

**METODOLOGÍAS DE DESCOMPOSICIÓN
ESPECTRAL APLICADAS AL PROCESAMIENTO
DE DATOS SÍSMICOS**

ROBIEL MARTÍNEZ CORREDOR

Tesis presentada como parte de los requisitos para optar al grado de
Ingeniero Electrónico

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE FISICOMECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y
TELECOMUNICACIONES

Bucaramanga, Mayo 2008

**METODOLOGÍAS DE DESCOMPOSICIÓN
ESPECTRAL APLICADAS AL PROCESAMIENTO
DE DATOS SÍSMICOS**

ROBIEL MARTÍNEZ CORREDOR

Director:

MPe. César Duarte Gualdrón

Codirector:

MSc. Frank H. Gómez Correa

Tesis presentada como parte de los requisitos para optar al grado de
Ingeniero Electrónico

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE FISICOMECAÑICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y
TELECOMUNICACIONES

Bucaramanga, Mayo 2008

*Este trabajo está dedicado a mis
padres, gracias a su apoyo y
esfuerzo pude culminar mi carrera.*

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos:

Primero que todo agradezco a Dios y a mi familia por todas las bendiciones recibidas, por haber puesto a mi alcance todo lo necesario para lograr esta anhelada meta. A mis amigos y a todas las personas que han pasado por mi vida durante este tiempo, ya que sin su apoyo este logro no habría sido posible.

A la Universidad Industrial de Santander y a todos los docentes que han contribuido en mi formación profesional y personal. En especial a mi director César Duarte por haber dirigido y orientado mi trabajo de pregrado.

Al Instituto Colombiano del Petróleo ICP y todos sus funcionarios, en especial a Frank Gómez Correa, Carlos Piedrahita y William Agudelo, gracias por la oportunidad de desarrollar el proyecto en el convenio UIS-ICP. A mis compañeros del ICP, gracias por su apoyo.

Finalmente agradezco a Herling Gonzalez, gracias por su apoyo, orientación y paciencia.

RESUMEN

TÍTULO: METODOLOGÍAS DE DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL APLICADAS AL PROCESAMIENTO DE DATOS SÍSMICOS¹.

AUTOR: ROBIEL MARTINEZ CORREDOR²

PALABRAS CLAVES: Descomposición espectral, transformada de Fourier, transformada wavelet continua, transformada de Fourier de los coeficientes wavelet, traza sísmica, resolución, ancho de banda.

DESCRIPCIÓN: Este proyecto aborda tres técnicas de descomposición espectral aplicadas en el procesamiento de datos e imágenes sísmicas. Dichas metodologías permiten analizar mejor las respuestas de impedancia acústica en las señales sísmicas de eventos geológicos desde la variación temporal de su espectro.

Debido a que las señales sísmicas son no estacionarias, es decir sus características varían con el tiempo, se necesita el uso de técnicas espectro-temporales. De las técnicas analizadas, la transformada de Fourier enventanada fue la herramienta con la que se lograron los resultados menos satisfactorios.

La transformada wavelet continua (CWT) mejora la resolución obtenida con la anterior técnica, pero todo depende de la frecuencia central escogida para la ondícula. Por último la transformada de Fourier de los coeficientes wavelet (FTCWT), se basa en la transformada de Fourier de la reconstrucción en el tiempo a partir de los coeficientes wavelet calculados, es decir, es un tipo de filtrado donde sólo se procesa la señal compuesta por las frecuencias obtenidas con la CWT, un factor en contra de la FTCWT es el tiempo de cómputo y la dependencia de los resultados de la CWT.

Se observó que al mantener un ancho de banda constante para las frecuencias bajas se mejoró la resolución en estas frecuencias, pero para altas frecuencias no es un buen método debido a que los cambios rápidos de la señal necesitan una buena resolución temporal.

Los resultados obtenidos aplicados a datos sísmicos mostraron una mejor respuesta señal-energía para eventos geológicos de interés en el Instituto Colombiano del Petróleo ICP.

¹Modalidad: Trabajo de grado.

²Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones. Director: Mpe. César Duarte Gualdrón. Codirector: Msc. Frank Harvey Gómez.

ABSTRACT

TITLE: APPLIED METHODOLOGIES OF SPECTRAL DECOMPOSITION TO THE PROCESSING OF SEISMIC DATA.¹.

AUTHOR: ROBIEL MARTINEZ CORREDOR²

KEY WORDS: Spectral decomposition, windowed Fourier transform, continuous wavelet transform, Fourier transform of the coefficients wavelet, seismic traces, resolution, band-width.

DESCRIPTION: This project approaches three techniques of spectral decomposition applied in the processing of data and seismic images. These methodologies allow to analyze the answers of acoustic impedance better in the seismic signals of geologic events from the temporary variation of their spectrum.

Because the seismic signals are not stationary, I mean; their characteristics vary with the time, the use of techniques time-frequency is needed. Of the analyzed techniques, the windowed Fourier transform it was the tool with which the less satisfactory results were achieved.

The continuous wavelet transform (CWT) improves the resolution obtained with the previous technique, but everything depends on the chosen central frequency for the wavelet. Lastly the transformed of Fourier of the coefficients wavelet (FTCWT), is based on the Fourier transform of the reconstruction in the time starting from the coefficients calculated wavelet, that is to say, it is a filtrate type where the composed signal is only processed by the frequencies pre-obtained with the CWT, a factor against the FTCWT is the time of computation and the dependence of the results of the CWT.

It was observed something: for maintaining a width of constant band for the low frequencies it improved the resolution in these frequencies, but for high frequencies it is not good method because the quick changes of the signal need a good temporary resolution.

The obtained results applied to seismic data showed a better answer signal energy for geologic events of interest in the Colombian Institute of the Petroleum ICP.

¹Degree Project.

²Physics Mechanical Engineering Faculty. Electric and Telecommunications School. Director: MPe. César Duarte Gualdrón, Co-Director: MSc. Frank H. Gómez Correa

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	1
0.1. Objetivos	3
0.1.1. Objetivo general	3
0.1.2. Objetivos específicos	3
1. SÍSMICA DE EXPLORACIÓN	4
1.1. Espectro de la fuente explosiva	6
1.2. Sísmica de refracción	7
1.3. Sísmica de reflexión	10
1.4. Frecuencia de muestreo de una traza sísmica	12
1.5. Descomposición espectral	13
1.5.1. Estado del arte de la descomposición espectral	14
2. METODOLOGÍAS DE DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL	17
2.1. Transformada de Fourier de Ventana Corta (STFT)	17
2.1.1. Localización tiempo-frecuencia	18
2.1.2. Ancho de banda RMS	18
2.1.3. Proceso de enventanado	20
2.1.4. Transformada de Fourier de ventana corta discreta	21
2.1.5. Características de las ventanas	23
2.1.6. Procesamiento de datos sísmicos con la STFT	29
2.1.7. Variables que afectan la resolución de las imágenes	30
2.2. Transformada wavelet continua (CWT)	39
2.2.1. La CWT vista como una convolución	44
2.2.2. Wavelets reales y complejas	44
2.2.3. Resolución frecuencial versus resolución temporal	50
2.2.4. Transformada wavelet continua de trazas sísmicas	52

2.2.5.	Factores que afectan el resultado de la descomposición espectral	53
2.2.6.	Convolución circular	57
2.2.7.	Fase de la wavelet	59
2.2.8.	Isoresolución	61
2.3.	Transformada de Fourier de los coeficientes wavelet	64
2.4.	Análisis de resultados con señales	66
2.4.1.	Frecuencia constante	66
2.4.2.	Frecuencia que varía linealmente	70
2.4.3.	Frecuencia que varía parabólicamente	75
2.4.4.	Señal cuya frecuencia varía de forma decreciente	78
3.	ALGORITMOS IMPLEMENTADOS	86
3.1.	Algoritmo usado para la STFT	86
3.2.	Algoritmo usado para la CWT	93
3.3.	Algoritmo usado para el cálculo de la FTCWT	96
4.	PROCESAMIENTO DE DATOS SÍSMICOS	99
4.1.	Procesamiento de datos sintéticos	99
4.1.1.	Transformada de Fourier enventanada	99
4.1.2.	Transformada wavelet continua	101
4.1.3.	Transformada de Fourier de los coeficientes wavelet	105
4.2.	Procesamiento de datos sísmicos reales	106
4.2.1.	Transformada de Fourier enventanada	107
4.2.2.	Transformada wavelet continua	109
4.2.3.	Transformada de Fourier de los coeficientes wavelet	110
4.3.	Resultados obtenidos con líneas sísmicas	111
4.3.1.	Detallamiento de estructuras	111
4.3.2.	Detección de hidrocarburos	114
5.	CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	120
5.1.	Conclusiones	120

5.2. Trabajo futuro	124
BIBLIOGRAFÍA	125
Recursos de la internet	126
ANEXO A. HERRAMIENTA DESARROLLADA	127
A.1. Software Seismic Un*x	127
A.1.1. Comandos de Un*x	127
A.1.2. Comandos Seismic Unix	127
A.2. Herramienta de visualización	128
A.3. Software desarrollado	129
ANEXO B. TRANSFORMADA DE FOURIER DE FACTORES PRIMOS PFA FFT 131	

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1 Conversión de una onda P. Las ondas sísmicas que viajan por el subsuelo se reflejan y se refractan siguiendo la ley de Snell. La energía de las ondas incidentes se reparte entre las ondas reflejadas, las refractadas y la absorción natural del terreno. . . .	6
1.2 Tipos de rayos que llegan a un geófono.	7
1.3 Algunos tipos de fuentes y su respectivo espectro.	8
1.4 Sísmica de refracción.	9
1.5 El método de refracción proporciona una imagen del subsuelo en términos de campo de velocidades sísmicas $V(x, z)$	9
1.6 Esquema de la emisión y recepción de rayos en distintas capas.	10
1.7 Recorrido de los rayos reflejados en tres capas para una posición de tiro y dos estaciones receptores (geófonos). Debido a la ecuación de propagación, las reflexiones quedan marcadas en el registro sísmico como trayectorias hipérbolicas.	11
1.8 Cubo de descomposición espectral.	14
1.9 Sección sísmica a 20 Hz obtenida usando la TFCWT. Las altas amplitudes son zonas de hidrocarburos.	15
1.10 Sección a 33 Hz, en esta sección las anomalías de sombras están ausentes. La anomalía presente (flecha negra) se debe probablemente a los efectos locales de afinación y no desaparece a altas frecuencias.	16
2.1 Plano Tiempo-Frecuencia para la Transformada de Fourier de ventana corta. . .	22
2.2 Ventana rectangular con $M = 50$ y su transformada de Fourier.	23
2.3 Ventana triangular con $M = 50$ y su transformada de Fourier.	24
2.4 Ventana Hanning con $M = 50$ y su transformada de Fourier.	24
2.5 Ventana Hamming con $M = 50$ y su transformada de Fourier.	25
2.6 Ventana Blackman con $M = 50$ y su transformada de Fourier.	26

2.7 Ventana Kaiser y su transformada de Fourier, con $M = 90$, $\beta = 10,73$, $\Delta_{ml} = 0,5 = 0,159\pi$ y $A_{sl} = 80$	28
2.8 Ventana Kaiser y su transformada de Fourier, con $M = 299$, $\beta = 10,73$ y $A_{sl} = 80$.	29
2.9 Diagrama de la STFT, aplicada a una traza sísmica, lo mismo se hace para cada traza que conforma la imagen.	30
2.10 Matriz de descomposición espectral aplicada a diferentes trazas.	30
2.11 Distorsión provocada por el borde final de una señal y como se extiende a cero por medio de una línea recta o por medio de una exponencial.	31
2.12 Señal extendida a cero.	32
2.13 STFT de una señal extendida a cero.	33
2.14 Señal compuesta por dos señales senoidales de 60 y 70 Hz	35
2.15 Visualización del espectro de dos filtros con ancho de banda de 1 Hz , donde la superposición se reduce.	35
2.16 Transformada de Fourier enventanada aplicada a una señal compuesta por dos senoidales de 60 y 70 Hz	36
2.17 Transformada de Fourier enventanada aplicada a una señal compuesta por dos senoidales de 60 y 70 Hz con $M = 60$	37
2.18 Transformada de Fourier enventanada aplicada a una señal compuesta por una senoidal de 60 Hz con $M = 60$	39
2.19 Ondícula escalada.	41
2.20 Ventana Tiempo-Frecuencia para la transformada Wavelet.	43
2.21 Ondícula Mexican Hat.	45
2.22 Magnitud espectral ondícula Mexican Hat.	46
2.23 Ondícula Morlet.	47
2.24 Magnitud espectral ondícula Morlet.	48
2.25 Morlet compleja con $F_c = 0,5$ y $F_b = 2$	49

2.26 Relación variable Fb con el ancho de banda efectivo.	50
2.27 CWT se una señal compuesta por un coseno de $60 Hz$, con ondículas reales.	51
2.28 Variación del ancho de banda efectivo y la duración efectiva.	52
2.29 CWT de una señal compuesta por un coseno de $60 Hz$, con ondícula Morlet compleja.	53
2.30 Variación ancho de banda y duración efectiva para la Morlet Compleja con frecuencia central $f_{central} = 1 Hz$	54
2.31 Diagrama de la CWT aplicado a una traza sísmica, el mismo procedimiento se hace para todas las trazas que conforman la imagen.	54
2.32 Matriz de descomposición espectral aplicada a diferentes trazas.	55
2.33 Señal de $60 Hz$ y sus bordes.	56
2.34 CWT aplicada a una señal compuesta por coseno de $60 Hz$, se usó una wavelet Complex Morlet.	57
2.35 Coseno de $60 Hz$ inventanado.	57
2.36 CWT aplicada a una señal compuesta por coseno de $60 Hz$ inventanada, se usó una wavelet Complex Morlet.	58
2.37 Señal extendida a cero, tanto en el inicio como en el final.	58
2.38 CWT aplicada a una señal compuesta por un coseno de $60 Hz$ extendida a cero, se usó una wavelet Complex Morlet.	59
2.39 CWT aplicada a una señal cuya frecuencia varia parabólicamente, en esta imagen se pueden observar los efectos de no escoger la longitud adecuada para la convolución, ya que se repiten las componentes.	60
2.40 Magnitud y fase del espectro del complejo conjugado de la wavelet Complex Morlet, escalada por a e invertida en el tiempo, $\bar{\psi}(\frac{-t}{a})$, $a = 1/200$	61
2.41 Magnitud y fase del espectro del complejo conjugado de las wavelet Morlet morlet real y Mexican Hat, escaladas por a e invertida en el tiempo, $\bar{\psi}(\frac{-t}{a})$, $a = f_{central}/50$	62

2.42 Variación del plano tiempo-frecuencia cuando se aplica iso-resolución.	63
2.43 Variación del plano tiempo-frecuencia cuando se aplica iso-resolución a la ondícula Morlet real	64
2.44 Variación del plano tiempo-frecuencia cuando se aplica iso-resolución a la ondícula Morlet compleja.	65
2.45 Señal de 60 Hz y como varía su frecuencia.	67
2.46 Coseno de 60 Hz enventanado, ventana Hamming, $dt = 1ms$	67
2.47 CWT de una señal compuesta por un coseno de 60 Hz y $f_{central} = 6,7523076$	69
2.48 FTCWT de una señal compuesta por un coseno de 60 Hz y $f_{central} = 6,7523076$	70
2.49 Señal cuya frecuencia varía linealmente según $f(t) = (200/\pi)t + 10$	71
2.50 Transformada de Fourier enventanada de una señal cuya frecuencia varía linealmente, $f(t) = (200/\pi)t + 20\pi$, ventana Hamming, $dt = 1ms$	72
2.51 Transformada wavelet continua de una señal cuya frecuencia varía linealmente, $f(t) = (200/\pi)t + 20\pi$, ondícula Morlet compleja, $dt = 1ms$	73
2.52 CWT de una señal cuya frecuencia varía linealmente, $f(t) = (200/\pi)t + 20\pi$, ondícula Morlet compleja, $dt = 1ms$, se realizó por bandas de frecuencia, variando la frecuencia central para cada banda.	74
2.53 CWT de una señal cuya frecuencia varía linealmente, $f(t) = (200/\pi)t + 20\pi$, ondícula Morlet compleja, $dt = 1ms$, se realizó con una frecuencia central para cada frecuencia de análisis.	75
2.54 FTCWT de una señal cuya frecuencia varía linealmente, $f(t) = (200/\pi)t + 20\pi$, ondícula Morlet compleja, $dt = 1ms$, la CWT se realizó con una frecuencia central de 1 Hz.	76
2.55 Señal cuya frecuencia varía parabólicamente según $f(t) = (600/2\pi)t^2 + (8/\pi)t +$ 10.	77
2.56 Transformada de Fourier enventanada de una señal cuya frecuencia varía parabólicamente, $f(t) = (600/2\pi)t^2 + (8/\pi)t + 10$, ventana Hamming, $dt = 1ms$	77

2.57 CWT de una señal cuya frecuencia varía parabólicamente, $f(t) = (600/2\pi)t^2 + (8/\pi)t + 10$, ondícula Morlet compleja, $dt = 1ms$	78
2.58 FTCWT de una señal cuya frecuencia varía parabólicamente, $f(t) = (600/2\pi)t^2 + (8/\pi)t + 10$, ondícula Morlet compleja, $dt = 1ms$	79
2.59 Señal cuya frecuencia varía decrecientemente según $f(t) = 100/(2\pi t + 1)$	80
2.60 CWT de una señal cuya frecuencia varía en forma decreciente, $f(t) = 100/(2\pi t + 1)$, ondícula Morlet compleja, $dt = 1ms$	81
2.61 CWT de una señal cuya frecuencia varía en forma decreciente, $f(t) = 100/(2\pi t + 1)$, ondícula Morlet compleja, $dt = 1ms$	82
2.62 FTCWT de una señal cuya frecuencia varía en forma decreciente, $f(t) = 100/(2\pi t + 1)$, ondícula Morlet compleja, $dt = 1ms$	83
3.1 STFT aplicada a señal compuesta con una senoidal de 40 Hz, con $dt = 1ms$ y ventana Hamming con $M = 60$, realizada con el primer algoritmo.	88
3.2 Casos que se presentan al interpolar la componentes espectrales.	90
3.3 STFT realizada a una señal compuesta de una senoidal de 40 Hz, con $dt = 1ms$, ventana Hamming con $M=60$ e interpolación de componentes.	91
3.4 STFT aplicada a señal compuesta con una senoidal de 40 Hz, con $dt = 1ms$ y ventana Hamming con $M = 60$, con valor RMS de las componentes.	91
3.5 CWT aplicada a señal compuesta con una senoidal de 40 Hz, con $dt = 1ms$ y ondícula Morlet con $f_{central} = 1$	97
4.1 Traza sintética generada por ondículas con diferentes frecuencias centrales, desplazadas y superpuestas, espectro real y espectro realizado con la técnica ISA.	100
4.2 Traza sintética generada por ondículas Morlet con diferentes frecuencias centrales, desplazadas y superpuestas	101
4.3 Magnitud espectral de la traza sintética generada.	101

4.4 Descomposición espectral de la traza sintética con la STFT, con una ventana Kaiser, con $\beta = 4,86, M = 410$ y $\Delta_{mf} = 10Hz$	102
4.5 CWT aplicada a la traza sintética con $f_{central} = 2,2$ y wavelet Morlet compleja.	103
4.6 CWT aplicada a la traza sintética con $f_{central} = 1,12$ y wavelet Morlet compleja.	104
4.7 CWT con variación de la frecuencia central y wavelet Morlet compleja.	105
4.8 FTCWT de la traza sintética con $f_{central} = 2,2$, ondícula Morlet Compleja.	106
4.9 FTCWT de la traza sintética con $f_{central} = 2,2$, ondícula Morlet Compleja.	107
4.10 Traza real de una línea sísmica.	108
4.11 Magnitud espectral y distribución de energía de una traza real. a) Magnitud espectral. b) Distribución de energía.	108
4.12 STFT de una traza real, con ventana Blackman y $M = 100$	109
4.13 CWT aplicado a una traza real con una ondícula Morlet Compleja. a)Frecuencia central $f_{central} = 0,5$. b)Frecuencia central $f_{central} = 1$	110
4.14 CWT aplicado a una traza real con una ondícula Morlet Compleja y frecuencia central variable. a)Frecuencia central a $1 Hz$ $f_{central} = 0,018$. b)Frecuencia central a $1 Hz$ $f_{central} = 0,037$	111
4.15 FTCWT aplicado a una traza real con una ondícula Morlet Compleja. a)Frecuencia central $f_{central} = 0,5$. b)Frecuencia central $f_{central} = 1$	112
4.16 CWT aplicado a una línea sísmica con una ondícula Morlet Compleja. a)Línea sísmica original b)CWT con frecuencia central fija $f_{central} = 0,8125$	113
4.17 CWT aplicado a una línea sísmica con una ondícula Morlet Compleja y frecuencia variable, la frecuencia de $1 Hz$ fue de $0,037$	114
4.18 Descomposición espectral datos reales offshore con la FTCWT y $f_{central} = 0,5$. a)35 Hz.b) Línea original.	115
4.19 CWT aplicado a una línea sísmica con una ondícula Morlet Compleja y frecuencia central de $f_{central} = 0,5$	116
4.20 Reflectividad de hidrocarburos entre 32 y $47 Hz$	116

4.21 Descomposición para una línea con un pozo de hidrocarburo.	117
4.22 Descomposición para una línea con un pozo de hidrocarburo.	118
4.23 Línea sísmica a 7 Hz, por medio de la CWT.	119
A.1 Ventana principal del software GSEGYView	128
A.2 Visualización de datos sísmicos con GSEGYView	129

ÍNDICE DE TABLAS

2.1 Características de las ventanas más usadas.(Oppenheim et al.,2000)	26
2.2 Ancho de banda de las ventanas en hertz	34
2.3 Pendiente caída de los lóbulos laterales.	38
2.4 Valores iniciales para ancho de banda y duración efectiva, para ciertos valores de la variable F_b	70
2.5 Valores de frecuencia central para obtener anchos de banda efectivo inicial de $\Delta_f(f)$, para las diferentes bandas de frecuencia.	73
3.1 Tiempos de cómputo con el algoritmo básico de la STFT.	93
3.2 Tiempos de cómputo con el algoritmo de la STFT basado en la FFT.	93
3.3 Tiempos de cómputo con el algoritmo básico de la CWT.	96
3.4 Tiempos de cómputo con el algoritmo de la CWT basado en la FFT.	96
3.5 Tiempos de cómputo con el algoritmo de la FTCWT basado en la FFT.	97
A.1Comandos Unix	127
A.2Algunos comando de Seismic Unix.	128

INTRODUCCIÓN

La sísmica de reflexión es uno de los métodos más usados en la exploración del subsuelo, consiste en emitir ondas de sonido en la superficie del terreno y registrar por medio de geófonos las ondas reflejadas por las diferentes capas de la tierra. Cada geófono guarda una señal, que recibe el nombre de traza sísmica y el conjunto de trazas forman la imagen sísmica, en la cual se pueden observar las diferentes capas y formaciones del subsuelo.

Las imágenes sísmicas poseen detalles que solo son identificados a ciertas frecuencias, para poder visualizar estos detalles de la imagen, se aplican métodos de descomposición espectral a las trazas, y así se obtienen nuevas imágenes con mejor resolución.

Existen diversos métodos de descomposición espectral, entre ellos están la transformada continua de Wavelet (CWT), la transformada de Fourier de ventana corta (STFT) y la transformada de Fourier de los coeficientes Wavelets (FTCWT), que tienen como característica especial la posibilidad de visualizar los detalles de una señal tanto en tiempo como en frecuencia, esta característica es muy importante al analizar trazas sísmicas, ya que éstas son señales no estacionarias.

Con este trabajo se busca contribuir al desarrollo de métodos para procesar y mejorar la resolución de imágenes obtenidas por sísmica de reflexión, para poder localizar depósitos y fenómenos que sólo se identifican a ciertas frecuencias.

Debido a que el proceso de exploración y perforación del subsuelo es muy costoso y cualquier error puede implicar costos del orden del millón de dólares, se busca con este proyecto crear una herramienta que sirva de ayuda a los intérpretes para localizar depósitos de hidrocarburos. Por esto el proyecto es de interés para el Instituto Colombiano del Petróleo (ICP), y se realiza bajo el convenio UIS-ICP.

Además, se desarrollo un módulo en Seismic Un*x, que es un software libre, para contribuir al desarrollo de estos métodos y evitar la compra de licencias.

A continuación se presenta como está organizado el documento y los alcances generales de cada uno de los capítulos.

En el capítulo uno, se hace una breve descripción de qué es la sísmica de reflexión y cómo se obtienen los datos sísmicos, además se explica en qué consiste el problema de descomposición espectral y cómo esta metodología ayuda en la exploración a partir de la visualización de las imágenes a diferentes frecuencias. Por último, se hace un resumen del estado del arte respecto a la aplicación de las técnicas en la exploración sísmica.

En el capítulo dos se describen las metodologías de descomposición espectral que son de estudio de este trabajo y cómo se aplican en la descomposición de trazas sísmicas, además se analizan los diferentes factores que pueden afectar los resultados de estas metodologías. Además se presentan pruebas con señales sintéticas de diferentes características.

En el capítulo tres se describen cada uno de los algoritmos usados, mencionando sus características y el proceso que se llevó para llegar a este resultado final.

En el cuarto capítulo se procesaron datos sísmicos tanto sintéticos, como reales y se analizaron los resultados, teniendo en cuenta las consideraciones hechas en el capítulo dos.

En el último capítulo se redactaron las conclusiones teniendo en cuenta los diferentes resultados obtenidos, y además se hace mención de los posibles trabajos futuros.

Este trabajo deja como resultado un análisis de tres metodologías de descomposición espectral aplicadas al procesamiento de datos sísmicos. Se pudo analizar, cómo dependiendo de lo que se desea obtener, existen cambios en cada metodología, que ayudan a extraer lo que se desea observar, mejorando la calidad de la imagen sísmica.

Se pudo captar varios fenómenos que se pueden obtener al aplicar la descomposición espectral a datos sísmicos, y que ayudan a un mejor entendimiento de lo que hay en el subsuelo.

0.1. Objetivos

0.1.1. Objetivo general

- Evaluar algoritmos utilizados en el análisis espectral para mejorar la visualización o resolución de las trazas sísmicas.

0.1.2. Objetivos específicos

- Comparar tres métodos de descomposición espectral utilizados para mejorar la resolución de imágenes sísmicas.
- Desarrollar una herramienta en Seismic Unix con los tres métodos estudiados para el mejoramiento de la resolución de imágenes sísmicas, basada en descomposición espectral.
- Comprobar el funcionamiento de la herramienta desarrollada con el uso de datos sintéticos y analizar los resultados obtenidos al procesar datos reales con los métodos estudiados.

1. SÍSMICA DE EXPLORACIÓN

En la exploración sísmica se emplean las ondas elásticas que se propagan a través del terreno y que han sido generadas artificialmente. Su objetivo es el estudio del subsuelo en general, lo cual permite obtener información geológica de los materiales que lo conforman. La prospección sísmica es una herramienta de investigación poderosa, ya que con ella se puede inspeccionar con buena resolución desde los primeros metros del terreno (sísmica de alta resolución o sísmica superficial; *shallow seismic*) hasta varios kilómetros de profundidad (sísmica profunda; *deep seismic*. Así para la sísmica profunda se utilizan fuentes de energía muy potentes (explosivos o camiones vibradores) capaces de generar ondas elásticas que llegan a las capas profundas del suelo, mientras que para la sísmica superficial se utilizan martillos de impacto, rifles sísmicos y explosivos de baja energía.

Dependiendo del objetivo del estudio se escoge el tipo de sísmica. Según esto, la sísmica profunda se emplea en la detección de reservorios petrolíferos (terrestre o marítima), grandes estructuras geológicas (plegamientos montañosos, zonas de subducción, etc), yacimientos minerales, domos salinos, etc. Mientras que la sísmica superficial tiene mucha aplicación en la obra pública y la ingeniería civil.

La prospección sísmica se basa en el mismo principio de la sismología, consiste en generar ondas sísmicas mediante una fuente emisora y registrarlas en una serie de estaciones sensoras (geófonos) distribuidas sobre el terreno. A partir del estudio de las distintas formas de onda y sus tiempos de trayecto, se consigue obtener imágenes del subsuelo que luego se relacionan con las capas geológicas (secciones sísmicas, campos de velocidades, etc).

Una onda sísmica es de naturaleza similar a una onda acústica, excepto que la tierra permite la propagación de estas ondas como ondas comprimidas. La tierra actúa como un medio elástico para la propagación de ondas sísmicas.

Cuando una onda sísmica encuentra un cambio en las propiedades elásticas del material, como es el caso de una interfase entre dos capas geológicas; parte de la energía continúa en el mismo medio (onda incidente), parte se refleja (ondas reflejadas) y el otro

se transmite al otro medio (ondas refractadas) con cambios en la dirección de propagación, en la velocidad y en el modo de vibración.

Las leyes de la reflexión y la refracción se derivan del principio de Huygens (Cada punto alcanzado por un frente de onda, actúa como una nueva fuente de ondas que se extiende en todas las direcciones) cuando se considera un frente de onda que incide sobre una interface plana. El resultado final es que ambas leyes se combinan en un único planteamiento: en una interfase el parámetro del rayo, ρ , debe tener el mismo valor para las ondas incidentes, reflejadas y refractadas. Si el medio consta de un cierto número de capas paralelas, la ley de Snell establece que el parámetro del rayo tiene que ser el mismo para todos los rayos reflejados y refractados resultantes de un rayo inicial dado.

Cuando $V_1 < V_2, i_0 > i_2$, los rayos se refractan por la segunda capa y los geófonos situados en la superficie no registran el fenómeno. En el caso en el que i_2 alcanza los 90° , se define como $i_1 = \text{sen}^{-1}(V_1/V_2)$ el ángulo de incidencia crítica para el cual el rayo viaja a través de la interfase, ver figura 1.1.

La ley de Snell proporciona información sobre trayectorias de los rayos, los tiempos de llegada y la posición de los refractores, pero no proporciona información alguna sobre las amplitudes de las ondas.

En la figura 1.2 se puede ver la diferencia entre onda directa, reflejada y refractada. Una onda directa es aquel rayo que viaja por la parte superior de la primera capa a una velocidad V_1 .

Un rayo refractado (o transmitido), que se origina para ángulos de incidencia (i_0) mayores y cuando la velocidad de la segunda capa es superior a la de la primera ($V_2 > V_1$). Dependiendo de las velocidades, hay un ángulo de incidencia crítica (i_c) para el cual el ángulo de refracción es de 90° , entonces el rayo viaja a través del contacto entre las dos capas y vuelve a subir con el mismo ángulo que ha incidido, este rayo se denomina rayo crítico y es el único que se registra en superficie.

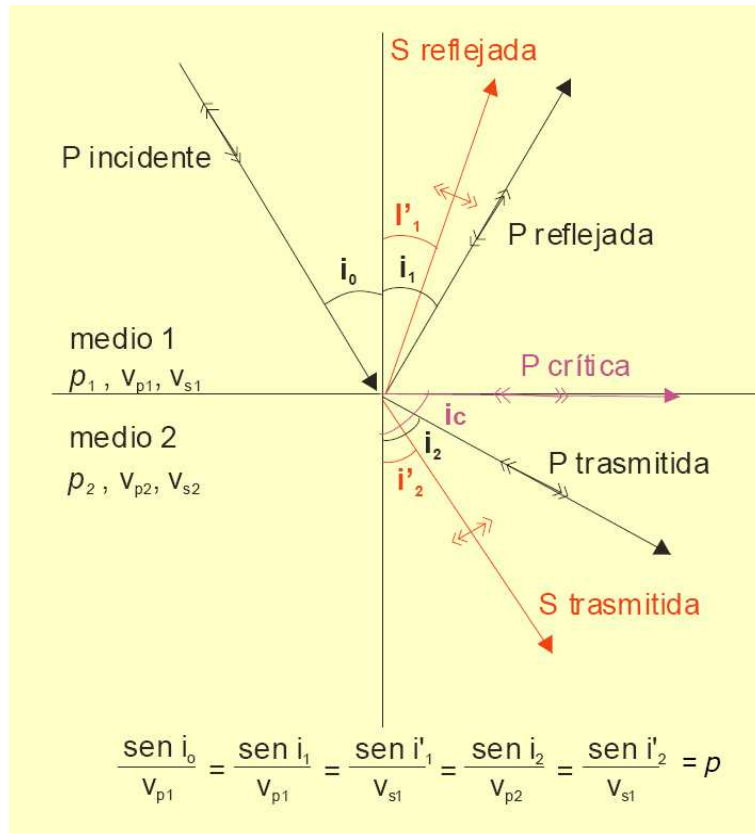


FIGURA 1.1. Conversión de una onda P. Las ondas sísmicas que viajan por el subsuelo se reflejan y se refractan siguiendo la ley de Snell. La energía de las ondas incidentes se reparte entre las ondas reflejadas, las refractadas y la absorción natural del terreno. Fuente (Teixidó, 2000).

