
Para calcular el área bajo la curva en los gráficos 1 y 2 de la actividad 1 del taller III, los estudiantes debían hacer uso del software de GeoGebra o utilizar el TFC, como se explica en la entrevista estructurada (Tabla 10) para dar un valor aproximado, pero sin estás herramientas era muy difícil determinarlo.

Figura 49 Caso Camilo, Taller III, actividad 1



Camilo no realizó un procedimiento en el software, fue más del tipo analítico al decir que los gráficos *"tienen la misma tendencia sin embargo van a tener diferencia una de la otra porque las dos van a depender de numero de recuperados"* (Figura 50), pero no realizó una reflexión exhaustiva como el caso de Valeria.

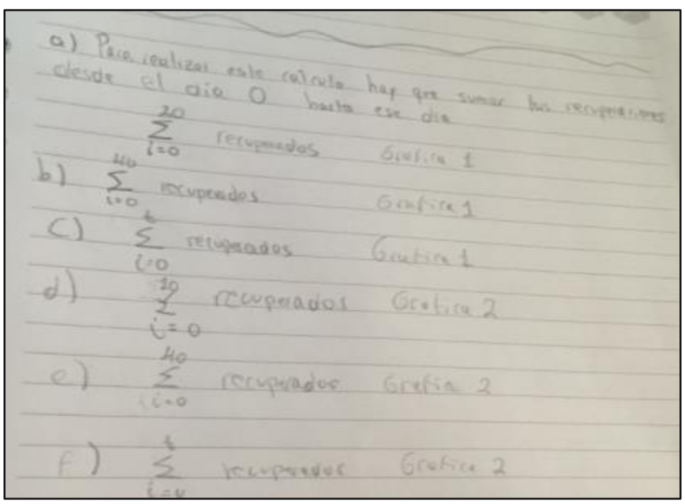
Figura 50 Caso Camilo, Taller III, Actividad 1 gráfico 1 y gráfico 2


g) Tienen la misma tendencia sin embargo van a tener diferencia una de la otra por que los dos van depender de numero de recuperados

h) Siguen teniendo la misma tendencia aunque el grafico 2 se ha recuperado menos personas y esto depende de otros factores

El caso de Daniel: plantea un modelo similar al de Camilo $\sum_{i=0}^{t} \boldsymbol{recuperados}$ (Figura 51), a diferencia de Camilo, Daniel no multiplica por el tiempo, aunque no es explícito, podemos deducir que, para él, solo es la suma de esos valores anteriores. El proceso de acumulación parece ser claro, pero el estudiante tiene cierto interés por mostrar el modelo matemático para cada gráfico, pero no logra dar un valor numérico.

Figura 51 Caso Daniel, Taller III, Actividad 1


a) Para realizar este calculo hay que sumar los recuperados desde el dia 0 hasta ese dia

$\sum_{i=0}^{20}$ recuperados Grafica 1

b) $\sum_{i=0}^{40}$ recuperados Grafica 1

c) $\sum_{i=0}^{t}$ recuperados Grafica 1

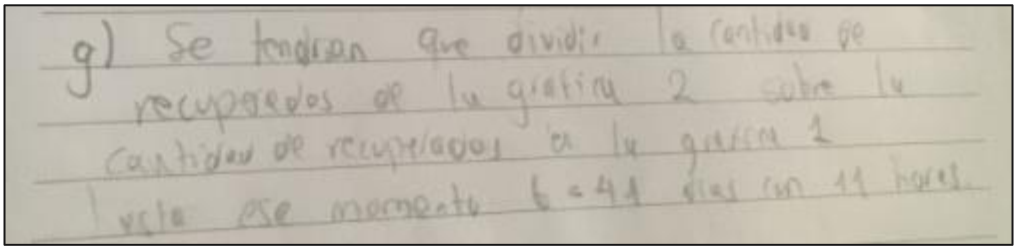
d) $\sum_{i=0}^{20}$ recuperados Grafica 2

e) $\sum_{i=0}^{40}$ recuperados Grafica 2

f) $\sum_{i=0}^{t}$ recuperados Grafica 2

Daniel, no realizó un procedimiento en el software, fue de manera analítica (Figura 52), logró comparar el grafico 1 con el grafico 2 de una manera critica, pero no logra validar el modelo matemático, se queda en una descripción de las gráficas.

Figura 52 Caso Daniel, taller III, Actividad 1, gráfico 1 y gráfico 2

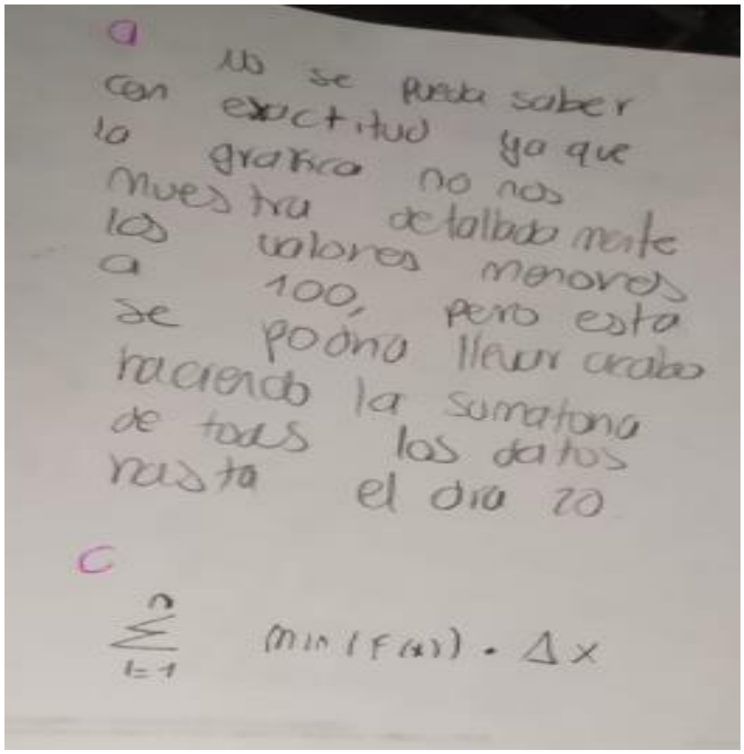

g) Se tendrían que dividir la cantidad de recuperados de la gráfica 2 sobre la cantidad de recuperados en la gráfica 1 hasta ese momento t = 41 días con 11 horas.

En el caso de Camilo y Daniel, pasa que se olvida el concepto de límite, aunque en las actividades anteriores a este taller el límite surge de manera espontánea y con la idea de tendencia, tender a sumar infinitos rectángulos. En este taller no fue sencillo, los estudiantes crean un modelo matemático, toman en cuenta el proceso de acumulación, pero parece pensarse en una sumatoria de números finitos de casos y por tanto no se ve necesario el paso por el límite.

El caso de Diana: Diana al igual que sus compañeros Camilo y Daniel, reconoce el proceso de acumulación para determinar la cantidad de personas recuperadas hasta determinado tiempo t. Eso se puede evidencia en la Figura 53, en la que expresa que: "*No se puede saber con exactitud, ya que la gráfica no nos muestra detalladamente los valores menores a 100, pero esta se podría llevar a cabo haciendo la sumatoria de todos los datos hasta el día 20*".

Diana al igual que sus compañeros Camilo y Daniel, no logra determinar un número de recuperados, sin embargo, plantea un modelo matemático que es: $\sum_{i=1}^{n} \min\big(f(x)\big) * \Delta x$. Más adelante se da a conocer que ella expresa $\min\big(f(x)\big)$ haciendo referencia a la aproximación de áreas de rectángulos por debajo de la curva, es decir, toma el mínimo valor de la altura de la función. Diana tampoco contempla el concepto de límite, por alguna razón la idea de lo infinitesimal no resultó clara en esta actividad.

Figura 53 Caso Diana, Taller III, Actividad 1



Diana a diferencia de Camilo y de Daniel, expresa el Δx, como intervalos de tiempo. La notación de los estudiantes ya no estaba tan ligada al problema auténtico, de alguna manera los estudiantes están involucrando el lenguaje matemático institucional, las representaciones de que el tiempo va en el eje de las x, los hace escribir como la variable el valor de x, sin embargo, el contexto del problema sigue involucrado.

En la socialización, antes de llegar a responder sobre los modelos matemáticos para responder las preguntas planteadas, Valeria, Camilo, Daniel y Diana, realizaron el siguiente análisis.

Tabla 28 Episodio 13, Socialización taller III, actividad 1

1. D: ¿La gráfica roja a qué hace referencia?
2. I: ¿A qué crees que hace referencia?
3. V: Si la dos es la que dice que no se hubiera tomado las medidas de precaución, yo creo que la roja cuando se tomaron las medidas de precaución.
4. Di: Más debajo de 100 no se puede saber exactamente, entonces lo que hice fue argumentar como lo haría
5. I: Y ¿cómo lo haría?
6. Di: Teniendo en cuenta los resultados anteriores y el día que me están pidiendo hago la sumatoria
7. I: Y ¿con qué podemos hacer esa sumatoria?
8. Di: En realidad, se podría configurar esta, para saber cuánto hay
9. I: listo, Dana como vas
10. V: Descifrando como hacer, no sé hacer algo como el área bajo la curva, pero aquí no sé qué representa esa área
11. I: ¿Por qué no sabes que representa?
12. V: Porque nuestra variable en x es el tiempo y en y son las recuperaciones, pero el área que representaría ¿la velocidad?
13. D: El área bajo la curva representa la cantidad de infectados, se cancelan las unidades de días con días y quedarían infectados
14. I: ¿Infectados?
15. D: Si creyese yo, recuperados, ¡recuperados! Porque en *y* están siendo recuperados por día y el tiempo sería en días, entonces queda recuperados ¿verdad?
16. V: Profe no le entendí bien a Daniel
17. D: Que se toman la cantidad de recuperados por días y se cancela con la unidad de días que es la de x y quedan recuperados, es como hacer algo parecido en física que se cancelan las unidades, para que quede una unidad en especial.

En la Tabla 28, en el renglón 3, Valeria realiza una afirmación sobre las medidas de prevención que se deben tomar para evitar el contagio de un virus, lo que resalta un carácter crítico como ciudadana.

En los renglones 4 y 6 Diana expresa que por debajo de 100 no se puede saber exactamente la cantidad de recuperados hasta determinado día, aspecto que se ve influenciado en el planteamiento del modelo matemático. También expresa la idea de realizar la sumatoria.

En los renglones 10 y 12, Valeria expresa que no logra saber que representa el área bajo la curva, esto significa que para ella debe tener una representación en el problema, en este caso representaba la cantidad de recuperados, y que Valeria logra reconocer en el modelo matemático que planteó. Aquí resaltamos que para la estudiante no es un problema repetitivo, sino que representa algo en su contexto. En los renglones posteriores Daniel intenta explicarle a Valeria que el área bajo la curva va a representar la cantidad de recuperados hasta determinado tiempo t.

En el siguiente episodio (Tabla 29) se discute sobre los modelos planteados por Valeria, Camilo, Daniel y Diana.

Tabla 29 Episodio 14 Entrevista estructurada, Taller III, actividad 1

1. I: ¿Cómo encontramos el valor de la sumatoria Daniel?
2. D: Yo puse que era sumatoria, porque por cada día hay esa cantidad de recuperados, entonces para saber la cantidad de recuperados en un día t, hay que suma los días anteriores
3. I: ¿Por qué recuperados?
4. D: Pues yo puse sumatoria de recuperados en la gráfica 1
5. I: ¿Así podemos estimar la cantidad de recuperados?
6. D: Eh…, no sé, sería la función evaluada en cada valor y eso me daría la cantidad de recuperados a ese día, pero ni idea de cuál es la función.
7. I: ¿Alguien encontró la función?
8. V: Si ya la encontré acabo de subirla, si uno se para en la gráfica sale como una parte de ajustes y dice mostrar valor y definición y ahí aparece.
9. I: ¿En qué nos ayuda a resolver la pregunta?
10. D: El área bajo la curva de la función serían los recuperados
11. I: ¿Cómo determinamos esa área bajo la curva?
12. V: Pues yo encontré dos maneras de encontrar esa área bajo la curva
13. I: ¿Qué encontraste Valeria?
14. V: Pues obviamente está la fórmula que veníamos usando todo este tiempo, pero pues también se puede hacer con el Teorema Fundamental del Cálculo, se puede hacer más fácil
15. I: ¿Qué es el Teorema Fundamental del Cálculo?
16. V: Pues es una forma de facilitar encontrar una integral definida, donde se aplican unas propiedades, donde se hacer la antiderivada de la función y se reemplazan los dos valores del intervalo y se restan.

Camilo, Daniel y Diana, tuvieron algo en común y es que en los modelos planteados para resolver la actividad no tuvieron en cuenta el límite y les fue difícil determinar la función del grafico que representaba la cantidad de recuperados por día y realizar las comparaciones entre ellos. En este episodio se logra ver como Daniel expresa que, para él, es el proceso de sumar la cantidad de recuperados anteriores para así determinar los recuperados hasta el día t, afirmando que el área bajo la curva de esa función serían los recuperados; pero ¿Cómo determinar el área bajo la curva de la función?

Para responder esta pregunta Valeria en el renglón 13 (Tabla 29), plantea que encontró dos formas de realizarlo, uno a través del modelo matemático que venían usando, haciendo referencia al límite de la sumatoria, o utilizar el TFC, recordemos que en las actividades anteriores fue la primera vez que se inició hablar sobre el TFC, el cual no era el objetivo de la actividad; sin embargo, surge por la necesidad de la estudiante de resolver el problema auténtico.

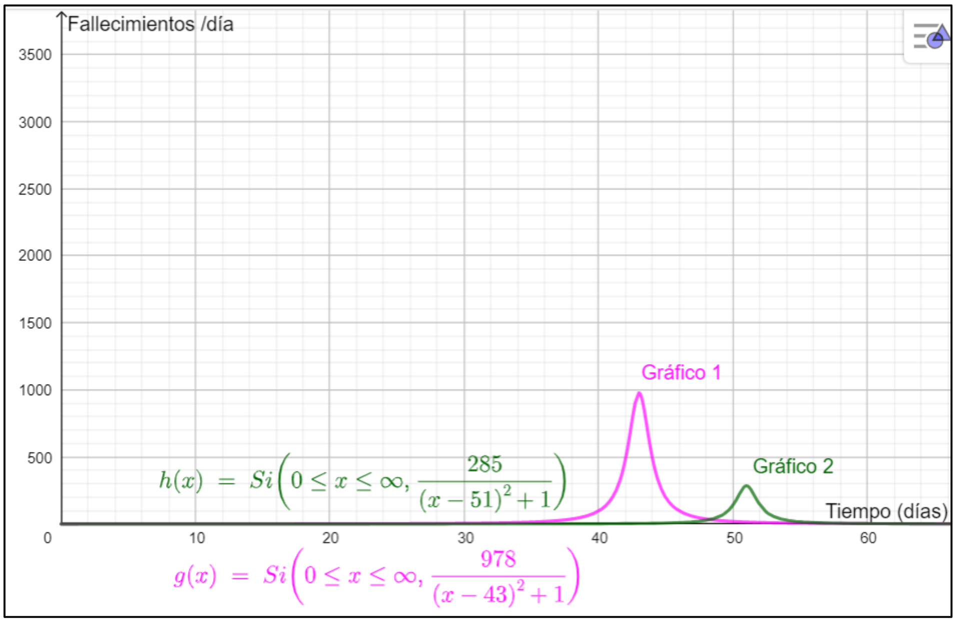
Valeria explica a sus compañeros el TFC, les indica el procedimiento y los invita a utilizarlo para resolver el problema. Es importante señalar que se logra la equivalencia entre el proceso de acumulación y el TFC, que como lo expresa Cordero (2003), para algunos estudiantes incluso profesores no es inmediato ver la equivalencia.

La comparación de las gráficas resultó dar un valor más crítico-social en el cual los estudiantes toman conciencia de que si hay muchos recuperados es porque hubo muchas personas contagiadas, por lo que es necesario cuidar la salud.

En el taller III, Actividad 2, se buscaba que los estudiantes respondieran a las siguientes preguntas: ¿Cuántas personas han fallecido hasta el día 20 en el grafico 1? ¿Cuántas personas han fallecido hasta el día 40 en el grafico 1? ¿Cuántas personas han fallecido hasta el día t en el grafico 1? ¿Cuántas personas han fallecido hasta el día 20 en el grafico 2? ¿Cuántas personas han fallecido hasta el día 40 en el grafico 2? ¿Cuántas personas han fallecido hasta el día t en el grafico 2?

El caso de Valeria, con el uso del software GeoGebra, ella encuentra la representación algebraica de las funciones que representan los fallecimientos diarios, como lo explicó en la Tabla 29. A través del AVG comparte el enlace de su procedimiento https://www.geogebra.org/classic/zqreuc4d, en donde el comportamiento de los gráficos depende del modelo epidemiológico utilizado y los datos reales que se registren. En este caso, de acuerdo con el modelo SIR.

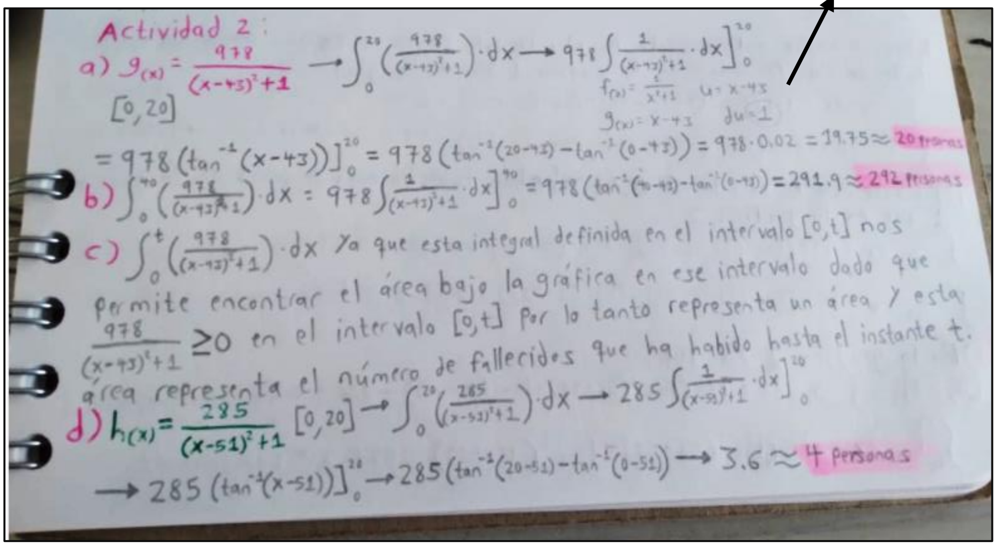
Figura 54 Caso Valeria, Taller III, Actividad 2



Para conocer la representación algebraica era necesario utilizar el software, sin ello, sería difícil determinarla. En la Figura 54, Valeria indica las funciones, esto le permite aplicar el TFC, técnicas de integración y determinar un valor aproximado de fallecidos hasta un determinado tiempo t (Figura 55).

