Los números Eulerianos y la ecuación de Riccati

Yulieth Alexandra Gutiérrez Carrillo

Trabajo de Grado para optar al título de Matemática

Director

Michael Alexander Rincón Villamizar

Doctor en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2020

Dedicatoria

Dedicado a mis padres, Claudia y Orlando.

Agradecimientos

⋆ *A Dios por haberme permitido estudiar esta carrera.*

⋆ *A mis padres, quienes me dieron la motivación y el apoyo que necesitaba para terminar mis estudios.*

⋆ *Al profesor Ph. D. Michael Alexánder Rincón Villamizar, director de este proyecto, por su dedicación, tiempo y aportes, que siempre me ayudó a crecer como persona y superarme como profesional.*

⋆ *A Marcela, por ser esa amiga incondicional, Natalia, por ser la mejor compañera de clase, Melissa por los momentos compartidos y Ricardo por brindarme su amistad y cariño.*

Tabla de Contenido

Lista de Tablas

Resumen

Título: Los números Eulerianos y la ecuación de Riccati *

Autor: Yulieth Alexandra Gutiérrez Carrillo **

Palabras Clave: números Eulerianos, polinomios Eulerianos, ecuación de Riccati.

Descripción: Los números Eulerianos fueron introducidos por el matemático Leonhard Euler en su obra *Institutiones calculi differentialis* [Euler, 1755] con el fin de encontrar un valor explícito para la suma alternada de la n-ésima potencia de los primeros m enteros positivos.

En términos de la combinatoria, el número Euleriano $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ es definido como el número de permutaciones del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ que tienen exactamente k descensos. Estos números aparecen en distintas ramas de la matemática e.g. conjuntos parcialmente ordenados, complejos simpliciales, grupos de Coxeter, entre otras (véase [Petersen, 2015]).

En este trabajo se presentan los números Eulerianos desde una perspectiva analítica. Se estudian algunas de sus propiedades y se muestra una conexión que tienen estos con la ecuación diferencial de Riccati con coeficientes constantes. El trabajo consta de tres capítulos. En el primero se presentan algunas definiciones y teoremas que ayudarán a demostrar propiedades y aplicaciones de los números Eulerianos. En el Capítulo 2 se introduce la definición combinatoria de los números Eulerianos. A partir de esto, se introducen también los polinomios eulerianos y se prueban algunos resultados que serán claves para la obtención de una fórmula para la suma alternada mencionada aquí. Por último, se mostrará una conexión entre los números Eulerianos y la ecuación diferencial de Riccati con coeficientes constantes, y se darán aplicaciones de este resultado.

---

* Trabajo de grado

** Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Michael Alexánder Rincón Villamizar. Doctor en Matemáticas

Abstract

Title: The Eulerian Numbers and Riccati Ecuation *

Author: Yulieth Alexandra Gutiérrez Carrillo **

Keywords: Eulerian numbers, Eulerian polynomials, Riccati ecuation.

Description: Eulerian numbers were introduced by the great mathematician Leonhard Euler in his famous book *Institutiones calculi differentialis* [Euler, 1755] in order to obtain an explicit value for the alternating sum of the nth powers of the first m positive integers.

In a combinatorial way, the Eulerian number $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ is the number of permutations of $\{1,\ldots,n\}$ with k descents. Eulerian numbers arises in different areas of Mathematics such as partially ordered sets, simplicial complexes, Coxeter groups, among others (see [Petersen, 2015]).

In this work, Eulerian numbers are presented from an analytical perspective. Some of its properties are studied and a connection that these have with the Riccati differential equation with constant coefficients is shown.

The document is divided into three chapters. In first one, in order to prove properties and applications of Eulerian numbers, some definitions and theorems are presented. In Chapter two, combinatorial definition of Eulerian numbers is introduced. Also, Eulerian polynomials are defined and some results are proved; these ones will be key to obtaining a formula for the alternate sum mentioned here. Finally, an important relation between Eulerian numbers and the Riccati differential equation with constant coefficients is proved. As a consequence of these relation, applications will be given.

---

* Bachelor Thesis

** Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Michael Alexánder Rincón Villamizar. Doctor en Matemáticas.

Introducción

En el año 1755, el prolífico matemático Leonhard Euler estudió el problema de encontrar una fórmula para la suma

$$-1^n + 2^n - 3^n + \cdots + (-1)^m m^n = \sum_{k=1}^{m} (-1)^k k^n. \tag{1}$$

A fin de solucionar el problema, Euler introduce una sucesión de polinomios $(A_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ conocida hoy día como *polinomios Eulerianos* en su famosa obra *Institutiones Calculi Differentialis* [Euler, 1755]. El *número Euleriano* $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ es definido como el coeficiente de la potencia z^k del polinomio $A_n(z)$. Aparentemente, esta definición no muestra relación con la combinatoria. Sin embargo, MacMahon dio una interpretación combinatoria de los números Eulerianos. Antes de enunciar este resultado, recordemos que dado un conjunto A, una permutación de A es una biyección de A en A. Si $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de permutaciones del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ es denotado por S_n. Sea $w = (w_1 w_2 \cdots w_n) \in S_n$, diremos que $j \in \{1,\ldots,n\}$ es un *descenso* de w si $w_j > w_{j+1}$. En [MacMahon, 1960], demuestra que el número Euleriano $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ corresponde al número de biyecciones del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ que tienen exactamente k descensos.

Estos números aparecen en diversos tópicos de las Matemáticas: conjuntos parcialmente ordenados, grupos de Coxeter, complejos simpliciales, politopos convexos, entre otros [Petersen, 2015].

En 2008, Grzegorz Rządkowski en su artículo [Rzadkowski, 2008] mostró una conexión entre los números Eulerianos y la ecuación diferencial de Ricatti con coeficientes constantes dada por $X'(t) = aX(t)^2 + bX(t) + c$ donde a, b y c son reales o complejos y $a \neq 0$. El resultado de Rządkowski establece que si $X(t)$ es una función que satisface la ecuación de Riccati y r_1, r_2 son las raíces (reales o complejas) del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$, entonces

$$X^{(n)}(t) = a^n \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle (X(t) - r_1)^{k+1} (X(t) - r_2)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

donde $X^{(n)}(t)$ denota la n-ésima derivada de $X(t)$. Como aplicación de (2), Rządkowski establece la siguiente relación entre los números de Bernoulli B_{2m} y los números Eulerianos:

$$B_{2m} = \frac{2m}{2^{2m}(2^{2m} - 1)} \sum_{k=0}^{2m-2} (-1)^k \left\langle {2m-1 \atop k} \right\rangle, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

El objetivo de este trabajo es estudiar los números Eulerianos y algunas de sus propiedades. Probaremos el resultado (2) y mostraremos las consecuencias de éste. En particular, daremos la prueba de la ecuación (3). El trabajo consta de tres capítulos. En el primero presentamos algunas definiciones y teoremas que ayudarán a demostrar propiedades y aplicaciones de los números Eulerianos. En el Capítulo 2 introducimos el concepto combinatorio de número Euleriano y presentamos algunos resultados que serán claves para la demostración de la suma dada en (1). Por último, mostramos una conexión entre los números Eulerianos y la ecuación diferencial de Riccati con coeficientes constantes y damos aplicaciones de este resultado.

1. Preliminares.

Para el desarrollo de este trabajo utilizaremos definiciones, notaciones y resultados tomados de [Conway, 2012], [Apostol, 1996], [Petersen, 2015] y [Rzadkowski, 2008] los cuales ayudarán a estudiar los números Eulerianos y algunas de sus propiedades.

1.1. Series

En esta sección vamos a enunciar resultados sobre series con el propósito de obtener el desarrollo de Taylor para la función tangente hiperbólica. Comenzamos dando unas definiciones que serán útiles para el desarrollo de este trabajo.

Definición 1.1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in U$ y $f\colon U \to \mathbb{C}$. Diremos que f es *holomorfa* en z_0, si existe el limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} := f'(z_0).$$

Diremos que f es *holomorfa* en U, si f es holomorfa en cada $z_0 \in U$. El conjunto de funciones holomorfas en U se denotará por $H(U)$.

Definición 1.2. Sea $f \in H(U)$. La *serie (o desarrollo) de Taylor* para la función f en el punto $a \in U$ está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

Definición 1.3. Sea $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$. La serie $\sum c_n(z-z_0)^n$ es llamada *serie de potencias.*

Definición 1.4. Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f\colon U \to \mathbb{C}$. Diremos que *f tiene desarrollo de serie de potencias en U* si dado $z_0 \in U$, existe $r > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad \text{para cada } z \in B(z_0, r) \subset U.$$

Observación 1.5. Es conocido que $f \in H(U)$ si, y sólo si, f admite desarrollo en serie de potencias en U (ver [Conway, 2012]).