EL rayo reflejado que se origina para ángulos de incidencia (i_0) pequeños. Las ondas rebotan sobre el techo de la segunda capa.

1.1. Espectro de la fuente explosiva

Cuando se realizan los registros sísmicos, la fuente explosiva usada depende de la profundidad a la que se quiere llegar y por ello cada una tiene un espectro diferente. En los registros hechos en tierra, comunmente se usa dinamita para generar el frente de onda, otro método importante es el método de Vibroseis, que es una señal larga de baja potencia. En la figura 1.3 se muestra cada señal y su espectro, debido a la forma de las fuentes explosivas,

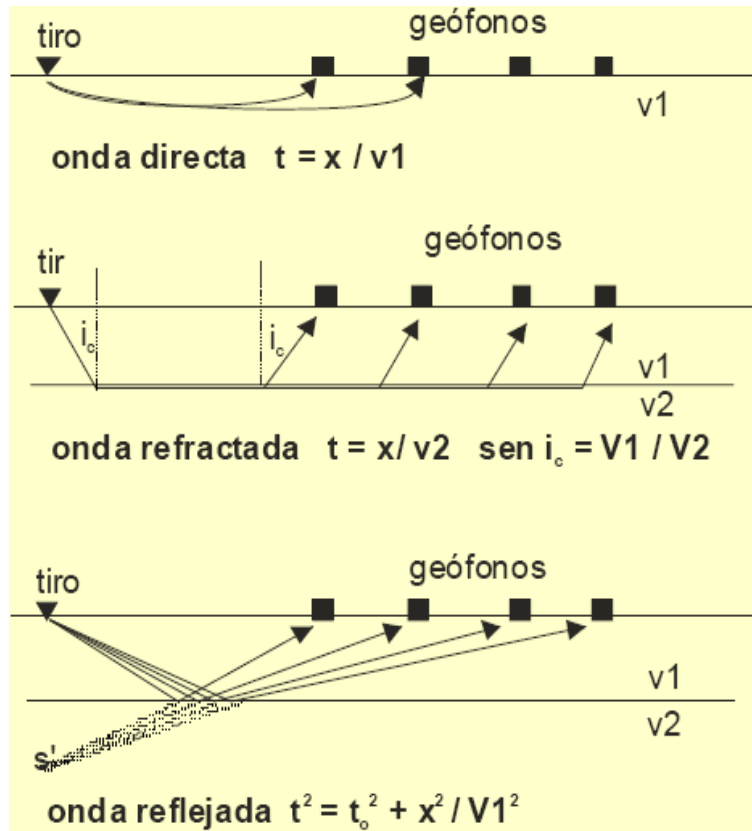


FIGURA 1.2. Tipos de rayos que llegan a un geófono. Fuente (Teixidó, 2000).

muchas veces se simulan con señales ricker, las cuales son muy parecidas a la ondícula Morlet.

1.2. Sísmica de refracción

La sísmica de refracción se basa en la medición del tiempo de viaje de las ondas refractadas críticamente en las interfaces entre las capas con diferentes propiedades físicas; fundamentalmente por contraste entre impedancias acústicas ($i = \rho v$; en donde ρ es la densidad y v la velocidad de la capa). La energía sísmica se genera mediante un impacto controlado en superficie (o a una determinada profundidad) que va propagándose en forma de onda elástica a través del subsuelo interactuando con las distintas capas, de manera que una parte de la energía se refleja y permanece en el mismo medio que la energía incidente, y el resto se transmite al otro medio con un fuerte cambio de la dirección de

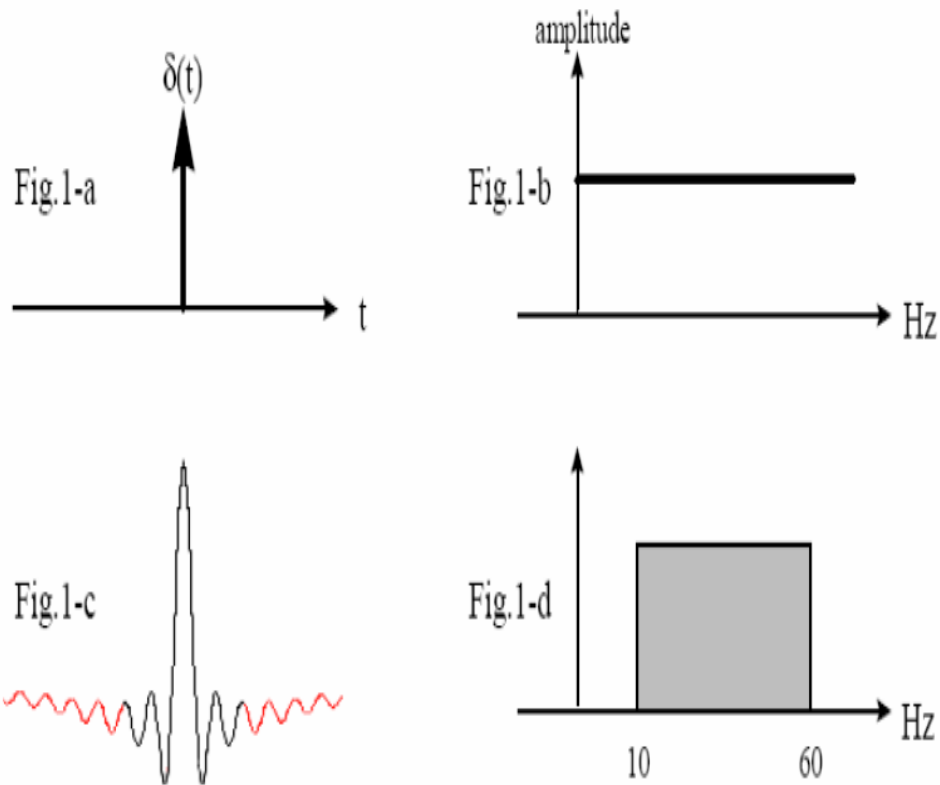


FIGURA 1.3. Algunos tipos de fuentes y su respectivo espectro. Fuente (Teixidó, 2000).

propagación debido al efecto de la interfase (refracción). De esta interacción, la sísmica de refracción sólo considera las refracciones con ángulo crítico ya que son las únicas ondas refractadas que llegan a la superficie y pueden ser captadas por los geófonos. Ver figura 1.4.

La distancia desde los receptores al punto de tiro debe ser muy grande comparada con la profundidad de los horizontes que se desean detectar debido a que las ondas viajan grandes distancias horizontales antes de ser refractadas críticamente hacia la superficie; por esto también se le conoce como sísmica de gran ángulo.

Las largas trayectorias de propagación hacen que se disipe una mayor proporción de energía y en particular se produzca una absorción de las frecuencias más altas, en consecuencia los datos de refracción son de bajas frecuencias comparados con los datos de reflexión.

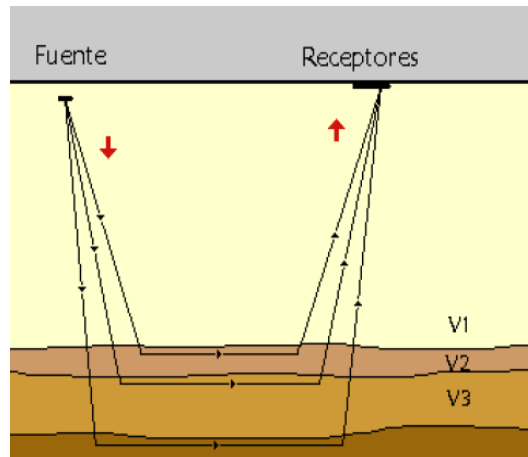


FIGURA 1.4. La sísmica de refracción utiliza los tiempos de primeras llegadas del sismograma que corresponden a las ondas refractadas críticamente en las distintas capas del subsuelo. Cada una de estas capas se distingue por su impedancia acústica y se le llama refractor. El resultado de este método es una imagen sísmica del terreno en forma de campos de velocidades $[V(x, z)]$; que posteriormente será interpretado geológicamente. Fuente (Teixidó, 2000).

Este tipo de sísmica es adecuada especialmente cuando se desea estudiar superficies de alta velocidad, ya que brinda información de velocidades y profundidades en las cuales se propagan las ondas, ver figura 1.5. También es posible inspeccionar áreas más grandes de forma más rápida y más económica que con el método de reflexión, aun perdiendo detalles.

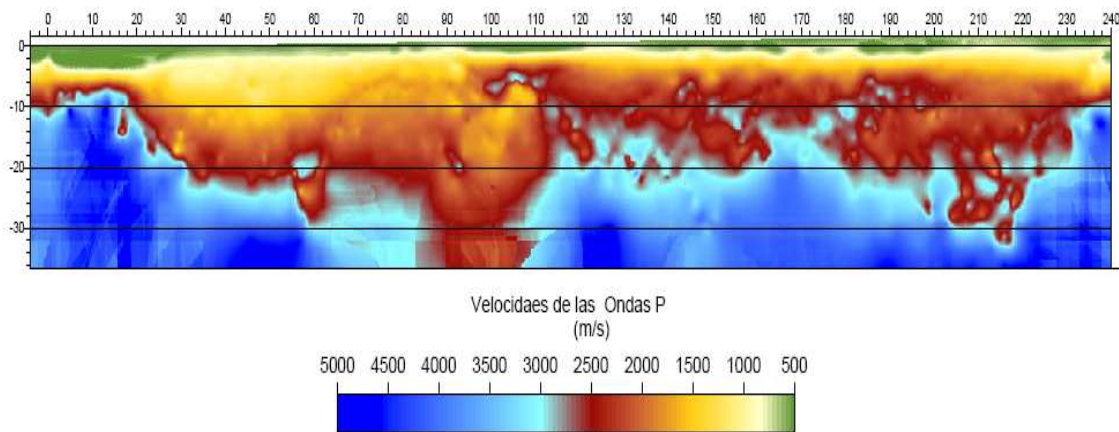


FIGURA 1.5. El método de refracción proporciona una imagen del subsuelo en términos de campo de velocidades sísmicas $V(x, z)$. Fuente (Teixidó, 2000).

1.3. Sísmica de reflexión

Este método se basa en las reflexiones del frente de onda sísmico sobre las distintas interfases del subsuelo. Como en la refracción, estas interfases responden a contrastes de impedancia que posteriormente se relacionaran con las distintas capas geológicas. Las reflexiones son detectadas por los receptores (geófonos) que se ubican en superficie y que estan alineados con la fuente emisora. Debido a que las distancias entre fuente y los geófonos son pequeñas respecto a la profundidad de penetración que se alcanza, el dispositivo experimental soporta que se opere en angulo corto, asegurando la obtención de reflexiones (Ver figura 1.6).

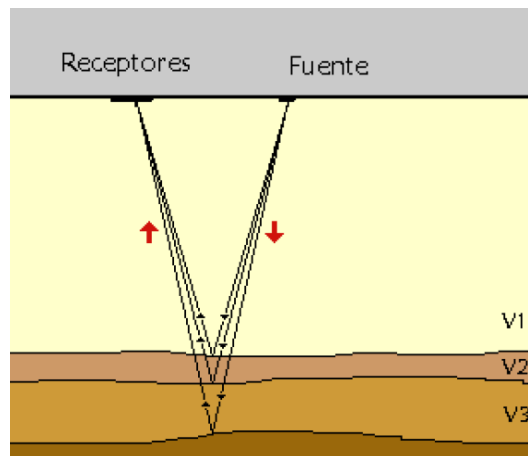


FIGURA 1.6. Esquema de la emisión y recepción de rayos en distintas capas. Fuente (Teixidó, 2000).

Para obtener un mejor estudio de la zona, se aumenta el número de disparos y de geófonos, en comparación con la refracción. El resultado es un grupo de trazas sísmicas procedentes de todos los tiros que se analizan, se procesan y luego se reordenan en conjuntos de puntos reflectores comunes (CMP), los cuales contienen la información de todas las reflexiones halladas (figura 1.7). Una vez todas las trazas de un mismo CMP se han agrupado, se suman y se obtiene una traza CMP. El conjunto de todas las trazas CMP constituye una denominada *sección sísmica de reflexión* que es el resultado de este método.

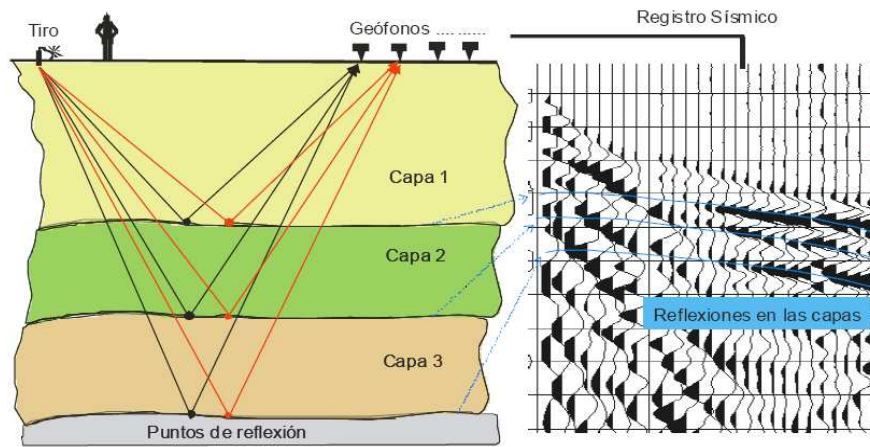


FIGURA 1.7. Recorrido de los rayos reflejados en tres capas para una posición de tiro y dos estaciones receptoras (geófonos). Debido a la ecuación de propagación, las reflexiones quedan marcadas en el registro sísmico como trayectorias hipérbolicas. Fuente (Teixidó, 2000).

Una sección sísmica es una imagen del subsuelo en donde las reflexiones se ven en forma de lóbulos negros de mayor amplitud y definen las capas reflectoras que después se asociaran a las estructuras geológicas.

El tratamiento de los datos, en la sísmica de reflexión es laborioso, y uno de los retos más importantes es conseguir aislar de los registros las reflexiones, eliminando las otras ondas (onda directa, refracciones, ruido, etc). Este proceso implica la aplicación de tratamientos multiseñal (filtros, deconvoluciones, etc) que, si no se tiene cuidado, se pueden crear eventos y confundirse con falsos reflectores. Otro punto conflictivo del procesado es que en las secciones sísmicas de reflexión, las capas reflectoras están en modo tiempo doble debido a que cada rayo reflejado ha hecho el viaje de ida (incidencia) y vuelta (rebote).

A los interpretes que están acostumbrados a trabajar con secciones sísmicas, les es fácil pasar del tiempo doble en donde se detecta un reflector a la profundidad que le tocaría, pero en ocasiones se facilita la tarea con secciones sísmicas convertidas a profundidad aproximada.

Con la reflexión sísmica se obtiene como resultado una imagen denominada sección sísmica, en donde se aprecia la geometría de las estructuras geológicas.

La diferencia entre la sísmica de reflexión de alta resolución y la sísmica profunda radica en que las estructuras geológicas de interés de la primera son menores que las de la sísmica profunda, por esto para conseguir la resolución necesaria debe trabajarse con geometrías más reducidas y rangos de frecuencia más altos, puesto que los primeros metros del subsuelo constituyen una zona caracterizada por ser más heterogénea y con contrastes de velocidades más elevados. Ello produce que el registro sísmico de la propagación del frente de onda se distinga por un número elevado de trenes de ondas que muy a menudo se interfieren y se superponen a las reflexiones superficiales.

Dos aspectos muy importantes en la definición de la geometría de adquisición son las posiciones del tiro respecto al primer geófono activo (offset más próximo) y la del último geófono (offset más lejano). Estas posiciones dependen de las profundidades de investigación, de las velocidades del subsuelo y de la longitud total del dispositivo experimental.

Los datos de campo obtenidos, se someten a diferentes procesos antes de llegar a la imagen final, por esta razón los datos con los cuales se va a trabajar en este trabajo, ya contienen un pre-procesamiento y los resultados que se obtuvieron durante la descomposición dependen de los errores que se hallan cometido durante este preprocesamiento. Por tal razón se va a partir de unos datos de los cuales no se sabe sin están bien o mal procesados.

1.4. Frecuencia de muestreo de una traza sísmica

La frecuencia de muestreo de las trazas sísmicas, viene dada por el dispositivo que se usó para captarlas, existen geófonos con frecuencia de muestreo que van desde 1000 Hz a 250 Hz . Recordando el teorema del muestreo de Nyquist, para poder captar una frecuencia deseada, la frecuencia de muestreo debe ser $F_s \geq 2 * F_{max}$, donde F_{max} es la frecuencia máxima que se desea analizar.

Con las trazas que se van a trabajar más adelante fueron captadas con geófonos con frecuencia de muestreo igual a 1000 Hz , osea la frecuencia maxima a analizar seria 500 Hz .

1.5. Descomposición espectral

Con la descomposición se pueden visualizar detalles de una señal que a simple vista no se ven. Si la señal es estacionaria con la transformada de Fourier se puede ver y analizar muy bien esta señal, pero si la señal es no estacionaria (las componentes espectrales varían con el tiempo) al hacer sólo la transformada de Fourier se pierde información que puede ser importante dependiendo del análisis requerido. Para este tipo de señales existen las metodologías de descomposición tiempo-frecuencia.

El resultado del análisis tiempo-frecuencia es el mapeo de una componente transitoria de una señal sobre un punto del plano que corresponde a su instante de ocurrencia y a su componente de frecuencia predominante. La resolución de tiempo y de frecuencia está sujeta, al igual que cualquier fenómeno físico, al principio de indeterminación de Heisenberg por lo que, dada una señal no es posible conocer exactamente cual frecuencia existe en un determinado instante de tiempo, conociéndose tan solo cuál banda de frecuencias existe en un cierto intervalo finito.

Como se mencionó antes una imagen sísmica está compuesta por señales que están formadas por las reflexiones del frente de onda, estas señales son no estacionarias y como se vio antes sus componentes varían con el tiempo (señal no estacionaria). Cuando se habla de descomposición espectral de una imagen sísmica se siguen los siguientes pasos:

- (i) Aplicar una metodología de descomposición espectral a cada traza que compone la imagen.
- (ii) Almacenar los datos obtenidos como nuevas señales en el tiempo.
- (iii) Crear una matriz cúbica como la de la figura 1.8 con todo el volumen de datos obtenidos

Con la matriz cúbica obtenida (ver figura 1.8), se puede visualizar la imagen a la frecuencia deseada, haciendo un corte horizontal, o un corte vertical si se quiere ver el contenido frecuencial en un tiempo determinado.

Debido a los costos de la exploración de hidrocarburos, es necesario tener la mayor

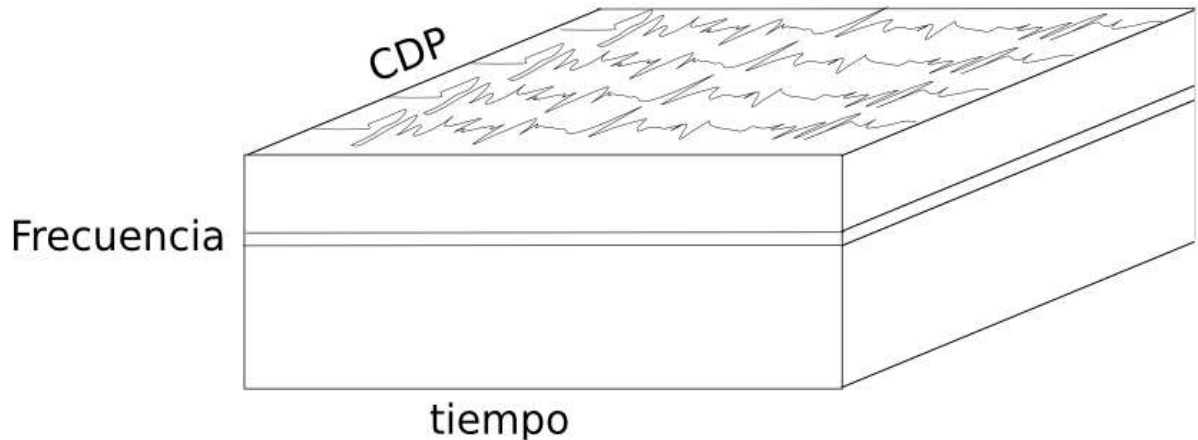


FIGURA 1.8. Cubo de descomposición espectral. Fuente Autor

precisión, en los resultados obtenidos, debido a que cualquier error podría ser muy costoso para la industria. Por esta razón se desea tener la mejor resolución tanto en tiempo como en frecuencia, para así tener mayor certeza de dónde está ubicada una reserva de hidrocarburo o alguna formación geológica.

1.5.1. Estado del arte de la descomposición espectral

En la actualidad los métodos espectrales han tomado mucha importancia en el análisis de señales y series temporales para distintas áreas. Una de estas áreas es la geofísica, y para ser más específicos, la sísmica de exploración. En los últimos años se han publicado muchos artículos acerca de aplicaciones de la descomposición espectral en el análisis de señales sísmicas.

En la geofísica, han servido para predecir tipos de rocas (Hall, 2005), visualizar contenidos de fluidos en el subsuelo (Castagna, Sun, & Siegfried, 2003), formaciones y muchas cosas que con una imagen sísmica no se puede captar. Por estas razones y por

muchas más la descomposición espectral es una de las técnicas que mejores resultados han dado en los últimos años.

Una de las primeras publicaciones sobre descomposición espectral aplicada a datos sísmicos fue hecha en 1995 por Geophysics y trataba sobre como descomponer una señal sísmica en el plano tiempo-frecuencia (Chakraborty & Okaya, 1995). De hecho muchas de las publicaciones sobre este tema no tienen mas de 3 años, una de las razones de esto, es que las compañías mantienen reservado todo las novedades acerca de la exploración. En las publicaciones sólo mencionan resultados pero poco se habla sobre la metodología con que se llego a estos resultados.

La principal publicación, en la que se baso este trabajo, se dice que para observar los efectos causados por la presencia de hidrocarburos, esto se da a bajas frecuencias, por tal razón las descomposiciones se hicieron para un rango de frecuencias entre 1 y 60 Hz.

En las figuras 1.9 y 1.10 se muestran algunas descomposiciones publicadas en (Sinha, 2005):

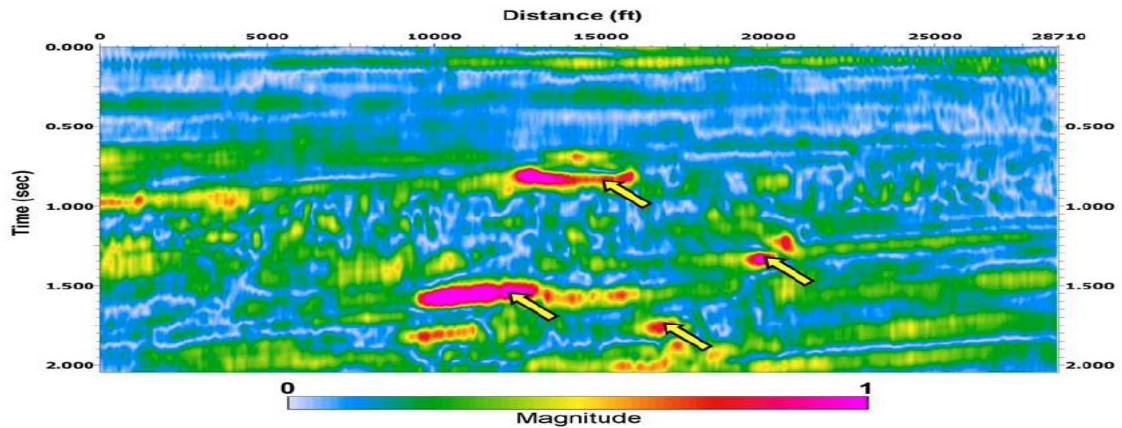


FIGURA 1.9. Sección sísmica a 20 Hz obtenida usando la TFCWT. Las altas amplitudes son zonas de hidrocarburos. Tomado de (Sinha, 2005)

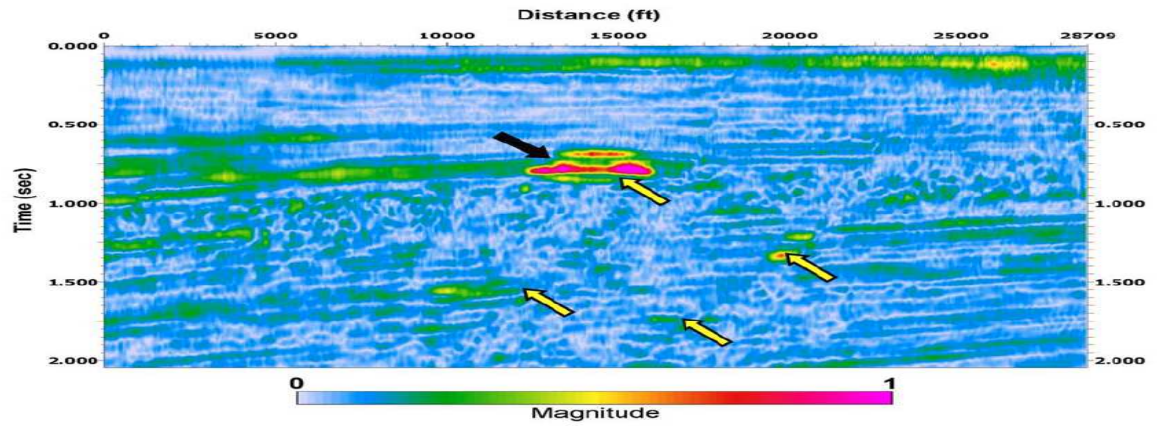


FIGURA 1.10. Sección a 33 Hz, en esta sección las anomalías de sombras están ausentes. La anomalía presente (flecha negra) se debe probablemente a los efectos locales de afinación y no desaparece a altas frecuencias. Tomado de (Sinha,2005).

2. METODOLOGÍAS DE DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL

Son diversas las metodologías de descomposición espectral que existen en la actualidad, basándose en (Sinha, 2005) se escogieron tres de éstas, en cuyo artículo se hizo un breve análisis de los resultados obtenidos con cada una. En el presente capítulo se hará un análisis de los tres métodos y se mostrarán algunos aspectos que afectan los resultados obtenidos con cada uno.

Las tres metodologías escogidas son la Transformada de Fourier de ventana corta (STFT), la Transformada Wavelet Continua (CWT) y la Transformada de Fourier de los Coeficientes Wavelet (FTCWT). Cada una de estas tiene como característica especial, que su aplicación deja como resultado una imagen 3D, donde uno de los ejes es el tiempo, el otro la frecuencia y el tercero es la amplitud. Esta característica es la razón de su uso en el procesamiento de trazas sísmicas.

2.1. Transformada de Fourier de Ventana Corta (STFT)

La transformada de Fourier es una herramienta que sirve para visualizar una señal en el dominio de la frecuencia, por medio de amplitudes que representan sus componentes espectrales. La esencia de la transformada de Fourier es descomponer la señal como combinaciones lineales de funciones senoidales.

Se dice que $f(t)$ tiene una representación en series de Fourier, si puede ser representada como una combinación lineal de exponenciales complejas, relacionadas armónicamente así:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int} \quad (2.1)$$

donde los C_n se conocen como los coeficientes de la serie de Fourier y están dados por:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (2.2)$$

La transformada continua de Fourier se define como:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.3)$$

La transformada inversa es:

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2.4)$$

La importancia de la transformada de Fourier, es que se pueden identificar las componentes frecuenciales de una señal, pero esto no es útil cuando la señal es no estacionaria. Para esto se desarrolló la transformada de Fourier de ventana corta (STFT).

2.1.1. Localización tiempo-frecuencia

La localización tiempo-frecuencia es el proceso de situar una señal en los espacios de tiempo y de frecuencia, y por ende definir el estado de la señal con precisión en ellos. Este proceso de localización se denomina enventanado y utiliza señales denominadas ventanas.

Una función $h(t)$ se denominará ventana y el producto interno de esta con una función $f(t)$ será llamado proceso de enventanado (Chui, 1997). La integral de transformación 2.5 permite enmarcar o resaltar a la señal $f(t)$ alrededor de $t = b$, por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{h(t-b)} dt \quad (2.5)$$

2.1.2. Ancho de banda RMS

Si $h(t)$ es una función cuyo decaimiento es suficientemente rápido hacia el infinito, tal que las integrales en 2.6 y 2.7 son finitas, entonces el centro de $h(t)$ está definido por:

$$t^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t|h(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt} \quad (2.6)$$

y el radio de $h(t)$ es dado por:

$$\Delta_h = \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t-t^*)^2 |h(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

El centro se puede equiparar al centro temporal de la señal y el radio al tiempo desde el centro que contiene información valiosa de la señal.

El ancho de la función ventana es $2\Delta_h$, correspondiente a su duración eficaz o efectiva, RMS de $h(t)$. Si la transformada de Fourier $\widehat{h}(\omega)$ de $h(t)$ tiene decaimiento suficientemente rápido al infinito tal que los valores

$$\omega^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega |h(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |h(\omega)|^2 d\omega} \quad (2.8)$$

y

$$\Delta_{\widehat{h}} = \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega^*)^2 |\widehat{h}(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{h}(\omega)|^2 d\omega} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

son finitos, entonces el centro y el ancho de $\widehat{h}(\omega)$ están dados por ω^* y $2\Delta_{\widehat{h}}$ respectivamente (Chui, 1997). Si $\Delta_{\widehat{h}}$ es finita, $\widehat{h}(\omega)$ es una ventana en frecuencia. Similarmente si Δ_h es finita, la función $h(t)$ es una ventana en tiempo. Si ambas $\Delta_{\widehat{h}}$ y Δ_h son finitas, $h(t)$ sería una ventana tiempo-frecuencia.

Si $h(t)$ es un filtro pasa-bajas con frecuencia de corte ω_0 , se mapea la señal dentro de su ancho de banda. Si el filtro es ideal, no permite una ubicación en el tiempo debido a que su duración es infinita (en el tiempo). Este compromiso entre la duración y el ancho de banda se resume en el principio de incertidumbre, el cual indica que cualquier ventana tiempo-frecuencia $h(t)$ satisface la inecuación:

$$\Delta_h \Delta_{\widehat{h}} \leq \frac{1}{2} \quad (2.10)$$

donde la igualdad sólo es válida para la función Gaussiana.

Recordando la identidad de Parseval:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle \quad (2.11)$$

o explícitamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{g}(\omega)} d\omega \quad (2.12)$$

y aplicandola a proceso de ventaneo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{h(t-b)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \overline{e^{ib\omega} \widehat{h}(\omega)} d\omega \quad (2.13)$$

Se observa que la función $h(t-b)$, localiza la señal $f(t)$ cerca a $t = b$, es decir la ventana en el tiempo esta definida por:

$$[b + t^* - \Delta_h, b + t^* + \Delta_h] \quad (2.14)$$

Similarmente, el término $\frac{1}{2\pi} e^{ib\omega} \widehat{h}(\omega)$ del lado derecho de 2.13, localiza el espectro $\widehat{f}(\omega)$ de la señal con ventana en frecuencia dada por:

$$[\omega^* - \Delta_{\widehat{h}}, \omega^* + \Delta_{\widehat{h}}] \quad (2.15)$$

En aplicaciones se eligen funciones ventana de valor real tal que $|\widehat{h}(\omega)|$ sea una función par y por tanto el centro se localiza en $\omega = 0$. La última ecuación se reduce a:

$$[-\Delta_{\widehat{h}}, \Delta_{\widehat{h}}] \quad (2.16)$$

Con esto se puede observar que el proceso de ventaneo, mapea una señal de energía finita $f(t)$ sobre una señal con ancho de banda $2\Delta_{\widehat{h}}$, es decir se tiene información temporal pero sólo un rango de representación en frecuencia.

2.1.3. Proceso de enventanado

La operación de tomar partes de la señal, es el denominado proceso de enventanado definido en 2.5, con la cual se obtienen las ventanas de tiempo y frecuencia descritas en 2.14 y 2.16.

Se puede observar que si se varía el término b , la ventana recorrera toda la señal en el eje del tiempo. Pero 2.16 sólo contiene términos constantes, por tanto no se está recorriendo el espectro de la señal.