Figura 55 Caso Valeria, Taller III, Actividad 2, gráfica 1

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

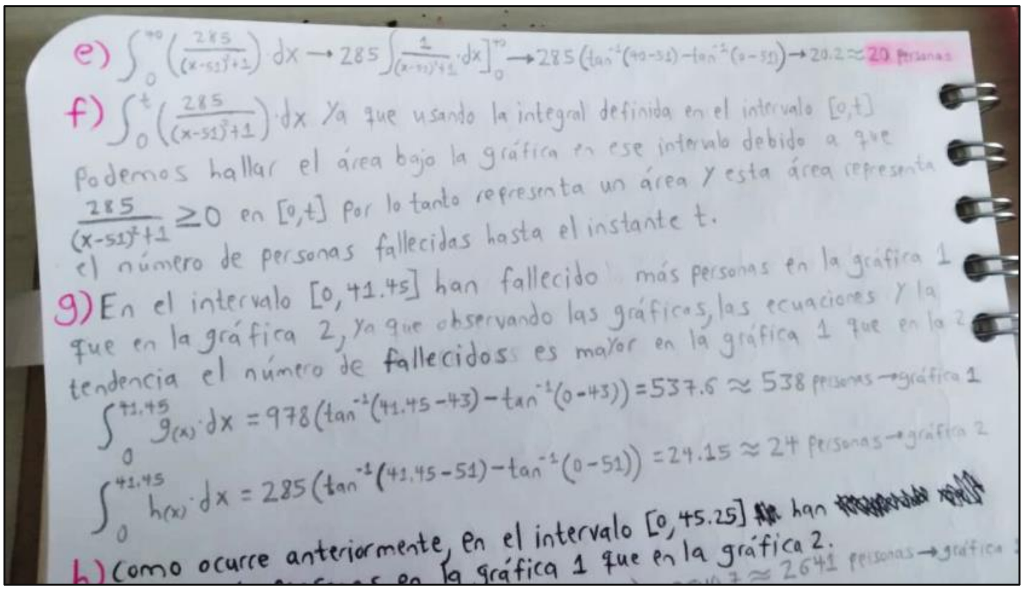


Para encontrar la integral definida de la función $g(x) = \frac{978}{(x-43)^2+1}$ en el intervalo de [0,20] (Figura 55), Valeria realiza la sustitución $u = x - 43$, para volver la función como $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, este método es conocido como integración por sustitución. Aquí es importante señalar que la estudiante no pasó inicialmente por un proceso de enseñanza del método, sino que lo busca y lo estudia de manera autodidacta, y posteriormente lo aplica a partir de la motivación y la necesidad que ha suscitado la modelación matemática del problema auténtico.

Valeria plantea que el modelo matemático para determinar la cantidad de personas fallecidas hasta un determinado día t es $\int_0^t (\frac{978}{(x-43)^2+1})\, dx$ y afirma que este modelo permite encontrar el área bajo la grafica en ese intervalo dado que la función es mayor o igual a cero.

Para encontrar la integral definida de la función $h(x) = \frac{285}{(x-51)^2+1}$, en el intervalo de $[0{,}20]$, Valeria realiza la integración por sustitución haciendo $u = x - 51$. El modelo planteado para determinar el número de personas fallecidas hasta el instante de tiempo t, es $\int_0^t \frac{285}{(x-51)^2+1}dx$ (Figura 56), argumentando que: *"representa un área y esta área representa el número de personas fallecidas hasta el instante* t".

Figura 56 Caso Valeria, Taller III, Actividad 2, gráfico 2


e) $\int_0^{40}\left(\frac{285}{(x-51)^2+1}\right)dx \to 285\int\frac{1}{(x-51)^2+1}dx\Big]_0^{40} \to 285(\tan^{-1}(40-51)-\tan^{-1}(0-51)) \to 20.2 \approx 20$ personas

f) $\int_0^{t}\left(\frac{285}{(x-51)^2+1}\right)dx$ Ya que usando la integral definida en el intervalo [0,t] podemos hallar el área bajo la gráfica en ese intervalo debido a que $\frac{285}{(x-51)^2+1} \geq 0$ en [0,t] por lo tanto representa un área y esta área representa el número de personas fallecidas hasta el instante t.

g) En el intervalo [0, 41.45] han fallecido más personas en la gráfica 1 que en la gráfica 2, ya que observando las gráficas, las ecuaciones y la tendencia el número de fallecidos es mayor en la gráfica 1 que en la 2

$\int_0^{41.45} g(x)\,dx = 978(\tan^{-1}(41.45-43)-\tan^{-1}(0-43)) = 537.6 \approx 538$ personas → gráfica 1

$\int_0^{41.45} h(x)\,dx = 285(\tan^{-1}(41.45-51)-\tan^{-1}(0-51)) = 24.15 \approx 24$ personas → gráfica 2

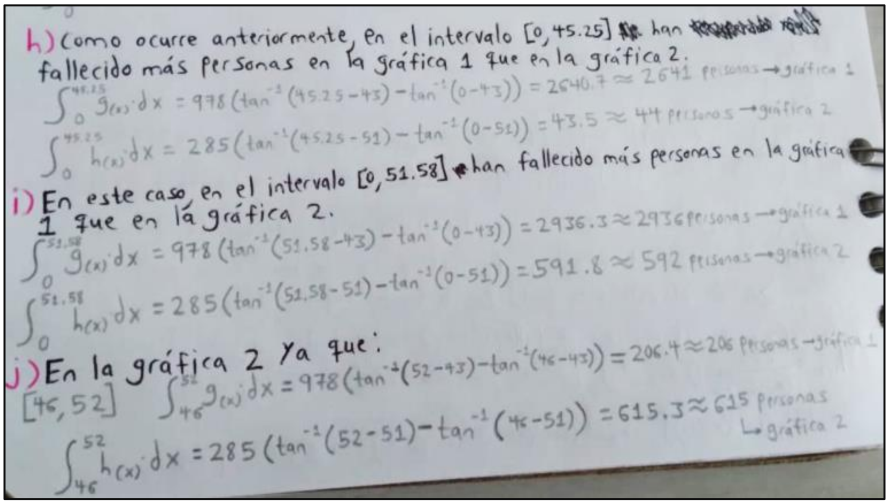
h) Como ocurre anteriormente, en el intervalo [0, 45.25] han ... en la gráfica 1 que en la gráfica 2.

≈ 2641 personas → gráfica

Tanto el gráfico 1 y el gráfico 2 están representando los fallecimientos diarios, a causa del COVID-19, comparar estás dos gráficas plantea la necesidad en los estudiantes de un análisis de las variables que influyen sobre los datos. Por ejemplo, que el grafico 1 presenta un pico en casi 1000 personas fallecidas en un día, mientras que el máximo del gráfico 2 es alrededor de 300 personas fallecidas en un día, y esto puede deberse a las medidas de prevención tomadas por cada población, como aislamiento, cuarentena, uso de tapabocas, entre otros.

Valeria, realiza este análisis y utiliza el concepto de integral para determinar en intervalos de tiempo, qué grafico tuvo mayor cantidad de personas fallecidas (Figura 57)

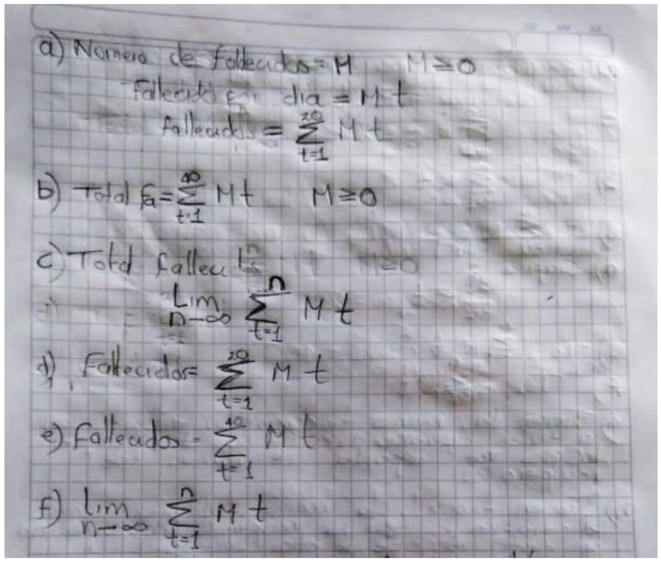
Figura 57 Caso Valeria, Taller III, Actividad 2, gráfico 1y gráfico 2



En este se puede evidenciar que realmente el concepto de integral tiene aplicaciones y usos en el contexto del estudiante; no se aplica la matemática de una manera aislada a sus vivencias, sino que le permite ser competente matemáticamente.

El caso de Camilo: Camilo fue modificando su modelo matemático, a partir, de la socialización con sus compañeros (Figura 58); inicialmente no consideraba el concepto de límite, porque piensa que en una cantidad finita de días (intervalo de $[0,20]$), se puede realizar la sumatoria sin el límite, pero cuando se solicita la cantidad para un valor t, plantea el modelo $\lim_{n\to\infty} \sum_{t=1}^{n} M * t$.

Figura 58 Caso Camilo, Taller III, Actividad 2



a) Numero de fallecidos = M $M \geq 0$

fallecidos en dia = $M\,t$

fallecidos = $\sum_{t=1}^{20} M\,t$

b) Total fa = $\sum_{t=1}^{40} M\,t$ $M \geq 0$

c) Total fallec

$\lim_{n \to \infty} \sum_{t=1}^{n} M\,t$

d) fallecidos = $\sum_{t=1}^{20} M\,t$

e) fallecidos = $\sum_{t=1}^{40} M\,t$

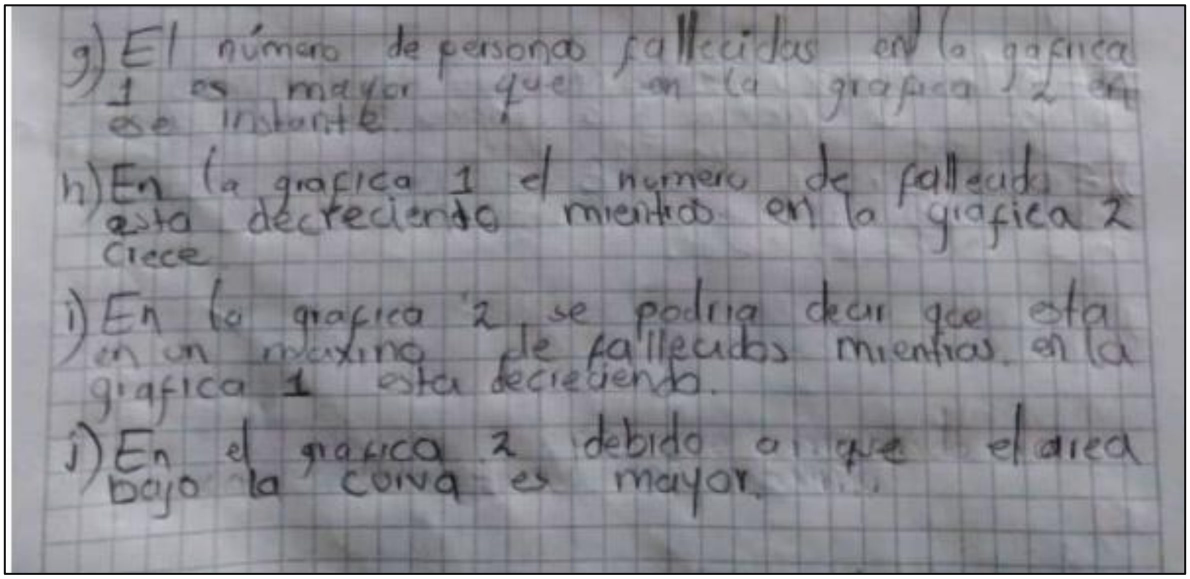
f) $\lim_{n \to \infty} \sum_{t=1}^{n} M\,t$

Camilo en las actividades anteriores dedujo el límite por la cantidad infinita de rectángulos que podía visualizar en el software, pero en esta actividad, construir los rectángulos en el área bajo la curva, no es sencillo.

Se evidencia que el concepto de límite es importante en el desarrollo del concepto de integral, por ejemplo, Hitt (2003) afirma que no es suficiente con los procesos algebraicos involucrados en el límite para entenderlo, se requiere hacer la distinción entre el infinito potencial y actual. Se considera que los problemas auténticos aquí planteados pueden ser un apoyo para estudiar nuevamente el concepto de límite.

En la socialización que se dará a conocer más adelante, Camilo reconoce la importancia del límite para determinar el área bajo la curva y la definición de la función. En la Figura 59, argumenta en qué grafico se puede presentar la mayor cantidad de personas fallecidas, esto lo realiza con una comparación analítica del comportamiento de las dos funciones y del área bajo la curva de los dos gráficos.

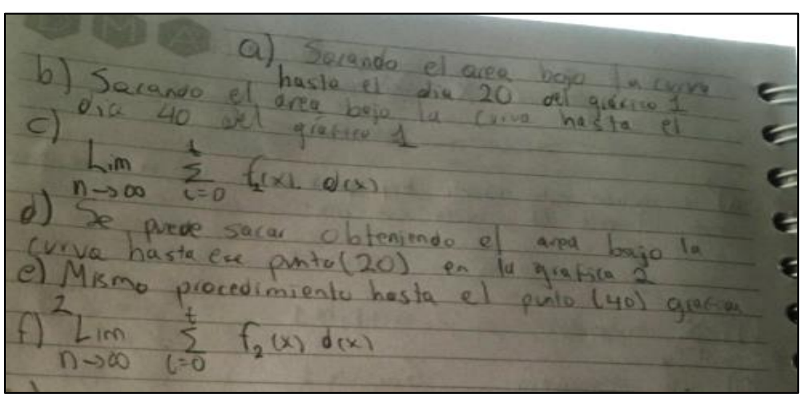
Figura 59 Caso Camilo, Taller III, Actividad 2, gráfico 1 y gráfico 2



En la Figura 59, Camilo afirma que se van a presentar más personas fallecidas "*En la gráfica 2 debido a que el área bajo la curva es mayor*". Para el estudiante tiene sentido el proceso de acumulación que está involucrado en el concepto de integral.

El caso de Daniel: En la actividad anterior él, tampoco tuvo en cuenta el concepto de límite, pero en esta actividad, lo tiene en cuenta y plantea como modelo para el gráfico 1: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{t} f_1(x)dx$ y como modelo para el gráfico 2: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{t} f_2(x)dx$ (Figura 60).

Figura 60 Caso Daniel, Taller III, Actividad 2, gráfico 1 y gráfico 2



Daniel, afirma que se puede encontrar la cantidad de personas fallecidas hasta el día 20 sacando el área bajo la curva. Sin embargo, no determina el valor de personas fallecidas para los intervalos de $[0,20]$ y $[0,40]$ ni para el tiempo t. En la socialización Daniel explica que, hallar el valor estimado, se debía realizar demasiadas sumas, lo cual le tomaría demasiado tiempo y no lograría terminar las actividades propuestas.

Precisamente, algunas formulas y técnicas de integración surgen, de hacer los cálculos más cortos y menos extensos. Estas técnicas no son impuestas o para memorizar.

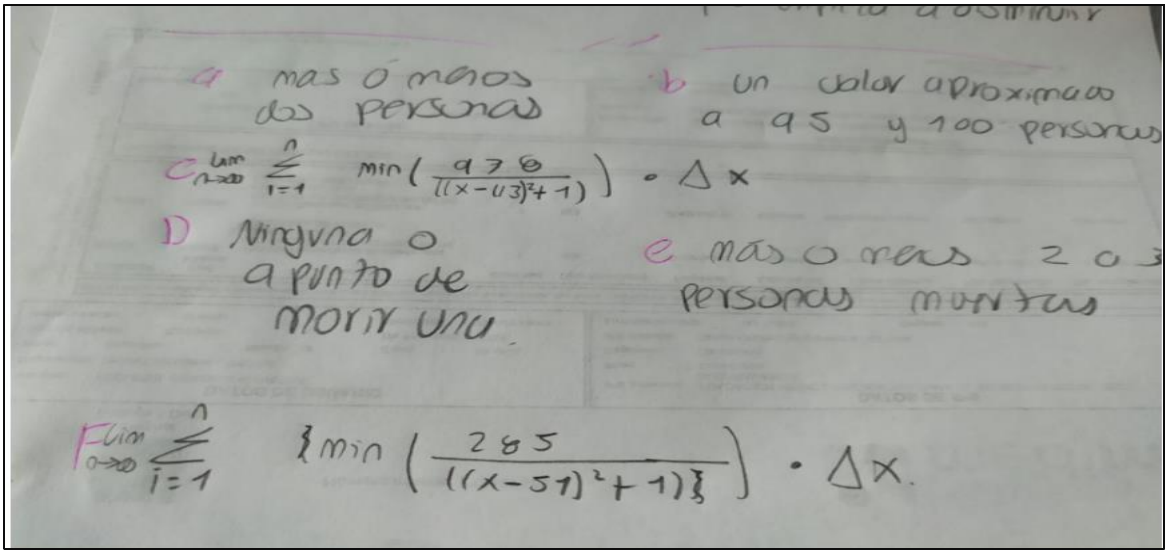
Daniel, al igual que Camilo, compara las dos gráficas, a partir del área bajo la curva de la función. En la Figura 61, Daniel expresa que: *“Al hacer* ***la integral*** *se puede observar mayor cantidad de muertos en la gráfica 2”*. El estudiante ya utiliza el termino integral, sin haber pasado por un proceso de institucionalización de dicho concepto. Es importante recalcar la interpretación de la integral como área bajo la curva que está utilizando Daniel; que le permite, apoyado en observación y comparación de las representaciones gráficas, dar una respuesta acertada a la pregunta planteada sobre la mayor cantidad de fallecimientos de acuerdo con los gráficos.

Figura 61 Caso Daniel, Taller III, Actividad 2, gráfico 1 y gráfico 2

I)En el grafico 1 se observan mas fallecidos, mientras que en el grafico 2 no tantos, esto permite ver la relacion y es que directa
J)El area bajo permite ver que se empiezan a elevar la cantidad de muertos en la grafica 2 mientras que comienzan a disminuir en la grafica 1
k)Al hacer la integral se puede observar mayor cantidad de muertos en la grafica 2
l)En la grafica 1

El caso de Diana: ella planteó el modelo $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\min\left(\frac{978}{(x-43)^2+1}\right)*\Delta x$ para el gráfico 1, pero al tratar de responder, en un intervalo de tiempo determinado, da valores aproximados de la cantidad de fallecidos hasta el tiempo solicitado (Figura 62). También planteó el modelo $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \min\left(\frac{285}{(x-51)^2+1}\right) * \Delta x$ para el gráfico 2.

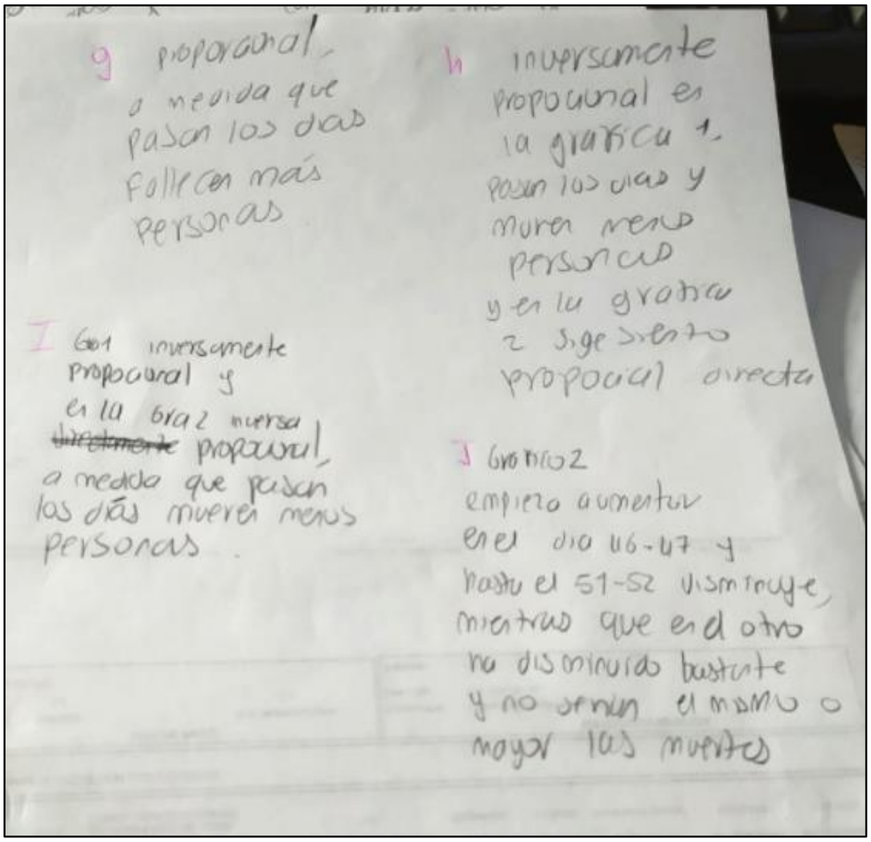
Figura 62 Caso Diana, Taller III, Actividad 2, gráfico 1 y gráfico 2



Diana a diferencia de Camilo y Daniel, no deja expresada la función, sino que encuentra su representación algebraica y la involucra en el límite, como se realizó en las actividades anteriores, también involucra el **min**, haciendo referencia a la aproximación de áreas de rectángulos por debajo de la curva. Estos métodos epistemológicos fueron utilizados, para tener mejores aproximaciones al área bajo la curva.

