

OBJETOS COMPACTOS EN LA TEORÍA DE PROCA GENERALIZADA

WILLIAM ANDRÉS JAIMES ESPÍNDOLA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2020

OBJETOS COMPACTOS EN LA TEORÍA DE PROCA GENERALIZADA

WILLIAM ANDRÉS JAIMES ESPÍNDOLA

Trabajo de Grado para optar al título de
físico

Director

Yeinzon Rodríguez García

Ph.D. Física

Codirector

Luis Gabriel Gómez Díaz

Ph.D. Física

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2020

*No te des por vencido, ni aún vencido,
no te sientas esclavo, ni aún esclavo;
trémulo de pavor, piénsate bravo,
y acomete feroz, ya mal herido.*

*Ten el tesón del clavo enmohecido
que ya viejo y ruin, vuelve a ser clavo;
no la cobarde estupidez del pavo
que amaina su plumaje al primer ruido.*

*Procede como Dios que nunca llora;
o como Lucifer, que nunca reza;
o como el robledal, cuya grandeza
necesita del agua, y no la implora...*

*Que muerda y vocifere vengadora,
ya rodando en el polvo, tu cabeza!*

Piu Avanti, Almafuerte.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera iniciar agradeciendo a Dios por ponerme en el camino a tantas personas maravillosas, coincidir con tan increíbles seres humanos sólo puede clasificarse, creo, como un hecho divino.

A lo largo de estos años, tuve la oportunidad de satisfacer, al menos un poco, esa necesidad humana de entender la naturaleza y su entorno, de maravillarme ante su complejidad y por qué no, sentirme asombrado de su grandeza. Esto fue posible gracias a la luz dada por grandes profesionales quienes impartiendo una clase o en algún pasillo de la universidad, compartiendo un café, se convirtieron en una guía en su momento alimentando mi curiosidad y enseñándome el oficio de la física. Naturalmente, entre todos ellos, deseo agradecer especialmente a mi director de tesis, el profesor Yeinzon Rodríguez, por permitirme aprender de él y por enseñarme con paciencia elementos indispensables, no sólo para la elaboración de este trabajo, sino también para mi formación como físico. Junto con él también quiero agradecer a mi codirector, el Dr. Gabriel Gómez por sus valiosos consejos en todo este tiempo que trabajamos juntos.

Estos agradecimientos deben incluir a mis compañeros y amigos Daniela Jaimes y Jose Amado, con quienes crecí, aprendí y disfruté de tantos momentos que, definitivamente, marcaron mi paso por esta carrera. También a David Ramos por tan valiosos aportes en aquellas interesantes y fructíferas discusiones.

Desde luego, agradecimientos totales a mis padres. Este trabajo, mi carrera y mi vida es por y para ustedes. Por último, quisiera agradecer a Carolina, por ser mi motor y mi polo a tierra, siempre. Por lo demás, gracias a quien corresponda.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	13
1. TEORÍA GENERALIZADA DE PROCA	26
1.1. INESTABILIDAD DE OSTROGRADSKY	26
1.1.1. Derivación general:	27
1.1.2. Casos particulares: densidades lagrangianas con dependencias de hasta primer y segundo orden en las derivadas de la coordenada generalizada:	29
1.2. ANTECEDENTES Y CONSTRUCCIÓN	32
1.3. ECUACIONES DE CAMPO	44
2. OBJETOS COMPACTOS	52
2.1. OBJETOS COMPACTOS EN RELATIVIDAD GENERAL	54
2.2. SOLUCIONES ANALÍTICAS ALREDEDOR DEL CENTRO DE LA ESTRELLA	58
2.3. ECUACIÓN DE ESTADO PARA ESTRELLAS DE NEUTRONES	60
3. APLICACIONES	67
3.1. ACOPLAMIENTOS CÚBICOS	68
3.1.1. Soluciones analíticas alrededor del centro de la estrella:	69
3.1.2. Soluciones numéricas:	76
3.2. ACOPLAMIENTOS CUÁRTICOS	82
3.2.1. Soluciones analíticas alrededor del centro de la estrella:	84
3.2.2. Soluciones numéricas:	88

4. CONCLUSIONES	94
BIBLIOGRAFÍA	100
ANEXOS	110

LISTA DE FIGURAS

	pág.
<p>Figura 1. Hamiltoniano (H^i) vs Momentum (P_1^i) para los sistemas físicos de las Ecs.(22) ($i = 1$) y (23) ($i = 2$). Para H^2 se tiene un comportamiento lineal en su dependencia respecto a P_1^2 independientemente de la forma de funcional de g_2.</p>	31
<p>Figura 2. Variación de (a) presión adimensional y (b) densidad adimensional respecto al radio, con ecuación de estado (122) con $\Gamma = 2.34$ y $K = 0.0130$. Las soluciones numéricas presentadas corresponden a (i) $\tilde{\beta}_3 = -1$, $\bar{a}_0 = 2.2$, $w_{0c} = 3.168$; (ii) $\tilde{\beta}_3 = 1$, $\bar{a}_0 = 2.0$, $w_{0c} = 10.939$ y para RG $\tilde{\beta}_3 = 0$, $\bar{a}_0 = 0$, $w_{0c} = 7.505$.</p>	77
<p>Figura 3. Distribución de masa respecto al radio. Los casos (i), (ii) y RG están descritos por los mismos valores de los parámetros dados en la Fig.(2).</p>	78
<p>Figura 4. Relaciones (a) masa-radio y (b) Energía gravitacional de enlace Δ normalizada por (M_*c^2) vs R_* con ecuación de estado $K = 0.0130$ y $\Gamma = 2.34$. Cada curva corresponde a: (a) $\tilde{\beta}_3 = -1$, $\bar{a}_0 = 1.0$, (b) $\tilde{\beta}_3 = -1$, $\bar{a}_0 = 2.0$, (c) $\tilde{\beta}_3 = -1$, $\bar{a}_0 = 2.2$, (d) $\tilde{\beta}_3 = -1$, $\bar{a}_0 = 2.4$, (e) $\tilde{\beta}_3 = +1$, $\bar{a}_0 = 2.0$ y RG donde $\tilde{\beta}_3 = 0$, $\bar{a}_0 = 0$. Las flechas muestran los resultados para valores cada vez más grandes de w_{0c}.</p>	79
<p>Figura 5. Soluciones numéricas para (a) $\bar{A}_0 = \sqrt{8\pi G} A'_0$ y para el modo longitudinal (b) $\bar{A}_1 = \sqrt{8\pi G}A_1$ en galileones cúbicos con las mismas constantes en la ecuación de estado. Los casos (i) y (ii) corresponden a los mismos parámetros que los modelos de la Fig.(2).</p>	81

Figura 6. Comportamiento de las funciones de (a) presión y (b) densidad para $n = 1$ y (c) presión y (d) densidad para $n = 2$, respecto al radio para ecuación de estado (118). Se usan los valores $K = 0.010$, $\Gamma = 2.34$ y $w_{0c} = 3.020$. Las curvas corresponden a los parámetros (i) $\bar{\beta}_4 = -0.06$, $\bar{a}_0 = 1.5$, (ii) $\bar{\beta}_4 = 0.06$, $\bar{a}_0 = 1.5$.

89

Figura 7. Variación de la masa respecto al radio (a) $n = 1$, (b) $n = 2$. Los casos graficados responden a los mismos parámetros que aquéllos de la Fig.(6).

90

Figura 8. (a) Relación masa-radio y (b) energía de enlace normalizada-radio. Cada curva corresponde a los casos (a) $\bar{\beta}_4 = -0.1$, $\bar{a}_0 = 1.0$, (b) $\bar{\beta}_4 = -0.1$, $\bar{a}_0 = 1.2$, (c) $\bar{\beta}_4 = -0.1$, $\bar{a}_0 = 1.3$, (d) $\bar{\beta}_4 = -0.1$, $\bar{a}_0 = 1.4$, (e) $\bar{\beta}_4 = +0.1$, $\bar{a}_0 = 1.0$ y (f) $\bar{\beta}_4 = +0.1$, $\bar{a}_0 = 1.5$. El caso de RG se obtiene cuando $\bar{\beta}_4 = 0.0$ y $\bar{a}_0 = 0.0$. La presión central se considera en el intervalo $0.1 < w_{0c} < 180$.

92

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. R_* y $\delta = R_* - R_{RG} $ para los casos de acoples (i) (negativo) y (ii) (positivo) para las potencias $n = 1$ y $n = 2$.	89
Tabla 2. Relación de distribución de masa y compacidad para los casos de acoples (i) negativo y (ii) positivo, para las potencias $n = 1$ y $n = 2$. Las compacidades son calculadas con los radios presentados en el cuadro 1.	91

LISTA DE ANEXOS

	pág.
Anexo A. CÁLCULO COMPONENTES $\mathcal{H}^{\epsilon\omega}$ PARA \mathcal{L}_4^P	110
Anexo B. DEMOSTRACIÓN $\mathcal{L}_9 \in \mathcal{L}_2^P$	113
Anexo C. PRINCIPIO DE ACCIÓN ESTACIONARIA PARA \mathcal{L}_{Proca}	116
Anexo D. COEFICIENTES EN LAS ECUACIONES DE CAMPO	128

RESUMEN

TÍTULO: OBJETOS COMPACTOS EN LA TEORÍA DE PROCA GENERALIZADA *

AUTOR: William Andrés Jaimes Espíndola **

PALABRAS CLAVE: teoría generalizada de Proca, objetos compactos, estrellas de neutrones, ecuaciones Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV).

DESCRIPCIÓN:

Las diversas observaciones del universo a diferentes escalas han abierto la posibilidad de probar las distintas predicciones teóricas provenientes de la Relatividad General (RG) y de teorías modificadas de la gravedad. Observaciones cosmológicas o astrofísicas se han convertido en criterios de restricción de estas teorías en sus parámetros libres y en su rango de aplicabilidad. En ese sentido, los objetos compactos como las estrellas de neutrones son un escenario atractivo para evaluar los efectos gravitacionales en el régimen de campo fuerte de estas teorías ya que, por los recientes desarrollos en observaciones de multi-mensajeros, conforman un laboratorio ideal en la búsqueda de una teoría exitosa de gravedad. En este trabajo se estudia la teoría generalizada de Proca como candidata a teoría de gravedad. Primero, se presentan sus principales características, construcción y ecuaciones de campo. Adicionalmente, se introduce de manera general el estudio de objetos compactos y se evalúan las implicaciones físicas de esta teoría en la construcción de soluciones de estrellas de neutrones. Se presentan los resultados para dos tipos de acoplamientos, cúbicos y cuárticos, dados mediante una ley de potencias del término cinético del campo vectorial. Para ello, se desarrollan soluciones analíticas en series alrededor del centro de la estrella. Ellas permiten extraer información física relevante sobre los efectos del acoplamiento en la estructura de la estrella, restringir el espacio de parámetros libres y obtener condiciones iniciales para las soluciones numéricas. Estas últimas se obtuvieron resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales que describen la estructura de la estrella mediante la implementación de un método Runge-Kutta con paso adaptativo. Ellas muestran las desviaciones respecto a RG de la distribución de masa, perfiles masa-radio, presión, etc.,

* Trabajo de grado

** Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Yeinzon Rodríguez García, Ph.D. Física. Codirector: Luis Gabriel Gómez Díaz, Ph.D. Física.

de acuerdo al acoplamiento y a los parámetros escogidos. Finalmente se discuten las implicaciones físicas de los resultados obtenidos.

ABSTRACT

TITLE: COMPACT OBJECTS IN THE GENERALIZED PROCA THEORY *

AUTHOR: William Andrés Jaimes Espíndola **

KEYWORDS: generalized Proca theory, compact objects, neutron stars, Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) equations.

DESCRIPTION:

The diverse observations of the universe at different scales have opened the possibility of testing the different theoretical predictions coming from General Relativity (GR) and modified theories of gravity. Cosmological or astrophysical observations have become criteria for restricting these theories in their free parameters and in their range of applicability. In this sense, compact objects such as neutron stars are an attractive scenario to evaluate the gravitational effects in the strong field regime of these theories since, due to recent developments in multi-messenger observations, they are an ideal laboratory in the search for a successful theory of gravity. In this work the generalized Proca theory is studied as a candidate for the theory of gravity. First, its main characteristics, construction and field equations are presented. Furthermore, the study of compact objects is introduced in a general way and the physical implications of this theory in the construction of neutron star solutions are evaluated. The results are presented for two types of couplings, cubic and quartic, given by a power law of the kinetic term of the vector field. For this, analytical solutions are developed in series around the center of the star. They allow the extraction of relevant physical information on the effects of coupling on the structure of the star, constrain the space of free parameters and obtain initial conditions for numerical solutions. The latter were obtained by solving the system of differential equations that describe the structure of the star by implementing a Runge-Kutta method with adaptive step. They show deviations with respect to RG of the mass distribution, mass-radius profiles, pressure, etc., according to the coupling and the chosen parameters. Finally, the physical implications of the results obtained are discussed.

* Bachelor Thesis

** Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Yeinzon Rodríguez García, Ph.D. Física. Codirector: Luis Gabriel Gómez Díaz, Ph.D. Física.

INTRODUCCIÓN

La Relatividad General (RG), propuesta por A. Einstein en 1915 ¹², derivó en el nacimiento de una nueva forma en que se estudian los fenómenos físicos en el universo a diferentes escalas. Debido a su gran rango de aplicabilidad, esta teoría no sólo se convirtió en una herramienta para estudiar a mayor profundidad el comportamiento y evolución del universo, sino que permitió entender la estructura del espaciotiempo y su relación con la materia. Avances posteriores, tanto teóricos como observacionales, no sólo comprobaron experimentalmente la validez de la RG y sus predicciones teóricas a escalas del Sistema Solar, sino que llevaron a preguntarse por la naturaleza, estructura y evolución de los diferentes objetos que conforman el cosmos.

En particular, el estudio sobre los objetos compactos en el marco de RG nace de la mano de K. Schwarzschild (1916) ³ y R. Oppenheimer, M. Volkoff y E. Tolman (1934) ⁴⁵. K. Schwarzschild publicó la primera solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein que describe el espaciotiempo al exterior de un objeto estático y esféricamente simétrico. Por su parte, E. Tolman, R. Oppenheimer y M. Volkoff obtuvieron el sistema de ecuaciones que describen la estructura del interior de un

¹ A. EINSTEIN. "Die Feldgleichungen der Gravitation". En: *Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin, Seite.* (1915).

² A. EINSTEIN. "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie [AdP 49, 769 (1916)]". En: *Annalen der Physik* 14 (2005).

³ K. SCHWARZSCHILD. "On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory". En: *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1916 (1916).

⁴ J. R. OPPENHEIMER y G. M. VOLKOFF. "On Massive Neutron Cores". En: *Phys. Rev.* 55 (1939).

⁵ R. C. TOLMAN. "Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid". En: *Phys. Rev.* 55 (1939).

objeto autogravitante de las mismas características geométricas y constituido por un fluido perfecto (ecuaciones TOV). Fue así como se tuvo, con un adecuado pegado en el borde del objeto, una descripción en todo el espaciotiempo de los efectos gravitacionales de este tipo de objetos. Con los años, el estudio de esta área de la astrofísica se ha enriquecido enormemente con la implementación de herramientas computacionales que han acelerado la eficiencia de los cálculos necesarios, y con el crecimiento de desarrollos teóricos y datos observacionales que han especificado apropiadamente las características físicas de este tipo de objetos ⁶.

En el marco de esta área de investigación, se han propuesto diversas posibilidades para construir ecuaciones de estado para estas estrellas basándose en modelos teóricos, por ejemplo, de física nuclear o de partículas para que, junto con las propiedades impuestas por la RG, describan las características físicas del objeto y cuyas predicciones puedan ser contrastadas con datos observacionales. Si bien esto no es competencia del presente trabajo, sí resulta interesante a la hora de ver el gran panorama desarrollado en la astrofísica de objetos compactos y demuestra que es una línea abierta y muy activa de la investigación en Física. Algunos ejemplos se presentan en las Refs. ⁷⁸⁹¹⁰.

De manera que desde que Sir A. Eddington verificó en 1919, con su famosa ex-

⁶ N. CHAMEL y P. HAENSEL. "Physics of Neutron Star Crusts". En: *Living Rev. Rel.* 11 (2008).

⁷ N. B. ZHANG y B. A. LI. "Extracting Nuclear Symmetry Energies at High Densities from Observations of Neutron Stars and Gravitational Waves". En: *Eur. Phys. J. A* 55 (2019).

⁸ D. KLOCHKOV y col. "Study of a new central compact object: The neutron star in the supernova remnant G15.9+0.2". En: *Astron. Astrophys.* 592 (2016).

⁹ Y. X. MARTINS y col. "Existence and classification of pseudo-asymptotic solutions for Tolman-Oppenheimer-Volkoff systems". En: *Ann. Phys.* 409 (2019).

¹⁰ J. ANTONIADIS y col. "The millisecond pulsar mass distribution: Evidence for bimodality and constraints on the maximum neutron star mass". En: *arXiv preprint arXiv:1605.01665* (2016).

pedición a la isla de príncipe, las predicciones teóricas sobre la deflexión de los rayos de luz a causa del campo gravitacional del Sol ¹¹, la RG no ha parado de acumular éxitos experimentales de todo tipo. Comprobaciones a escalas del Sistema Solar, detección de lentes gravitacionales, pruebas sobre el principio de equivalencia y la invarianza de Lorentz, efectos de *'frame dragging'*, ondas gravitacionales y la más reciente observación de un agujero negro, entre otras, que junto con los altos niveles de precisión alcanzados son, sin duda alguna, muestras del gran poder predictivo de esta teoría ¹²¹³¹⁴¹⁵¹⁶. Más aún, a escalas cosmológicas los fundamentos de la RG se manifiestan en la construcción del modelo estándar de la cosmología Λ CDM (Constante cosmológica Λ -materia oscura fría) que describe un universo homogéneo e isótropo en expansión y que ha concordado satisfactoriamente con las observaciones realizadas ¹⁷.

Basados en lo anteriormente expuesto, resulta válido preguntarse ¿Es la RG la teoría que describe correctamente la gravedad en todas las escalas? Para responder

-
- ¹¹ F. W. DYSON, A. S. EDDINGTON y C. DAVIDSON. "A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations made at the Total Eclipse of May 29, 1919". En: *Mem. of the Royal Astron. Soc.* 62 (1923).
- ¹² W. CLIFFORD. "The Confrontation between General Relativity and Experiment". En: *Living Rev. Relativ.* 17 (2014).
- ¹³ B. P. ABBOT y col. "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger". En: *Phys. Rev. Lett.* 116 (2016).
- ¹⁴ Collaborat E. H. T. "First M87 Event Horizon Telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole". En: *Astrophys. J. Lett.* 875 (2019).
- ¹⁵ K. AKIYAMA y col. "First M87 event horizon telescope results. IV. Imaging the central supermassive black hole". En: *Astrophys. J. Lett.* 875 (2019).
- ¹⁶ V. V. KRISHNAN y col. "Lense–Thirring frame dragging induced by a fast-rotating white dwarf in a binary pulsar system". En: *Science* 367 (2020).
- ¹⁷ P. BULL y col. "Beyond Λ CDM: Problems, solutions, and the road ahead". En: *Phys. Dark Univ.* 12 (2016).

esta pregunta, tomemos en consideración, en primer lugar, las observaciones realizadas a nivel cosmológico. El éxito del modelo Λ CDM está basado en requerir la introducción de campos adicionales (campo inflacionario, materia oscura y energía oscura) con propiedades que pueden llegar a considerarse exóticas y que, a pesar de los esfuerzos por tener una evidencia experimental de su existencia, no se ha tenido una detección directa de ellos ^{18,19}. Muestra de ello es el descubrimiento de la expansión acelerada actual del universo por medio de observaciones de corrimiento al rojo de luz proveniente de supernovas tipo Ia ^{20,21}. Este fenómeno, en principio, fue adjudicado a los efectos gravitacionales de la energía de vacío manifestándose en la constante cosmológica. No obstante, al comparar el valor medido con estimaciones realizada del modelo estándar de física de partículas se encontró una diferencia de 120 órdenes de magnitud ²². La solución más sencilla a este problema es introducir un campo escalar que describa la energía oscura ²³, entidad física que permea todo el universo, garantiza apropiadamente la expansión acelerada y constituye alrededor del 70 % del contenido material del mismo, pero que por sus características mismas ha sido tema de debate desde su postulación, ganando aceptación en una

¹⁸ G. BERTONE, D. HOOPER y J. SILK. "Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints". En: *Phys. Rept.* 405 (2005).

¹⁹ A. AGHAMOUSA y col. "The DESI experiment part I: Science, targeting, and survey design". En: *arXiv preprint arXiv:1611.00036* (2016).

²⁰ A. RIESS y col. "Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant". En: *Astron. J.* 116 (1998).

²¹ S. PERLMUTTER y col. "Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae". En: *Astrophys. J.* 517 (1999).

²² S. WEINBERG. "The cosmological constant problem". En: *Rev. Mod. Phys.* 61 (1989).

²³ D. HUTERER y D. L. SHAFER. "Dark energy two decades after: Observables, probes, consistency tests". En: *Rept. Prog. Phys.* 81 (2017).

parte de la comunidad científica así como cierto nivel de escepticismo en la otra ²⁴. Por otro lado, observaciones del universo temprano y tardío arrojan diferencias aparentemente irreconciliables en los valores medidos para el parámetro de Hubble (H_0), hecho conocido como la tensión de Hubble. Por un lado, de observaciones astronómicas de la velocidad de recesión de 70 Cefeidas de la gran nube de Magallanes se ha estimado un valor $H_0 = 74.03 \pm 1.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ²⁵. Por el otro, análisis de datos extraídos de observaciones de fuentes tan importantes como lo es la radiación de fondo de microondas (CMB, por sus siglas en inglés) se estima $H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ²⁶. Lo anterior muestra una necesidad real de cuestionarse por la validez del modelo estándar de la cosmología.

A nivel astrofísico, si bien colaboraciones como LIGO o el telescopio Event Horizon han dado en el clavo con comprobaciones observacionales de la existencia de grandes predicciones de la RG como lo son las ondas gravitacionales y los agujeros negros, éstas no han sido una prueba completamente concluyente de que la RG es la teoría final que de cuenta de todos los fenómenos gravitacionales en todas las escalas. En particular, la astrofísica de objetos compactos muestra un panorama diferente. En esta área aún existe el reto de construir modelos de estrellas de neutrones con ecuaciones de estado realistas que concuerden con las observacio-

²⁴ K. COOPER. "The dark-energy deniers". En: *Phys. World* 31 (2018).

²⁵ A. RIESS y col. "Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond Λ CDM". En: *Astrophys. J.* 876 (2019).

²⁶ N. AGHANIM y col. "Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters". En: *arXiv preprint arXiv:1807.06209* (2018).

nes emergentes (véase, por ejemplo ²⁷²⁸). En este mismo sentido, los últimos datos acerca de la posible existencia de enanas blancas tipo ‘*super Chandrasekhar*’ ²⁹ o de estrellas de neutrones particularmente masivas ³⁰ son una ventana que se abre para evaluar la RG y sus alternativas sobre todo en el régimen de campo fuerte. De manera que estas inconsistencias, así como las anomalías observacionales, abren la posibilidad de considerar la existencia de una teoría de gravedad que extienda la RG y que sus prescripciones teóricas y fenomenológicas sean más consistentes con los escenarios descritos. El desarrollo de esta línea de investigación es bastante extenso ³¹ y los estudios en estas teorías modificadas de la gravedad pasan, no sólo por las motivaciones teóricas de su construcción y su aplicación en los escenarios descritos, sino también por reproducir los éxitos ya alcanzados por la RG. Una de las alternativas de modificación de la RG está basada en la inclusión de un campo adicional, acoplado de forma no mínima al sector gravitacional. Estos desarrollos fueron llevados a cabo en primer lugar por G.W. Horndeski hacia el año 1974. Él presentó sus resultados producto de obtener la acción, inicialmente para un campo escalar ³² y posteriormente para un campo vectorial con simetría de *Gauge*

²⁷ M. RUIZ, S. L. SHAPIRO y A. TSOKAROS. “GW170817, general relativistic magnetohydrodynamic simulations, and the neutron star maximum mass”. En: *Phys. Rev. D.* 97 (2018).

²⁸ L. REZZOLLA, E. R. MOST y L. R. WEIH. “Using gravitational-wave observations and quasi-universal relations to constrain the maximum mass of neutron stars”. En: *Astrophys. J.* 852 (2018).

²⁹ D. A. HOWELL y col. “The type Ia supernova SNLS-03D3bb from a super-Chandrasekhar-mass white dwarf star”. En: *Nature* 443 (2006).

³⁰ H. T. CROMARTIE y col. “Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar”. En: *Nat. Astron.* 4 (2020).

³¹ L. BAOJIU y K. KAZUYA. *Modified Gravity: Progresses And Outlook Of Theories, Numerical Techniques And Observational Tests*. World Scientific, 2019.

³² G. W. HORNDESKI. “Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space”. En: *Int. J. Theor. Phys.* 10 (1974).

$U(1)$ ³³ más gravedad, que llevaron a las ecuaciones de Euler-Lagrange más generales en espaciotiempo curvo. Adicionalmente, su desarrollo garantizó que estas ecuaciones de movimiento fueran cuando mucho de segundo orden para así evadir posibles inestabilidades de Ostrogradski³⁴³⁵. Finalmente, Horndeski llevó estas teorías a contextos fenomenológicos, calculando soluciones de vacío para el exterior de objetos estáticos y esféricamente simétricos³⁶ y construyó un teorema tipo Birkhoff para esta misma configuración³⁷, entre otros trabajos relacionados.

Si bien el hecho anterior muestra la gran perspicacia de Horndeski en el desarrollo de su idea, sus resultados pasaron prácticamente desapercibidos. Alrededor de treinta años después, sus teorías salieron nuevamente a la luz por su pertinencia y por el impulso dado por los trabajos de A. Nicolis *et. al.*, Deffayet *et. al.*, y T. Kobayashi *et. al.*³⁸³⁹⁴⁰. En estos trabajos se presenta la acción más general para un campo escalar más gravedad que es invariante ante difeomorfismos y que involu-

-
- ³³ G. W. HORNDESKI. "Conservation of Charge and the Einstein-Maxwell Field Equations". En: *J. Math. Phys.* 17 (1976).
- ³⁴ R. P. WOODARD. "Ostrogradsky's theorem on Hamiltonian instability". En: *Scholarpedia* 10 (2015).
- ³⁵ R. P. WOODARD. "Avoiding dark energy with $1/r$ modifications of gravity". En: *Lect. Notes Phys.* 720 (2007).
- ³⁶ G. W. HORNDESKI. "Static Spherically Symmetric Solutions to a System of Generalized Einstein-Maxwell Field Equations". En: *Phys. Rev. D* 17 (1978).
- ³⁷ G. W. HORNDESKI. "Birkhoff's theorem and magnetic monopole solutions for a system of generalized Einstein-Maxwell field equations". En: *J. Math. Phys.* 19 (1978).
- ³⁸ A. NICOLIS, R. RATAZZI y E. TRINCHERINI. "The Galileon as a local modification of gravity". En: *Phys. Rev. D* 79 (2009).
- ³⁹ C. DEFFAYET y col. "From k-essence to generalised Galileons". En: *Phys. Rev. D.* 84 (2011).
- ⁴⁰ T. KOBAYASHI, M. YAMAGUCHI y J. YOKOYAMA. "Generalized G-Inflation: Inflation with the Most General Second-Order Field Equations". En: *Prog. Theor. Phys.* 126 (2011).

cra cuando mucho derivadas espaciotemporales del campo de segundo orden. En la Ref. ⁴⁰ se muestra que este desarrollo, llamada teoría de Galileones escalares, es equivalente a la presentada por Horndeski décadas atrás. Por otro lado, y de manera análoga al trabajo de Horndeski, L. Heisenberg y G. Tasinato presentaron en las Refs.⁴¹⁴² la acción más general construida con un campo vectorial sin simetrías internas, más gravedad, invariante ante difeomorfismos, que involucra derivadas de hasta segundo orden del campo vectorial y que propaga el número adecuado de grados de libertad. Ésta es la acción de Galileones vectoriales, que con el desarrollo de importantes trabajos posteriores se completó y consolidó como una adición a la teoría de Proca, llevando a la teoría generalizada de Proca ⁴³⁴⁴⁴⁵.

Los crecientes estudios sobre las implicaciones físicas de esta teoría han revelado algunas características que aumentan el interés sobre la misma. Por un lado, se tiene la posibilidad de explorar el rol de los campos bosónicos vectoriales en la evolución cosmológica del universo así como sus efectos gravitacionales en todas

⁴¹ L. HEISENBERG. “Generalization of the Proca Action”. En: *JCAP* 1405 (2014).

⁴² G TASINATO. “Cosmic Acceleration from Abelian Symmetry Breaking”. En: *JHEP* 1404 (2014).

⁴³ E. ALLYS, P. PETER e Y. RODRÁGUEZ. “Generalized Proca action for an Abelian vector field”. En: *JCAP* 1602 (2016).

⁴⁴ E. ALLYS y col. “On the 4D generalized Proca action for an Abelian vector field”. En: *JCAP* 1609 (2016).

⁴⁵ J. BELTRAN JIMENEZ y L. HEISENBERG. “Derivative self-interactions for a massive vector field”. En: *Phys. Lett. B.* 757 (2016).

las escalas ⁴⁶⁴⁷⁴⁸. Adicionalmente, a nivel astrofísico se ha demostrado la existencia de soluciones de agujeros negros ⁴⁹ y estrellas relativistas y no relativistas en el marco de esta teoría ⁵⁰, lo que la convierte en una teoría promisoría para ser puesta a prueba con las observaciones astronómicas existentes y venideras de este tipo de escenarios físicos. Por otro lado, una característica atractiva de ésta es la existencia de un mecanismo natural de apantallamiento denominado *mecanismo de Vainshtein* ⁵¹, el cual garantiza que, a escalas del Sistema Solar, los efectos de las interacciones inherentes a la teoría generalizada de Proca se anulen, de manera que se pueden reproducir los éxitos alcanzados por la RG ⁵².