Definición 1.6. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$, el *producto de Cauchy* es definido por

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad \text{donde} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Teorema 1.7. *Dados dos desarrollos en serie de potencias en torno del origen,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{si} \quad z \in B(0, r)$$

y

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad \text{si} \quad z \in B(0, R).$$

El producto $f(z)g(z)$ *viene dado por la serie de potencias*

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \text{si} \quad z \in B(0,r) \cap B(0,R),$$

donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Demostración. Veáse [Apostol, 1996, Teorema 9.24]. □

Proposición 1.8. *Sean* $U \subset \mathbb{C}$ *abierto y* $f\colon U \to \mathbb{C}$. *Si* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ *para todo* $z \in B(z_0,r) \subset U$ *y radio de convergencia* r, *entonces* $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n (z-z_0)^{n-1}$, *para todo* $z \in B(z_0,r) \subset U$ *y tiene radio de convergencia* r.

Demostración. Veáse [Neto, 1993, Teorema 8] □

Proposición 1.9.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+n-k}{n} z^m = \frac{z^k}{(1-z)^{n+1}}, \quad |z| < 1.$$

Demostración. Veáse [Quaintance, 2015, página 17]. □

Proposición 1.10 (*Principio de Identidad*)**.** *Sea* $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *y* $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, *series de potencias con radios de convergencia* $\rho_1, \rho_2 > 0$ *respectivamente. Supongamos que existe* $r \leq \min\{\rho_1, \rho_2\}$ *tal que* $F(z) = G(z)$ *para todo* $z \in B(0,r)$. *Entonces* $a_n = b_n$ *para todo* $n \geq 0$.

Demostración. Veáse [Neto, 1993, Corolario 3, página 79]. □

Proposición 1.11.

$$Log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1.$$

Demostración. Veáse [Neto, 1993, Teorema 18]. □

Teorema 1.12. *Si* $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |f(m,n)|$ *es convergente, entonces*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f(m,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f(m,n).$$

Demostración. Ver [Apostol, 1996, Teorema 8.43]. □

Teorema 1.13. *Un producto infinito* $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$ *con* $\mathfrak{Re}(z_n) > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *es convergente a un número no nulo si, y solo si, la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} Log(z_n)$ *es convergente. En tal caso, la serie es el logaritmo del producto.*

Demostración. Veáse [Conway, 2012, página 165]. □

Teorema 1.14. *Para todo* $z \in \mathbb{C}$ *tenemos que*

$$\sin z = z\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \quad y \quad \cos z = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right),$$

y la convergencia es uniforme sobre cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

Demostración. Veáse [Conway, 2012, páginas 175 y 176.]. □

Proposición 1.15.

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} S_{2k}}{\pi^{2k} 2^{2k-1}} z^{2k}, \quad |z| < 2\pi,$$

donde $S_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que $|z| < \pi$, entonces todos los factores del producto de la función *seno* tienen parte real positiva. Por el Teorema 1.13 tenemos

$$Log\left(\frac{\sin z}{z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} Log\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),$$

y la convergencia es uniforme en cada subconjunto compacto de la bola con centro en el origen y radio π. Por la Proposición 1.11 tenemos que

$$-Log\left(\frac{\sin z}{z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}} \frac{1}{k}.$$

Observe que la serie converge absolutamente. Sigue del Teorema 1.12 que

$$-Log\left(\frac{\sin z}{z}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{2k}}{k\pi^{2k}} z^{2k}, \quad \text{donde} \quad S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k},$$

y la convergencia es uniforme en cada subconjunto compacto de la bola con centro en el origen y radio π. Ahora de la Proposición 1.8 sigue que

$$\cot z = \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2S_{2k}}{\pi^{2k}} z^{2k-1}, \quad |z| < \pi. \tag{4}$$

Por otro lado, $\cot z = i\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}$,

$$\begin{aligned} i\cot iz/2 &= \frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}} \\ &= \frac{e^z+1}{e^z-1} \\ &= \frac{e^z-1+2}{e^z-1} \\ &= 1+\frac{2}{e^z-1}. \end{aligned}$$

Si $|z| < 2\pi$, de (4) encontramos que

$$1+\frac{2}{e^z-1} = i\cot iz/2 = \frac{2}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k S_{2k}}{\pi^{2k}2^{2k-2}} z^{2k-1}.$$

Multiplicando por $z/2$ obtenemos

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} S_{2k}}{\pi^{2k}2^{2k-1}} z^{2k}. \qquad \square$$

La proposición anterior motiva la siguiente definición:

Definición 1.16. La sucesión de números de Bernoulli $\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ es definida como la sucesión de coeficientes del desarrollo en serie de potencias alrededor del origen de la función $G(z) = \frac{z}{e^z - 1}$, esto es,

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!} = \frac{z}{e^z - 1}, \quad |z| < 2\pi. \tag{5}$$

La Tabla 1 muestra los primeros términos de la expansión de la serie, donde $B_k = 0$ para todo k impar distinto de 1.

Tabla 1
Números de Bernoulli B_k, $0 \le k \le 10$.

k	B_k
0	1
1	-1/2
2	1/6
4	-1/30
6	1/42
8	-1/30
10	5/66

Estos números aparecen en el desarrollo en serie de potencias de la función $\tanh z$.

Proposición 1.17.

$$z \coth z = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k} B_{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad |z| < \pi.$$

Demostración. Si $|z| < \pi$, entonces $|2z| < 2\pi$. Ahora,

$$
\begin{aligned}
\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2} &= \frac{z}{2}\left[\frac{2}{e^z-1}+1\right] \\
&= \frac{z}{2}\left[\frac{e^z+1}{e^z-1}\right] \\
&= \frac{z}{2}\left[\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}\right] \\
&= \frac{z}{2}\coth\frac{z}{2}.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, de (5) tenemos

$$\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{z^k}{k!}+\frac{z}{2}.$$

Como $B_1=\dfrac{-1}{2}$ y $B_{2m-1}=0$ para cada $m\in\mathbb{N}$, entonces $\dfrac{z}{e^z-1}+\dfrac{z}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k}\dfrac{z^{2k}}{(2k)!}$.

Así,

$$z\coth z=\sum_{k=0}^{\infty}2^{2k}B_{2k}\frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$ □

Teorema 1.18.

$$\tanh z=\sum_{k=0}^{\infty}2^{2k}\frac{2^{2k}-1}{(2k)!}B_{2k}z^{2k-1},\quad |z|<\frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

Demostración. Si $|z|<\pi/2$, entonces $|2z|<\pi$. Como $2z\coth 2z-z\coth z=z\tanh z$, la Proposición 1.17 implica que

$$\begin{aligned} z\tanh z &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k} B_{2k} \frac{(2z)^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k} B_{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k}(2^{2k}-1) B_{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Así,

$$\tanh z = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k}(2^{2k}-1) B_{2k} \frac{z^{2k-1}}{(2k)!}. \qquad \square$$

1.2. Integrales Hamiltonianas

Hamilton consideró el problema de calcular el valor de la integral

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \cos kt\, dt, \tag{7}$$

siendo n y k parámetros dados (ver [Hamilton, 1843]). Esta familia de integrales se conoce hoy día como *integrales Hamiltonianas*.

En su estudio, Hamilton obtuvo la fórmula para la n-ésima derivada de la función $X(t) = \dfrac{1}{1+e^t}$ en términos de integrales de la forma (7). En esta sección nos encargaremos de mostrar este resultado siguiendo la prueba de [Hamilton, 1843]. Posteriormente en el Capítulo 3, veremos la relación entre las integrales Hamiltonianas y los números Eulerianos.

Definición 1.19. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$, la *integral Hamiltoniana* $(y_{n,k})$, es definida como:

$$y_{n,k} := \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \cos kx \ dx.$$

Note que $y_{n,k} = y_{n,-k}$, pues la función cos es una función par. La colección $\{y_{n,k} : n,k \in \mathbb{N}\}$ es llamada *familia de integrales Hamiltonianas.*

Observación 1.20. Por [Conway, 2012, Ejemplo 2.7, página 115], vemos que $y_{1,1} = \pi/4$ y $y_{1,0} = \pi/2$.

Proposición 1.21. *La sucesión $(y_{n,k})$ satisface la fórmula de recurrencia*

$$2ny_{n+1,k} = (n+1+k)y_{n,k+1} + (n+1-k)y_{n,k-1}, \tag{8}$$

para cada $n,k \in \mathbb{N}$.