Al comparar las dos gráficas de fallecimientos por día, para saber en cuál grafica se presentan más fallecimientos en determinado tiempo t, Diana expresa la relación, pero no es explicito si es por el área bajo la curva o por haber determinado la cantidad de fallecidos en los intervalos de tiempo indicado. Solo dio a conocer erróneamente si era una relación proporcional o inversamente proporcional. Error que cometen muchos estudiantes, al asumir que si una variable aumenta y la otra también aumenta son directamente proporcionales, o si una aumenta y la otra disminuye son inversamente proporcionales.

Figura 63 Caso Diana, Taller III, Actividad 2, gráfico 1 y 2.



En la socialización, la discusión se centra en entender el proceso de antiderivación, en particular Valeria, le explica a Diana y a Camilo, como aplicar el TFC.

Tabla 30 Episodio 15, Socialización Taller III, Actividad 2

1. Di: Profe, en las gráficas no se logra ver bien los intervalos
2. V: En realidad es fácil
3. I: ¿Por qué?
4. V: Pues es usar el TFC
5. I: ¿De qué trata el TFC Valeria?
6. V: Es una **forma de facilitar encontrar el área bajo la curva. Realmente se está haciendo lo mismo, pero de otra manera, aquí se usa la antiderivada**.
7. I: ¿Qué es la antiderivada?
8. V: Digamos, tenemos la integral definida en un intervalo $[a, b]$, entonces primero tomamos la función de manera general y hallamos la antiderivada de esa función.
9. Di: No sé qué es la antiderivada Valeria
10. V: Pues, así como tal lo que es, si es como derivar, pero al revés.
11. Di: Aun no entiendo bien
12. V: Lo que sé, es que digamos que tenemos una función que es $y = x^2$ y esa función queremos sacarle la antiderivada, o bueno si derivas $y = x^2$ ¿Qué da?
13. Di: $y' = 2x$
14. V: ¿Qué hiciste para que quedara $y' = 2x$?
15. Di: Bajé el exponente y le resté uno.
16. V: Ahora eso lo haces, pero al revés en $y = x^2$
17. Di: Ah, o sea tendría que a $2x$ multiplicar por $\frac{x}{2}$ y así obtendría $y = x^2$.
18. V: Si, exacto.
19. I: Daniel, ¿qué piensas?
20. D: Si yo también le entendí. Igual el área bajo la curva es la cantidad de personas fallecidas.

En la Tabla 30, Diana le pide a su compañera Valeria que le explique sobre el TFC, Valeria argumenta que es el mismo procedimiento de encontrar el área bajo la curva de la función, pero de manera más sencilla, utilizando la antiderivada. Valeria toma un caso particular para explicarle a Diana y a Daniel, logrando que sus compañeros piensen en un nuevo modelo matemático para resolver el problema auténtico; logran relacionar que los dos procedimientos van a representar el área bajo la curva de la función de fallecimientos diarios, que sería la cantidad de personas fallecidas, hasta determinado tiempo t. Aquí resaltamos nuevamente la motivación generada por el problema autentico, que lleva a un aprendizaje autodidacta del TFC y a la comprensión del significado de la integral como antiderivada y operación inversa a la derivada. Igualmente se resalta el papel de Valeria en la explicación como par académico que logra que sus compañeros entiendan un nuevo concepto.

Indagar en una situación específica como el comportamiento de trasmisión de un virus generó en Valeria, Daniel, Camilo y Diana, diferentes interrogantes que surgen por la misma reflexión de la situación. El interés por realizarse preguntas para investigar, al mismo tiempo genera necesidad de plantear hipótesis y de establecer posibles soluciones sin alejarse de la situación.

Observamos capacidades para reconocer el contexto de comportamiento de trasmisión del COVID-19, el cual estamos viviendo actualmente y sea convertido en un tema de actualidad ya que todos estamos interesados por el bienestar y la salud; logrando identificar el uso de la matemática en este tipo de circunstancias, en específico el uso del concepto de integral.

Vista la modelación matemática desde estas experiencias, podemos analizar que su contribución apunta a potenciar en los estudiantes un interés por intervenir directamente en su entorno inmediato.

En el taller III, Actividad 3, se buscaba que los estudiantes conocieran el modelo SIR, con todas las variables que afectan, para ello se les daba a conocer la simulación del modelo en GeoGebra. Realmente el modelo es una ecuación diferencial, que se puede resolver utilizando integrales, los estudiantes aun no tienen las herramientas para resolver la ecuación diferencial, sin embargo, se quería ver la relación entre las variaciones diarias de recuperados y las variaciones diarias de fallecimientos, en relación con las actividades anteriores. (Figura 64).

También se logra ver de manera detallada el proceso de acumulación, ya que en el software podían hacer uso de la herramienta SUMA, y obtener el valor de recuperados hasta determinado día señalado en la simulación.

Figura 64 Modelo SIR, Taller III, Actividad 3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	tiempo	Suscepti	Infectados	Recuperados	Fallecidos		Contagios	Recuperaciones	Fallecimientos			
2	0	581130	1	0	0							
3	1	581129.5	1.4125	0.05938	0.00313		0.475	0.05938	0.00313		Duración media de la enfermedad	16
4	2	581128.8	1.99515	0.14324	0.00754		0.67094	0.08387	0.00441		Tasa diaria de interacción	2.5
5	3	581127.9	2.81815	0.2617	0.01377		0.94769	0.11846	0.00623		probabiidad de contagio	0.19
6	4	581126.5	3.98063	0.42903	0.02258		1.33861	0.16733	0.00881		Tasa de recuperación	0.95
7	5	581124.6	5.62263	0.66538	0.03502		1.89079	0.23635	0.01244		Mortalidad	0.05
8	6	581122.0	7.94193	0.99923	0.05259		2.67072	0.33384	0.01757			
9	7	581118.2	11.21792	1.47078	0.07741		3.77236	0.47155	0.02482			
10	8	581112.9	15.8452	2.13684	0.11247		5.3284	0.66606	0.03506		Población total de contagio	581027.63219
11	9	581105.3	22.38111	3.07765	0.16198		7.52623	0.94081	0.04952		Población total Recuperada	551960.39344
12	10	581094.7	31.61285	4.40653	0.23192		10.63056	1.32888	0.06994		Población total fallecida	29050.54702
13	11	581079.7	44.65221	6.28354	0.33071		15.01517	1.87701	0.09879		Población afectada	103.36781
14	12	581058.5	63.06939	8.93477	0.47025		21.20794	2.65123	0.13954			
15	13	581028.5	89.08181	12.67951	0.66734		29.95425	3.74475	0.19709		Máx. Población infectada simultánea	367405.46209
16	14	580986.2	125.82064	17.96874	0.94572		42.30645	5.28923	0.27838		Máx. Población contagios diarios	57133.07088
17	15	580926.5	177.70687	25.43934	1.33891		59.75002	7.4706	0.39319		Máx. Población Recuperaciones dia	21814.69931
18	16	580842.1	250.98144	35.99069	1.89425		84.38125	10.55135	0.55533		Máx. Población fallecida	1148.14207
19	17	580722.9	354.45242	50.89271	2.67856		119.15731	14.90202	0.78432			
20	18	580554.7	500.5466	71.93832	3.78623		168.24746	21.04561	1.10766			
21	19	580317.2	706.78785	101.65828	5.35044		237.52541	29.71995	1.56421			
22	20	579981.9	997.87079	143.62381	7.55915		335.25718	41.96553	2.20871			
23	21	579508.8	1408.56144	202.87239	10.67749		473.05757	59.24858	3.11835			
24	22	578841.6	1987.73773	286.50572	15.07925		667.21138	83.63334	4.40175			
25	23	577901.1	2803.98443	404.52765	21.29093		940.48031	118.02193	6.21168			
26	24	576576.6	3953.27416	571.01422	30.05338		1324.53876	166.48658	8.76245			
27	25	574713.4	5569.37969	805.73988	42.40736		1863.18516	234.72565	12.35398			
28	26	572097.0	7837.72553	1136.4218	59.81167		2616.43208	330.68192	17.40431			
29	27	568431.6	11013.29001	1601.78675	84.30457		3665.42232	465.36495	24.49289			
30	28	[illegible]	15442.69536	2255.70084	118.7211		5117.73597	653.91409	34.41653			
31	29	556202.0	21589.36493	3172.61088	166.97952		7111.83803	916.91004	48.25842			
32	30	546384.1	30057.88931	4454.47942	234.44629		9817.85969	1281.86854	67.46677			

Algunos comentarios de los estudiantes fueron:

Valeria y Diana, afirman que es muy similar a lo realizado en las actividades anteriores, reconocer los datos como funciones que se pueden modelar y le atribuye al área bajo la curva como cantidad de fallecidos (Figura 65).

Figura 65 Caso Valeria y Diana, Taller III, Actividad 3

b) En este caso ocurre una relación similar a la del punto anterior ya
que los fallecimientos representan el área bajo la gráfica en la gráfica de
fallecimientos trabajada en la actividad 2 y los fallecidos representan
la variable y (fallecidos/t) de la gráfica trabajada en la actividad 2, por lo
tanto podemos inferir que ~~e~~ los fallecimientos y los fallecidos
hacen parte de la misma gráfica, además se puede hacer una
fórmula formando una integral definida de la función en el interva
[0,200] y analizando los datos de la tabla y las gráficas de la
función en la actividad 2 podemos concluir que la gráfica

Daniel y Camilo, reconocen la columna de recuperaciones como una tasa de cambio, pero este no solo depende de recuperaciones, depende de los infectados cada día, de la tasa de mortalidad, entre otras variables importantes.

Figura 66 Caso Daniel y Camilo, Taller III, Actividad 3

A)Una depende de la otra, la columna de recuperaciones sera mayor siempre y cuando la columna de recuperados tambien aumente. Esto tiene que ver con la tasa de recuperados que se tenga para ese dia en concreto.
B)Al igual que la anterior una tambien depende de la otra. A esta dependencia se le conoce como tasa de mortalidad, y depende de varios factores como el aislamiento, el uso de implementos como tapabocas o guantes, del correcto lavado de manos, etc

Para más información, sobre los contagios, las recuperaciones y los fallecimientos que siguen presentándose alrededor del mundo, pueden ingresar al siguiente enlace y seleccionar la localidad: https://coronavirus.app/tracking/colombia.

5.2.3. Modelación matemática del área bajo la curva de una función potencia como desencadenador de modelos del concepto de integral.

Las actividades involucradas en la modelación del área bajo la curva de una función potencia no presentaba un contexto de la vida cotidiana, sino que se desarrollaba en el campo de las matemáticas. Sin embargo, al inicio del taller, se dio una introducción epistemológica de la integración de las funciones potencia. Los estudiantes comentaron, que les parece importante tener un enfoque histórico del concepto de integral (Figura 67).

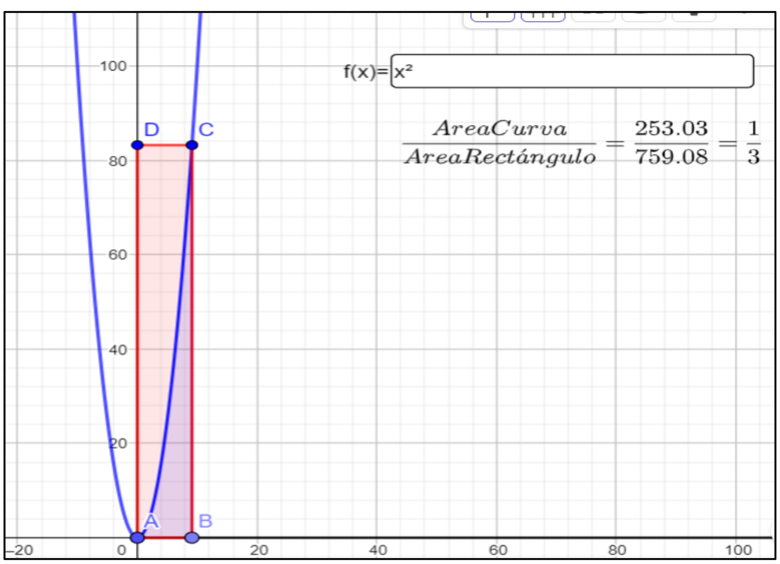
Figura 67 Comentario Modelación del área bajo la curva de una función potencia.

Me parece interesante la historia de las primeras funciones que se pudieron integrar ya que casi nunca tenemos la oportunidad de tener un enfoque histórico respecto a los conceptos que se trabajan en cálculo, normalmente nos introducen los conceptos y sus aplicaciones sin recurrir al origen histórico de estos.

Los estudiantes afirman que en la enseñanza del cálculo se introducen los conceptos y sus aplicaciones sin recurrir al origen histórico. Dar a conocer el origen y mencionar los primeros autores que desarrollaron un procedimiento, permite generar interés en los estudiantes por aprender.

Para este problema auténtico se planteó el taller IV, que involucra tres actividades, las cuales pedían determinar la integral de una función potencia $f(x) = x^n$, con $n > 0$. Esta integral se podía determinar a través de la razón entre el área bajo la curva y el área de un rectángulo inscrito al eje x y el eje y (Figura 68). El applet de esta actividad fue creado por el profesor Jorge Enrique Fiallo Leal de la Universidad Industrial de Santander, el cual surge del estudio epistemológico del concepto de integral y de las ventajas actuales del uso de software de matemática interactiva como GeoGebra.

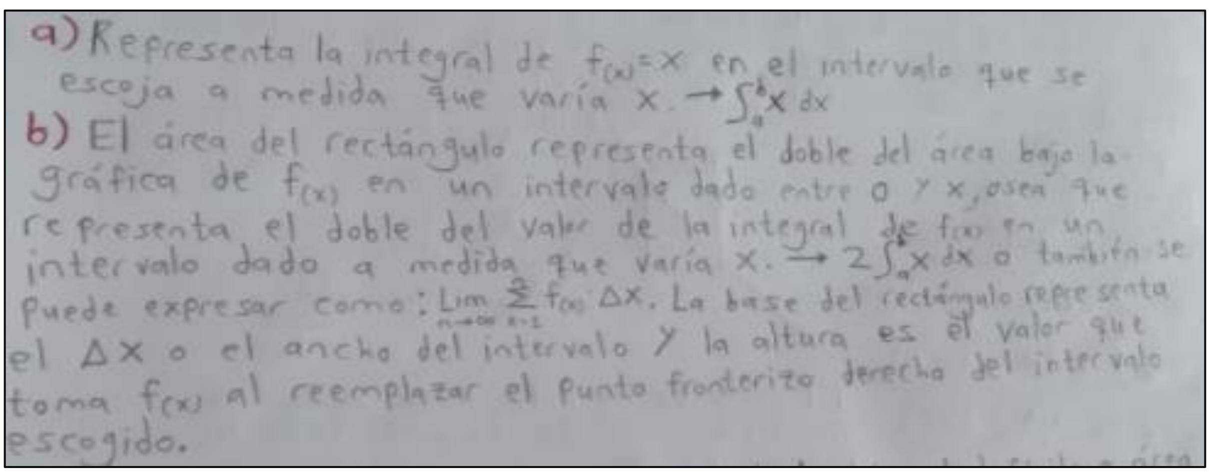
Figura 68 Modelación del área bajo la curva de una función potencia, Taller IV.



En el taller IV, Actividad 1, se buscaba que los estudiantes respondieran cuando $n = 1$, las siguientes preguntas: ¿Qué representa el área de la curva? En el intervalo $[0, x]$ ¿Cuál es el valor del área bajo la curva? ¿Cuál es el valor del área del rectángulo formado? ¿Cuál es el valor del cociente entre el valor del área bajo la curva y el área del rectángulo? Explique su respuesta, Escriba la expresión algebraica que le permita obtener el área bajo la curva de la función. Explique su respuesta.

El caso de Valeria: Valeria, en la fase individual, realizó la exploración del archivo de GeoGebra en el que se visualiza la función potencia $f(x) = x$, ella plantea la integral definida $\int_a^b x dx$ (Figura 69) para encontrar el valor del área bajo la curva de la función. Valeria afirmó que el área del rectángulo representa el doble del área bajo la gráfica de $f(x)$ en un intervalo, también da el modelo matemático de $\lim_{n\to\infty} \sum_{x=1}^{n} f(x)\Delta x$ para el área bajo la función.

Figura 69 Caso Valeria, Taller IV, Actividad 1


a) Representa la integral de $f_{(x)}=x$ en el intervalo que se escoja a medida que varía x. $\rightarrow \int_a^b x\, dx$

b) El área del rectángulo representa el doble del área bajo la gráfica de $f_{(x)}$ en un intervalo dado entre 0 y x, osea que representa el doble del valor de la integral de $f_{(x)}$ en un intervalo dado a medida que varía x. $\rightarrow 2\int_a^b x\, dx$ o también se puede expresar como: $\lim_{n\to\infty} \sum_{x=1}^{n} f_{(x)} \Delta x$. La base del rectángulo representa el Δx o el ancho del intervalo y la altura es el valor que toma $f_{(x)}$ al reemplazar el punto fronterizo derecho del intervalo escogido.

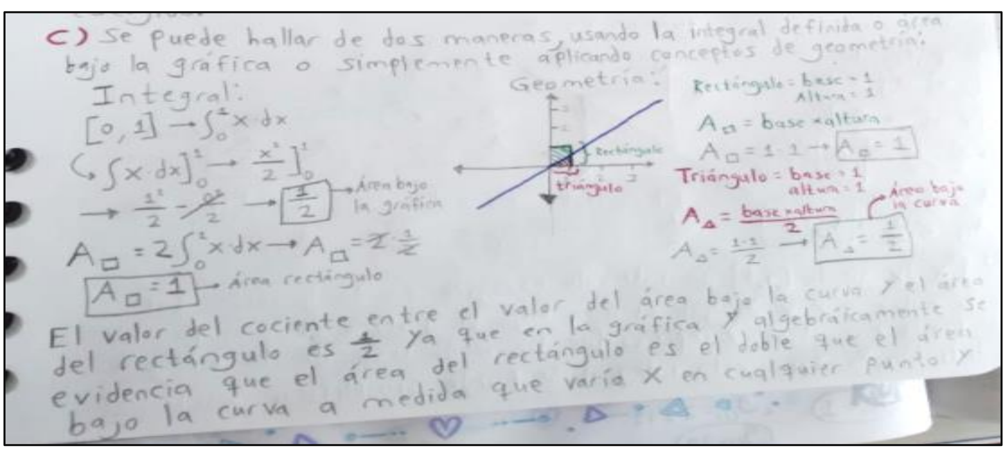
Algo que se aclaró en las intervenciones fue que las funciones potencia, son funciones continuas, por tanto, la definición por limite es válida, y el TFC, no tiene ninguna restricción, sin embargo, esta actividad se puede aprovechar para discutir la integral de una función discontinua. Valeria logra identificar la base del rectángulo como Δx y la altura como las imágenes de la función $f(x)$.

En la Figura 69, Valeria expresa que él área del rectángulo inscrito es el doble del área bajo la curva, por tanto, representa dicha área como $2\int_a^b x dx$. En este proceso de modelación Valeria interpretó el modelo, lo validó y lo pudo utilizar para responder al planteamiento del problema.

Para determinar la integral en un intervalo definidos [0,1] y [0,10], Valeria realiza dos procedimientos, uno de ellos es encontrando la antiderivada de la función $y = x$, a través de la regla de integración $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$. Por la entrevista realizada en la Tabla 30, Valeria, reconoce estas técnicas como determinar la antiderivada. También realiza el procedimiento de determinar el área del rectángulo, y el área del triángulo que se forma en el área bajo la curva (Figura 70).