Una traslación en el dominio del tiempo corresponde a un cambio de fase en la frecuencia. Y un cambio de fase en el dominio del tiempo corresponde a una traslación

en la frecuencia. Si se desea recorrer la señal en el eje de la frecuencia, se debe incorporar un corrimiento de fase en el proceso de ventaneo.

DEFINICIÓN 2.1. Sea $\phi(t)$ es una función de valor real con $\phi(t)$, $|t|^{\frac{1}{2}}\phi(t)$ y $t\phi(t)$ en l^2 , tal que $\widehat{\phi}(0) = 1$. La STFT con función ventana $\phi(t)$ está definida por:

$$F(\xi, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t}\phi(t-b)dt \quad f \in l^2 \quad (2.17)$$

Aplicando Parseval a esta definición

$$F(\xi, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t}\phi(t-b)dt = \frac{e^{-i\xi b}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i b\omega}\overline{\widehat{\phi}(\omega-\xi)}d\omega \quad (2.18)$$

El término $e^{i\xi t}\phi(t-b)$ localiza la función cerca de $t=b$, y el termino $\frac{e^{i\xi b}}{2\pi}e^{-i b\omega}\widehat{\phi}(\omega-\xi)$ localiza el espectro alrededor de $\omega = \xi$. Por tanto la ventana tiempo-frecuencia en la STFT se comporta como:

$$[b - \Delta_{\phi}; b + \Delta_{\phi}] \quad (2.19)$$

$$[\xi - \Delta_{\widehat{\phi}}; \xi + \Delta_{\widehat{\phi}}] \quad (2.20)$$

Donde las variables b y ξ controlan la ubicación en los ejes tiempo y frecuencia respectivamente.

De 2.19 y 2.20 se deduce que las medidas de las ventanas tiempo-frecuencia son $2\Delta_{\phi}$ para el eje del tiempo y $2\Delta_{\widehat{\phi}}$. Ver figura 2.1.

2.1.4. Transformada de Fourier de ventana corta discreta

La discretización y el rápido cómputo de la STFT, tiene el mismo estilo de la discretización de la transformada de Fourier. Se deben considerar señales discretas de periodo N . La ventana $g[n]$ debe ser una señal discreta y simétrica, de periodo N y con norma $\|g\| = 1$. La base de la transformada enventanada de Fourier es:

$$g_{m,l} = g[n-m]e^{\frac{i2\pi ln}{N}} \quad (2.21)$$

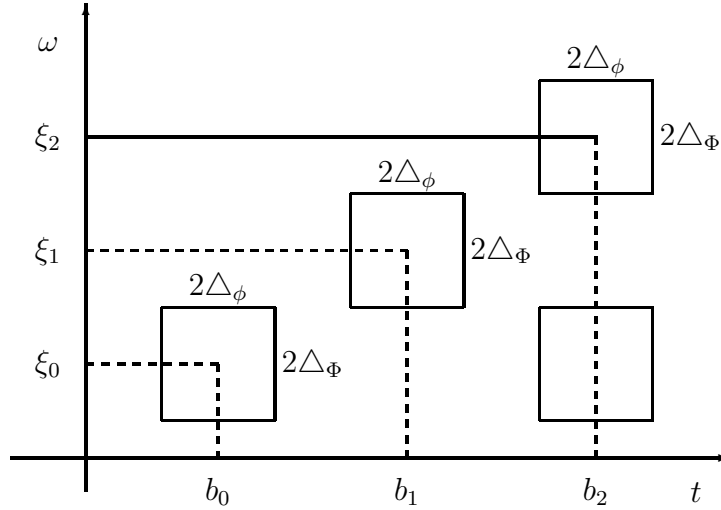


FIGURA 2.1. Plano Tiempo-Frecuencia para la Transformada de Fourier de ventana corta. Fuente (Mallat,1998).

La transformada de Fourier de $g_{m,l}$ es:

$$\widehat{g}_{m,l}[k] = \widehat{g}[k-l]e^{\frac{-i2\pi m(k-l)}{N}} \quad (2.22)$$

La transformada discreta de ventana corta de una señal f de periodo N es:

$$F[m, l] = \langle f, g_{m,l} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]g[n-m]e^{\frac{-i2\pi ln}{N}}, \quad (2.23)$$

para cada $0 \leq l < N$, $F[m, l]$ es calculado para $0 \leq l < N$ con una transformada de Fourier de $f[n]g[n-m]$.

Teorema 2.1. Si f es una señal de periodo N , entonces

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} F[m, l]g[n-m]e^{\frac{i2\pi ln}{N}} \quad (2.24)$$

y

$$\sum_{n=0}^{N-1} |f[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} |F[m, l]|^2 \quad (2.25)$$

La formula de reconstrucción puede ser reescrita como:

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} g[n-m] \sum_{l=0}^{N-1} F[m, l]e^{\frac{i2\pi ln}{N}} \quad (2.26)$$

2.1.5. Características de las ventanas

A continuación se muestran en las figuras 2.2 a 2.6 algunas de las ventanas comúnmente utilizadas. Estas ventanas se definen por las siguientes ecuaciones (Oppenheim, Schafer, & Buck, 2000):

- Ventana Rectangular:

$$W[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M, \\ 0 & \text{En el resto} \end{cases} \quad (2.27)$$

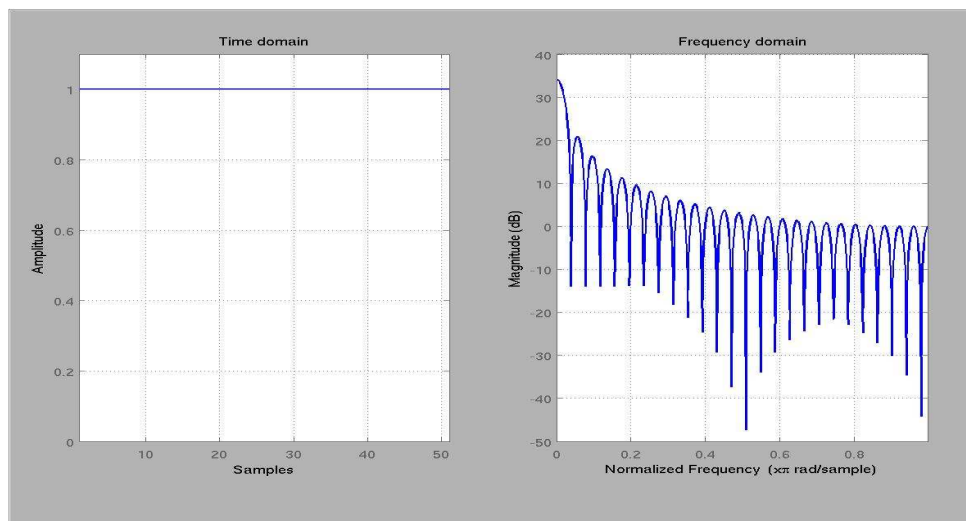


FIGURA 2.2. Ventana rectangular con $M = 50$ y su transformada de Fourier. Fuente Autor.

- Ventana Bartlett (triangular):

$$W[n] = \begin{cases} 2n/M & 0 \leq n \leq M/2, \\ 2 - 2n/M & M/2 < n \leq M, \\ 0 & \text{En el resto} \end{cases} \quad (2.28)$$

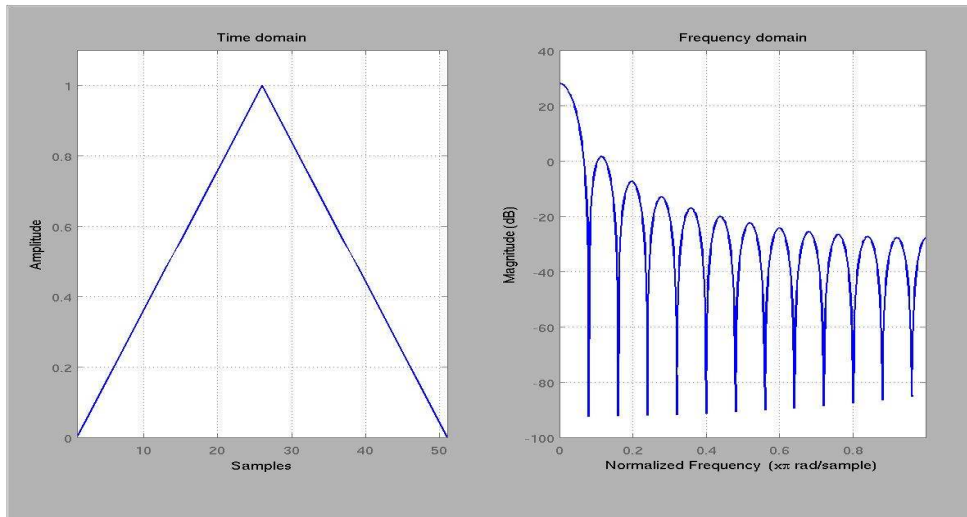


FIGURA 2.3. Ventana triangular con $M = 50$ y su transformada de Fourier. Fuente Autor.

- Ventana Hanning:

$$W[n] = \begin{cases} 0,5 - 0,5 \cos(2\pi n/M) & 0 \leq n \leq M, \\ 0 & \text{En el resto} \end{cases} \quad (2.29)$$

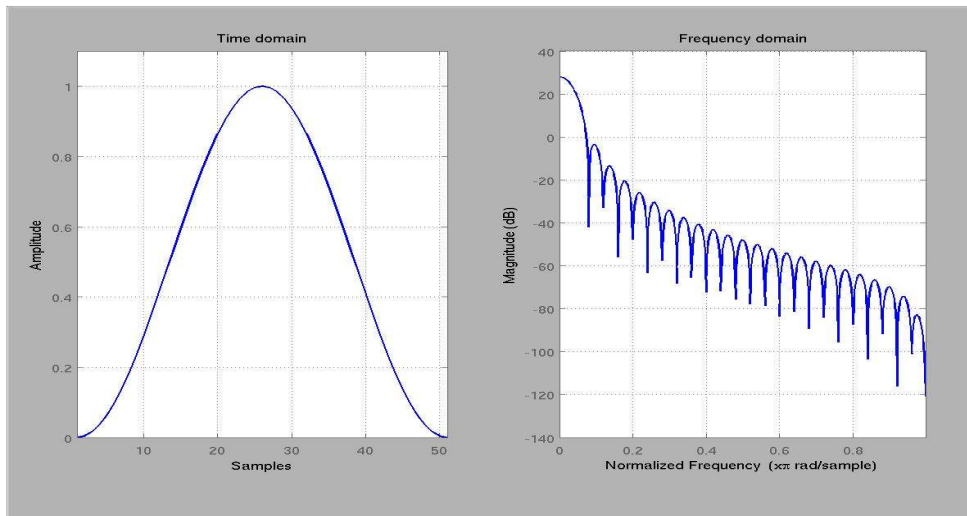


FIGURA 2.4. Ventana Hanning con $M = 50$ y su transformada de Fourier. Fuente Autor.

- Ventana Hamming

$$W[n] = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos(2\pi n/M) & 0 \leq n \leq M, \\ 0 & \text{En el resto} \end{cases} \quad (2.30)$$

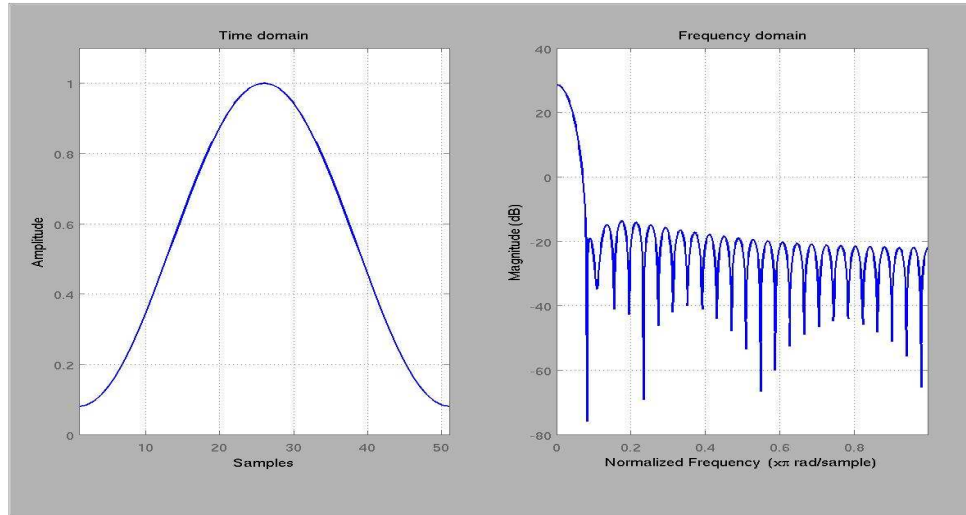


FIGURA 2.5. Ventana Hamming con $M = 50$ y su transformada de Fourier.
Fuente Autor.

- Ventana Blackman

$$W[n] = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos(2\pi n/M) + 0,008 \cos(4\pi n/M) & 0 \leq n \leq M, \\ 0 & \text{En el resto} \end{cases} \quad (2.31)$$

En la tabla 2.1 se muestran algunas propiedades de las ventanas antes mencionadas:

2.1.5.1. Ventana de Kaiser

El compromiso entre anchura del lóbulo principal y área de los lóbulos laterales se puede cuantificar buscando la función de ventana que esté concentrada de forma máxima alrededor de $\omega = 0$ en el dominio de la frecuencia. Kaiser (1996,1974) descubrió que se puede formar una ventana cuasi-óptima utilizando la función de Bessel modificada de primera especie (Oppenheim et al., 2000). La ventana de Kaiser se define como:

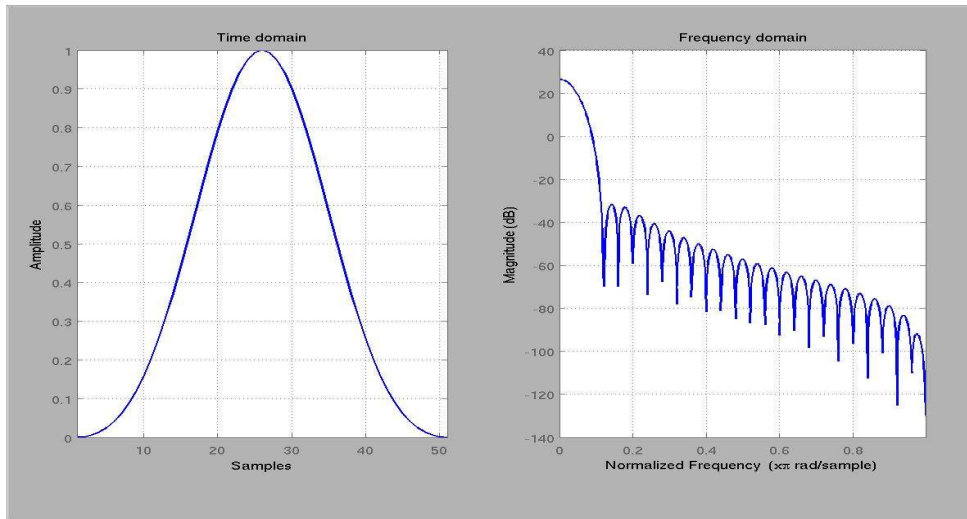


FIGURA 2.6. Ventana Blackman con $M = 50$ y su transformada de Fourier.
Fuente Autor.

Tipo de ventana	Amplitud de pico del lóbulo lateral (relativa)	Anchura aproximada del lóbulo principal	Error de aproximación de pico $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Ventana de Kaiser equivalente β	Anchura de transición de la ventana de Kaiser equivalente
Rectangular	-13	$4\pi/(M + 1)$	-21	0	$1, 81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1,33	$2, 37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3,86	$5, 01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4,86	$6, 27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7,04	$9, 19\pi/M$

TABLA 2.1. Características de las ventanas más usadas. (Oppenheim et al., 2000)

$$W[n] = \begin{cases} \frac{I_0[\beta(1-[(n-\alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)} & 0 \leq n \leq M, \\ 0 & \text{En el resto} \end{cases} \quad (2.32)$$

donde $\alpha = M/2$ e $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k \right]^2$ es la función de Bessel modificada de primer tipo. El parámetro β es la mitad del producto (duración) \times (ancho de banda). La transformada de Fourier es aproximadamente $W(e^{j\omega}) = N \sinh\left(\frac{\phi}{[\phi I_0(\beta)]}\right)$, donde $\phi = [\beta^2 - (N\omega/2)^2]^{1/2}$.

Kaiser obtuvo un par de fórmulas empíricas que relacionan el orden M de la ventana y el parametro β con los criterios de diseño de filtros. Si $\Delta\omega$ representa el ancho de la zona de transición del filtro (no se debe confundir con el ancho del lóbulo principal), y δ la ondulación tolerada en la banda de paso y en la banda de rechazo, el valor empírico de una ventana que cumpla estos requerimientos es:

$$\beta = \begin{cases} 0,1102(A - 8,7) & si & 0A > 50, \\ 0,5842(A - 21)^{0.4} + 0,07886(A - 21) & si & 21 \leq A \leq 50, \\ 0 & si & A < 21 \end{cases} \quad (2.33)$$

donde $A = -20 \log_{10} \delta$. El orden M de la ventana está dado por:

$$M = \frac{A - 8}{2,285\Delta\omega} \quad (2.34)$$

con un error a lo sumo de ± 2 muestras sobre M para un amplio rango de valores de $\Delta\omega$ y A (Oppenheim et al., 2000).

En el uso de la ventana de Kaiser para el análisis frecuencial de señales, conviene adaptar estas ecuaciones en función de A_{sl} que es la relación en dB entre el nivel del lóbulo principal y el nivel del mayor lóbulo lateral. Kaiser y Shafer (1980) encontraron que la relación A_{sl} es relativamente independiente del tamaño de la ventana, y por experimentación numérica relacionaron β con la atenuación deseada para los lóbulos laterales (Oppenheim et al., 2000):

$$\beta = \begin{cases} 0 & si & A_{sl} < 13,26, \\ 0,76609(A_{sl} - 13,26)^{0.4} + 0,09834(A_{sl} - 13,26) & si & 13,26 \leq A_{sl} \leq 60, \\ 0,12438(A_{sl} + 6,3) & si & 60 < A_{sl} < 120 \end{cases} \quad (2.35)$$

Usando los valores de β obtenidos de la anterior ecuación se obtienen ventanas cuyos lóbulos laterales difieren menos del 0,36% del valor deseado para el rango $13,26 < A_{sl} <$

120. Si se toma $\beta = 0$, la ventana de Kaiser coincide con la ventana rectangular y $A_{sl} = 13,26$.

El compromiso entre anchura del lóbulo principal, amplitud relativa de los lóbulos laterales y la longitud de la ventana se pone de manifiesto por la relación aproximada:

$$M \simeq \frac{24\pi(A_{sl} + 12)}{155\Delta_{ml}} \quad (2.36)$$

que fue también obtenida por Kaiser y Schafer (1980), donde Δ_{ml} es el ancho del lóbulo principal. En (Oppenheim et al., 2000) la anterior ecuación viene dada con $L = M + 1$, esto es por que lo designan a partir de la longitud de la ventana, la cual es L .

Como ejemplo de diseño, se desea una ventana con $A_{sl} = 80$ y un ancho de lóbulo central de $\Delta_{ml} = 0,5$. Para este A_{sl} , el $\beta = 10,73$ y por tanto $M = 89,5$, el cual se puede aproximar a 90 y por consiguiente la longitud es $L = 91$, mirar figura 2.7 .

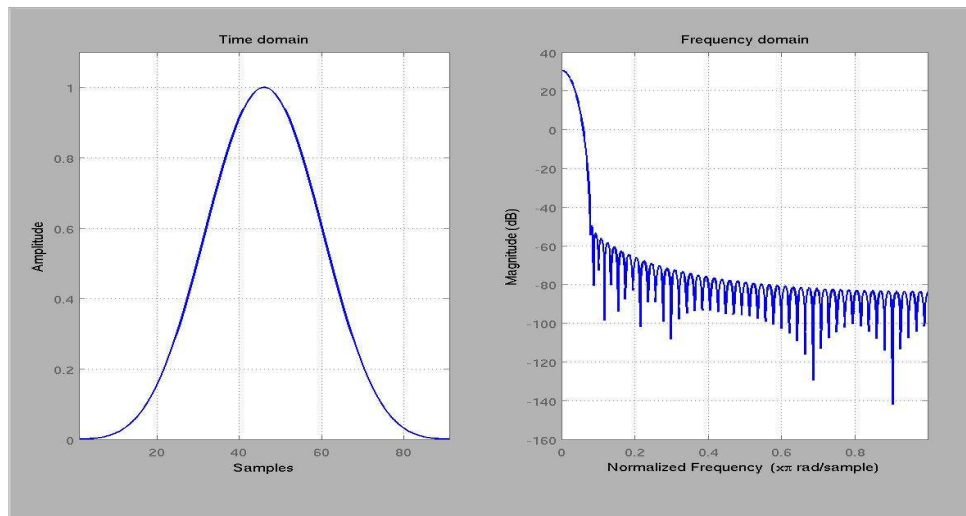


FIGURA 2.7. Ventana Kaiser y su transformada de Fourier, con $M = 90$, $\beta = 10,73$, $\Delta_{ml} = 0,5 = 0,159\pi$ y $A_{sl} = 80$. Fuente Autor.

Como se puede entender en la ecuación 2.36, la longitud es inversamente proporcional al ancho del lóbulo central, y para las otras ventanas ocurre lo mismo, esta característica es el factor más importante en cuanto a la resolución. En la figura 2.8 se usó el mismo β que

en la figura 2.7, osea tiene la misma amplitud de los lóbulos laterales, como se aumentó la longitud de la ventana, el ancho del lóbulo central disminuye, mejorando así la resolución frecuencial, más adelante se va a hablar sobre esto..

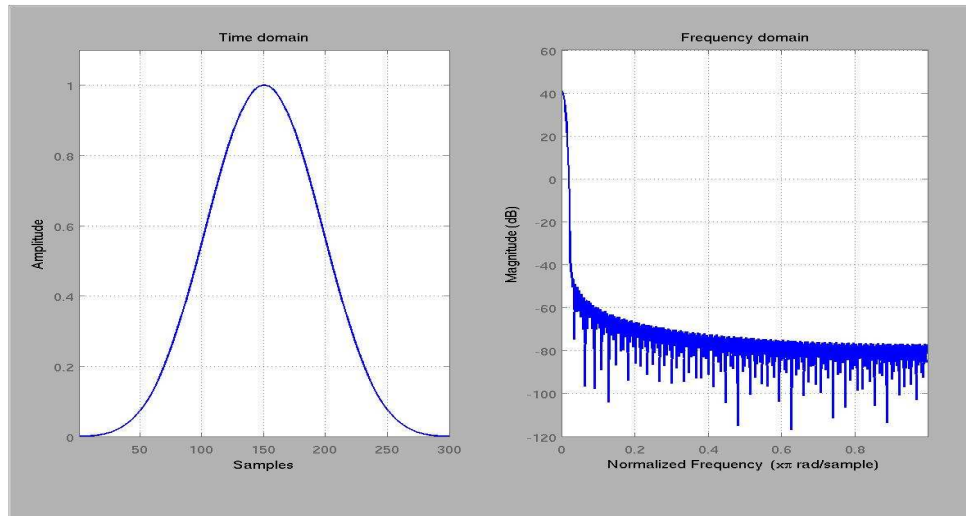


FIGURA 2.8. Ventana Kaiser y su transformada de Fourier, con $M = 299$, $\beta = 10,73$ y $A_{sl} = 80$. Fuente Autor.

Algo que se debe tener en cuenta es que cuando se habla de Δ_{ml} , es la longitud del lóbulo central, de un extremo a otro, no se debe confundir que es del centro al extremo.

2.1.6. Procesamiento de datos sísmicos con la STFT

Como se mencionó en el capítulo uno, una imagen sísmica se compone de señales llamadas trazas sísmicas, y por tanto cada traza se procesa como una señal independiente, el proceso para cada traza se puede visualizar en la figura 2.9. Cada traza es multiplicada por una ventana desplazada en el tiempo, y cada punto b , equivale a un tiempo del plano tiempo-frecuencia, que es el que se observa al lado derecho de la imagen, donde el eje vertical es la frecuencia y el eje horizontal el tiempo.

El proceso se aplica para cada traza que conforma la imagen sísmica, obteniéndose así la matriz de la cual se hablaba en el capítulo uno. La matriz se puede observar en la figura 2.10. Cuando se desea visualizar la imagen sísmica a una frecuencia determinada, se hace un corte en el eje de las frecuencias y así se obtiene esta imagen.

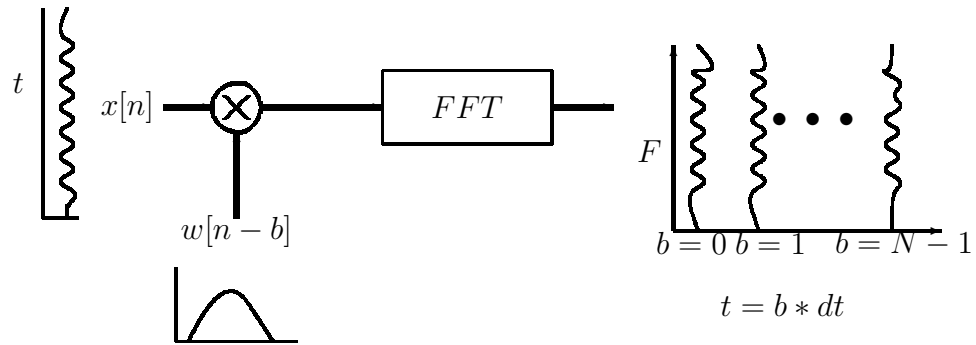


FIGURA 2.9. Diagrama de la STFT, aplicada a una traza sísmica, lo mismo se hace para cada traza que conforma la imagen. Fuente Autor.

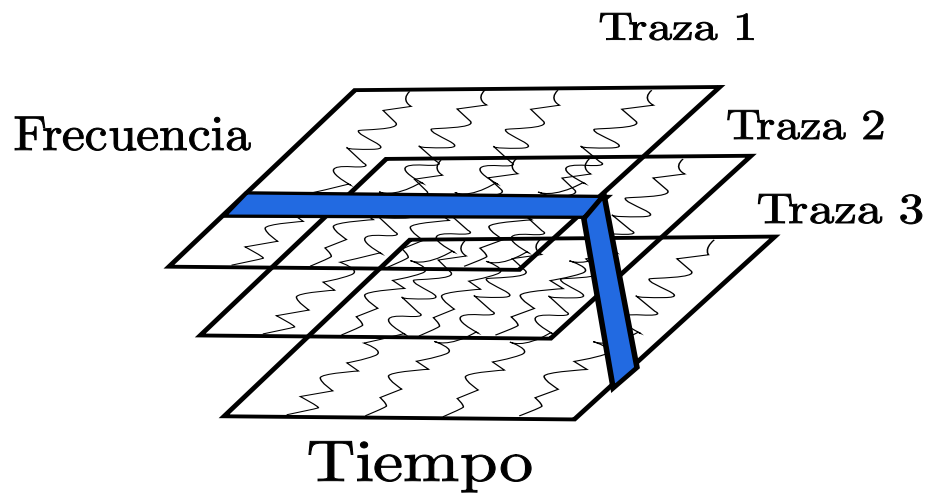


FIGURA 2.10. Matriz de descomposición espectral aplicada a diferentes trazas. Fuente Autor.

2.1.7. Variables que afectan la resolución de las imágenes

La calidad del procesamiento de una imagen sísmica es muy importante, ya que una mala interpretación puede acarrear muchas pérdidas para la industria, por esta razón cuando se procesan datos sísmicos, se debe ser cuidadoso y evitar todo lo que afecte de forma negativa el resultado de este procesamiento. Existen factores que afectan la calidad del procesamiento, y por tal razón se debe conocer muy bien como reducir estos efectos, para obtener así buenos resultados.

2.1.7.1. Efecto de los bordes

Aunque esta transformación es enventanada, ocurre algo particular con el borde final, ya que la ventana sólo reduce el efecto en el borde inicial, pero en el final no hace nada debido al desplazamiento y que la señal se rellenó con ceros, para corregir el efecto de los bordes existen varias metodologías, basandose en el artículo (Meyers, Kelly, & O'Brien, 1992), en donde se comparan cuatro metodologías para reducir el efecto de los bordes, se escogió la que consiste en completar la señal hasta que llegue a cero, así se reduce la distorsión en el borde final debido a que la señal muchas veces queda cortada como se ve en la figura 2.11.

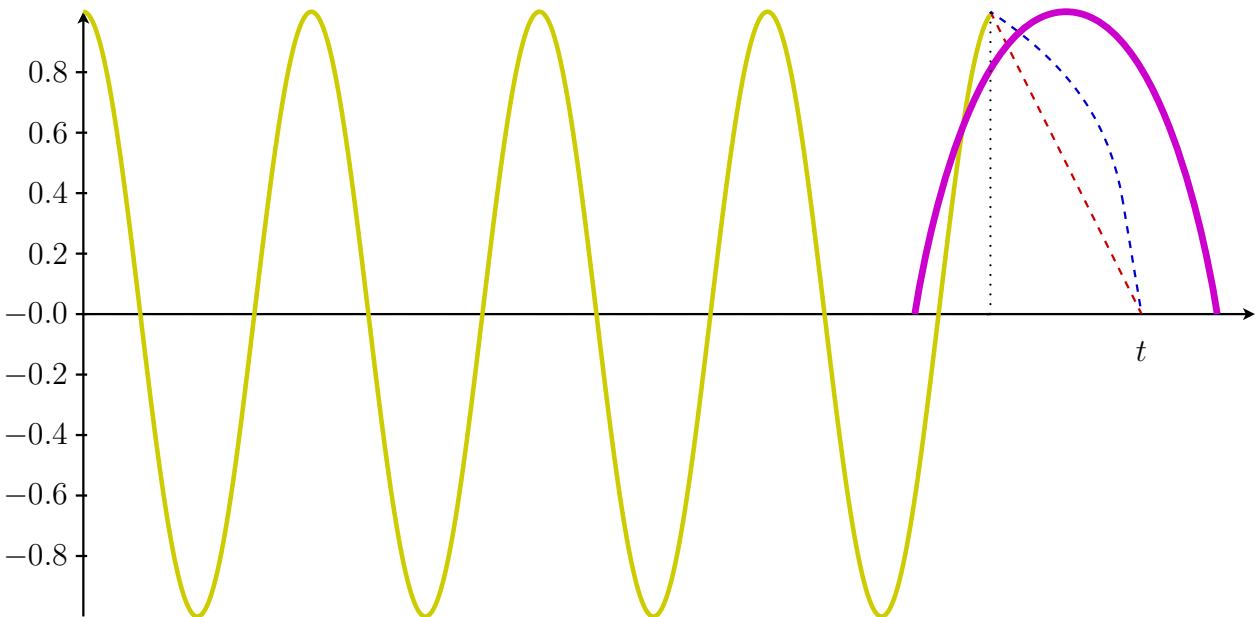


FIGURA 2.11. Distorsión provocada por el borde final de una señal y como se extiende a cero por medio de una línea recta o por medio de una exponencial. Fuente Autor.

Para completar la señal en el algoritmo se puede escoger dos tipos de líneas, una línea recta y una exponencial, donde se puede escoger la longitud y dependiendo de esta se obtiene diferentes resultados. En el artículo citado se menciona este metodo como el mejor para reducir los efectos de los bordes.

Se realizó la stft para una señal compuesta de una senoidal de 60 Hz y se completó ésta con una línea recta y una exponencial de 10 puntos, como se muestra en la figura 2.12

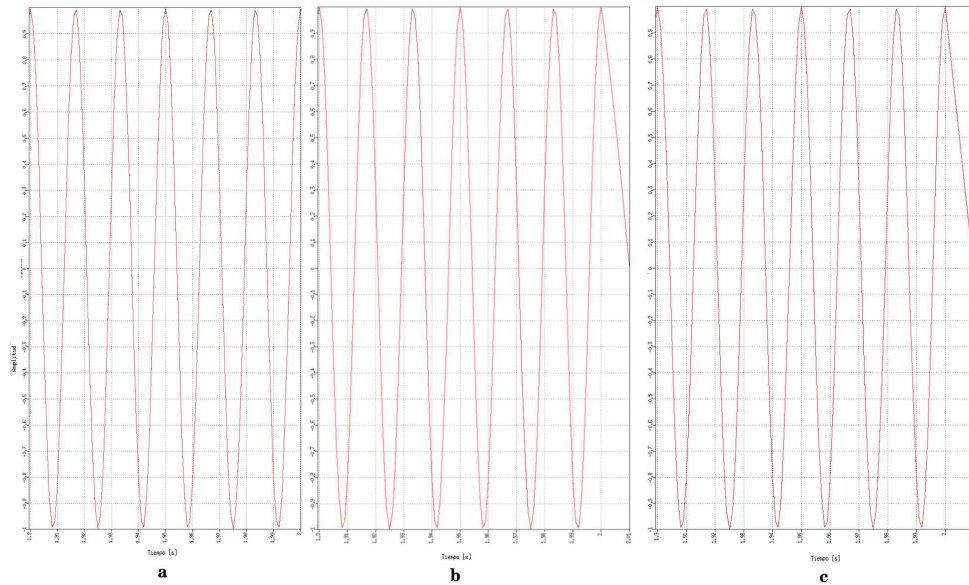


FIGURA 2.12. Señal compuesta por una senoidal a 60 Hz , con $dt = 1\text{ms}$. a) Señal sin extender. b) Señal extendida a cero por una exponencial de 10 puntos. c) Señal extendida a cero por una línea recta. Fuente Autor.