Demostración. La estrategia es usar integración por partes. Tenemos

$$y_{n+1,k} = \int_0^\infty (\sin x)^{n+1} x^{-(n+1)} \cos kx \ dx.$$

Utilizando las identidades de suma de ángulos para la función coseno obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin^{n+1}x\cos kx &= (n+1)\sin^{n}x\cos x\cos kx - k\sin^{n+1}\sin kx \\
&= \frac{1}{2}\sin^{n}x\Big[2(n+1)\cos x\cos kx - 2k\sin x\sin kx\Big] \\
&= \frac{1}{2}\sin^{n}x\Big[(n+1+\mathbf{k})\cos x\cos kx + (n+1-\mathbf{k})\cos x\cos kx \\
&+ (\mathbf{n+1}-k)\sin x\sin kx - (\mathbf{n+1}+k)\sin x\sin kx\Big] \\
&= \frac{1}{2}\sin^{n}x\Big[(n+1+k)\left[\cos x\cos kx - \sin x\sin kx\right] \\
&+ (n+1-k)\left[\cos x\cos kx + \sin x\sin kx\right]\Big] \\
&= \frac{1}{2}\sin^{n}x\Big[(n+1+k)\cos((k+1)x) + (n+1-k)\cos((k-1)x)\Big].
\end{aligned}
$$

Note que el término

$$\frac{-\sin^{n+1}x\cos kx}{nx^{n}}$$

se anula cuando $x=0$ y $x=\infty$.

Así,

$$
\begin{aligned}
y_{n+1,k} &= \sin^{n+1}x\cos kx\left[\frac{-x^{-n}}{n}\right]\Bigg|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty}\left[\frac{-x^{-n}}{n}\right]\frac{d}{dx}\sin^{n+1}x\cos kx \\
&= \frac{1}{2n}\int_{0}^{\infty}x^{-n}\sin^{n}x\Big[(n+1+k)\cos((k+1)x) + (n+1-k)\cos((k-1)x)\Big]dx.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$2ny_{n+1,k} = (n+1+k)y_{n,k+1} + (n+1-k)y_{n,k-1}. \qquad \square$$

Observación 1.22. Tomando $k = n+1-2j$ con $j \in \mathbb{Z}$ y aplicando (8) encontramos

$$ny_{n+1,n+1-2j} = (n+1-j)y_{n,n+2-2j} + jy_{n,n-2j}. \tag{9}$$

Definición 1.23. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la función T_n dada por:

$$T_n(t) := \sum_{k=1}^{n-1} y_{n,n-2k}(-t)^k, \quad T_1(t) = \frac{\pi}{4}(1-t).$$

Proposición 1.24. *Para cada $n \in \mathbb{N}, t > 0$ la función T_n satisface la siguiente relación:*

$$n(1+t)^{-n-1}T_{n+1}(t) = \frac{d}{dLogt}(1+t)^{-n}T_n(t).$$

Demostración. Por (9) tenemos que

$$n\sum_{k=1}^{n} y_{n+1,n+1-2k}(-t)^k = n\sum_{k=1}^{n} y_{n,n+2-2k}(-t)^k + \sum_{k=1}^{n}(1-k)y_{n,n+2-2k}(-t)^k + \sum_{k=1}^{n} ky_{n,n-2k}(-t)^k. \tag{10}$$

Aplicando la Definición 1.23 en (10) tenemos

$$\begin{aligned}
nT_{n+1}(t) &= n\sum_{k=1}^{n} y_{n,n+2-2k}(-t)^k + \sum_{k=1}^{n}(1-k)y_{n,n+2-2k}(-t)^k + \sum_{k=1}^{n} ky_{n,n-2n}(-t)^k \\
&= -nt\sum_{k=1}^{n} y_{n,n+2-2k}(-t)^{k-1} + t^2\sum_{k=1}^{n}(1-k)y_{n,n+2-2k}(-t)^{k-2} + t\sum_{k=1}^{n}(-k)y_{n,n-2k}(-t)^{k-1} \\
&= -nt\sum_{k=0}^{n-1} y_{n,n-2k}(-t)^k + t^2\sum_{k=0}^{n-1}(-k)y_{n,n-2k}(-t)^{k-1} + t\sum_{k=1}^{n}(-k)y_{n,n-2k}(-t)^{k-1} \\
&= -ntT_n(t) + (1+t)t\frac{d}{dt}T_n(t) \\
&= (1+t)^{n+1}t\frac{d}{dt}(1+t)^{-n}T_n(t).
\end{aligned}$$

Concluimos

$$n(1+t)^{-n-1}T_{n+1}(t) = t\frac{d}{dt}(1+t)^{-n}T_n(t). \tag{11}$$

Note que

$$t\frac{d}{dt}(1+t)^{-n}T_n(t) = \frac{d}{dLogt}(1+t)^{-n}T_n(t). \tag{12}$$

En efecto, sea $\phi(t) = (1-t)^{-n}T_n(t)$, por la regla de la cadena se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dLogt}\phi(t) &= \frac{d\phi(t)/dt}{dLogt/dt} \\
&= \frac{d\phi(t)/dt}{1/t} \\
&= t\frac{d\phi(t)}{dt}.
\end{aligned}$$

De (11) y (12)

$$n(1+t)^{-n-1}T_{n+1}(t) = \frac{d}{dLogt}(1+t)^{-n}T_n(t). \qquad \square$$

Proposición 1.25. *Para cada $n \in \mathbb{N}$*

$$T_n(t) = \frac{\pi}{4}\frac{(1+t)^n}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dLogt}\right)^{n-1}\frac{1-t}{1+t}.$$

Demostración. Por la Observación 1.20 tenemos que

$$T_1(t) = y_{1,1} - y_{1,-1}t = \frac{\pi}{4}(1-t).$$

Supongamos que

$$T_n(t) = \frac{\pi}{4}\frac{(1+t)^n}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dLogt}\right)^{n-1}\frac{1-t}{1+t}.$$

Veamos que

$$T_{n+1}(t) = \frac{\pi}{4}\frac{(1+t)^{n+1}}{n!}\left(\frac{d}{dLogt}\right)^{n}\frac{1-t}{1+t}.$$

De la Proposición 1.24 tenemos

$$T_{n+1}(t) = \frac{(1+t)^{n+1}}{n}\frac{d}{dLogt}(1+t)^{-n}T_n(t).$$

Por la hipótesis de inducción concluimos que

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(t) &= \frac{(1+t)^{n+1}}{n}\frac{d}{dLogt}(1+t)^{-n}\left[\frac{\pi}{4}\frac{(1+t)^{n}}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dLogt}\right)^{n-1}\frac{1-t}{1+t}\right] \\
&= \frac{\pi}{4}\frac{(1+t)^{n+1}}{(n-1)!n}\frac{d}{dLogt}\left[\left(\frac{d}{dLogt}\right)^{n-1}\frac{1-t}{1+t}\right] \\
&= \frac{\pi}{4}\frac{(1+t)^{n+1}}{n!}\left(\frac{d}{dLogt}\right)^{n}\frac{1-t}{1+t}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.26. *La derivada n-ésima de la función* $\frac{1}{1+e^h}$ *está dada por*

$$\frac{2n!}{\pi(1+e^h)^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\left[\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n+1}\cos\left((n+1-2k)x\right)dx\right](-e^h)^k.$$

Demostración. Si $n>1$ y $t>0$, podemos cambiar $\frac{1-t}{1+t}$ por $\frac{2}{1+t}$ en la Proposición 1.25 ya que su derivada es la misma y así,

$$T_{n+1}(t) = \frac{\pi}{4}\frac{(1+t)^{n+1}}{n!}\left(\frac{d}{dLogt}\right)^{n}\frac{2}{1+t} = \frac{\pi}{2}\frac{(1+t)^{n+1}}{n!}\left(\frac{d}{dLogt}\right)^{n}\frac{1}{1+t}.$$

Reemplazando a t por e^h tenemos

$$\frac{2}{\pi}T_{n+1}(e^h) = \frac{(1+e^h)^{n+1}}{n!}\left(\frac{d}{dh}\right)^{n}(1+e^h)^{-1}. \qquad (13)$$

De la Definición 1.19 y 1.23

$$\frac{2}{\pi}T_{n+1}(e^h) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} y_{n+1,n+1-2k}(-e^h)^k = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n+1}\cos\left((n+1-2k)x\right)dx\right](-e^h)^k. \tag{14}$$

De (13) y (14) tenemos

$$\left(\frac{d}{dh}\right)^n (1+e^h)^{-1} = \frac{2n!}{\pi(1+e^h)^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\left[\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n+1}\cos\left((n+1-2k)x\right)dx\right](-e^h)^k.$$

□

2. Números Eulerianos

En este capítulo estudiaremos los números Eulerianos y sus propiedades desde el punto de vista combinatorio y analítico. Además, introducimos la sucesión de polinomios Eulerianos $(A_n(z))$ con el fin de probar identidades tales como la Identidad de Worpitzky. También usamos dicha sucesión para hallar una expresión para la suma alterna de la n-ésima potencia de los primeros m enteros positivos.