Recientemente, la detección del evento GW170817 (señal de ondas gravitacionales producto de la fusión de un sistema binario de estrellas de neutrones) ⁵³ junto con su contraparte electromagnética GRB 170817A (señal de rayos gamma proveniente

-
- ⁴⁶ A. OLIVEROS y M. A. JARABA. "Inflation driven by massive vector fields with derivative self-interactions". En: *Int. J. Mod. Phys. D.* 28 (2019).
- ⁴⁷ A. DEFELICE y col. "Reducing the H_0 tension with generalized Proca theory". En: *arXiv preprint arXiv:2002.06782* (2020).
- ⁴⁸ J. JIMENEZ BELTRAN y A. MAROTO. "Cosmological evolution in vector-tensor theories of gravity". En: *Phys. Rev. D.* 80 (2009).
- ⁴⁹ R. KASE, M. MINAMITSUJI y S. TSUJIKAWA. "Black holes in quartic-order beyond-generalized Proca theories". En: *Phys. Lett. B* 782 (2018).
- ⁵⁰ R. KASE, M. MINAMITSUJI y S. TSUJIKAWA. "Relativistic stars in vector-tensor theories". En: *Phys. Rev. D.* 97 (2018).
- ⁵¹ A. I. VAINSHTEIN. "To the problem of nonvanishing gravitation mass". En: *Phys. Lett. B* 39 (1972).
- ⁵² A. DEFELICE y col. "Screening fifth forces in generalized Proca theories". En: *Phys. Rev. D.* 93 (2016).
- ⁵³ B. P. ABBOTT y col. "GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral". En: *Phys. Rev. Lett.* 119 (2017).

del mismo evento astrofísico)⁵⁴⁵⁵, demostraron que si la rapidez de propagación de las ondas gravitacionales difiere de la rapidez de propagación de la luz en el vacío c , lo hace, cuando mucho, en una parte en 10^{-15} ⁵⁶⁵⁷⁵⁸⁵⁹⁶⁰. Este hecho, así como otros resultados observacionales, han introducido fuertes restricciones a la teoría generalizada de Proca⁶¹ y, en general, a todas las teorías de gravedad⁵⁷⁶². Lo anterior permite inferir que mejoras de sensibilidad de experimentos de diferentes colaboraciones, así como futuros desarrollos en creación de otros más, sin duda alguna, mejorarán las restricciones que deben ser impuestas en ésta y todas las teorías de gravitación que intenten describir apropiadamente el universo en todas

-
- ⁵⁴ B. P. ABBOTT y col. “Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger”. En: *Astrophys. J. Lett.* 848 (2017).
- ⁵⁵ B. P. ABBOTT y col. “Gravitational Waves and Gamma-Rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A”. En: *Astrophys. J. Lett.* 848 (2017).
- ⁵⁶ H. WANG y col. “The GW170817/GRB 170817A/AT 2017gfo Association: Some Implications for Physics and Astrophysics”. En: *Astrophys. J. Lett.* 851 (2017).
- ⁵⁷ T. BAKER y col. “Strong Constraints on Cosmological Gravity from GW170817 and GRB 170817A”. En: *Phys. Rev. Lett.* 119 (2017).
- ⁵⁸ P. CREMINELLI y F. VERNIZZI. “Dark Energy after GW170817 and GRB170817A”. En: *Phys. Rev. Lett.* 119 (2017).
- ⁵⁹ J. SAKSTEIN y B. JAIN. “Implications of the Neutron Star Merger GW170817 for Cosmological Scalar-Tensor Theories”. En: *Phys. Rev. Lett.* 119 (2017).
- ⁶⁰ J. EZQUIAGA y M. ZUMALACARREGUI. “Dark Energy After GW170817: Dead Ends and the Road Ahead”. En: *Phys. Rev. Lett.* 119 (2017).
- ⁶¹ A. DEFELICE, L. HEISENBERG y S. TSUJIKAWA. “Observational constraints on generalized Proca theories”. En: *Phys. Rev. D* 95 (2017).
- ⁶² Debido a la relación entre la frecuencia detectada en el evento y la frecuencia de corte de la teoría, estas restricciones aplican dependiendo de la escala considerada (C. DE RHAM y S. MELVILLE. “Gravitational Rainbows: LIGO and Dark Energy at its Cutoff”. En: *Phys. Rev. Lett.* 121 [2018]).

sus escalas ⁶³.

Motivado en los hechos expuestos, el presente trabajo estudia las características físicas fundamentales al interior de una estrella de neutrones, descrita por una ecuación de estado polítropa en el marco de la teoría generalizada de Proca, basándose en el procedimiento y en los resultados obtenidos por R. Kase, *et. al.* en la Ref. ⁵⁰. En ese sentido, el capítulo 1 se concentra en los aspectos teóricos asociados a la construcción de la teoría; para ello se presenta en primer lugar la deducción del teorema de Ostrogradsky, el cual presenta una condición necesaria, mas no suficiente, para evadir inestabilidades en el Hamiltoniano. Posteriormente, se reproduce la construcción de la teoría de acuerdo a la metodología presentada en la Ref. ⁶⁴. Finalmente, se encuentran las ecuaciones de campo gravitacional y de Euler-Lagrange a partir del principio de acción estacionaria y se evalúan para un objeto estático y esféricamente simétrico para así obtener las ecuaciones diferenciales que describen este sistema físico.

En el capítulo 2 se discute la descripción de estrellas de neutrones en el marco de RG, así como la necesidad de plantear una ecuación de estado que describa la materia que compone la estrella. Adicionalmente, se encuentran soluciones analíticas alrededor del centro de la estrella como descripción de la metodología a seguir y cuya información es de gran importancia para contrastar con los resultados obtenidos en la teoría generalizada de Proca.

Por último, en el capítulo 3 se presentan las aplicaciones de acoplamientos cúbicos y cuárticos de la teoría generalizada de Proca en estrellas de neutrones y sus efectos en las principales características físicas del objeto considerado. Inicialmen-

⁶³ T. BAKER, D. PSALTIS y C. SKORDIS. "Linking Tests of Gravity On All Scales: from the Strong-Field Regime to Cosmology". En: *Astrophys. J.* 802 (2015).

⁶⁴ A. GALLEGO CADAVID e Y. RODRIGUEZ. "A systematic procedure to build the beyond generalized Proca field theory". En: *Phys. Lett. B* 798 (2019).

te, se obtienen soluciones analíticas en series de potencias alrededor del centro de la estrella. Éstas se usan para generar restricciones al espacio de parámetros que garantizan la viabilidad física de las soluciones y permiten encontrar condiciones iniciales a pequeñas distancias fuera del origen para la resolución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales.

El trabajo en este último capítulo requirió la implementación de un código computacional que permitió resolver el complejo sistema de ecuaciones diferenciales obtenido. Para ello se usó el lenguaje de programación *Python*, específicamente la sub-paquetería *scipy.python* y su método integrado *dopri5* que corresponde a un método Dormand-Prince, que es esencialmente un método Runge-Kutta de cuarto orden con paso adaptativo y que, por facilidad, el lector podrá encontrarlo en la dirección <https://bit.ly/2S01H51>. El documento finaliza con las conclusiones sobre los resultados obtenidos destacando su importancia física y algunas necesidades de cara a futuros desarrollos que fueron identificadas con el fin de encauzar el trabajo en esta línea de investigación.

A lo largo del documento se usará la siguiente notación: las constantes $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ y $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ son la constante de gravitación universal y la rapidez de la luz en el vacío. Adicionalmente, los operadores ∇ y \square denotan derivada covariante y operador D'Alambertiano ($\nabla^\mu \nabla_\mu$), respectivamente, y un punto sobre alguna cantidad denota derivada temporal. Para el tensor métrico se considera una signatura mayormente positiva (3, 1). Por su parte, los tensores $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$, $R_{\mu\nu}$ y $G_{\mu\nu}$ que corresponden al tensor de Riemman, tensor de Ricci y tensor de Einstein respectivamente, están denotados por

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma} \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho},$$

$$+R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu},$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R.$$

Finalmente, el escalar de Ricci se obtiene de la contracción $R = R^\mu{}_\mu$.

1. TEORÍA GENERALIZADA DE PROCA

Ya se han mencionado algunas de las propiedades que hacen de la teoría generalizada de Proca una alternativa viable y prometedora como extensión a la RG. Diferentes trabajos han mostrado la eficiencia de ésta para explicar la historia térmica del universo ⁴⁶⁴⁸, su papel para aliviar el problema de la tensión de Hubble ⁴⁷ o la existencia de soluciones de agujeros negros y objetos compactos ⁴⁹⁶⁵. No obstante, es necesario primero conocer los aspectos en los que se fundamenta la teoría para así explorar su rol en todos los escenarios físicos posibles donde la gravitación sea relevante.

Como primer aspecto se presenta la demostración y discusión del teorema de Ostrogradsky como regla fundamental a tener en cuenta durante la construcción de la acción generalizada de Proca. Posteriormente, se construye la acción más general resultante de añadir todos los posibles términos invariantes de Lorentz, usando un campo vectorial Abelian y sus primeras derivadas espaciotemporales en espacio-tiempo curvo. Para dicha acción se encuentran las ecuaciones de campo mediante el principio de acción estacionaria y se reemplaza la configuración esféricamente simétrica ya descrita obteniendo las ecuaciones finales del sistema.

1.1. INESTABILIDAD DE OSTROGRADSKY

Einstein alguna vez comentó *'lo que realmente me interesa es si Dios tuvo alguna elección en la creación del mundo'* ⁶⁶. La respuesta a esta inquietud pasa por una

⁶⁵ J. CHAGOYA, G. NIZ y G. TASINATO. "Black Holes and Neutron Stars in Vector Galileons". En: *Class. Quant. Grav.* 34 (2017).

⁶⁶ C. SEELIG. *Helle Zeit–Dunkle Zeit: In memoriam Albert Einstein*. Springer-Verlag, 1956.

premisa bastante poderosa: siempre que no existan patologías asociadas a una acción, en principio, cualquiera de ellas es válida. En otras palabras, para construir una teoría que describa los distintos fenómenos de la naturaleza, pero que de alguna manera evada posibles inconsistencias físicas, se requiere proponer una acción que esté libre de patologías. En ese sentido, el matemático ruso Mijaíl Ostrogradsky, alrededor del año 1850 ⁶⁷, propuso una restricción en el orden máximo de las ecuaciones de movimiento de un sistema físico como condición necesaria más no suficiente para que el Hamiltoniano asociado esté acotado por debajo, concepto que se conoce como *Inestabilidad de Ostrogradsky*.

1.1.1. Derivación general: A continuación se presenta la generalización en la construcción del teorema siguiendo la guía presentada en la Ref.³⁴. Posteriormente, se toman como casos particulares dos densidades lagrangianas las cuales poseen dependencias de hasta la primera y segunda derivada, respectivamente. Éstas son utilizadas para evidenciar la presencia de la inestabilidad.

Considerese una densidad Lagrangiana que depende de una coordenada generalizada (q), así como de sus primeras N derivadas respecto al tiempo, es decir

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} (q, \dot{q}, \dots, q^{(N)}) . \quad (1)$$

Las ecuaciones de Euler Lagrange para dicha densidad lagrangiana están dadas por

$$\sum_{i=0}^N \left(-\frac{d}{dt} \right)^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{(i)}} = 0. \quad (2)$$

Adicionalmente, se asume que la densidad lagrangiana satisface la condición de *no*

⁶⁷ M. OSTROGRADSKY. "Memoires sur les equations differentielles, relatives au probleme des isoperimetres". En: *Mem. Acad. St. Petersburg* 6 (1850).

degeneración dada por

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^{(N)2}} \neq 0, \quad (3)$$

lo que inmediatamente implica que existe una función f que, de manera general, depende de la coordenada generalizada así como de las N -ésimas derivadas de ésta y que satisface

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{(N)}} = f(q, \dot{q}, \dots, q^{(N)}). \quad (4)$$

Puede verse que al operar la Ec. (2), el término final de la sumatoria produce que ésta lleve a ecuaciones diferenciales de orden $2N$ en las derivadas de la coordenada generalizada, es decir

$$E(q, \dot{q}, \dots, q^{(2N)}) = 0, \quad (5)$$

donde E representa el sistema de ecuaciones diferenciales. De manera que para tener un problema de Cauchy bien definido, se requieren $2N$ condiciones iniciales $q_0, \dot{q}_0, \dots, q_0^{(2N-1)}$. Otra consecuencia de tal resultado es que para describir apropiadamente el Hamiltoniano del sistema, se requieren $2N$ variables canónicas en el espacio de fase. Las variables canónicas que Ostrogradsky propone son:

$$Q_i = q_i^{(i-1)}, \quad P_i = \sum_{j=i}^N \left(-\frac{d}{dt} \right)^{j-i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{(N)}}. \quad (6)$$

Al aplicar una transformación de Legendre sobre la densidad lagrangiana, se obtiene el Hamiltoniano

$$H = \sum_{i=1}^N P_i q^{(i)} - \mathcal{L}, \quad (7)$$

es decir,

$$H = P_1 \dot{q} + P_2 \ddot{q} + \dots + P_{(N-1)} q^{(N-1)} + P_N q^{(N)} - \mathcal{L}(q, \dot{q}, \dots, q^{(N)}). \quad (8)$$

A partir de las expresiones dadas por la Ec. (6), es evidente que, hasta $q^{(N-1)}$, todas

las derivadas de q están definidas apropiadamente en el espacio de fase. Por el contrario, $q^{(N)}$ se encuentra relacionada con el espacio de fase mediante

$$P_N = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{(N)}} = f(Q, Q_1, \dots, Q_N, q^{(N)}), \quad (9)$$

donde la condición de no degeneración es parte fundamental de dicha relación. No obstante, mediante una transformación inversa del espacio de fase, la anterior ecuación puede ser reescrita como

$$q^{(N)} = g(Q, Q_1, \dots, Q_N, P_N), \quad (10)$$

lo que al reemplazar en la Ec. (8) conduce a

$$H = P_1 Q_2 + P_2 Q_3 + \dots + P_{(N-1)} Q_N + P_N g(Q, Q_1, \dots, Q_N, P_N) - \mathcal{L}[Q_1, Q_2, \dots, g(Q, Q_1, \dots, Q_N, P_N)]. \quad (11)$$

Evidentemente, sobre los dos últimos términos del Hamiltoniano no puede decirse nada de manera *a priori*, ya que su dependencia de una función aún no definida no permite realizar un análisis definitivo de su comportamiento. Sin embargo, es claro que para los $N - 1$ primeros términos se presenta un comportamiento lineal en los respectivos P_i , de manera que el Hamiltoniano puede barrer un espacio de valores entre menos infinito e infinito. Para dar mayor claridad, a continuación se presentan los siguientes casos.

1.1.2. Casos particulares: densidades lagrangianas con dependencias de hasta primer y segundo orden en las derivadas de la coordenada generalizada:

Considérense dos sistemas físicos hipotéticos en los que la densidad Lagrangiana que los describe depende de la coordenada generalizada y tan sólo de su primera

derivada respecto al tiempo para el primer caso y de la primera y segunda derivada para el segundo; es decir,

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(q, \dot{q}), \quad (12)$$

$$\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2(q, \dot{q}, \ddot{q}), \quad (13)$$

las cuales están sujetas a las condiciones de *no degeneración* dadas por la Ec. (3). A partir de esto y de la Ec. (4) se tiene que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}^1}{\partial \dot{q}^2} \neq 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial \dot{q}} = f_1(q, \dot{q}), \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}^2}{\partial \ddot{q}^2} \neq 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \ddot{q}} = f_2(q, \dot{q}, \ddot{q}). \quad (15)$$

Las variables canónicas de dichos sistemas, de acuerdo a la Ec. (6), están determinadas por

$$Q^1 = q, \quad P^1 = \frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial \dot{q}}, \quad (16)$$

para el primer sistema, y por

$$Q_1^2 = q, \quad P_1^2 = \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \ddot{q}} \right), \quad (17)$$

$$Q_2^2 = \dot{q}, \quad P_2^2 = \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \ddot{q}},$$

para el segundo. De acuerdo a la Ec. (8), los Hamiltonianos que describirán cada uno de estos sistemas estarán dados por

$$H^1 = P^1 \dot{q} - \mathcal{L}^1, \quad (18)$$

$$H^2 = P_1^2 \dot{q} + P_2^2 \ddot{q} - \mathcal{L}^2. \quad (19)$$

Por otra parte, por medio de la condición de no degeneración se puede establecer

$$\dot{q} = g_1(Q^1, P^1), \quad (20)$$

para la derivada de la coordenada en el primer caso, y

$$\ddot{q} = g_2(Q_1^2, Q_2^2, P_2^2), \quad (21)$$

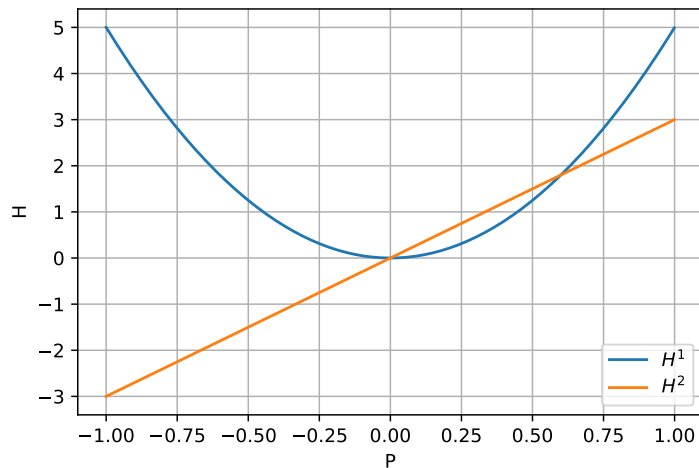
para la segunda derivada en el segundo. Con todo lo anterior, los respectivos Hamiltonianos de estos sistemas se pueden reescribir como

$$H^1 = P^1 g_1(Q^1, P^1) - \mathcal{L}_1[Q^1, g_1(Q^1, P^1)], \quad (22)$$

$$H^2 = P_1^2 Q_2^2 + P_2^2 g_2(Q_1^2, Q_2^2, P_2^2) - \mathcal{L}_2[Q_1^2, Q_2^2, g_2(Q_1^2, Q_2^2, P_2^2)]. \quad (23)$$

Estos resultados logran ser un excelente ejemplo de lo discutido en el caso general.

Figura 1. Hamiltoniano (H^i) vs Momentum (P_1^i) para los sistemas físicos de las Ecs.(22) ($i = 1$) y (23) ($i = 2$). Para H^2 se tiene un comportamiento lineal en su dependencia respecto a P_1^2 independientemente de la forma de funcional de g_2 .



Es válido aclarar que, salvo transformaciones canónicas, el Hamiltoniano es la energía del sistema. En la Fig.1 se grafican los Hamiltonianos de los casos particulares considerados. Para un primer caso (Ec. (22)) se muestra un sistema físico del que no se tiene mucha información pues el comportamiento del Hamiltoniano es absolutamente dependiente de la forma de g_1 , la cual es cuadrática en este caso. Por su parte, la falta de una cota inferior para el segundo caso proveniente del comportamiento lineal respecto a P_1^2 , como se evidencia en la Ec. (23), significa un hipotético sistema físico sin estado base, lo cual trae graves problemas tanto a nivel clásico como cuántico ³⁵³⁴. De manera general, la Ec. (11) muestra que si la densidad lagrangiana considerada tiene una dependencia de un mayor número de derivadas de la coordenada generalizada, mayor será el orden de las derivadas en las ecuaciones de movimiento y con ellas mayor será el número de variables canónicas para las que se presentará un comportamiento lineal en el Hamiltoniano.

Este comportamiento es lo que se conoce como inestabilidad de Ostrogradsky y el anterior análisis muestra que existe una patología asociada a las ecuaciones de movimiento producto de estas densidades lagrangianas particulares. Por lo tanto, de los resultados mostrados, puede concluirse que, siempre que el sistema sea no degenerado y las ecuaciones de movimiento sean de orden mayor o igual a tres, el Hamiltoniano no se encontrará acotado por debajo. De aquí se concluye que el sistema asociado no podrá corresponder a un posible sistema físico estable.

1.2. ANTECEDENTES Y CONSTRUCCIÓN

Recientemente se presentó en la Ref. ⁶⁴ un procedimiento sistemático para construir la acción generalizada de Proca, la cual introduce acoplamientos no mínimos entre el sector gravitacional y un campo vectorial de tipo abeliano. Este nuevo procedimiento no sólo reproduce los resultados conocidos de la teoría generalizada de Proca, sino que además revela la existencia de nuevos términos en espaciotiempo

curvo que no habían sido presentados en la construcción original y que posteriormente se propusieron como piezas de lagrangiano extra que se incluían de manera *ad hoc* en la teoría denominada más allá de Proca ⁶⁸. A continuación se presenta la construcción teniendo como guía este nuevo procedimiento.

Antes que nada, vale la pena recordar que debido a la descomposición de Helmholtz, cualquier vector A_μ espaciotemporal puede escribirse como

$$A_\mu = \mathcal{A}_\mu + \nabla_\mu \phi, \quad (24)$$

donde \mathcal{A}_μ es un vector sin divergencia y ϕ es un campo escalar. De este modo ϕ se constituye como el grado de libertad longitudinal asociado a A_μ . El estudio del teorema de Ostrogradsky permite ver que al agregar dependencias de segundas derivadas de un campo en la acción se llegan a ecuaciones de movimiento de cuarto orden que inevitablemente introduce inestabilidades en la teoría en cuestión. No obstante, se puede verificar que en algunos casos pueden ser agregadas estas dependencias de segundo orden en las derivadas espaciotemporales del campo, pero exigiendo que las relaciones entre ellas eliminen toda contribución de orden superior a dos en las ecuaciones de movimiento y así evadir posibles inestabilidades.

Este tratamiento no es replicable para ordenes superiores, pues al agregar dependencias de orden tres o más en las derivadas espaciotemporales del campo no se pueden encontrar contratérminos que anulen todas las contribuciones de derivadas de orden superior a dos en las ecuaciones de movimiento. Por lo anterior, la teoría generalizada de Proca debe ser construida teniendo en cuenta todas las posibles contracciones del campo vectorial y su primera derivada espaciotemporal con primitivos invariantes del grupo de Lorentz; es decir, el tensor métrico y el tensor

⁶⁸ L. HEISENBERG, R. KASE y S. TSUJIKAWA. "Beyond generalized Proca theories". En: *Phys. Lett. B* 760 (2016).

de Levi-Civita. De esta manera se garantiza que para el modo longitudinal no se introduzcan derivadas de orden mayor a dos ($\nabla_\mu A_\nu \rightarrow \nabla_\mu \nabla_\nu \phi$) y con ellas inestabilidades de Ostrogradsky en la teoría ⁶⁹.

En este caso se calculará la acción más general con dos derivadas del campo vectorial A_μ , la cual se denotará como \mathcal{L}_4^P . No obstante para considerar todos los posibles términos, se pueden incluir contracciones con dos y cuatro campos vectoriales adicionales. Al considerar todos los posibles casos y eliminar términos redundantes se encuentran las siguientes piezas:

1. Sin campo vectorial adicional:

- $\mathcal{L}_1 = \nabla^\mu A_\mu \nabla^\nu A_\nu,$
- $\mathcal{L}_2 = \nabla_\mu A_\nu \nabla^\mu A_\nu,$
- $\mathcal{L}_3 = \nabla_\mu A_\nu \nabla^\nu A^\mu,$
- $\mathcal{L}_4 = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma.$

2. Con dos campos vectoriales adicionales:

- $\mathcal{L}_5 = A^\mu A^\nu \nabla_\mu A_\nu \nabla^\rho A_\rho,$
- $\mathcal{L}_6 = A^\mu A^\rho \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A^\nu,$
- $\mathcal{L}_7 = A^\mu A^\sigma \nabla_\mu A_\nu \nabla^\nu A_\sigma,$
- $\mathcal{L}_8 = A^\sigma A^\nu \nabla_\mu A_\nu \nabla^\mu A_\sigma,$
- $\mathcal{L}_9 = \epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} A_\alpha A^\mu \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma,$
- $\mathcal{L}_{10} = \epsilon^{\alpha\mu\rho\sigma} A_\alpha A^\nu \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma.$

3. Con cuatro campos vectoriales adicionales:

⁶⁹ Y. RODRIGUEZ y A. A. NAVARRO. "Scalar and vector Galileons". En: *J. Phys. Conf. Ser.* 831 (2017).

$$\blacksquare \mathcal{L}_{11} = A^\mu A^\nu A^\rho A^\sigma \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma.$$

Se puede probar que cuando se pretende realizar contracciones con un número superior de campos vectoriales estos se contraen entre sí, es decir $A^\mu A_\mu$, de manera que inevitablemente todos los posibles nuevos términos se reducen a los ya presentados pero multiplicados por un factor A^{2n} (con $n = 1, 2, \dots$). Por lo anterior, la pieza de lagrangiano más general posible con dos primeras derivadas espaciotemporales del campo vectorial resulta de una combinación lineal general de todos los términos ya mostrados pero multiplicados cada uno de ellos por una función arbitraria de A^2 . En conclusión, el lagrangiano más general posible construido con todos los posibles términos invariantes de Lorentz, con a lo sumo dos derivadas del campo vectorial, está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^P = & f_1(A^2)(\nabla \cdot A)^2 + f_2(A^2)\nabla_\mu A_\nu \nabla^\mu A^\nu + f_3(A^2)\nabla_\mu A_\nu \nabla^\nu A^\mu + f_4(A^2)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma \\ & + f_5(A^2)A^\mu A^\nu \nabla_\mu A_\nu (\nabla \cdot A) + f_6(A^2)A^\mu A^\rho \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A^\nu + f_7(A^2)A^\mu A^\sigma \nabla_\mu A_\nu \nabla^\nu A_\sigma \\ & + f_8(A^2)A^\nu A^\sigma \nabla_\mu A_\nu \nabla^\mu A_\sigma + f_9(A^2)\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} A_\alpha A^\mu \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma \\ & + f_{10}(A^2)\epsilon^{\alpha\mu\rho\sigma} A_\alpha A^\nu \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma + f_{11}(A^2)A^\mu A^\nu A^\rho A^\sigma \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma. \end{aligned} \quad (25)$$

Por otra parte, exigiendo que la teoría sea saludable y por ende no propague grados de libertad indeseados, se debe garantizar que sólo se propaguen tres de ellos⁷⁰⁷¹. Dicho requerimiento se consigue calculando en primer lugar la matriz Hessiana

⁷⁰ V. ERRASTI DIEZ y col. "Maxwell-Proca theory: Definition and construction". En: *Phys. Rev. D* 101 (2020).

⁷¹ V. Errasti Diez y col. "Complete theory of Maxwell and Proca fields". En: *Phys. Rev. D* 101 (2020).

primaria del lagrangiano $\mathcal{H}^{\mu\nu}$ dada por ⁷²

$$\mathcal{H}_{\mathcal{L}_i^P}^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}_i^P}{\partial \dot{A}_\mu \partial \dot{A}_\nu}. \quad (26)$$

Realizando los respectivos cálculos se obtiene (Ver apéndice A.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathcal{L}_4^P}^{\varepsilon\omega} = & 2f_1 g^{0\omega} g^{0\varepsilon} + 2f_2 g^{00} g^{\varepsilon\omega} + 2f_3 g^{0\varepsilon} g^{0\omega} + f_5 A^0 (A^\omega g^{0\varepsilon} + A^\varepsilon g^{0\omega}) \\ & + 2f_6 (A^0)^2 g^{\varepsilon\omega} + f_7 A^0 (A^\varepsilon g^{0\omega} + A^\omega g^{0\varepsilon}) + 2f_8 A^\varepsilon A^\omega g^{00} + 2f_{11} (A^0)^2 A^\varepsilon A^\omega. \end{aligned} \quad (27)$$

Posteriormente, se debe garantizar que el determinante de dicha matriz sea igual a cero, esto es equivalente a satisfacer lo que se conoce como condición Hessiana, es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathcal{L}_4^P}^{\varepsilon\omega} = & g^{0\omega} [2g^{00}(f_1 + f_2 + f_3) + (A^0)^2(f_5 + 2f_6 + f_7)] \\ & + A^\omega [A^0 g^{00}(f_5 + f_7 + 2f_8) + 2f_{11}(A^0)^3] = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Dicha restricción se traduce a su vez en dos ecuaciones algebraicas que deben satisfacerse de manera independiente

$$\mathcal{H}^{00} = 2(f_1 + f_2 + f_3)(g^{00})^2 + 2(f_5 + f_6 + f_7 + f_8)(A^0)^2 g^{00} + 2f_{11}(A^0)^4 = 0, \quad (29)$$

$$\mathcal{H}^{0i} = g^{0i} [2g^{00}(f_1 + f_2 + f_3) + (A^0)^2(f_5 + 2f_6 + f_7)] + A^i [A^0 g^{00}(f_5 + f_7 + 2f_8)] = 0, \quad (30)$$

obteniéndose finalmente

$$f_1 = -f_2 - f_3, \quad f_5 = -2f_6 - f_7, \quad f_6 = f_8, \quad f_{11} = 0. \quad (31)$$

⁷² Su cálculo se hace en espaciotiempo plano que, para efectos prácticos, implica cambiar derivadas covariantes por derivadas parciales y considerar el tensor métrico de Minkowski.

Estas relaciones ayudan a reducir la Ec. (25) a la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^P = & f_2(X)(-\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) + f_3(X)(-\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_3) + f_4(X)\mathcal{L}_4 + f_7(X)(-\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_7) \quad (32) \\ & + f_8(X)(-2\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_6 + \mathcal{L}_8) + f_9(X)\mathcal{L}_9 + f_{10}(X)\mathcal{L}_{10}. \end{aligned}$$

En la anterior ecuación, varios términos sugieren cálculos que permitan visualizar mejor su naturaleza. Para aclarar ello, se realizan los siguientes cálculos sobre las piezas \mathcal{L}_4 y \mathcal{L}_9 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma, \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma + \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma, \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma + \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \nabla_\mu A_\nu \nabla_\sigma A_\rho, \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\mu A_\nu (\nabla_\rho A_\sigma - \nabla_\sigma A_\rho), \\ &= \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu) (\nabla_\rho A_\sigma - \nabla_\sigma A_\rho), \\ &= \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}, \\ &= \frac{1}{4} \tilde{F}^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (33)$$

En tanto que

$$\begin{aligned} f_9(X)\mathcal{L}_9 &= f_9(X)\mathcal{L}_9 + f_9(X)\mathcal{L}_{10} - f_9(X)\mathcal{L}_{10}, \\ &= f_9(X)(\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} A_\alpha A^\mu \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma + \epsilon^{\alpha\mu\rho\sigma} A_\alpha A^\nu \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma), \\ &= f_9(X)(\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} A_\alpha A^\mu \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma + \epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} A_\alpha A^\mu \nabla_\nu A_\mu \nabla_\rho A_\sigma), \\ &= f_9(X) [\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} A_\alpha A^\mu (\nabla_\mu A_\nu + \nabla_\nu A_\mu) \nabla_\rho A_\sigma], \\ &= \frac{1}{2} f_9(X) \epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} A_\alpha A^\mu S_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}, \\ &= \frac{1}{2} f_9(X) A_\alpha A^\mu S_{\mu\nu} \tilde{F}^{\alpha\nu}, \end{aligned} \quad (34)$$

donde $S_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu + \nabla_\nu A_\mu$. Es importante notar que los resultados mostrados en las Ecs.(33) y (34) muestran que las piezas \mathcal{L}_4 y \mathcal{L}_9 están contenidos en \mathcal{L}_2^P (para \mathcal{L}_9 no se deduce a simple vista, por ello su demostración se muestra en el apéndice A.2), de manera que resulta conveniente eliminarlos de \mathcal{L}_4^P pues su presencia es redundante y no aporta nueva información a la teoría. El lector se preguntará por la suerte del término \mathcal{L}_{10} que se adicionó a \mathcal{L}_9 ; pues bien, debido a que cada f_i es una función arbitraria de X , la adición de estas también lo será, de manera que tal término puede ser sumado con el presente en \mathcal{L}_4^P dejando sin alteración alguna el resultado final.