Los resultados obtenidos al aplicar la stft a la anterior señal, se pueden observar en la figura 2.13. Algo interesante que se puede observar, es que a medida que se hace la extensión más grande, se eliminan los efectos en el borde a alta frecuencia, pero se crecen los efectos a bajas frecuencias. Este fenómeno es muy importante por que cuando se tiene una señal con componentes a diferentes frecuencias, estos efectos de los bordes se suman, distorsionando las amplitudes reales.

El uso de esta extensión puede reducir el efecto de borde para frecuencias superiores a la componente analizada, pero lo aumenta para las inferiores. Por tal razón es mejor usar la extensión para una cantidad pequeña de puntos.

2.1.7.2. Resolución en frecuencia vs resolución temporal

Como se mencionó antes, la resolución es un factor muy importante en el procesamiento de datos sísmicos, la resolución temporal debe ser muy buena ya que el

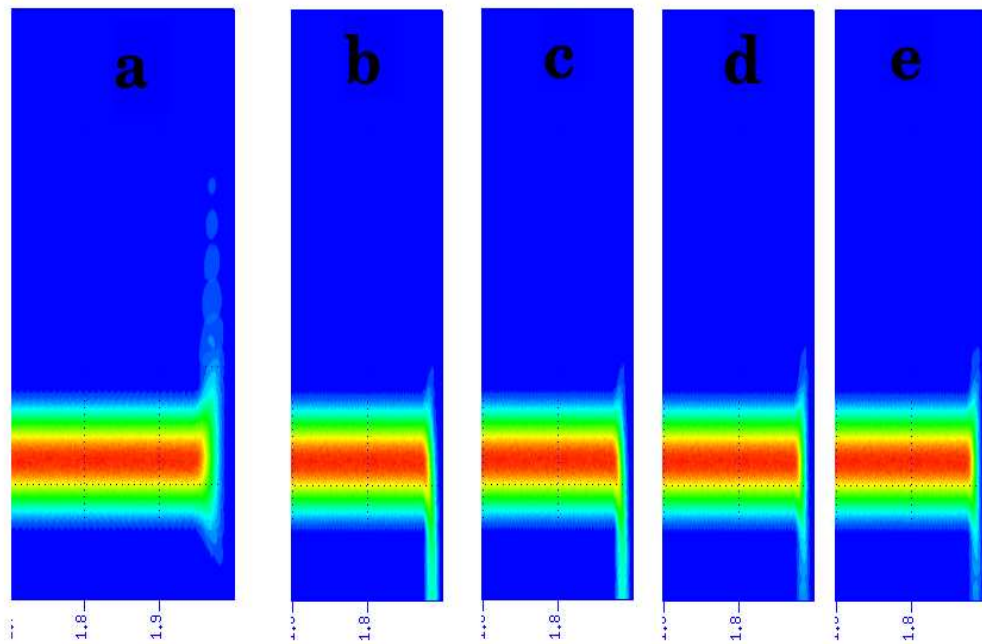


FIGURA 2.13. Señal compuesta por una senoidal a 60 Hz , con $dt = 1 \text{ ms}$. a) Señal sin extender. b) Señal extendida a cero por una exponencial de 10 puntos. c) Señal extendida a cero por una línea recta. d) Señal extendida a cero por una exponencial de 5 puntos. e) Señal extendida a cero por una recta de 5 puntos. Fuente Autor.

tiempo equivale a la profundidad de penetración de las ondas sísmicas, por esta razón una mala ubicación temporal equivale a una ubicación errónea de alguna capa o evento. La resolución frecuencial, equivale a la ubicación de las diferentes componentes espectrales de la señal sísmica, esta resolución también debe ser buena, ya que las técnicas de detección de hidrocarburos, se basan en el estudio de las componentes a ciertas bandas de frecuencias.

En secciones anteriores se mencionó el compromiso que existe entre la duración de la ventana y su ancho de banda, a continuación se va a mostrar como este compromiso afecta la resolución de la imagen.

El ancho del lóbulo principal de la ventana define el ancho de banda, y este es inversamente proporcional a la longitud de la función. A continuación se muestra para ciertos casos como se define esta longitud.

De la tabla 2.1, para la ventana cuadrada $\Delta_{ml} = \frac{4\pi}{M+1}$, donde M corresponde al punto máximo de la ventana. Como el algoritmo desarrollado se diseño para trabajar con frecuencia en hertz, la resolución queda como se ve en la ecuación 2.37.

$$\Delta_{mlf} = \frac{\Delta_{ml}}{2\pi dt} \quad (2.37)$$

Continuando con la ventana rectangular la resolución en hertz queda asi:

$$\Delta_{mlf} = \frac{2}{(M + 1)dt} \quad (2.38)$$

El mismo cambio se puede hacer para todas las ventanas, en la tabla 2.2 se puede observar como queda la expresión para cada ventana.

	Rectangular	Triangular	Hanning	Hamming	Balckman	Kaiser
Δ_{mlf}	$\frac{2}{(M+1)dt}$	$\frac{4}{M*dt}$	$\frac{4}{M*dt}$	$\frac{4}{M*dt}$	$\frac{6}{M*dt}$	$\frac{12(A_{sl}+12)}{155*M*dt}$

TABLA 2.2. Ancho de banda de las ventanas en hertz

Para empezar se va a procesar una señal compuesta de dos senoidales, con dos frecuencias diferentes, la cual se puede observar en la figura 2.14

El algoritmo desarrollado funciona con frecuencias enteras en hertz, por esta razón una buena resolución en frecuencia sería de $< 1Hz$, esto por que como se muestra en la figura 2.15 , no habría solapamiento con las otras frecuencias, por esta razón como primer ejemplo se va a trabajar para un ancho de banda de $1 Hz$.

Para una ventana triangular y un ancho de banda de $1Hz$, por medio de las expresiones de la tabla 2.2, se puede hallar que para esa resolución y un tiempo de muestreo de $1ms$, el valor de M es 4000. para esta resolución se reduce el solapamiento entre lóbulos principales. En la figura 2.16 se puede observar la transformada de Fourier enventanada aplicada a la señal de la figura 2.14

En la parte a) de la imagen 2.16, se puede observar como la resolución en frecuencia es muy buena, pero la ubicación temporal de las componentes es errónea y en el caso de una señal sísmica, esto equivale a una profundidad equivocada. En la imagen la línea

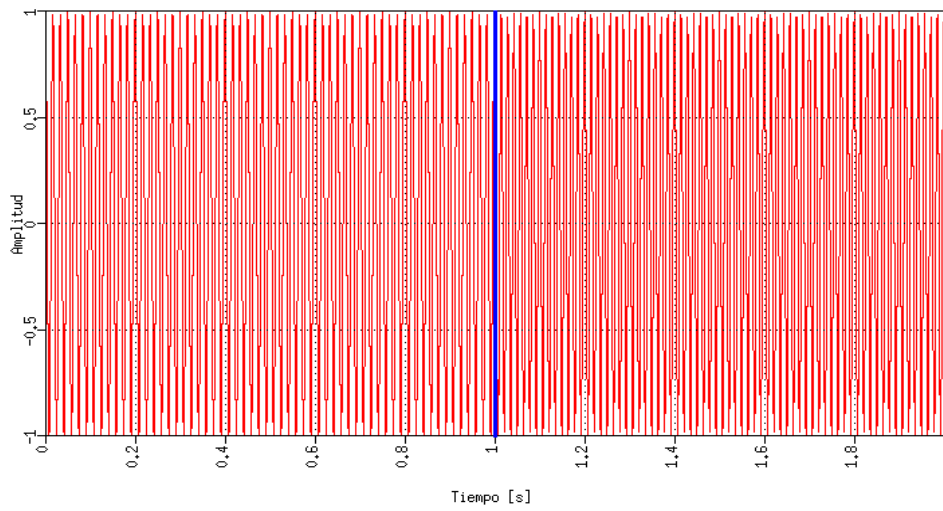


FIGURA 2.14. Señal compuesta por dos señales senoidales de 60 y 70 Hz , el tiempo de muestreo fue de $1ms$, la duración total de la señal es de 2 segundos, la línea azul marca el momento en que entra la señal de 70 Hz , el cual es al primer segundo. Fuente Autor.

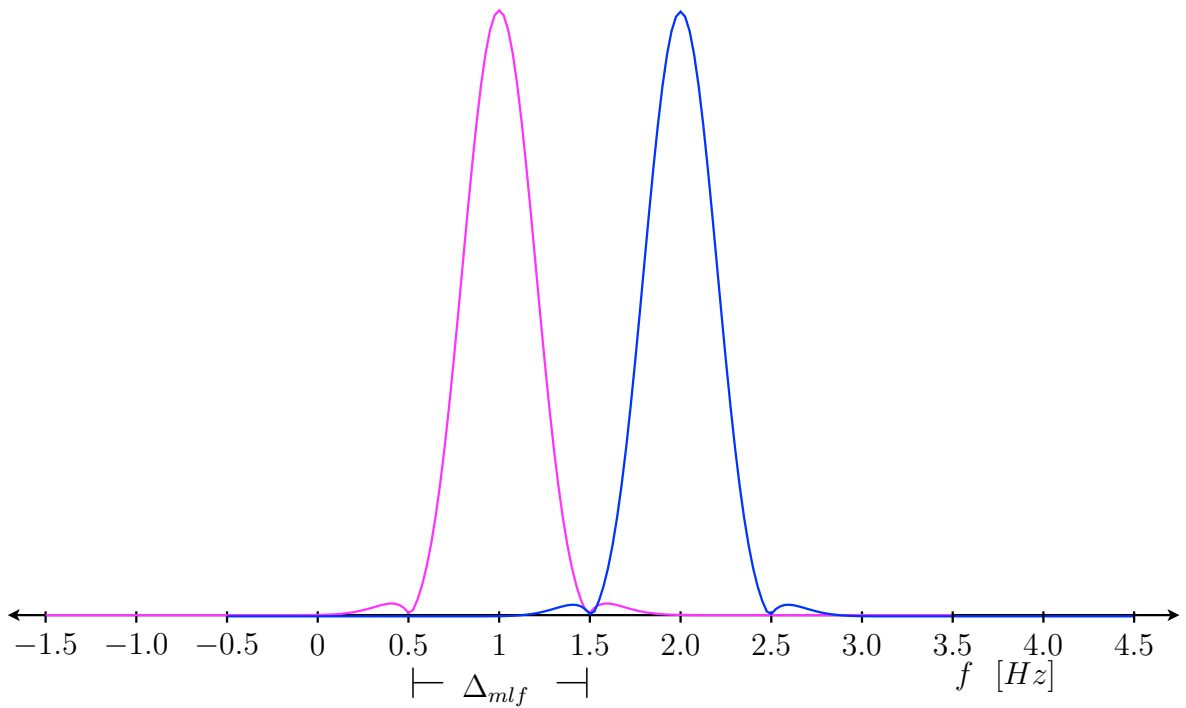


FIGURA 2.15. Visualización del espectro de dos filtros con ancho de banda de $1Hz$, donde la superposición se reduce. Fuente Autor.

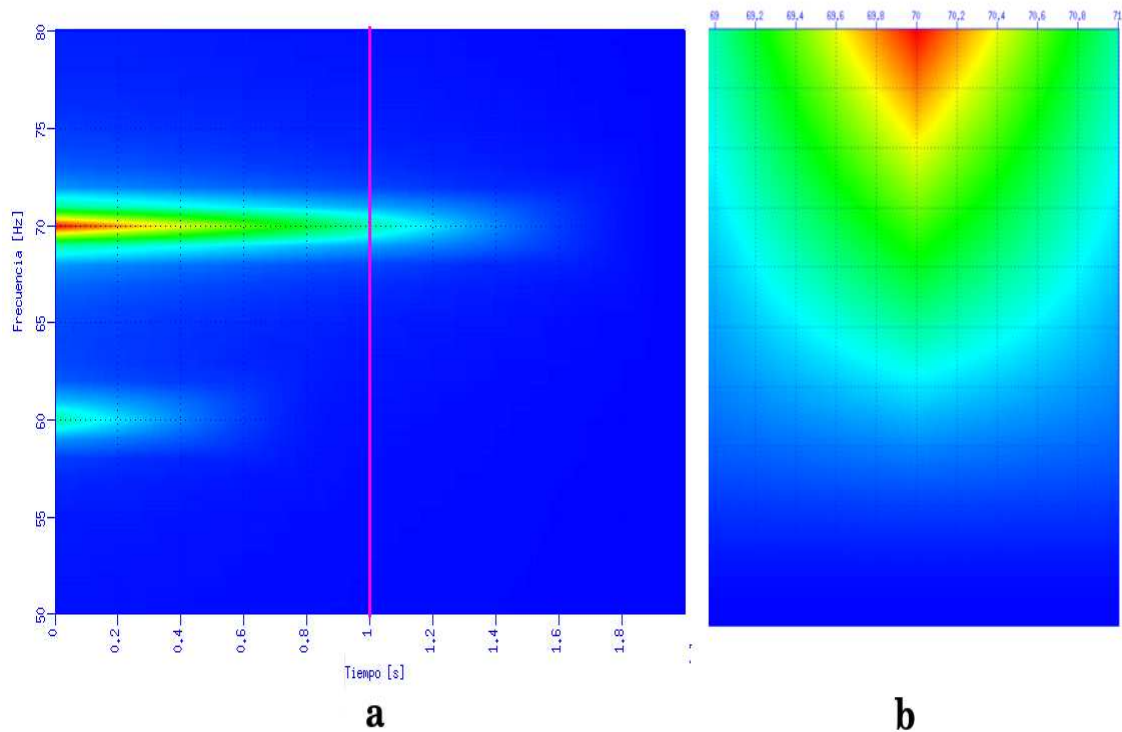


FIGURA 2.16. Transformada de Fourier enventanada aplicada a una señal compuesta por dos senoidales de 60 y 70 Hz con una ventana triangular con $M = 1999$. a) Plano tiempo-frecuencia de la descomposición, la línea fucsia marca el tiempo en el cual debería empezar la componente de 70 Hz . b) Zoom de la descomposición de la componente de 70 Hz . Fuente Autor.

fucsia indica el tiempo hasta donde debería llegar la componente de 60 Hz y donde debería empezar la de 70 Hz . Este fenómeno se da debido a que la ventana es tan larga que abarca muchos datos y por tanto no se difiere en que momento entra la otra componente, además cuando la longitud de la ventana debido al desplazamiento, sobrepasa a el dato final, de ahí en adelante se llena con ceros y por esta razón al final del tiempo todas las componentes frecuenciales son de menor magnitud.

Del anterior ejemplo se puede observar como al querer tener una buena resolución frecuencial, la resolución temporal se hace de muy baja calidad, siguiendo el principio de incertidumbre, también se puede observar que la resolución temporal y frecuencial no varían durante todo el plano tiempo-frecuencia.

En la imagen 2.17 se muestra otra descomposición stft, para la misma señal compuesta de dos senoidales, pero esta vez, se redujo la longitud de la ventana, el valor de M es 60, para lo cual se mejoró la resolución temporal, aunque todavía no es perfecta, ya que la componente de 70 Hz empieza antes de la línea fucsia, que es donde debería empezar. El ancho de banda de la ventana es $\Delta_{mlf} = 66,6$; con este ancho de banda las componentes frecuenciales se traslapan, para este caso sólo habían dos componentes, pero si se analiza una señal con varias componentes, el detallamiento de estas sería muy malo.

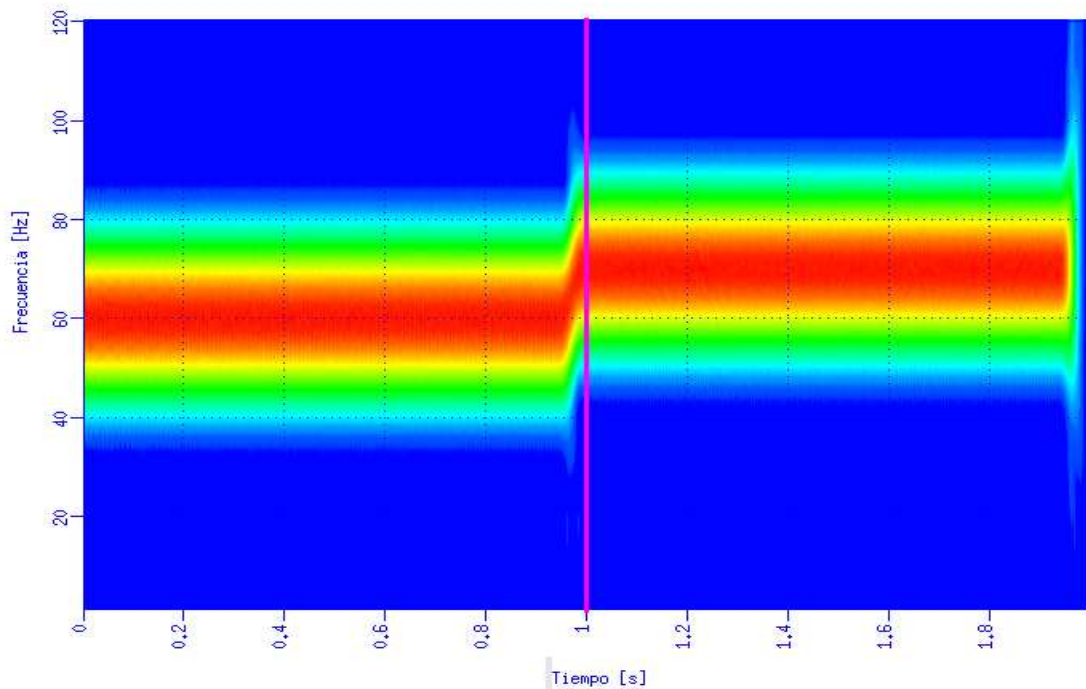


FIGURA 2.17. Transformada de Fourier enventanada aplicada a una señal compuesta por dos senoidales de 60 y 70 Hz con una ventana triangular con $M = 60$. En el plano tiempo-frecuencia de la descomposición, la línea fucsia marca el tiempo en el cual debería empezar la componente de 70 Hz . Fuente Autor.

Con lo anterior se pudo mostrar, que con este método no es posible obtener una buena resolución temporal y frecuencial al mismo tiempo y para el procesamiento de datos sísmicos se necesita la mejor resolución.

2.1.7.3. Amplitud del lóbulo lateral de la ventana y pendiente de caída

La amplitud relativa principal y del lóbulo lateral de la ventana, afecta de manera negativa la resolución de la imagen, debido a que estas fugas se suman con las componentes vecinas, produciendo amplitudes erróneas.

A continuación se va a mostrar, en la figura 2.18, los efectos que puede causar cuando la amplitud relativa es muy pequeña y por ende la amplitud de los lóbulos afectan la resolución de la imagen.

Como se puede observar en la figura en la ventana rectangular las fugas producidas por los lóbulos laterales son muy notables, a pesar que el ancho del lóbulo central es pequeño en comparación con las otras ventanas. Recorriendo la imagen de la parte a) a la parte c), se ve como la amplitud relativa va creciendo y por esto los efectos de los lóbulos laterales disminuyen, para entender esto hay que tener en cuenta el ancho del lóbulo central.

Con la ventana Kaiser ocurre algo muy particular, ya que la resolución temporal depende también de la amplitud relativa del lóbulo lateral, y por esta razón este factor también influye en la resolución temporal.

La pendiente de caída de la ventana, influye en la rapidez con que van a desaparecer los efectos de rizado del filtro, en la tabla 2.3 se muestran las pendientes de las ventanas más comunes.

	Rectangular	Triangular	Hanning	Hamming	Balckman
Pendiente (dB)	-6	-12	-18	-6	-18

TABLA 2.3. Pendiente caída de los lóbulos laterales.

En la figura 2.18, también se muestra, como al tener una pendiente pequeña los efectos de los lóbulos tardan más en desaparecer, por ejemplo la ventana rectangular tiene una pendiente muy pequeña y por esto los efectos del rizado dura más.

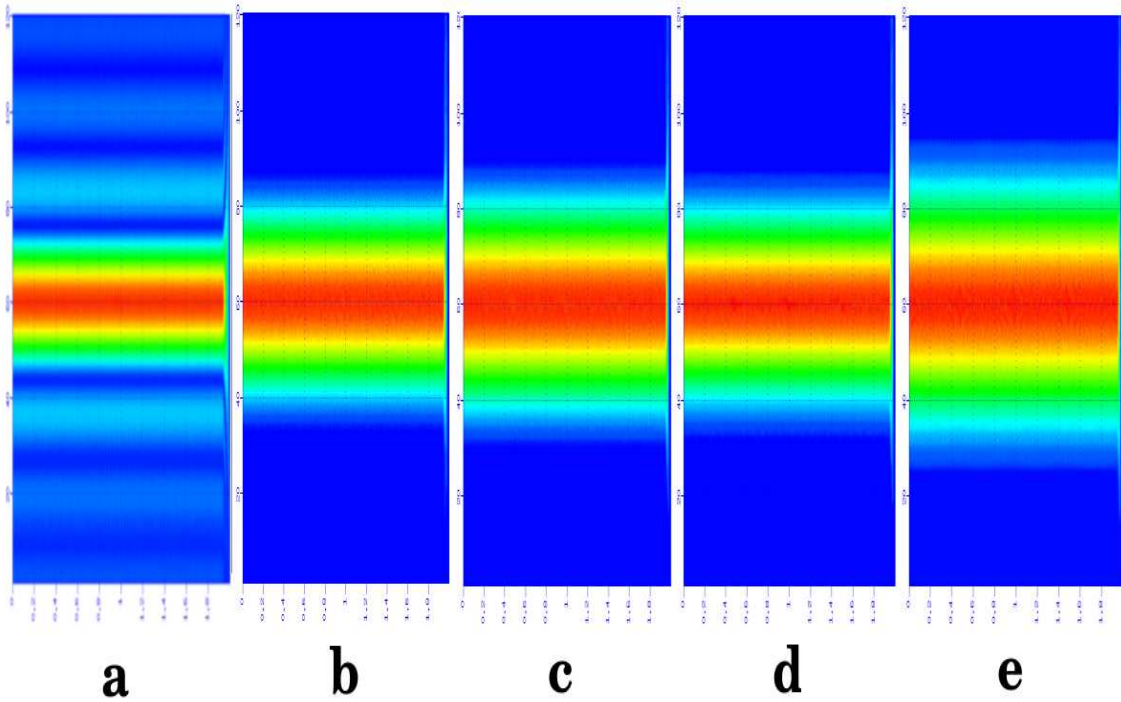


FIGURA 2.18. Transformada de Fourier enventanada aplicada a una señal compuesta por una senoidal de 60 Hz con $M = 60$. a) Con ventana rectangular. b) Ventana triangular. c) Ventana Hanning. d) Ventana Hamming. e) Ventana Blackman. Fuente Autor.

2.2. Transformada wavelet continua (CWT)

En la STFT se introdujo al proceso de ventaneo el cambio de fase para permitir el deslizamiento en el eje de frecuencias, en la cwt se introduce un parámetro de escalamiento para ajustar el ancho de la ventana tiempo-frecuencia y este mismo parámetro permitirá el deslizamiento en el eje de frecuencias.

$$\int f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2.39)$$

donde ψ será asumida como una respuesta asociada a un filtro pasa-banda, $\Psi(0) = 0$, además de valor real y por lo tanto $|\Psi(\omega)|$ es par. Esto trae un nuevo centro y ancho para esta señal.

DEFINICIÓN 2.2. Sea $\psi(t)$ una función de valor real, tal que $\psi(t)$, $|t|^{1/2}\psi(t)$ y $t\psi(t)$ estan en L^2 y $\Psi(0) = 0$. Por tanto el centro de uno de los lados de $\Psi(\omega)$, considerado como una función sobre $[0, \infty)$, es definido por:

$$\omega_+^* := \left(\frac{\int_0^\infty \omega |\Psi(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^\infty |\Psi(\omega)|^2 d\omega} \right) \quad (2.40)$$

Y el radio de uno de los lados de $\Psi(\omega)$ esta dado por:

$$\Delta_\Psi^+ := \left(\frac{\int_0^\infty (\omega - \omega^*) |\Psi(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^\infty |\Psi(\omega)|^2 d\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.41)$$

DEFINICIÓN 2.3. Se llama función wavelet a una función $\psi \in L^1 \cap L^2$ que verifique la llamada condición de admisibilidad:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \frac{C_\psi}{2\pi} < \infty \quad (2.42)$$

Como Ψ es continua, la condición de admisibilidad implica que $\Psi(0) = 0$, lo que es equivalente a:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi = 0. \quad (2.43)$$

Se denotara para cada $a > 0$,

$$\psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t}{a} \right) \quad (2.44)$$

que representa la versión dilatada de ψ según el factor de escala a . Si $0 < a < 1$ quedará comprimida, y si $|a| > 1$ la función queda expandida, mirar figura 2.19.

Para $a, b \in \mathbb{R}$, se define

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \quad (2.45)$$

entonces:

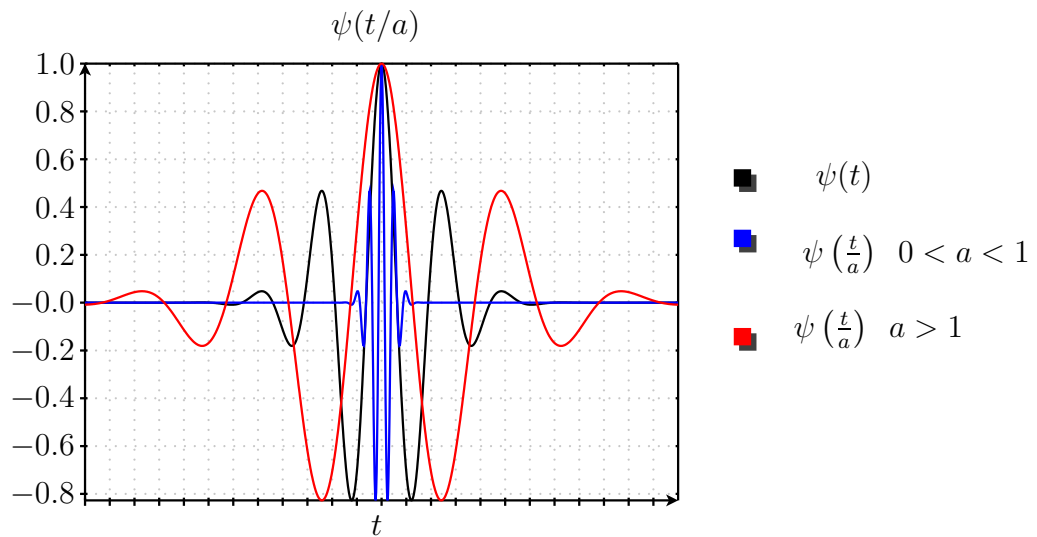


FIGURA 2.19. Ondícula escalada. Fuente Autor.

DEFINICIÓN 2.4. La transformada wavelet de una función f con escala a y posición b es:

$$W_f(a, b) := \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt \quad (2.46)$$

En la CWT la variable a hace más rápida o más lenta a $\psi(t)$ y por tanto su centro y radio varían proporcionalmente. Los límites de la ventana en el tiempo son:

$$[b + at^* - a\Delta_\psi, b + at^* + a\Delta_\psi] \quad (2.47)$$

Para establecer los límites de la ventana en frecuencia se aplica Parseval a la ecuación 2.46

$$W_f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (2.48)$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{-i\omega b} \overline{\Psi(a\omega)} d\omega \quad (2.49)$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{-i\omega b} \overline{\Psi(a\omega)} d\omega \right) \quad (2.50)$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{-i\omega b} \eta \left(a \left(\omega - \frac{\omega_+^*}{a} \right) \right) d\omega \right) \quad (2.51)$$

Para toda $f \in L_R^2$, donde se hace uso de la notación $\eta(\omega) := \Psi(\omega + \omega_+^*)$.

La CWT es una transformada tiempo-escala, pero puede ser llevada a tiempo frecuencia mediante una constante que depende de la wavelet usada:

$$f = \frac{f_c}{a} \quad (2.52)$$

donde f_c es la frecuencia central de la wavelet usada.

La CWT, localiza una señal $f(t)$ en el dominio del tiempo y también localiza simultáneamente su espectro $\widehat{f}(\omega)$ en el dominio de la frecuencia, así:

$$W_\psi(\xi, b) = \frac{\sqrt{a}}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty \widehat{f}(\omega) e^{-i\omega b} \eta \left(a \left(\omega - \frac{\omega_+^*}{f_c} \xi \right) \right) d\omega \right) \quad (2.53)$$

El término $\eta \left(a \left(\omega - \frac{\omega_+^*}{f_c} \xi \right) \right)$ es la función ventana en frecuencia y nuevamente la variable a determina los accidentes de velocidad de esta. Lo cual conlleva a que la ventana en frecuencia sea:

$$\left[\frac{\omega_+^*}{f_c} \xi - \frac{1}{a} \Delta_\Psi^+, \frac{\omega_+^*}{f_c} \xi + \frac{1}{a} \Delta_\Psi^+ \right] = \left[\frac{1}{a} (\omega_+^* - \Delta_\Psi^+), \frac{1}{a} (\omega_+^* + \Delta_\Psi^+) \right] \quad (2.54)$$

De 2.54 y 2.47 es posible determinar los anchos de las ventanas de tiempo y frecuencia, los cuales son $2a\Delta_\psi$ y $\frac{2}{a}\Delta_\Psi^+$ respectivamente. Donde para altas frecuencias (valores altos de ξ o valores bajos de escalamiento a), el ancho de la ventana en el tiempo ($2a\Delta_\psi$) disminuye

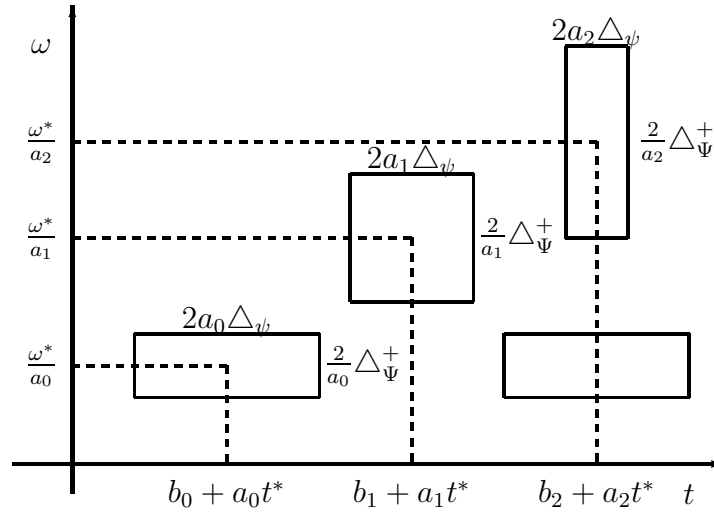


FIGURA 2.20. Ventana Tiempo-Frecuencia para la transformada Wavelet. Fuente [Mallat, 1989].

y el ancho de la ventana en frecuencia ($\frac{2}{a} \Delta_{\Psi}^+$) aumenta. Si las dimensiones de la ventana tiempo-frecuencia se alteran, el área de la ventana permanece constante y determinada por:

$$(2a \Delta_{\psi} \left(\frac{2}{a} \Delta_{\Psi}^+ \right)) = 4 \Delta_{\psi} \Delta_{\Psi}^+ \quad (2.55)$$

La CWT soluciona el inconveniente de la STFT, ya que a altas frecuencias la ventana tendrá corta duración, lo que permite tener buena resolución en tiempo. A bajas frecuencias, la ventana tendrá un ancho considerable para el estudio de las mismas y por tanto, generará buena resolución en frecuencia. Estas dos características son deseadas en el análisis de señales no estacionarias.