2.1. Definiciones básicas y propiedades

Recordemos que dado un conjunto A, una permutación de A es una biyección de A en A. Si $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de permutaciones del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ es denotado por S_n. Si $w \in S_n$, usaremos la notación $w = (w_1 w_2 \cdots w_n)$ para indicar que $w(i) = w_i$ para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Definición 2.1. Sea $w = (w_1 w_2 \cdots w_n) \in S_n$. Diremos que $j \in \{1,\ldots,n\}$ es un *descenso* de w si $w_j > w_{j+1}$. El conjunto de descensos de w será denotado por $\operatorname{Des}(w)$.

Definición 2.2. El número Euleriano $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ es definido como el número de permutaciones del conjunto $\{1,2,...,n\}$ que tienen k descensos, es decir,

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = |\{w \in S_n \,:\, \operatorname{des}(w) = k\}|,$$

donde $\operatorname{des}(w)$ denota la cardinalidad del conjunto $\operatorname{Des}(w)$.

Como consecuencia de la definición de descenso de una permutación tenemos que si

$w \in S_n$, entonces $0 \leq \mathrm{des}(w) \leq n-1$.

Ejemplo 2.3. Si $n = 3$, $S_3 = \{(123), (132), (213), (231), (312), (321)\}$. Note que (123) no tiene descensos, (13**2**), (2**1**3), (23**1**) y (3**1**2) sólo tienen un descenso y (3**21**) tiene dos descensos. Así, $\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{3}{0} = 1$, $\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{3}{1} = 4$, $\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{3}{2} = 1$.

Ejemplo 2.4. Sea $w \in S_4$. En la Tabla 2 podemos observar las permutaciones en S_4 con sus respectivos descensos donde $\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{4}{0} = 1$, $\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{4}{1} = 11$, $\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{4}{2} = 11$, $\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{4}{3} = 1$.

Tabla 2

Permutaciones en S_4 agrupadas por el número de descensos.

des(w)=0	des(w)=1	des(w)=2	des(w)=3
123	12**4**3	34**21**	4**321**
	13**2**4	4**2**3**1**	
	13**4**2	24**31**	
	14**2**3	3**2**4**1**	
	2**1**34	4**31**2	
	23**1**4	4**1**3**2**	
	23**4**1	14**32**	
	24**1**3	3**1**4**2**	
	3**1**24	4**21**3	
	34**1**2	2**1**4**3**	
	4**1**23	3**21**4	

Nota. Tomado de [Petersen, 2015].

Observación 2.5. Por convención $\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{0}{k} = \delta_{0k}$, donde δ_{0k} es el delta de Kronecker.

Proposición 2.6. *Los números Eulerianos satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $\genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{0} + \genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{1} + \ldots + \genfrac{\langle}{\rangle}{0pt}{}{n}{n-1} = n!$,

2. $\left\langle {n \atop 0} \right\rangle = 1$,

3. $\left\langle {n \atop n-1} \right\rangle = 1\,, \left\langle {n \atop n} \right\rangle = 0$,.

Demostración. 1. Dados $\alpha, \beta \in S_n$, definimos

$$\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow \operatorname{des}(\alpha) = \operatorname{des}(\beta).$$

Además, $\sim$ es una relación de equivalencia en S_n.

Sean α, β y $\theta \in S_n$.

- $\alpha \sim \alpha \Longleftrightarrow \operatorname{des}(\alpha) = \operatorname{des}(\beta)$.
- Si $\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow \operatorname{des}(\alpha) = \operatorname{des}(\beta) \Longleftrightarrow \operatorname{des}(\beta) = \operatorname{des}(\alpha) \Longleftrightarrow \beta \sim \alpha$.
- Supongamos $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \theta$. Luego, $\operatorname{des}(\alpha) = \operatorname{des}(\beta)$ y $\operatorname{des}(\beta) = \operatorname{des}(\theta)$.

  Por lo tanto, $\operatorname{des}(\alpha) = \operatorname{des}(\theta)$, esto es $\alpha \sim \theta$.

Más aún,

$$\{\{\sigma \in S_n \,:\, \operatorname{des}(\sigma) = k\} \,:\, 0 \leq k \leq n-1\}$$

es el conjunto de clases de equivalencia de la relación $\sim$. De esto, podemos escribir

$$S_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} \{\sigma \in S_n \,:\, \operatorname{des}(\sigma) = k\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} n! = |S_n| &= \left| \bigcup_{k=0}^{n-1} \{\sigma \in S_n : \mathrm{des}(\sigma) = k\} \right| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} |\{\sigma \in S_n : \mathrm{des}(\sigma) = k\}| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle. \end{aligned}$$

2. Sea $w = (w_1 w_2 \dots w_n) \in S_n$ tal que $\mathrm{des}(w) = 0$, entonces $w_1 < w_2 < \dots < w_n$. Como $w_i \in \{1,2,\dots,n\}$ para cada $i \in \{1,2,\dots,n\}$ sigue que $w_1 = 1, w_2 = 2, \dots, w_n = n$ y $w = (123\dots n)$. Esto muestra que la única permutación $w \in S_n$ tal que $\mathrm{des}(w) = 0$ es $(123\dots n)$. En consecuencia $\left\langle {n \atop 0} \right\rangle = 1$.

3. La permutación $(n\dots 321)$ tiene $n-1$ descensos. Si $z = (z_1 z_2 \dots z_n) \in S_n$, $z \neq (n\dots 321)$ tal que des(z)=$n-1$, entonces $z_1 > z_2 > z_3 ... > z_n$, como $z_i \in \{1,2,\dots,n\}$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$, entonces $z_1 = n, z_2 = n-1, \dots, z_n = 1$. Por lo tanto, $(n\dots 321)$ es la única permutación de S_n con $n-1$ descensos.

Por otro lado, si $w \in S_n$, entonces $0 \leq \mathrm{des}(w) \leq n-1$. De esto sigue que $\left\langle {n \atop n} \right\rangle = 0$. $\square$

Ahora veremos la propiedad de simetría que cumple el número Euleriano $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$, para ello introducimos la siguiente definición:

Definición 2.7. Sea $w = (w_1 w_2 \cdots w_n) \in S_n$. Diremos que $i \in \{1, \ldots, n\}$ es un *ascenso* de w si $w_i < w_{i+1}$. El conjunto de ascensos de w y su cardinal serán denotados por $\mathrm{Asc}(w)$ y $\mathrm{asc}(w)$, respectivamente.

Observe que si $w = (w_1 w_2 \cdots w_n) \in S_n$, entonces cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ es un ascenso o descenso de w. En consecuencia,

$$\mathrm{asc}(w) + \mathrm{des}(w) = n - 1.$$

Observación 2.8. Los números Eulerianos establecen una regla de simetría en la que cada permutación no nula con k descensos tiene $n-k-1$ ascensos.

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left\langle {n \atop n-k-1} \right\rangle.$$

En efecto, sea $w = (w_1 w_2 \cdots w_n) \in S_n$ tal que $\mathrm{des}(w) = k$. Así, w tiene $n-1-k$ ascensos. Por lo tanto, la permutación $w' = (w_n w_{n-1} ... w_k ... w_1) \in S_n$ tiene $n-1-k$ descensos.

Teorema 2.9 (*Fórmula de recursión de los números Eulerianos*)**.** *Para todo $n, k \in \mathbb{N}$*

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = (n-k)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle + (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle.$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ dado. Consideremos dos casos:

- **Caso 1:** Sea $w = (w_1 w_2 .... w_{n-1}) \in S_{n-1}$ tal que $\mathrm{des}(w) = k-1$ descensos y $w_i \in \{1, 2, \ldots, n-$

$1\}$ para todo $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$. Vamos a construir una permutación $z \in S_n$ con $\operatorname{des}(z) = k = \operatorname{des}(w)+1$ insertando la entrada $\mathbf{n}$ en la permutación w. En efecto, supongamos que en la posición j hay un ascenso de w. Sea $z = (w_1 w_2 \ldots w_j \mathbf{n} w_{j+1} \ldots w_{n-1})$, luego $z \in S_n$. Como $n > w_i$ para todo $1 \leq i \leq n-1$, entonces des(z)=des(w)$+1 = k$.