En este punto resulta conveniente aprovechar ciertas propiedades matemáticas que permitan hacer cálculos adicionales sobre la teoría en cuestión. En primer lugar, aprovechando la propiedad de antisimetricidad del delta de Kronecker generalizado, definido como $\delta_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} \equiv \delta_{\nu_1}^{[\mu_1} \dots \delta_{\nu_n]}^{\mu_n]} \equiv \delta_{[\nu_1}^{\mu_1} \dots \delta_{\nu_n]}^{\mu_n]}$ donde el paréntesis cuadrado denota antisimetrización, puede definirse una corriente dada por

$$J^{\mu_1} = f(X) \delta_{\nu_1 \nu_2}^{\mu_1 \mu_2} A^{\nu_1} \nabla_{\mu_2} A^{\nu_2}. \quad (35)$$

Un segundo caso puede darse al aprovechar las propiedades del tensor de Levi-Civita al definir

$$J_\epsilon^\mu = f(X) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu (\nabla_\rho A_\sigma). \quad (36)$$

Finalmente se define una corriente de tipo

$$J_\delta^{\mu_1} = f(X) \delta_{\nu_1 \nu_2}^{\mu_1 \mu_2} A^\lambda A_\lambda A^{\nu_1} \nabla_{\mu_2} A^{\nu_2}. \quad (37)$$

Ahora bien, proponer estas corrientes no es cosa del azar; de teoría de campos se conoce que al sumarle a alguna densidad lagrangiana la divergencia de una corriente, esta última no aportará información nueva a las ecuaciones de movimiento finales. Por lo tanto, si de las corrientes definidas anteriormente se logran encon-

trar relaciones entre las diferentes piezas de lagrangiano, entonces dicha propiedad permitirá eliminar algunos de estos términos que, por la forma en que se relacionan, no aportarán nada a las ecuaciones de movimiento finales. Al calcular las diferentes divergencias se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} J^{\mu} = & -f_{,X}(X)(A^{\theta} A^{\mu} \nabla_{\mu} A_{\theta} \nabla_{\nu} A^{\nu} - A^{\theta} A^{\nu} \nabla_{\mu} A_{\theta} \nabla_{\nu} A^{\mu}) + f(X)(\nabla_{\mu} A^{\mu} \nabla_{\nu} A^{\nu} - \nabla_{\mu} A^{\nu} \nabla_{\nu} A^{\mu}) \\ & + f(X) A^{\mu} (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - \nabla_{\nu} \nabla_{\mu}) A^{\nu}. \end{aligned}$$

El último termino es evidentemente un conmutador de derivadas covariantes, por lo que puede ser reescrito como

$$f(X) A^{\mu} (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - \nabla_{\nu} \nabla_{\mu}) A^{\nu} = f(X) A^{\mu} R^{\nu}_{\theta\nu\mu} = -f(X) A^{\mu} A^{\theta} R_{\theta\mu},$$

por lo tanto la divergencia está dada por

$$\nabla_{\mu} J^{\mu} = -f_{,X}(X)(\mathcal{L}_5 - \mathcal{L}_7) + f(X)(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_3) - f(X) A^{\mu} A^{\theta} R_{\theta\mu}. \quad (38)$$

En un segundo momento se calcula la divergencia para la corriente dada por la Ec. (36)

$$\nabla_{\mu} J_{\varepsilon}^{\mu} = f_{,X}(X)(-A^{\theta} \nabla_{\mu} A_{\theta}) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_{\nu} \nabla_{\rho} A_{\sigma} + f(X)(\nabla_{\mu} A_{\nu} \nabla_{\rho} A_{\sigma} + A_{\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\rho} A_{\sigma}). \quad (39)$$

Ahora, si se pone especial atención en el último término de la anterior ecuación, se

determina que éste puede ser reescrito de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
f(X)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\nabla_\mu\nabla_\rho A_\sigma &= \frac{f(X)}{2}(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\nabla_\mu\nabla_\rho A_\sigma + \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\nabla_\mu\nabla_\rho A_\sigma), \\
&= \frac{f(X)}{2}A_\nu(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\mu\nabla_\rho A_\sigma + \epsilon^{\rho\nu\mu\sigma}\nabla_\rho\nabla_\mu A_\sigma), \\
&= \frac{f(X)}{2}A_\nu\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\nabla_\mu\nabla_\rho - \nabla_\rho\nabla_\mu)A_\sigma, \\
&= \frac{f(X)}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu A^\theta R_{\sigma\theta\mu\rho}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, tal término sugiere, por su contracción con el tensor de Levi-Civita, aprovechar sus permutaciones como sigue

$$\begin{aligned}
\frac{f(X)}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu A^\theta R_{\sigma\theta\mu\rho} &= \frac{f(X)}{6}(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu A^\theta R_{\sigma\theta\mu\rho} + \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu A^\theta R_{\sigma\theta\mu\rho} + \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu A^\theta R_{\sigma\theta\mu\rho}), \\
&= \frac{f(X)}{6}(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu A^\theta R_{\sigma\theta\mu\rho} + \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu A^\theta R_{\rho\mu\theta\sigma} + \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu A^\theta R_{\mu\rho\sigma\theta}), \\
&= \frac{f(X)}{6}(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu A^\theta R_{\sigma\theta\mu\rho} + \epsilon^{\rho\nu\sigma\mu}A_\nu A^\theta R_{\sigma\rho\theta\mu} + \epsilon^{\sigma\nu\mu\rho}A_\nu A^\theta R_{\sigma\mu\rho\theta}), \\
&= \frac{f(X)}{6}(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu A^\theta R_{\sigma\theta\mu\rho} + \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu A^\theta R_{\sigma\rho\theta\mu} + \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu A^\theta R_{\sigma\mu\rho\theta}), \\
&= \frac{f(X)}{6}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu A^\theta (R_{\sigma\theta\mu\rho} + R_{\sigma\rho\theta\mu} + R_{\sigma\mu\rho\theta}).
\end{aligned}$$

En la última línea se ha hecho uso de la identidad cíclica del tensor de Riemman. Dado que dichas permutaciones dan cero todo este término se anula. Este resultado permite reescribir la Ec. (39) finalmente como

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu J_\epsilon^\mu &= -f_{,X}(X)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu A^\theta\nabla_\mu A_\theta\nabla_\rho A_\sigma + f(X)\nabla_\mu A_\nu\nabla_\rho A_\sigma, \\
&= -f_{,X}(X)\mathcal{L}_{10} + f(X)\mathcal{L}_4.
\end{aligned} \tag{40}$$

Por último, la divergencia para la corriente (37) está dada por

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu J_\delta^\mu &= 2A^\theta \nabla_\mu A_\theta J^\mu + A^2 \nabla_\mu J^\mu, \\
&= 2f(X) [A^\theta A^\mu \nabla_\mu A_\theta (\nabla \cdot A) - A^\theta A^\nu \nabla_\mu A_\theta \nabla_\nu A^\mu] + A^2 \nabla_\mu J^\mu, \quad (41) \\
&= 2f(X)(\mathcal{L}_5 - \mathcal{L}_7) + A^2 \nabla_\mu J^\mu.
\end{aligned}$$

La Ec. (40) permite relacionar los términos \mathcal{L}_4 y \mathcal{L}_{10} por medio de la divergencia de una corriente. Tal relación es particularmente conveniente, pues por los argumentos dados se infiere que la información presente en ella no aporta nada nuevo a la teoría. Sin introducir irregularidades, se puede añadir $F_{10}(X)\mathcal{L}_4$ en \mathcal{L}_4^P , donde $F_{10}(X)$ es una función arbitraria de X tal que al derivarla respecto a esta se tenga $F_{10,X}(X) = -f_{10}(X)$.

Adicionalmente, de la ecuación (41) se puede despejar $2f(X)\mathcal{L}_5$, obteniéndose así

$$2f(X)\mathcal{L}_5 = \nabla_\mu J_\delta^\mu + 2f(X)\mathcal{L}_7 - A^2 \nabla_\mu J^\mu, \quad (42)$$

del cual pueden ser eliminadas las derivadas de las corrientes por los argumentos ya mencionados.

Al reemplazar en la Ec. (32) todos los cálculos expuestos, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4^P &= f_2(X)(-\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) + f_3(X)(-\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_3) + f_7(X)(-\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_7) \quad (43) \\
&+ f_8(X)(-2\mathcal{L}_7 + \mathcal{L}_6 + \mathcal{L}_8) + [F_{10}(X)\mathcal{L}_4 - F_{10,X}(X)\mathcal{L}_{10}].
\end{aligned}$$

Naturalmente, el término encerrado en corchetes cuadrados es igual a la divergencia de J_ϵ^μ , de manera que puede ser eliminado de \mathcal{L}_4^P . Por el contrario, el término que acompaña a $f_8(X)$ no exhibe esta propiedad, sin embargo, al analizarlo por

separado se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_6 - 2\mathcal{L}_7 + \mathcal{L}_8 &= A^\mu A^\rho \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A^\nu - 2A^\mu A^\rho \nabla_\mu A_\nu \nabla^\nu A_\rho + A^\nu A^\rho \nabla_\mu A_\nu \nabla^\mu A_\rho \\
&= A^\mu A^\rho \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A^\nu - 2A^\mu A^\rho \nabla_\mu A_\nu \nabla^\nu A_\rho + A^\mu A^\rho \nabla_\nu A_\mu \nabla^\nu A_\rho \\
&= A^\mu A^\rho \nabla_\mu A_\nu (\nabla_\rho A^\nu - \nabla^\nu A_\rho) + A^\mu A^\rho \nabla^\nu A_\rho (\nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu) \quad (44) \\
&= A^\mu A^\rho (\nabla_\mu A_\nu F_\rho{}^\nu + \nabla^\nu A_\rho F_{\nu\mu}) \\
&= A^\mu A^\rho F_{\mu\nu} F_\rho{}^\nu,
\end{aligned}$$

del que se deduce que, por su naturaleza, pertenece a \mathcal{L}_2^P .

Antes de concluir con la construcción de la teoría, se puede plantear la siguiente relación

$$\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_3 = -\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \tilde{\mathcal{L}}, \quad (45)$$

de la cual se obtiene

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_3. \quad (46)$$

Tal relación permite reescribir el término que acompaña a $f_3(X)$ en la Ec. (43) en dos partes: una que contenga $f_3(X)(-\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)$ y la otra $f_3(X)\tilde{\mathcal{L}}$. El primero puede sumarse con $f_2(X)(-\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)$, pues al ser funciones arbitrarias de X su suma también lo será; en tanto que, para el segundo, puede realizarse un análisis sobre éste

como sigue

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}} &= \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \\
&= \partial_\mu A_\nu F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu F^{\nu\mu} \\
&= \frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\
&= \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2} F \cdot F,
\end{aligned} \tag{47}$$

el cual revela que dicho término también está contenido en \mathcal{L}_2^P y puede ser eliminado de la acción considerada. El límite escalar de la teoría generalizada de Proca (haciendo la sustitución $A_\mu \rightarrow \nabla_\mu \phi$) corresponde a la teoría de Galileones escalares, por ende, deben ser agregados ciertos contratérminos presentes en esta última teoría que garantizan ecuaciones de movimiento de segundo orden en espaciotiempo curvo ⁶⁹. Por lo anterior, se tiene el lagrangiano final más general para un espaciotiempo curvo construido con todos los posibles términos invariantes de Lorentz provenientes de contracciones entre un campo vectorial y dos de sus primeras derivadas covariantes. Dicho término luce finalmente como

$$\mathcal{L}_4^P = f(X)R + f_{,X}(X) [(\nabla \cdot A)^2 - \nabla_\mu A_\nu \nabla^\mu A^\nu] + g(X)A^\mu A^\theta R_{\mu\theta}. \tag{48}$$

El lagrangiano de la Ec. (48) se reduce en espaciotiempo plano a

$$\mathcal{L}_4^P = f(X) [(\partial \cdot A)^2 - \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu], \tag{49}$$

ya que se anula la contribución del tensor de Ricci y del escalar de Ricci. Con esto, las Ecs.(48) y (49) son las acciones más generales para espaciotiempo curvo y

plano, respectivamente, presentadas en la Ref.⁶⁴.

Es importante mencionar que las Refs.⁴³⁴⁴⁴⁵ presentan la misma densidad lagrangiana para espaciotiempo plano, pero no para espaciotiempo curvo en el que no consideran el término proporcional a $g(X)$ presente en la Ec. (48). Pues bien, esto se debe a que la construcción inicial de la teoría generalizada de Proca se basó en un procedimiento diferente: en dichos trabajos se construyeron los términos relevantes para la teoría en espaciotiempo plano, y posteriormente se covariantizó cambiando derivadas parciales por derivadas covariantes y añadiendo los contraterminos necesarios para evadir inestabilidades de Ostrogradski. Este proceso, como se puede ver, dejó a un lado aquellos términos que en espaciotiempo plano no se manifiestan, pero en espaciotiempo curvo sí. Estos últimos fueron presentados en la Ref.⁶⁸ como una extensión a la teoría; de hecho, recibieron el nombre de ‘términos más allá de Proca’. No obstante, este procedimiento sistemático y mucho más consistente permite ver que hacen parte de la teoría original de manera natural. Adicionalmente, al hacer el límite escalar de la teoría el lagrangiano presentado, que caracteriza la teoría, se reduce a aquel de la teoría más allá de Horndeski, la cual es una generalización de la teoría de Horndeski⁷³.

1.3. ECUACIONES DE CAMPO

Una vez construida la acción más general posible con todas las posibles contracciones de hasta cuatro primeras derivadas espaciotemporales del campo vectorial A_μ , se tiene

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[F + \sum_{i=2}^6 \mathcal{L}_i + \mathcal{L}^N + \mathcal{L}_m \right], \quad (50)$$

⁷³ J. GLEYZES y col. “Healthy theories beyond Horndeski”. En: *Phys. Rev. Lett.* 114 (2015).

donde g es el determinante del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, \mathcal{L}_m es el lagrangiano de materia y

$$\mathcal{L}_2 = G_2(X, F, Y), \quad (51)$$

$$\mathcal{L}_3 = G_3(X) \nabla_\mu A^\mu, \quad (52)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(X) R + G_{4,X}(X) [(\nabla \cdot A)^2 - \nabla_\mu A_\nu \nabla^\mu A^\nu] \quad (53)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(X) G_{\mu\nu} \nabla^\mu A^\nu - \frac{1}{6} G_{5,X} [(\nabla \cdot A)^3 - 3(\nabla \cdot A) \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho + 2 \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\nu A^\rho \nabla^\sigma A_\nu] \quad (54)$$

$$- g_5(X) \tilde{F}^{\alpha\mu} \tilde{F}^\beta{}_\mu \nabla_\alpha A_\beta,$$

$$\mathcal{L}_6 = G_6(X) L^{\mu\nu\alpha\beta} \nabla_\mu A_\nu \nabla_\alpha A_\beta + \frac{1}{2} G_{6,X}(X) \tilde{F}^{\alpha\beta} \tilde{F}^{\mu\nu} \nabla_\alpha A_\mu \nabla_\beta A_\nu, \quad (55)$$

con

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, & Y &= A^\mu A^\nu F_\mu{}^\alpha F_{\nu\alpha}, \\ \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, & L^{\mu\nu\alpha\beta} &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\rho\sigma\gamma\delta}, \end{aligned} \quad (56)$$

donde \tilde{F} y L corresponden al dual de Hodge de F y al doble dual de Riemann, respectivamente, componen la ya conocida teoría generalizada de Proca y el término adicional

$$\mathcal{L}^N = \mathcal{L}_4^N + \mathcal{L}_5^N + \tilde{\mathcal{L}}_5^N + \mathcal{L}_6^N, \quad (57)$$

donde

$$\mathcal{L}_4^N = f_4^N(X) \delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}^{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4} A^{\alpha_1} A_{\beta_1} \nabla^{\alpha_2} A_{\beta_2} \nabla^{\alpha_3} A_{\beta_3}, \quad (58)$$

$$\mathcal{L}_5^N = f_5^N(X) \delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}^{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4} A^{\alpha_1} A_{\beta_1} \nabla^{\alpha_2} A_{\beta_2} \nabla^{\alpha_3} A_{\beta_3} \nabla^{\alpha_4} A_{\beta_4}, \quad (59)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_5^N = \tilde{f}_5^N(X) \delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}^{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4} A^{\alpha_1} A_{\beta_1} \nabla^{\alpha_2} A^{\alpha_3} \nabla_{\beta_2} A_{\beta_3} \nabla^{\alpha_4} A_{\beta_4}, \quad (60)$$

$$\mathcal{L}_6^N = f_6^N(X) \delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}^{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4} \nabla_{\beta_1} A_{\beta_2} \nabla^{\alpha_1} A_{\alpha_2} \nabla^{\beta_3} A_{\alpha_3} \nabla_{\beta_4} A^{\alpha_4}, \quad (61)$$

corresponden a los términos conocidos como *más allá de Proca* ⁶⁸.

Una vez definida la acción, las ecuaciones movimiento así como las de campo gravitacional pueden ser obtenidas por medio del principio de acción estacionaria

$$\delta S = 0. \quad (62)$$

De manera general, la acción de Proca puede verse como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{Proca}(g_{\mu\nu}, A_\mu, \partial_\nu A_\mu), \quad (63)$$

así que su variación estará dada por

$$\delta S = \int d^4x' \sqrt{-g} \mathcal{L}_{Proca}(g'_{\mu\nu}, A'_\mu, \partial_\nu A'_\mu) - \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{Proca}(g_{\mu\nu}, A_\mu, \partial_\nu A_\mu), \quad (64)$$

donde \mathcal{L}_{Proca} está dado por la Ec. (50). Finalmente, dicha variación está determinada por

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}_{Proca}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \left(\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}_{Proca}}{\partial A^\mu} - \partial^\nu \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}_{Proca}}{\partial (\partial^\nu A^\mu)} \right) \delta A^\mu \right] = 0. \quad (65)$$

A partir de este proceso, la variación de la acción respecto al tensor métrico proporciona las ecuaciones de campo gravitacional (que serán denotadas por $E_{\mu\nu}$), mientras la variación respecto al campo vectorial hace lo propio con las ecuaciones de Euler-Lagrange (denotadas por V_μ). Por facilidad se mostrará por separado la contribución de cada una de las variaciones de los términos implicados en la acción (para detalles sobre el cálculo veáse el apéndice A.3):

- Para F :

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_{(\mu}A^\gamma\nabla_{\nu)}A_\gamma + \frac{1}{2}\nabla_\gamma A_{(\alpha}\nabla^\gamma A_{\nu)} - \nabla^\gamma A_{(\mu}\nabla_{\nu)}A_\gamma + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\gamma\rho}\nabla^\rho A^\gamma, \quad (66)$$

$$V_\mu = \square A_\mu - \nabla_\nu\nabla_\mu A^\nu. \quad (67)$$

- Para \mathcal{L}_2 :

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{2}G_2(X, F)g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}G_{2,X}(X, F)A_\mu A_\nu + \frac{1}{2}G_{2,F}(X, F) [\nabla_{(\mu}A^\gamma\nabla_{\nu)}A_\gamma - 2\nabla_\gamma A_{(\mu}\nabla_{\nu)}A^\gamma + \nabla_\gamma A_{(\mu}\nabla^\gamma A_{\nu)}], \quad (68)$$

$$\begin{aligned} V_\mu = & -G_{2,X}(X, F)A_\mu + G_{2,F}(X, F)(\square A_\mu - \nabla_\nu\nabla_\mu A^\nu) \\ & + G_{2,FX}(X, F)(A^\nu\nabla_\mu A^\gamma\nabla_\gamma A_\nu - A^\nu\nabla_\gamma A_\nu\nabla^\gamma A_\mu) \\ & + G_{2,FF}(-\nabla_\mu A^\nu\nabla_\nu\nabla_\gamma A_\rho\nabla^\rho A^\gamma + \nabla_\mu A^\nu\nabla_\nu\nabla_\rho A_\gamma\nabla^\rho A^\gamma \\ & + \nabla_\nu\nabla_\gamma A_\rho\nabla^\nu A_\mu - \nabla_\nu\nabla_\rho A_\gamma\nabla^\nu A_\mu\nabla^\rho A^\gamma). \end{aligned} \quad (69)$$

- Para \mathcal{L}_3 :

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{2}G_{3,X}(X) [(\nabla \cdot A)A_\mu A_\nu + A^\gamma A^\rho\nabla_\gamma A_\rho g_{\mu\nu} - 2A_\gamma A_{(\mu}\nabla_{\nu)}A^\gamma], \quad (70)$$

$$V_\mu = G_{3,X}(X) [A^\nu\nabla_\mu A_\nu - A_\mu(\nabla \cdot A)]. \quad (71)$$

- Para \mathcal{L}_4 :

$$\begin{aligned}
E_{\mu\nu} = & G_4(X) \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - R_{\mu\nu} \right] + G_{4,X}(X) \left[\frac{1}{2} R A_\mu A_\nu - A_{(\mu} \square A_{\nu)} - \nabla_\gamma A_{(\mu} \nabla^\gamma A_{\nu)} \right. \\
& - A^\gamma \nabla_{(\mu} \nabla_{\nu)} A_\gamma - \nabla_{(\mu} A^\gamma \nabla_{\nu)} A_\gamma + 2A_{(\nu} A_{\mu)} (\nabla \cdot A) + \nabla_{(\mu} A_{\nu)} (\nabla \cdot A) \\
& + A^\gamma \nabla_\gamma \nabla_{(\mu} A_{\nu)} - A_{(\mu} \nabla^\gamma \nabla_{\nu)} A_\gamma + \nabla^\gamma A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A_\gamma - A^\gamma \nabla_\gamma \nabla_\mu A^\mu g_{\mu\nu} \\
& \left. - \frac{1}{2} (\nabla \cdot A)^2 g_{\mu\nu} + A^\gamma \square A_\gamma - \frac{1}{2} \nabla_\gamma A_\rho \nabla^\rho A^\gamma g_{\mu\nu} + \nabla_\rho A_\gamma \nabla^\rho A^\gamma g_{\mu\nu} \right] \quad (72) \\
& + G_{4,XX}(X) \left[-A^\gamma A^\rho \nabla_\rho A_\gamma \nabla_{(\mu} A_{\nu)} + A_{(\mu} A^\gamma \nabla_{\nu)} A^\rho \nabla_\rho A_\gamma \right. \\
& - 2A_{(\mu} A^\gamma \nabla_{\nu)} A_\gamma (\nabla \cdot A) + \frac{1}{2} A_\mu A_\nu (\nabla \cdot A)^2 + A_{(\mu} A^\gamma \nabla_\rho A_\gamma \nabla^\rho A_{\nu)} \\
& \left. - \frac{1}{2} A_\mu A_\nu \nabla_\gamma A_\rho \nabla^\rho A^\gamma + A^\gamma A^\rho \nabla_\rho A_\gamma (\nabla \cdot A) g_{\mu\nu} - A^\gamma A^\rho \nabla_\eta A_\rho \nabla^\eta A^\gamma \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_\mu = & G_{4,X}(X) [2\nabla_\nu \nabla_\mu A^\nu - 2\nabla_\mu \nabla_\nu A^\nu - A_\mu R] - G_{4,XX}(X) [2A^\nu \nabla_\mu A^\gamma \nabla_\gamma A_\nu \\
& - 2A^\nu \nabla_\mu A_\nu (\nabla \cdot A) + A_\mu (\nabla \cdot A)^2 - A_\mu \nabla_\nu A_\gamma \nabla^\gamma A^\nu]. \quad (73)
\end{aligned}$$

- Para el lagrangiano de materia, su variación define el tensor energía-momento del contenido material particular. Para un \mathcal{L}_m general, se tiene

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (74)$$

En lo que sigue del trabajo el desarrollo se concentrará sólo en las piezas de lagrangiano \mathcal{L}_3 y \mathcal{L}_4 . Así, las ecuaciones de campo gravitacional y vectorial estarán dadas

respectivamente por⁷⁴

$$E_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (75)$$

$$V_\mu = 0. \quad (76)$$

Como ya se mencionó, el escenario físico estudiado en este trabajo se sitúa en el contexto de objetos compactos. En particular, se considera un objeto autogravitante esféricamente simétrico, donde el elemento de línea está dado por

$$ds^2 = -f(r)c^2dt^2 + h^{-1}(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (77)$$

donde f y h son funciones de r , es decir, de la distancia medida desde el centro de simetría del objeto.

De manera general, el campo vectorial es de la forma

$$A_\mu = (cA_0, A_i), \quad (78)$$

donde $i = 1, 2, 3$. El teorema de descomposición de Helmholtz permite descomponer cada A^i en sus modos transversal y longitudinal como

$$A_i = A_i^{(T)} + \nabla_i\chi, \quad (79)$$

donde χ es un campo escalar longitudinal y $A_i^{(T)}$ obedece

$$\nabla^i A_i^{(T)} = 0. \quad (80)$$

⁷⁴ Las constantes de proporcionalidad entre el sector gravitacional y el tensor energía momentum están incluidas en las funciones $G_i(X)$.

La configuración del campo vectorial que es compatible con un espaciotiempo estático y esféricamente simétrico requiere que las componentes angulares θ y ϕ sean cero, de manera que la condición (80) conduce a la relación

$$A_1^{(T)'} + \frac{2}{r}A_1^{(T)} - cA_0'A_1^{(T)} = 0, \quad (81)$$

cuya solución está dada por

$$A_1^{(T)} = C \frac{e^{A_0}}{r^2}, \quad (82)$$

donde C es la constante de integración. Por regularidad en $r = 0$ es necesario que $C = 0$. Por lo anterior se concluye que el modo transversal es cero para todo r , así que sólo se requiere la propagación del modo longitudinal. Por lo tanto, la configuración del campo vectorial es

$$A_\mu = (cA_0(r), A_1(r), 0, 0), \quad (83)$$

donde $A_1(r)$ es la derivada respecto a r de campo un escalar longitudinal.

En la configuración esféricamente simétrica se cumple la relación $Y = 4FX$ ⁷⁵. Por esta razón, las dependencias adicionales de Y en las ecuaciones de campo pueden ser eliminadas.

Una vez reemplazada la configuración geométrica y del campo vectorial, se tiene que las componentes 00 y 11 de las ecuaciones de campo gravitacional son:

$$\left(c_1 + \frac{c_2}{r}\right) h' + c_3 + \frac{c_4}{r} + \frac{c_5}{r^2} = \frac{T_0^0}{c^4}, \quad (84)$$

$$-\frac{h}{f} \left(c_1 + \frac{c_2}{r}\right) f' + c_6 + \frac{c_7}{r} + \frac{c_8}{r^2} = \frac{T_1^1}{c^4}, \quad (85)$$

⁷⁵ L. HEISENBERG y col. "Black holes in vector-tensor theories". En: *JCAP* 08 (2017).

donde las constantes $c_{1,2,\dots,9}$ están dadas en el apéndice A.4. Por último, las ecuaciones de Euler-Lagrange para las componentes $\mu = 0$ y $\mu = 1$ están dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
& rf [2fh (rA_0'' + 2A_0') + r (fh' - f'h) A_0'] (1 + G_{2,F}) + r^2 h A_0'^2 [2fh A_0'' - (f'h - fh') A_0'] G_{2,FF} \\
& - 2r^2 f^2 A_0 G_{2,X} - 2r^2 f A_0' (fh^2 A_1 A_1' - h A_0 A_0' + f'h X_0 - fh' X_1) G_{2,XF} \quad (86) \\
& - rf A_0 [2rfh A_1' + (rf'h + rfh' + 4fh) A_1] G_{3,X} + 4f^2 A_0 (rh' + h - 1) G_{4,X} \\
& - 8f A_0 [rfh^2 A_1 A_1' - (rf'h + rfh' + fh) X_1] G_{4,XX} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_1 [r^2 f G_{2X} - 2 (rf'h + fh - f) G_{4X} + 4h (r A_0 A_0' - rf'X - f X_1) G_{4,XX}] \quad (87) \\
& - r [r (f'X - A_0 A_0') + 4f X_1] G_{3,X} = 0,
\end{aligned}$$

donde $X = X_0 + X_1$, $X_0 = A_0^2/2f$ y $X_1 = -hA_1^2/2$.

2. OBJETOS COMPACTOS

Al referirse a un objeto compacto en un contexto astrofísico, se habla de dichos cuerpos que resultan del remanente de un proceso tardío de evolución estelar. No es fácil generalizar sobre los procesos que se llevan a cabo para un determinado tipo de estrellas, pues ellos son susceptibles no sólo a la masa de la misma, sino también a otros factores como metalicidad, velocidad de rotación e incluso la presencia de otras estrellas a su alrededor. No obstante, a partir de diferentes observaciones se ha podido determinar que en las fases finales de su evolución, las diferentes estrellas agotan su combustible nuclear entrando en un desequilibrio entre la fuerza gravitacional y la presión generada por dicho combustible, generando la muerte de ellas en forma de nebulosas, supernovas, brotes de rayos gamma, etc ⁷⁶. Si bien puede que toda la materia de la estrella se invierta en estos últimos fenómenos, algunas de ellas dejan un remanente que de acuerdo a sus características pueden ser enanas blancas, estrellas de neutrones e incluso agujeros negros.

La principal característica de estos objetos se centra en el mecanismo que permite contrarrestar la presión gravitacional sin reacciones nucleares. Las enanas blancas y las estrellas de neutrones permanecen estables ya que encuentran en la repulsión entre los componentes elementales de ellas, los electrones y neutrones, la presión requerida para contrarrestar la fuerza gravitacional. Por su parte, los agujeros negros corresponden a aquellas estrellas que por sus características extremas no encuentran un mecanismo capaz de contrarrestar dicha presión gravitacional y colapsan en

⁷⁶ T. M. TAURIS y E. P. J. VAN DEN HEUVEL. *Formation and evolution of compact stellar X-ray sources*. Vol. 39. Cambridge University Press, 2006.

una singularidad ⁷⁷⁷⁸.

La segunda característica nace del proceso de evolución estelar, el cual ocasiona que el tamaño de estos objetos sea muy pequeño comparado con una estrella de la secuencia principal de masa comparable. Esta característica suele parametrizarse de manera cuantitativa por medio de la *compacidad* dada por la fracción MG/Rc^2 , siendo M la masa total del objeto y R su radio. Enanas blancas y estrellas de neutrones, típicamente poseen una masa del orden de una masa solar $M \sim 1M_{\odot}$, pero contenidas en un radio $R \sim 5 \times 10^3$ km para las primeras y de $R \sim 10$ km para las segundas ⁷⁹. En consecuencia, las compacidades características para este tipo de objetos estarán alrededor de 3×10^{-4} para las enanas blancas y 0,15 para estrellas de neutrones. Este aspecto es quizá el más relevante a nivel gravitacional y que hace de los objetos compactos sujetos de interés no sólo en RG, sino también en teorías modificadas de la gravedad, ya que la acumulación de tanta masa en tan pequeña región del espacio hace de estos objetos fuentes de un muy intenso campo gravitacional.

Como ya se ha visto, las estrellas de neutrones poseen una alta compacidad en comparación con las enanas blancas y aún más con estrellas de la secuencia principal. En consecuencia, la investigación en esta área de la astrofísica busca, por un lado, estudiar su interacción con el entorno (sistemas binarios), y por otro, mediante diferentes áreas de la física, determinar la ecuación de estado que describa

⁷⁷ S. L. SHAPIRO y S. A. TEUKOLSKY. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*. John Wiley & Sons, 2008.

⁷⁸ Este proceso de formación no incluye a los agujeros negros primordiales (M. RAIDAL y col. "Formation and evolution of primordial black hole binaries in the early universe". En: *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2019 [2019])

⁷⁹ P. HAENSEL, A. Y. POTEKHIN y D. G. YAKOVLEV. "Neutron stars 1: Equation of state and structure". En: *Astrophys. Space Sci. Libr.* 326 (2007).

apropiadamente la estructura de este tipo de objetos ⁸⁰. En un contexto de gravedad modificada, resulta útil también estudiar las implicaciones físicas de la teoría de gravedad escogida en un régimen de campo fuerte y verificar si en este escenario astrofísico particular ésta lleva a soluciones físicamente viables para este tipo de estrellas.

En consonancia con lo anterior, y en preparación para el respectivo estudio en el contexto de la teoría generalizada de Proca, el presente capítulo presenta las ecuaciones de estructura en RG para una estrella esféricamente simétrica, estática y constituida por un fluido perfecto. Adicionalmente se presenta un desarrollo de soluciones analíticas alrededor del centro de la estrella y la ecuación de estado que describe la naturaleza del fluido.

2.1. OBJETOS COMPACTOS EN RELATIVIDAD GENERAL

Habiendo esbozado ya la forma en que se construye sistemáticamente la teoría generalizada de Proca, vale la pena dar cuenta que al escoger $G_4 = 1/16\pi G$, $G_2 = G_3 = G_5 = g_5 = G_6 = 0$ y anulando la presencia del campo vectorial ($A_\mu = 0$), las ecuaciones de campo gravitacional se reducen inmediatamente a las bien conocidas ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}. \quad (88)$$

Se deduce entonces que la teoría generalizada de Proca contiene como caso particular a la RG sin constante cosmológica. Nótese que es necesario anular las contribuciones del campo vectorial debido a que se tiene el término de Maxwell F en la acción y éste tiene contribuciones independientes de los acoplamientos selecciona-

⁸⁰ J. M. LATTIMER. "The Nuclear Equation of State and Neutron Star Masses". En: *Annu. Rev. Nucl. Part. S.* 62 (2012).

dos.

Como ya se dijo, se considera que la estrella está compuesta por un fluido perfecto, es decir, un fluido que en un marco local inercial luce como un fluido isótropo. Dicho esto, su tensor energía-momento, en el sistema de referencia cartesiano comóvil con el fluido, está dado en su forma mixta por

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(-\rho c^2, P, P, P), \quad (89)$$

donde ρ y P son su densidad de energía y su presión respectivamente.

De acuerdo a la Ec. (89) y a las Ecs.(84) y (85), con las consideraciones ya descritas, se tienen para las ecuaciones de campo gravitacional

$$\frac{h'}{r} + \frac{h-1}{r^2} = -\frac{8\pi G\rho}{c^2}, \quad (90)$$

$$\frac{h f'}{f r} + \frac{h-1}{r^2} = \frac{8\pi G P}{c^4}, \quad (91)$$

en tanto que para las de Euler-Lagrange, evidentemente se satisfacen de forma trivial.