Valeria afirma que el valor del cociente entre el valor del área bajo la curva y él área del rectángulo es $\frac{1}{2}$, aún no generaliza que la razón es $\frac{1}{n+1}$, si la función a integrar es $y = x^n$.

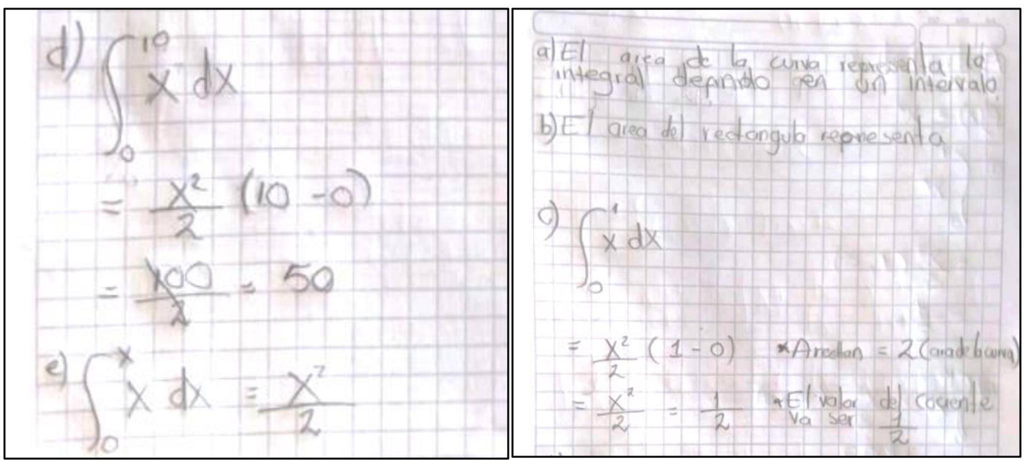
Figura 70 Caso Valeria, Taller IV, Actividad 1



Encontrando la razón los estudiantes identifican como surge la regla de antiderivación y no solo la aplican de manera repetitiva.

El caso de Camilo: al igual que Valeria, plantea la integral definida, para determinar el área bajo la curva de la función potencia. Camilo halla la integral para el intervalo [0,1], utilizando la regla de antiderivación, pero reconoce el valor del cociente $\frac{1}{2}$ (Figura 71), y de manera general para el intervalo $[0, x]$, plantea el modelo matemático de $\int_0^x xdx = \frac{x^2}{2}$.

Figura 71 Caso Camilo, Taller IV, Actividad 1

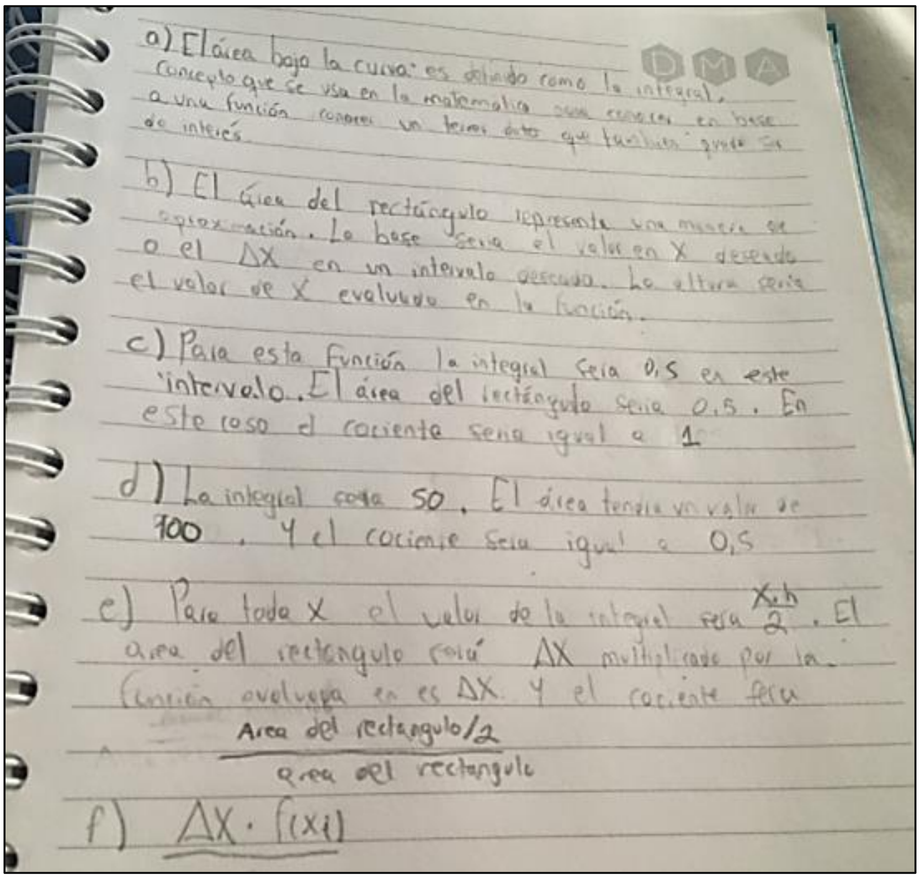


En la discusión Camilo explica por qué utiliza este procedimiento de la anti derivación y explica a sus compañeros, por qué $\int_0^x xdx = \frac{x^2}{2}$.

El caso de Daniel: afirma que el área bajo la curva es definida como la integral, también que el área del rectángulo se aproxima, el valor de la base es x, o dx si esta definido en un intervalo y la altura es las imágenes $f(x)$ (Figura 72).

Daniel plantea el modelo para determinar el área bajo la curva como $\frac{x*h}{2}$, donde h, representaría el valor de $f(x)$, pero $f(x) = x$. Por tanto, $\frac{x^2}{2}$ representa el área bajo la curva, el modelo es correcto para resolver la actividad; a diferencia de Valeria y Camilo, Daniel no planteó la regla de derivación $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$; solo se basó en la forma del área bajo la curva y realizó su cálculo. Observar el cociente entre el área del rectángulo y el área bajo la curva es importante para llegar a la regla de derivación.

Figura 72 Caso Daniel, Taller IV, Actividad 1



a) El área bajo la curva: es definido como la integral, concepto que se usa en la matemática para conocer en base a una función conocer un tercer dato que también puede ser de interés.

b) El área del rectángulo representa una manera de aproximación. La base sería el valor en X deseado o el ΔX en un intervalo deseado. La altura sería el valor de X evaluado en la función.

c) Para esta función la integral sería 0,5 en este intervalo. El área del rectángulo sería 0,5. En este caso el cociente sería igual a 1

d) La integral sería 50. El área tendría un valor de 100. Y el cociente sería igual a 0,5

e) Para toda X el valor de la integral sería $\frac{X.h}{2}$. El área del rectángulo será ΔX multiplicado por la función evaluada en es ΔX. Y el cociente sería

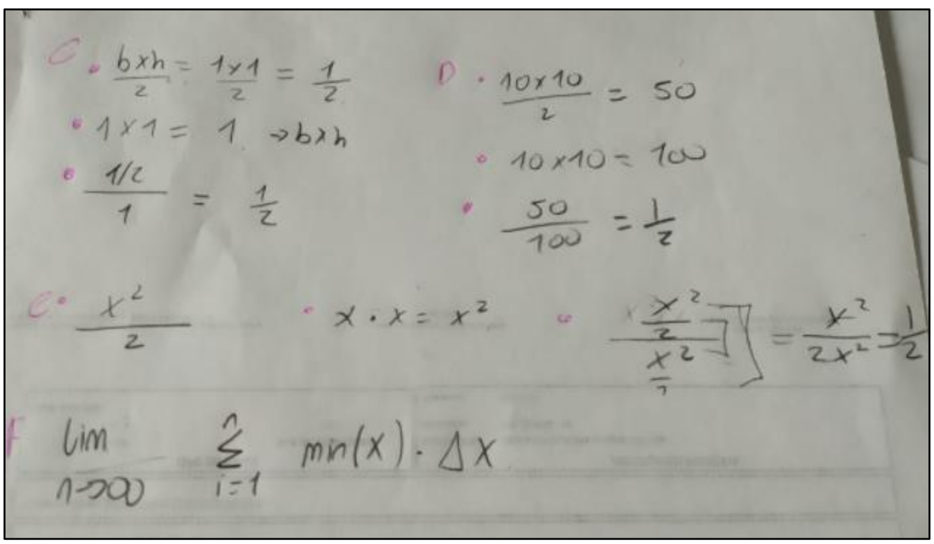
$$\frac{\text{Area del rectangulo}/2}{\text{area del rectangulo}}$$

f) $\Delta X \cdot f(x_i)$

A pesar de que en las afirmaciones iniciales Daniel manifiesta que es la integral, no utilizó la definición de integral, que planteó en los problemas auténticos anteriores; sin embargo, Daniel utiliza el significado del concepto de integral como área bajo la curva, nota que el área es un triángulo y utiliza la expresión algebraica para calcularla, obteniendo la integral. de la función potencia $f(x) = x$. El significado atribuido al concepto permite que a pesar de no conocer la regla de antiderivación pueda llegar a plantear la solución.

El caso de Diana: En las actividades anteriores Diana ha utilizado el modelo de integral, como $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \min\,(f(x))\Delta x$. En esta actividad también utiliza su modelo matemático; sin embargo, para responder la pregunta a valores de áreas en intervalos definidos, realiza operaciones aritméticas; encuentra que el área sería $\frac{x^2}{2}$. En la Figura 73, se evidencia su procedimiento para encontrar el área, toma en cuenta la razón de la integral y corrobora la información haciendo el cociente entre el área del rectángulo y el área bajo la curva obteniendo la razón $\frac{1}{2}$.

Figura 73 Caso Diana, Taller IV, Actividad



En la entrevista estructurada, se cuestionó a los estudiantes sobre el patrón encontrado, los estudiantes argumentan que la integral de una función potencia es la potencia más una unidad, multiplicada por la razón de $\frac{1}{n+1}$. Diana y Daniel fueron los estudiantes que no siguieron la regla de derivación, sino que continuaron con el modelo de integral como límite de n cuando tiende a infinito de la sumatoria desde $i = 1$ hasta n del área de rectángulos inscritos al área bajo la curva, rectángulos con base infinitamente pequeña y altura la imagen de la función; sin embargo, Diana y Daniel, logran llegar a la misma técnica de integración utilizando el cálculo de áreas.

En la socialización se logra evidenciar, la búsqueda por parte de los estudiantes hacia las técnicas de integración para realizar un procedimiento más cortó (Tabla 31).

Tabla 31 Episodio 16. Entrevista estructurada, Taller IV, Actividad 1

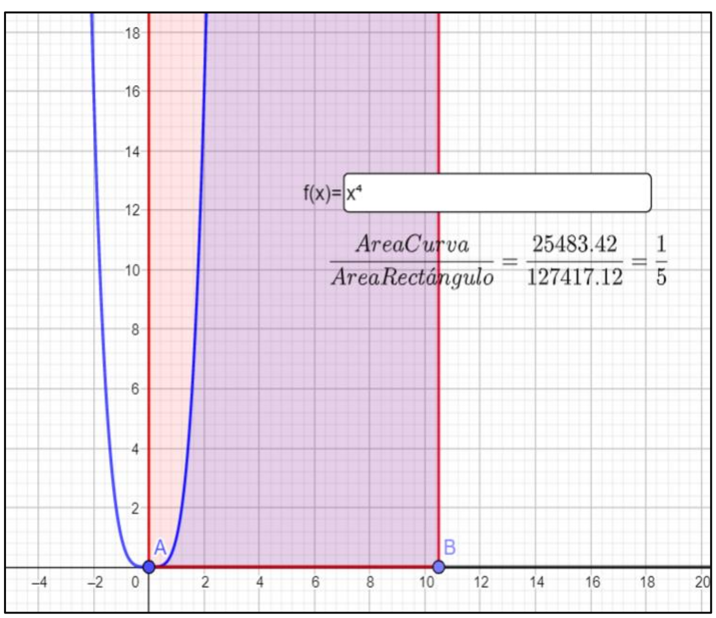
1. I: ¿Encontraron algún patrón?
2. V: Si señora
3. Di: Si profe
4. I: ¿Cuál?
5. Di: El valor…el cociente, que es la división entre el área bajo la curva y el área del rectángulo tienden a ser iguales, o sea, no importa los valores del área siempre se mantienen.
6. V: Pues encontré un patrón en el en el cociente y en el área del rectángulo, mientras que como dice modifica el n de la función. O sea, si, digamos, tenemos otra función $f(x) = x$. El área del rectángulo se va a sacar es x^2; con el cociente pasa algo parecido, porque pues a medida que aumenta el n de la función, el cociente se vuelve $\frac{1}{n+1}$.
7. I: ¿Por qué?
8. C: Pues es una regla de derivación
9. I: ¿Cuál regla?
10. C: Déjeme revisarla nuevamente profe, pero de igual forma toca sumar las áreas anteriores.
11. I: ¿Cómo así?
12. C: Si profe, en esa regla se evalúan y siempre pasa lo que dice Valeria.

Inicialmente la Actividad 1, se pretendía que solo se modelara el área bajo la curva de la función $f(x) = x$, pero los estudiantes reflexionan sobre el procedimiento realizado, y el patrón que se repite (Tabla 31) cuando $n \in \mathbb{N}$. La modelación matemática de este problema permite que los estudiantes comparen el modelo realizado para resolver la situación y el modelo institucional. Los estudiantes validaron el modelo de integración de una función potencia, cuando $n \in \mathbb{N}$. En las siguientes actividades, se prueba el modelo de manera general, cuando $n \in \mathbb{R}^+$.

En la actividad 2, se buscaba que los estudiantes estudiaran la modelación matemática del área bajo la curva de una función potencia cuando $n \in \mathbb{N}$, respondiendo las siguientes preguntas: ¿Qué representa el área de la curva? En el intervalo $[0, x]$ ¿Cuál es el valor del área bajo la curva? ¿Cuál es el valor del área del rectángulo formado? ¿Cuál es el valor del cociente entre el valor del área bajo la curva y el área del rectángulo? Explique su respuesta, Escriba la expresión algebraica que le permita obtener el área bajo la curva de la función. Explique su respuesta.

El caso de Valeria: Valeria, usando las ideas y conocimientos previos acerca de la modelación de la función $f(x) = x$, recurre al AVG y valida el modelo, ella comparte el enlace: https://www.geogebra.org/classic/kxgprbda (Figura 74), en el que comprueba para cuando el valor de $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ el uso del software fue primordial para que los estudiantes lograrán encontrar un modelo.

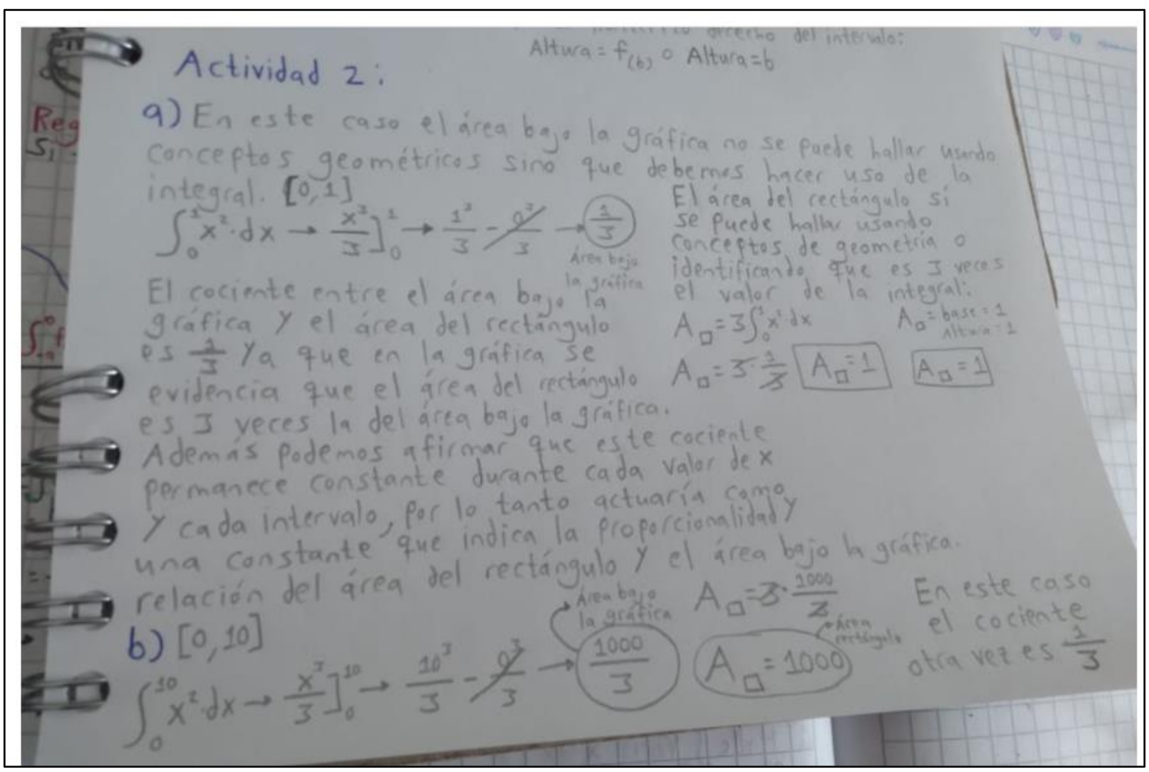
Figura 74 Uso AVG Valeria, Taller IV, actividad 2



Valeria, en la actividad anterior buscó la regla de integración de una función potencia, pero también utilizó el significado atribuido al concepto de integral, como área bajo la curva de la función. Utilizando la razón entre el área del rectángulo y el área bajo la curva que proporciona el software, de allí reconoce la igualdad entre los modelos matemáticos (Figura 74).

Una afirmación que realiza Valeria es: "El cociente entre el área bajo la gráfica y el área del rectángulo es 1/3 ya que en la gráfica se evidencia que el área del rectángulo es 3 veces la del área bajo la gráfica. Además, podemos afirmar que este cociente permanece constante durante cada valor de x y cada intervalo. por lo tanto, actúa como una constante que indica la proporcionalidad y relación del área del rectángulo"

Figura 75 Caso Valeria, Taller IV, Actividad 2



Altura $= f_{(b)}$ o Altura $= b$

Actividad 2:

a) En este caso el área bajo la gráfica no se puede hallar usando conceptos geométricos sino que debemos hacer uso de la integral. [0, 1]

$\int_0^1 x^2 \cdot dx \rightarrow \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 \rightarrow \frac{1^3}{3} - \cancel{\frac{0^3}{3}} \rightarrow \frac{1}{3}$

Área bajo la gráfica

El área del rectángulo sí se puede hallar usando conceptos de geometría o identificando que es 3 veces el valor de la integral.

$A_\square = 3\int_0^1 x^2 dx$ $A_\square$: base = 1, Altura = 1

$A_\square = 3 \cdot \frac{1}{3}$ $\boxed{A_\square = 1}$ $\boxed{A_\square = 1}$

El cociente entre el área bajo la gráfica y el área del rectángulo es $\frac{1}{3}$ ya que en la gráfica se evidencia que el área del rectángulo es 3 veces la del área bajo la gráfica. Además podemos afirmar que este cociente permanece constante durante cada valor de x y cada intervalo, por lo tanto actuaría como una constante que indica la proporcionalidad y relación del área del rectángulo y el área bajo la gráfica.

b) [0, 10]

$\int_0^{10} x^2 \cdot dx \rightarrow \frac{x^3}{3}\Big]_0^{10} \rightarrow \frac{10^3}{3} - \cancel{\frac{0^3}{3}} \rightarrow \frac{1000}{3}$

Área bajo la gráfica

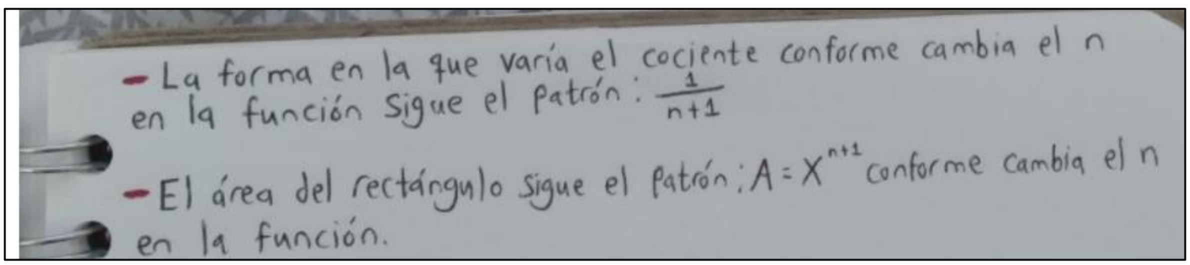
$A_\square = 3 \cdot \frac{1000}{3}$ $A_\square = 1000$ Área rectángulo

En este caso el cociente otra vez es $\frac{1}{3}$

Valeria en la afirmación que realizó, evidencia una comparación entre el área del rectángulo y el área bajo la curva, ella dice que esta razón se va a cumplir siempre sin importar el valor del intervalo que se tome. Lograr que los estudiantes vean esta conservación del área como lo expresa Corberan (1996), llevar a tener una mejor comprensión del concepto de integral y por el momento de la regla de integración.