Note que la entrada $\mathbf{n}$ la podemos agregar en cada posición de ascenso de w y en el extremo izquierdo de w. Como $\operatorname{asc}(w) = (n-1)-1-\operatorname{des}(w) = n-k-1$ entonces hay $(n-k-1)+1 = n-k$ posibilidades de formar una permutación de n elementos con k descensos a partir de una permutación de $n-1$ elementos con $k-1$ descensos.

- **Caso 2:** Sea $w = (w_1 w_2 \cdots w_{n-1}) \in S_{n-1}$ con $\operatorname{des}(w) = k$ donde $w_i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ para todo $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$. Queremos formar una permutación $z \in S_n$ con $\operatorname{des}(z) = k = \operatorname{des}(w)$ a partir de w. Supongamos que j es un descenso de w para algún $1 < j < n-1$. Si agregamos la entrada $\mathbf{n}$ en esta posición tenemos que $z = (w_1 w_2 ... w_j \mathbf{n} w_{j+1} \ldots w_{n-1}) \in S_n$. Como $w_j < n$ para todo $1 \leq j \leq n-1$, entonces des(z)=des(w)$= k$.

  La entrada $\mathbf{n}$ lo podemos agregar en cada posición de descenso de w y en el extremo derecho de w. Como $\operatorname{des}(w) = k$ entonces hay $k+1$ posibilidades de crear una permutación de n elementos con k descensos a partir de una permutación de $n-1$ elementos con k descensos.

□

Ahora ilustramos el teorema anterior con un ejemplo.

Ejemplo 2.10. Para $n=4$ y $k=1$. Veamos que $\left\langle {4 \atop 1} \right\rangle = 3\left\langle {3 \atop 0} \right\rangle + 2\left\langle {3 \atop 1} \right\rangle$.

Consideremos la permutación de S_3 con $k-1=0$ descensos, es decir (123). Si agregamos la entrada 4 a la permutación (123) en las posiciones de ascenso y en el extremo izquierdo, obtenemos las permutaciones (1**4**23), (12**4**3) y (**4**123) en S_4. Note que estas permutaciones tienen 1 descenso.

Por otro lado, tomemos las permutaciones de S_3 con $k=1$ descensos, es decir, el conjunto

{(13**2**), (2**1**3), (23**1**), (3**1**2)} y agreguemos la entrada **4** en las posiciones de descenso y en el extremo derecho de cada una de estas permutaciones. Por ejemplo, para la permutación (132) se obtienen las permutaciones (13**4**2) y (132**4**) de S_4 las cuales tienen 1 descenso.

Realizando este proceso a cada una de las permutaciones de S_3 con $k=1$ descensos obtenemos:

$$132\begin{cases} 132\mathbf{4} \\ 13\mathbf{4}2 \end{cases} \quad 213\begin{cases} 213\mathbf{4} \\ 2\mathbf{4}13 \end{cases} \quad 231\begin{cases} 231\mathbf{4} \\ 23\mathbf{4}1 \end{cases} \quad 312\begin{cases} 3\mathbf{4}12 \\ 312\mathbf{4} \end{cases}$$

Note que a partir de una permutación de S_3 con $k-1=0$ descensos construimos 3 permutaciones de S_4 con $k=1$ descenso. También a partir de cada permutación de S_3 con $k=1$ descenso obtuvimos 2 permutaciones de S_4 con un descenso. Así, $\left\langle {4 \atop 1} \right\rangle = 3\left\langle {3 \atop 0} \right\rangle + 2\left\langle {3 \atop 1} \right\rangle$.

La Tabla 3 podemos ver las propiedades que satisfacen los números Eulerianos $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ con $0 \le k < n \le 10$ enunciada en la Proposición 2.6.

Tabla 3

Números Eulerianos $\left\langle {n \atop k} \right\rangle, 0 \le k < n \le 10$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	**0**								
2	1	1	**0**							
3	1	4	1	**0**						
4	1	11	11	1	**0**					
5	1	26	66	26	1	**0**				
6	1	57	302	302	57	1	**0**			
7	1	120	1191	2416	1191	120	1	**0**		
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	**0**	
9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	**0**
10	1	1013	47840	455192	1310354	1310354	455192	47840	1013	1

2.2. Polinomios Eulerianos

Euler estudió el problema de encontrar una fórmula para la suma $\sum_{i=1}^{m}(-1)^i i^n$. Para solucionar este problema, Euler introduce una sucesión de polinomios $(A_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ conocidos hoy como *polinomios Eulerianos*. Estos polinomios enumeran las permutaciones de acuerdo con el número de descensos. En esta sección daremos la definición de estos polinomios y probaremos algunas de sus propiedades.

Definición 2.11. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el n-ésimo polinomio Euleriano como $A_n(z)$

$$A_n(z) = \sum_{w \in S_n} z^{\operatorname{des}(w)} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle z^k, \quad A_0(z) = 1.$$

De la definición anterior tenemos

$$A_0(z) = 1, \quad A_1(z) = 1, \quad A_2(z) = z+1, \quad A_3(z) = z^2+4z+1.$$

Note que $A_n(z)$ es un polinomio de grado $n-1$, para todo $n > 0$.

El siguiente resultado es una consecuencia del Teorema 2.9 y da una fórmula para calcular estos polinomios recursivamente.

Teorema 2.12 (*Fórmula de recursión de los polinomio Eulerianos*)**.** *La sucesión de polinomios Eulerianos $(A_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ satisface*

$$A_{n+1}(z) = (nz+1)A_n(z) + z(1-z)A_n'(z), \quad n \geq 0 \quad \text{y} \quad A_0(z) = 1.$$

Demostración. El resultado es válido para $n = 1$. Supongamos que vale para todo $1 \leq j \leq n$ y probemos su validez para $n+1$.

Si $A_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\left\langle {n \atop k} \right\rangle z^k$, entonces $A_n'(z)=\sum_{k=1}^{n-1}k\left\langle {n \atop k} \right\rangle z^{k-1}$. Así,

$$
\begin{aligned}
((nz+1)A_n(z) &= \sum_{k=0}^{n-1} n\left\langle {n \atop k} \right\rangle z^k + \sum_{k=0}^{n-1}\left\langle {n \atop k} \right\rangle z^k\\
&= \sum_{k=1}^{n} n\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle z^k + \sum_{k=0}^{n-1}\left\langle {n \atop k} \right\rangle z^k, \quad \text{y}\\
z(1-z)A_n'(z) &= \sum_{k=1}^{n-1} k\left\langle {n \atop k} \right\rangle z^k - \sum_{k=1}^{n-1} k\left\langle {n \atop k} \right\rangle z^{k+1}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k\left\langle {n \atop k} \right\rangle z^k - \sum_{k=1}^{n} (k-1)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle z^k.
\end{aligned}
$$

Sumando las expresiones anteriores obtenemos

$$
\begin{aligned}
(nz+1)A_n(z)+z(1-z)A_n'(z) &= \left[\sum_{k=0}^{n-1}\left\langle {n \atop k} \right\rangle z^k + \sum_{k=1}^{n-1} k\left\langle {n \atop k} \right\rangle z^k\right]\\
&\quad + \left[\sum_{k=1}^{n} n\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle z^k + \sum_{k=1}^{n} -(k-1)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle z^k\right]\\
&= \left[\left\langle {n \atop 0} \right\rangle + \sum_{k=1}^{n}(k+1)\left\langle {n \atop k} \right\rangle z^k\right] + \sum_{k=0}^{n}(n+1-k)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle z^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}(k+1)\left\langle {n \atop k} \right\rangle z^k + \sum_{k=0}^{n}(n+1-k)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle z^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)\left\langle {n \atop k} \right\rangle + (n+1-k)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle\right] z^k.
\end{aligned}
$$

Aplicando el Teorema 2.9 tenemos que el coeficiente de z^k en $(nz+1)A_n(z)+z(1-z)A_n'(z)$ corresponde al número Euleriano $\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle$ como coeficiente de z^k en el $(n+1)$-ésimo polinomio Euleriano. □

2.3. Identidades

Teorema 2.13 (*Identidad de Carlitz*)**.** *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y* $|z| < 1$ *tenemos*

$$\frac{A_n(z)}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^n z^k. \tag{15}$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $|z| < 1$, definimos la función

$$E_n(z) := (1-z)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^n z^k.$$

Observe que $E_0(z) = 1$. Usando inducción podemos mostrar que $E_n(z)$ es un polinomio de grado $n-1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

- $n = 1$.

  $$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad |z| < 1.$$

  Luego,

  $$\frac{z}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1}, \quad |z| < 1.$$

  Por la Proposición 1.8 tenemos que

  $$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k, \quad |z| < 1.$$

donde $E_1(z) = 1$ es un polinomio de grado 0.