Vale la pena aclarar que las ecuaciones de campo gravitacional para $\mu = \nu = 2$ y $\mu = \nu = 3$, aportan exactamente la misma información, de manera que sólo debe considerarse una de ellas. No obstante, es usual encontrar en la literatura que dicha ecuación se canjea por la ecuación de continuidad dada por

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (92)$$

que para $\mu = 0$ resulta

$$P' + \frac{f'}{2f}(\rho c^2 + P) = 0. \quad (93)$$

Si bien la información física no es exactamente la misma a primera aproximación, este cambio resulta conveniente en el sentido en que relaciona directamente los

cambios de presión y del potencial gravitacional, es decir,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(\rho c^2 + P)}{2f} \frac{df}{dr}. \quad (94)$$

La anterior ecuación da cuenta del equilibrio hidrostático debido por un lado a la repulsión de los componentes del fluido y por otro a la compresión gravitacional, que al final determinará la estabilidad de la estrella. Para las demás componentes las ecuaciones se satisfacen de manera trivial.

Por otro lado, es evidente que la Ec. (90) puede reescribirse como

$$\frac{d}{dr} [r(h - 1)] = -\frac{8\pi G\rho}{c^2} r^2. \quad (95)$$

Integrando sobre r y resolviendo para h , se obtiene

$$h(r) = 1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}, \quad (96)$$

donde

$$M'(r) = 4\pi\rho(r)r^2 dr. \quad (97)$$

Esta definición es válida hasta que se alcance la superficie de la estrella $r = R_*$. Contemplando dicha condición y junto con la Ec. (96), se tiene que

$$h(R_*) = 1 - \frac{2GM_*}{c^2 R_*}, \quad (98)$$

lo que significa que al alcanzar la superficie de la estrella, la solución para este coeficiente métrico se acopla a la solución de vacío de Schwarzschild para el exterior de un objeto esféricamente simétrico. Este resultado no es sólo conveniente sino además necesario para satisfacer el teorema de Birkhoff que demuestra que cualquier solución exterior para un objeto con la configuración descrita corresponde

necesariamente a la solución de Schwarzschild ⁸¹⁸². De manera que en la búsqueda de soluciones regulares entre el interior y el exterior de la estrella, el requerir la continuidad de las funciones métricas y sus primeras derivadas evaluadas en $r = R_*$, junto con lo ya presentado, permitirá un pegado suave entre las dos soluciones. De esta manera, la solución exterior será la solución de Schwarzschild, dada por

$$f = h = 1 - \frac{2GM_*}{c^2 r}. \quad (99)$$

Vale la pena mencionar, sin discutir en profundidad, que la definición de masa dada por la Ec. (97) corresponde a la definición de masa de Arnowitt-Deser-Misner (ADM) ⁸³⁸⁴. Esta especificación se hace ya que el definir apropiadamente el concepto de masa en RG es una labor especialmente problemática, debido a la imposibilidad de encontrar una definición lo suficientemente general para la masa total de un sistema físico ⁸⁵. En ese sentido, la masa ADM es una definición que funciona particularmente bien cuando la fuente de campo gravitacional está rodeada por una región de vacío infinita, es decir, cuando la solución al exterior del objeto considerado es asintóticamente una geometría plana de Minkowski ⁸⁶.

-
- ⁸¹ G. BIRKHOFF y R. E. LANGER. *Relativity and modern physics*. Harvard University Press, 1923.
- ⁸² S. WEINBERG. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley New York, 1972.
- ⁸³ R. ARNOWITT, DESER y C. W. MISNER. “Energy and the Criteria for Radiation in General Relativity”. En: *Phys. Rev.* 118 (1960).
- ⁸⁴ R. ARNOWITT, DESER y C. W. MISNER. “Coordinate Invariance and Energy Expressions in General Relativity”. En: *Phys. Rev.* 122 (1961).
- ⁸⁵ J. L. JARAMILLO y E. GOURGOULHON. “Mass and Angular Momentum in General Relativity”. En: *Fundam. Theor. Phys.* 162 (2011).
- ⁸⁶ C. W. MISNER, K. S. THORNE y J. A. WHEELER. *Gravitation*. Princeton University Press, 2017.

Ahora, de la Ec. (91) se encuentra

$$f' = \frac{G}{c^2 r^2} \frac{(M + 4\pi P r^3 / c^2)}{(1 - 2GM/c^2 r)} 2f, \quad (100)$$

que junto con la Ec. (94) lleva a

$$P' = -\frac{G(\rho + P/c^2)(M + 4\pi P r^3)}{r^2(1 - 2GM/r)}. \quad (101)$$

Con esto se tiene que las Ecs.(97),(147) y (101) conforman el sistema de ecuaciones diferenciales que describen la estructura interna de un objeto compacto esféricamente simétrico, estático y constituido por un fluido perfecto en el marco de RG. Este sistema fue obtenido por primera vez por Tolman-Oppenheimer-Volkoff ⁵⁴ y se conoce en la literatura con el nombre de ecuaciones TOV. El lector podrá reconocer que se tienen tres ecuaciones diferenciales para un sistema de cuatro variables, de manera que se necesita una ecuación más que cierre el sistema y permita dar una solución bien definida. Para ello, se hace necesario la introducción de una ecuación de estado que se discutirá más adelante.

2.2. SOLUCIONES ANALÍTICAS ALREDEDOR DEL CENTRO DE LA ESTRELLA

Considérense las siguientes expansiones para las funciones consideradas, alrededor del centro de la estrella

$$\begin{aligned} f(r) &= 1 + \sum_{i=2}^{\infty} f_i r^i, & h(r) &= 1 + \sum_{i=2}^{\infty} h_i r^i, \\ P(r) &= P_c + \sum_{i=2}^{\infty} P_i r^i, & \rho(r) &= \rho_c + \sum_{i=2}^{\infty} \rho_i r^i, \end{aligned} \quad (102)$$

donde f_i , h_i , P_i y ρ_i son constantes para cada valor de i . Desde luego, por consistencia, dichas soluciones deben satisfacerse también para $r = 0$, de manera que

en este punto la presión y la densidad corresponden a los valores centrales. Adicionalmente, al exigir la regularidad de las soluciones, estas no deben presentar un crecimiento abrupto para valores de r muy cercanos a cero, de manera que debe garantizarse $f'(0) = h'(0) = \rho'(0) = P'(0) = 0$.

El lector se preguntará sobre la importancia de encontrar estas soluciones analíticas, pues sólo se satisfacen para valores de r pequeños. Pues bien, para efectos numéricos, estos resultados resultan de gran utilidad ya que las ecuaciones diferenciales que describen la estructura de la estrella son singulares en $r = 0$, de manera que dichas soluciones permiten calcular cada uno de los valores de las funciones en juego para valores de r cercanos a cero. Así, la integración numérica puede ser realizada desde valores diferentes a cero con condiciones iniciales dadas por estas soluciones.

Situándose en el marco de RG, las Ecs.(102) se reemplazan en las Ecs.(90), (91) y (93), obteniéndose así

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \sum_{i=2}^{\infty} h_i(i+1)r^i + \frac{8\pi G}{c^2} \left(\rho_c + \sum_{i=2}^{\infty} \rho_i r^i \right) &= 0, \\ \left(1 + \sum_{i=2}^{\infty} h_i r^i \right) \left(1 + \sum_{i=2}^{\infty} f_i(1+1)r^i \right) - \left(1 + \sum_{i=2}^{\infty} f_i r^i \right) \left[1 + \frac{8\pi G r^2}{c^4} \left(P_c + \sum_{i=2}^{\infty} P_i r^i \right) \right] &= 0, \\ 2 \left(1 + \sum_{i=2}^{\infty} f_i r^i \right) \sum_{i=2}^{\infty} P_i r^{i-1} + \sum_{i=2}^{\infty} f_i r^{i-1} \left[\left(\rho_c + \sum_{i=2}^{\infty} \rho_i r^i \right) c^2 + P_c + \sum_{i=2}^{\infty} P_i r^i \right] &= 0, \end{aligned}$$

que al truncar a orden tres y agrupar los coeficientes del mismo orden en r , se obtiene

$$\begin{aligned} \left(3h_2 + \frac{8\pi G \rho_c}{c^2} \right) + 4h_3 r + \frac{8\pi G \rho_2}{c^2} r^2 + \frac{8\pi G \rho_3}{c^2} r^3 + \mathcal{O}(r^4) &= 0, \\ \left(2f_2 + h_2 - \frac{8\pi G P_c}{c^4} \right) r^2 + (3f_3 + h_3) r^3 + \mathcal{O}(r^4) &= 0, \\ 2[2P_2 + (\rho_c c^2 + P_c) f_2] r + 3[2P_3 + (\rho_c c^2 + P_c) f_3] r^2 + (6P_2 f_2 + 2\rho_2 f_2) r^3 + \mathcal{O}(r^4) &= 0. \end{aligned}$$

Como se puede ver, todo el sistema se redujo a un sistema de ecuaciones polinómicas igualadas a cero que se deben satisfacer de manera independiente para cada orden en r . Por lo tanto, se han obtenido relaciones para cada uno de los coeficientes de las series de la forma

$$f(r) = 1 + \frac{4\pi G (c^2 \rho_c + 3p_c)}{3c^4} r^2 + \mathcal{O}(r^4), \quad (103)$$

$$h(r) = 1 - \frac{8\pi G \rho_c}{3c^2} r^2 + \mathcal{O}(r^4), \quad (104)$$

$$P(r) = p_c - \frac{4\pi G (c^2 \rho_c + 3p_c) (c^2 \rho_c + p_c)}{3c^4} r^2 + \mathcal{O}(r^4). \quad (105)$$

Para valores de r lo suficientemente cercanos a la región central, la densidad no presenta variaciones apreciables. Es por esto que para el orden de truncamiento considerado su valor sigue siendo esencialmente el mismo central. Dicho esto, los anteriores resultados presentan una característica especial: para una posición dada, sus valores son únicamente dependientes de los valores de presión central y densidad central escogidos.

2.3. ECUACIÓN DE ESTADO PARA ESTRELLAS DE NEUTRONES

El sistema de ecuaciones TOV describe la estructura de un objeto compacto en la configuración geométrica descrita, constituido por un fluido perfecto y que se encuentra en equilibrio gravitacional en el marco de RG. No obstante, dos precisiones deben ser hechas: en primer lugar, se tiene un sistema de tres ecuaciones diferenciales con cuatro variables desconocidas, de manera que no es un sistema cerrado. En segundo lugar, hasta el momento lo único que caracteriza la estrella es que debe ser un objeto lo suficientemente denso para que sus efectos puedan ser considerados en el régimen de campo fuerte.

Estos problemas se resuelven al definir apropiadamente una ecuación de estado que caracterice el fluido considerado. Una ecuación de estado es una relación ma-

croscópica entre las diferentes variables termodinámicas que describen el comportamiento interno del fluido de acuerdo a su naturaleza y bajo ciertas condiciones dadas. Dichas variables pueden ser presión (P), temperatura (T), densidad (ρ), entropía (s), entre otras. En ese sentido, al elegir una ecuación de estado de tipo $P = P(\rho)$ para materia densa con las características apropiadas, no sólo se tiene una ecuación que cierra el sistema TOV, sino que además permite caracterizar la naturaleza de las estrellas de neutrones como el escenario particular de estudio ⁸⁷. No obstante, proponer una ecuación de estado que describa apropiadamente la naturaleza de una estrella de neutrones no es una tarea fácil pues requiere tener en cuenta todos los posibles componentes que quedan alojados en ella producto del proceso de evolución estelar así como las interacciones nucleares entre ellos en condiciones de densidad extrema. A lo largo de los años, éste ha sido todo un campo de estudio en el área de astrofísica del que han surgido hipótesis y modelos de ecuaciones de estado que aún no se consideran una respuesta final al problema de su composición.

No obstante, en la Ref.⁸⁸ se demuestra que usando ecuaciones de estado de tipo polítropa se reproducen muy bien los resultados obtenidos de ecuaciones de estado mucho más *'realistas'*. Estas últimas consideran no sólo las diferentes regiones que se cree conforman el interior de la estrella, sino también los componentes particulares de éstas como lo son zonas de materia hadrónica (nucleones y electrones) e hiperónica. Por lo tanto, usar ecuaciones de estado polítropas se convierte en una excelente aproximación para concentrarse de lleno en las propiedades gravitacionales de las estrellas.

⁸⁷ G. BURGIO y A. FANTINA. "Nuclear Equation of state for Compact Stars and Supernovae". En: *Astrophys. Space Sci. Libr.* 457 (2018).

⁸⁸ L. FERRARI, P. C. R. ROSSI y M. MALHEIRO. "A polytropic approach to neutron stars". En: *Int. J. Mod. Phys. D.* 19 (2010).

En un sentido estricto, un proceso politrópico se define como un cambio reversible (cuasiestático) de un sistema termodinámico en el cual el calor específico (definido como $c = dQ/dT$) obedece a una prescripción dada, es decir,

$$c = \frac{dQ}{dT} = f, \quad (106)$$

donde f corresponde a una función específica bien definida para el proceso escogido ⁸⁹. Su importancia se basa en el amplio rango de procesos termodinámicos que puede describir dicha función y las características asociadas, ya que describe transferencia de energía tanto al interior del sistema como entre el mismo y al exterior sin entrar en detalle de los procesos químicos y nucleares en el fluido. La ecuación que describe este tipo de procesos es de la forma

$$P = \mathcal{K} \rho_0^\Gamma, \quad (107)$$

donde ρ_0 es densidad de energía en reposo, \mathcal{K} y $\Gamma = 1 + 1/n$ son constantes y n es el índice politrópico del proceso, siendo este último quien define el tipo de proceso considerado.

De manera general, la densidad de energía ρc^2 se expresa como

$$\rho c^2 = \rho_0 c^2 (1 + \epsilon), \quad (108)$$

donde ϵ corresponde a la energía interna adimensional por unidad de masa. La densidad de energía en reposo se puede definir en términos de su masa en reposo

⁸⁹ G. P. HOREDT. *Polytropes: applications in astrophysics and related fields*. Springer Science & Business Media, 2004.

m_b y la densidad de número n_b como

$$\rho_0 = m_b n_b. \quad (109)$$

Ahora bien, para efectos de cálculo se considera primero la primera ley de la termodinámica, ya que un proceso adiabático cumple la relación

$$\partial\epsilon = \frac{1}{m_b} \partial w = -\frac{1}{m_b} p \partial v, \quad (110)$$

donde w y v son trabajo y volumen, respectivamente, y se usó la densidad de energía interna por unidad de masa adimensional $\partial\epsilon = \partial u/c^2 m_b$. Adicionalmente, de la Ec. (109) se deduce que $v = 1/n_b$, de manera que derivando v respecto a la densidad de número de partículas y reemplazando en la Ec. (110), se llega a

$$P = n_b^2 m_b \frac{\partial\epsilon}{\partial n_b}. \quad (111)$$

Por otro lado, reemplazando la Ec. (109) en la Ec. (107) se tiene que

$$P = \mathcal{K}(m_b n_b)^\Gamma, \quad (112)$$

la cual, combinada con la Ec. (111) conduce a

$$\mathcal{K}(m_b n_b)^\Gamma = n_b^2 m_b \frac{\partial\epsilon}{\partial n_b}. \quad (113)$$

Ahora bien, despejando e integrando a ambos lados de la igualdad, se encuentra

$$\epsilon = \frac{\mathcal{K} \rho_0^{\Gamma-1}}{\Gamma-1}. \quad (114)$$

Este último resultado es finalmente reemplazado en la Ec. (108) la cual, después de

algunos cálculos, resulta ser

$$\rho = \rho_0 + \frac{\mathcal{K}\rho_0^\Gamma}{\Gamma - 1}, \quad (115)$$

siendo éste un resultado que relaciona la densidad de energía total del fluido con cantidades intrínsecas que caracterizan el mismo.

Ahora, por propósitos numéricos, conviene expresar esta ecuación en una forma adimensional. Para tal fin es importante introducir la densidad de número de partículas característica n_0 , la cual permite a su vez, definir la densidad de energía en reposo característica para el barión dada por

$$\tilde{\rho}_0 = n_0 m_b. \quad (116)$$

Para estrellas de neutrones, se considera la densidad de número nuclear $n_0 = 0.1 (fm)^{-3}$. A partir de esto, se puede definir la variable adimensional para la densidad de energía en reposo dada por

$$\chi \equiv \frac{\rho_0}{\tilde{\rho}_0} = \frac{n_b}{n_0}. \quad (117)$$

El lector concordará en que resulta conveniente introducir la constante reescalada $K = \mathcal{K}/\tilde{\rho}_0^{1-\Gamma} c^2$ para reescribir las Ecs.(107) y (115) como

$$\rho = \tilde{\rho}_0 \left(\chi + \frac{K}{\Gamma - 1} \chi^\Gamma \right), \quad P = K \tilde{\rho}_0 c^2 \chi^\Gamma. \quad (118)$$

con

$$w = \frac{P}{\rho c^2} = \frac{K \chi^{\Gamma-1}}{1 + K \chi^{\Gamma-1}/(\Gamma - 1)}. \quad (119)$$

En el régimen no relativista dado por $K \chi^{\Gamma-1} \ll 1$, se tiene que $w \simeq K \chi^{\Gamma-1}$, de manera que w crece con la densidad de masa ρ . Por el contrario, en el régimen relativista, w se aproxima a un valor constante $\Gamma - 1$ con el incremento de ρ .

Finalmente, se definen las siguientes variables adimensionales:

$$x = \frac{r}{r_0}, \quad y = \frac{\rho}{\tilde{\rho}_0}, \quad w_0 = \frac{P}{\tilde{\rho}_0 c^2}, \quad m(r) = \frac{3M(r)}{4\pi\tilde{\rho}_0 r_0^3}, \quad (120)$$

con

$$r_0 = \sqrt{\frac{c^2}{G\tilde{\rho}_0}}. \quad (121)$$

La Ec. (118) se reescribe en término de dichos términos adimensionales como

$$w_0(x) = K\chi(x)^\Gamma, \quad y(x) = \left(\frac{w_0(x)}{K}\right)^{1/\Gamma} + \frac{w_0(x)}{\Gamma - 1}. \quad (122)$$

La masa bariónica escogida debe ser la masa del neutrón $m_n = 1.6749 \times 10^{-34}$ g. Con esto, se tienen los valores de radios y densidades característicos $r_0 = 89.696$ km y $\tilde{\rho}_0 = 1.6749 \times 10^{14}$ g cm⁻³, que caracterizarán apropiadamente las estrellas de neutrones.

Como ya se mencionó, la ecuación de estado que caracteriza el fluido cierra el sistema de ecuaciones diferenciales. Por lo tanto, para resolver el sistema se deben especificar los valores iniciales de todas las variables adimensionales consideradas en el centro de la estrella. Adicionalmente, se debe garantizar que el cálculo se realice hasta alcanzar el borde de la estrella definido como

$$w_0(x_*) = 0, \quad (123)$$

donde $x_* = R_*/r_0$. Especificando el valor de presión adimensional central $w_{0c} = w_0(0)$, se puede también determinar la masa ADM de acuerdo a la Ec. (120), dada por

$$M_* = 2.5462 \times 10^2 m(x_*)M_\odot. \quad (124)$$

Con lo anterior, el fluido que constituye el interior de la estrella queda completa-

mente descrito. No obstante, para discutir la estabilidad de las estrellas relativistas se puede usar el criterio de energía gravitacional de enlace Δ , definido como la diferencia entre la masa propia de la estrella M_p y su masa ADM M_* ⁸⁶, es decir,

$$\Delta \equiv (M_p - M_*)c^2, \quad (125)$$

donde la masa propia se define como

$$M_p = \int_{r \leq R_*} d^3x \rho(r) \sqrt{{}^{(3)}g} = \int_0^{R_*} \frac{4\pi \rho(r) r^2}{\sqrt{h}} dr, \quad (126)$$

siendo ${}^{(3)}g$ es el determinante de la métrica puramente espacial, 3-dimensional. Bajo este criterio, la estrella con $\Delta > 0$ está ligada gravitacionalmente y por lo tanto es dinámicamente estable, mientras que las estrellas con $\Delta < 0$ no están ligadas gravitacionalmente y por lo tanto son dinámicamente inestables.

3. APLICACIONES

Para ser una buena teoría de gravedad, la teoría de Proca generalizada debe explicar satisfactoriamente los diferentes fenómenos físicos en todas las escalas del universo. En ese sentido, el régimen campo fuerte es de gran interés por constituirse en una posibilidad latente de medir desviaciones en los resultados observacionales con respecto a las predicciones hechas por la RG. Para estrellas de neutrones, es baja la cantidad de artículos relacionados con la búsqueda de soluciones internas, físicamente viables, en el marco de la teoría generalizada de Proca. En el presente capítulo se presentan los principales resultados alcanzados sobre el interior de estrellas de neutrones siguiendo el trabajo de R. Kase, S. Tsujikawa y M. Minamitsuji⁵⁰. Para ello, se exploran dos tipos de acoples bajo una ley de potencias del término cinético del campo vectorial (X). El primero corresponde a un acople de tipo cúbico proporcional a X^n ($n = 1, 2, \dots$). El segundo corresponde a un acople de tipo cuártico no mínimo a la gravedad, también proporcional a X^n , donde la presencia del campo vectorial modifica el sector gravitacional.

Para cada uno de los acoples mencionados, se propone una solución analítica en series de potencias alrededor del centro de la estrella. A partir de éstas se encuentran características físicas asociadas a la evolución de la estructura de la estrella en su región central y restricciones en los parámetros libres que garanticen soluciones físicamente viables. Posteriormente se presentan algunas precisiones sobre las estrategias utilizadas para la obtención de soluciones numéricas así como los respectivos resultados.

3.1. ACOPLAMIENTOS CÚBICOS

Considérese la interacción de tipo cúbica

$$G_3(X) = \beta_3 X^n, \quad (127)$$

donde β_3 es una constante. Adicionalmente, se tiene en cuenta el término de Einstein-Hilbert $G_4 = 1/(16\pi G)$ en la acción. Finalmente, se anulan las contribuciones de las demás piezas del lagrangiano haciendo $G_2 = G_5 = G_6 = g_5 = 0$. En este acople se consideran los modelos con enteros positivos n lo que incluye el Galileón vectorial ($n = 1$) como caso especial.

De acuerdo al acople descrito, de la Ec. (87) se tiene

$$r[r(f'X - A_0A_0') + 4fX_1]\beta_3 n X^{n-1} = 0. \quad (128)$$

Ya que esta ecuación debe ser válida para todo r y el hacer $\beta_3 = 0$ ó $n = 0$ reduce la teoría de manera trivial a RG, se concluye que

$$r(f'X - A_0A_0') + 4fX_1 = 0. \quad (129)$$

Reemplazando X_0 y X_1 y despejando para A_1 , se tiene

$$A_1(r) = \epsilon \sqrt{\frac{rA_0(f'A_0 - fA_0')}{hf(rf' + 4f)}}, \quad (130)$$

donde $\epsilon = \pm 1$.

Las ecuaciones restantes (86), (84) y (85) corresponden a la ecuación de Euler-

Lagrange para $\mu = 0$ y las dos de campo gravitacional, respectivamente. Estas son

$$rf[2fh(rA_0'' + 2A_0') + r(fh' - f'h)A_0'] \quad (131)$$

$$- rfA_0[2rfhA_1' + (rf'h + rfh' + 4fh)A_1]\beta_3nX^{n-1} = 0,$$

$$\frac{1-h}{8\pi Gr^2} - \frac{4nX^{n-1}X_0\beta_3A_1h}{r} - \frac{hA_0'^2 + 2nX^{n-1}\beta_3h(A_0A_1A_0' + 2XfA_1')}{2f} \quad (132)$$

$$- \frac{1 + 8\pi GrnX^n\beta_3A_1}{8\pi Gr}h' = \frac{\rho}{c^2},$$

$$\frac{h-1}{8\pi Gr^2} + \frac{4bX^{n-1}X_1\beta_3A_1h}{r} + \frac{hA_0'^2 - 2nX^{n-1}\beta_3A_0A_1A_0'h}{2f} \quad (133)$$

$$+ \frac{1 + 8\pi GrnX^n\beta_3A_1}{8\pi Grf}hf' = \frac{P}{c^4}.$$

Adicionalmente, al igual que para RG, se considera una última relación correspondiente a la ecuación de continuidad (93) la cual, junto a una ecuación de estado, conforman el sistema de ecuaciones que describen completamente la estructura de la estrella.

3.1.1. Soluciones analíticas alrededor del centro de la estrella: Como ya se mencionó, inicialmente se derivan soluciones analíticas alrededor del centro de la estrella para las funciones de interés. Como primer paso, se reemplazan las expansiones (102) considerando adicionalmente

$$A_0 = a_0 + \sum_{i=2}^{\infty} a_i r^i, \quad A_1 = b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i r^i, \quad (134)$$

donde a_0, a_i, b_0, b_i son constantes para todo i , en las ecuaciones de estructura. Adicionalmente, se tiene que al igual que en las anteriores expansiones, éstas satisfacen las condiciones de regularidad en el centro de la estrella $A_0'(0) = 0$ y $A_1'(0) = 0$.

La estrategia se basa en realizar un proceso iterativo, aumentando cada vez el orden en el que se truncan las series y aprovechando la información obtenida en cada iteración para encontrar la información de la siguiente. Reemplazando primero estas expansiones en la Ec. (130), y tomando la rama positiva, se obtiene la siguiente solución para A_1 :

$$A_1(r) = \sqrt{\frac{a_0(a_0 f_2 - 2a_2)}{2}} r + \mathcal{O}(r^4), \quad (135)$$

la cual, evidentemente, sólo existe cuando se tiene

$$a_0(a_0 f_2 - 2a_2) > 0. \quad (136)$$

Reemplazando las series en el sistema de ecuaciones, y truncando a orden dos se tiene

$$6 \frac{f_0}{a_0} \left[2a_0 f_0 h_0 a_2 - 2^{\frac{1}{2}-n} n \beta_3 \left(\frac{a_0^2}{f_0} \right)^n \sqrt{f_0^2 h_0} \sqrt{a_0(-2f_0 a_2 + a_0 f_2)} \right] r^2 + \mathcal{O}(r^3) = 0, \quad (137)$$

$$- \left(\frac{-1 + h_0}{8\pi G} \right) - \left[\frac{\rho_c}{c^2} + \frac{3 \times 2^{\frac{1}{2}-n} h_0 n \beta_3 \left(\frac{a_0^2}{f_0} \right)^n \sqrt{a_0(-2f_0 a_2 + a_0 f_2)}}{\sqrt{f_0^2 h_0}} + \frac{3h_2}{8\pi G} \right] r^2 + \mathcal{O}(r^3) = 0, \quad (138)$$

$$\frac{-1 + h_0}{8\pi G} + \left(-\frac{P_c}{c^4} + \frac{h_0 f_2}{4f_0 \pi G} + \frac{h_2}{8\pi G} \right) r^2 + \mathcal{O}(r^3) = 0, \quad (139)$$

$$(2P_c f_2 + 2\rho_c f_2 + 4f_0 P_2) r^2 + \mathcal{O}(r^3) = 0. \quad (140)$$

Al igual que para el caso de RG, se tiene un sistema de ecuaciones polinómicas igualadas a cero que se deben satisfacer de manera independiente. De la Ec. (137)

se obtiene para a_2

$$a_2 = \pm \frac{2^{-1-2n}}{a_0} \left[a_0^{4n} n^2 \beta_3^2 + \sqrt{a_0^{8n} n^4 \beta_3^4 + 2^{1+2n} a_0^{6n} n^2 \beta_3^2 f_2} \right], \quad (141)$$

en tanto que de la Ec. (138) se tiene

$$a_2 = \frac{a_0 f_2}{2} - \frac{4^{-4+n} a_0 (a_0^2)^{-1-2n} (8\pi G \rho_c + 3c^2 h_2)^2}{(3cGn\pi\beta_3)^2}. \quad (142)$$

Por otro lado, de la Ec. (139) se obtiene para h_2

$$h_2 = \frac{8\pi G P_c}{c^4} - 2f_2, \quad (143)$$

y de la Ec. (140) se tiene para P_2

$$P_2 = -\frac{P_c + \rho_c c^2}{2} f_2. \quad (144)$$

Como se puede ver, conociendo f_2 inmediatamente quedan determinados h_2 , P_2 y a_2 . Las Ecs.(141) y (142) relacionan a_2 y f_2 , de manera que dicho sistema puede ser resuelto para ambas variables simultáneamente, obteniéndose

$$a_2 = \frac{1}{3a_0 c^8 G} 2^{-1-2n} [3(a_0^2)^{2n} c^8 G n^2 (-1 + 4a_0^2 \pi G) \beta_3^2 \pm \sqrt{3\{(a_0^2)^{2n} c^{12} G^2 n^2 \beta_3^2} \\ [2^{3+2n} a_0^2 \pi G (3P_c + \rho_c c^2) + 48a_0^4 (a_0^2)^{2n} c^4 G^2 n^2 \pi^2 \beta_3^2 - 3(a_0)^{2n} c^4 n^2 (-1 + 8\pi G a_0^2) \beta_3^2]\}^{\frac{1}{2}}],$$

$$f_2 = \frac{1}{3c^8} 4^{1-n} \pi 3 \times 4^n c^4 G P_c + 4^n c^6 G \rho_c + 3(a_0^2)^{2n} c^8 G n^2 (-1 + 4\pi G a_0^2) \beta_3^2 \pm \sqrt{3\{(a_0^2)^{2n} c^{12} G^2 n^2 \beta_3^2} \\ [2^{3+2n} a_0^2 \pi G (3P_c + \rho_c c^2) + 48a_0^4 (a_0^2)^{2n} c^4 G^2 n^2 \pi^2 \beta_3^2 - 3(a_0)^{2n} c^4 n^2 (-1 + 8\pi G a_0^2) \beta_3^2]\}^{\frac{1}{2}}].$$

Ahora bien, introduciendo las constantes

$$\mathcal{F} = \frac{3n^2 \bar{a}_0^{2n+1} \bar{\beta}_3}{2^{2n+3}\pi} \left[-\bar{\beta}_3 \bar{a}_0^{2n-1} \left(1 - \frac{\bar{a}_0^2}{2} \right) \pm \sqrt{\bar{\beta}_3^2 \bar{a}_0^{4n-2} \left(1 - \frac{\bar{a}_0^2}{2} \right)^2 + \frac{2^{2n+3}\pi}{3n^2} (1 + 3w_c)} \right], \quad (145)$$

y definiendo las variables adimensionales

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_3 &\equiv \frac{\beta_3 r_c}{(\sqrt{8\pi G})^{2n-1}}, & \bar{a}_0 &\equiv \sqrt{8\pi G} a_0, & (146) \\ r_c &\equiv \sqrt{\frac{c^2}{G\rho_c}}, & w_c &\equiv \frac{P_c}{\rho_c c^2}, \end{aligned}$$

los diferentes coeficientes de las expansiones se pueden escribir de la forma

$$f(r) = 1 + \frac{4\pi}{3} (1 + 3w_c + \mathcal{F}) \frac{r^2}{r_c^2} + \mathcal{O}(r^4), \quad (147)$$

$$h(r) = 1 - \frac{8\pi}{3} (1 + \mathcal{F}) \frac{r^2}{r_c^2} + \mathcal{O}(r^4), \quad (148)$$

$$A_0(r) = \frac{\bar{a}_0}{\sqrt{8\pi G}} \left(1 + \frac{4\pi}{3} \frac{\mathcal{F}}{\bar{a}_0^2} \frac{r^2}{r_c^2} \right) + \mathcal{O}(r^4), \quad (149)$$

$$P(r) = P_c - \frac{2\pi}{3} (\rho_c c^2 + P_c) (1 + 3w_c + \mathcal{F}) \frac{r^2}{r_c^2} + \mathcal{O}(r^4). \quad (150)$$

El lector posiblemente se estará preguntando por la razón que llevó a hacer $f_3 = h_3 = a_3 = P_3 = 0$. Pues bien, los resultados obtenidos cuando se trunca a orden dos se reemplazan en la siguiente iteración, encontrando que a orden tres se satisface el sistema de ecuaciones diferenciales cuando tales constantes valen cero. Adicionalmente, es fácil comprobar que en el límite cuando $\beta_3 \rightarrow 0$ y $a_0 \rightarrow 0$, estas soluciones reproducen aquéllas de RG obtenidas en el capítulo anterior (Ecs.(103)-(105)).