La transformada inversa esta definida así:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi}(a, b) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \frac{da}{a^2} \frac{dt}{\sqrt{a}} \quad (2.56)$$

La transformada wavelet discretizada se define así:

$$W(a, n) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n'=0}^{N-1} x[n'] \bar{\psi} \left(\frac{(n' - n)dt}{a} \right) \quad n = 0, \dots, N - 1 \quad (2.57)$$

donde $\bar{\psi}$ es el conjugado de la función wavelet.

2.2.1. La CWT vista como una convolución

Partiendo de la definición de transformada wavelet continua en la ecuación 2.46, y recordando la definición de convolución¹, se puede ver la transformada wavelet continua como una convolución.

Partiendo de la definición de transformada wavelet continua, se puede redefinir de la siguiente forma:

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{\psi} \left(- \left(\frac{b-t}{a} \right) \right) dt \quad (2.58)$$

y de esta forma la transformada se puede ver como una convolución

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(f(t) * \bar{\psi} \left(- \frac{t}{a} \right) \right) \quad (2.59)$$

A partir de esta relación se desarrolló uno de los algoritmos de la CWT, del cual se hablar en una sección próxima.

2.2.2. Wavelets reales y complejas

Para el desarrollo de este trabajo se usaron dos tipos de wavelets, las reales y las complejas, las cuales son de soporte infinito. A continuación se va a mencionar las principales características de estas ondículas.

2.2.2.1. Wavelets reales

Este tipo de ondículas, tiene como principal característica, que sólo poseen parte real, por tanto al realizar la CWT, sólo se obtiene parte real, de esta transformación.

Las wavelets reales usadas para el desarrollo de este trabajo fueron:

¹La convolución continua se define como $x1 * x2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x1(\tau)x2(t - \tau)d\tau$ y la discreta $x1[n] * x2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x1[m]x2[n - m]$

- Wavelet Mexican Hat: En la figura 2.21 se puede detallar la forma esta wavelet, la cual como se mencionó antes sólo tiene parte real. Algunas de las características de esta wavelet son:

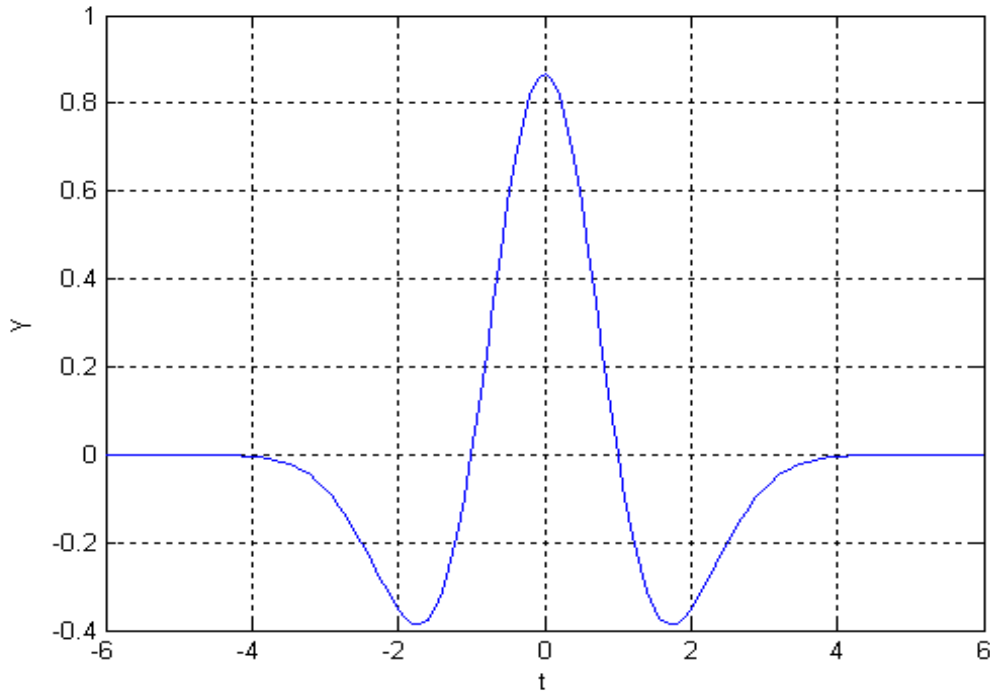


FIGURA 2.21. Ondícula Mexican Hat. Fuente Autor.

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}(\pi)^{1/4}} e^{-\frac{t^2}{2}} (1 - t^2) \quad (2.60)$$

- (i) Ortogonal: No
- (ii) Biortogonal: No
- (iii) Soporte compacto: No
- (iv) DWT: No
- (v) CWT: Si
- (vi) Soporte Efectivo: [-5 5]
- (vii) Simetria: Si

La magnitud del espectro de esta ondícula se puede observar en la figura 2.22 , es par y su frecuencia central es $0,225Hz$.

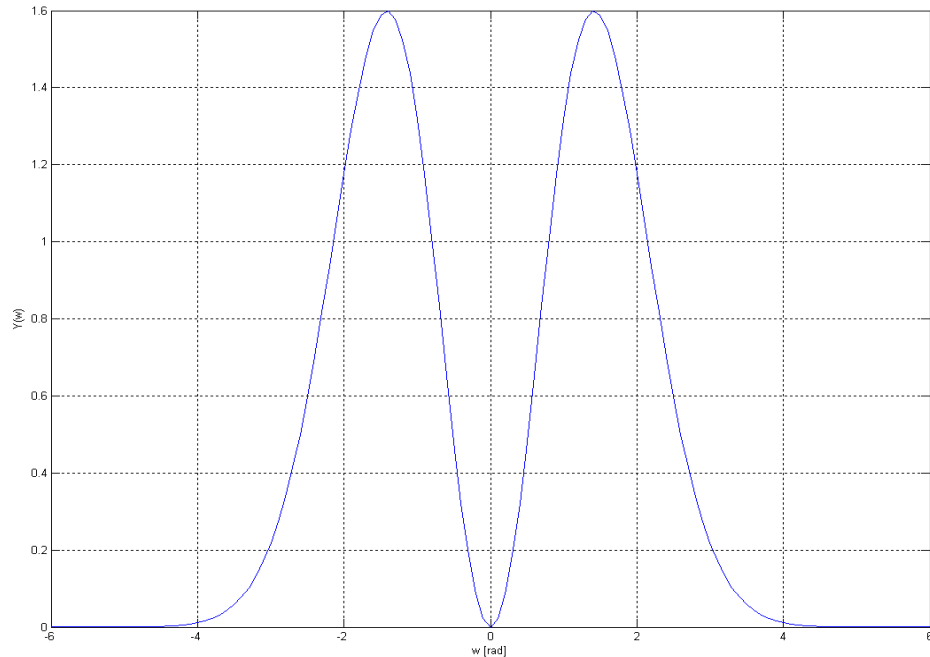


FIGURA 2.22. Magnitud espectral ondícula Mexican Hat. Fuente Autor.

- Wavelet Morlet:

Esta ondícula se diseñó para exploración sísmica por Jean Morlet, quien alrededor de 1975 hizo grandes avances en este campo. El uso de esta ondícula en la exploración sísmica data desde esta época. También se relaciona la forma de esta ondícula con la forma de una fuente explosiva usada para la adquisición sísmica y el comportamiento de los eventos en las trazas sísmicas. Por esta razón se escogió esta ondícula, ya que se va a trabajar con datos sísmicos.

En la figura 2.23 se puede detallar la forma esta wavelet, la cual como se mencionó antes sólo tiene parte real. Algunas de las características de esta wavelet son:

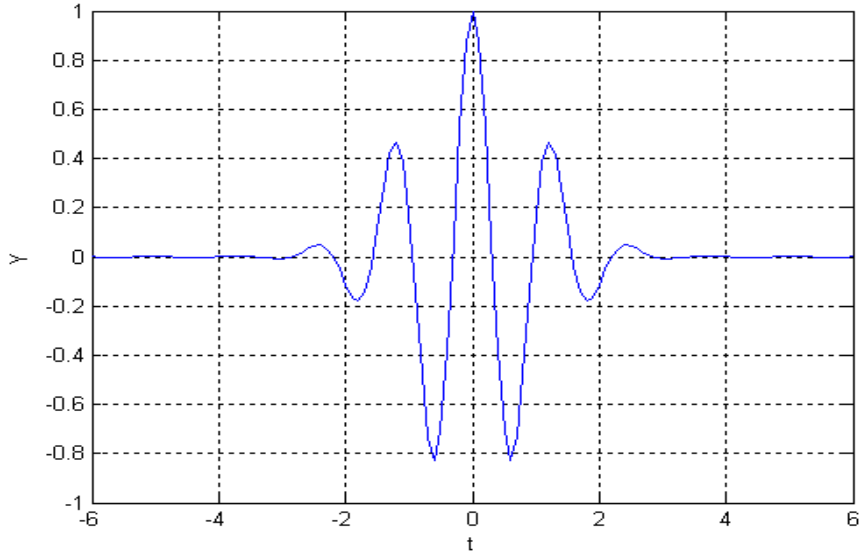


FIGURA 2.23. Ondícula Morlet. Fuente Autor.

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5t) \quad (2.61)$$

- (i) Ortogonal: No
- (ii) Biortogonal: No
- (iii) Soporte compacto: No
- (iv) DWT: No
- (v) CWT: Si
- (vi) Soporte Efectivo: [-4 4]
- (vii) Simetria: Si

La magnitud del espectro de esta ondícula se puede observar en la figura 2.24, es par y su frecuencia central es $0,8125Hz$.

2.2.2.2. Wavelet compleja

Las wavelets complejas tienen la particularidad que tienen parte real y parte imaginaria, son usadas en la CWT, para obtener magnitud y fase de la transformación. Entre las ondículas complejas más usadas está la Morlet compleja, y con esta fue con la que se

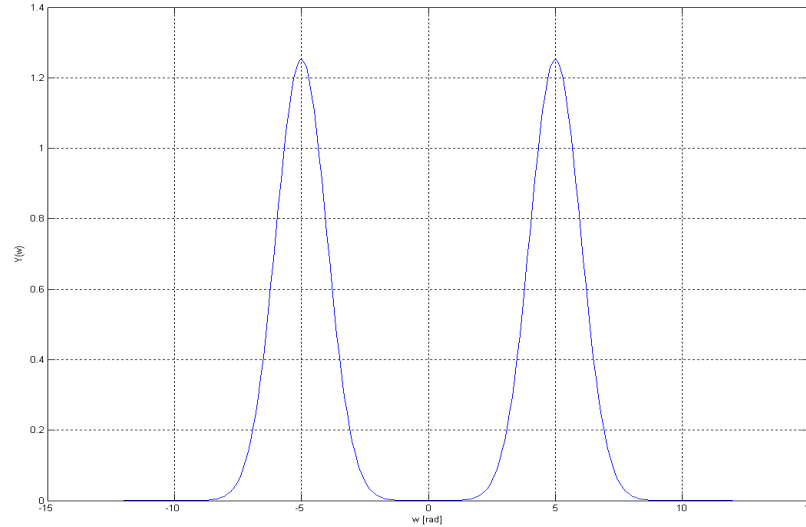


FIGURA 2.24. Magnitud espectral ondícula Morlet. Fuente Autor.

proceso en este trabajo, esto debido a que posee una frecuencia central variable y debido a este parametro se puede ajustar características de la transformación. A continuación se va a mostrar algunas características de esta ondícula.

- (i) Ortogonal: No
- (ii) Biortogonal: No
- (iii) Soporte compacto: No
- (iv) DWT: No
- (v) CWT: Si
- (vi) Simetría par: parte real
- (vii) Simetría impar: parte imaginaria

Una característica muy importante de las wavelets analíticas es que la magnitud de su espectro sólo tiene parte positiva y esta característica se cumple aproximadamente para la morlet compleja (Mallat, 1998), como se explicará más adelante.

En la literatura se pueden encontrar dos tipos de Morlet compleja, una con ancho de banda fijo y la otra con ancho de banda variable. La ecuación 2.62 es la expresión de la

Morlet con ancho fijo, y la ecuación 2.63 expresa la Morlet con ancho de banda variable. En ambos casos la frecuencia central de la wavelet es variable.

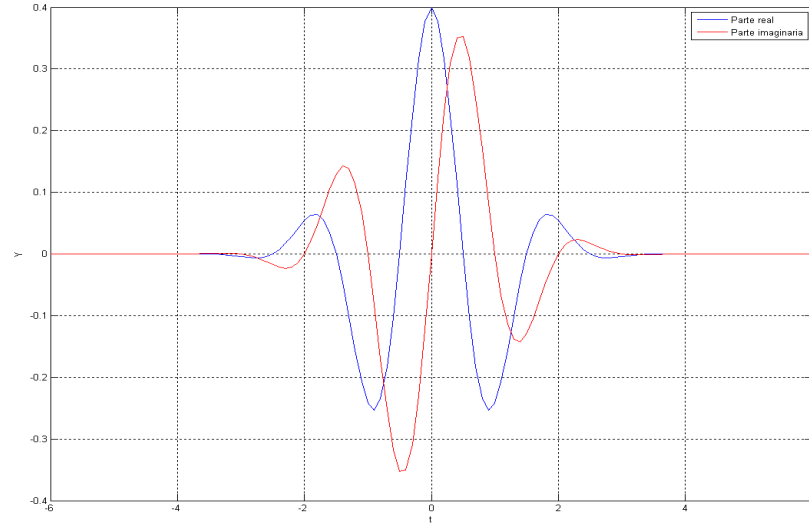


FIGURA 2.25. Morlet compleja con $F_c = 0,5$ y $F_b = 2$, la figura azul es la parte real y la figura roja la parte imaginaria. Fuente Autor.

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{i*2*\pi*F_c*t} e^{-(t^2)/2} \quad (2.62)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi F_b}} e^{i*2*\pi*F_c*t} e^{-(t^2)/F_b} \quad (2.63)$$

Donde F_c es la frecuencia central de la wavelet en Hz y F_b es la variable que controla el ancho de banda. En la figura 2.26 se visualiza la relación entre la variable F_b y el ancho de banda efectivo.

El espectro de esta wavelet está dado por la expresión 2.64.

$$\Psi(\omega) = \sqrt{\frac{F_b}{2}} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2 F_b}{4}} \quad (2.64)$$

Si $F_c \geq \sqrt{\frac{2}{F_b}}$, se puede obtener que $\Psi(\omega) \leq 2,7 \times 10^{-9}$ para $\omega \leq 0$, que es aproximadamente cero, lo cual hace que aproximadamente cumpla la condición 2.42 y

coincida con la característica de las wavelets complejas. Si $F_c \geq \frac{5}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{F_b}}$ entonces $\Psi(\omega) \leq 10^{-5}$, para $\omega \leq 0$, de esta forma, entre más grande sea la diferencia entre la F_c y $\sqrt{\frac{2}{F_b}}$, más se aproxima a cero para frecuencias negativas.

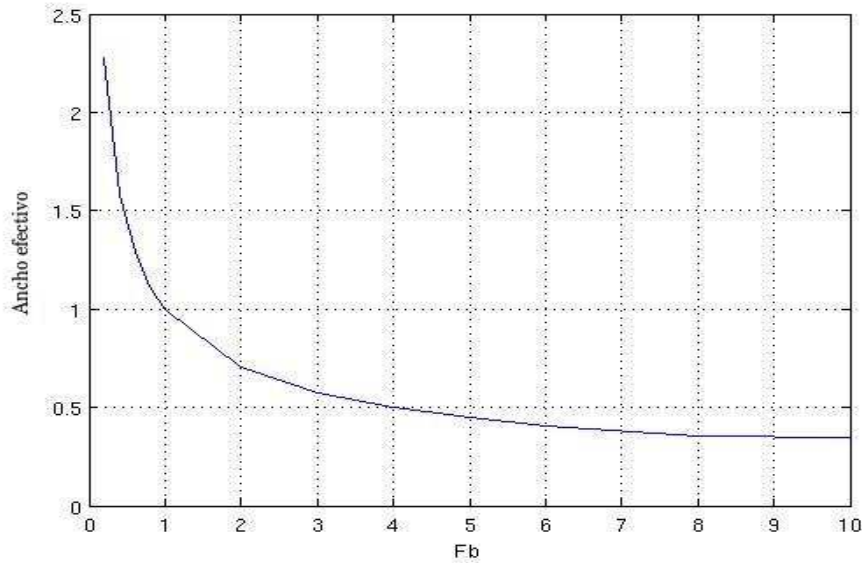


FIGURA 2.26. Relación variable F_b con el ancho de banda efectivo para $F_c = 1$. Fuente Autor.

2.2.3. Resolución frecuencial versus resolución temporal

En la figura 2.27 se puede observar una descomposición hecha para una señal compuesta por una senoidal de 60 Hz , se puede observar que debido a que la frecuencia central de la wavelet es fija y muy pequeña, la resolución frecuencial cuando se llega a 60 Hz , es muy mala y por esto se ve tan ancha la componente. Para la Morlet se tiene mejor resolución que para la Mexican Hat. Además en los dos casos existe poco detallamiento. Para la ondícula Mexican Hat se obtuvo un ancho de banda efectivo inicial $\Delta_\omega = 0,4946$ y duración efectiva de $\Delta_t = 1,080$, y para la Morlet real $\Delta_\omega = \Delta_t = 0,7071$

En la figura 2.28 se observa como varia el ancho de banda efectivo y la duración efectiva con la frecuencia en Hz , para cada ondícula real, en estas figuras se puede detallar como al aumentar la frecuencia, el ancho de banda aumenta y la duración efectiva reduce, como se pudo observar en la figura 2.20, ya que $a = f_{central}/f$, entonces la

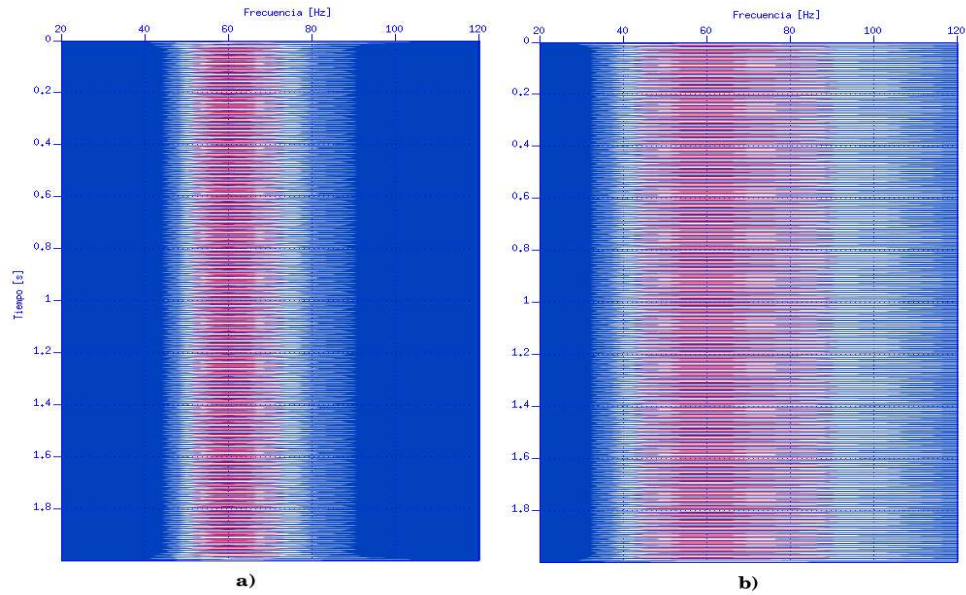


FIGURA 2.27. CWT se una señal compuesta por un coseno de 60 Hz, con ondículas reales. a)Ondícula Morlet. b)Ondícula Mexican Hat. Fuente Autor.

duración efectiva queda $\Delta_t(f) = \Delta_t * f_{central}/f$ y el ancho de banda efectivo $\Delta_f(f) = f/\Delta_f * f_{central}$

En la figura 2.29 se puede observar la CWT, aplicada a la misma señal mencionada antes, compuesta por una senoidal de 60 Hz, en esta descomposición se puede observar que al poder mover la frecuencia central se mejora la resolución en frecuencia, pero al mismo tiempo empeora la resolución temporal.

En la figura 2.30 se puede observar como varía el ancho de banda y la duración efectiva de la wavelet Morlet compleja para una frecuencia central $f_{central} = 1 Hz$. Como se observa, sucede lo mismo que en las wavelets reales, el ancho de banda es proporcional a la frecuencia de análisis, y la duración efectiva es inversamente proporcional a esta. Algo que se observó para cualquier frecuencia central, fue que siempre inicia con un ancho de banda y duración eficaz de $\Delta_\omega = \Delta_t = 0,707107$, esto sucede claro esta para la Morlet Compleja con ancho de banda fijo, ya que la principal característica de la Morlet compleja con ancho variable es que se pueda definir este ancho de inicio.

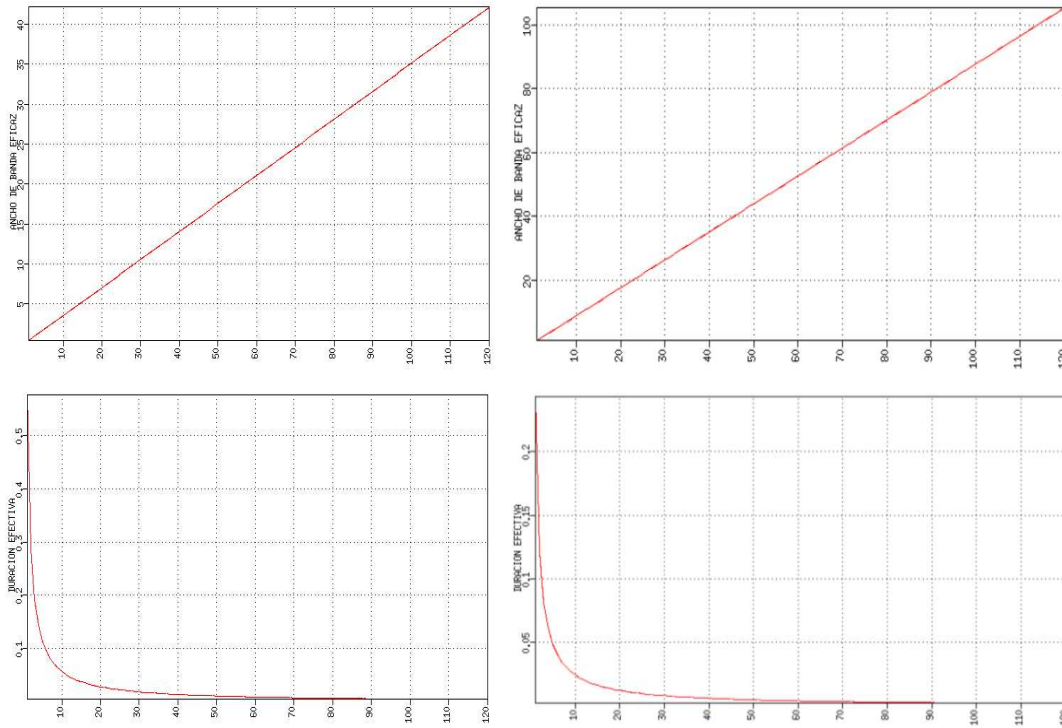


FIGURA 2.28. Variación del ancho de banda efectivo y la duración efectiva. a) Ondícula Morlet real. b) Ondícula Mexican Hat. Fuente Autor.

2.2.4. Transformada wavelet continua de trazas sísmicas

Al igual que la transformada de Fourier enventanada, la cwt se aplicó a trazas sísmicas, siguiendo la secuencia mostrada en la figura 2.31. Cada traza genera una imagen cuyos ejes son el tiempo y la escala, pero se puede pasar del plano escala-tiempo al plano frecuencia-tiempo por medio de la relación antes mencionada, la cual depende de la frecuencia central de la wavelet usada.

A partir de la descomposición hecha a cada traza, se genera una matriz como la mostrada en la figura 2.32, si se desea observar la imagen sísmica a una frecuencia dada se hace un corte a esta. Teniendo en cuenta la relación entre la escala y la frecuencia.

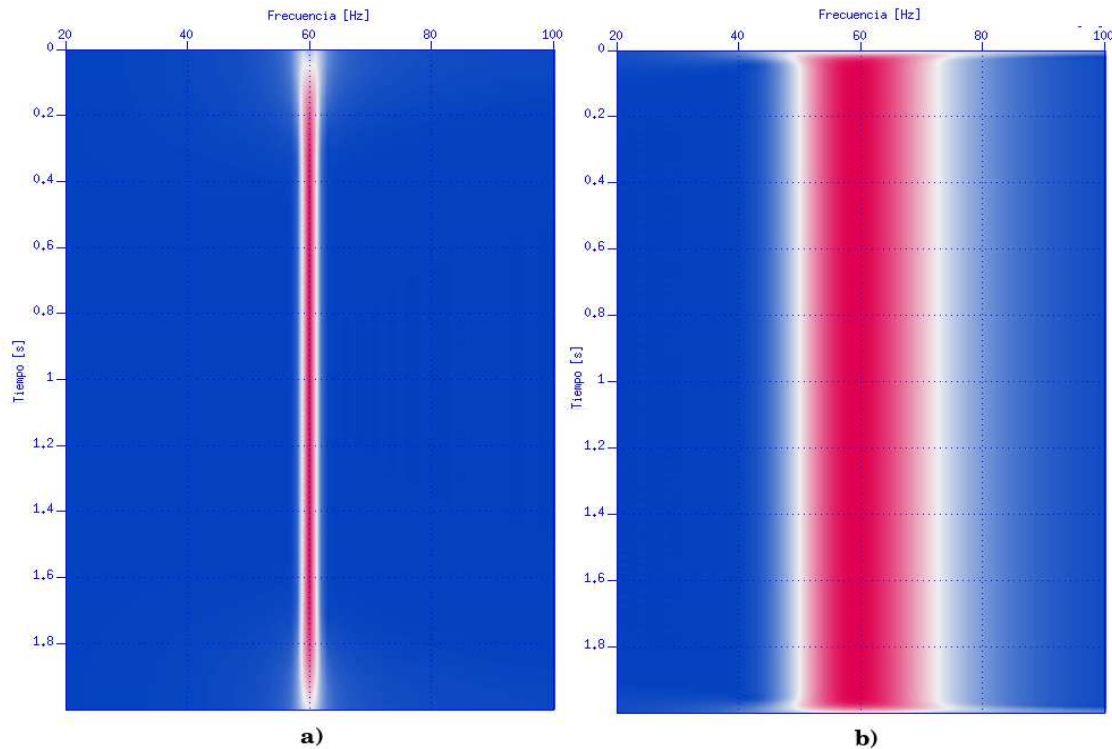


FIGURA 2.29. CWT de una señal compuesta por un coseno de 60 Hz , con ondícula Morlet compleja con ancho de banda fijo. a) Para $f_{central} = 10 \text{ Hz}$. b) Para $f_{central} = 1 \text{ Hz}$. Fuente Autor.

2.2.5. Factores que afectan el resultado de la descomposición espectral

2.2.5.1. Efecto de bordes

Al igual que con la STFT, la señales que se procesan son de longitud finita y por tal razón fueron rellena con ceros para realizar la convolución, cuando los extremos de la señal son diferentes de cero, se introducen discontinuidades, las cuales producen efectos no deseados en la imagen final. Para reducir estos efectos se han diseñado diversos métodos, basandose en el artículo (Meyers et al., 1992), se tomaron tres de estos métodos y se aplicaron en los algoritmos.

Lo primero que se hizo, fue dejar los datos de entrada tal y como estaban, sólo se le agregaron ceros, como forma de extensión para la convolución líneal, de eso más adelante se va a tratar, el proceso fue hecho para una señal compuesta por una senoidal de 60 Hz y $dt = 1 \text{ ms}$, la cual empieza y termina en valores difernetes de cero, como se puede

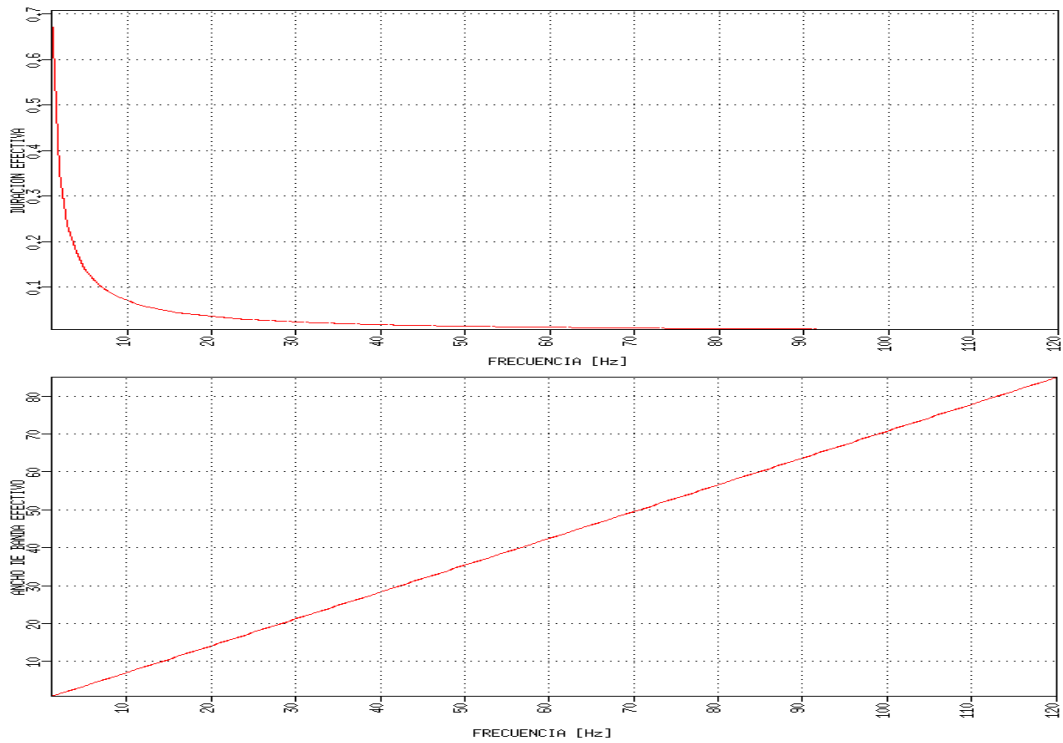


FIGURA 2.30. Variación ancho de banda y duración efectiva para la Morlet Compleja con frecuencia central $f_{central} = 1 \text{ Hz}$. Fuente Autor.

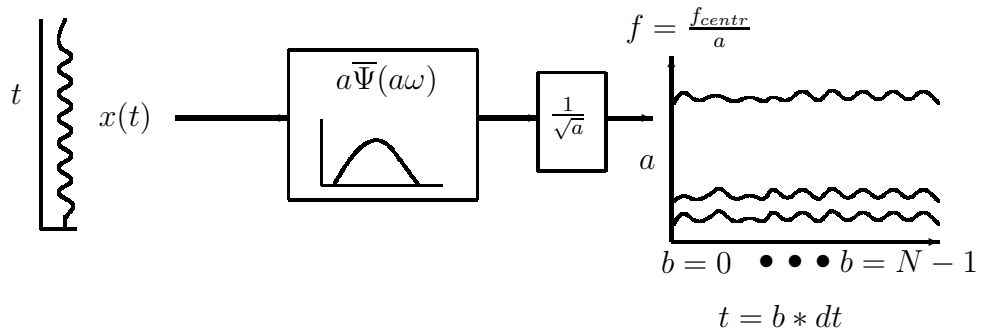


FIGURA 2.31. Diagrama de la CWT aplicado a una traza sísmica, el mismo procedimiento se hace para todas las trazas que conforman la imagen. Fuente Autor.

observar en la figura 2.33. En la figura 2.34 se puede observar los efectos causados por los bordes al inicio y al final, los cuales producen amplitudes donde no deberían existir, y estas amplitudes se alargan a altas y bajas frecuencias.