- Supongamos que la afirmación se cumple para n y veamos que se cumple para $n+1$, es decir, mostraremos que $E_{n+1}(z)$ es un polinomio de grado n.
- Veamos que $E_{n+1}(z) = (1-z)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^n z^k$.

  Ahora,

$$\frac{zE_n(z)}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^n z^{k+1}.$$

  Por la Proposición 1.8 tenemos que

$$\frac{(nz+1)E_n(z) + z(1-z)E_n'(z)}{(1-z)^{n+2}} = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{n+1} z^k.$$

  Por definición de $E_n(z)$ tenemos que

$$E_{n+1}(z) = (nz+1)E_n(z) + z(1-z)E_n'(z),$$

y $E_0(z) = 1$.

De la hipótesis de inducción se tiene que $E_n(z)$ es un polinomio de grado $n-1$, luego, el producto por $nz+1$ dará un polinomio de grado n. Además, la derivada de $E_n(z)$ es de grado $n-2$ y así, del término $z(1-z)E_n'(z)$ se obtiene polinomios de grado a lo más n.

Note también que tal fórmula de recursión corresponde a la recursión polinomial de $A_n(z)$ dada en el Teorema 2.12. Por lo tanto, $A_n(z) = E_n(z)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$\frac{A_n(z)}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^n z^k. \qquad \square$$

El siguiente resultado nos da la función generadora de los polinomios Eulerianos $(A_n(z))$.

Proposición 2.14. *Si* $|z| < 1$ *y* $|ze^w| < 1$, *entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(z)}{(1-z)^{n+1}} \frac{w^n}{n!} = \frac{e^w}{1-ze^w}. \tag{16}$$

Demostración. Por el Teorema 2.13 tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(z)}{(1-z)^{n+1}} \frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^n z^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}(k+1)^n z^k.$$

Note que la serie doble converge absolutamente si $|z| < 1$. Sigue del Teorema 1.12 que

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(z)}{(1-z)^{n+1}} \frac{w^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}(k+1)^n z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+1)^n w^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^k e^{(k+1)w} \\
&= e^w \sum_{k=0}^{\infty} (ze^w)^k \\
&= \frac{e^w}{1-ze^w}.
\end{aligned}
$$

□

Una consecuencia inmediata de la Identidad de Carlitz (Teorema 2.13) es la Fórmula explícita para los números Eulerianos.

Proposición 2.15 (*Fórmula explícita para los números Eulerianos*)**.** *Para cada $n,k \geq 0$ tenemos*

$$
\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j+1)^n.
$$

Demostración. Sea $n,k \in \mathbb{N}$, entonces

$$
A_n(z) = (1-z)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^n z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+1}{k} (-1)^k z^k \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^n z^k.
$$

Luego,

$$A_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k, \quad \text{donde} \quad a_{n,k} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j+1)^n. \tag{17}$$

Usando la Definición 2.11 en (17) y por el principio de identidad (ver Proposición 1.10) tenemos

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j+1)^n. \qquad \square$$

Teorema 2.16 (*Identidad de Worpitzky*)**.** *Para cada $m,n \in \mathbb{N}$ tenemos*

$$(m+1)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{m+n-k}{n}.$$

Demostración. Sean $m,n \in \mathbb{N}$ y $|z| < 1$. Por el Teorema 2.13

$$\frac{A_n(z)}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^n z^m. \tag{18}$$

Usando la Definición 2.11 en (18)

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^n z^m = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \frac{z^k}{(1-z)^{n+1}}. \tag{19}$$

Reemplazando la Proposición 1.9 en (19) tenemos

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^n z^m = \sum_{k=0}^{n-1}\left\langle {n \atop k} \right\rangle \sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+n-k}{n} z^m = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{m+n-k}{n} z^m.$$

Por el Principio de identidad (Proposición 1.10) concluimos que

$$(m+1)^n = \sum_{k=0}^{n-1}\left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{m+n-k}{n}. \qquad \square$$

Observación 2.17. La Identidad de Worpitzky puede reescribirse como sigue:

$$(m+1)^n = \sum_{k=0}^{n-1}\left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{m+1+k}{n}.$$

Esto es consecuencia de la Observación 2.8 y la sustitución $k = n - j$ con $j = 1, \dots, n$.

Ejemplo 2.18. Para $m = 4, n = 5$,

$$\begin{aligned}
5^5 &= \left\langle {5 \atop 0} \right\rangle \binom{9}{5} + \left\langle {5 \atop 1} \right\rangle \binom{8}{5} + \left\langle {5 \atop 2} \right\rangle \binom{7}{5} + \left\langle {5 \atop 3} \right\rangle \binom{6}{5} + \left\langle {5 \atop 4} \right\rangle \binom{5}{5} \\
&= \binom{9}{5} + \left\langle {5 \atop 1} \right\rangle \binom{8}{5} + \left\langle {5 \atop 2} \right\rangle \binom{7}{5} + \left\langle {5 \atop 3} \right\rangle \binom{6}{5} + 1 \\
&= 126 + 26 * 56 + 66 * 21 + 6 * 26 + 1 \\
&= 3125.
\end{aligned}$$

Antes de presentar una generalización de la identidad de Worpitzky introducimos una notación.

Definición 2.19. Dados $z \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{N}$, el *coeficiente binomial* $\binom{z}{k}$ *es definido por*

$$\binom{z}{k} = \frac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{k!}.$$

Lema 2.20. *Si P y Q son polinomios no constantes de grado n tales que $P(m) = Q(m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces $P(z) = Q(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Demostración. Véase [Quaintance, 2015, Corolarios 4.2 y 4.3] □

Teorema 2.21 (*Identidad de Worpitzky generalizada*)**.** *Dados $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ tenemos*

$$z^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{z+k}{n}.$$

Demostración. Sean $P(z) = z^n$, $Q(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{z+k}{n}$. Note que P y Q son polinomios de grado n. De la Observación 2.17 sigue que $P(m+1) = Q(m+1)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por el Lema 2.20 concluimos que $P(z) = Q(z)$, esto es,

$$z^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{z+k}{n}. \qquad \square$$

Proposición 2.22. *Para cada $n, m \in \mathbb{N}$,*

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}.$$

Demostración. Véase [Knuth, 1973, pág. 56] $\square$

Proposición 2.23. *Para cada $n, m \in \mathbb{N}$,*

$$1^n + 2^n + \ldots + m^n = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{m+k+1}{n+1}.$$

Demostración. Utilizando la Identidad de Worpitzky (Teorema 2.16) tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m-1} (i+1)^n &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle {n \atop j} \right\rangle \binom{i+n-j}{n} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle {n \atop j} \right\rangle \sum_{i=0}^{m-1} \binom{i+n-j}{n}.\end{aligned}$$

Si $i < j$, entonces $\binom{i+n-j}{n} = 0$. De esto,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m-1} (i+1)^n &= \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle {n \atop j} \right\rangle \sum_{i=j}^{m-1} \binom{i+n-j}{n} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle {n \atop n-j-1} \right\rangle \sum_{i=0}^{m-j-1} \binom{i+n}{n}.\end{aligned}$$

Aplicando la Proposición 2.22 y la Observación 2.8 encontramos que

$$\sum_{i=0}^{m-1}(i+1)^n=\sum_{j=0}^{n-1}\left\langle {n \atop n-j-1} \right\rangle \binom{n+m-j-1+1}{n+1}.$$

Si $k=n-j-1$, entonces $k=0,\ldots,n-1$ cuando $j=0,\ldots,n-1$. Así

$$\sum_{i=0}^{m-1}(i+1)^n=\sum_{k=0}^{n-1}\left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{m+k+1}{n+1}. \qquad \square$$

Ejemplo 2.24. Sean $m,n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{m} i=\frac{m(m+1)}{2}=\binom{m+1}{2}.$$

$$\sum_{i=0}^{m} i^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}=\binom{m+1}{3}+\binom{m+2}{3}.$$

$$\sum_{i=0}^{m} i^3=\frac{m^2(m+1)^2}{4}=\binom{m+1}{4}+\mathbf{4}\binom{m+2}{4}+\binom{m+3}{4}.$$

$$\sum_{i=0}^{m} i^4=\frac{m(m+1)(2m+1)(3m^2+3m-1)}{30}=\binom{m+1}{5}+\mathbf{11}\binom{m+2}{5}+\mathbf{11}\binom{m+3}{5}+\binom{m+4}{5}.$$

Teorema 2.25. *Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{m} i^n z^i = -z^{m+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{m^{n-k}}{(1-z)^{k+1}} A_k(z) + \frac{z}{(1-z)^{n+1}} A_n(z).$$