Por consistencia física, la presión ha de ser máxima en el centro de la estrella pues es el punto de mayor compresión gravitacional debido a la acumulación de masa. Para garantizar esto, se introduce el hecho de que en el origen la presión debe ser

una función cóncava hacia abajo, es decir, $P''(0) < 0$, lo que en términos de las soluciones analíticas se traduce en $p_2 < 0$. Debido al resultado mostrado en la Ec. (144), esto se cumple cuando

$$f_2 > 0, \quad (151)$$

o lo que es igual

$$\frac{4\pi}{3r_c^2}(1 + 3w_c + \mathcal{F}) > 0, \quad (152)$$

que al reemplazar \mathcal{F} se traduce en

$$4^{2+n}\pi(1 + 3w_c) + 3(-2 + \bar{a}_0^2)n^2(\bar{\beta}_3\bar{a}_0^{2n})^2 + \bar{\beta}_3\bar{a}_0^{2n}\sqrt{3 \times 2^{5+2n}\bar{a}_0^2n^2\pi(1 + 3w_c) + 9(-2 + \bar{a}_0^2)^2n^4(\bar{\beta}_3\bar{a}_0^{2n})^2} > 0.$$

Determinar esta desigualdad no es cosa trivial, de manera que si se calculan los cortes con el eje de las abcisas donde la variable independiente es $\bar{\beta}_3\bar{a}_0^{2n}$, se tendrá

$$\bar{\beta}_3\bar{a}_0^{2n} = \pm \frac{2^{n+1}}{n} \sqrt{\frac{\pi(1 + 3w_c)}{3}}. \quad (153)$$

No obstante, se requiere el intervalo donde la función es mayor que cero lo que, al evaluar en las dos posibles regiones (restringidas por los cortes con el eje), conduce a

$$-\frac{2^{n+1}}{n} \sqrt{\frac{\pi(1 + 3w_c)}{3}} < \bar{\beta}_3\bar{a}_0^{2n} < \frac{2^{n+1}}{n} \sqrt{\frac{\pi(1 + 3w_c)}{3}}. \quad (154)$$

Ya que n representa algún número entero positivo, el único valor que puede ser negativo es $\bar{\beta}_3$, de manera que la expresión anterior puede ser reescrita como

$$|\bar{\beta}_3|\bar{a}_0^{2n} < \frac{2^{n+1}}{n} \sqrt{\frac{\pi(1 + 3w_c)}{3}}. \quad (155)$$

Esta restricción es independiente de si se escoge la rama positiva o negativa en \mathcal{F} . Para aquellos valores de $\bar{\beta}_3 < 0$, el término \mathcal{F} se hace negativo. Al considerar esto

sobre la Ec. (150), se ve que el acople negativo incrementa P_2 , lo que significa que al incrementar la distancia r la presión $P(r)$ decrece más lentamente para acoples negativos comparado con RG. Por el contrario, la escogencia de acoples positivos acelera el decrecimiento de la presión comparado con RG. Es importante resaltar que tales expansiones son válidas únicamente alrededor del centro de la estrella. No obstante, si se extrapola su información física es de esperarse que la elección de acoples negativos y positivos lleven a radios de estrellas mayores y menores, respectivamente, comparados con aquéllos de RG.

De acuerdo a la Ec. (96), y tomando la Ec. (148), la función de masa alrededor del centro de la estrella está dada por

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi\rho_c r^3(1 + \mathcal{F}) + \mathcal{O}(r^5). \quad (156)$$

Al comparar con su contraparte en RG, donde $M(r) = 4\pi\rho_c r^3/3 + \mathcal{O}(r^5)$, es evidente que, para el acoplamiento cúbico, \mathcal{F} modulará el crecimiento o decrecimiento del valor de masa acumulada en un determinado punto comparado con RG para el mismo valor de r . Antes de continuar, es importante realizar ciertas precisiones matemáticas sobre la Ec. (145). Primero, al fijarse en el término encerrado en el corchete cuadrado, se ve que, en magnitud, lo resultante de la raíz cuadrada es mayor que el término fuera de ella. Por lo tanto, el signo final de tal corchete estará dictaminado por la escogencia de la rama positiva o negativa. Si inicialmente se hace el ejercicio de escoger la rama positiva en tal ecuación y se analizan valores positivos de $\bar{\beta}_3$, se verá que \mathcal{F} será también positiva y aumentará la masa almacenada en cierto valor de r comparada con su contraparte en RG. Por otro lado, si $\bar{\beta}_3$ es negativo, entonces el valor de masa almacenada será menor que en RG. Sin embargo, por consistencia teórica, este hecho introduce la restricción $\mathcal{F} > -1$ ya que la masa debe ser siempre

mayor que cero para un valor de $r \neq 0$. Este último hecho, se traduce en

$$4^{2+n}\pi + 3\bar{a}_0^{4n}(-2 + \bar{a}_0^2)n^2\bar{\beta}_3^2 + \bar{a}_0^{1+2n}n^2\bar{\beta}_3\sqrt{\frac{3 \times 2^{5+2n}\pi(1 + 3w_c)}{n^2}} + 9\bar{a}_0^{-2+4n}(-2 + \bar{a}_0^2)^2\bar{\beta}_3^2 > 0, \quad (157)$$

que al aplicar la misma estrategia y consideraciones empleadas para la desigualdad calculada anteriormente, conduce a la restricción

$$|\bar{\beta}_3|\bar{a}_0^{2n} < \frac{2^{n+1}}{n}\sqrt{\frac{2\pi}{3(2 + 3w_c\bar{a}_0^2)}}. \quad (158)$$

Si se comparan las restricciones dadas por las Ecs. (155) y (158) se tiene

$$\sqrt{(1 + 3w_c)\left(1 + \frac{3}{2}w_c\bar{a}_0^2\right)} > 1, \quad (159)$$

lo cual es completamente válido por el carácter siempre positivo de w_c . Manipulando a ambos lados de la inecuación

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + 3w_c} &> \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{3}{2}w_c\bar{a}_0^2}}, \\ \sqrt{\frac{\pi(1 + 3w_c)}{3}} &> \sqrt{\frac{2\pi}{3(2 + 3w_c\bar{a}_0^2)}}, \end{aligned} \quad (160)$$

lo que muestra que la condición (158) es más restrictiva que la condición (155). Si se supone un $\mathcal{F} = -1$ y se reemplaza en (150), ella dará un límite asintótico para la presión dado por

$$P_{max}(r) = P_c \left[1 - 2\pi(1 + w_c)\frac{r^2}{r^2} \right], \quad (161)$$

que es válido, por supuesto, para valores de r cercanos al centro de la estrella. No obstante, si se asume que esto es válido para el resto de la estrella, se puede estimar, como primera aproximación, el radio de la estrella; es decir, se calcula r

cuando $P = 0$, dado por

$$R_* \lesssim \frac{r_c}{\sqrt{2\pi(1+w_c)}}. \quad (162)$$

Ya que w_c es, por consistencia física, una cantidad definida positiva, el denominador de la Ec. (162) es siempre mayor que uno, por lo que R_* será menor que el orden de r_c . Adicionalmente, es importante ver que esta última ecuación no depende del valor escogido de n , de manera que, sin importar el orden del acople, el radio estará determinado por los diferentes parámetros libres, excepto por la potencia escogida para el acople G_3 .

3.1.2. Soluciones numéricas: Para este punto se ha presentado ya, por un lado, la forma de obtención de las Ecs.(131)-(133), quienes junto con la ecuación de continuidad y la ecuación de estado polítropa conforman el sistema cerrado de ecuaciones que describen completamente la estructura del espaciotiempo, la distribución de materia y el comportamiento del campo vectorial desde el origen $r = 0$ hasta el borde de la estrella $r = R_*$. Por otro lado, en las Ecs.(147)-(150) se tienen las soluciones alrededor del centro de la estrella que contiene la misma información física que el sistema anterior, pero su validez se limita a valores de r cercanos a cero. El lector podrá haberse percatado de la naturaleza singular de las ecuaciones diferenciales en el origen. Para evadir tal problema matemático, el sistema será resuelto desde $r = r_0 \cdot 10^{-3}$, que para las dimensiones consideradas corresponde a un valor cercano al origen. La integración se llevará hasta alcanzar el borde de la estrella dado por la condición (123) y las condiciones iniciales para cada una de las funciones en cuestión estarán dadas por las soluciones analíticas para un cierto valor de presión central.

Para propósitos numéricos, se realiza una adimensionalización del sistema de ecuaciones usando las variables adimensionales (146) junto con $\tilde{\beta}_3 = \beta_3 r_0 / \sqrt{8\pi G} = \bar{\beta}_3 r_0 / r_c$. Dos consideraciones deben hacerse sobre el sistema de ecuaciones. La

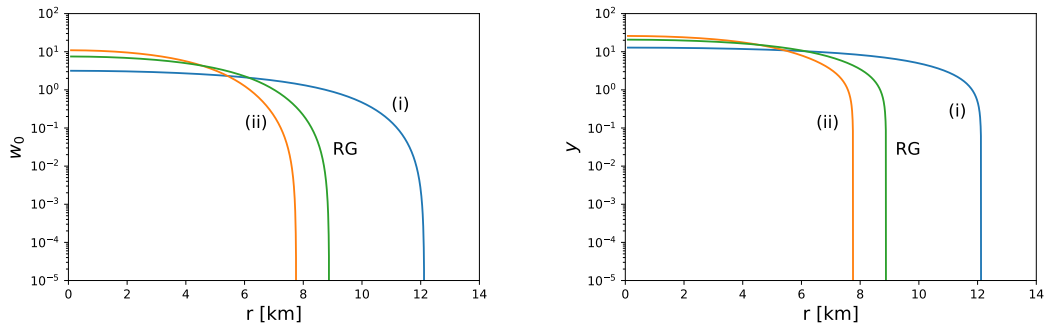
primera es que en la manera en la que está presentado, éste es un sistema implícito, así que es necesario despejar cada una de las derivadas de las funciones buscando que todas las ecuaciones queden en su forma explícita $q'(r) = g(r, q)$, donde q es la función a integrar y g es alguna función de r y q . Por otro lado, salvo por la ecuación (131), el sistema es de primer orden en las derivadas de las funciones, así que para llevarlo completamente a primer orden se propone el cambio de variable

$$A'_0(r) = v(r), \quad (163)$$

lo que inmediatamente implica $v'(r) = A''_0(r)$. Ésta se puede llevar a su forma adimensional usando la variable $u = r_0\sqrt{8\pi G}v$. De manera que, aumentando una ecuación en el sistema de ecuaciones diferenciales, éste se ha llevado completamente a primer orden en las derivadas de las funciones.

Finalmente, la integración se lleva a cabo teniendo en cuenta los valores $K = 0.013$ y $\Gamma = 2.34$, variando los valores de $\tilde{\beta}_3$ y \bar{a}_0 dentro de los intervalos admisibles. Exigiendo que las soluciones sean regulares en el borde de la estrella, se tiene que para el exterior de ésta, el sistema de ecuaciones es el mismo presentado pero haciendo $\rho = P = 0$, la cual corresponde a la solución de vacío.

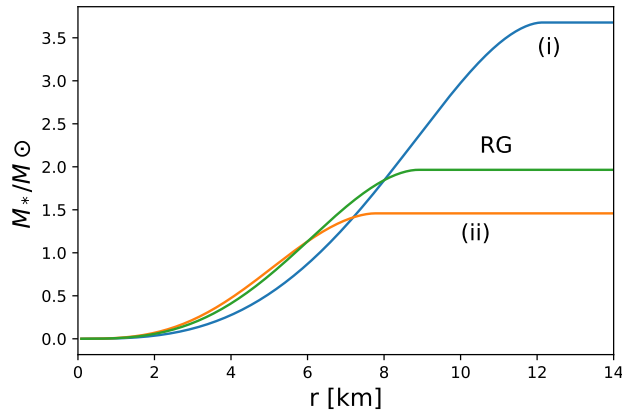
Figura 2. Variación de (a) presión adimensional y (b) densidad adimensional respecto al radio, con ecuación de estado (122) con $\Gamma = 2.34$ y $K = 0.0130$. Las soluciones numéricas presentadas corresponden a (i) $\tilde{\beta}_3 = -1$, $\bar{a}_0 = 2.2$, $w_{0c} = 3.168$; (ii) $\tilde{\beta}_3 = 1$, $\bar{a}_0 = 2.0$, $w_{0c} = 10.939$ y para RG $\tilde{\beta}_3 = 0$, $\bar{a}_0 = 0$, $w_{0c} = 7.505$.



En la Fig.(2) se ve el comportamiento de w_0 y y respecto al radio de la estrella. Los casos (i) y (ii) son iguales en valor absoluto pero opuestos en su signo para β_4 y evidentemente introducen diferencias con respecto a la solución en RG. Tal como se había concluido con las observaciones realizadas sobre las soluciones analíticas, la Fig.(2) muestra que la presión decrece más rápidamente con el incremento de r para acoples positivos comparado con el caso de RG reflejándose en radios de la estrella (R_*) más pequeños. Por otra parte, los acoples negativos llevan a incrementos de presión más lentos que en RG, lo que se traduce en R_* mayores.

Similarmente la Fig.(2b), la cual muestra la dependencia de la densidad adimensional ($\rho/\tilde{\rho}_0$) con respecto al radio r , presenta las mismas tendencias de variación que la presión, resultado que era de esperarse debido a la relación impuesta por la ecuación de estado (122).

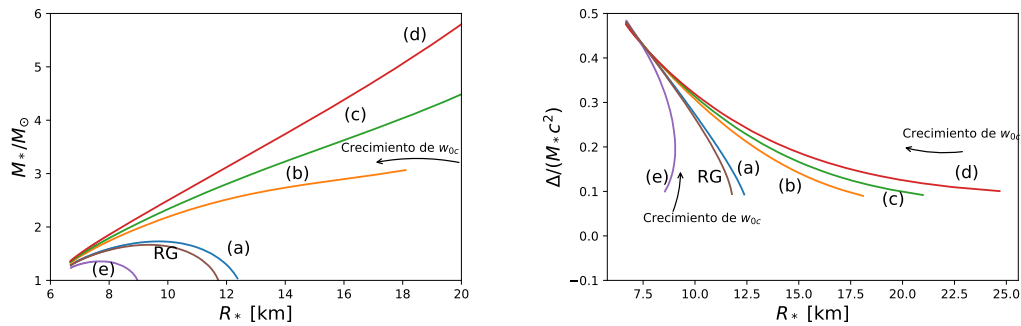
Figura 3. Distribución de masa respecto al radio. Los casos (i), (ii) y RG están descritos por los mismos valores de los parámetros dados en la Fig.(2).



La Fig.(3) muestra la masa acumulada sobre un determinado radio. El crecimiento de la curva se detiene hasta alcanzar el borde de la estrella; a partir de ese punto, las ecuaciones solucionadas son las de vacío y la masa permanece constante, como era de esperarse. Dada la definición de masa (97), es evidente que la ralentización y la aceleración en el decrecimiento de la densidad con respecto al caso de RG influirá

directamente en la masa de la estrella. Para $\beta_3 < 0$ dada por el caso (i), la Ec. (156) muestra que ya que \mathcal{F} es negativo, el acople reduce la acumulación de masa con respecto al caso en RG. Si bien el crecimiento más lento alrededor del centro de la estrella es parcialmente compensado con un radio más grande, comparando las compacidades obtenidas de 0,32 para RG y 0,41 para el acople cúbico se infiere que si bien la estrella es más grande, también será más compacta bajo este modelo. Para $\beta_3 > 0$, dado por el caso (ii), el radio es más pequeño. En este caso, el análisis es análogo al caso negativo pues la dependencia en el signo de \mathcal{F} y sus efectos alrededor del centro de la estrella pueden ser extrapolados. Así se entiende que el efecto del acople negativo acelera el decrecimiento de la densidad llevando a una estrella más pequeña y con menos masa, es decir, con compacidad de 0.28.

Figura 4. Relaciones (a) masa-radio y (b) Energía gravitacional de enlace Δ normalizada por (M_*c^2) vs R_* con ecuación de estado $K = 0.0130$ y $\Gamma = 2.34$. Cada curva corresponde a: (a) $\tilde{\beta}_3 = -1$, $\bar{a}_0 = 1.0$, (b) $\tilde{\beta}_3 = -1$, $\bar{a}_0 = 2.0$, (c) $\tilde{\beta}_3 = -1$, $\bar{a}_0 = 2.2$, (d) $\tilde{\beta}_3 = -1$, $\bar{a}_0 = 2.4$, (e) $\tilde{\beta}_3 = +1$, $\bar{a}_0 = 2.0$ y RG donde $\tilde{\beta}_3 = 0$, $\bar{a}_0 = 0$. Las flechas muestran los resultados para valores cada vez más grandes de w_{0c} .



En la Fig.(4a) se muestran los perfiles de relación masa-radio para la misma ecuación de estado, barriendo todos los valores de presión central $w_{0c} \leq 150$. En este caso se tiene una masa máxima $M_{*,max} = 1.67M_\odot$ con radio $R_* = 9,3$ km para el caso de RG. Para $\beta_3 < 0$ el incremento en magnitud $|\beta_3|$ lleva a valores de masa máxima más grandes comparados con el caso de RG. Para el caso (a), el comportamiento es cualitativamente similar a RG; no obstante, ya que la fracción M_*/R_* es

proporcional a la compacidad, aquí se verifica que para todos los posibles valores de presión central se cumple el comportamiento de mayores compacidades, es decir, la curva luce más alta y corrida a la derecha con respecto a RG, obteniendo un valor de masa máxima $M_{*max} = 1.73M_{\odot}$ a un radio $R_* = 9,6$ km. Por otra parte, para el caso (e) se tiene un acople positivo, para el cual cualitativamente la gráfica es similar a RG pero se ve reducida y corrida hacia la izquierda; en este caso se tiene una masa máxima de $M_{*max} = 1.36M_{\odot}$ en un radio de $R_* = 7,7$ km.

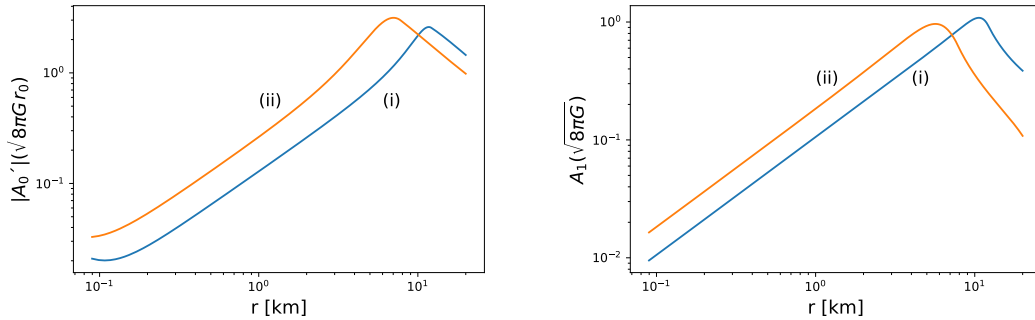
A pesar de lo anterior, al aumentar el valor central del campo vectorial \bar{a}_0 se presentan comportamientos divergentes para valores pequeños de presión central en acoples negativos. Al analizar la restricción (155) se encuentra que, para valores grandes de presión central, tal restricción se satisface inmediatamente. Por su parte, al reducir dicho valor combinándolo con valores crecientes de \bar{a}_0 , el lado izquierdo de la desigualdad se aproxima cada vez más al derecho, es decir, se acerca al límite de validez. Adicionalmente, en el límite en que la presión central tiende a cero, ambos lados de la desigualdad divergen. La desigualdad (158), que como ya se demostró es más restrictiva que la (155), muestra de mejor manera este comportamiento. Por ejemplo, para $w_{0c} = 0.4$, $n = 1$, $\tilde{\beta}_3 = -1$, se tiene $w_c = 0.9$, lo cual se traduce en que, para la primera restricción $\bar{a}_0 < 3.1$, mientras la segunda arroja $\bar{a}_0 < 2.5$. Lo anterior muestra que, para los valores de \bar{a}_0 graficados, se está cerca al límite en que se carece de sentido físico.

No obstante, al comparar todas las curvas se infiere que para valores muy grandes de presión central todas las soluciones tienden a los mismos valores de relación masa-radio, es decir, los efectos gravitacionales propios de las altas densidades y presiones son muy superiores a los introducidos por el Galileón cúbico.

La Fig.(4b) muestra la energía gravitacional Δ de enlace calculada de acuerdo a la Ec. (125) normalizada por (M_*c^2) con los mismos parámetros usados en la Fig.(4a). Analíticamente se había encontrado que para $\tilde{\beta}_3 < 0$ de acuerdo al término domi-

nante de la Ec. (156), $M(r)$ será menor que $4\pi\rho_c r^3/3$. Adicionalmente, ya que $h > 1$ para el mismo acople, el término dentro de la integral en la Ec. (126) es mayor que $4\pi\rho_c r^2$. Por lo tanto, los resultados analíticos alrededor del centro de la estrella permiten inferir, de manera *a priori*, que se tendrá $\Delta > 0$ para este caso. Esto se ha obtenido también numéricamente verificando el análisis anterior. No obstante, si bien no se podía hablar de manera *a priori* de la energía gravitacional de enlace para acoples positivos, con los parámetros considerados también se cumple este criterio aunque con tendencias a volverse inestables para valores pequeños de presión central.

Figura 5. Soluciones numéricas para (a) $|\bar{A}_0| = \sqrt{8\pi G}|A'_0|$ y para el modo longitudinal (b) $\bar{A}_1 = \sqrt{8\pi G}A_1$ en galileones cúbicos con las mismas constantes en la ecuación de estado. Los casos (i) y (ii) corresponden a los mismos parámetros que los modelos de la Fig.(2).



Por supuesto, todo el análisis realizado sobre los resultados numéricos indican que el signo y la magnitud del acople así como la amplitud del campo vectorial A_0 juegan un rol muy importante en los resultados finales de incremento de masa y radio de la estrella. Alrededor del origen la evolución de la componente temporal está dada por la Ec. (149), de manera que el valor absoluto de su derivada $|A'_0|$ crece en proporción a r en mayor o menor medida dependiendo del signo de \mathcal{F} que, como ya se vio, está directamente relacionado con el signo del acople β_3 . Igualmente, la relación (135) muestra que A_1 comparte la misma dependencia sobre r con $|A'_0|$. Por lo tanto,

al incrementar $|a_0|$ la amplitud de A_1 también tiende a ser mayor. En la Fig.(5) se grafican estas dos funciones para toda la estrella, así como su comportamiento cuando se alcanza el origen. Se puede ver que los comportamientos para ambas funciones se cumplen cualitativamente igual que en las soluciones analíticas presentando un crecimiento constante casi hasta el borde de la estrella. Para distancias fuera de la estrella $r > R_*$, el comportamiento de estas soluciones es similar a las soluciones de vacío fuera de agujeros negros derivadas en las Refs.⁹⁰⁷⁵, donde estos decrecen de forma $\propto 1/r^2$ con la distancia y tendiendo asintóticamente a cero cuando $r \rightarrow \infty$.

3.2. ACOPLAMIENTOS CUÁRTICOS

En esta sección se estudia el efecto de los acoplamientos cuárticos en las estrellas relativistas. Considerese el acoplamiento

$$G_4(X) = \frac{1}{16\pi G} + \beta_4 X^n, \quad (164)$$

con $G_2 = G_3 = G_5 = G_6 = g_5 = 0$ y donde β_4 es una constante. Al reemplazar este acople, se tiene para la Ec. (87)

$$\begin{aligned} & \beta_4 A_1 (A_0^2 - f h A_1^2)^{n-2} [A_1^2 f h \{(1 + h - 2nh)f + (1 - 2n)r f' h\} \\ & + A_0^2 \{f(h - 1) + (2n - 1)r f' h\} - 4r(n - 1)A_0 A_0' f h] = 0. \end{aligned} \quad (165)$$

El caso en que $\beta_4 = 0$ no se tendrá en cuenta ya que se reduce de manera trivial a RG, de manera que de la ecuación anterior se tienen dos opciones: la primera de

⁹⁰ L. HEISENBERG y col. "Hairy black-hole solutions in generalized Proca theories". En: *Phys. Rev. D* 96 (2017).

ellas es que $A_1 = 0$ y la segunda

$$A_1^2 fh[(1+h-2nh)f + (1-2n)rf'h] + A_0^2[f(h-1) + (2n-1)rf'h] - 4r(n-1)A_0A_0'fh = 0, \quad (166)$$

lo cual implica

$$A_1 = \epsilon \sqrt{\frac{4r(n-1)A_0A_0'fh - A_0^2[f(h-1) + (2n-1)rf'h]}{fh[(1+h-2nh)f + (1-2n)rf'h]}}, \quad (167)$$

con $\epsilon = \pm 1$.

Reemplazando en las ecuaciones restantes, es decir, en la de Euler-Lagrange para $\mu = 0$, así como en las de campo gravitacional (84) y (85) se tiene respectivamente

$$8(n-1)nX^{n-2}\beta_4A_0[rX_1hf' + f(X_1h - rA_1h^2A_1' + rX_1h')] \quad (168)$$

$$+ 4nX^{n-1}\beta_4A_0f(-1 + h + rh') + r[rA_0'(-hf' + fh') + 2fh(2A_0' + rA_0'')] = 0,$$

$$\frac{2X^n\beta_4(1-h) + 8(n-1)nX^{n-2}X_0X_1\beta_4h + 4nX^{n-1}\beta_4(Xh - X_0)}{r^2}$$

$$+ \frac{8nX^{n-2}\beta_4h[(2n-1)XA_1fhA_1' - 2(n-1)X_1A_0A_0'] + rhA_0'^2}{2fr} \quad (169)$$

$$+ \frac{(1-h)X - [X + 16\pi GX^{n-1} - 32Gn\pi X^n(X_0 + 2nX_1)\beta_4]rh'}{8\pi Gr^2X} = \frac{\rho}{c^2},$$

$$\frac{2X^n\beta_4(h-1) - 8(n-1)nX^{n-2}X_1^2\beta_4h - 4nX^{n-1}X_1\beta_4(2h-1)}{r^2}$$

$$+ \frac{8nX^{n-2}[X + 2(n-1)X_1]\beta_4A_0hA_0' + rhA_0'^2}{2fr} \quad (170)$$

$$+ \frac{Xf(h-1) + [X + 16\pi GX^{n-1}\beta_4 - 32\pi GnX^n(X_0 + 2nX_1)\beta_4]rhf'}{8\pi Gr^2Xf} = \frac{P}{c^4}.$$

Nuevamente, debe considerarse la ecuación de continuidad en el sistema de ecuaciones diferenciales.

3.2.1. Soluciones analíticas alrededor del centro de la estrella: Reemplazando las series (102) y (134), considerando el caso en que $A_1 = A'_1 = 0$, y de acuerdo a las estrategia presentada para encontrar los coeficientes de la expansión, se obtiene para cada una de las Ecs.(168)-(170) y la ecuación de continuidad:

$$12(a_2 + 2^{n-1}a_0^{2n-1}n\beta_4h_2)r^2 + \mathcal{O}(r^3) = 0, \quad (171)$$

$$\left[-\frac{\rho_c}{c^2} + \frac{3}{8} \left(-\frac{1}{\pi G} + 2^{n-4}a_0^{2n}(2n-1)\beta_4 \right) h_2 \right] r^2 + \mathcal{O}(r^3) = 0, \quad (172)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2^{-n-3}}{a_0c^4\pi G} [16a_0^{2n}c^4\pi G\beta_4(8na_2 + 2a_0f_2 - 4a_0nf_2 + a_0h_2) \\ & + 2^na_0(-8\pi GP_c + 2c^4f_2 + c^4h_2)]r^2 + \mathcal{O}(r^3) = 0, \end{aligned} \quad (173)$$

$$[2(P_c + c^2\rho_c)f_2 + 4P_2]r^2 + \mathcal{O}(r^3) = 0. \quad (174)$$

Esta última ecuación muestra la misma relación ya presentada para P_2 en la Ec. (144) que para este caso se traduce en

$$a_2 = \frac{16a_0^{2n-1}Gn\pi\rho_c\beta_4}{3c^2[2^n - 16a_0^{2n}G(2n-1)\beta_4\pi]}. \quad (175)$$

Por su parte, de la Ec. (172) se obtiene

$$h_2 = \frac{2^{n+3}G\pi\rho_c}{3c^2[2^n - 16a_0^{2n}G(2n-1)\beta_4\pi]}. \quad (176)$$

Introduciendo las constantes (146), junto con

$$\bar{\beta}_4 = \frac{\beta_4}{(8\pi G)^{n-1}}, \quad (177)$$

y reemplazando en los resultados obtenidos de la expansión para cada coeficiente, se tiene

$$h(r) = 1 - \frac{8\pi}{3[1 - 2^{1-n}(2n-1)\bar{\beta}_4\bar{a}_0^{2n}]} \frac{r^2}{r_c^2} + \mathcal{O}(r^4), \quad (178)$$

$$A_0(r) = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}} \left[\bar{a}_0 + \frac{2^{4-n}\pi n \bar{\beta}_4 \bar{a}_0^{2n-1}}{3\{1 - 2^{1-n}(2n-1)\bar{\beta}_4\bar{a}_0^{2n}\}} \frac{r^2}{r_c^2} \right] + \mathcal{O}(r^4), \quad (179)$$

$$P(r) = P_c - \frac{c^2 \rho_c + P_c}{2} f_2 r^2 + \mathcal{O}(r^4), \quad (180)$$

$$f(r) = 1 + f_2 r^2 + \mathcal{O}(r^4), \quad (181)$$

con

$$f_2 = \frac{4\pi[1 + 3w_c + 2^{1-n}\{1 - 3(2n-1)w_c\}\bar{\beta}_4\bar{a}_0^{2n} - 2^{5-2n}n^2\bar{\beta}_4^2\bar{a}_0^{4n-2}]}{3[1 - 2^{1-n}(2n-1)\bar{\beta}_4\bar{a}_0^{2n}]^2 r_c^2}. \quad (182)$$

Debido a que siempre se hace presente una potencia par de \bar{a}_0 , no se pierde generalidad al considerar solamente valores positivos de ésta, pues los negativos tendrán efectos exactamente iguales. Teniendo la condición $f_2 > 0$ y usando la Ec. (182), se obtiene

$$4^n \bar{a}_0^{-2}(1 + 3w_c) - 2^{n+1} \bar{\beta}_4 \bar{a}_0^{2n-2} [-1 + (6n-3)w_c] - 32n^2 (\bar{\beta}_4 \bar{a}_0^{2n-2})^2 > 0, \quad (183)$$

lo que lleva a

$$\mathcal{F}_- < \bar{\beta}_4 \bar{a}_0^{2n-2} < \mathcal{F}_+, \quad (184)$$

en donde

$$\mathcal{F}_\pm = \frac{2^{n-5}}{n^2} \left[1 - 3(2n-1)w_c \pm \sqrt{\{1 - 3(2n-1)w_c\}^2 + 32n^2(1 + 3w_c)\bar{a}_0^{-2}} \right]. \quad (185)$$

Al reemplazar en la Ec. (96), se obtiene la expansión para la función de masa alrededor del centro de la estrella, la cual está dada por

$$M(r) = \frac{4\pi\rho_c r^3}{3[1 - 2^{1-n}(2n-1)\bar{\beta}_4\bar{a}_0^{2n}]} + \mathcal{O}(r^5). \quad (186)$$

Nuevamente, para garantizar que $M(r) > 0$, el denominador de la función anterior ha de ser mayor que cero, lo que conduce a

$$\bar{\beta}_4\bar{a}_0^{2n} < \frac{2^{n-1}}{2n-1}. \quad (187)$$

Si $\bar{\beta}_4$ es menor que cero el lado izquierdo de la relación anterior es negativo, de manera que ésta se satisface inmediatamente. Cuando $\bar{\beta}_4$ es positivo se encuentra un límite superior dado por la relación anterior pero que, entre más se acerca a dicho límite, el valor que toma f_2 diverge. Por tal motivo $\bar{\beta}_4\bar{a}_0^{2n} < \mathcal{F}_+$ representa una restricción mayor.