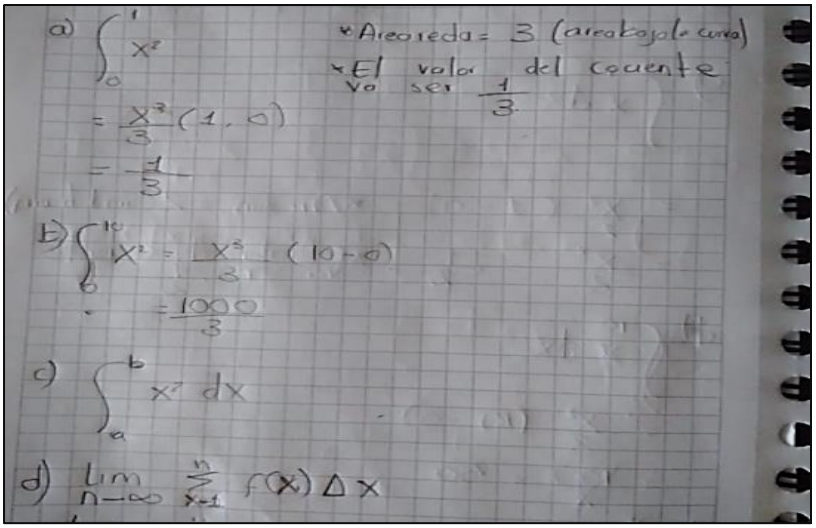
El proceso de modelación realizado en Figura 75, Valeria lo repite para los valores de $n = 3, 4, 5, \ldots$ para finalizar la modelación de las funciones potencia cuando el valor n es un natural Valeria afirma que el patrón o el modelo general es $\frac{1}{n+1}$ (Figura 76) y el área del rectángulo sigue el patrón $A = x^{n+1}$, dependiendo del valor de n de la función.

Figura 76 Caso Valeria, Taller IV, actividad 2, generalización



El caso de Camilo: Camilo al igual que Valeria, hace uso del AVG y comparte el enlace de exploración en el software: https://www.geogebra.org/classic/m3xwmtdh. En la Figura 77, Camilo utiliza la regla de antiderivación para las funciones potencia, para encontrar el área bajo la curva en los intervalos de $[0,1]$ y $[0,10]$, identifica la relación del cociente afirmando que es $\frac{1}{3}$. Aunque Camilo plantea la integral definida en un intervalo $[a, b]$ $\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3}$ evaluado en el intervalo, también toma en cuenta la expresión por límite de la sumatoria $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta x$.

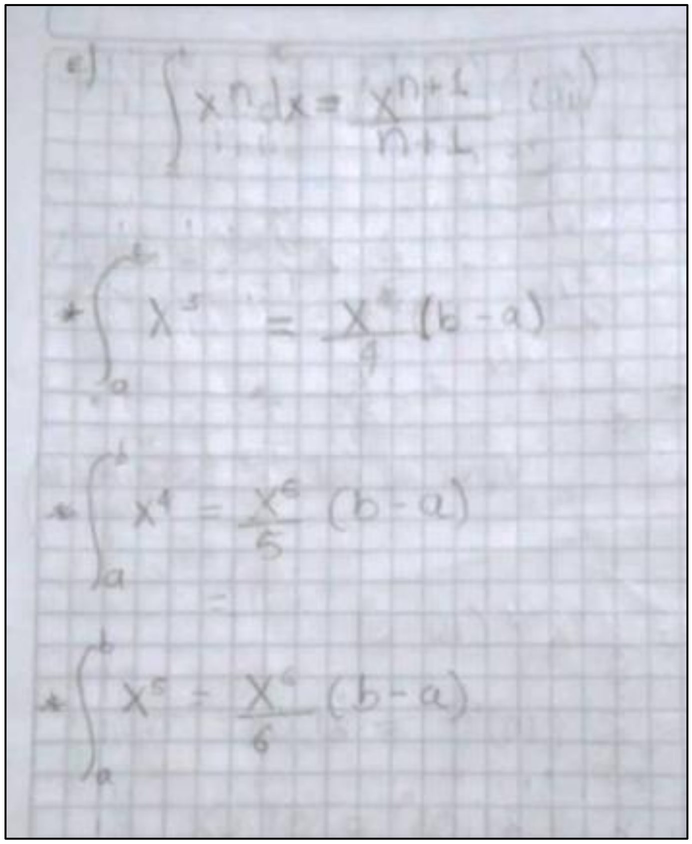
Figura 77 Caso Camilo, Taller IV, Actividad 2



Camilo reconoce la igualdad entre los modelos matemáticos, aunque utilice la regla de integración, identifica que tiene una equivalencia con la definición de límite de la sumatoria. Según lo que reporta Cordero (2003) en su investigación a estudiantes de universidad se les dificultad ver la igualdad entre $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = F(b) - F(a)$. En esta investigación los estudiantes logran construir un modelo para el concepto de integral y lo relacionan con el TFC. El proceso de acumulación es importante para reconocer esta relación porque es la que permite que los estudiantes logren validar esta equivalencia.

Camilo realiza el mismo proceso para el valor de $n = 3, 4, 5, \ldots$, (Figura 78) Él siempre estuvo definiendo la integral desde un intervalo cerrado $[a, b]$, no planteó la integral indefinida. Para futuras investigaciones se pueden diseñar problemas auténticos que puedan llevar a los estudiantes a reconocer la integral definida y la integral indefinida.

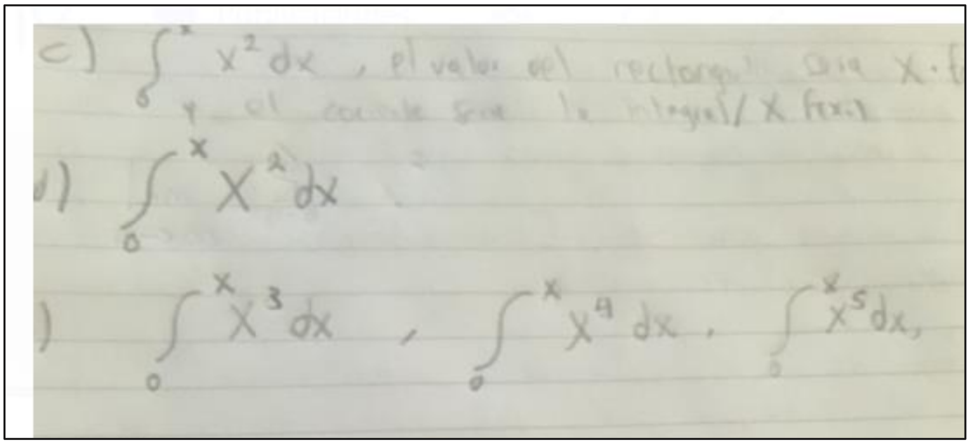
Figura 78 Caso Camilo, Taller IV, Actividad 2, Generalización



Camilo plantea su modelo matemático según las exploraciones en el AVG, las preguntas orientadas y el significado atribuido al concepto de integral como área bajo la curva de la función potencia.

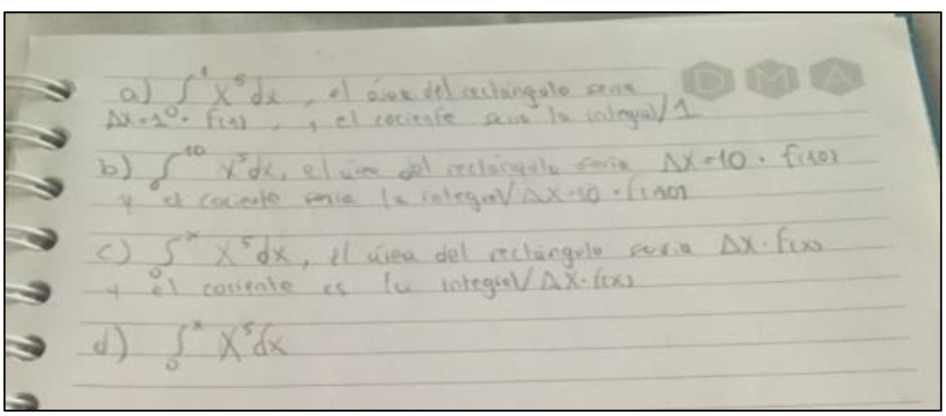
El caso de Daniel: Daniel, inicialmente plantea que para determinar el área bajo la curva de la función se debe realizar con la integral, escribió el modelo matemático $\int_0^x x^2dx$ (Figura 79), pero no dice a qué es igual esta relación, aunque en la discusión anterior estuvo de acuerdo en la validación del modelo $\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, evaluada en el intervalo, pero en los procedimientos no lo resolvió, solo planteó las integrales para un intervalo $[0, x]$.

Figura 79 Caso Daniel, Taller IV, Actividad 2.



Lo mismo realizó para los valores de $n = 3, 4, 5, ...$ no dio a conocer los resultados; sin embargo, cuando se le cuestionó ¿Por qué el modelo matemático planteado? ¿Qué representa el área del rectángulo? Daniel responde que el área del rectángulo es el valor $\Delta x * f(x)$ dependiendo del valor, y multiplicado por la razón (Figura 80). Daniel utilizó un razonamiento más sencillo para deducir la de regla de integración de una función potencia. Al igual que Camilo y Valeria, Daniel siempre dio a conocer la integral definida y utilizó el significado de integral como área bajo la curva de la función.

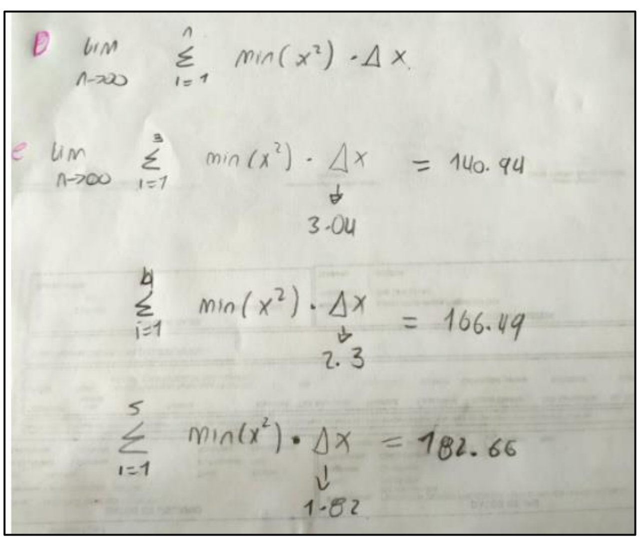
Figura 80 Caso Daniel, Taller IV, Actividad 2, generalización



A diferencia de los demás compañeros Daniel fue el único que no compartió su enlace de trabajo sobre la exploración que realizó en el AVG, pero se reconoce su exploración por los razonamientos dados a conocer.

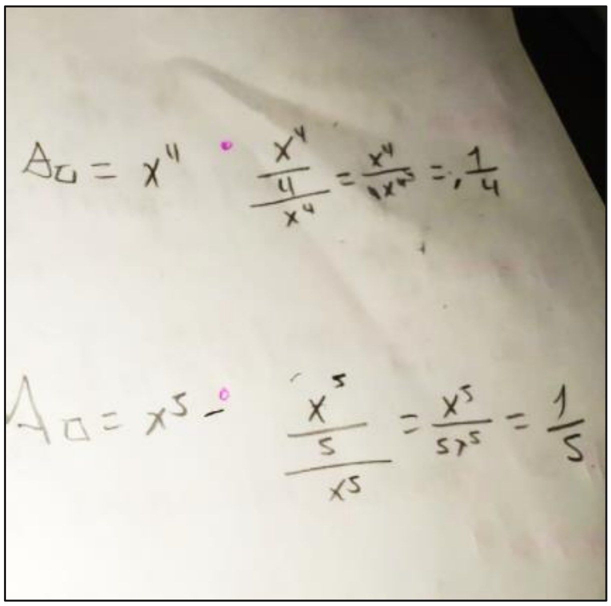
El caso de Diana, ella realizó la exploración del AVG y compartió el enlace: https://www.geogebra.org/classic/gmevuer8, a partir de esto, comparte su modelo matemático que es $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \min\ (x^2)\Delta x$ (Figura 81). Diana siempre estuvo influenciada por la aproximación a través de rectángulos por debajo de la gráfica de la función, para ella el significado de la integral era ese, por tanto, las situaciones las resolvió de esta forma. Para encontrar el área bajo la curva realizó aproximaciones a través de valores numéricos. También ella reporta que investigó sobre cómo determinar el área bajo la curva de una función potencia, para lo cual hizo uso de los recursos didácticos que tiene el AVG, el enlace donde encontró información fue: https://www.geogebra.org/m/cpw2MEw2. Estos recursos son de gran ayuda para los estudiantes, ellos casi no exploran en libros de textos, sino en línea.

Figura 81 Caso Diana, Taller IV, Actividad 2



Diana no planteó un modelo general para la situación, pero, aplicó la regla de integración de una función potencia y comprobó que el cociente entre el área del rectángulo y el área bajo la curva según la regla daba la razón $\frac{1}{n+1}$. Lo verificó para las funciones potencia $f(x) = x^n$, con $n = 3,4,5, \ldots$ (Figura 82).

Figura 82Caso Diana, Taller IV, Actividad 2, generalización



De manera general, los estudiantes aceptaron la regla de integración de una función potencia y la aplicaron intentando modelar el problema planteado. La actividad siguiente logra generar en los estudiantes la validación de la regla cuando el valor de $n \in \mathbb{R}$.

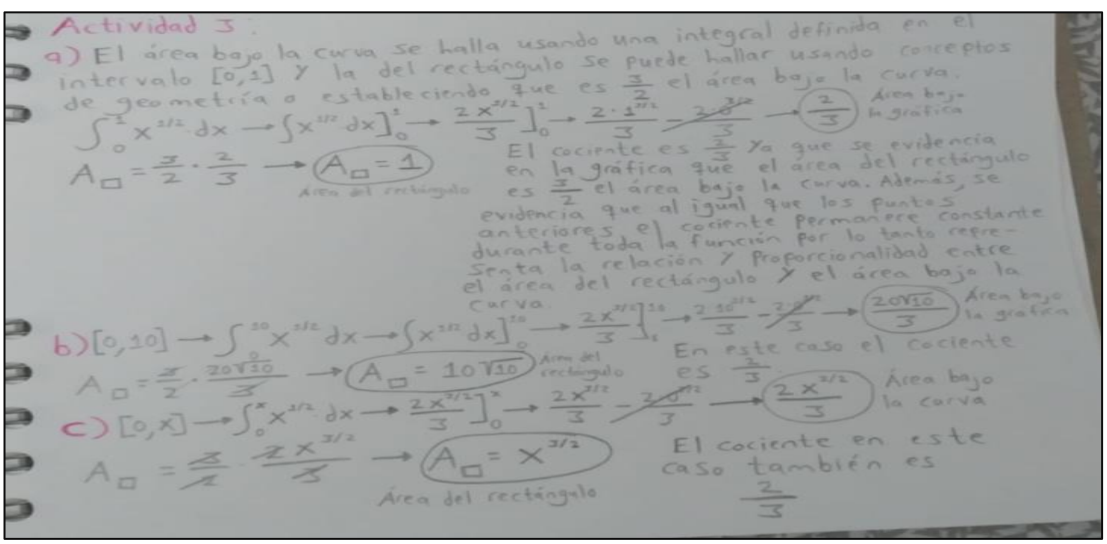
En la actividad 3, se buscaba que los estudiantes aprendieran la modelación matemática del área bajo la curva de una función potencia cuando $n \in \mathbb{R}$, respondiendo las siguientes preguntas: ¿Qué representa el área de la curva? En el intervalo $[0, x]$ ¿Cuál es el valor del área bajo la curva? ¿Cuál es el valor del área del rectángulo formado? ¿Cuál es el valor del cociente entre el valor del área bajo la curva y el área del rectángulo? Explique su respuesta, Escriba la expresión algebraica que le permita obtener el área bajo la curva de la función. Explique su respuesta.

El caso de Valeria: Valeria compartió la exploración realizada en el AVG, los enlaces son: https://www.geogebra.org/classic/bkvcwpmw para la función $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, https://www.geogebra.org/classic/z6xbn2pt para la función $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$, https://www.geogebra.org/classic/f89hzfbp para la función $f(x) = x^{\pi}$, https://www.geogebra.org/classic/xtwjuusq para la función $f(x) = x^{e}$. El lector puede consultar cada enlace.

Valeria desde el inicio de la actividad afirmó que se podía realizar el mismo procedimiento para las funciones potencias, cuando el valor de $n \in \mathbb{N}$; sin embargo, comprobó que se cumplía para $n \in \mathbb{R}$.

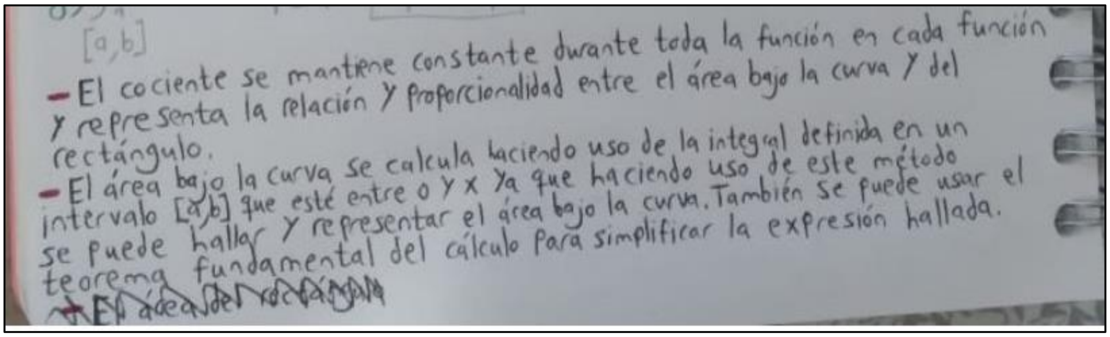
En la Figura 83, Valeria, da a conocer las dos formas de encontrar el área bajo la curva de la función. Utilizando el TFC y realizando la aproximación por rectángulos.

Figura 83 Caso Valeria, Taller IV, Actividad 3



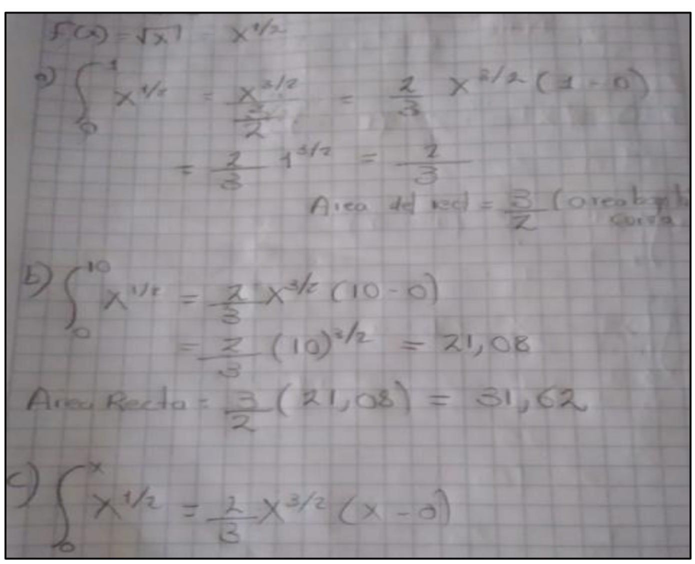
Valeria, calcula la integral de las funciones potencia con exponente racional y exponente irracional, ella afirma que la relación entre el área del rectángulo y el área bajo la curva siempre es $\frac{1}{n+1}$ y el área del rectángulo es x^{n+1}. Valeria definió la integral definida.