Demostración. Supongamos que $|z| < 1$ y sea $w \in \mathbb{C}$ tal que $|ze^w| < 1$. Por la Proposición 2.14 se tiene que

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \left[-\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{m^{n-k} z^{m+1}}{(1-z)^{k+1}} A_k(z) + \frac{z}{(1-z)^{n+1}} A_n(z) \right] \\
&= -z^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} w^n \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{m^{n-k}}{(n-k)!} \frac{A_k(z)}{k!(1-z)^{k+1}} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} z \frac{A_n(z)}{(1-z)^{n+1}} \frac{w^n}{n!} \\
&= -z^{m+1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} m^n \frac{w^n}{n!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(z)}{(1-z)^{n+1}} \frac{w^n}{n!} \right] + z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(z)}{(1-z)^{n+1}} \frac{w^n}{n!} \\
&= \frac{-z^{m+1} e^{mw} e^w}{1-ze^w} + \frac{ze^w}{1-ze^w} \\
&= \frac{1-(ze^w)^m}{1-ze^w} ze^w \\
&= ze^w \left[1 + ze^w + z^2 e^{2w} + \ldots + z^m e^{mw} \right] \\
&= ze^w + z^2 e^{2w} + \ldots + z^m e^{mw} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z \frac{w^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} z^2 \frac{2^n w^n}{n!} + \ldots + \sum_{n=0}^{\infty} z^m \frac{m^n w^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{m} i^n z^i \right] \frac{w^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Por el Principio de identidad (Proposición 1.10) concluimos que

$$\sum_{i=1}^{m} i^n z^i = -z^{m+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{m^{n-k}}{(1-z)^{k+1}} A_k(z) + \frac{z}{(1-z)^{n+1}} A_n(z),$$

para $|z| < 1$. Como las expresiones anteriores son funciones racionales concluimos que la igualdad vale en todo $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. $\square$

Observación 2.26. Tomando $z = -1$ en el Teorema 2.25 tenemos la expresión para la suma alterna de la n-ésima potencia de los primeros m enteros positivos,

$$\sum_{i=1}^{m} (-1)^i i^n = (-1)^m \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \frac{m^{n-k}}{2^{k+1}} A_k(-1) - \frac{A_n(-1)}{2^{n+1}}.$$

2.4. Aplicaciones de la función generadora

Un resultado importante de la sección 2.3 de Identidades es que la función generadora de los polinomios Eulerianos corresponde a $X(t) = \dfrac{1}{1+e^t}$. Ahora veremos otras identidades obtenidas a partir de esta función.

Proposición 2.27. *Si $|z| < 1$ y $|we^z| < 1$, entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n+1}(z)}{(n+1)(1-z)^{n+1}} \frac{w^{n+1}}{n!} = \frac{e^w - 1}{1 - ze^w}. \tag{20}$$

Demostración. Por la Proposición 2.14 tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(z)}{(1-z)^n} \frac{w^n}{n!} = \frac{(1-z)e^w}{1-ze^w}. \tag{21}$$

Como $A_0(z) = 1$, entonces restando 1 en (21) sigue

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(z)}{(1-z)^n} \frac{w^n}{n!} = \frac{(1-z)e^w}{1-ze^w} - 1 = \frac{e^w - 1}{1-ze^w}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n+1}(z)}{(n+1)(1-z)^{n+1}} \frac{w^{n+1}}{n!} = \frac{e^w - 1}{1-ze^w}. \qquad \square$$

Proposición 2.28. *Si* $|z| < 1$*, entonces*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-j} \frac{A_{j+1}(z)}{(j+1)(1-z)^{j+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} m^n z^m. \tag{22}$$

Demostración. Sea $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| < 2\pi$ y $|ze^w| < 1$. De (20) obtenemos que

$$\frac{w}{e^w - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n+1}(z)}{(n+1)(1-z)^{n+1}} \frac{w^n}{n!} = \frac{1}{1-ze^w}. \tag{23}$$

Como $|w| < 2\pi$, por la Proposición 1.15 tenemos que $\frac{w}{e^w - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{w^n}{n!}$ y sigue de (23) que

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{w^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n+1}(z)}{(n+1)(1-t)^{n+1}} \frac{w^n}{n!} = \frac{1}{1-ze^w}.$$

El Teorema 1.7 implica que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_{n-j}\frac{A_{j+1}(z)}{(j+1)(1-z)^{j+1}}\frac{w^n}{n!}=\frac{1}{1-ze^w}.$$

Por otra parte, usando la convergencia absoluta y la Proposición 1.12 encontramos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-ze^w}&=\sum_{m=0}^{\infty}z^m e^{mz}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m^n z^m w^n}{n!}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^n z^m w^n}{n!}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}m^n z^m\right)\frac{w^n}{n!}\end{aligned}$$

Luego por el Principio de Identidad tenemos

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_{n-j}\frac{A_{j+1}(z)}{(j+1)(1-z)^{j+1}}=\sum_{m=0}^{\infty}m^n z^m.$$ □

Proposición 2.29. *Si* $z,u\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, *entonces*

$$\frac{1}{z-u}\left[\frac{A_n(z)}{(1-z)^{n+1}}-\frac{A_n(u)}{(1-u)^{n+1}}\right]=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{A_k(z)}{(1-z)^{k+1}}\frac{A_{n-k}(u)}{(1-u)^{n-k+1}}.$$

Demostración. Supongamos primero que $|z|<1$ y $|u|<1$ y sea $w\in\mathbb{C}$ tal que $|ze^w|<1$ y $|ue^w|<1$. Aplicando la Proposición 2.14 tenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z-u}\left[\frac{A_n(z)}{(1-z)^{n+1}} - \frac{A_n(u)}{(1-u)^{n+1}}\right]\frac{w^n}{n!} &= \frac{1}{z-u}\left[\frac{e^w}{1-ze^w} - \frac{e^w}{1-ue^w}\right] \\
&= \frac{e^w}{1-ze^w}\frac{e^w}{1-ue^w} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(z)}{(1-z)^{n+1}}\frac{w^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(u)}{(1-u)^{n+1}}\frac{w^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{A_k(z)}{(1-z)^{k+1}}\frac{A_{n-k}(u)}{(1-u)^{n-k+1}}\frac{w^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Del Principio de Identidad deducimos que

$$
\frac{1}{z-u}\left[\frac{A_n(z)}{(1-z)^{n+1}} - \frac{A_n(u)}{(1-u)^{n+1}}\right] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{A_k(z)}{(1-z)^{k+1}}\frac{A_{n-k}(u)}{(1-u)^{n-k+1}}.
$$

La conclusión sigue entonces para cada $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ puesto que ambos miembros de esta igualdad son funciones racionales. □

Teorema 2.30. *Para cada $u \in \mathbb{C}$ tenemos*

$$
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k(u)A_{n-k}(u) = (1-u)A_n'(u) + (n+1)A_n(u).
$$

Demostración. Supongamos que $u \neq 1$ Por la Proposición 2.29 tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{z\to u}\frac{1}{z-u}\left[\frac{A_n(z)}{(1-z)^{n+1}}-\frac{A_n(u)}{(1-u)^{n+1}}\right] &= \lim_{z\to u}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{A_k(z)}{(1-z)^{k+1}}\frac{A_{n-k}(u)}{(1-u)^{n-k+1}}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{A_k(u)A_{n-k}(u)}{(1-u)^{n+2}}.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\lim_{z\to u}\frac{1}{z-u}\left[\frac{A_n(z)}{(1-z)^{n+1}}-\frac{A_n(u)}{(1-u)^{n+1}}\right] &= \frac{d}{du}\left(\frac{A_n(u)}{(1-u)^{n+1}}\right)\\ &= \frac{(1-u)A_n'(u)+(n+1)A_n(u)}{(1-u)^{n+2}}.\end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k(u)A_{n-k}(u)=(1-u)A_n'(u)+(n+1)A_n(u).$$

Por continuidad sigue que la igualdad anterior vale para todo $u\in\mathbb{C}$. □

3. La ecuación de Riccati

En este capítulo presentamos la relación entre los números Eulerianos y la ecuación diferencial de Riccati con coeficientes constantes. Iniciamos definiendo estas ecuaciones diferenciales, seguimos con algunos ejemplos y por último mostramos otras aplicaciones de estos números.

3.1. Teorema de Rzadkowski

Definición 3.1. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $X : I \to K$ una función, donde $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Diremos que una función $X(t)$ satisface la ecuación diferencial de Riccati con coeficientes constantes si

$$X'(t) = aX(t)^2 + bX(t) + c, \tag{24}$$

para todo $t \in I$, con a, b y c son números reales o complejos con $a \neq 0$.