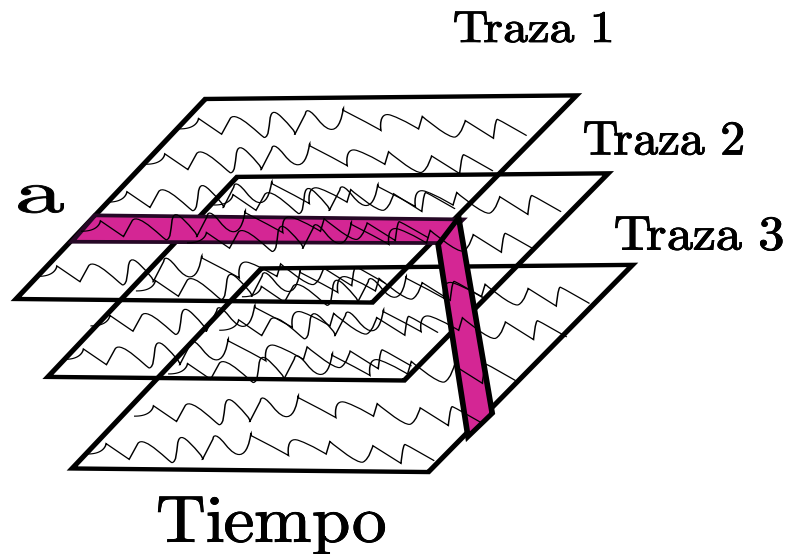


FIGURA 2.32. Matriz de descomposición espectral aplicada a diferentes trazas.
Fuente Autor.

Un método aplicado para reducir estos efectos es multiplicar la señal de entrada antes de procesarla por una ventana, la cual disminuye los bordes a cero, por ejemplo a la señal de la figura 2.33, se le aplicó la ventana y se obtuvo la señal mostrada en la figura 2.35. A esta señal se le aplicó la CWT y se obtuvo la figura 2.36, donde se puede detallar que debido a la ventana, muchas amplitudes se hicieron cero o se redujeron de manera considerable, por esta razón este método no es apropiado, ya que se está perdiendo parte de la información.

Un segundo método usado, es el que en el artículo (Meyers et al., 1992) es llamado “buffering”, el cual consiste en extender la señal a cero, tanto al inicio como al final, como se muestra en la figura 2.37, la línea roja muestra una extensión por medio de una línea recta, y la azul por medio de una exponencial y la línea negra punteada muestra como se asumen los bordes de la señal comúnmente, debido a esa discontinuidad se producen los efectos mencionados, en la sección de la STFT, se aplicó este procedimiento para el final de la señal, ahora se va a hacer también para el inicio. Los efectos causados al aplicar esto

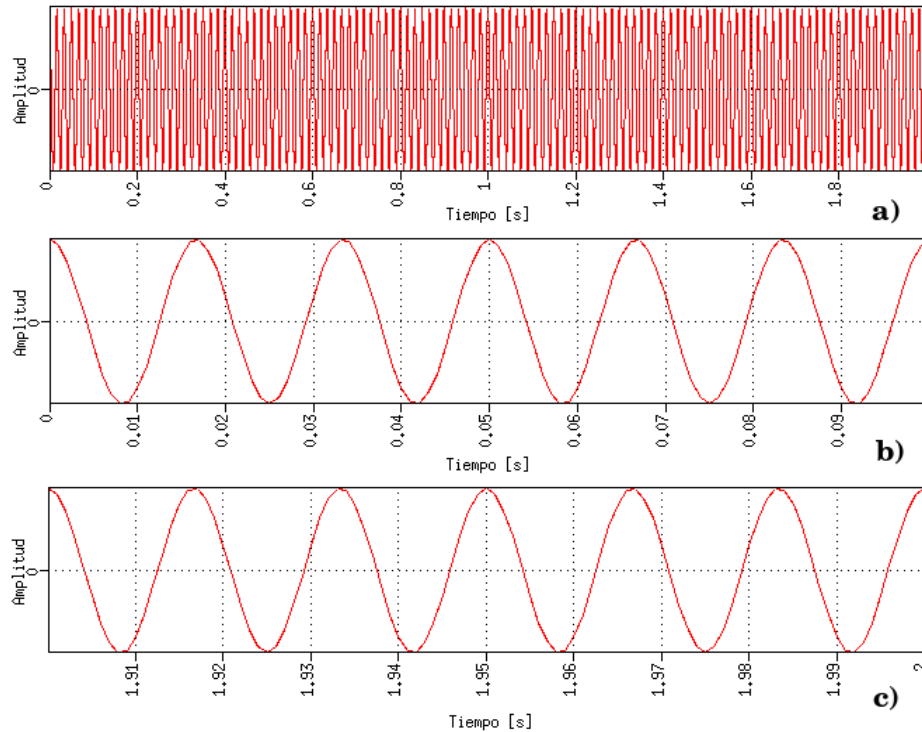


FIGURA 2.33. a) Señal de 60 Hz con $dt = 1\text{ ms}$ y duración de 2 s . b) Borde inicial de la señal. c) Borde final de la señal. Fuente Autor.

se pueden detallar en la figura 2.38 , donde se proceso la misma señal senoidal de 60 Hz , en la parte a) se extendio por medio de una exponencial y en la parte b) por una recta, en ambos casos se extendio la señal con 50 muestras y se puede observar como se redujeron los efectos del borde a altas frecuencias, pero a bajas frecuencias aumentan un poco, como paso con la STFT.

De los métodos aplicados se encontró, que el que dejó mejor resultado fue la extensión a cero, aunque aumenta los efectos a bajas frecuencias. La imagen obtenida con los datos inventanados fue la que dejó los resultados menos deseados alterando de manera considerable el procesamiento.

Como se observará en las características de las trazas sísmicas, estas empiezan desde cero y disminuyen con el tiempo y son captadas hasta que su amplitud es despreciable, en el capítulo de datos reales se detallaran estas características.

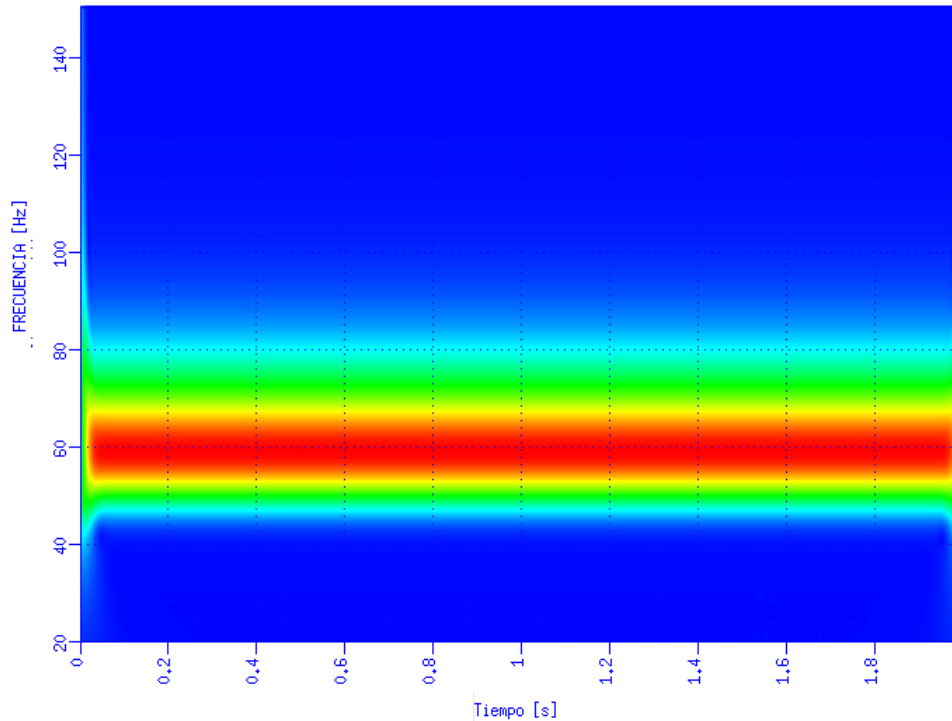


FIGURA 2.34. CWT aplicada a una señal compuesta por coseno de 60 Hz , con $dt = 1\text{ms}$ y dos segundos de duración, se usó una wavelet Complex Morlet. No se le hizo tratamiento para los efectos de borde, y se pueden observar los efectos de estos en la imagen. Fuente Autor.

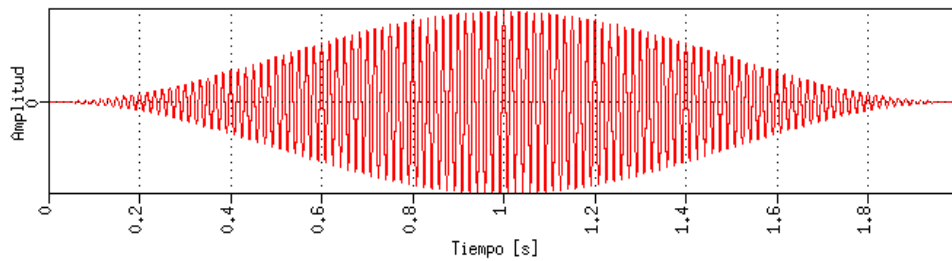


FIGURA 2.35. Coseno de 60 Hz enventanado, con $dt = 1\text{ms}$ y duración de 2s . Fuente Autor.

2.2.6. Convención circular

Al asumir la CWT como una convolución se debe tener cuidado con la longitud de los vectores que contienen las señales, esto por que cuando existe un desplazamiento con

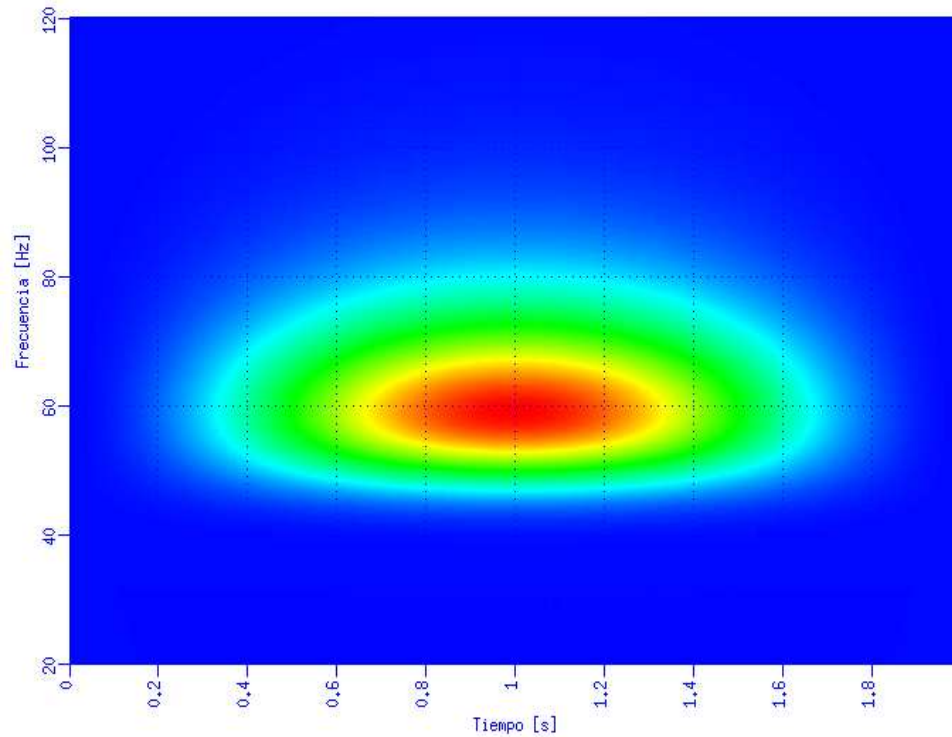


FIGURA 2.36. CWT aplicada a una señal compuesta por coseno de 60 Hz eventanada, con $dt = 1ms$ y dos segundos de duración, se usó una wavelet Complex Morlet. Fuente Autor.

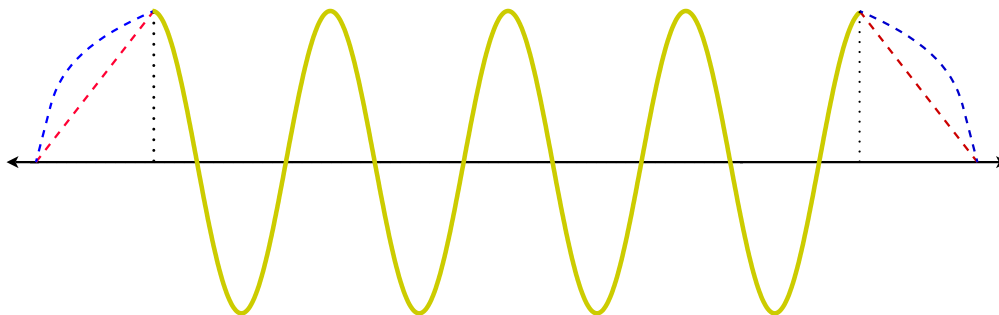


FIGURA 2.37. Señal extendida a cero, tanto en el inicio como en el final. Fuente Autor.

señales discretas, este desplazamiento es circular y no lineal, lo cual es equivocado ya que se toman repeticiones cíclicas.

El proceso para obtener una convolución líneal a partir de una convolución circular se lleva a cabo así, por ejemplo si se tienen dos secuencias $x_1[n]$ con M muestras y $x_2[n]$ con L muestras, y se quiere hacer una convolución entre ellas, se rellena con ceros cada secuencia

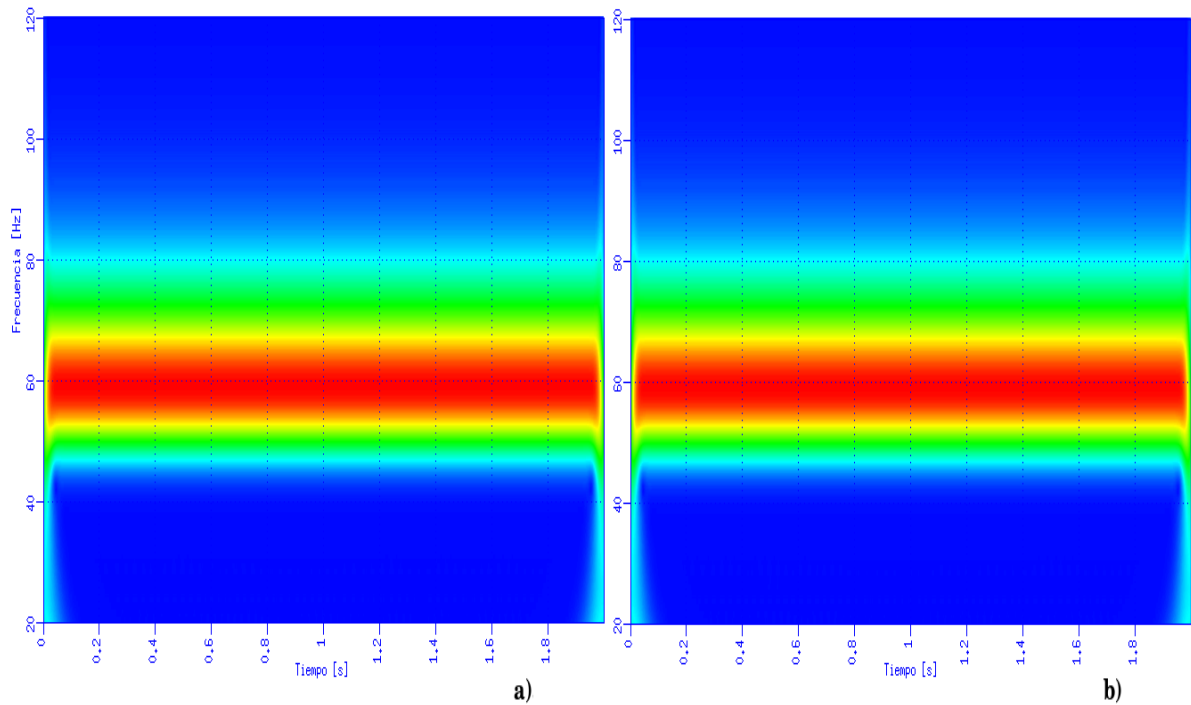


FIGURA 2.38. CWT aplicada a una señal compuesta por un coseno de 60 Hz extendida a cero con 50 puntos, con $dt = 1\text{ms}$ y dos segundos de duración, se usó una wavelet Complex Morlet. a) Se extendió por medio de una señal exponencial. b) Se extendió por medio de una línea recta. Fuente Autor.

hasta completar una longitud de $M + L$, luego se calcula la DFT de cada secuencia y se multiplican entre sí y por ultimo se halla la transformada inversa, de esta forma se realiza la convolución líneal a partir de una convolución circular.

En la figura 2.39 se puede observar como afecta la imagen final el hecho que no se tenga en cuenta la longitud de las secuencias en el momento de hacer la convolución, se puede observar como se repiten las componentes al ser desplazadas, en cambio para el resto de figuras, se tuvo en cuenta estas longitudes y se obtuvo una convolución circular, la cual es la cwt de la secuencia de entrada.

2.2.7. Fase de la wavelet

Basándose en la figura 2.31 se puede observar que la CWT equivale a multiplicar el espectro de la traza por la respuesta en frecuencia de la wavelet escalada e invertida en

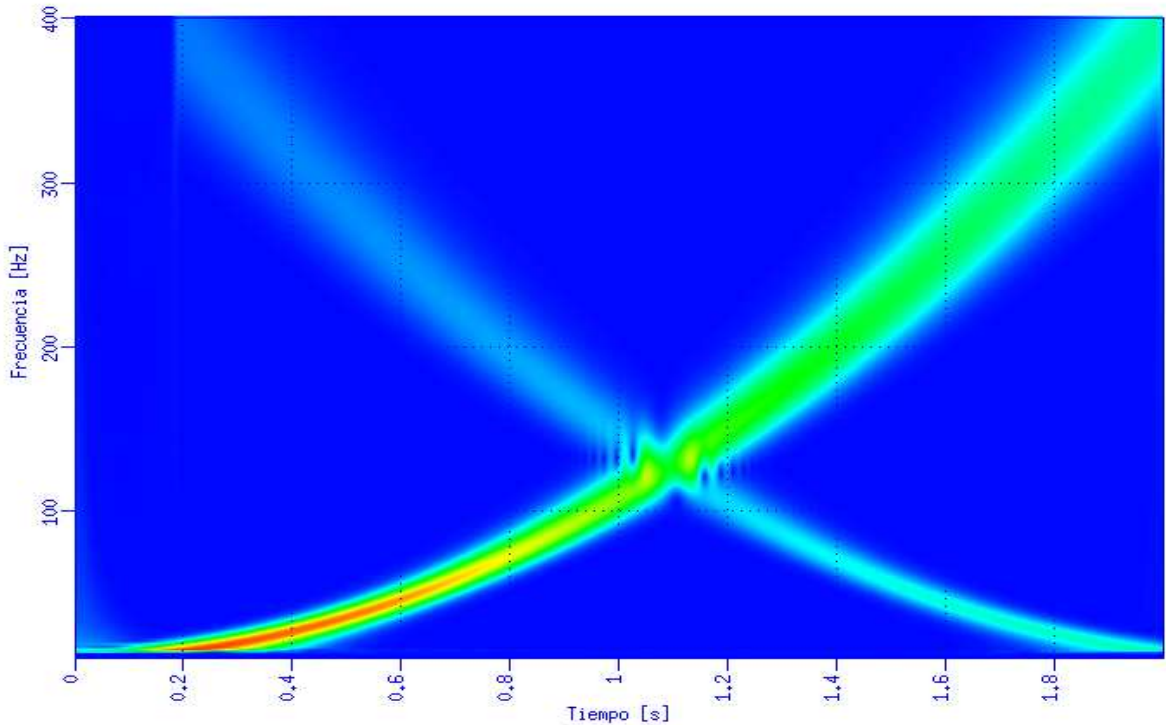


FIGURA 2.39. CWT aplicada a una señal cuya frecuencia varía parabólicamente, en esta imagen se pueden observar los efectos de no escoger la longitud adecuada para la convolución, ya que se repiten las componentes. Fuente Autor.

el tiempo. Para este sistema LTI existen dos características muy importantes que son la amplitud o ganancia del sistema y la respuesta de fase o desplazamiento de fase del sistema.

Según la respuesta de fase es asociado al sistema un retardo causado en las muestras llamado retardo de grupo, este efecto se define como:

$$\tau(\omega) = \text{rdg} [H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega} \{ \arg [H(e^{j\omega})] \} \quad (2.65)$$

La respuesta en frecuencia del sistema en la CWT se define como $a\bar{\Psi}(a\omega)$.

Es importante corregir este efecto, ya que en la exploración sísmica, el tiempo en que suceden los eventos se relacionan con la profundidad y un retraso equivale a una interpretación errónea de la ubicación de cualquier evento.

En la figura 2.40 se muestra la magnitud y la fase de la wavelet Complex Morlet, para una escala $a = f_{cent}/200$, y frecuencia central de 1 Hz , lo que se puede detallar es que la fase no es lineal, pero algo muy importante que se observa es que la fase es cero en el ancho de banda del sistema y por tanto para las frecuencias donde la fase no es lineal, la amplitud es cero eliminando esas componentes, por esta razón no hay que corregir el retardo de grupo ya que estas desaparecen. Se observó que lo mismo sucede para todas las frecuencias en las que se analizaba, por tanto al usar esta wavelet no es necesario la corrección del retardo de grupo.

Para wavelets reales ocurre lo mismo, como se detalla en la figura 2.41 para la wavelet Mexican Hat y la Morlet ocurre que según la frecuencia de análisis, para las amplitudes que abarca el ancho del filtro la fase de la ondícula es cero y para las amplitudes que se reducen a cero por el filtro, la fase es no lineal, esto es lo mismo que sucede con la Morlet compleja.

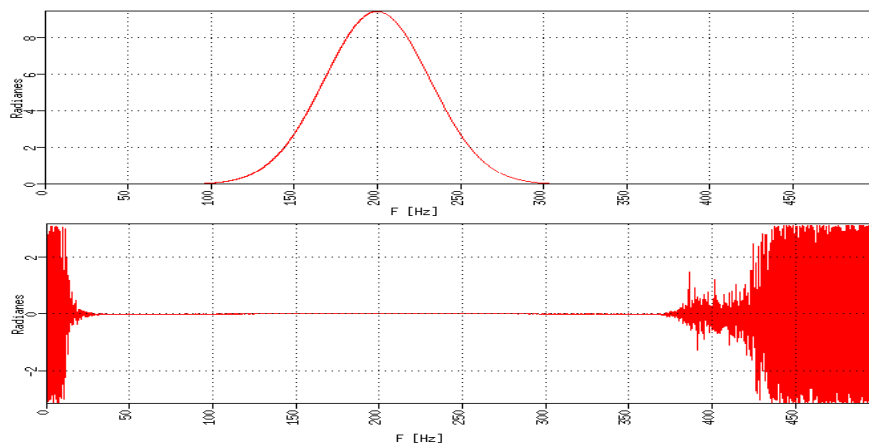


FIGURA 2.40. Magnitud y fase del espectro del complejo conjugado de la wavelet Complex Morlet, escalada por a e invertida en el tiempo, $\overline{\psi}(\frac{-t}{a})$, $a = 1/200$. Fuente Autor.

2.2.8. Isoresolución

El concepto de isoresolución fue tomado del artículo (Soalres, Oliveira, Cintra, & Souza, 2003), donde se habla que la isoresolución sucede cuando $\Delta_t = \Delta_\omega$.

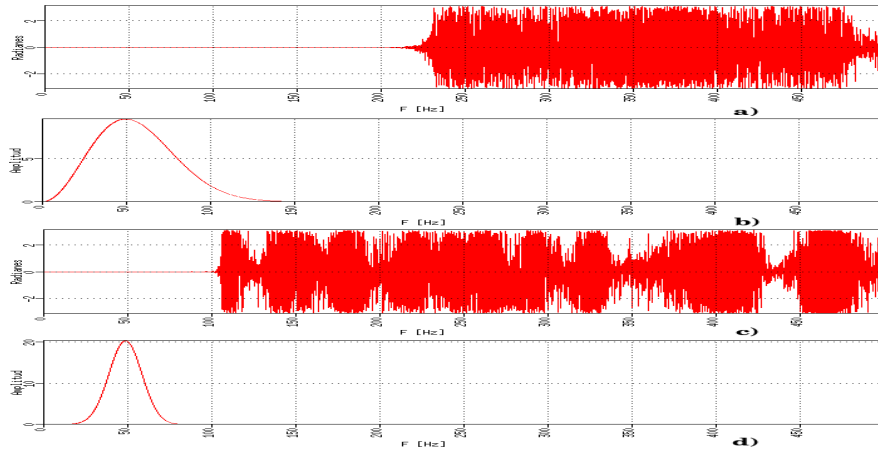


FIGURA 2.41. Magnitud y fase del espectro del complejo conjugado de las wavelet Morlet morlet real y Mexican Hat, escaladas por a e invertida en el tiempo, $\bar{\psi}\left(\frac{-t}{a}\right)$, $a = f_{central}/50$. a) Fase espectro Mexican Hat. b) Magnitud espectro Mexican Hat. c) Fase espectro Morlet real. d) Magnitud espectro Morlet real. Fuente Autor.

PROPOSICIÓN 2.1. Si $\psi(t)$, tiene duración efectiva Δ_t y ancho de banda efectivo Δ_ω , entonces la versión escalada $\psi(\sqrt{\Delta_t/\Delta_\omega}t)$ tiene isoresolución.

Se busca que una wavelet tenga isoresolución para que al empezar la descomposición se parta de un equilibrio entre la resolución temporal y la resolución en frecuencia, para así tener un mayor conocimiento del ancho de banda y la duración efectiva.

En el artículo mencionado se parte de una isoresolución entre Δ_t y Δ_ω , pero en este trabajo se ideó otra isoresolución que es $\Delta_t = \Delta_f$. A continuación se explica como se halló ambas resoluciones, para cada ondícula mencionada antes.

Para cada ondícula se halló el factor de isoresolución, tanto para $\Delta_\omega \sqrt{\frac{\Delta_t}{\Delta_\omega}}$, como para $\Delta_f, \sqrt{2\pi \frac{\Delta_t}{\Delta_\omega}}$.

- Isoresolución Wavelet Mexican Hat: Para esta wavelet se tiene que $\Delta_t = 1,0801$ y $\Delta_\omega = 0,495$, por tal razón el factor $\sqrt{\frac{\Delta_t}{\Delta_\omega}}$ es 1.48 y el otro factor $\sqrt{2\pi \frac{\Delta_t}{\Delta_\omega}} = 3,71$. Aplicando el primer factor se obtuvo $\Delta_t = \Delta_\omega = 0.73$ y para el segundo factor se obtuvo $\Delta_t = \Delta_f = 0,29$. Esta diferencia tiene gran influencia, ya que con el segundo factor se inicia la descomposición con un ancho efectivo más

grande, y como se ve en la figura 2.42 la resolución en frecuencia desmejora al aplicar los factores de isoresolución.

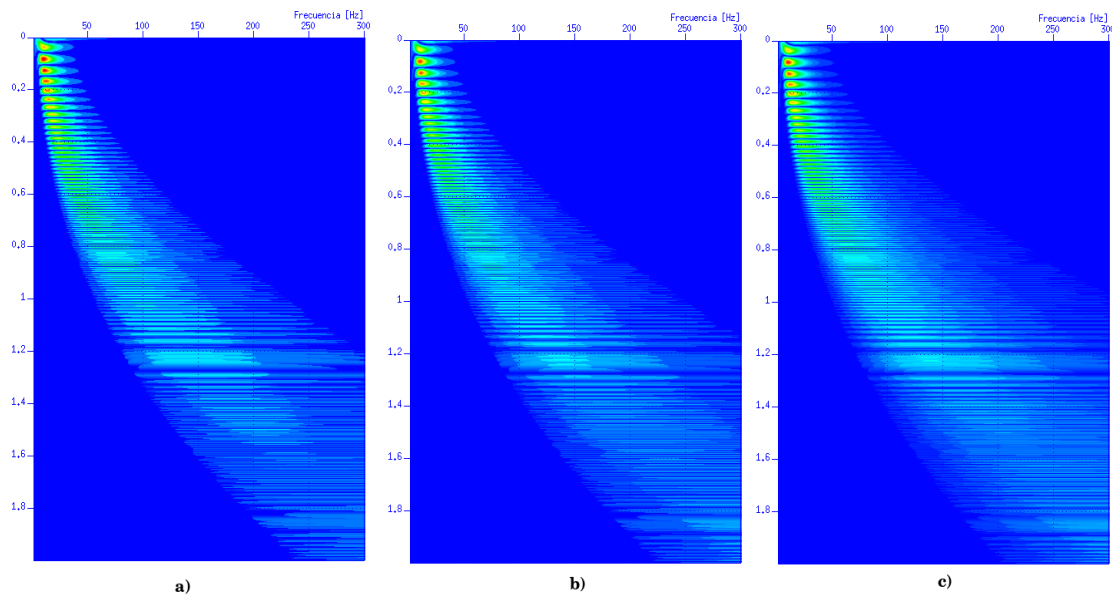


FIGURA 2.42. Variación del plano tiempo-frecuencia cuando se aplica isoresolución. a) Sin isoresolución. b) Isorresolución respecto a ω . c) Isoresolución respecto a f . Fuente Autor.

- Isoresolución Wavelet Morlet Real: En este caso se tiene que $\Delta_t = \Delta_\omega = 0,7071$, por tanto el primer factor es igual a uno, para la isoresolución en Hertz Δ_f , el factor de isoresolución queda como $\sqrt{2\pi}$. Aplicando este factor se obtiene $\Delta_t = \Delta_f = 0,2824$.

En la figura 2.43 se puede observar el mismo efecto que paso con la Mexican Hat, esto debido a que al aplicar el factor en hertz, se inicia con un ancho de banda mayor y como este crece proporcional a la frecuencia, pues la resolución desmejora.

- Isoresolución Morlet Compleja: Para este caso se aplico para la ondícula con ancho de banda fijo, ya que la de ancho variable, tiene como principal característica que se pueda escoger el ancho que se desea. Se inicia con $\Delta_t = \Delta_\omega = 0,7071$, por lo tanto el primer factor es uno y para Δ_f , el

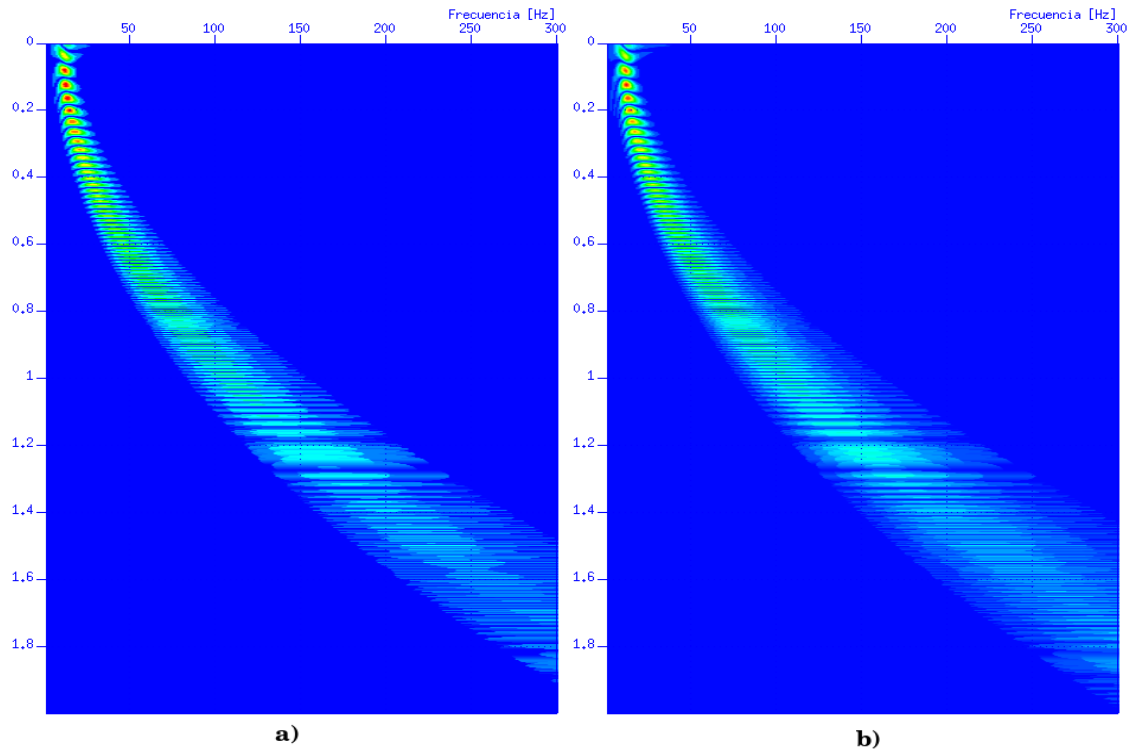


FIGURA 2.43. Variación del plano tiempo-frecuencia cuando se aplica isoresolución a la ondícula Morlet real .a) Isoresolución respecto a ω . c) Isoresolución respecto a f . Fuente Autor.

factor queda igual que para la Morlet real, aplicando este factor se obtiene $\Delta_t = \Delta_f = 0,2824$.