Figura 84 Caso Valeria, Taller IV, Actividad 3, generalización



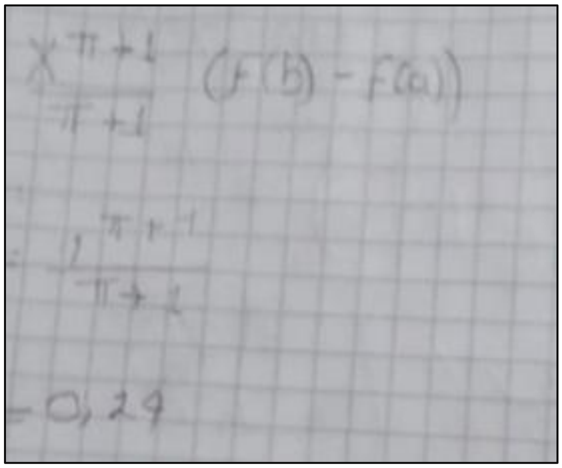
El caso de Camilo: Camilo siguió utilizando la regla de integración de una función potencia, para los valores de $n \in \mathbb{R}$ (Figura 85). Camilo ve el concepto de integral como área bajo la curva, pero resolver esta actividad le permitió utilizar el TFC y ver la igualdad entre la integral definida y la definición por aproximación de rectángulos.

Figura 85 Caso Camilo, Taller IV, Actividad 3



Para los valores de $n = \pi, e$, Camilo pensaba que, por ser valores irracionales, podría no cumplir, para lo cual verificó a través del software y encontró que realmente se cumple la relación. Para lo cual generaliza la situación y plantea que la regla se va a cumplir para las funciones potencia cuando $n \in \mathbb{R}$.

Figura 86 Caso Camilo, Taller IV, Actividad 3, generalización

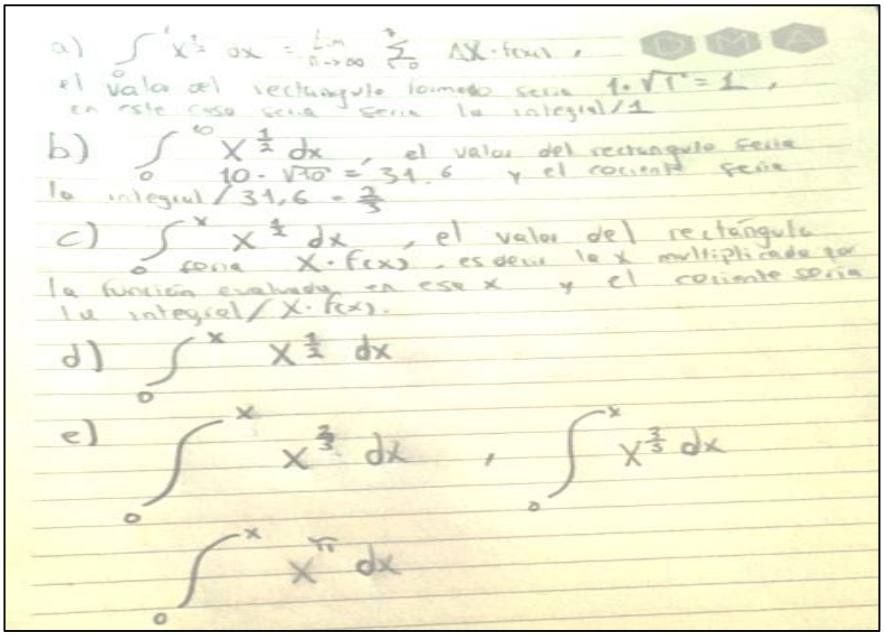


El caso de Daniel: sigue los procedimientos de las actividades anteriores, utiliza tanto la regla de integración de una función potencia, como la aproximación a través de rectángulos. él marca la igualdad entre estos dos modelos matemáticos.

Daniel realiza el procedimiento para los valores de $n = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \pi$, realiza la conjetura de que cumple para cualquier valor. A pesar de que se le sugirió mostrar el procedimiento después de plantear la integral, el estudiante afirma que sería el área del rectángulo multiplicado por la razón de $\frac{1}{n+1}$ (Figura 87).

Demostrar la razón $\frac{1}{n+1}$, es un proceso extenso y que requiere de varios conceptos matemáticos que los estudiantes pueden no haber estudiado. Por tanto, lo aceptamos como verdadero por el momento.

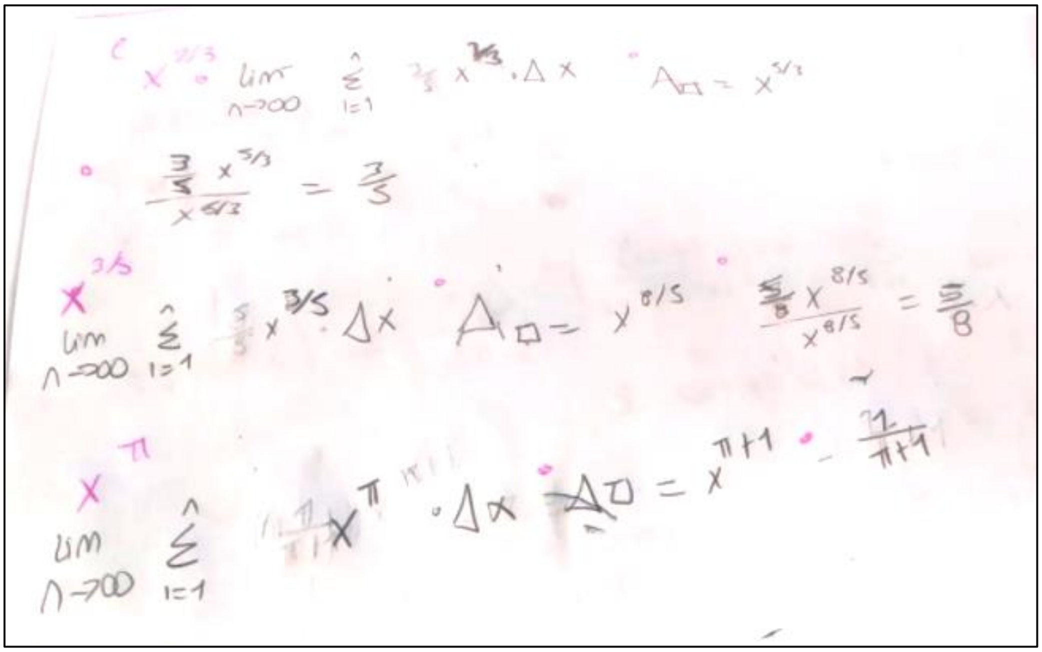
Figura 87 Caso Daniel, Taller IV, Actividad 3



El caso de Diana: Diana al igual que Valeria, dio a conocer los enlaces en su exploración en el AVG. Para la función $f(x) = x^e$ https://www.geogebra.org/classic/mcpv5req, para la función $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ https://www.geogebra.org/classic/cxby8fzh, para la función $f(x) = x^{\pi}$ https://www.geogebra.org/classic/jvxhugpz y para la función $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$ https://www.geogebra.org/classic/empbared.

A través de esta exploración Diana logra reconocer la regla de integración de una función potencia, y deja de realizar muchos cálculos aritméticos (Figura 88). Continúa con la definición por aproximación de rectángulos y lo ve equivalente a la técnica de integración. Diana es la única de los compañeros que no planteó el símbolo de integral $\int f(x)dx$. Para ella el modelo de $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ representa el concepto de integral.

Figura 88 Caso Diana, Taller IV, Actividad 3



Como lo expresa Villa-Ochoa y col. (2014) los estudiantes cuando experimentan los modelos matemáticos logran obtener mayores argumentos para defender sus ideas y ver la conexión que existe entre la realidad y las matemáticas.

En esta investigación, logramos evidenciar que los estudiantes implicados en el modelado de los problemas auténticos daban a conocer sus estrategias de la situación específica, inicialmente modelaban de manera informal, pero eran autónomos de sus modelos o razonamientos matemáticos, algo similar dio a conocer Londoño-Orregón y Muñoz-Mesa (2011).

Las representaciones elaboradas por Valeria, Camilo, Diana y Daniel son muestra de las formas en que concibe la situación y justifica sus razonamientos matemáticos. Validando desde sus producciones individuales y grupales la construcción de un modelo. En este sentido, podemos afirmar que el significado particular del modelo construido está ligado con el contexto en particular, dando autenticidad al concepto de integral, no solo como la reproducción que se haría de un ejercicio tradicional.

Por tanto, se da a conocer como una contribución de la modelación matemática de problemas auténticos hacia el estudio del concepto de integral la creación de modelos matemáticos.

5.3. Significados asociados al concepto de integral

Los significados asociados al concepto de integral son el área bajo la curva de una función, como proceso de acumulación y el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Estos fueron los significados evidenciados en la modelación matemática de los problemas auténticos realizada por los estudiantes participantes de la investigación.

5.3.1. Interpretación de la integral como área bajo la curva

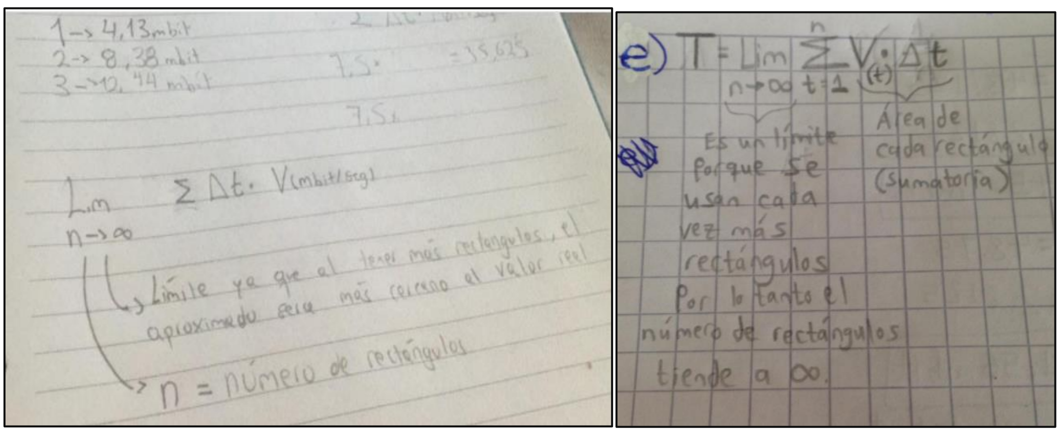
El concepto de integral se da inicialmente en los cursos con el enfoque de determinar el área bajo la curva de una función. Posteriormente se amplía esta idea intuitiva. Se plantean unas reglas de integración y se da prioridad a las representaciones algebraicas.

Epistemológicamente, el concepto de integral surge del cálculo de áreas irregulares como lo expresa Londoño (2011), y pasa por varios estudios en el que el concepto se torna cada vez más importante, llegando a darse paso al TFC. En esta investigación pudimos observar que los estudiantes participantes, reconocieron el concepto de integral como área bajo la curva y esto les permitía resolver los problemas planteados.

El significado del concepto de integral como área bajo la curva, está relacionado con el modelo matemático de $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$. A lo largo de la investigación se vio cómo los estudiantes lograron obtener este modelo y utilizarlo para las siguientes actividades. Por ejemplo:

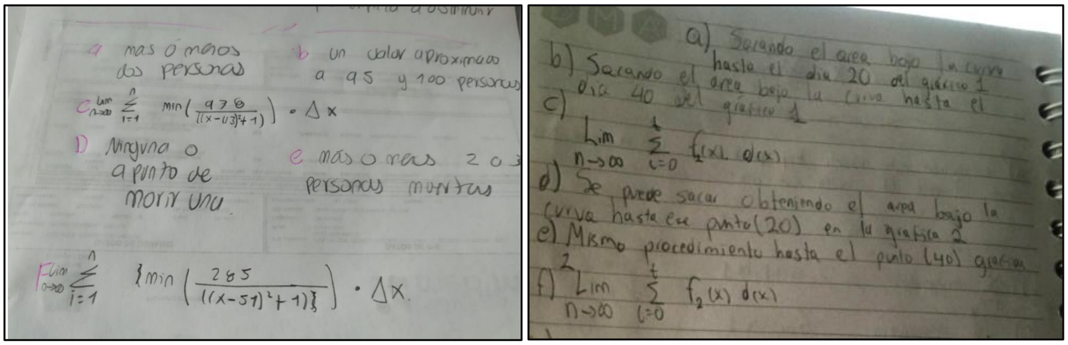
En el problema inicial de descarga del archivo, en la socialización del taller I, actividad 2, (Tabla 18) fue importante que los estudiantes llegarán al acuerdo de que el área sombreada representaba el tamaño del archivo descargado, y centraran su atención en modelar el área bajo la curva de la función velocidad. En este momento los estudiantes ven el concepto de integral como área bajo la curva de la función. Algunos modelos son los evidenciados en la Figura 89.

Figura 89 Significado del concepto de integral cómo área bajo la curva



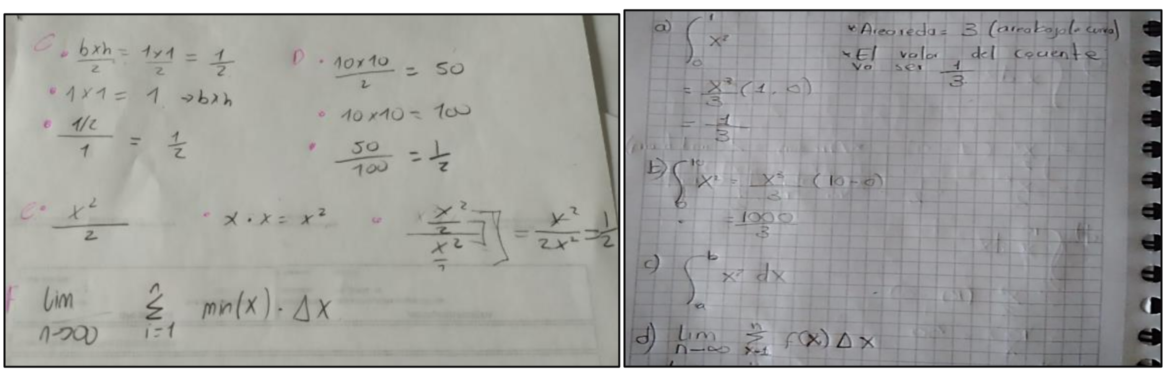
En el problema de comportamiento de trasmisión de un virus, fue importante que los estudiantes reconocieran que la cantidad de fallecimientos es el área bajo la curva de los fallecimientos por días. Así mismo, para determinar la cantidad de recuperados, hasta determinado día t, era necesario hallar el área bajo la curva de los recuperados por días. Aunque algunos estudiantes optaron por iniciar a estudiar el TFC, otros siguieron el modelo de área bajo la curva de la función (Figura 90).

Figura 90 Significado del concepto de integral como área bajo la curva.



En el problema de modelación del área bajo la curva de una función potencia, los estudiantes le atribuyeron el significado de integral a determinar esa área y a partir de esto encontrar las reglas de integración. Sin este significado de la integral los estudiantes no hubiesen podido modelar la situación (Figura 91).

Figura 91 Significado del concepto de integral como área bajo la curva.



Aunque en este problema auténtico, surgió un resultado importante y es lograr ver la igualdad entre $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = F(b) - F(a)$. El significado del concepto de integral como área bajo la curva representa un aspecto importante en la comprensión del concepto, como lo expresa Olave (2013). La modelación matemática de problemas auténticos puede atribuir el significado de área bajo la curva al concepto de integral. Posteriormente se amplía esta idea intuitiva.

5.3.2. Interpretación de la integral como proceso de acumulación

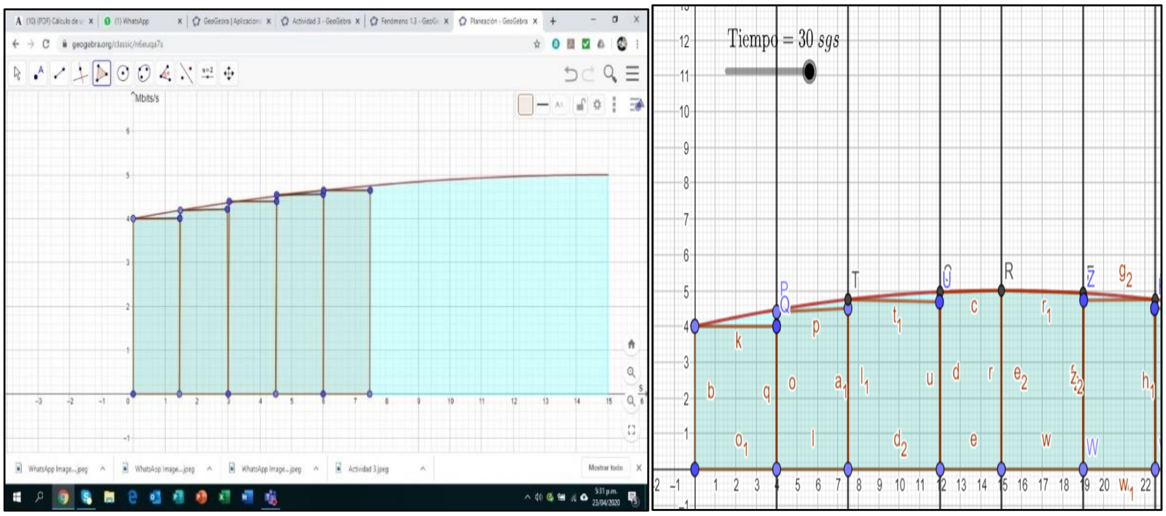
Algunos autores como Thompson y Silverman (2007), Kouropatov (2008) Muñoz (2000), Cordero (2003), entre otros. Han propuesto un acercamiento al concepto de integral desde el enfoque del proceso de acumulación, entendiendo la acumulación como una suma que consta de un número de términos muy pequeños.

Este proceso de acumulación es desarrollado en las aplicaciones del concepto de integral y permite que los estudiantes tengan claridad sobre la integral definida e indefinida, como la relación entre el área bajo la curva de una función y el TFC.

Para esta investigación, en el problema auténtico de descarga del archivo, los estudiantes lograron reconocer el proceso de acumulación desde el contexto del problema, porque a medida que el tiempo iba aumentando, el tamaño del archivo que se estaba descargando también aumentaba, y era necesario ir sumando los valores anteriores.

El proceso de acumulación se logra ver desde las aproximaciones geométricas realizadas por los estudiantes, hasta los cálculos de las sumas de las velocidades anteriores.