Ejemplo 3.2. Las siguientes funciones satisfacen una ecuación de la forma (24):

1. $X(t) = \tan t, \quad X'(t) = X(t)^2 + 1;$
2. $X(t) = \tanh t, \quad X'(t) = -X(t)^2 + 1;$
3. $X(t) = \dfrac{1}{1+e^t}, \quad X'(t) = X(t)^2 - X(t);$
4. $X(t) = \dfrac{1}{e^t - 1}, \quad X'(t) = -X(t)^2 - X(t);$
5. $X(t) = \dfrac{1}{1 - ze^t}$, z fijo, $\quad X'(t) = X(t)^2 - X(t);$
6. $X(t) = \dfrac{-1}{t}, \quad X'(t) = X(t)^2.$

A continuación enunciamos el teorema principal de [Rzadkowski, 2008].

Teorema 3.3. *Sean r_1 y r_2 las raíces (reales o complejas) del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$. Si la función $X(t)$ satisface $X'(t) = a(X(t) - r_1)(X(t) - r_2)$, entonces*

$$X^{(n)}(t) = a^n \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle (X(t) - r_1)^{k+1} (X(t) - r_2)^{n-k},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Hacemos inducción sobre n. Para $n = 2$. Por hipótesis tenemos que

$$X'(t) = a(X(t) - r_1)(X(t) - r_2), \tag{25}$$

Luego, la segunda derivada de la función $X(t)$ está dada por

$$X''(t) = aX'(t)[(X(t) - r_1) + (X(t) - r_2)]. \tag{26}$$

Reemplazando (25) en (26)

$$X''(t) = a^2[(X(t) - r_1)(X(t) - r_2)^2 + (X(t) - r_1)^2(X(t) - r_2)]$$

$$= a^2 \sum_{k=0}^{1} \left\langle {2 \atop k} \right\rangle (X(t) - r_1)^{k+1}(X(t) - r_2)^{2-k}.$$

Supongamos que

$$X^{(n)}(t) = a^n \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle (X(t) - r_1)^{k+1}(X(t) - r_2)^{n-k}. \tag{27}$$

Veamos que

$$X^{(n+1)}(t) = a^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle (X(t) - r_1)^{k+1}(X(t) - r_2)^{n+1-k}.$$

Derivando (27) tenemos

$$X^{(n+1)}(t) = a^n \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle X'(t) \Big[(k+1)(X(t)-r_1)^k (X(t)-r_2)^{n-k} \tag{28}$$
$$+ (n-k)(X(t)-r_1)^{k+1}(X(t)-r_2)^{n-k-1} \Big].$$

Reemplazando (25) en (28)

$$\begin{aligned} X^{(n+1)}(t) = a^{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \Big[&(k+1)(X(t)-r_1)^{k+1}(X(t)-r_2)^{n-k+1} \\ &+ (n-k)(X(t)-r_1)^{k+2}(X(t)-r_2)^{n-k} \Big] \\ &= a^{n+1} \Big[\left\langle {n \atop 0} \right\rangle (X(t)-r_1)(X(t)-r_2)^{n+1} \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \Big((k+1) \left\langle {n \atop k} \right\rangle \\ &+ (n-k+1) \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \Big) (X(t)-r_1)^{k+1}(X(t)-r_2)^{n-k+1} \\ &+ \left\langle {n \atop n-1} \right\rangle (X(t)-r_1)^{n+1}(X(t)-r_2) \Big]. \end{aligned} \tag{29}$$

Aplicando el Teorema 2.9 en (29) tenemos

$$X^{(n+1)}(t) = a^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle (X(t)-r_1)^{k+1}(X(t)-r_2)^{n-k+1}.$$

Esto demuestra el resultado para $n+1$ y por tanto para todo $n \in \mathbb{N}$. □

3.2. Aplicaciones del Teorema de Rzadkowski

En esta sección damos ejemplos que muestran la aplicación del Teorema 3.3.

Ejemplo 3.4. Si $X(t) = \dfrac{1}{e^t - 1}$ entonces $X'(t) = -X(t)^2 - X(t)$. Las raíces del polinomio $p(x) = -x^2 - x$ son 0 y -1.

Sigue del Teorema 3.3 que

$$X^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n}{(e^t - 1)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle e^{(n-k)t},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.5. Si $X(t) = \tanh t$ entonces $X'(t) = -X(t)^2 + 1$. Las raíces del polinomio $p(x) = -x^2 + 1$ son 1 y -1. Del Teorema 3.3 tenemos

$$X^{(n)}(t) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle (X(t) - 1)^{k+1} (X(t) + 1)^{n-k}, \tag{30}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, del Teorema 1.18 tenemos la expansión de Taylor para $t = 0$ dada por

$$\tanh t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k} - 1)}{(2k)!} B_{2k} t^{2k-1}, \quad |t| < \frac{\pi}{2}. \tag{31}$$

Comparando los valores de la derivada de orden $n = 2m - 1$ calculada de la forma (30) y (31) obtenemos

$$\frac{2^{2m}(2^{2m}-1)}{2m}B_{2m} = \sum_{k=0}^{2m-2}(-1)^k\left\langle{2m-1 \atop k}\right\rangle. \tag{32}$$

La fórmula (32) podemos escribirla así:

$$B_{2m} = \frac{2m}{2^{2m}(2^{2m}-1)}\sum_{k=0}^{2m-2}(-1)^k\left\langle{2m-1 \atop k}\right\rangle.$$

Esto nos da una fórmula explícita para el número de Bernoulli B_{2m}.

Ejemplo 3.6. La función $Y(x) = \dfrac{1}{1-te^x}$ satisface la ecuación (24) (ver Ejemplo 3.2, 5). Por el Teorema 3.3 la n-ésima derivada de esta función en $x=0$ está dada por

$$Y^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n-1}\left\langle{n \atop k}\right\rangle\frac{t^{n-k}}{(1-t)^{n+1}}. \tag{33}$$

Considerando la serie de Taylor (ver Definición 1.2) para la función $Y(x) = \dfrac{1}{1-te^x}$ en $x=0$ y remplazando (33) tenemos

$$\frac{1}{1-te^x} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left\langle{n \atop k}\right\rangle\frac{t^{n-k}}{(1-t)^{n+1}}\frac{x^n}{n!}. \tag{34}$$

Aplicando el Principio de identidad en (22) y (34) tenemos

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\langle{n \atop k}\right\rangle\frac{t^{n-k}}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_{n-j}\frac{A_{j+1}(t)}{(j+1)(1-t)^{n+1}}.$$

Ejemplo 3.7. En Ejemplo 3.2 vimos que la función $X(t) = \dfrac{1}{1+e^t}$ satisface la ecuación diferencial (24) donde $X'(t) = X(t)^2 - X(t)$.

Luego, por el Teorema 3.3 tenemos:

$$\frac{d^n}{dt^n}\frac{1}{1+e^t} = \frac{1}{(1+e^t)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n-1}\left\langle {n \atop k} \right\rangle (-e^t)^{k+1}. \tag{35}$$

Por otro lado, del Teorema 1.26 tenemos que

$$\frac{d^n}{dt^n}\frac{1}{1+e^t} = \frac{2n!}{\pi(1+e^t)^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n+1}\cos\left((n+1-2k)x\right)(-e^t)^k dx. \tag{36}$$

Comparando los coeficientes de $(-e^t)^{k+1}$ en (35) y (36) obtenemos la siguiente representación integral para el número Euleriano $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$:

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \frac{2n!}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin u}{u}\right)^{n+1}\cos\left(n-2k-1\right)u\,du.$$

Referencias Bibliográficas

Apostol, T. M. (1996). *Análisis matemático*. Reverté.

Conway, J. B. (2012). *Functions of one complex variable II*, volume 159. Springer Science & Business Media.

Euler, L. (1755). *Institutiones calculi differentialis*. Teubner.

Hamilton, W. R. (1843). Xlv. on an expression for the numbers of bernoulli, by means of a definite integral; and on some connected processes of summation and integration. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 23(153):360–367.

Knuth, D. E. (1973). The art of computer programming, volume 3: Searching and sorting. *Addison-Westley Publishing Company: Reading, MA*.

MacMahon, P. A. (1960). Combinatorial analysis, two volumes (bound as one).

Neto, A. L. (1993). *Funções de uma variável complexa*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

Petersen, T. K. (2015). Eulerian numbers. In *Eulerian Numbers*, pages 3–18. Springer.

Quaintance, J. (2015). *Combinatorial identities for Stirling numbers: the unpublished notes of HW Gould*. World Scientific.

Rzadkowski, G. (2008). Derivatives and eulerian numbers. *The American Mathematical Monthly*, 115(5):458–460.