Como era de esperarse, las consecuencias físicas son sensibles a la escogencia de $\bar{\beta}_4$: puede verse que este acople tiene efectos inmediatas en el tamaño de f_2 y con ello el comportamiento de la presión a medida que aumenta el radio. Este último hecho puede compararse con la misma dinámica en RG, donde $f_2^{RG} = 4\pi(1 + 3w_c)(3r_c^2)$. Así, la diferencia entre f_2 y f_2^{RG} estará dada por

$$f_2 - f_2^{RG} = \frac{8\pi\bar{\beta}_4\bar{a}_0^{2n}[2^n\{4n-1+3w_c(2n-1)\} - 2\bar{\beta}_4\bar{a}_0^{2n-2}\{8n^2 + \bar{a}_0^2(2n-1)^2(1+3w_c)\}]}{3[2^n - 2\bar{\beta}_4\bar{a}_0^{2n}(2n-1)]^2 r_c^2} \quad (188)$$

Evidentemente, si se escoge $\bar{\beta}_4 < 0$, entonces el lado derecho de la ecuación anterior será negativo, lo que implica que $f_2 < f_2^{RG}$, es decir, el acoplamiento cuártico negativo minimiza el crecimiento de la función f . Esto se traduce en un decrecimiento más lento de la presión para este caso que para RG. Si se extrapola este comportamiento hasta la superficie de la estrella, se deduce que el radio R_*

será mayor que en RG pues al tener un decrecimiento más lento de la presión ésta se hará cero para un radio mayor.

A diferencia del caso cúbico, al exigir $M(r) > 0$ alrededor del centro de la estrella no se encuentra una restricción para la rama negativa del acoplamiento, de manera que no se tiene un radio límite para la estrella. Por otro lado, si $\bar{\beta}_4 > 0$ y $|\bar{\beta}_4|\bar{a}_0^{2n-2} \ll 1$ el primer término en el corchete cuadrado en la Ec. (188) domina sobre el segundo, lo que inmediatamente implica $f_2 > f_2^{RG}$, es decir, la presión decae más rápidamente en acoplamientos cuárticos que en RG y así el radio de la estrella será más pequeño que su contraparte en RG.

Al barrer valores para $\bar{\beta}_4\bar{a}_0^{2n-2}$ entre \mathcal{F}_- y \mathcal{F}_+ , la función f_2 alcanza un máximo y nuevamente decae hasta tender a cero cuando $\bar{\beta}_4\bar{a}_0^{2n-2} \rightarrow \mathcal{F}_+$. De manera que derivando f_2 con respecto a $\bar{\beta}_4$ e igualando a cero se tiene que el punto crítico se alcanza cuando

$$\bar{\beta}_4 = \frac{2^{n-1}[2(2+3w_c)n-1-3w_c]}{16n^2 - \bar{a}_0^2(2n-1)[1+3(1-2n)w_c]} \bar{a}_0^{2-2n}, \quad (189)$$

y tal valor máximo para f_2 es

$$f_2^{max} = \frac{\pi[32n^2(1+3w_c) + \bar{a}_0^2\{1+3(1-2n)w_c\}^2]}{6n[4n - \bar{a}_0^2(2n-1)]r_c^2}. \quad (190)$$

Ya que el valor de $\bar{\beta}_4$ dado por la Ec. (189) también debe satisfacer la restricción (187), se debe cumplir que $\bar{\beta}_4 < \mathcal{F}_+\bar{a}_0^{2-2n}$. Al hacer $\bar{\beta}_4 = \alpha\mathcal{F}_+\bar{a}_0^{2-2n}$, se ve que debe cumplirse $\alpha < 1$. Despejando α , se tiene

$$\alpha = \frac{16n^2[-(1+3w_c) + 2n(2+3w_c)]}{[1-3(2n-1)w_c][-16n^2 - \bar{a}_0^2(2n-1)] \left[1 + \sqrt{\frac{32n^2(1+3w_c)\bar{a}_0^{-2}}{\{1-3(2n-1)w_c\}^2} + 1} \right]}. \quad (191)$$

Ya que el caso extremo se alcanzaría cuando se tenga $\alpha = 1$, sin importar el valor de w_c y \bar{a}_0 , puede despejarse ésta última haciendo $w_c = 0$ y con ello encontrar su

máximo aporte. De tal procedimiento se encuentra

$$\bar{a}_0 < \bar{a}_0^{max} \equiv \sqrt{\frac{4n}{2n-1}}, \quad (192)$$

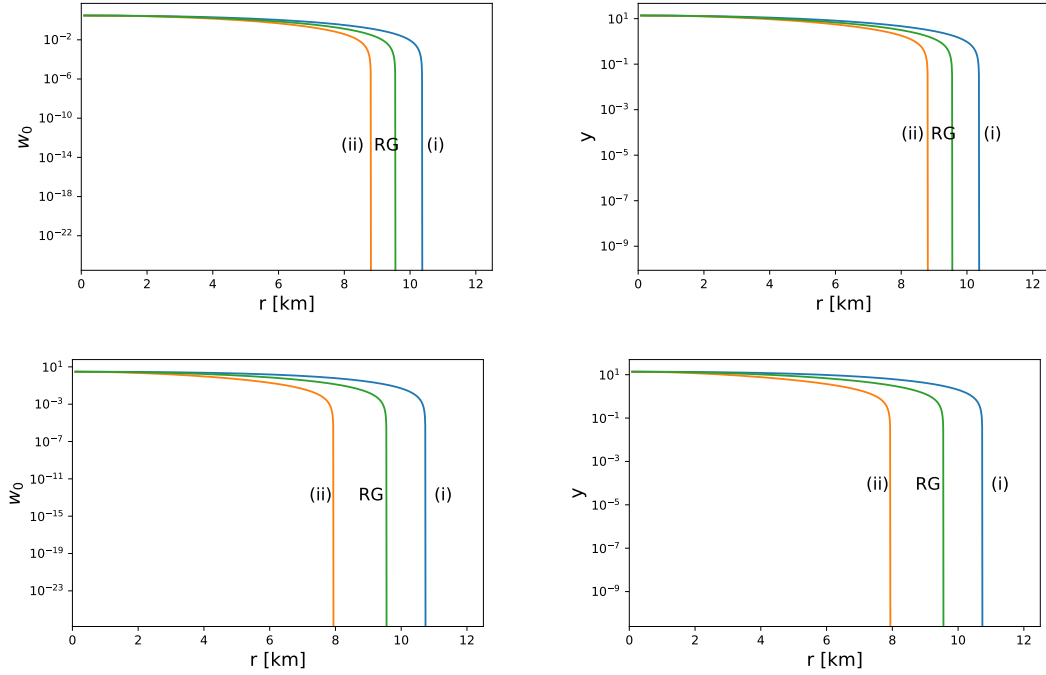
obteniendo una cota superior para el valor central del campo vectorial.

3.2.2. Soluciones numéricas: Al igual que para el caso cúbico, deben resolverse las Ecs.(168)-(170) junto con la ecuación de continuidad. Nuevamente, se ejecutan las mismas precisiones sobre las ecuaciones diferenciales, es decir, llevarlas a forma explícita y de primer orden en las derivadas respecto a r de cada una de las funciones. El proceso de adimensionalización se realiza con las mismas variables adimensionales y usando la Ec. (177) para el acople. La integración se realiza iniciando en $r = 10^{-3}r_0$, con condiciones iniciales dadas por las ecuaciones (178)-(181) y (186).

La integración se lleva a cabo teniendo en cuenta los valores $K = 0.010$ y $\Gamma = 2.34$, variando $\bar{\beta}_4$ y \bar{a}_0 dentro de los valores admisibles. De manera análoga a la sección anterior, se presenta el comportamiento de la presión y la densidad.

De acuerdo a los parámetros considerados, en la Fig.(6) se evalúan los efectos en el signo del acople β_4 en la presión y la densidad y se comparan los resultados para las potencias $n = 1$ y $n = 2$. Para $\beta_4 < 0$, el resultado exhibido en las Figs.(6a) y (6c) concuerda con el analítico alrededor del centro de la estrella, en los que, de acuerdo a la Ec. (188), esta elección del acople lleva a un decrecimiento más lento en la función de presión comparado con RG. Esto, de acuerdo a los análisis ya presentados, se traduce en un radio de la estrella R_* más grande con respecto a RG. Por el contrario, para $\beta_4 > 0$ el decrecimiento en la función de presión es más rápido que en RG, de manera que el radio será menor. Nuevamente, este resultado es análogo a las conclusiones obtenidas en el análisis alrededor del centro de la estrella.

Figura 6. Comportamiento de las funciones de (a) presión y (b) densidad para $n = 1$ y (c) presión y (d) densidad para $n = 2$, respecto al radio para ecuación de estado (118). Se usan los valores $K = 0.010$, $\Gamma = 2.34$ y $w_{0c} = 3.020$. Las curvas corresponden a los parámetros (i) $\bar{\beta}_4 = -0.06$, $\bar{a}_0 = 1.5$, (ii) $\bar{\beta}_4 = 0.06$, $\bar{a}_0 = 1.5$.



De la Fig. (6) se obtienen resultados para el radio de la estrella R_* y su desviación respecto a RG determinado mediante el parámetro $\delta = |R_* - R_{RG}|$; estos se relacionan en el cuadro 1.

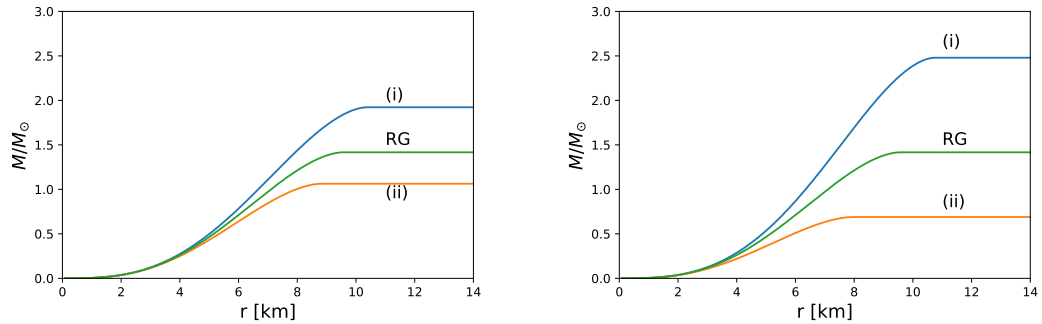
Tabla 1. R_* y $\delta = |R_* - R_{RG}|$ para los casos de acoples (i) (negativo) y (ii) (positivo) para las potencias $n = 1$ y $n = 2$.

	Caso (i)		Caso (ii)	
	R_* [km]	δ [km]	R_* [km]	δ [km]
$n = 1$	10,3	0,8	8,7	0,8
$n = 2$	10,6	1,1	7,8	1,7

Para potencias superiores se mantiene la tendencia en δ , es decir, las curvas para

los dos casos se distancian cada vez más de aquélla de RG. No obstante, el efecto de la potencia es mayor sobre los acoplamientos positivos pues, para el caso (ii), el valor de δ es cada vez mayor respecto al caso (i) para la misma potencia $n \geq 2$. Por su parte, la función de densidad presenta el mismo comportamiento que la presión. Tal hecho concuerda con la relación existente entre ellos debido a la ecuación de estado polítropa. Este resultado es particularmente importante por sus efectos sobre la función de masa.

Figura 7. Variación de la masa respecto al radio (a) $n = 1$, (b) $n = 2$. Los casos graficados responden a los mismos parámetros que aquéllos de la Fig.(6).



La Fig.(7) presenta la distribución de masa $M(r)$ contra el radio r para los mismos casos presentados en la Fig.(6). Ya que esta función muestra la masa acumulada en determinado radio, la masa total de la estrella M_* es aquélla en la que la función detiene su crecimiento. Por supuesto, para la región externa a la estrella la función de masa es constante, pues responde a la solución de vacío. Para el caso de RG, la masa total es $M_* \simeq 1.4 M_\odot$ con un radio $R_* \simeq 9.5$ km, lo que se traduce en una compacidad de 0.21. Para los demás casos en las dos potencias consideradas, las masas y compacidades respectivas se relacionan en el cuadro 2

La solución analítica había revelado que la Ec. (186) bajo la restricción (187), para valores negativos de β_4 , conducía a que la distribución de masa alrededor del centro de la estrella fuese menor que su contraparte en RG ($M(r)_{RG} = 4\pi\rho_c r^3/3$). Esto debido a que aumenta el valor del denominador haciendo más pequeña la frac-

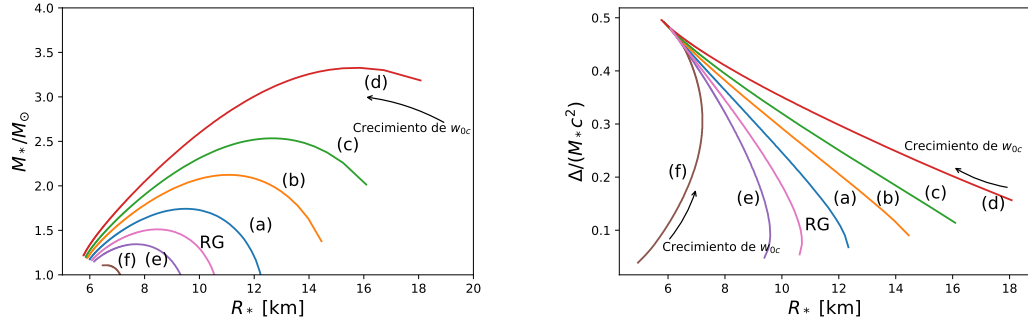
Tabla 2. Relación de distribución de masa y compacidad para los casos de acoples (i) negativo y (ii) positivo, para las potencias $n = 1$ y $n = 2$. Las compacidades son calculadas con los radios presentados en el cuadro 1.

	Caso (i)		Caso (ii)	
	$M_* [M_\odot]$	Compacidad	$M_* [M_\odot]$	Compacidad
$n = 1$	1,9	0,27	1,0	0,16
$n = 2$	2.5	0,34	0,7	0,13

ción total. Por el contrario, los acoplamientos positivos producían el efecto opuesto llevando a masas mayores que en RG alrededor del centro de la estrella. La solución numérica revela que los resultados analíticos no pueden ser extrapolados a la totalidad de la estrella y sus características físicas son sólo válidas alrededor del centro de la misma. Esto sugiere que los efectos del Galileón cuártico empiezan a ser determinantes en la zona $r = R_*/2$; la Fig.(6c) muestra que la presión adicional debido a la presencia del Galileón es relevante en esta región, lo que explica que la masa final no cumpla las características obtenidas en las soluciones analíticas. Nuevamente, la comparación entre los resultados de $n = 1$ y $n = 2$ muestra el efecto de la potencia sobre la masa, ya que las curvas se distancian cada vez más del caso de RG. El análisis anterior permite obtener las compacidades para cada caso revelando que, dependiendo del signo del acoplamiento se tendrán estrellas más o menos compactas. El efecto de la potencia sobre la compacidad se manifiesta magnificando el resultado con el crecimiento de n .

La Fig.(8a) muestra los perfiles masa-radio para Galileones cúbicos para diferentes valores de $\bar{\beta}_4$ y \bar{a}_0 . Contrario a los resultados de la Fig.(7), en este caso se estudian los efectos del valor de \bar{a}_0 sobre la masa y el radio de la estrella. En los casos (e) y (f) los cuales corresponden a valores positivos del acoplamiento $\bar{\beta}_4 > 0$, la masa M_* y el radio R_* son menores que en RG independientemente de la escogencia del valor de presión central. Ya que para todos estos casos se cumple $|\bar{\beta}_4|\bar{a}_0^{2n-2} \ll 1$, estos se

Figura 8. (a) Relación masa-radio y (b) energía de enlace normalizada-radio. Cada curva corresponde a los casos (a) $\bar{\beta}_4 = -0.1, \bar{a}_0 = 1.0$, (b) $\bar{\beta}_4 = -0.1, \bar{a}_0 = 1.2$, (c) $\bar{\beta}_4 = -0.1, \bar{a}_0 = 1.3$, (d) $\bar{\beta}_4 = -0.1, \bar{a}_0 = 1.4$, (e) $\bar{\beta}_4 = +0.1, \bar{a}_0 = 1.0$ y (f) $\bar{\beta}_4 = +0.1, \bar{a}_0 = 1.5$. El caso de RG se obtiene cuando $\bar{\beta}_4 = 0.0$ y $\bar{a}_0 = 0.0$. La presión central se considera en el intervalo $0.1 < w_{0c} < 180$.



encuentran en el régimen en el que $f_2 > f_2^{RG}$. De acuerdo al análisis realizado sobre la Ec. (188) se infiere que el radio R_* es menor que en RG alrededor del centro de la estrella.

Para los casos (a)-(d), en los que se tienen acoplamientos con $\bar{\beta}_4 < 0$, se tiene que las curvas son también cualitativamente iguales, pero esta vez los resultados de M_* y R_* son mayores respecto a RG. Nuevamente esto concuerda con lo plasmado en la Ec. (188) producto del análisis alrededor del centro de la estrella, donde se vio que los acoplamientos negativos conducen a radios de la estrella mayores comparados con RG, debido a que la presión decrece más lentamente por la presencia del acople. Dicho esto, es de notar que, bajo este acople, el modelo es mucho más sensible a las variaciones de \bar{a}_0 que para el caso cúbico.

De la Fig.(8b) puede verse que, nuevamente, para valores de presión central muy pequeños, las estrellas tienden a ser inestables, incluso para RG. Para valores negativos del acoplamiento (casos (a)-(d)) el crecimiento de \bar{a}_0 , lleva a que la curva exhiba valores mayores con el aumento de R_* , lo que para efectos prácticos significa que la estrella presenta mayor estabilidad. Todos los casos alcanzan su punto de mayor estabilidad para presiones centrales muy grandes.

El análisis sobre el comportamiento de $|A'_0|$ es cualitativamente igual al caso de acoplamientos cúbicos, por lo que se pueden extrapolar los efectos de él sobre la estrella.

4. CONCLUSIONES

En el primer capítulo se realizó un estudio general sobre los aspectos fundamentales de la teoría generalizada de Proca que son de interés para el desarrollo del trabajo. En primer lugar se demostró el teorema de Ostrogradsky, el cual constituye un criterio fundamental en la construcción de la teoría, retringiendo el uso de acoplamientos del sector gravitacional con el campo vectorial a , cuando mucho, primeras derivadas covariantes del campo vectorial. De esta manera se evita tener posibles sistemas físicos cuyo Hamiltoniano no esté acotado por debajo. Con lo anterior, se reprodujo la construcción de la teoría generalizada de Proca con dos primeras derivadas covariantes del campo vectorial como ejemplo ilustrativo del espíritu metodológico que se lleva a cabo en la totalidad de la teoría. Se determinó que este procedimiento lleva a encontrar los términos principales de la teoría generalizada de Proca, así como aquéllos conocidos como términos más allá de Proca, que no habían sido revelados en la construcción inicial por el tipo de metodología empleada en ésta. Además se aplicó el principio de acción estacionaria para la acción en cuestión obteniéndose así las ecuaciones de campo gravitacional así como las de Euler-Lagrange y se reemplazó la configuración esféricamente simétrica que se estudia en el cuerpo del trabajo.

En el segundo capítulo se presentaron los aspectos más importantes del estudio de objetos compactos que se necesitan para las aplicaciones deseadas. Adicionalmente, se hizo el desarrollo en RG como ejemplo particular y modelo de referencia para comparar con las desviaciones que introduce la teoría generalizada de Proca para las soluciones de estrellas relativistas. Por último, se discutió la necesidad de introducir una ecuación de estado para poder relacionar todas las variables estudiadas y así cerrar el sistema de ecuaciones que describe la estructura interna de las estrellas. Se pudo evidenciar que, si bien una ecuación de estado polítropa no describe

un modelo completamente realista, es decir microscópico, de un fluido que compone la estrella, la fenomenología asociada sí concuerda bastante bien con modelos más realistas estudiados en la literatura.

En el tercer capítulo se discutieron las aplicaciones de la teoría generalizada de Proca en estrellas relativistas y sus diferencias con respecto a RG. En estas teorías, existe un campo vectorial sin simetrías internas acoplado a la gravedad que lleva a la propagación de una quinta fuerza. En la Ref.⁵² se demuestra que en el régimen de campo débil a escalas del Sistema Solar tales fuerzas son suprimidas por el mecanismo de Vainshtein⁵¹. Por otro lado, en el régimen de campo fuerte no se cumple del todo la supresión de tales fuerzas. En las Refs.⁹¹⁶⁵, entre otras, se ha demostrado que a la luz de estas teorías se encuentran soluciones para el exterior de agujeros negros que presentan desviaciones respecto a RG; por tal razón, las soluciones aquí obtenidas son empalmadas en el borde con las mismas ecuaciones de campo gravitacional, haciendo $P = \rho = 0$, procedimiento que arroja estas soluciones de vacío. Por lo anterior, en el trabajo se realizó el análisis considerando la presencia de tal fuerza al interior de la estrella.

Del estudio sobre acoplamientos cúbicos se obtuvieron resultados que resultan de interés físico. En primer lugar, se obtiene que imponiendo condiciones de regularidad en las funciones de interés, se encuentran soluciones analíticas alrededor del centro de la estrella por medio de soluciones en series de potencias. Como suplemento al análisis realizado en ese proceso, se encuentra que las soluciones numéricas poseen también las características físicas extraídas de las analíticas, es decir, se pudo determinar cómo \mathcal{L}_3^P introduce una presión galileónica que lleva a desviaciones respecto a RG que, como se esperaba, es sensible a la magnitud del signo del acoplamiento β_3 . Para signos negativos, esta presión galileónica va del centro

⁹¹ M. MINAMITSUJI. “Black holes in the generalized Proca theory”. En: *Gen. Rel. Grav.* 49 (2017).

hacia afuera de la estrella, que se adiciona a la presión propia del fluido llevando a que la contracción gravitacional sea más lenta, o en otras palabras, que la presión final $P(r)$ decrezca a una tasa menor comparada con el caso de RG en donde la presión galileónica está ausente. Por su parte, el acoplamiento positivo introduce el efecto opuesto, es decir, una presión galileónica dirigida hacia el centro de la estrella que hace que la contracción gravitacional se acelere, lo que se traduce en un decrecimiento más rápido de la presión comparado con RG.

El anterior efecto es visible también en la densidad, inducido por la ecuación de estado (118), pues se ven los mismos efectos de aceleración y ralentización de acuerdo a la elección del acoplamiento β_3 . Analíticamente se obtuvo que el resultado final sobre el radio de la estrella no está relacionado con la potencia del acople, como se evidencia en la ecuación (162), de manera que el estudio se enfoca en el Galileón cúbico ($n = 1$). Dicho esto, y con los resultados obtenidos para la densidad, se calcula la masa para las estrellas de los mismos casos anteriores donde se pudo determinar la relación del tipo de acoplamiento y el campo vectorial con la masa total de la estrella. Numéricamente se comprueba que las características físicas obtenidas para la masa de la estrella de la Ec. (156) se extrapolan a la totalidad de la estrella y se relacionan a los resultados de densidad y presión, como era de esperarse por la relación existente entre ellas. De allí también puede concluirse que, para $n > 1$, la masa total será mayor, lo que se traduce en compacidades mayores para la estrella.

Finalmente, en la Fig.4 se grafican los perfiles masa-radio para diferentes valores de los parámetros $\tilde{\beta}_3$ y \tilde{a}_0 . En primer lugar, los casos (a) y (e) mostraron las mismas características obtenidas en las figuras anteriores sobre la compacidad de las estrellas y la forma en la que el Galileón modifica los valores máximos obtenidos para la misma ecuación de estado respecto a RG. No obstante, los casos (b)-(d) revelan que si bien los valores escogidos para $\tilde{\beta}_3$ y \tilde{a}_0 se encuentran en el espacio de

parámetros admisible, las curvas divergen para valores muy pequeños de presión central w_{0c} . Esto es señal de que ante compresiones gravitacionales muy pequeñas debido a la poca densidad de la materia presente, la presión introducida por el Galileón dominará completamente admitiendo acumular más masa y llevando a radios muy grandes comparado con estrellas de neutrones usuales. El trabajo en esta línea de investigación debería contemplar el generar estrategias que permitan reducir las cotas impuestas para estos parámetros.

En el estudio sobre acoplamientos cuárticos se estudiaron los efectos de \mathcal{L}_4^P sobre las estrellas relativistas para el caso $A_1 = 0$. Siguiendo una estrategia similar al caso cúbico, respecto a las soluciones analíticas alrededor del centro de la estrella, se obtuvieron las características físicas de éstas y a partir de consideraciones físicas se restringió el espacio de parámetros para $\bar{\beta}_4$ y \bar{a}_0 . En este caso se determinó numéricamente la influencia de la potencia n sobre el radio de la estrella mediante la función de presión. Para valores de $\bar{\beta}_4 < 0$ nuevamente se introduce una presión del centro hacia afuera de la estrella que ralentiza el decrecimiento de la presión comparado con su contraparte en RG, lo cual lleva a radios R_* mayores. En caso contrario, los valores de $\bar{\beta}_4 > 0$ llevan a que esa presión sea hacia el centro de la estrella acelerando el decrecimiento de la función de presión que produce radios R_* menores comparados con aquéllos de RG. Aquí se determinó también que la potencia n magnifica estos resultados aumentando las diferencias de los resultados comparados con los de RG. Vale la pena destacar que tales diferencias son más sensibles para acoples positivos.

La solución analítica permitió determinar que la distribución de masa para valores negativos (positivos) de $\bar{\beta}_4$, sería menor (mayor) comparada con RG para un mismo valor de r . No obstante, numéricamente se observó que sucedía lo contrario, lo cual revela que los efectos introducidos por el acoplamiento con el campo vectorial se manifiestan con mayor intensidad hacia la zona donde $r = R_*/2$, cambiando el

resultado final. Los perfiles masa-radio son una muestra más de las desviaciones con respecto a RG; variando los parámetros libres en los rangos admisibles, se encontraron diferencias importantes en las curvas para los diferentes casos graficados dando lugar a estrellas más o menos compactas que en RG dependiendo de si el acoplamiento es negativo o positivo, respectivamente. Adicionalmente, las cotas para el espacio de parámetros, que fueron obtenidas analíticamente, son mucho más restrictivas que para el caso cúbico y numéricamente no se presentaron divergencias en los perfiles en cuestión.

Las estrellas presentan mayor estabilidad para aquellos casos en los que $\tilde{\beta}_3$ y $\tilde{\beta}_4$ eran negativos. Para valores de acoplamiento positivos, los casos analizados también eran estables, pero tendientes a ser inestables al variar parámetros tanto de la teoría como de la ecuación de estado. No obstante, las definiciones de masa, así como la energía de enlace gravitacional como criterio de estabilidad son formulados en el contexto de RG. De manera que los resultados obtenidos basándose en estas definiciones deben ser tratados con especial cuidado ya que pueden presentarse diferencias en su pertinencia física al cambiar a una teoría modificada de la gravedad.

Estos resultados son de utilidad para determinar los efectos de los acoplamientos con el campo vectorial al sector gravitacional. No obstante, de cara a contrastarlos con resultados observacionales, deben estudiarse modelos con ecuaciones de estado más realistas producto del análisis que se hace de su contenido material. Adicionalmente, la literatura relacionada con objetos compactos propone la existencia de más criterios de estabilidad que valdría la pena usar o adaptar en estas teorías para determinar con mayor seguridad la viabilidad física de las soluciones. En la actualidad, diferentes resultados sugieren la existencia de estrellas de neutrones con masa y radio que no sólo no concuerdan con los resultados para muchas de estas ecuaciones de estado realistas, sino que además superan el límite de

Tolman-Oppenheimer-Volkoff para la masa máxima ⁹²³⁰. De determinarse esto con total certeza, los efectos vistos para ambos acoplamientos estudiados podrían dar cuenta de las observaciones.

⁹² F. OZEL y P. FREIRE. "Masses, Radii, and the Equation of State of Neutron Stars". En: *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 54 (2016).

BIBLIOGRAFÍA

- ABBOT, B. P. y col. “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”. En: *Phys. Rev. Lett.* 116 (2016) (vid. pág. 15).
- ABBOTT, B. P. y col. “Gravitational Waves and Gamma-Rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A”. En: *Astrophys. J. Lett.* 848 (2017) (vid. pág. 22).
- “GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral”. En: *Phys. Rev. Lett.* 119 (2017) (vid. pág. 21).
- “Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger”. En: *Astrophys. J. Lett.* 848 (2017) (vid. pág. 22).
- AGHAMOUSA, A. y col. “The DESI experiment part I: Science, targeting, and survey design”. En: *arXiv preprint arXiv:1611.00036* (2016) (vid. pág. 16).
- AGHANIM, N. y col. “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters”. En: *arXiv preprint arXiv:1807.06209* (2018) (vid. pág. 17).
- AKIYAMA, K. y col. “First M87 event horizon telescope results. IV. Imaging the central supermassive black hole”. En: *Astrophys. J. Lett.* 875 (2019) (vid. pág. 15).
- ALLYS, E., P. PETER e Y. RODRÁGUEZ. “Generalized Proca action for an Abelian vector field”. En: *JCAP* 1602 (2016) (vid. págs. 20, 44).
- ALLYS, E. y col. “On the 4D generalized Proca action for an Abelian vector field”. En: *JCAP* 1609 (2016) (vid. págs. 20, 44, 113).

- ANTONIADIS, J. y col. “The millisecond pulsar mass distribution: Evidence for bimodality and constraints on the maximum neutron star mass”. En: *arXiv preprint arXiv:1605.01665* (2016) (vid. pág. 14).
- ARNOWITT, R., DESER y C. W. MISNER. “Coordinate Invariance and Energy Expressions in General Relativity”. En: *Phys. Rev.* 122 (1961) (vid. pág. 57).
- “Energy and the Criteria for Radiation in General Relativity”. En: *Phys. Rev.* 118 (1960) (vid. pág. 57).
- BAKER, T., D. PSALTIS y C. SKORDIS. “Linking Tests of Gravity On All Scales: from the Strong-Field Regime to Cosmology”. En: *Astrophys. J.* 802 (2015) (vid. pág. 23).
- BAKER, T. y col. “Strong Constraints on Cosmological Gravity from GW170817 and GRB 170817A”. En: *Phys. Rev. Lett.* 119 (2017) (vid. pág. 22).
- BAOJIU, L. y K. KAZUYA. *Modified Gravity: Progresses And Outlook Of Theories, Numerical Techniques And Observational Tests*. World Scientific, 2019 (vid. pág. 18).
- BERTONE, G., D. HOOPER y J. SILK. “Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints”. En: *Phys. Rept.* 405 (2005) (vid. pág. 16).
- BIRKHOFF, G. y R. E. LANGER. *Relativity and modern physics*. Harvard University Press, 1923 (vid. pág. 57).
- BULL, P. y col. “Beyond Λ CDM: Problems, solutions, and the road ahead”. En: *Phys. Dark Univ.* 12 (2016) (vid. pág. 15).

- BURGIO, G. y A. FANTINA. “Nuclear Equation of state for Compact Stars and Supernovae”. En: *Astrophys. Space Sci. Libr.* 457 (2018) (vid. pág. 61).
- CHAGOYA, J., G. NIZ y G. TASINATO. “Black Holes and Neutron Stars in Vector Galileons”. En: *Class. Quant. Grav.* 34 (2017) (vid. págs. 26, 95).
- CHAMEL, N. y P. HAENSEL. “Physics of Neutron Star Crusts”. En: *Living Rev. Rel.* 11 (2008) (vid. pág. 14).
- CLIFFORD, W. “The Confrontation between General Relativity and Experiment”. En: *Living Rev. Relativ.* 17 (2014) (vid. pág. 15).
- COOPER, K. “The dark-energy deniers”. En: *Phys. World* 31 (2018) (vid. pág. 17).
- CREMINELLI, P. y F. VERNIZZI. “Dark Energy after GW170817 and GRB170817A”. En: *Phys. Rev. Lett.* 119 (2017) (vid. pág. 22).
- CROMARTIE, H. T. y col. “Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar”. En: *Nat. Astron.* 4 (2020) (vid. págs. 18, 99).
- DE RHAM, C. y S. MELVILLE. “Gravitational Rainbows: LIGO and Dark Energy at its Cutoff”. En: *Phys. Rev. Lett.* 121 (2018) (vid. pág. 22).
- DEFELICE, A., L. HEISENBERG y S. TSUJIKAWA. “Observational constraints on generalized Proca theories”. En: *Phys. Rev. D* 95 (2017) (vid. pág. 22).
- DEFELICE, A. y col. “Reducing the H_0 tension with generalized Proca theory”. En: *arXiv preprint arXiv:2002.06782* (2020) (vid. págs. 21, 26).
- “Screening fifth forces in generalized Proca theories”. En: *Phys. Rev. D.* 93 (2016) (vid. págs. 21, 95).