En este caso sucedió lo mismo que en los anteriores, se inicia con un ancho mayor y por tanto la resolución desmejora. Ver figura 2.44

2.3. Transformada de Fourier de los coeficientes wavelet

Esta metodología más que una metodología independiente, es un posproceso de la CWT, a continuación se hace un análisis matemático de este proceso.

Partiendo de la definición de transformada de Fourier, la cual se reescribira para comodidad del lector:

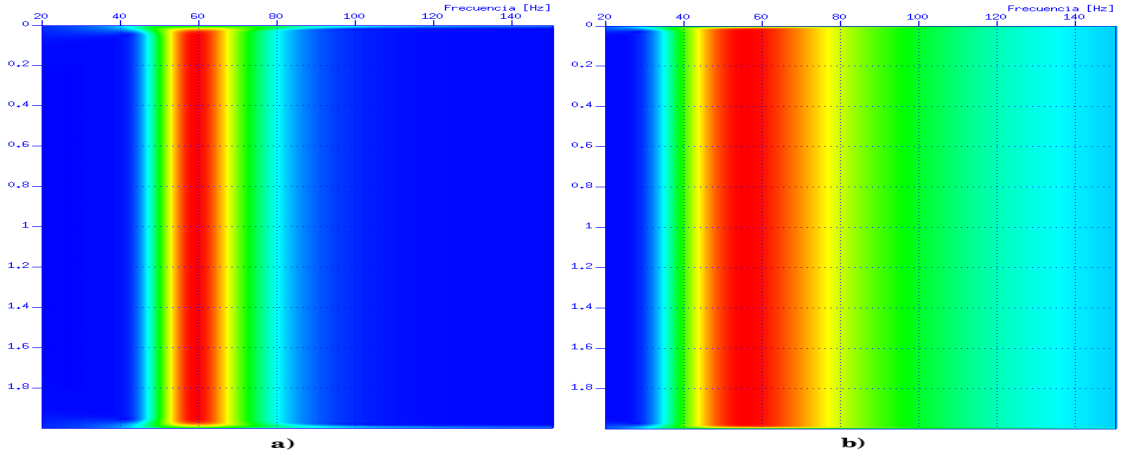


FIGURA 2.44. Variación del plano tiempo-frecuencia cuando se aplica isoresolución a la ondícula Morlet compleja .a) Isoresolución respecto a ω . c) Isoresolución respecto a f . Fuente Autor.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.66)$$

Usando la expresión para la transformada inversa de CWT y reemplazandola en la anterior, se obtiene:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 \sqrt{a}} W_{\psi}(a, b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{-i\omega t} da db dt \quad (2.67)$$

Usando los teoremas de escalado y desplazamiento, se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{-i\omega t} dt = a e^{-i\omega b} \Psi(a\omega) \quad (2.68)$$

Intercambiando integrales y sustituyendo 2.68 en 2.67:

$$F(\omega) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 \sqrt{a}} W_{\psi}(a, b) a e^{-i\omega b} \Psi(a\omega) da db \quad (2.69)$$

Removiendo la integral respecto a b , se obtiene:

$$F(\omega, b) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi}(a, b) \Psi(a\omega) e^{-i\omega b} \frac{da}{(a)^{3/2}} \quad (2.70)$$

A esto se le llama transformada de Fourier de los coeficientes Wavelets. La calidad de esta metodología depende de los coeficientes wavelets y por esto, si los coeficientes no son de calidad, la FTCWT no hace mucho por la resolución de la imagen.

Este procedimiento puede no ser considerado como una metodología debido a que depende de otra, en (Sinha, 2005), se le considera como un post-proceso a la CWT, el cual hace un refinamiento de las características de la imagen tiempo-frecuencia. Como al aplicarlo a una línea sísmica se obtiene también una matriz cúbica, el procedimiento en el procesamiento de datos sísmico es el mismo al comentado en la STFT y CWT.

Más adelante se va a mostrar como esta metodología aumenta las amplitudes a altas frecuencias, produciendo un mejor detallamiento, corrigiendo la disminución de amplitudes debido a el escalado de la wavelet, también causa un aumento en el grosor, lo que baja la calidad de la imagen.

2.4. Análisis de resultados con señales

Para analizar las herramientas antes mencionadas, se procesaron señales sintéticas, cuyo comportamiento en frecuencia es conocido. Se compararon las tres metodologías de acuerdo a los resultados obtenidos al procesar estas señales.

2.4.1. Frecuencia constante

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t), \quad \omega(t) = \omega_0 \quad (2.71)$$

Para este primer caso la frecuencia de la señal es de 60 Hz , que fue la señal analizada en anteriores secciones. En la figura 2.45 se puede observar la forma de la señal analizada y como varía su frecuencia con el tiempo.

2.4.1.1. Transformada de Fourier enventanada

Con esta herramienta se procesó la señal y se obtuvo los resultados mostrados en la figura 2.46. Como se mencionó antes, al aumentar la resolución en frecuencia, la resolución

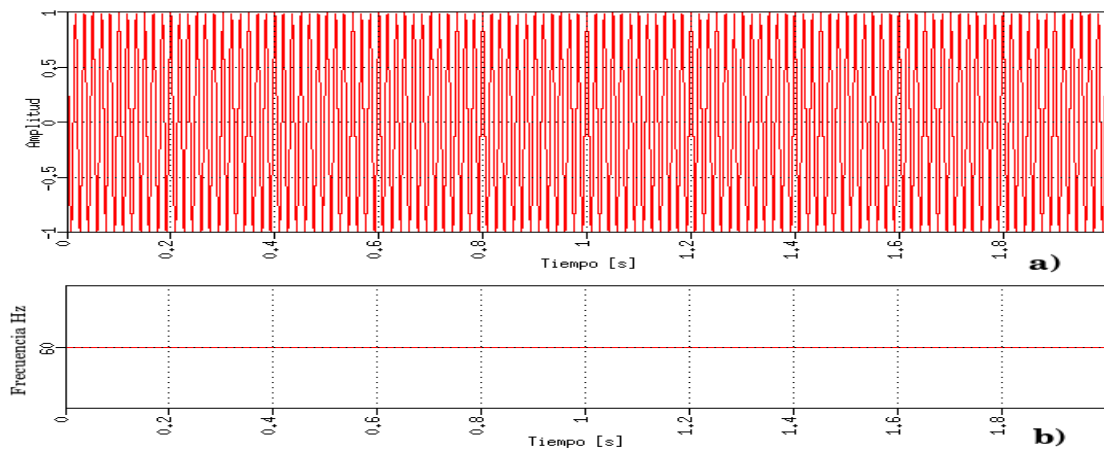


FIGURA 2.45. Señal de 60 Hz y como varía su frecuencia. Fuente Autor.

en tiempo empeora, debido a la longitud de la señal, y que se rellena con ceros, la parte b de la figura se ve así, todo esto ya fue mencionado en la sección de la transformada de Fourier enventanada. En la figura también se pueden observar los efectos del borde final.

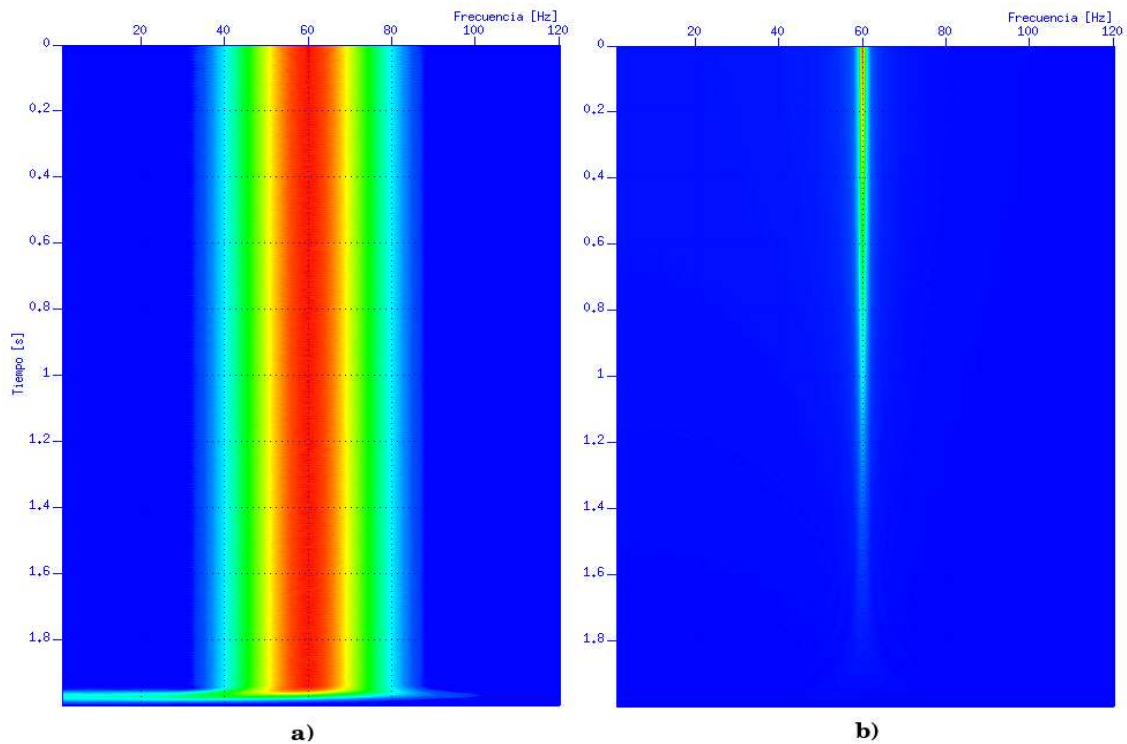


FIGURA 2.46. Coseno de 60 Hz enventanado, ventana Hamming y $dt = 1\text{ ms}$. a) $M = 60$ y $\Delta_{mlf} = 66, 66$. b) $M = 4000$ y $\Delta_{mlf} = 1$. Fuente Autor.

2.4.1.2. Transformada wavelet continua

Al procesar la señal con la transformada wavelet continua, se usó la ondícula compleja, ya que en las secciones anteriores fue la que dejó mejor resolución. La ondícula Morlet tiene la particularidad que al variar la frecuencia central, se cambia el ancho de banda efectivo y la duración efectiva de la ondícula al llegar a una frecuencia determinada. Al escoger una frecuencia central determinada, el ancho de banda y la duración efectiva cambian de acuerdo a las expresiones 2.72 y 2.73, como $a = f_{central}/f$, entonces se puede hallar la relación del ancho de banda y la duración efectiva con la frecuencia de análisis, expresiones 2.74 y 2.75.

$$\Delta_t(a) = \Delta_{t0} * a \quad (2.72)$$

$$\Delta_\omega(a) = \frac{\Delta_{\omega0}}{a} \quad (2.73)$$

$$\Delta_t(f) = \frac{\Delta_{t0} f_{central}}{f} \quad (2.74)$$

$$\Delta_\omega(f) = \frac{\Delta_{\omega0} * f}{f_{central}} \quad (2.75)$$

La expresión 2.75, puede cambiarse para que quede en hertz así:

$$\Delta_f(f) = \frac{\Delta_{\omega0} * f}{f_{central} * 2\pi} \quad (2.76)$$

Para procesar la señal de 60 Hz, se partió de que el ancho de banda efectivo para la Morlet compleja es igual a 0.7071, a partir de la frecuencia central, con esto se puede escoger la frecuencia central para el ancho deseado a la frecuencia deseada es decir:

$$\Delta_f = \frac{0,7071}{2\pi} \frac{f}{f_{central}} \quad (2.77)$$

Con la anterior expresión es posible escoger una frecuencia central, tal que, por ejemplo se tenga un ancho de banda efectivo igual a 1 Hz , la cual es $f_{central} = 6,752307615$, pero como al escoger una resolución en frecuencia, también queda definida la resolución en tiempo se tiene que $\Delta_t = 0,079575945$. En la figura 2.47 se puede observar la descomposición con esta frecuencia central.

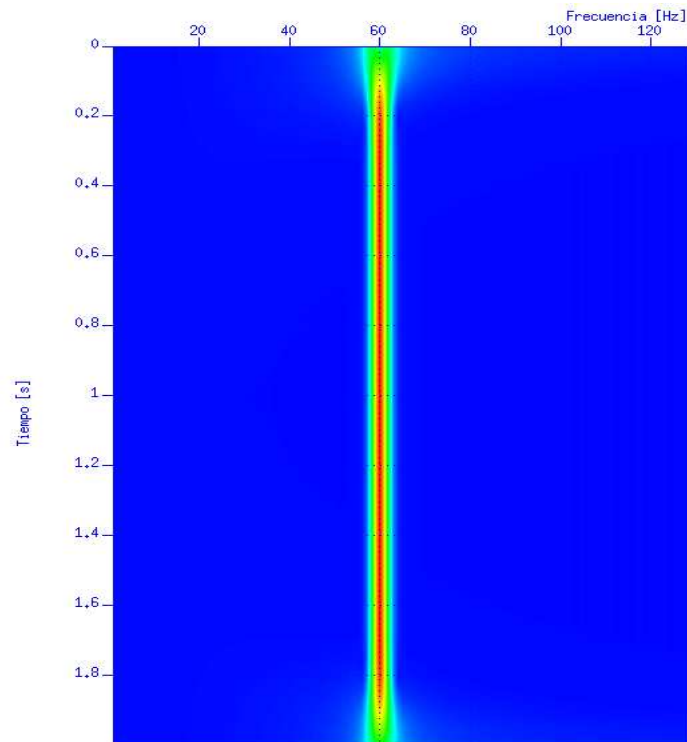


FIGURA 2.47. CWT de una señal compuesta por un coseno de 60 Hz y $f_{central} = 6,7523076$. Fuente Autor.

Para la ondícula Morlet compleja con ancho de banda variable, se realiza el mismo procedimiento, pero se debe tener en cuenta que el ancho de banda efectivo inicial y la duración efectiva inicial son diferentes, en la tabla 2.4 se encontró cuales son estos valores iniciales para algunos valores de F_b .

2.4.1.3. Transformada de Fourier de los coeficientes wavelets

Se va a hacer la transformación para los coeficientes obtenidos con la frecuencia central $f_{central} = 6,7523076$, en la anterior subsección, en la figura 2.48 se puede observar la CWT

fband	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\Delta_{\omega 0}$	3,0040	2,2169	1,8233	1,5808	1,4141	1,2909	1,1952	1,118	1,0541	1
Δ_{t0}	0,1581	0,2236	0,2738	0,3162	0,3536	0,3872	0,4183	0,4472	0,4743	0,5
fband	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$\Delta_{\omega 0}$	0,7071	0,5774	0,5	0,4472	0,4082	0,3779	0,3536	0,3333	0,3162	
Δ_{t0}	0,7071	0,8660	1	1,118	1,2247	1,3228	1,4142	1,5	1,5811	

TABLA 2.4. Valores iniciales para ancho de banda y duración efectiva, para ciertos valores de la variable F_b .

y la FTCWT, donde no se visualizan mayores cambios entre una y otra metodología. Solo se ve que el ancho de banda crecio un poco.

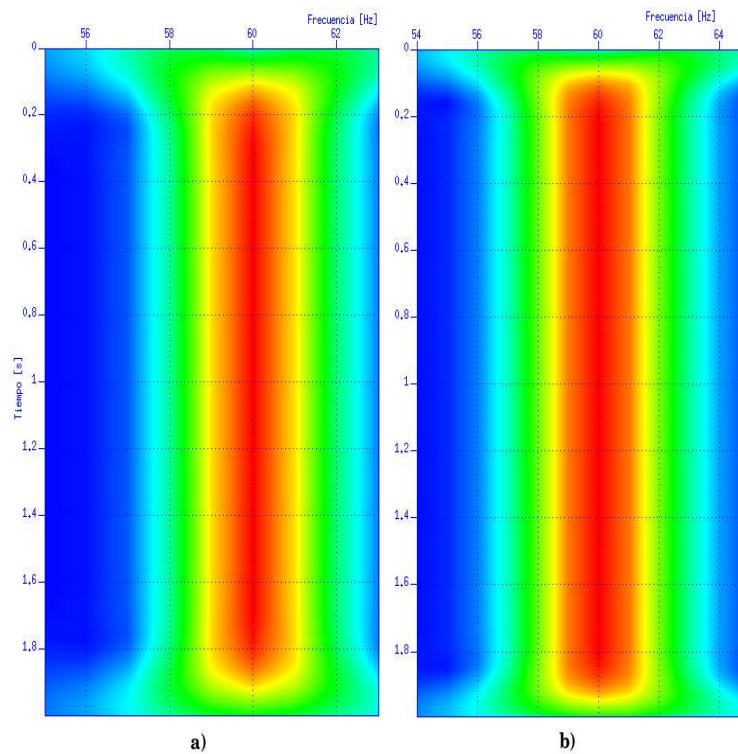


FIGURA 2.48. CWT y FTCWT de una señal compuesta por un coseno de 60 Hz y $f_{central} = 6,7523076$. a) CWT. b) FTCWT. Fuente Autor.

2.4.2. Frecuencia que varía linealmente

Se analizó una señal cuya frecuencia variaba en forma lineal:

$$x(t) = a \cos(bt^2 + ct), \quad \omega(t) = 2bt + c \quad (2.78)$$

Para este caso $b = 200$ y $c = 20\pi$, la expresión de como varía la frecuencia en el tiempo, se puede convertir a hertz quedando $f(t) = (200/\pi)t + 10$, que es la función que muestra como cambia la frecuencia en el tiempo. Ver figura 2.49.

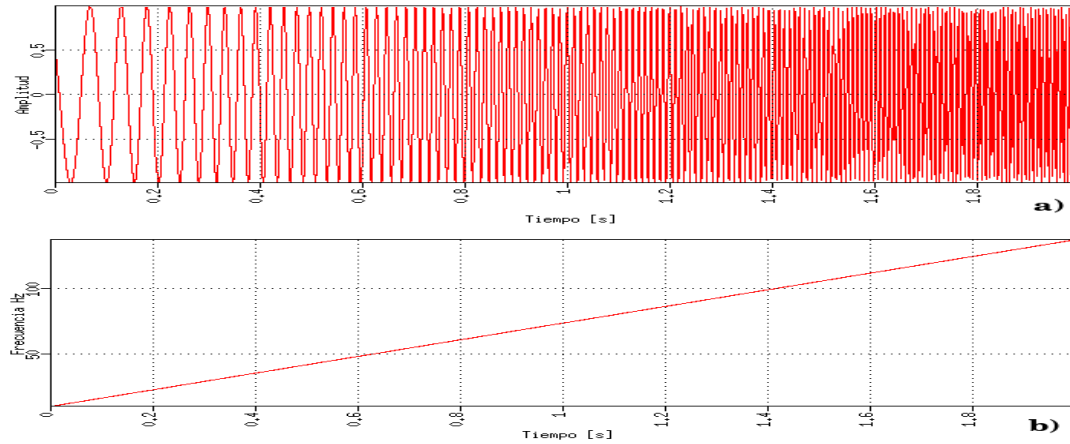


FIGURA 2.49. Señal de 60 Hz y como varía su frecuencia. Fuente Autor.

2.4.2.1. Transformada de Fourier enventanada

Para este tipo de señal, se realizó la transformada de Fourier enventanada, con la ventana Hamming y con las mismas longitudes que en la sección anterior. En la figura 2.50 se puede observar los resultados al aplicar la STFT a la señal antes mencionada, como se analizó antes para el ancho de banda de 1 Hz la resolución temporal es mala y por esto la parte b) de la figura se ve así. En la parte a) se obtuvo una mejor resolución temporal debido a la longitud pequeña de la ventana.

2.4.2.2. Transformada wavelet continua

En la figura parte a) se pudo observar como al usar la misma frecuencia central usada para la señal anterior para la senoidal de 60 Hz , se obtiene gran resolución a bajas frecuencias debido a que el ancho de banda efectivo es proporcional a la frecuencia de análisis, y caso contrario ocurre con la duración eficaz, la cual es inversamente proporcional a la frecuencia de análisis. En la imagen parte b) se obtiene una mejor resolución a bajas frecuencias por que se movió la frecuencia central a 1 Hz , y esto causó que el ancho

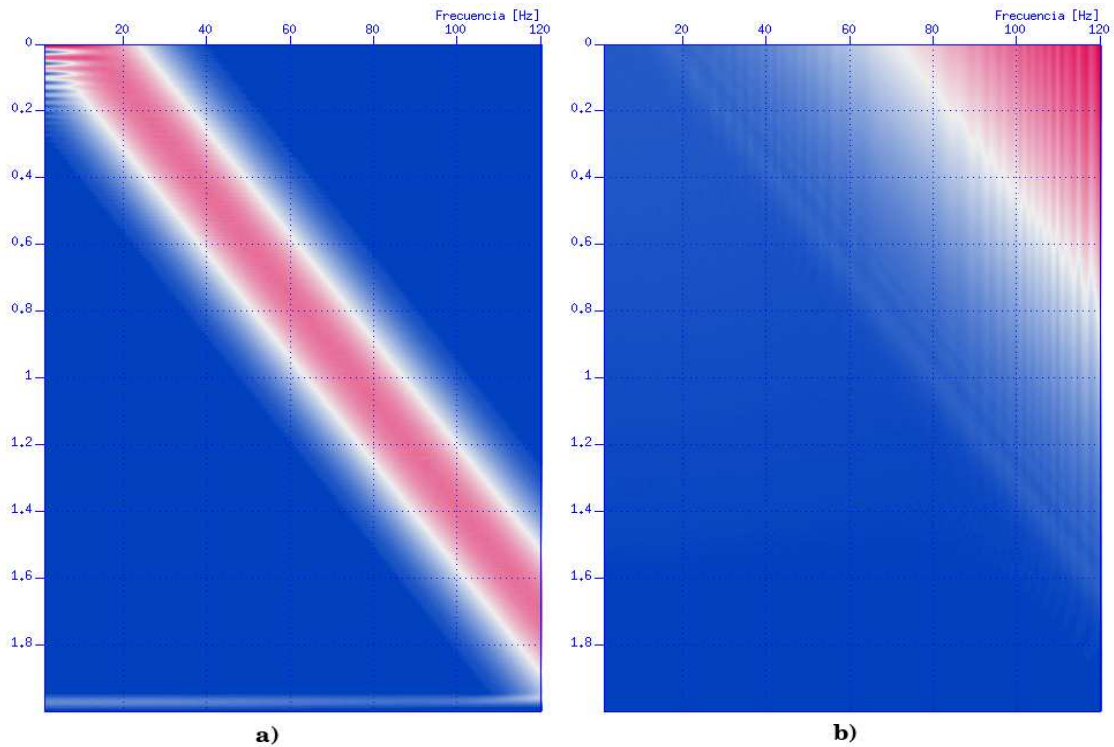


FIGURA 2.50. Transformada de Fourier enventanada de una señal cuya frecuencia varía linealmente, $f(t) = (200/\pi)t + 10$, $dt = 1ms$. a) $M = 60$. b) $M = 4000$. Fuente Autor.

de banda efectivo aumentara y por el contrario la resolución temporal mejora, ya que la duración efectiva disminuye.

En la parte b) también se puede observar como al avanzar en la frecuencia de análisis la resolución en frecuencia empeora, y por esto se ve que las amplitudes disminuyen y se expanden. Por esta razón se penso en realizar el análisis por bandas de frecuencia, para así poder ajustar las frecuencias centrales en cada banda, de tal forma que la resolución mejore.

Se pensó en que cada banda de frecuencias tuviese un ancho efectivo en hertz de $\Delta_f = 3.01$ y por lo tanto la duración efectiva es de $\Delta_t = 0,02639$, estos valores se hallaron, con las expresiones 2.74 y 2.75, en las cuales se asumio una frecuencia central de $1 Hz$, y se observó que cuando $f = 30 Hz$, se obtenian los anteriores valores, por eso se

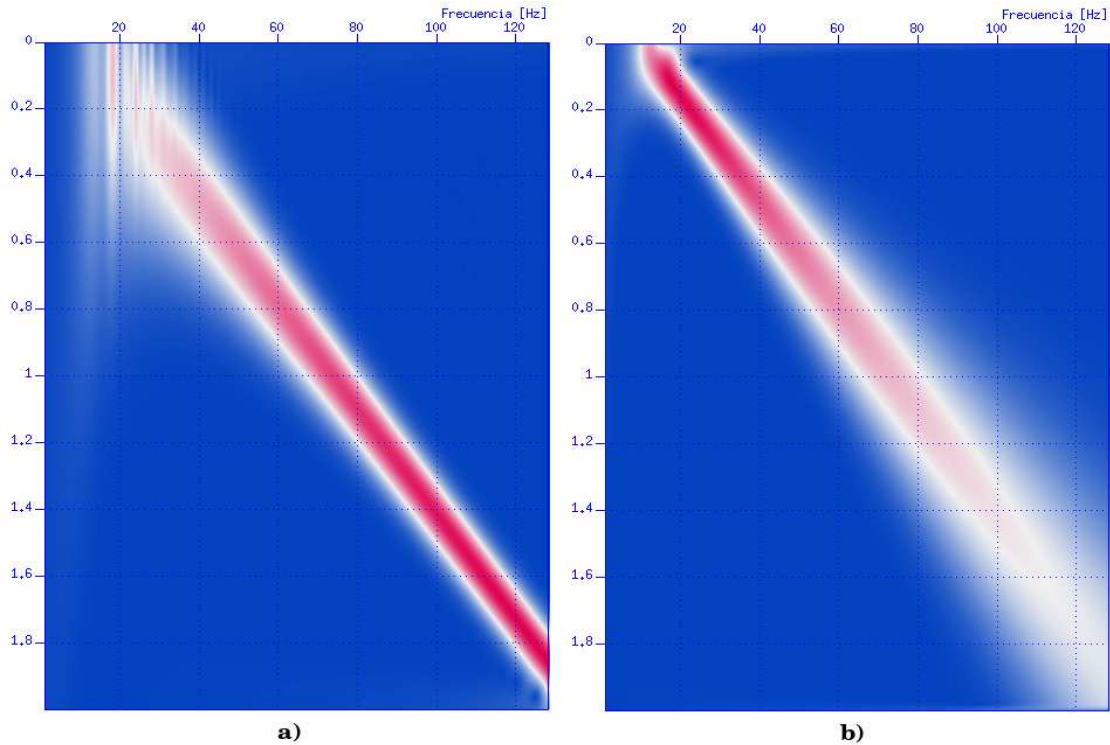


FIGURA 2.51. Transformada wavelet continua de una señal cuya frecuencia varía linealmente, $f(t) = (200/\pi)t + 10$, ondícula Morlet compleja, $dt = 1ms$. a) $F_{central} = 6,7523076$. b) $f_{central} = 1$. Fuente Autor.

tomó estos valores de ancho y duracion efectiva, y se movió las frecuencias centrales, para obtener estas resoluciones en las bandas que se quieren procesar

Banda	1-10	10-20	20-30	30-40	40-50
$f_{central}$	0,037388	0,37388	0,74776	1,12164	1,49552

TABLA 2.5. Valores de frecuencia central para obtener anchos de banda efectivo inicial de $\Delta_f(f)$, para las diferentes bandas de frecuencia.

En la grafica se puede observar la CWT de la señal para las diferentes bandas de frecuencia de la tabla 2.5, la resolución en cada banda mejora que hacerlo todo con la misma frecuencia central, pero aun se notan cambios en la resolución, se vio que al hacer la banda cada vez más pequeña, los cambio se notaban cada vez menos y por tal razón se resolvió hacer para cada frecuencia una transformada con una frecuencia central y unir todas estas transformadas en una sola imagen.

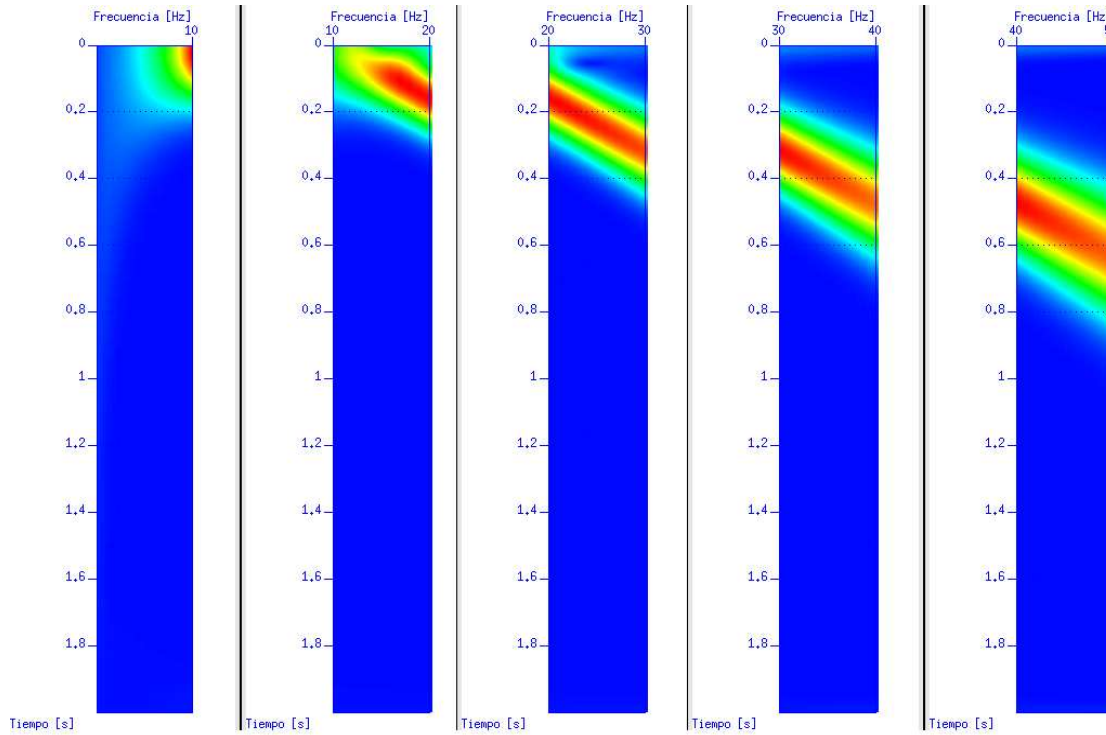


FIGURA 2.52. CWT de una señal cuya frecuencia varía linealmente, $f(t) = (200/\pi)t + 20\pi$, ondícula Morlet compleja, $dt = 1ms$, se realizó por bandas de frecuencia, variando la frecuencia central para cada banda. Fuente Autor.

Se analizó una señal cuya frecuencia variaba en forma parabólica:

En el grafico 2.53, se puede observar como se mejoró la resolución de la imagen a comparación de la imagen 2.51 y 2.52, manteniendose la resolución que se queria para cada frecuencia de análisis, este proceso se realizó despejando $f_{central}$ de la expresión 2.76, quedando así:

$$f_{central} = \frac{\Delta_{\omega_0} f}{2\pi \Delta_f} \quad (2.79)$$

Donde Δ_{ω_0} es el ancho de banda efectivo inicial de la wavelet, para la Morlet compleja de banda fija es 0,7071, y Δ_f , es la resolución en hertz que se desea para esa frecuencia. Así se hallo la frecuencia central para cada frecuencia de análisis.

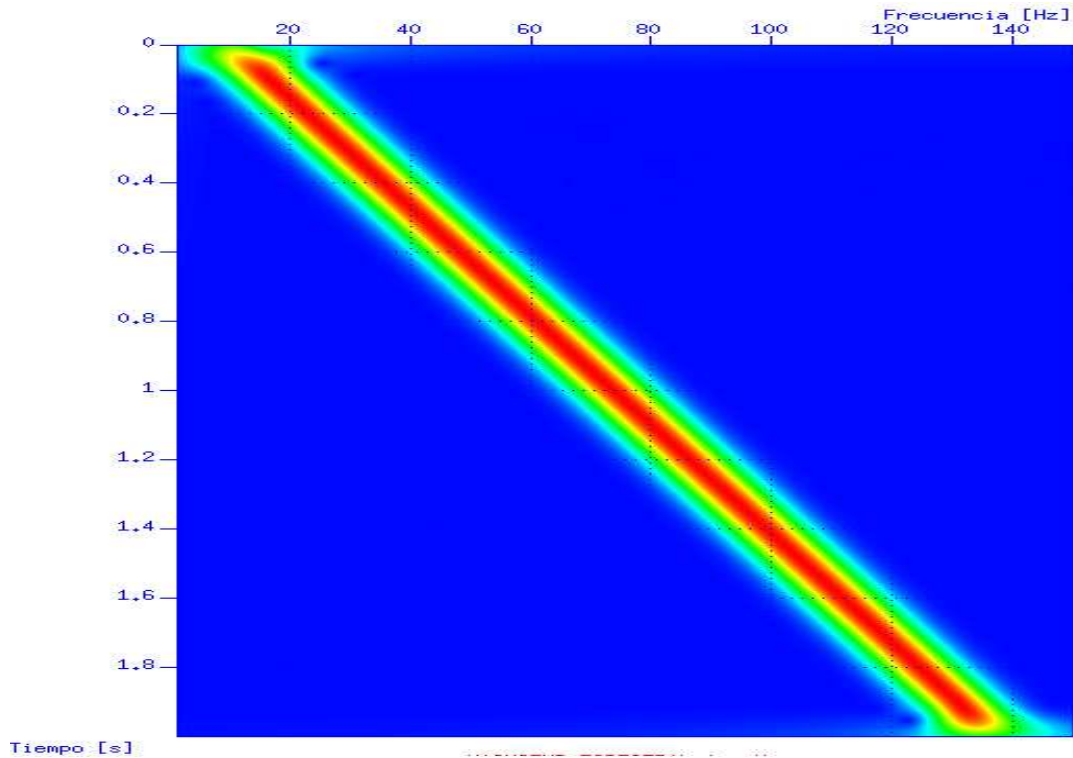


FIGURA 2.53. CWT de una señal cuya frecuencia varía linealmente, $f(t) = (200/\pi)t + 20\pi$, ondícula Morlet compleja, $dt = 1ms$, se realizó con una frecuencia central para cada frecuencia de análisis. Fuente Autor.