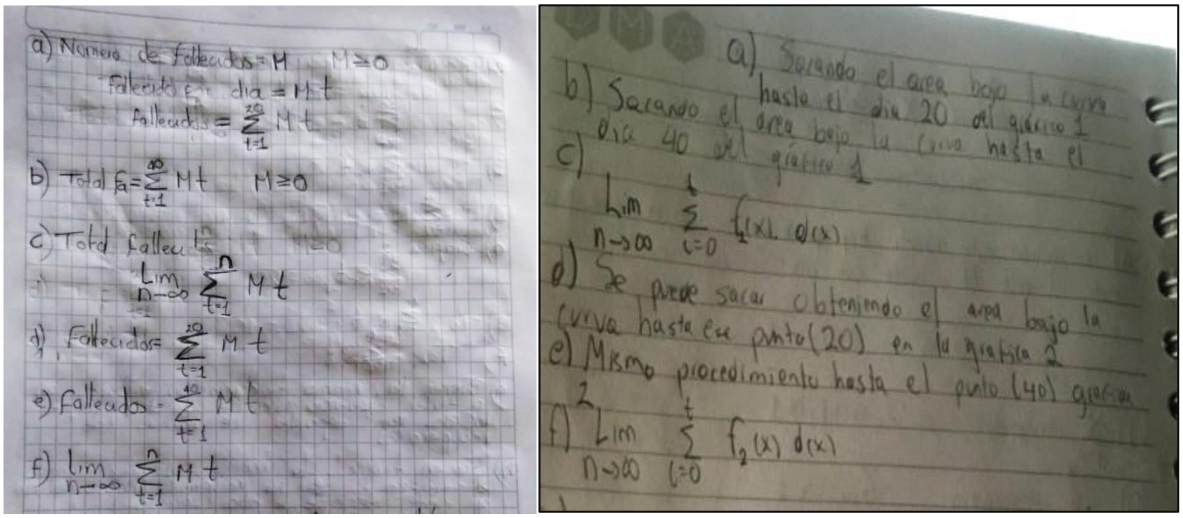
Figura 92 Significado del concepto de integral como proceso de acumulación



Este procedimiento fue primordial para lograr construir el modelo matemático del concepto de integral, porque a partir de las reflexiones realizadas en este problema se pudieron realizar las demás actividades.

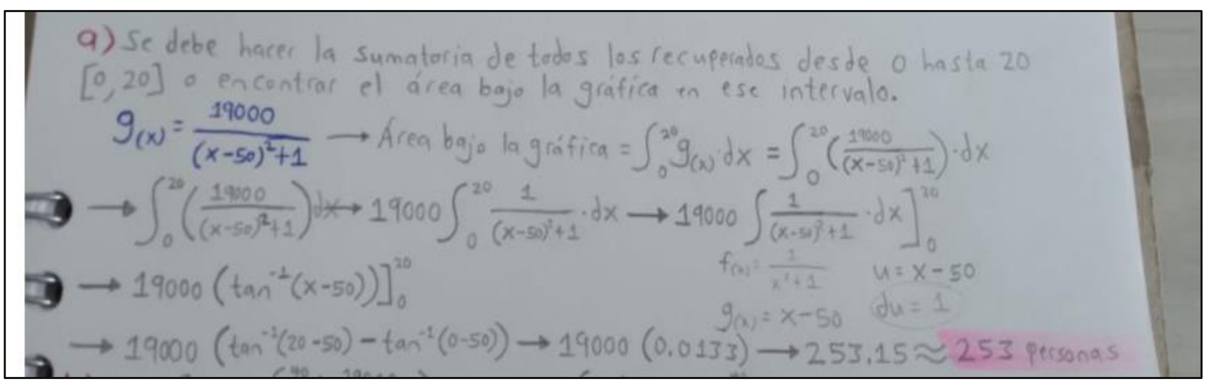
En el problema auténtico de comportamiento de trasmisión de un virus, el modelo SIR, deducía que la cantidad de recuperados hasta determinado día t, era la sumatoria de las recuperaciones diarias anteriores al día. Por tanto, el proceso de acumulación tenía más claridad, pero sucedió que los estudiantes se olvidaron del límite, es decir, esa suma es infinita (Figura 57). En esta actividad es donde más se evidenció el proceso de acumulación (Figura 93).

Figura 93 Significado del concepto de integral como proceso de acumulación



El proceso de acumulación como lo evidencia autores como Jiménez (2019) permite llevar al estudiante a plantear el TFC.

Figura 94 Significado del concepto de integral como proceso de acumulación



En el problema de modelación del área bajo la curva de una función potencia, el proceso de acumulación fue inmerso en el cálculo de áreas y en el uso del TFC.

La modelación matemática de problemas auténticos contribuyó a ver el concepto de integral como un proceso de acumulación.

5.3.3. Acercamiento al teorema fundamental del cálculo

En Cordero (2003) se afirma que los profesores y estudiantes cuando se les pregunta por el área bajo la curva de una función se inclinan más a la expresión por la “resta”

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

En contraste a considerarla como el “límite de una suma” que sería el significado asociado en el área bajo la curva.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon)\Delta x_i$$

Dependiendo de la experiencia que tenga el estudiante sobre el límite, algunos solo harán el n tender a infinito sin hacer mención del intervalo $[a, b]$ involucrado. Lo que se ha evidenciado en Cordero (2003) es que los estudiantes pueden llegar a decir que el área bajo la curva es la resta, pero se presenta dificulta al ver igual tanto el límite de la suma como la resta.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon)\Delta x_i = F(b) - F(a)$$

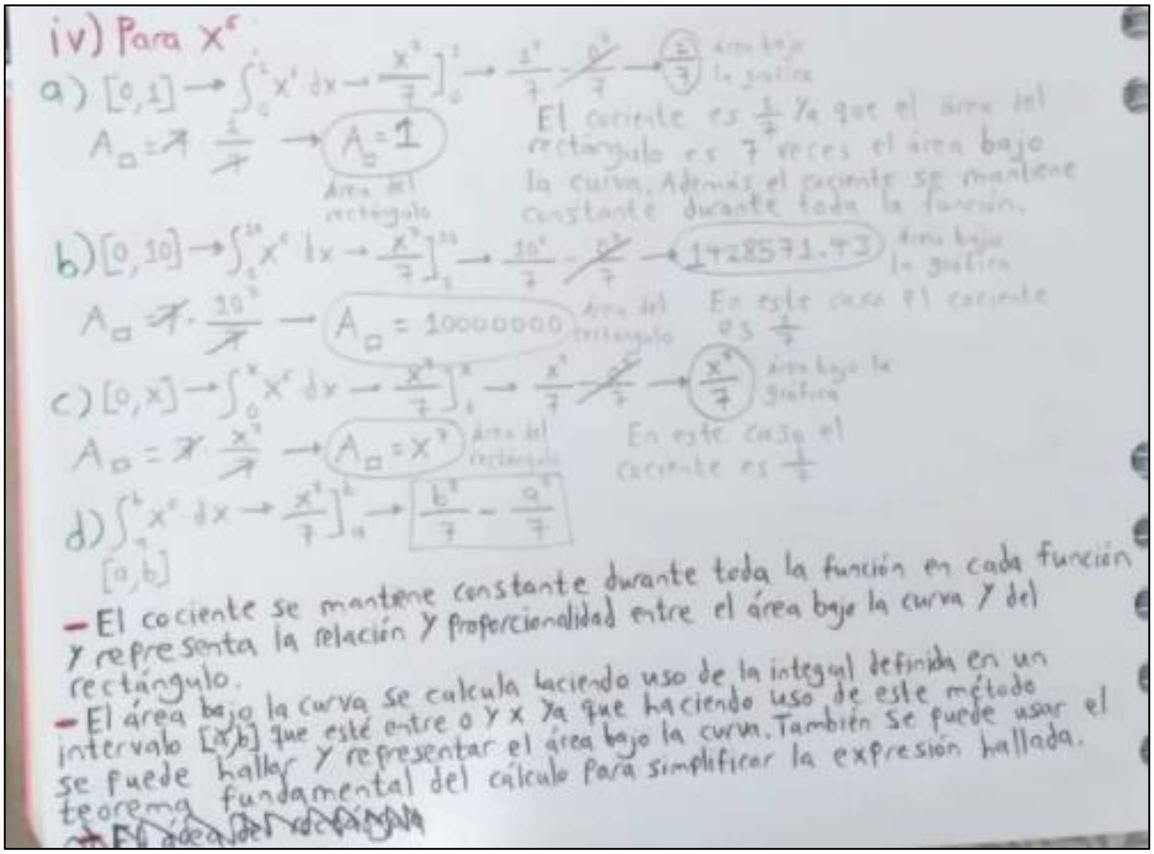
En esta investigación se logra ver el uso del TFC, en el problema auténtico de comportamiento de trasmisión de un virus y en la modelación de una función potencia. Inicialmente en el problema de comportamiento de trasmisión de un virus, Valeria lograr ver el TFC a través de sus propias búsquedas (Tabla 32) y encuentra la relación con el área bajo la curva y se las da a conocer a sus compañeros, superando de alguna manera el obstáculo que presenta Cordero (2003). Sin embargo, fue la única de sus compañeros que lo realizó.

Tabla 32 Significado del concepto de integral en relación con el TFC

1. Di: profe, en las gráficas no se logra ver bien los intervalos
2. V: En realidad es fácil
3. I: ¿Por qué?
4. V: Pues es usar el TFC
5. I: ¿De qué trata el TFC Valeria?
6. V: Es una **forma de facilitar encontrar el área bajo la curva. Realmente se está haciendo lo mismo, pero de otra manera, aquí se usa la antiderivada**.
7. I: ¿Qué es la antiderivada?
8. V: Digamos, tenemos la integral definida en un intervalo $[a, b]$, entonces primero tomamos la función de manera general y hallamos la antiderivada de esa función.
9. Di: No sé qué es la antiderivada Valeria
10. V: Pues, así como tal lo que es, si es como derivar, pero al revés.
11. Di: Aun no entiendo bien
12. V: Lo que sé, es que digamos que tenemos una función que es $y = x^2$ y esa función queremos sacarle la antiderivada, o bueno si derivas $y = x^2$ ¿Qué da?
13. Di: $y' = 2x$
14. V: ¿Qué hiciste para que quedará $y' = 2x$?
15. Di: Bajé el exponente y le resté uno.
16. V: Ahora eso lo haces, pero al revés en $y = x^2$
17. Di: Ah, o sea tendría que a $2x$ multiplicar por $\frac{x}{2}$ y así obtendría $y = x^2$.
18. V: Si, exacto.
19. I: Daniel, ¿qué piensas?
20. D: Si yo también le entendí. Igual el área bajo la curva es la cantidad de personas fallecidas.

En el problema de modelación matemática del área bajo la curva de una función potencia, todos los estudiantes participantes lograron ver la relación entre el concepto de integral y el TFC. Teniendo en cuenta solo la integral definida en el intervalo general de $[0, x\,]$. En la Tabla 32, se muestra el proceso de determinar el área bajo la curva de una función potencia, y como se aplica el TFC en el intervalo definido, y la equivalencia que se mantiene con el área bajo la curva de la función.

Figura 95 Significado asociado al concepto de integral en relación con el TFC.



La modelación matemática de problemas auténticos conlleva a ver la relación entre el concepto de integral y el TFC.

5.4. Modelación y tecnología en el estudio del concepto de integral

La tecnología digital ofrece al estudio del concepto de integral una manera de aproximarse a través del área bajo la curva y el TFC. Actualmente existe un gran interés por el desarrollo de investigaciones que involucran modelación matemática con tecnologías digitales, estas cumplen un rol importante en la obtención, análisis y producción de modelos o validación de estos (Villa-Ochoa, Gonzalez-Gomez y Carmona-Mesa, 2018).

Las tecnologías digitales permiten ver el movimiento involucrado en los conceptos del cálculo. Por ejemplo, en la integral permite ver el proceso de acumulación, que como se vio en los apartados anteriores, lleva a la creación del modelo matemático del concepto.

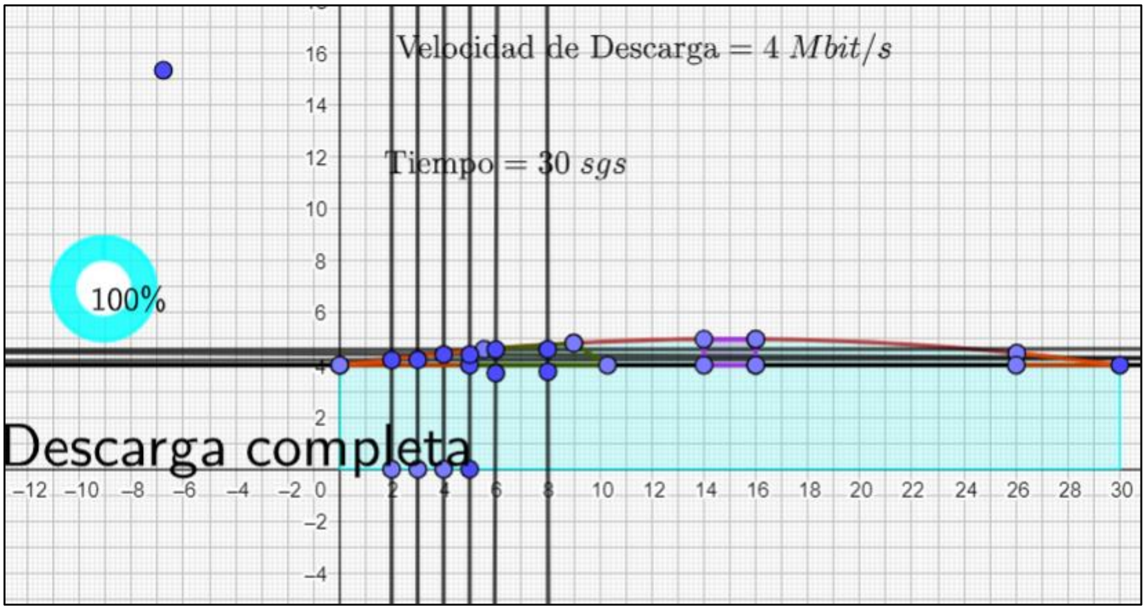
Esta investigación fue realizada durante el periodo de aislamiento preventivo por causa de la propagación del virus COVID-19, razón por la cual se hizo uso de las tecnologías digitales y de programas específicos como lo fueron Microsoft Teams, GeoGebra, Aula Virtual de GeoGebra (AVG) y Microsoft Stream.

El AVG fue clave para la comunicación, el intercambio de información y la recolección de datos. Las actividades fueron diseñadas en esta plataforma y los estudiantes lograron tener un manejo óptimo de la plataforma para compartir sus resultados. El AVG nos permitió conocer los procesos de construcción de los estudiantes realizados en las actividades (Figura 96).

Para el primer problema de descarga de un archivo, los estudiantes debían determinar el área bajo la curva de la función velocidad para poder determinar el tamaño del archivo descargado en un instante de tiempo t. Para lo cual los estudiantes podían abrir las actividades y realizar construcciones sobre ellos, por ejemplo, un estudiante comparte el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/classic/n6euqa7s , en este enlace se encuentra las estrategias que utiliza para determinar el área bajo la curva.

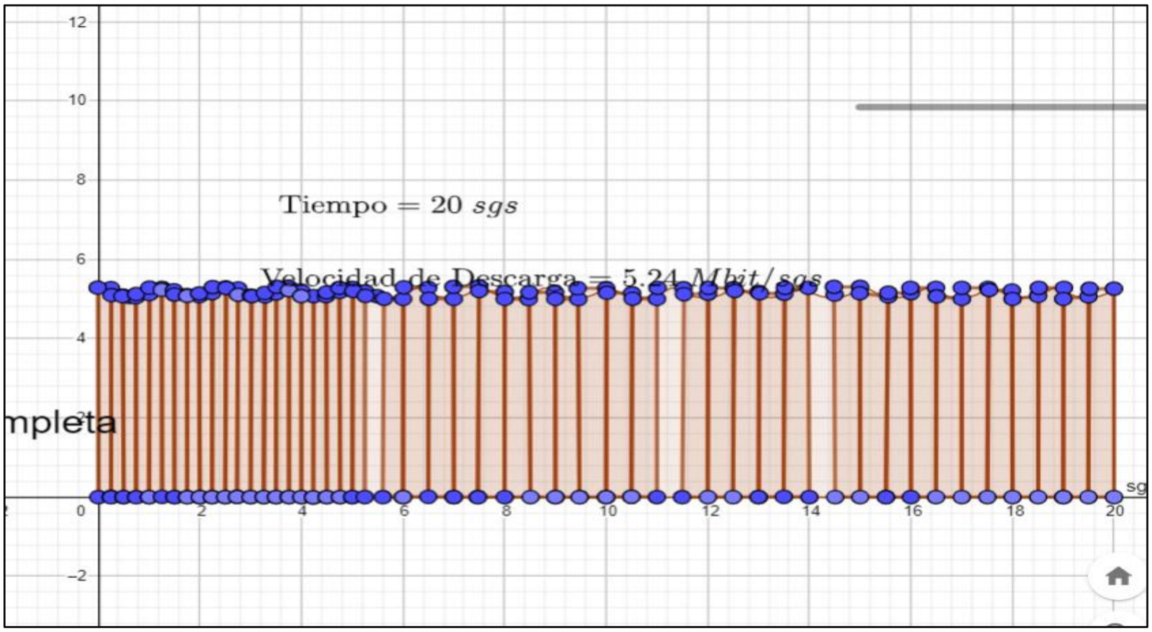
Otro enlace que da a conocer el procedimiento realizado por un estudiante para poder determinar el área bajo la curva de la función es: https://www.geogebra.org/classic/pt4zatdh, la construcción correspondiente a este enlace es la Figura 96. Estos procedimientos no se logran realizar con lápiz y papel, son bastante complicados de realizar y tediosos, los estudiantes no hubiesen podido llegar a encontrar el modelo la integral sin hacer uso de esta tecnología digital.

Figura 96 Modelación y tecnología



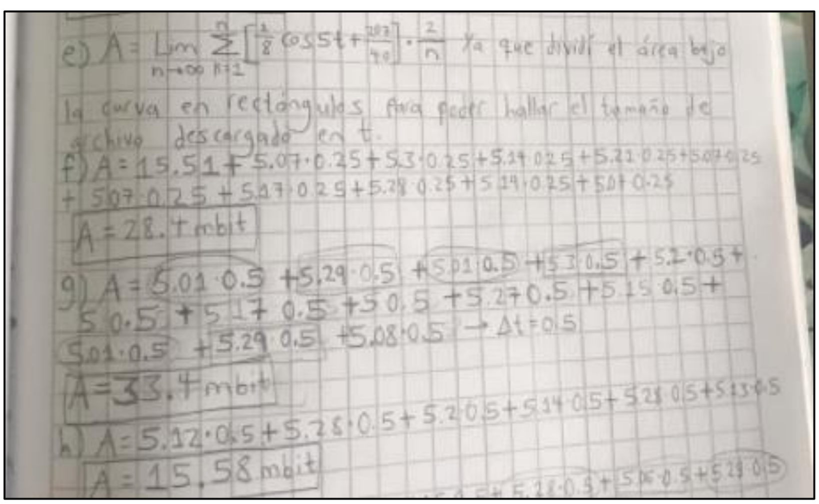
La aproximación a través de rectángulos del área bajo la curva de la función fue una idea brillante que desarrollaron matemáticos ilustres, pero esta idea tomó bastante tiempo cronológico en ser desarrollada, por tanto, la tecnología digital junto a la modelación matemática permitió que los estudiantes realizaran el mismo proceso en un tiempo menor. Por ejemplo, en el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/classic/acvudgz5 (Figura 97) se encuentra la aproximación por rectángulos del área bajo la curva de la función velocidad de descarga. El software proporciona el valor de área y permite que esto no sea un proceso largo y extenso para los estudiantes.

Figura 97 Modelación y tecnología



Valeria intentó realizar los procedimientos a papel y lápiz, realizando la suma de los rectángulos inscritos al área bajo la curva de la función, pero solo lograba hacer una aproximación a través de la suma de Riemann, no lograba que las particiones tendieran a ser cero.