- DEFFAYET, C. y col. “From k-essence to generalised Galileons”. En: *Phys. Rev. D.* 84 (2011) (vid. pág. 19).
- DYSON, F. W., A. S. EDDINGTON y C. DAVIDSON. “A Determination of the Deflection of Light by the Sun’s Gravitational Field, from Observations made at the Total Eclipse of May 29, 1919”. En: *Mem. of the Royal Astron. Soc.* 62 (1923) (vid. pág. 15).
- EINSTEIN, A. “Die Feldgleichungen der Gravitation”. En: *Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin, Seite.* (1915) (vid. pág. 13).
- “Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie [AdP 49, 769 (1916)]”. En: *Annalen der Physik* 14 (2005) (vid. pág. 13).
- Errasti Diez, V. y col. “Complete theory of Maxwell and Proca fields”. En: *Phys. Rev. D* 101 (2020) (vid. pág. 35).
- ERRASTI DIEZ, V. y col. “Maxwell-Proca theory: Definition and construction”. En: *Phys. Rev. D* 101 (2020) (vid. pág. 35).
- EZQUIAGA, J. y M. ZUMALACARREGUI. “Dark Energy After GW170817: Dead Ends and the Road Ahead”. En: *Phys. Rev. Lett.* 119 (2017) (vid. pág. 22).
- FERRARI, L., P. C. R. ROSSI y M. MALHEIRO. “A polytropic approach to neutron stars”. En: *Int. J. Mod. Phys. D.* 19 (2010) (vid. pág. 61).
- GALLEGO CADAVID, A. e Y. RODRIGUEZ. “A systematic procedure to build the beyond generalized Proca field theory”. En: *Phys. Lett. B* 798 (2019) (vid. págs. 23, 32, 44).

- GLEYZES, J. y col. "Healthy theories beyond Horndeski". En: *Phys. Rev. Lett.* 114 (2015) (vid. pág. 44).
- GUARNIZO, A., L. CASTANEDA y J. M. TEJEIRO. "Boundary Term in Metric $f(R)$ Gravity: Field Equations in the Metric Formalism". En: *Gen. Rel. Grav.* 42 (2010) (vid. pág. 119).
- HAENSEL, P., A. Y. POTEKHIN y D. G. YAKOVLEV. "Neutron stars 1: Equation of state and structure". En: *Astrophys. Space Sci. Libr.* 326 (2007) (vid. pág. 53).
- HEISENBERG, L. "Generalization of the Proca Action". En: *JCAP* 1405 (2014) (vid. pág. 20).
- HEISENBERG, L., R. KASE y S. TSUJIKAWA. "Beyond generalized Proca theories". En: *Phys. Lett. B* 760 (2016) (vid. págs. 33, 44, 46).
- HEISENBERG, L. y col. "Black holes in vector-tensor theories". En: *JCAP* 08 (2017) (vid. págs. 50, 82).
- "Hairy black-hole solutions in generalized Proca theories". En: *Phys. Rev. D* 96 (2017) (vid. pág. 82).
- HORED T, G. P. *Polytropes: applications in astrophysics and related fields*. Springer Science & Business Media, 2004 (vid. pág. 62).
- HORNDESKI, G. W. "Birkhoff's theorem and magnetic monopole solutions for a system of generalized Einstein-Maxwell field equations". En: *J. Math. Phys.* 19 (1978) (vid. pág. 19).

- HORNDESKI, G. W. “Conservation of Charge and the Einstein-Maxwell Field Equations”. En: *J. Math. Phys.* 17 (1976) (vid. pág. 19).
- “Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space”. En: *Int. J. Theor. Phys.* 10 (1974) (vid. pág. 18).
- “Static Spherically Symmetric Solutions to a System of Generalized Einstein-Maxwell Field Equations”. En: *Phys. Rev. D* 17 (1978) (vid. pág. 19).
- HOWELL, D. A. y col. “The type Ia supernova SNLS-03D3bb from a super-Chandrasekhar-mass white dwarf star”. En: *Nature* 443 (2006) (vid. pág. 18).
- HUTERER, D. y D. L. SHAFER. “Dark energy two decades after: Observables, probes, consistency tests”. En: *Rept. Prog. Phys.* 81 (2017) (vid. pág. 16).
- JARAMILLO, J. L. y E. GOURGOULHON. “Mass and Angular Momentum in General Relativity”. En: *Fundam. Theor. Phys.* 162 (2011) (vid. pág. 57).
- JIMENEZ, J. BELTRAN y L. HEISENBERG. “Derivative self-interactions for a massive vector field”. En: *Phys. Lett. B.* 757 (2016) (vid. págs. 20, 44).
- JIMENEZ BELTRAN, J. y A. MAROTO. “Cosmological evolution in vector-tensor theories of gravity”. En: *Phys. Rev. D.* 80 (2009) (vid. págs. 21, 26).
- KASE, R., M. MINAMITSUJI y S. TSUJIKAWA. “Black holes in quartic-order beyond-generalized Proca theories”. En: *Phys. Lett. B* 782 (2018) (vid. págs. 21, 26).
- “Relativistic stars in vector-tensor theories”. En: *Phys. Rev. D.* 97 (2018) (vid. págs. 21, 23, 67).

- KLOCHKOV, D. y col. “Study of a new central compact object: The neutron star in the supernova remnant G15.9+0.2”. En: *Astron. Astrophys.* 592 (2016) (vid. p  g. 14).
- KOBAYASHI, T., M. YAMAGUCHI y J. YOKOYAMA. “Generalized G-Inflation:   Inflation with the Most General Second-Order Field Equations”. En: *Prog. Theor. Phys.* 126 (2011) (vid. p  gs. 19, 20).
- KRISHNAN, V. V. y col. “Lense–Thirring frame dragging induced by a fast-rotating white dwarf in a binary pulsar system”. En: *Science* 367 (2020) (vid. p  g. 15).
- LATTIMER, J. M. “The Nuclear Equation of State and Neutron Star Masses”. En: *Annu. Rev. Nucl. Part. S.* 62 (2012) (vid. p  g. 54).
- MARTINS, Y. X. y col. “Existence and classification of pseudo-asymptotic solutions for Tolman–Oppenheimer–Volkoff systems”. En: *Ann. Phys.* 409 (2019) (vid. p  g. 14).
- MINAMITSUJI, M. “Black holes in the generalized Proca theory”. En: *Gen. Rel. Grav.* 49 (2017) (vid. p  g. 95).
- MISNER, C. W., K. S. THORNE y J. A. WHEELER. *Gravitation*. Princeton University Press, 2017 (vid. p  gs. 57, 66).
- NICOLIS, A., R. RATTAZZI y E. TRINCHERINI. “The Galileon as a local modification of gravity”. En: *Phys. Rev. D* 79 (2009) (vid. pág. 19).
- OLIVEROS, A. y M. A. JARABA. “Inflation driven by massive vector fields with derivative self-interactions”. En: *Int. J. Mod. Phys. D.* 28 (2019) (vid. págs. 21, 26).

- OPPENHEIMER, J. R. y G. M. VOLKOFF. “On Massive Neutron Cores”. En: *Phys. Rev.* 55 (1939) (vid. págs. 13, 58).
- OSTROGRADSKY, M. “Memoires sur les equations differentielles, relatives au probleme des isoperimetres”. En: *Mem. Acad. St. Petersbourg* 6 (1850) (vid. pág. 27).
- OZEL, F. y P. FREIRE. “Masses, Radii, and the Equation of State of Neutron Stars”. En: *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 54 (2016) (vid. pág. 99).
- PERLMUTTER, S. y col. “Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae”. En: *Astrophys. J.* 517 (1999) (vid. pág. 16).
- RAIDAL, M. y col. “Formation and evolution of primordial black hole binaries in the early universe”. En: *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2019 (2019) (vid. pág. 53).
- REZZOLLA, L., E. R. MOST y L. R. WEIH. “Using gravitational-wave observations and quasi-universal relations to constrain the maximum mass of neutron stars”. En: *Astrophys. J.* 852 (2018) (vid. pág. 18).
- RIESS, A. y col. “Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1 % Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond Λ CDM”. En: *Astrophys. J.* 876 (2019) (vid. pág. 17).
- “Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant”. En: *Astron. J.* 116 (1998) (vid. pág. 16).
- RODRIGUEZ, Y. y A. A. NAVARRO. “Scalar and vector Galileons”. En: *J. Phys. Conf. Ser.* 831 (2017) (vid. págs. 34, 43).

- RUIZ, M., S. L. SHAPIRO y A. TSOKAROS. "GW170817, general relativistic magnetohydrodynamic simulations, and the neutron star maximum mass". En: *Phys. Rev. D.* 97 (2018) (vid. pág. 18).
- SAKSTEIN, J. y B. JAIN. "Implications of the Neutron Star Merger GW170817 for Cosmological Scalar-Tensor Theories". En: *Phys. Rev. Lett.* 119 (2017) (vid. pág. 22).
- SCHWARZSCHILD, K. "On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory". En: *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1916 (1916) (vid. pág. 13).
- SEELIG, C. *Helle Zeit – Dunkle Zeit: In memoriam Albert Einstein*. Springer-Verlag, 1956 (vid. pág. 26).
- SHAPIRO, S. L. y S. A. TEUKOLSKY. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*. John Wiley & Sons, 2008 (vid. pág. 53).
- T., Collaborat E. H. "First M87 Event Horizon Telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole". En: *Astrophys. J. Lett.* 875 (2019) (vid. pág. 15).
- TASINATO, G. "Cosmic Acceleration from Abelian Symmetry Breaking". En: *JHEP* 1404 (2014) (vid. pág. 20).
- TAURIS, T. M. y E. P. J. VAN DEN HEUVEL. *Formation and evolution of compact stellar X-ray sources*. Vol. 39. Cambridge University Press, 2006 (vid. pág. 52).
- TOLMAN, R. C. "Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid". En: *Phys. Rev.* 55 (1939) (vid. págs. 13, 58).

- VAINSHTEIN, A. I. “To the problem of nonvanishing gravitation mass”. En: *Phys. Lett. B* 39 (1972) (vid. págs. 21, 95).
- WANG, H. y col. “The GW170817/GRB 170817A/AT 2017gfo Association: Some Implications for Physics and Astrophysics”. En: *Astrophys. J. Lett.* 851 (2017) (vid. pág. 22).
- WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley New York, 1972 (vid. pág. 57).
- “The cosmological constant problem”. En: *Rev. Mod. Phys.* 61 (1989) (vid. pág. 16).
- WOODARD, R. P. “Avoiding dark energy with $1/r$ modifications of gravity”. En: *Lect. Notes Phys.* 720 (2007) (vid. págs. 19, 32).
- WOODARD, R. P. “Ostrogradsky’s theorem on Hamiltonian instability”. En: *Scholarpedia* 10 (2015) (vid. págs. 19, 27, 32).
- ZHANG, N. B. y B. A. LI. “Extracting Nuclear Symmetry Energies at High Densities from Observations of Neutron Stars and Gravitational Waves”. En: *Eur. Phys. J. A* 55 (2019) (vid. pág. 14).

ANEXOS

Anexo A. CÁLCULO COMPONENTES $\mathcal{H}^{\epsilon\omega}$ PARA \mathcal{L}_4^P

Se darán los elementos detallados en el cálculo del Hessiano para \mathcal{L}_1 , para las demás piezas se implementan exactamente las mismas consideraciones.

Sea $\mathcal{L}_1 = f_1(X)g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu\partial_\rho A_\sigma$. Así, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial_0 A_\omega)} &= f_1(X)g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\left[\frac{\partial(\partial_\mu A_\nu)}{\partial(\partial_0 A_\omega)}\partial_\rho A_\sigma + \partial_\mu A_\nu\frac{\partial(\partial_\rho A_\sigma)}{\partial(\partial_0 A_\omega)}\right], \\ &= f_1(X)g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\left[\frac{\partial(\partial_\mu A_\nu)}{\partial(\partial_0 A_\omega)}\partial_\rho A_\sigma + \partial_\mu A_\nu\frac{\partial(\partial_\rho A_\sigma)}{\partial(\partial_0 A_\omega)}\right], \\ &= f_1(X)g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\left[\delta_\mu^0\delta_\nu^\omega\partial_\rho A_\sigma + \partial_\mu A_\nu\delta_\rho^0\delta_\sigma^\omega\right].\end{aligned}$$

Ahora, derivando nuevamente

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\mathcal{L}_1}{\partial(\partial_0 A_\epsilon)\partial(\partial_0 A_\omega)} &= f_1(X)g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\left[\delta_\mu^0\delta_\nu^\omega\frac{\partial(\partial_\rho A_\sigma)}{\partial(\partial_0 A_\epsilon)} + \delta_\mu^0\delta_\sigma^\omega\frac{\partial(\partial_\mu A_\nu)}{\partial(\partial_0 A_\epsilon)}\right], \\ &= f_1(X)g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}(\delta_\mu^0\delta_\nu^\omega\delta_\rho^0\delta_\sigma^\epsilon + \delta_\mu^0\delta_\nu^\epsilon\delta_\rho^0\delta_\sigma^\omega), \\ &= f_1(X)[g^{0\omega}g^{0\epsilon} + g^{0\epsilon}g^{0\omega}], \\ &= 2f_1(X)g^{0\epsilon}g^{0\omega}.\end{aligned}$$

Es así como se obtiene que

$$\mathcal{H}_{\mathcal{L}_1}^{\epsilon\omega} = 2f_1(X)g^{0\epsilon}g^{0\omega}.$$

De igual manera, para las demás piezas se tiene

$$\mathcal{H}_{\mathcal{L}_2}^{\epsilon\omega} = \frac{\partial^2\mathcal{L}_2}{\partial(\partial_0 A_\epsilon)\partial(\partial_0 A_\omega)} = f_2(X)g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}(\delta_\mu^0\delta_\nu^\omega\delta_\rho^0\delta_\sigma^\epsilon + \delta_\mu^0\delta_\nu^\epsilon\delta_\rho^0\delta_\sigma^\omega),$$

$$\begin{aligned}
&= 2f_2(X)g^{00}g^{\epsilon\omega}, \\
\mathcal{H}_{\mathcal{L}_3}^{\epsilon\omega} &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}_3}{\partial(\partial_0 A_\epsilon)\partial(\partial_0 A_\omega)} = f_3(X)g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}(\delta_\mu^0\delta_\nu^\omega\delta_\rho^0\delta_\sigma^\epsilon + \delta_\mu^0\delta_\nu^\epsilon\delta_\rho^0\delta_\sigma^\omega), \\
&= 2f_3(X)g^{0\epsilon}g^{0\omega},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathcal{L}_4}^{\epsilon\omega} &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}_4}{\partial(\partial_0 A_\epsilon)\partial(\partial_0 A_\omega)} = f_4(X)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\delta_\mu^0\delta_\nu^\omega\delta_\rho^0\delta_\sigma^\epsilon + \delta_\mu^0\delta_\nu^\epsilon\delta_\rho^0\delta_\sigma^\omega), \\
&= (\epsilon^{0\omega 0\epsilon} + \epsilon^{0\epsilon 0\omega}), \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathcal{L}_5}^{\epsilon\omega} &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}_5}{\partial(\partial_0 A_\epsilon)\partial(\partial_0 A_\omega)} = f_5(X)A^\mu A^\nu g^{\rho\sigma}(\delta_\mu^0\delta_\nu^\omega\delta_\rho^0\delta_\sigma^\epsilon + \delta_\mu^0\delta_\nu^\epsilon\delta_\rho^0\delta_\sigma^\omega), \\
&= f_5(X)A^0(A^\omega g^{0\epsilon} + A^\epsilon g^{0\omega}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathcal{L}_6}^{\epsilon\omega} &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}_6}{\partial(\partial_0 A_\epsilon)\partial(\partial_0 A_\omega)} = f_6(X)A^\mu A^\rho g^{\nu\sigma}(\delta_\mu^0\delta_\nu^\omega\delta_\rho^0\delta_\sigma^\epsilon + \delta_\mu^0\delta_\nu^\epsilon\delta_\rho^0\delta_\sigma^\omega), \\
&= 2f_6(X)(A^0)^2 g^{\epsilon\omega},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathcal{L}_7}^{\epsilon\omega} &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}_7}{\partial(\partial_0 A_\epsilon)\partial(\partial_0 A_\omega)} = f_7(X)A^\mu A^\sigma g^{\nu\rho}(\delta_\mu^0\delta_\nu^\omega\delta_\rho^0\delta_\sigma^\epsilon + \delta_\mu^0\delta_\nu^\epsilon\delta_\rho^0\delta_\sigma^\omega), \\
&= f_7(X)A^0(A^\omega g^{0\epsilon} + A^\epsilon g^{0\omega}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathcal{L}_8}^{\epsilon\omega} &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}_8}{\partial(\partial_0 A_\epsilon)\partial(\partial_0 A_\omega)} = f_8(X)A^\nu A^\sigma g^{\mu\rho}(\delta_\mu^0\delta_\nu^\omega\delta_\rho^0\delta_\sigma^\epsilon + \delta_\mu^0\delta_\nu^\epsilon\delta_\rho^0\delta_\sigma^\omega), \\
&= 2f_8(X)g^{00}A^\epsilon A^\omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathcal{L}_9}^{\epsilon\omega} &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}_9}{\partial(\partial_0 A_\epsilon)\partial(\partial_0 A_\omega)} = f_9(X)\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} A_\alpha A^\mu (\delta_\mu^0 \delta_\nu^\omega \delta_\rho^0 \delta_\sigma^\epsilon + \delta_\mu^0 \delta_\nu^\epsilon \delta_\rho^0 \delta_\sigma^\omega), \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathcal{L}_{10}}^{\epsilon\omega} &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{10}}{\partial(\partial_0 A_\epsilon)\partial(\partial_0 A_\omega)} = f_{10}(X)\epsilon^{\alpha\mu\rho\sigma} A_\alpha A^\nu (\delta_\mu^0 \delta_\nu^\omega \delta_\rho^0 \delta_\sigma^\epsilon + \delta_\mu^0 \delta_\nu^\epsilon \delta_\rho^0 \delta_\sigma^\omega), \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathcal{L}_{11}}^{\epsilon\omega} &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{11}}{\partial(\partial_0 A_\epsilon)\partial(\partial_0 A_\omega)} = f_{11}(X)A^\mu A^\nu A^\rho A^\sigma (\delta_\mu^0 \delta_\nu^\omega \delta_\rho^0 \delta_\sigma^\epsilon + \delta_\mu^0 \delta_\nu^\epsilon \delta_\rho^0 \delta_\sigma^\omega), \\ &= 2f_{11}(X)(A^0)^2 A^\epsilon A^\omega.\end{aligned}$$

Anexo B. DEMOSTRACIÓN $\mathcal{L}_9 \in \mathcal{L}_2^P$

Sea la densidad lagrangiana

$$\tilde{\mathcal{L}}_9 = f_9(X) A^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} S^{\mu\lambda} A_\lambda.$$

El tensor $S^{\nu\lambda}$ puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} S^{\nu\lambda} &= \nabla^\nu A^\lambda + \nabla^\lambda A^\nu + \nabla^\lambda A^\nu - \nabla^\lambda A^\nu, \\ &= F^{\nu\lambda} + 2\nabla^\lambda A^\nu. \end{aligned}$$

Por conveniencia, resulta útil invocar la propiedad ⁴⁴

$$F^{\mu\alpha} \tilde{F}_{\nu\alpha} = \frac{1}{4} (F^{\alpha\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta}) \delta_\mu^\nu,$$

De aquí que $\tilde{\mathcal{L}}_9$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_9 &= \frac{1}{2} f_9(A^2) A^\mu A_\lambda \tilde{F}_{\mu\nu} (F^{\lambda\nu} + 2\nabla^\nu A^\lambda), \\ &= \frac{1}{2} f_9(A^2) A^\mu A_\lambda \left(\frac{1}{4} \delta_\mu^\lambda \tilde{F}_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} + 2\tilde{F}_{\mu\nu} \nabla^\nu A^\lambda \right), \\ &= \frac{1}{2} f_9(A^2) \left[\frac{1}{4} (A^\mu A_\mu) \tilde{F}_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} + 2A^\mu A_\lambda \tilde{F}_{\mu\nu} \nabla^\nu A^\lambda \right], \\ &= \frac{1}{8} f_9(A^2) A^2 \tilde{F} \cdot F + f_9(A^2) (\nabla_\nu A^2) A_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Vale la pena definir una función $G_9(A^2)$ tal que

$$\nabla_\nu G_9(A^2) = G_{9,A^2} \nabla_\nu A^2 = f_9(A^2) (\nabla_\nu A^2).$$

Reemplazando tal resultado en $\tilde{\mathcal{L}}_9$ se obtiene

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_9 &= \frac{1}{8}f_9(A^2)A^2\tilde{F} \cdot F + \nabla_\nu G_9(A^2)A_\mu\tilde{F}^{\mu\nu}, \\ &= \frac{1}{8}f_9(A^2)A^2\tilde{F} \cdot F + \nabla_\nu \left[G_9(A^2)A_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} \right] - G_9(A^2)\nabla_\nu(A_\mu\tilde{F}^{\mu\nu}).\end{aligned}$$

Analizando de manera independiente el último término de este resultado se tiene

$$\begin{aligned}G_9(A^2)\nabla_\nu(A_\mu\tilde{F}^{\mu\nu}) &= G_9(A^2) \left[(\nabla_\nu A_\mu)\tilde{F}^{\mu\nu} + A_\mu\nabla_\nu\tilde{F}^{\mu\nu} \right], \\ &= G_9(A^2) \left[\frac{1}{2}(\nabla_\nu A_\mu + \nabla_\mu A_\nu)\tilde{F}^{\mu\nu} + A_\mu\nabla_\nu\tilde{F}^{\mu\nu} \right], \\ &= G_9(A^2) \left[\frac{1}{2}(\nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu)\tilde{F}^{\mu\nu} + A_\mu\nabla_\nu\tilde{F}^{\mu\nu} \right], \\ &= G_9(A^2) \left[\frac{1}{2}F_{\nu\mu}\tilde{F}^{\mu\nu} + A_\mu\nabla_\nu\tilde{F}^{\mu\nu} \right].\end{aligned}$$

Evidentemente, el primer término del corchete es de tipo $(F \cdot \tilde{F})$ por lo que, siendo un término contenido en \mathcal{L}_2^P , puede ser eliminado de $\tilde{\mathcal{L}}_9$. Reemplazando el último término en $\tilde{\mathcal{L}}_9$ se llega a

$$\tilde{\mathcal{L}}_9 = \left[\frac{1}{8}f_9(A^2)A^2 + \frac{1}{2}G_9(A^2) \right] \tilde{F} \cdot F + \nabla_\nu \left[G_9(A^2)A_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} \right] - G_9(A^2)A_\mu\nabla_\nu\tilde{F}^{\mu\nu},$$

del que puede verse que el primer término corresponde a las sumas de dos funciones arbitrarias de A^2 multiplicado por $(F \cdot \tilde{F})$, de manera que dicho término pertenece enteramente a \mathcal{L}_2^P y su presencia aquí es redundante. Por otro lado, el segundo término es la divergencia de un vector, que como ya se mostró su presencia es irrelevante ya que no aporta información nueva a la teoría. Finalmente, si bien del último término no se puede decir nada de manera *a priori*, sobre él puede realizarse

un análisis adicional obteniéndose lo siguiente

$$\begin{aligned} G_9(A^2)A_\mu \nabla_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} &= G_9(A^2)A_\mu \nabla_\nu (\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}), \\ &= G_9(A^2)A_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\nu F_{\rho\sigma}, \end{aligned}$$

que si bien, aún no es concluyente en absoluto, sugiere que haciendo uso de la identidad cíclica del tensor Riemman se obtenga

$$\begin{aligned} -(R^\mu{}_{\sigma\nu\rho} + R^\mu{}_{\rho\sigma\nu} + R^\mu{}_{\nu\rho\sigma})A_\mu &= 0, \\ (R_{\sigma\mu\nu\rho} + R_{\rho\mu\sigma\nu} + R_{\mu\mu\rho\sigma})A^\mu &= 0, \\ R_{\sigma\mu\nu\rho}A^\mu + R_{\rho\mu\sigma\nu}A^\mu + R_{\mu\mu\rho\sigma}A^\mu &= 0, \\ (\nabla_\nu \nabla_\rho - \nabla_\rho \nabla_\nu)A_\sigma + (\nabla_\sigma \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\sigma)A_\rho + (\nabla_\rho \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\rho)A_\nu &= 0, \\ \nabla_\nu \nabla_\rho A_\sigma - \nabla_\nu \nabla_\sigma A_\rho + \nabla_\sigma \nabla_\nu A_\rho - \nabla_\sigma \nabla_\rho A_\nu + \nabla_\rho \nabla_\sigma A_\nu - \nabla_\rho \nabla_\nu A_\sigma &= 0, \\ \nabla_\nu (\nabla_\rho A_\sigma - \nabla_\sigma A_\rho) + \nabla_\sigma (\nabla_\nu A_\rho - \nabla_\rho A_\nu) + \nabla_\rho (\nabla_\sigma A_\nu - \nabla_\nu A_\sigma) &= 0, \\ \nabla_\nu F_{\rho\sigma} + \nabla_\sigma F_{\nu\rho} + \nabla_\rho F_{\sigma\nu} &= 0, \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\nabla_\nu F_{\rho\sigma} + \nabla_\sigma F_{\nu\rho} + \nabla_\rho F_{\sigma\nu}) &= 0, \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\nu F_{\rho\sigma} + \epsilon^{\mu\rho\sigma\nu} \nabla_\nu F_{\rho\sigma} + \epsilon^{\mu\sigma\nu\rho} \nabla_\nu F_{\rho\sigma} &= 0, \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\nu F_{\rho\sigma} + \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\nu F_{\rho\sigma} + \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\nu F_{\rho\sigma} &= 0, \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\nu F_{\rho\sigma} &= 0, \end{aligned}$$

lo que se traduce en

$$G_9(A^2)A_\mu \nabla_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0.$$

Es así como se muestra que anulando la última contribución relevante que quedaba en $\tilde{\mathcal{L}}_9$, se llega a que toda esta pieza de lagrangiano pertenece enteramente a \mathcal{L}_2^P , tal y como se consideró en el texto.

Anexo C. PRINCIPIO DE ACCIÓN ESTACIONARIA PARA \mathcal{L}_{Proca}

Se empleará el principio de acción estacionario con extremos fijos variando únicamente respecto a la métrica. Para este cálculo, el lagrangiano se dividirá en componentes.

(i) Para $F = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g}F) &= \delta(\sqrt{-g}) \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} \right) + \sqrt{-g} \delta \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} \right), \\ &= \delta(\sqrt{-g}) \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(\delta F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + F_{\mu\nu}\delta F_{\alpha\beta}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\delta g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}g^{\mu\alpha}\delta g^{\nu\beta} \right).\end{aligned}$$

Por definición, se invocan los resultados

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &= \nabla_{\mu}A_{\nu} - \nabla_{\nu}A_{\mu}, \\ &= (\partial_{\mu}A_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}A_{\rho}) - (\partial_{\nu}A_{\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}A_{\rho}), \\ &= \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\delta F_{\mu\nu} = \delta(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}),$$

sólo representa variaciones respecto al campo vectorial, las cuales están incluidas en las ecuaciones de Euler-Lagrange en espaciotiempo curvo, de manera que no serán tenidas en cuenta en este proceso.

Adicionalmente, se tiene

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

Reemplazando los anteriores resultados en la variación conlleva a

$$\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g}F) &= -\frac{1}{8}\sqrt{-g}(g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\sqrt{-g}(F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\delta g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}g^{\mu\alpha}\delta g^{\nu\beta}), \\
&= \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{8}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}g^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}F_{\beta\nu}F_{\alpha\mu}g^{\alpha\beta}\right)\delta g^{\mu\nu}, \\
&= \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{8}g_{\mu\nu}(\nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha)(\nabla^\alpha A^\beta - \nabla^\beta A^\alpha) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}(\nabla_\mu A_\alpha - \nabla_\alpha A_\mu)(\nabla_\nu A_\beta - \nabla_\beta A_\nu)g^{\alpha\beta}\right]\delta g^{\mu\nu}, \\
&= \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{8}g_{\mu\nu}(\nabla_\alpha A_\beta \nabla^\alpha A^\beta - \nabla_\alpha A_\beta \nabla^\beta A^\alpha - \nabla_\beta A_\alpha \nabla^\alpha A^\beta + \nabla_\beta A_\alpha \nabla^\beta A^\alpha) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}(\nabla_\mu A_\alpha \nabla_\nu A_\beta - \nabla_\mu A_\alpha \nabla_\beta A_\nu - \nabla_\alpha A_\mu \nabla_\nu A_\beta + \nabla_\alpha A_\mu \nabla_\beta A_\nu)g^{\alpha\beta}\right]\delta g^{\mu\nu}, \\
&= \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}(\nabla_\alpha A_\beta \nabla^\alpha A^\beta - \nabla_\alpha A_\beta \nabla^\beta A^\alpha) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}(\nabla_\mu A^\beta \nabla_\nu A_\beta - \nabla_\mu A^\beta \nabla_\beta A_\nu - \nabla^\beta A_\mu \nabla_\nu A_\beta + \nabla^\beta A_\mu \nabla_\beta A_\nu)\right]\delta g^{\mu\nu}, \\
&= \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}\nabla_\mu A^\beta \nabla_\nu A_\beta + \nabla^\beta A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A_\beta - \frac{1}{2}\nabla_\beta A_\mu \nabla^\beta A_\nu - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \nabla^\alpha A^\beta\right)\delta g^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, simetrizando las ecuaciones de campo gravitacional, se llega a

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\mu A^\beta \nabla_\nu A_\beta - \nabla^\beta A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A_\beta + \frac{1}{2}\nabla_\beta A_\mu \nabla^\beta A_\nu + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \nabla^\alpha A^\beta.$$

(ii) Para $\mathcal{L}_2 = G_2(X, F)$:

$$\delta(\sqrt{-g}G_2) = \delta(\sqrt{-g})G_2 + \sqrt{-g}\left(\frac{\partial G_2}{\partial X}\delta X + \frac{\partial G_2}{\partial F}\delta F\right).$$

Adicionalmente, se tienen los resultados

$$\begin{aligned}
\delta X &= \delta\left(-\frac{1}{2}A_\mu A_\nu g^{\mu\nu}\right) = -\frac{1}{2}A_\mu A_\nu \delta g^{\mu\nu}, \\
\delta F &= \delta\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\right) = -\frac{1}{2}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}g^{\alpha\beta}\delta g^{\mu\nu},
\end{aligned}$$

los cuales se reemplazan en la variación para así obtener

$$\delta(\sqrt{-g} G_2) = \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} G_2 - \frac{1}{2} G_{2,X} A_\mu A_\nu - \frac{1}{2} G_{2,F} (\nabla_\mu A^\beta \nabla_\nu A_\beta - 2 \nabla^\beta A_\mu \nabla_\nu A_\beta + \nabla^\beta A_\mu \nabla_\beta A_\nu) \right] \delta g^{\mu\nu},$$

que simetrizando conducen a las ecuaciones de campo gravitacional

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G_2(X, F) + \frac{1}{2} G_{2,X} A_\mu A_\nu + G_{2,F}(X, F) \left(\frac{1}{2} \nabla_\mu A^\beta \nabla_\nu A_\beta - \nabla^\beta A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A_\beta + \frac{1}{2} \nabla_\beta A_\mu \nabla^\beta A_\nu \right).$$

(iii) Para $\mathcal{L}_3 = G_3(X) \nabla_\rho A^\rho$:

$$\delta(\sqrt{-g} G_3 \nabla_\rho A^\rho) = \delta(\sqrt{-g}) G_3 \nabla_\rho A^\rho + \sqrt{-g} \delta(G_3) \nabla_\rho A^\rho + \sqrt{-g} G_3 \delta(\nabla_\rho A^\rho).$$

Por facilidad, se calculará por separado cada uno de los términos que comprenden la suma, es decir,

$$(a) \delta(\sqrt{-g}) G_3 \nabla_\rho A^\rho = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} G_3 (\nabla \cdot A) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu},$$

$$(b) \sqrt{-g} \delta(G_3) \nabla_\rho A^\rho = \sqrt{-g} \left(\frac{\partial G_3}{\partial X} \delta X \right) \nabla_\rho A^\rho, \\ = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} G_{3,X} (\nabla \cdot A) A_\mu A_\nu \delta g^{\mu\nu},$$

$$(c) \sqrt{-g} G_3 \delta(\nabla_\rho A^\rho) = \sqrt{-g} G_3 \delta(\nabla_\rho A_\alpha g^{\rho\alpha}), \\ = \sqrt{-g} G_3 [\delta(\nabla_\rho A_\alpha) g^{\rho\alpha} + \nabla_\rho A_\alpha \delta g^{\rho\alpha}].$$

Por su parte, el término (c) puede separarse en sus dos componentes, donde el término (c.1) será $\sqrt{-g} G_3 \delta(\nabla_\rho A_\alpha) g^{\rho\alpha}$ y el término (c.2) $\sqrt{-g} G_3 \nabla_\rho A_\alpha \delta g^{\rho\alpha}$. Enfocándose sólo en el término (c.1) y usando la variación de la conexión respecto a la

métrica, presentada en la Ref. ⁹³, se tiene

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g} G_3 \delta(\nabla_\rho A_\alpha) g^{\rho\alpha} &= \sqrt{-g} G_3 g^{\rho\alpha} \delta(\partial_\rho A_\alpha - \Gamma_{\rho\alpha}^\beta A_\beta), \\
&= \sqrt{-g} G_3 g^{\rho\alpha} [\delta(\partial_\rho A_\alpha) - \delta(\Gamma_{\rho\alpha}^\beta) A_\beta - \Gamma_{\rho\alpha}^\beta \delta(A_\beta)], \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{-g} G_3 g^{\rho\alpha} [g_{\alpha\gamma} \nabla_\rho (\delta g^{\beta\gamma}) + g^{\rho\gamma} \nabla_\alpha (\delta g^{\beta\gamma}) - g_{\rho\sigma} g_{\alpha\eta} \nabla^\beta (\delta g^{\sigma\eta})], \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{-g} [\nabla_\rho (G_3 g^{\rho\alpha} g_{\alpha\gamma} A_\beta \delta g^{\beta\gamma}) - (\nabla_\rho G_3) g^{\rho\alpha} g_{\alpha\gamma} A_\beta \delta g^{\beta\gamma} \\
&\quad - G_3 g^{\rho\alpha} g_{\alpha\gamma} (\nabla_\rho A_\beta) \delta g^{\beta\gamma} + \nabla_\alpha (G_3 g^{\rho\alpha} g_{\rho\gamma} A_\beta \delta g^{\beta\gamma}) - (\nabla_\alpha G_3) g^{\rho\alpha} g_{\rho\gamma} A_\beta \delta g^{\beta\gamma} \\
&\quad - G_3 g^{\rho\alpha} g_{\rho\gamma} (\nabla_\alpha A_\beta) \delta g^{\beta\gamma} - \nabla^\beta (G_3 g^{\rho\alpha} g_{\rho\sigma} g_{\alpha\eta} A_\beta \delta g^{\sigma\eta}) \\
&\quad + (\nabla^\beta G_3) g^{\rho\alpha} g_{\rho\sigma} g_{\alpha\eta} A_\beta \delta g^{\sigma\eta} + G_3 g^{\rho\alpha} g_{\rho\sigma} g_{\alpha\eta} \nabla^\beta A_\beta \delta g^{\sigma\eta}], \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{-g} [-(\nabla_\nu G_3) A_\mu \delta g^{\mu\nu} - G_3 \nabla_\nu A_\mu \delta g^{\mu\nu} - (\nabla_\nu G_3) A_\mu \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad - G_3 \nabla_\nu A_\mu \delta g^{\mu\nu} + (\nabla_\beta G_3) A^\beta g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + G_3 (\nabla \cdot A) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}].
\end{aligned}$$

Teniendo en mente que

$$\begin{aligned}
\nabla_\nu G_3 &= G_{3,X} \nabla_\nu X, \\
&= G_{3,X} \nabla_\nu \left(-\frac{1}{2} A_\beta A^\beta \right), \\
&= -\frac{1}{2} G_{3,X} (A^\beta \nabla_\nu A_\beta + A_\beta \nabla_\nu A^\beta), \\
&= G_{3,X} A_\beta \nabla_\nu A^\beta,
\end{aligned}$$

⁹³ A. GUARNIZO, L. CASTANEDA y J. M. TEJEIRO. "Boundary Term in Metric f(R) Gravity: Field Equations in the Metric Formalism". En: *Gen. Rel. Grav.* 42 (2010).

se reemplaza en la variación de (c.1), dando lugar a

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} G_3 \delta(\nabla_\rho A_\alpha) g^{\rho\alpha} = & \frac{1}{2} \sqrt{-g} [2G_{3,X} A_\beta A_\mu \nabla_\nu A^\beta - 2G_3 \nabla_\nu A_\mu \\ & - G_{3,X} A_\sigma A^\beta \nabla_\beta A^\sigma g_{\mu\nu} + G_3 (\nabla \cdot A) g_{\mu\nu}] \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, sumando las variaciones para (a), (b), (c.1) y (c.2) se tiene

$$\delta (\sqrt{-g} G_3 \nabla_\rho A^\rho) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} [-G_{3,X} (\nabla \cdot A) A_\mu A_\nu + 2G_{3,X} A_\beta A_\mu \nabla_\nu A^\beta - G_{3,X} A^\sigma A^\beta \nabla_\beta A_\sigma g_{\mu\nu}] \delta g^{\mu\nu}.$$

Llevando este resultado a ecuaciones de campo se obtiene

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [G_{3,X} (\nabla \cdot A) A_\mu A_\nu - 2G_{3,X} A_\beta A_\mu \nabla_\nu A^\beta + G_{3,X} A^\sigma A^\beta \nabla_\beta A_\sigma g_{\mu\nu}].$$

(iv) Con respecto a $\mathcal{L}_4 = G_4(X)R + G_{4,X} [(\nabla \cdot A)^2 - \nabla_\mu A_\nu \nabla^\mu A^\nu]$,

éste puede ser dividido en los siguientes términos: (a) $G_4(X)R$, (b) $G_{4,X}(X)(\nabla \cdot A)^2$ y (c) $G_{4,X}(X)\nabla_\mu A_\nu \nabla^\mu A^\nu$. Iniciando por el término (a), se tiene

$$\delta (\sqrt{-g} G_4 R) = \delta (\sqrt{-g}) G_4 R + \sqrt{-g} \delta (G_4) R + \sqrt{-g} G_4 \delta (R).$$

Nuevamente, éste se puede dividir en subtérminos, los cuales son

$$(a.1). \delta (\sqrt{-g}) G_4 R = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} G_4 R g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu},$$

$$(a.2). \sqrt{-g} \delta (G_4) R = \sqrt{-g} \left(\frac{\partial G_4}{\partial X} \delta X \right) R = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} G_{4,X} R A_\mu A_\nu \delta g^{\mu\nu},$$

$$(a.3). \sqrt{-g} G_4 \delta (R) = \sqrt{-g} G_4 \delta (R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}) = \sqrt{-g} G_4 [R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \delta (R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu}].$$

El término (a.3) puede dividirse en (a.3.1) $\sqrt{-g} G_4 R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$ y (a.3.2) $\sqrt{-g} G_4 \delta (R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu}$. Tomando únicamente la variación del término (a.3.2), debe ser calculado primero la

variación del tensor de Ricci, lo que conduce a

$$\begin{aligned}
\delta(R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}) &= \delta(\partial_\mu\Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}), \\
&= \delta(\partial_\mu\Gamma^\rho{}_{\nu\sigma}) - \delta(\partial_\nu\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}) + \delta(\Gamma^\rho{}_{\mu\lambda})\Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}\delta(\Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma}) - \delta(\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda})\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\delta(\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}), \\
&= \partial_\mu\delta(\Gamma^\rho{}_{\nu\sigma}) - \partial_\nu\delta(\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}) + \delta(\Gamma^\rho{}_{\mu\lambda})\Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}\delta(\Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma}) - \delta(\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda})\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\delta(\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}).
\end{aligned}$$

Ya que $\delta(\Gamma^\rho{}_{\nu\sigma})$ es la diferencia de dos conexiones, ésta es un tensor, por lo tanto se puede calcular su derivada covariante la cual obedece

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu(\delta\Gamma^\rho{}_{\nu\sigma}) &= \partial_\mu(\delta\Gamma^\rho{}_{\nu\sigma}) + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\delta\Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu}\delta\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}, \\
\nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}) &= \partial_\nu(\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}) + \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\delta\Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu}\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}.
\end{aligned}$$

De manera que finalmente se tiene

$$\delta(R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}) = \nabla_\mu(\delta\Gamma^\rho{}_{\nu\sigma}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}).$$

Sin embargo, ya que $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$,

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R^\rho{}_{\mu\rho\nu} = \nabla_\rho(\delta\Gamma^\rho{}_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho{}_{\rho\mu}),$$

que se conoce como la identidad de Palatini. Con ella, reemplazando en la variación

de (a.3.2) se obtiene

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g} G_4 g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g} G_4 g^{\mu\nu} [\nabla_\rho (\delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho)], \\
&= \sqrt{-g} G_4 [\nabla_\rho (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho)], \\
&= \sqrt{-g} G_4 \nabla_\beta (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\beta - g^{\mu\beta} \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho), \\
&= \sqrt{-g} \{ \nabla_\beta [G_4 (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\beta - g^{\mu\beta} \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho)] - (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\beta - g^{\mu\beta} \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho) \nabla_\beta G_4 \}, \\
&= -\sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\beta - g^{\mu\beta} \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho) \nabla_\beta G_4, \\
&= -\sqrt{-g} \nabla_\beta G_4 \left\{ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} [g_{\nu\gamma} \nabla_\mu (\delta g^{\beta\gamma}) + g_{\mu\gamma} \nabla_\nu (\delta g^{\beta\gamma}) - g_{\mu\rho} g_{\nu\eta} \nabla^\beta (\delta g^{\rho\eta})] \right. \\
&\quad \left. - g^{\mu\beta} [-\frac{1}{2} g_{\rho\eta} \nabla_\mu (\delta g^{\rho\eta})] \right\}, \\
&= \sqrt{-g} \nabla_\beta G_4 [\nabla_\gamma (\delta g^{\beta\gamma}) - g_{\rho\eta} \nabla^\beta (\delta g^{\rho\eta})], \\
&= \sqrt{-g} [\nabla_\gamma (\nabla_\beta G_4 \delta g^{\beta\gamma}) - (\nabla_\gamma \nabla_\beta G_4) \delta g^{\beta\gamma} \\
&\quad - \nabla^\beta (\nabla_\beta G_4 g_{\rho\eta} \delta g^{\rho\eta}) + g_{\rho\eta} (\nabla^\beta \nabla_\beta G_4) \delta g^{\rho\eta}], \\
&= \sqrt{-g} [g_{\mu\nu} \square G_4 - (\nabla_\mu \nabla_\nu G_4)] \delta g^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Retomando la derivada covariante de una función arbitraria de X , se tiene

$$\nabla_\nu G_4 = -G_{4,X} A_\beta \nabla_\nu A^\beta,$$

por lo tanto,

$$\nabla_\mu \nabla_\nu G_4 = G_{4,XX} A_\rho A_\beta \nabla_\mu A^\rho \nabla_\nu A^\beta - G_{4,X} \nabla_\mu A^\beta \nabla_\nu A_\beta - G_{4,X} A_\beta \nabla_\mu \nabla_\nu A^\beta.$$

Reemplazando estos resultados en la variación del término (a.3.2), se tiene

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g} G_4 g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g} [G_{4,XX} A_\rho A_\beta \nabla^\sigma A^\rho \nabla_\sigma A^\beta g_{\mu\nu} - G_{4,X} \nabla^\sigma A^\beta \nabla_\sigma A_\beta g_{\mu\nu} - G_{4,X} A_\beta \square A^\beta g_{\mu\nu} \\
&\quad - G_{4,XX} A_\rho A_\beta \nabla_\mu A^\rho \nabla_\nu A^\beta + G_{4,X} \nabla_\mu A^\beta \nabla_\nu A_\beta + G_{4,X} A_\beta \nabla_\mu \nabla_\nu A^\beta] \delta g^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Sumando los resultados de las variaciones para (a.1), (a.2), (a.3.1) y (a.3.2) se llega a

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g} G_4 R) = & \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} G_4 R g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G_{4,X} R A_\mu A_\nu + G_4 R_{\mu\nu} + G_{4,X} A_\rho A_\beta \nabla^\sigma A^\rho \nabla_\sigma A^\beta g_{\mu\nu} \right. \\ & - G_{4,X} \nabla^\sigma A^\beta \nabla_\sigma A_\beta g_{\mu\nu} - G_{4,X} A_\beta \square A^\beta g_{\mu\nu} - G_{4,XX} A_\rho A_\beta \nabla_\mu A^\rho \nabla_\nu A^\beta \\ & \left. + G_{4,X} \nabla_\mu A^\beta \nabla_\nu A_\beta + G_{4,X} A_\beta \nabla_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^\beta \right] \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Ahora, para el término (b) la variación es como sigue:

$$\delta[\sqrt{-g} G_{4,X} (\nabla \cdot A)^2] = \delta(\sqrt{-g}) G_{4,X} (\nabla \cdot A)^2 + \sqrt{-g} \delta(G_{4,X}) (\nabla \cdot A)^2 + 2\sqrt{-g} G_{4,X} (\nabla \cdot A) \delta(\nabla \cdot A),$$

el cual, una vez más puede ser dividido en

$$(b.1). \delta(\sqrt{-g}) G_{4,X} (\nabla \cdot A)^2 = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} G_{4,X} (\nabla \cdot A)^2 g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu},$$

$$(b.2). \sqrt{-g} \delta(G_{4,X}) (\nabla \cdot A)^2 = \sqrt{-g} \left(\frac{\partial G_{4,X}}{\partial X} \delta X \right) (\nabla \cdot A)^2 = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} G_{4,XX} (\nabla \cdot A)^2 A_\mu A_\nu \delta g^{\mu\nu},$$

$$(b.3). 2\sqrt{-g} G_{4,X} (\nabla \cdot A) \delta(\nabla \cdot A) = 2\sqrt{-g} G_{4,X} (\nabla \cdot A) [\nabla_\mu A_\nu \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta(\nabla_\mu A_\nu)].$$

El término (b.3) puede ser dividido en (b.3.1) $2\sqrt{-g} G_{4,X} (\nabla \cdot A) \nabla_\mu A_\nu \delta g^{\mu\nu}$ y en (b.3.2)

$2\sqrt{-g}G_{4,X}(\nabla \cdot A)g^{\mu\nu}\delta(\nabla_\mu A_\nu)$. Trabajando sobre este último término se tiene

$$\begin{aligned}
2\sqrt{-g}G_{4,X}(\nabla \cdot A)g^{\mu\nu}\delta(\nabla_\mu A_\nu) &= 2\sqrt{-g}G_{4,X}(\nabla \cdot A)g^{\mu\nu}\delta(\nabla_\mu A_\nu), \\
&= 2\sqrt{-g}G_{4,X}g^{\mu\nu}\delta(\partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho A_\rho), \\
&= -2\sqrt{-g}G_{4,X}g^{\mu\nu}\delta(\Gamma_{\mu\nu}^\rho)A_\rho, \\
&= \sqrt{-g}G_{4,X}g^{\mu\nu}[g_{\nu\gamma}\nabla_\mu(\delta g^{\rho\gamma}) + g_{\mu\gamma}\nabla_\nu(\delta g^{\rho\gamma}) - g_{\mu\eta}g_{\nu\theta}\nabla^\rho(\delta g^{\eta\theta})]A_\rho, \\
&= \sqrt{-g}G_{4,X}A_\mu[2\nabla_\nu(\delta g^{\mu\nu}) - g_{\eta\theta}\nabla^\mu(\delta g^{\eta\theta})], \\
&= \sqrt{-g}[\nabla_\nu(2G_{4,XX}A_\mu\delta g^{\mu\nu}) - 2(\nabla_\nu G_{4,X})A_\mu\delta g^{\mu\nu} - 2G_{4,X}\nabla_\nu A_\mu\delta g^{\mu\nu}] \\
&\quad - \nabla_\mu(G_{4,XX}A_\mu g_{\eta\theta}\delta g^{\eta\theta}) + (\nabla^\mu G_{4,X})A_\mu g_{\eta\theta}\delta g^{\eta\theta} + G_{4,X}(\nabla \cdot A)g_{\eta\theta}\delta g^{\eta\theta}, \\
&= \sqrt{-g}[-2(\nabla_\nu G_{4,X})A_\mu - 2G_{4,X}\nabla_\nu A_\mu + (\nabla^\rho G_{4,X})A_\rho g_{\mu\nu} \\
&\quad + G_{4,X}(\nabla \cdot A)g_{\mu\nu}]\delta g^{\mu\nu}, \\
&= \sqrt{-g}[2G_{4,XX}A_\mu A_\beta \nabla_\nu A^\beta - 2G_{4,X}\nabla_\nu A_\mu - G_{4,XX}A_\beta A_\rho \nabla^\rho A^\beta g_{\mu\nu} \\
&\quad + G_{4,X}(\nabla \cdot A)g_{\mu\nu}]\delta g^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Sumando los resultados de (b.1), (b.2), (b.3.1) y (b.3.2), se tiene

$$\begin{aligned}
\delta[\sqrt{-g}G_{4,X}(\nabla \cdot A)^2] &= \sqrt{-g}[-\frac{1}{2}G_{4,X}(\nabla \cdot A)^2 g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_{4,XX}(\nabla \cdot A)^2 A_\mu A_\nu + 2G_{4,X}(\nabla \cdot A)\nabla_\mu A_\nu \\
&\quad + 2G_{4,XX}A_\mu A_\beta \nabla_\nu A^\beta - 2G_{4,X}\nabla_\nu A_\mu - G_{4,XX}A_\beta A_\rho \nabla^\rho A^\beta g_{\mu\nu} \\
&\quad + G_{4,X}(\nabla \cdot A)g_{\mu\nu}]\delta g^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Finalmente, para el término (c) se llega a

$$\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g}G_{4,X}\nabla_\mu A_\nu \nabla^\mu A^\nu) &= \delta(\sqrt{-g})G_{4,X}\nabla_\mu A_\nu \nabla^\mu A^\nu + \sqrt{-g}\delta(G_{4,X})\nabla_\mu A_\nu \nabla^\mu A^\nu \\
&\quad + 2\sqrt{-g}G_{4,X}\nabla^\mu A^\nu \delta(\nabla_\mu A_\nu),
\end{aligned}$$

que igualmente se divide en

$$(c.1). \delta(\sqrt{-g})G_{4,X}\nabla_\mu A_\nu\nabla^\mu A^\nu = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}G_{4,X}\nabla_\rho A_\sigma\nabla^\rho A^\sigma g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu},$$

$$(c.2). \sqrt{-g}\delta(G_{4,X})\nabla_\mu A_\nu\nabla^\mu A^\nu = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}G_{4,XX}A_\mu A_\nu\nabla_\rho A_\sigma\nabla^\rho A^\sigma\delta g^{\mu\nu},$$

$$\begin{aligned} (c.3). \sqrt{-g}G_{4,X}\nabla^\rho A^\sigma\delta(\nabla_\rho A_\sigma) &= \sqrt{-g}G_{4,X}\nabla^\rho A^\sigma\delta(\partial_\rho A_\sigma - \Gamma_{\rho\sigma}^\theta A_\theta), \\ &= \sqrt{-g}G_{4,X}\nabla^\rho A^\sigma[\delta(\partial_\mu A_\sigma) - \delta(\Gamma_{\rho\sigma}^\theta)A_\theta - \Gamma_{\rho\sigma}^\theta\delta(A_\theta)], \\ &= -\sqrt{-g}G_{4,X}\nabla^\rho A^\sigma\delta(\Gamma_{\rho\sigma}^\theta)A_\theta, \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}A_\theta\nabla^\rho A^\sigma[g_{\sigma\gamma}\nabla_\rho(\delta g^{\theta\gamma}) + g_{\rho\gamma}\nabla_\sigma(\delta g^{\theta\gamma}) - g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu}\nabla^\theta(\delta g^{\mu\nu})], \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}[\nabla_\rho(G_{4,X}A_\mu\nabla^\rho A_\nu\delta g^{\mu\nu}) - (\nabla_\rho G_{4,X})A_\mu\nabla^\rho A_\nu\delta g^{\mu\nu} \\ &\quad - G_{4,X}\nabla_\rho A_\mu\nabla^\rho A_\nu\delta g^{\mu\nu} - G_{4,X}A_\mu\Box A_\nu\delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + \nabla_\sigma(G_{4,X}A_\mu\nabla_\nu A^\sigma\delta g^{\mu\nu}) - (\nabla_\sigma G_{4,X})A_\mu\nabla_\nu A^\sigma\delta g^{\mu\nu} \\ &\quad - G_{4,X}\nabla_\sigma A_\mu\nabla_\nu A^\sigma\delta g^{\mu\nu} - G_{4,X}A_\mu\nabla_\sigma\nabla_\nu A^\sigma\delta g^{\mu\nu} \\ &\quad - \nabla^\theta(G_{4,X}A_\theta\nabla_\mu A_\nu\delta g^{\mu\nu}) + (\nabla^\theta G_{4,X})A_\theta\nabla_\mu A_\nu\delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + G_{4,X}(\nabla\cdot A)\nabla_\mu A_\nu\delta g^{\mu\nu} + G_{4,X}A_\theta\nabla^\theta\nabla_\mu A_\nu\delta g^{\mu\nu}], \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}[-(\nabla_\rho G_{4,X})A_\mu\nabla^\rho A_\nu - G_{4,X}\nabla_\rho A_\mu\nabla^\rho A_\nu - G_{4,X}A_\mu\Box A_\nu \\ &\quad - (\nabla_\sigma G_{4,X})A_\mu\nabla_\nu A^\sigma - G_{4,X}\nabla_\sigma A_\mu\nabla_\nu A^\sigma - G_{4,X}A_\mu\nabla_\sigma\nabla_\nu A^\sigma \\ &\quad + (\nabla^\theta G_{4,X})A_\theta\nabla_\mu A_\nu + G_{4,X}(\nabla\cdot A)\nabla_\mu A_\nu + G_{4,X}A_\theta\nabla^\theta\nabla_\mu A_\nu], \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}[G_{4,XX}A_\mu A_\sigma\nabla_\rho A_\mu\nabla^\rho A_\nu - G_{4,X}\nabla_\rho A_\mu\nabla^\rho A_\nu \\ &\quad - G_{4,X}A_\mu\Box A_\nu + G_{4,XX}A_\mu A_\sigma\nabla_\rho A^\sigma\nabla_\nu A^\rho \\ &\quad - G_{4,X}\nabla_\sigma A_\mu\nabla_\nu A^\sigma - G_{4,X}A_\mu\nabla_\sigma\nabla_\nu A^\sigma \\ &\quad - G_{4,XX}A_\beta A_\theta\nabla^\theta A^\beta\nabla_\mu A_\nu + G_{4,X}(\nabla\cdot A)\nabla_\mu A_\nu \\ &\quad + G_{4,X}A_\theta\nabla^\theta\nabla_\mu A_\nu]\delta g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Sumando los resultados para (c.1), (c.2) y (c.3), se obtiene

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}G_{4,X}\nabla_{\mu}A_{\nu}\nabla^{\mu}A^{\nu}) = & \sqrt{-g}[G_{4,XX}A_{\mu}A_{\sigma}\nabla_{\rho}A^{\sigma}\nabla^{\rho}A_{\nu} - G_{4,X}\nabla_{\rho}A_{\mu}\nabla^{\rho}A_{\nu} - G_{4,X}A_{\mu}\square A_{\nu} \\ & + G_{4,XX}A_{\mu}A_{\sigma}\nabla_{\rho}A^{\sigma}\nabla_{\nu}A^{\rho} - G_{4,X}\nabla_{\sigma}A_{\mu}\nabla_{\nu}A^{\sigma} - G_{4,X}A_{\mu}\nabla_{\sigma}\nabla_{\nu}A^{\sigma} \\ & - G_{4,XX}A_{\beta}A_{\theta}\nabla^{\theta}A^{\beta}\nabla_{\mu}A_{\nu} + G_{4,X}(\nabla \cdot A)\nabla_{\mu}A_{\nu} + G_{4,X}A_{\theta}\nabla^{\theta}\nabla_{\mu}A_{\nu} \\ & - \frac{1}{2}G_{4,X}\nabla_{\rho}A_{\sigma}\nabla^{\rho}A^{\sigma}g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_{4,XX}\nabla_{\rho}A_{\sigma}\nabla^{\rho}A^{\sigma}A_{\mu}A_{\nu}]\delta g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Es así como agrupando los resultados finales para (a), (b) y (c), se tiene finalmente

$$\begin{aligned} \delta\{G_4R + G_{4,X}[(\nabla \cdot A)^2 - \nabla_{\mu}A_{\nu}\nabla^{\mu}A^{\nu}]\} = & \\ \sqrt{-g}[& -\frac{1}{2}G_4Rg_{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_{4,X}RA_{\mu}A_{\nu} + G_4R_{\mu\nu} + G_{4,X}A_{\rho}A_{\beta}\nabla^{\sigma}A^{\rho}\nabla_{\sigma}A^{\beta}g_{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2}G_{4,X}\nabla^{\sigma}A^{\beta}\nabla_{\sigma}A_{\beta}g_{\mu\nu} - G_{4,X}A_{\beta}\square A^{\beta}g_{\mu\nu} - G_{4,XX}A_{\rho}A_{\beta}\nabla_{\mu}A^{\rho}\nabla_{\nu}A^{\beta} \\ & + G_{4,X}\nabla_{\mu}A^{\beta}\nabla_{\nu}A_{\beta} + G_{4,X}A_{\beta}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}A^{\beta} - \frac{1}{2}G_{4,X}(\nabla \cdot A)^2g_{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2}G_{4,XX}(\nabla \cdot A)^2A_{\mu}A_{\nu} + 2G_{4,X}(\nabla \cdot A)\nabla_{\mu}A_{\nu} + G_{4,XX}A_{\mu}A_{\beta}\nabla_{\nu}A^{\beta} \\ & - 2G_{4,X}\nabla_{\nu}A_{\mu} - G_{4,XX}A_{\beta}A_{\rho}\nabla^{\rho}A^{\beta}g_{\mu\nu} + G_{4,X}(\nabla \cdot A)g_{\mu\nu} - G_{4,XX}A_{\mu}A_{\sigma}\nabla_{\rho}A^{\sigma}\nabla^{\rho}A_{\nu} \\ & + G_{4,X}\nabla_{\rho}A_{\mu}\nabla^{\rho}A_{\nu} + G_{4,X}A_{\mu}\square A_{\nu} - G_{4,XX}A_{\mu}A_{\sigma}\nabla_{\rho}A^{\sigma}\nabla_{\nu}A^{\rho} + G_{4,X}\nabla_{\sigma}A_{\mu}\nabla_{\nu}A^{\sigma} \\ & + G_{4,X}A_{\mu}\nabla_{\sigma}\nabla_{\nu}A^{\sigma} + G_{4,XX}A_{\beta}A_{\theta}\nabla^{\theta}A^{\beta}\nabla_{\mu}A_{\nu} - G_{4,X}A_{\theta}\nabla^{\theta}\nabla_{\mu}A_{\nu} \\ & + \frac{1}{2}G_{4,XX}\nabla_{\rho}A_{\sigma}\nabla^{\rho}A^{\sigma}A_{\mu}A_{\nu}]\delta g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Ahora, simetrizando y llevando a ecuaciones de campo, se concluye que

$$\begin{aligned}
E_{\mu\nu} = & \frac{1}{2}G_4 R g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}G_{4,X} R A_\mu A_\nu - G_4 R_{\mu\nu} - G_{4,X} A_\rho A_\beta \nabla^\sigma A^\rho \nabla_\sigma A^\beta g_{\mu\nu} \\
& + \frac{1}{2}G_{4,X} \nabla^\sigma A^\beta \nabla_\sigma A_\beta g_{\mu\nu} + G_{4,X} A_\beta \square A^\beta g_{\mu\nu} + G_{4,XX} A_\rho A_\beta \nabla_{(\mu} A^\rho \nabla_{\nu)} A^\beta \\
& - G_{4,X} \nabla_\mu A^\beta \nabla_\nu A_\beta - G_{4,X} A_\beta \nabla_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^\beta + \frac{1}{2}G_{4,X} (\nabla \cdot A)^2 g_{\mu\nu} \\
& + \frac{1}{2}G_{4,XX} (\nabla \cdot A)^2 A_\mu A_\nu - 2G_{4,X} (\nabla \cdot A) \nabla_\mu A_\nu - G_{4,XX} A_{(\mu} A^\beta \nabla_{\nu)} A_\beta \\
& + 2G_{4,X} \nabla_{(\mu} A_{\nu)} + G_{4,XX} A_\beta A_\rho \nabla^\rho A^\beta g_{\mu\nu} - G_{4,X} (\nabla \cdot A) g_{\mu\nu} + G_{4,XX} A_\sigma A_{(\mu} \nabla^\rho A_{\nu)} \nabla_\rho A^\sigma \\
& - G_{4,X} \nabla_\rho A_\mu \nabla^\rho A_\nu - G_{4,X} A_{(\mu} \square A_{\nu)} + G_{4,XX} A_\sigma A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^\rho \nabla_\rho A^\sigma - G_{4,X} \nabla_\sigma A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^\sigma \\
& - G_{4,X} A_{(\mu} \nabla^\sigma \nabla_{\nu)} A_\sigma - G_{4,XX} A_\beta A_\theta \nabla^\theta A^\beta \nabla_{(\mu} A_{\nu)} + G_{4,X} A_\theta \nabla^\theta \nabla_{(\mu} A_{\nu)} \\
& - \frac{1}{2}G_{4,XX} \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\rho A^\sigma A_\mu A_\nu.
\end{aligned}$$

Anexo D. COEFICIENTES EN LAS ECUACIONES DE CAMPO

Los coeficientes $c_{1,2,\dots,8}$ en las Ecs.(84) y (85) están dados por

$$c_1 = -A_1 X G_{3,X},$$

$$c_2 = -2G_4 + 4(X_0 + 2X_1) G_{4,X} + 8X_1 X G_{4,XX},$$

$$c_3 = G_2 - 2X_0 G_{2,X} - \frac{h}{f} (A_0 A_1 A'_0 + 2f X A'_1) G_{3,X} - \frac{h A_0'^2 (1 + 2G_{2,F})}{2f},$$

$$c_4 = -4h A_1 X_0 G_{3,X} - 4h^2 A_1 A'_1 G_{4,X} + \frac{8h}{f} (A_0 X_1 A'_0 - f h A_1 X A'_1) G_{4,XX},$$

$$c_5 = 2(1 - h)G_4 + 4(hX - X_0) G_{4,X} + 8h X_0 X_1 G_{4,XX},$$

$$c_6 = -G_2 + 2X_1 G_{2,X} - \frac{h}{f} A_0 A_1 A'_0 G_{3,X} + \frac{h A_0'^2 (1 + 2G_{2,F})}{2f},$$

$$c_7 = 4h A_1 X_1 G_{3,X} + \frac{4h}{f} A_0 A'_0 (G_{4,X} + 2X_1 G_{4,XX}),$$

$$c_8 = 2(h - 1)G_4 - 4(2h - 1)X_1 G_{4,X} - 8h X_1^2 G_{4,XX}.$$