Figura 98 Modelación y tecnología



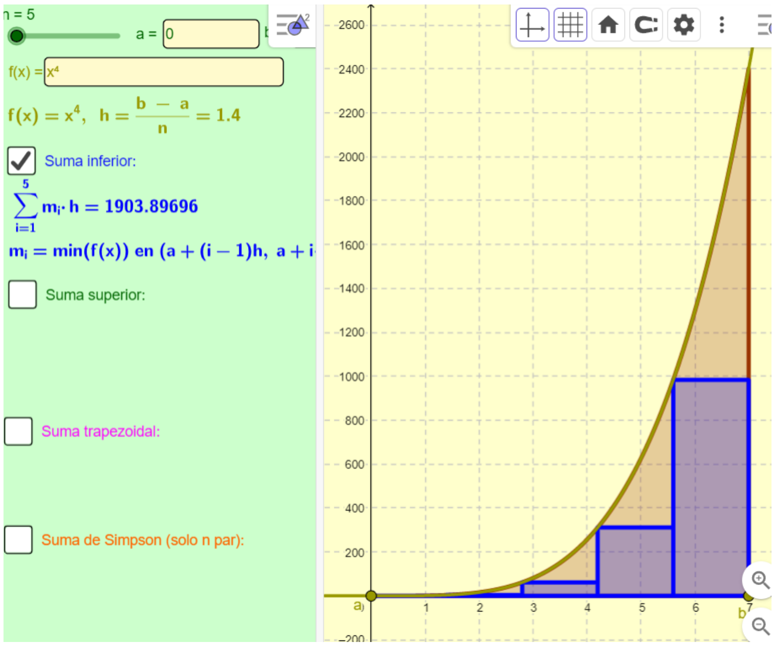
Villa-Ochoa y col. (2018) expresan que las tecnologías cumplen un rol fundamental para posibilitar la modelación de fenómenos, de manera que se pueden cuantificar las cosas y ver la manera en que se acumulan, las tecnologías ayudaron a que los estudiantes lograran ver la manera de aproximarse a los valores.

Como se dio a conocer en el apartado anterior el proceso de acumulación fue importante para el acercamiento que tuvieron los estudiantes al concepto de integral. En el segundo problema de comportamiento de trasmisión de un virus, determinar la cantidad de fallecidos hasta determinado día, se debía determinar la función para encontrar la antiderivada o para calcular el área bajo la curva de la función.

Uno de los enlaces compartidos por una estudiante es: https://www.geogebra.org/classic/zqreuc4d, sin la ayuda del software, quizás los estudiantes no hubiesen podido llegar a la solución del problema y no modelar el problema auténtico.

Diana, compartió un enlace, en el que encontró recursos digitales, de cómo determinar el área bajo la curva de la función, el enlace es: https://www.geogebra.org/classic/ajv4zdrn. Este recurso didáctico, ayudó a que Diana logrará construir su modelo para el concepto de integral y atribuir el significado de área bajo la curva. En el recurso didáctico, se lograba obtener la suma superior, la suma trapezoidal y la suma de Simpson.

Figura 99 Modelación y tecnología



El modelo SIR, incluye el uso de ecuaciones diferenciales, los estudiantes tuvieron un empoderamiento de su aprendizaje y gracias a las tecnologías digitales los estudiantes encontraron recursos bibliográficos, por ejemplo, Diana comparte el siguiente enlace: http://departamento.us.es/edan/php/asig/GRABIO/GBM/Tema5.pdf , en este se explica las ecuaciones diferenciales y se definen. Este recurso bibliográfico permitió que todos lograran tener un acercamiento a las ecuaciones diferenciales.

En el tercer problema auténtico, sobre la modelación del área bajo la curva de una función potencia, no se hubiese podido llegar al planteamiento de la regla de integración sin el uso de la tecnología digital. Los estudiantes a través del AVG, compartieron enlaces como: https://www.geogebra.org/classic/v4rp2cv3, https://www.geogebra.org/classic/dudtxrsq y https://www.geogebra.org/classic/dudtxrsq; en los cuales se veía la aproximación al área bajo la curva, utilizando otros métodos de aproximación.

La razón proporcionada entre el área bajo la curva y el área del rectángulo ($\frac{1}{n+1}$), no se logra visualizar a lápiz y papel, se debe aprovechar los recursos tecnológicos que han ido mejorando cada vez más. La comprensión del proceso de acumulación en el estudio del concepto de integral incluye la idea de sumar infinitas cantidades y esta suma se logra a través del uso de tecnología digital.

Figura 100 Modelación y tecnología

En la Figura 100, se logra ver, que, a través de compartir pantalla con los estudiantes, se podía dar a conocer el procedimiento individual y una exploración grupal hacia el modelo que representa la situación. De esta manera los estudiantes pueden visualizar con movimiento los conceptos del cálculo y pasar de diferentes representaciones de un concepto en un mismo instante.

6. Conclusiones

En el trabajo realizado con los estudiantes seleccionados Valeria (V), Diana (Di), Camilo (C) y Daniel (D), en relación con las actividades propuestas, se evidencia desde el análisis de estas, el proceso de modelación matemática en términos de Villa-Ochoa y col. (2009). Este proceso permitió reconocer algunas contribuciones al estudio del concepto de integral.

En el capítulo anterior se presentaron evidencias de los procesos de los estudiantes que, desde un inicio intentan encontrar un modelo matemático para determinar el área bajo la curva de una función. Se logró validar el modelo mediante la entrevista estructurada, el uso de las tecnologías digitales y las interacciones en grupo, las cuales permitieron que ellos analizaran el área bajo la curva y lograran ver el proceso de acumulación.

Las conclusiones de la presente investigación se exponen en dos secciones en las que se muestra; en primer lugar, el contraste entre los modelos matemáticos planteados en la entrevista estructurada y los emergentes y, en segundo lugar, se presentan las perspectivas para futuras investigaciones.

6.1. Modelación matemática de problemas auténticos como desencadenador de modelos para el estudio del concepto de integral

A partir de los resultados encontrados en las diferentes secciones del capítulo anterior, se reconocen modelos matemáticos creados por los estudiantes para resolver las actividades que involucraban el concepto de integral.

6.1.1. Modelos matemáticos para el concepto de integral como área bajo la curva

En el diseño de la investigación, se plantearon modelos matemáticos que podían surgir como respuesta a las actividades planteadas en los tres problemas auténticos. A partir de los resultados encontrados en las diferentes secciones se reconoce que el modelo más utilizado por los estudiantes es el de área bajo la curva de una función.

En la Tabla 6, se da a conocer el modelo matemático que podían llegar a plantear los estudiantes $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t}$**,** pero el modelo planteado en el desarrollo del problema auténtico de descarga de un archivo fue la $T = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V(t_i)\Delta t_i$.

La construcción del modelo por parte de los estudiantes resaltó los beneficios de utilizar problemas auténticos, la idea de realidad o contexto en este tipo de actividades puede utilizarse en el aula para las prácticas profesionales.

Estos problemas auténticos también permiten interpretar los resultados que se desprenden de las actividades realizadas y evaluar si el resultado matemático da solución al problema en el contexto del mundo real.

Villa-Ochoa (2015) informó que estos problemas son uno de los principales recursos que utilizan algunos profesores para ejemplificar las conexiones de las matemáticas con la “realidad”.

En el segundo problema del comportamiento de trasmisión de un virus, se esperaba los modelos planteados en la Tabla 12, entre estos, $\int_0^t \frac{285}{(x-51)^2+1}\,dx$ y $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(t_i)\Delta t$; que fueron planteados por los estudiantes.

Existe un interés por estudiar el modelo matemático, por el significado que puede dar para un estudiante y los procesos de aprendizaje que implica la construcción de un modelo matemático, esto se deja para futuras investigaciones. Sin embargo, se logró a través de los modelos matemáticos que los estudiantes lograran construir el modelo de integral como área bajo la curva de una función. Esto como punto importante de partida hacia una abstracción del concepto de integral.

6.1.2. Modelos matemáticos para el concepto de integral en relación con el TFC

Como lo menciona Robles, Tellechea y Font (2014), el TFC es la articulación entre dos procesos importantes, el de acumulación y el de la variación. El concepto de integral es fundamental para el desarrollo de este teorema.

En esta investigación, los estudiantes recurrieron a la integral definida para evitar realizar la aproximación del área bajo la curva con extensos procedimientos, como se evidenció en el apartado anterior. Un ejemplo, es el problema de la modelación del área bajo la curva de una función potencia; en esta modelación los estudiantes encontraron varias formas de determinar la integral definida haciendo uso del TFC. Surge como resultado por parte de los estudiantes encontrar la antiderivada a la función $f(x) = x^n$

Consideramos que los problemas auténticos pueden orientar un desarrollo en el estudio del concepto de integral, ya que permite que los estudiantes se involucren en la producción de representaciones matemáticas de las situaciones en contexto y así obtener una imagen más amplia de las relaciones entre la matemática y la vida cotidiana.

6.2. La influencia de los problemas auténticos al estudio del concepto de integral

Los problemas auténticos tienen la característica de estar relacionados con el contexto de los estudiantes, esto en la investigación desencadenó múltiples ideas y propuestas para modelar mediante relaciones matemáticas; lo anterior, otorgó un papel a los estudiantes de empoderamiento de su aprendizaje.

En nuestro caso, encontrar el tamaño de un archivo en un instante de tiempo t, determinar la cantidad de personas que fallecen y se recuperan por el contagio de un virus y modelar el área bajo la curva de una función potencia, pueden considerarse como instrumentos que posibilitan el estudio del concepto de integral.

Abordas problemas auténticos, como punto de partida en la enseñanza, posibilitaría el desarrollo de capacidades de interpretación y modelación matemática en los estudiantes de forma natural. Por otra parte, cuando se crean necesidades en los estudiantes relacionados con la vida fuera de la escuela los conceptos matemáticos entran a jugar un papel importante en su diario vivir.

6.3. Perspectivas para futuras investigaciones

Esta investigación, no solo pretende aportar elementos teóricos para el estudio del concepto de integral, sino que también como propuesta que facilite el entendimiento de la integral como área bajo la curva de una función utilizando la acumulación. Como punto de partida hacia una abstracción del concepto de integral, se invita a continuar con las investigaciones en la línea de la Educación Matemática en la que permita ampliar y complementar la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo integral.

Se sugiere diseñar ambientes que promuevan que los estudiantes se enfrenten a experiencias de modelación con tecnologías digitales en el desarrollo de la comprensión del concepto de integral. Como se evidenció es fundamental para que los estudiantes visualicen el proceso de acumulación.

Los problemas auténticos pueden verse como un puente entre lo que tiene sentido en el contexto del estudiante con lo abstracto y las representaciones simbólicas matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anaya, I. J. J., Leal, J. E. F., & Rico, S. E. P. (2019). Matematización del Teorema Fundamental del Cálculo en el nivel referencial, con el uso de tecnologías digitales. *Revista de Experiencias Didácticas e Investigación en Educación Matemática, 1*(1), 100-103.

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. Revista Iberoamericana de educación, 43, 85-101.

Aranda López, M. D. C. (2015). Análisis de la construcción del concepto de integral definida en estudiantes de bachillerato.

Barbosa, J. (2009). Mathematical modelling, the socio-critical perspective and the reflexive discussions. Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics, 133-144

Bossio, L., Londoño, S. M., & Jaramillo, C. M. (2013). Modelación matemática en el aula clase: una producción de modelos lineales desde el contexto del cultivo de plátano.

Bonotto, E. M. (2007). Flows of characteristic 0+ in impulsive semidynamical systems. Journal of mathematical analysis and applications, 332(1), 81-96.

Borromeo Ferri, R., Leiss, D., & Blum, W. (2006). Der Modellierungskreislauf unter kognitionspsychologischer Perspektive. Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling: a theory for practice. In International perspectives on learning and teaching mathematics (pp. 145-159). National Center for Mathematics Education.

Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?. Journal of mathematical modelling and application, 1(1), 45-58.

Blum, W., & Leiss, D. (2007). Deal with modelling problems. Mathematical modelling: Education, engineering and economics-ICTMA, 12, 222.

Brito-Vallina, M. L., Alemán-Romero, I., Fraga-Guerra, E., Para-García, J. L., & Arias-de Tapia, R. I. (2011). Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. Ingeniería Mecánica, 14(2), 129-139.

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. (2016). Teaching and learning of calculus. Springer Nature.

Cetina, M. (2015). Proceso de Matematización de situaciones de variación en el marco de la función cuadrática. Un estudio de caso en bachillerato (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Guerrero Centro de Investigación en Matemática Educativa, Chilpancingo.

Chamizo Guerrero, J. A., & García Franco, A. (2010). Modelos y modelaje en la enseñanza de las ciencias naturales.

Corberán, R. M. (1996). Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad.

Cordero, F. (1991a). Taking a differential element: its formation and meaning in the Didactic Discourse of Calculus. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 22 (6), 869-872.

Cordero, F. (1991b). Understanding the integration concept by the teacher of engineering schools. In R. Underhill (Ed.), Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (1), 91-97. Blacksburg, Virginia, USA: Virginia Tech.

Cordero, F. (1992) Una base de significados en la enseñanza de la matemática avanzada.

Cordero, F. (1992). The idea of variation and the concept of the integral in engineering students: situations and strategies. In W. Geeslin and K. Graham (Eds.). Proceedings of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (3), 153. Durham, NH, USA: University of New Hampshire.

Cordero, F. (1992). Una base de significados en la enseñanza de la matemática avanzada. Memorias de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e Investigación en Matemática Educativa, Cuernavaca, México.

Cordero, F. (2003). Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación. México: Grupo Editorial Iberoamérica

CRUZ HUERTAS, J.; MEDINA CASTAÑEDA, Y. Funciones en contexto. Una experiencia enriquecida en la modelación y simulación interactiva. Sistemas & Telemática, v. 11, n. 26, p. 59– 80, 2013.

Doerr, H. M., & Pratt, D. (2008). The learning of mathematics and mathematical modeling. Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Research syntheses, 1, 259-285.

Gutiérrez, L., Ariza, L. M., & Mujica, J. A. J. (2014). Estrategias didácticas en el uso y aplicación de herramientas virtuales para el mejoramiento en la enseñanza del cálculo integral. Revista academia y virtualidad, 7(2), 64-75.

Fiallo, J, E, & Parada, S, E, (2018). Estudio dinámico de la variación y el cambio. Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Giménez, J., Díez, J. y Civil, M. (2007). Exclusión y matemáticas. Elementos que explican la investigación actual en el área. En U. D'Ambrosio, P. López, G.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, taskbased interviews in mathematics education research. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education. N.J: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., capítulo 19, 517 – 544

Gutiérrez, L., Ariza, L. M., & Mujica, J. A. J. (2014). Estrategias didácticas en el uso y aplicación de herramientas virtuales para el mejoramiento en la enseñanza del cálculo integral. Revista academia y virtualidad, 7(2), 64-75.

Heuvel, M. (2003). The didactical use of models in Realist in Mathematics Education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. Educational Studies in Mathematics, 54(1), 9–35.

Henao, S. M., & Vanegas, J. (2012). La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción y uso de modelos cuadráticos.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. Educación Matemática, 10(2), 23-45.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN; Département de Mathématiques, Université du Québec à Montréal.

Hitt, F. y Morasse, C. (2009). Pensamiento Numérico-Algebraico Avanzado: Construyendo el Concepto de Covariación como preludio al concepto de función. Electronic Journal of Research in Educational Psychology , 243-260.

Jácome, I. (2019). *Matematización del Teorema Fundamental del Cálculo con el uso de tecnologías digitales* (Tesis de Maestría) Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Santander.

Julie, C., & Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. In Modelling and applications in mathematics education (pp. 503-510). Springer, Boston, MA.

Jiménez, J. R. (2019). Un acercamiento dinámico a la integral desde un punto de vista variacional: funciones aproximadas de acumulación. AMIUTEM, 7(1), 44-65.

Kouropatov, A. (2008). Approaches to the integral concept. The case of high school calculus. Consultado en línea en Junio de 2016 en http://www.yess4.ktu.edu.tr/YermePappers/AnatoliKouropatov.pdf.

Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In G. Graumann et al. (Eds.), Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht (pp. 66-84). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. Zdm, 38(3), 302-310.

Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education—examples and experiences. Journal für Mathematik-Didaktik, 31(1), 51-76.

Londoño, R. A. (2011). La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren (Doctoral dissertation, Universidad de Antioquia).

Londoño, S. y Muñoz, L. (2011) La modelación Matemática: Un Proceso para la Construcción de Relaciones Lineales entre dos Variables (Tesis de Maestría) Universidad de Antioquia, Medellín

Morales Martín, L. Y., Gutiérrez Mendoza, L., & Ariza Nieves, L. M. (2016). Guía para el diseño de objetos virtuales de aprendizaje (OVA). Aplicación al proceso enseñanza-aprendizaje del área bajo la curva de cálculo integral. Revista Científica General José María Córdova, 14(18), 127-147.

Molina-Toro, J. F., Villa-Ochoa, J. A., & Téllez, L. S. (2018). La modelación en el aula como un ambiente de experimentación-con-graficación-y-tecnología. Un estudio con funciones trigonométricas. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 11(1), 87-115.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-Relime, 3(2), 131-170.

Muñoz, G. (2010). Hacia un campo de prácticas sociales como fundamento para rediseñar el discurso escolar del cálculo integral . Revista Latinoamericana de Matematica Educativa-Relime , 283-302.

Olave, M. (2013). UN ESTUDIO SOBRE LAS ESTRATEGIAS DE LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO AL ENFRENTARSE AL CÁLCULO DEL ÁREA BAJO UNA CURVA (Doctoral dissertation).

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. Educational studies in mathematics, 14(3), 235-250.

Peña Marin, C. A. (2015). La Integración Numérica como recurso para el cálculo de la integral definida. Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

Peña-Páez, L. M., & Morales-García, J. F. (2016). La modelación matemática como estrategia de enseñanza-aprendizaje: El caso del área bajo la curva. Revista Educación en Ingeniería, 11(21), 64-71.

Rojas, P. J. (2012). Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos (Doctoral dissertation, Tesis doctoral no publicada, Bogotà, Colombia, Universidad Distrital Francisco José de Caldas).

Robles, M., Tellechea, E., & Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo . Educación Matemática ,26(2), 69-104.

ROZAL, E. F. Modelagem matemática na educação básica: um olhar sobre os conhecimentos que emergem em experiências vivenciadas pelos estudantes. Teses (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática). Universidad Federal do Mato Grosso (UFMT)-Universidad Estadual da Amazônia - (UEA)- Universidad Federal do Pará -(UFPA). 2017

Tall, D., & Sheath, G. (1983). Visualizing higher level mathematical concepts using computer graphics. In *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 357-362).

Tejero, J. F. (2015). Exploración del cálculo integral desde el contexto de la geometría dinámica.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. Educational Studies in Mathematics, 26, 275-298.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2007). The Concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics (pp. 117-131). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Ustra, M. K., & Ustra, S. R. V. (2015). Context categories in mathematical modelling in fundamentals of calculus teaching. In Mathematical Modelling in Education Research and Practice (pp. 407-416). Springer, Cham.

Vazquez, C., & Guadalupe, M. (2015). Proceso de matematización de situaciones de variación en el marco de la función cuadrática. Un estudio de caso en bachillerato (Master's thesis, Universidad Autónoma de Guerrero (México)).

Villa, J. y Ruiz, M. (2009). Modelación en Educación Matemática. Una mirada desde los Lineamientos y Estándares Curriculares Colombianos. Revista Virtual-Universidad Católica del Norte (27), 1-21.

Villa, J., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, J., y Ocampo, D. (2009). Sentido de realidad y modelación matemática. El caso de Alberto. ALEXANDRIA. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2 (2), 159-180.

Villa, J. (2010). Modelación Matemática en el aula de clase. Algunos elementos para su implementación. Conferencia presentada en el primer seminario de Educación Matemática, Historia y Entomatemáticas, (21 de octubre de 2010). Universidad de Medellín, Medellín.

Villa, J. (2013). Miradas y actuaciones sobre la modelación matemática en el aula de clase. Artículo presentado en la VIII Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática (pp. 1–8). Santa Maria, Brasil.

Villa-Ochoa, J., Castrillón-Yepes, A., & Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. Espaço Plural, 18(36), 219-251.

Villa,J., Gonzalez, D. y Carmona, J. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en matemáticas, Formación Universitaria, 11(2), 25-34. Doi: 10.4067/S0718-50062018000200025.

Villa, J. y Alencar, E. (2019). Un panorama de investigaciones sobre modelación matemática en Colombia y Brasil. Revista de Educação Matemática, 16(21), 18-37. DOI: 10.25090/remat25269062v16n212019p18a37

Zill, D. G., Wright, W. S., Velázquez, Y. V., Roij, S. B., & Hernández, K. R. Z. (2011). Cálculo: trascendentes tempranas. McGraw-Hill Interamericana.