2.4.2.3. Transformada de Fourier de los coeficientes wavelet

Para esta señal se partió, de los coeficientes obtenidos en la figura 2.51, con frecuencia central de 1 Hz, y se obtuvo lo mostrado en la figura 2.54, se puede observar que este procedimiento aumenta las amplitudes de la CWT, pero desmejora la resolución ensanchando la línea recta que debería dar.

2.4.3. Frecuencia que varía parabólicamente

Se analizó una señal cuya frecuencia variaba en forma parabólica:

$$x(t) = a \cos(bt^3 + ct^2 + dt + e), \quad \omega(t) = 3bt^2 + 2ct + d \quad (2.80)$$

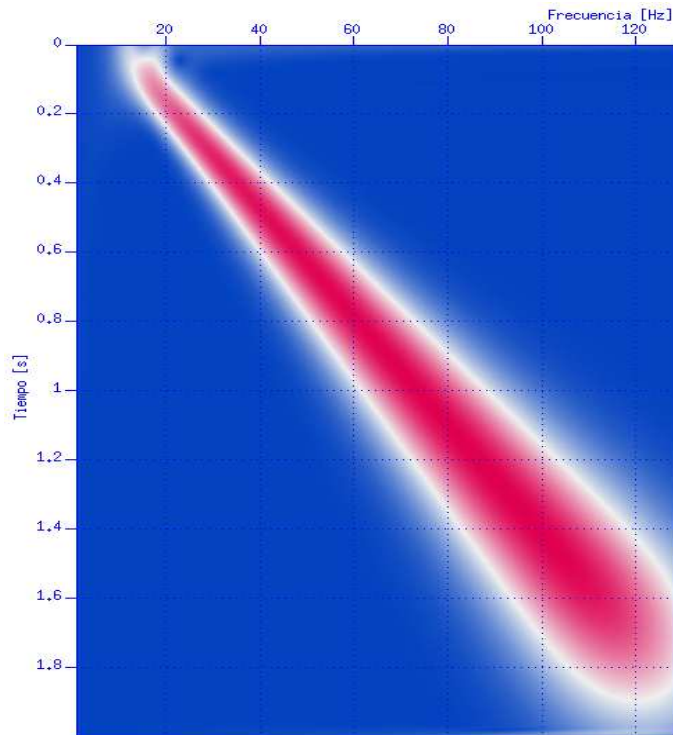


FIGURA 2.54. FTCWT de una señal cuya frecuencia varía linealmente, $f(t) = (200/\pi)t + 20\pi$, ondícula Morlet compleja, $dt = 1ms$, la CWT se realizó con una frecuencia central de $1 Hz$. Fuente Autor.

En este caso $b = 200$, $c = 8$, $d = 20\pi$ y $e = 1$, la expresión en hertz queda $f(t) = (600/2\pi)t^2 + (8/\pi)t + 10$. En la figura 2.55 se puede observar la señal procesada y como varia la frecuencia a través del tiempo.

2.4.3.1. Transformada de Fourier enventanada

En la figura 2.56, sucede lo mismo que paso con la frecuencia líneal, cuando la longitud de la ventana es muy grande pasa lo que se en la parte b) debido a que cuando se sobrepasa la longitud de la ventana, se rellena con ceros. Cuando la longitud de la ventana es corta, se pierde resolución en frecuencia.

2.4.3.2. Transformada wavelet continua

En la figura 2.57 se puede observar como al variar la frecuencia central se mantiene una resolución para toda el análisis y esta resolución es buena, a pesar que se quito la principal característica de la CWT donde al variar la frecuencia varía el ancho de banda y

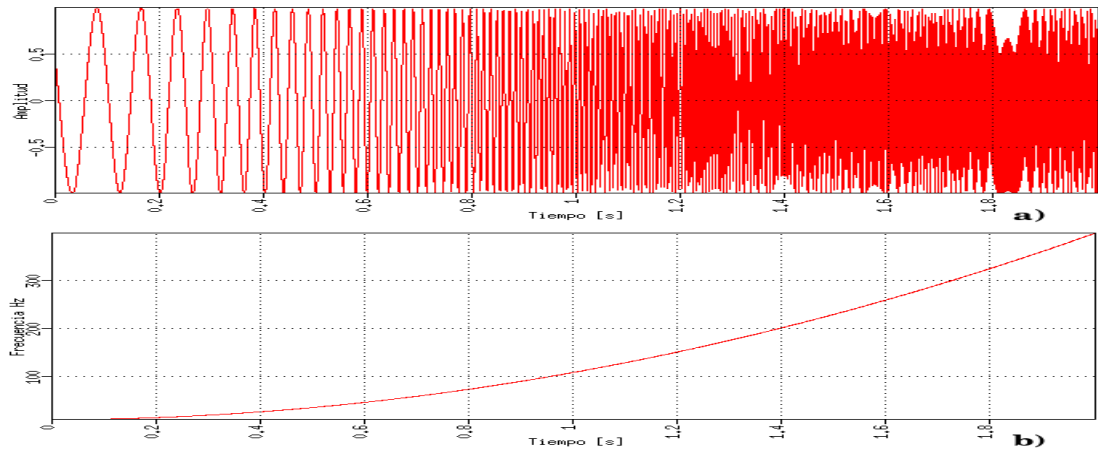


FIGURA 2.55. Señal cuya frecuencia varía parabólicamente según $f(t) = (600/2\pi)t^2 + (8/\pi)t + 10$. a) Señal procesada. b) Variación frecuencia. Fuente Autor.

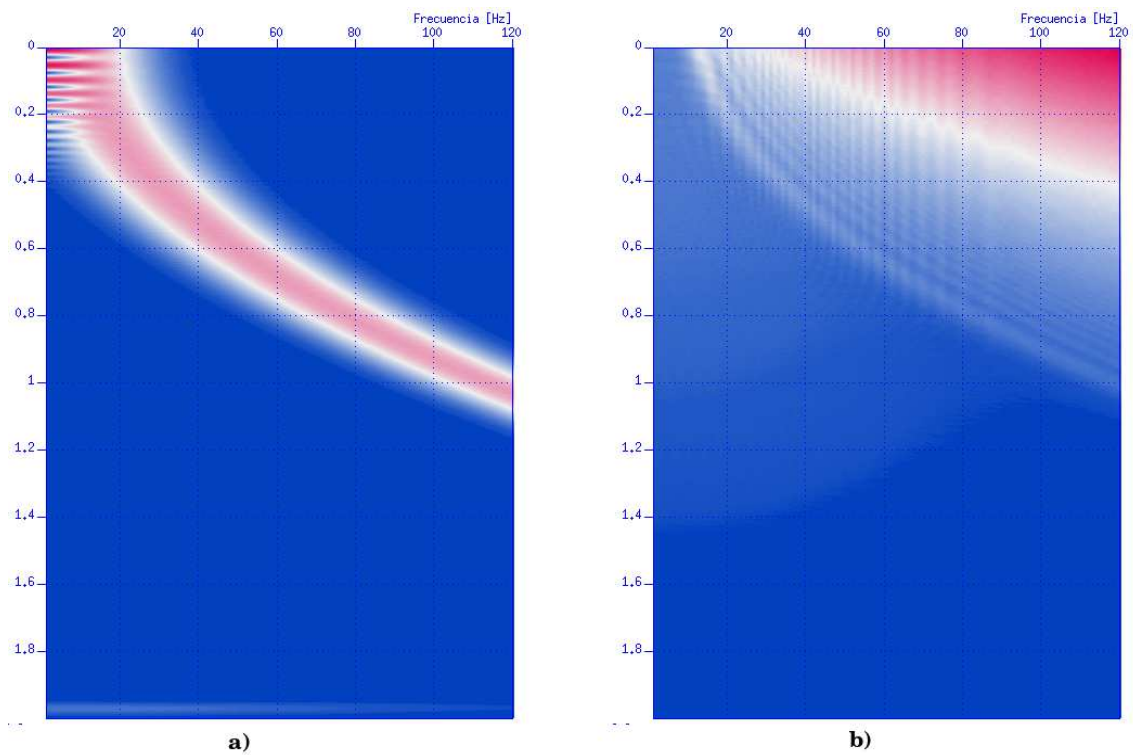


FIGURA 2.56. Transformada de Fourier enventanada de una señal cuya frecuencia varía parabólicamente, $f(t) = (600/2\pi)t^2 + (8/\pi)t + 10$. a) $M = 60$. b) $M = 4000$. Fuente Autor.

la resolución en tiempo. En el capítulo de datos reales se va a mostrar que esto no siempre es adecuado. La parte b) de la imagen es parecida a lo que paso con la frecuencia lineal, y esto es debido a la escala, ya que al subir en frecuencia, el filtro va disminuyendo de amplitud y el ancho de banda crece.

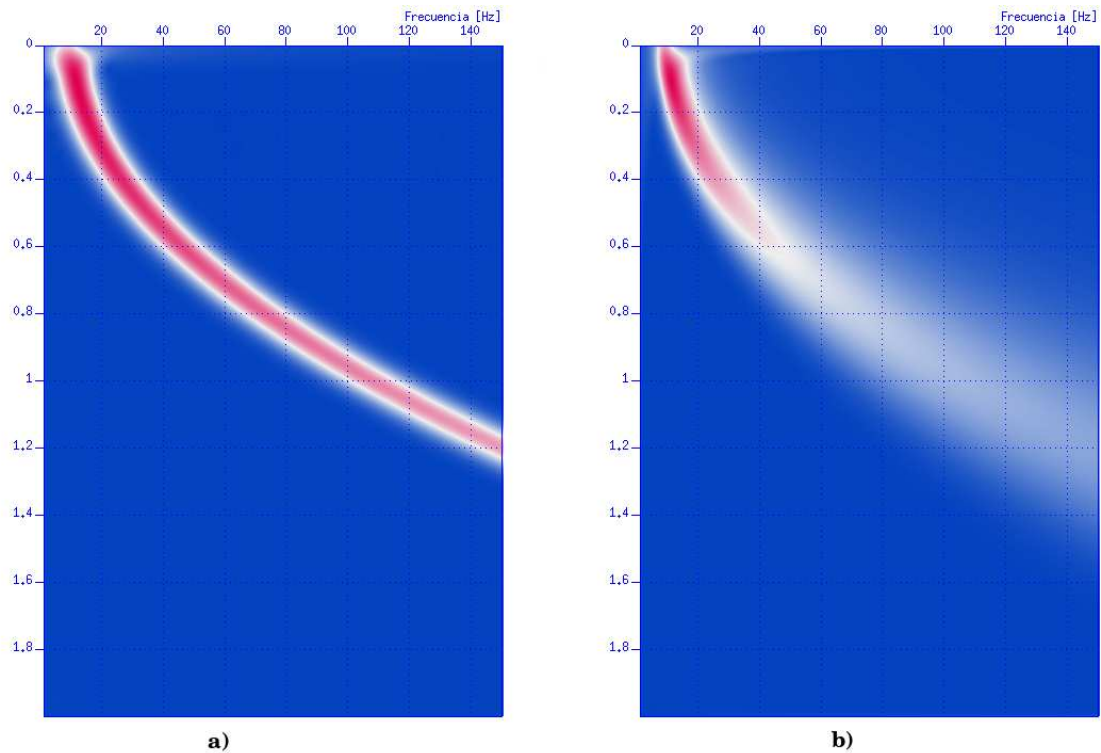


FIGURA 2.57. CWT de una señal cuya frecuencia varía parabólicamente, $f(t) = (600/2\pi)t^2 + (8/\pi)t + 10$, ondícula Morlet compleja, $dt = 1ms$. a) Se realizó con frecuencia central variable para cada frecuencia de análisis, la frecuencia de 1 Hz es 0,037. b) Se realizó con frecuencia central 1 Hz . Fuente Autor.

2.4.3.3. Transformada de Fourier de los coeficientes wavelet

En la figura 2.58, se puede observar que sucedió lo mismo que cuando la frecuencia variaba linealmente, las componentes aumentaron de amplitud.

2.4.4. Señal cuya frecuencia varía de forma decreciente

Para este último caso, se analizó una señal cuya frecuencia variaba de forma decreciente, según la expresión 2.81.

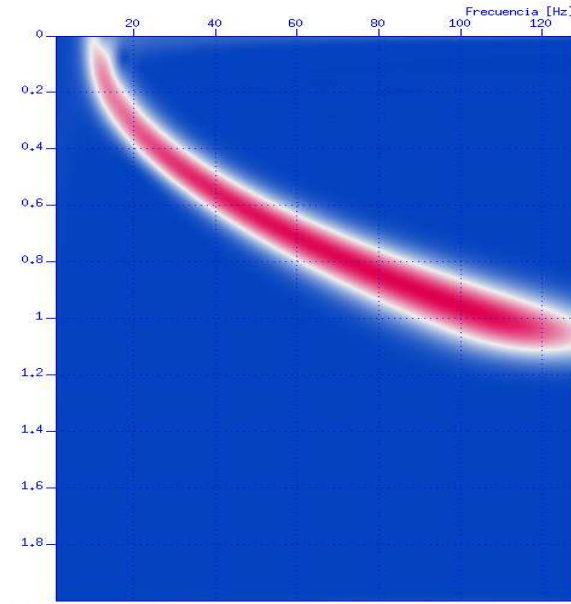


FIGURA 2.58. FTCWT de una señal cuya frecuencia varía parabólicamente, $f(t) = (600/2\pi)t^2 + (8/\pi)t + 10$, ondícula Morlet compleja, $dt = 1ms$, frecuencia central $f_{central} = 1 Hz$. Fuente Autor.

$$x(t) = \cos(b \ln(ct + d)) \quad \omega(t) = \frac{b * c}{ct + d} \quad (2.81)$$

En este caso $b = 100$, $c = 2\pi$ y $d = 1$, la expresión en hertz queda $f(t) = 100/(2\pi t + 1)$. En la figura 2.59 se puede observar la señal procesada y como varía la frecuencia a través del tiempo.

2.4.4.1. Transformada wavelet continua

Con las anteriores señales se observó que al mantener el ancho de banda efectivo y la duración efectiva para todas las frecuencias, se mejoraba la resolución de la imagen, pero al hacer esto, se pierde la principal característica de la CWT, y es que al aumentar la frecuencia mejora la resolución temporal, esto porque cuando la señal cambia rápidamente, se necesita un análisis de tiempo más corto para así poder captar mejor los cambios de frecuencia.

En este caso la señal decrece de un máximo que es $100 Hz$ y el cambio se hace de forma más rápida que lo hecho con la señal cuya frecuencia variaba parabólicamente y linealmente. En la figura 2.60 se observa la CWT en la cual se mantuvo el ancho de banda

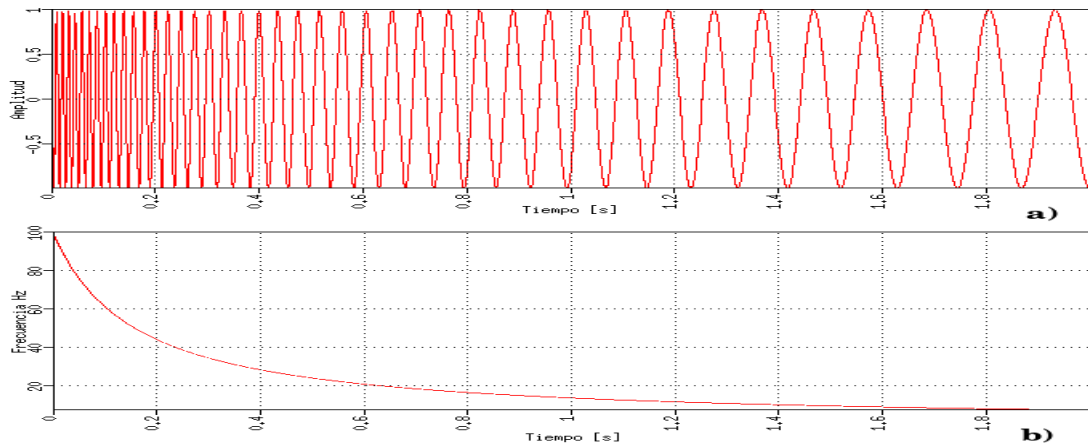


FIGURA 2.59. Señal cuya frecuencia varía parabólicamente según $f(t) = 100/(2\pi t + 1)$. a) Señal procesada. b) Variación frecuencia. Fuente Autor.

constante, es decir se variaba la frecuencia central de la wavelet. El ancho que se mantuvo fue el mismo usado para los casos anteriores o sea $\Delta_f = 3,04$, el cual dejó resultados satisfactorios en los casos anteriores, en la parte b) se usó otro ancho el cual es adecuado en frecuencia pero la resolución en tiempo es muy baja $\Delta_f = 0,5626$.

En la parte a) se pudo observar que al mantener esta resolución a bajas frecuencias se obtiene una resolución de muy baja calidad y además a altas frecuencias se tiene problemas, ya que los cambios ocurren más rápido y por la resolución temporal no se captan muy bien. En la parte b) de la imagen se redujo el ancho de banda efectivo para mejorar la resolución, pero a altas frecuencias no se captan muy bien los cambios debido a que la resolución en tiempo es muy baja.

En este caso se pudo comprobar que al mantener los anchos fijos para todas las frecuencias, se puede caer en el error de escoger anchos de banda que no identifiquen los cambios a altas frecuencias, o por el contrario al mejorar la resolución temporal a bajas frecuencias se obtienen resultados inadecuados.

En la figura 2.61 se detalla la CWT con dos frecuencias centrales diferentes. Se puede observar que entre más cercana sea la frecuencia central con la primera componente de la señal, la resolución en frecuencia mejora, pero la resolución temporal empeora. Si los cambios en frecuencia de la señal son lentos, se puede usar la frecuencia central cercana

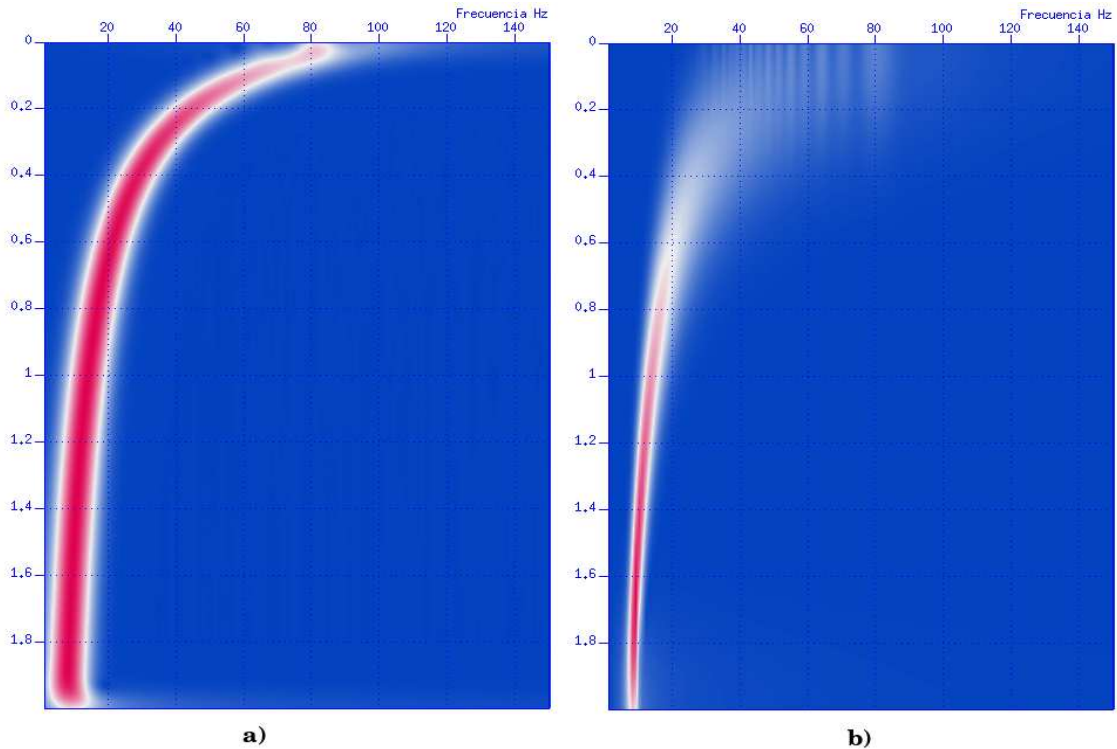


FIGURA 2.60. CWT de una señal cuya frecuencia varía en forma decreciente, $f(t) = 100/(2\pi t + 1)$, ondícula Morlet compleja, $dt = 1ms$. a) Fuente Autor.

a la primera componente, pero si los cambios son rápidos se debe escoger una frecuencia central lejana.

2.4.4.2. Transformada de Fourier de los coeficientes wavelet

En la figura 2.62 se detalla como se mejoran las amplitudes de las componentes a altas frecuencias con la FTCWT, lo mismo que sucedió con las otras señales. En este caso el resultado es muy bueno, o aparentemente muy bueno, debido a que con la CWT se obtuvo buenos resultados a bajas frecuencias y al aplicar la FTCWT no se expanden tanto las componentes.

Para este caso, el inconveniente que posee la FTCWT es el tiempo de cómputo y como se verá más adelante esto es muy importante cuando se tienen una gran cantidad de datos de entrada y además hay que recordar que una imagen sísmica se compone de varias señales, por ejemplo de 5 mil trazas, lo que demoraría demasiado en este proceso.

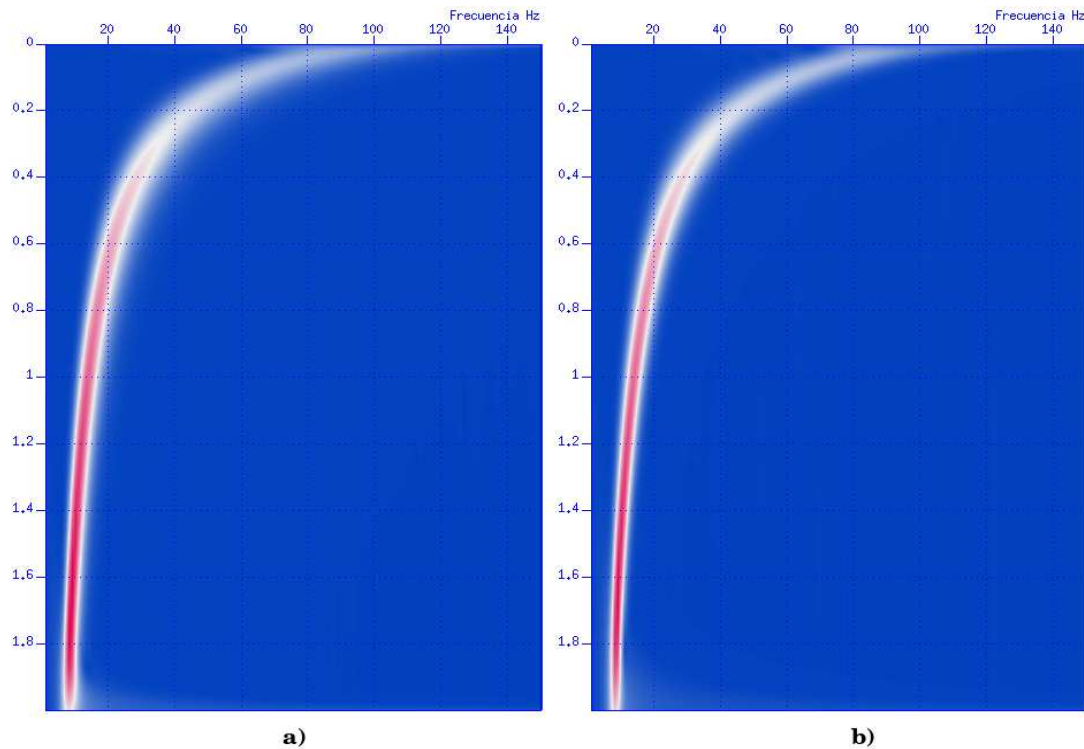


FIGURA 2.61. CWT de una señal cuya frecuencia varía en forma decreciente, $f(t) = 100/(2\pi t + 1)$, ondícula Morlet compleja, $dt = 1ms$. a) Frecuencia central 1 Hz. b) Frecuencia central 1.5 Hz Fuente Autor.

Durante este capítulo se estudiaron las diferentes metodologías escogidas para el desarrollo de este proyecto. Se analizó el comportamiento de cada una y los diferentes factores que llegarían a afectar el resultado de la descomposición.

Para la STFT, se estudió los diferentes factores que afectan el resultado de la descomposición, entre más grande es la longitud de la ventana, mejor es la resolución en frecuencia, pero esta longitud de la ventana trae consigo un factor en contra, que es el corrimiento en la aparición de los eventos, esto debido a que la longitud de la señal no es tan grande y además se rellena con ceros, lo que causa un decrecimiento de las componentes, antes de terminar el tiempo de análisis. Debido a que las capas de la tierra, no son periódicas, se decidió no repetir la señal periódicamente y rellenarla con ceros.

El efecto de los bordes en la STFT se pone de manifiesto principalmente al final de la descomposición y la técnica que se usó reducía estos efectos a frecuencias mayores a

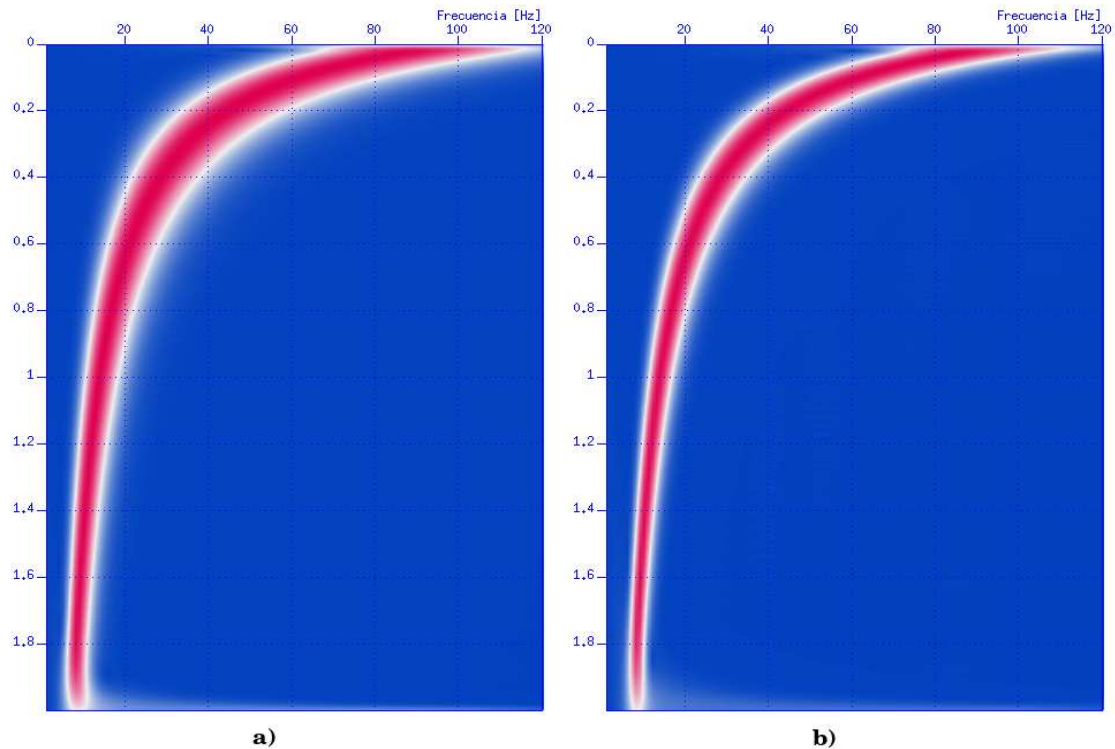


FIGURA 2.62. FTCWT de una señal cuya frecuencia varía en forma decreciente, $f(t) = 100/(2\pi t + 1)$, ondícula Morlet compleja, $dt = 1ms$. a) Frecuencia central 1 Hz. b) Frecuencia central 1,5 Hz. Fuente Autor.

la analizada, pero los aumenta para las frecuencias menores. En las trazas sísmicas estos efectos se reducen ostensiblemente, debido a que estas señales finalizan en valores muy cercanos a cero, debido a que los geófonos captan hasta que las amplitudes de las señales son mínimas.

Por último se analizó en la STFT los efectos de las amplitudes de los lóbulos laterales y como entre más rápido sea la pendiente de caída, desaparecen más rápido estos efectos. Pero el efecto debido a la longitud es el principal, ya que como se mencionó antes, una mala ubicación de los eventos en el tiempo produciría una ubicación errada de la profundidad de la capa.

Para el caso de la CWT también se estudiaron los diferentes factores que afectan el resultado de la descomposición. Esta metodología tiene como principal característica que el ancho de banda y la duración efectiva de la ondícula varían con la escala, o mejor dicho,

con la frecuencia de análisis. También se debe tener en cuenta, un factor muy importante que es la frecuencia central, esto porque los anchos empiezan a variar de su valor inicial a partir de esta frecuencia. Por tal razón entre más pequeña sea la frecuencia central, más rápido mejora la resolución temporal y por consiguiente empeora la resolución en frecuencia.

Entre los factores que afectan el resultado de la CWT, está el efecto de los bordes, el cual se trato de corregir con dos métodos, la multiplicación por una ventana y la extensión de la señal a cero. El primer método dejó un mal resultado debido a que se pierde información por la ventana. El segundo método trajo consigo los mismos efectos que sucedieron en la STFT, pero al igual como se mencionó antes las trazas sísmicas tienen la característica que sus amplitudes finales son cercanas a cero.

Al asumir la CWT como una convolución hay que tener en cuenta la longitud de los vectores, para que la convolución circular se comporte como una lineal. Además se analizó la fase del sistema, para corregir el retardo de grupo, lo que demostró que no es necesario corregirlo, ya que el filtro sólo deja las amplitudes a las que la fase es cero.

También se estudió el concepto de isoresolución y como al ajustar está, se puede empeorar la resolución ya que aumenta el ancho efectivo inicial y por tal razón crece más rápido. Por último se modificó la CWT, para mantener el ancho de banda efectivo y la duración efectiva constante para todas las frecuencias de análisis, se observó que la resolución temporal a bajas frecuencias mejoró, pero cuando los cambios de la señal son muy rápidos, esta resolución fija, afecta de forma negativa la descomposición. Además se quito la principal característica de la CWT, que es la variación de la resolución con la escala.

Para terminar, con la CWT se obtuvo mejores resoluciones que las halladas con la STFT, además la ubicación de los eventos fue mejor, pero al usar wavelets reales el detallamiento en la imagen no es satisfactorio como los resultados obtenidos con la wavelet compleja y además no se les puede ajustar la frecuencia central. Por estas razones en los próximos capítulos las descomposiciones se hicieron con la wavelet Morlet compleja.

La última metodología vista fue la FTCWT que se basa en un análisis de los coeficientes hallados con la CWT, el resultado de aplicar este post-procesamiento es un aumento en las amplitudes y en los anchos de banda, lo que puede ser no deseado en ciertas frecuencias. Además cuando el resultado de la CWT no es bueno, la FTCWT podría empeorarlo como sucedió con la señal cuya frecuencia variaba parabólicamente.

Más adelante se va a analizar el comportamiento de cada metodología con datos sísmicos tanto reales como sintéticos

3. ALGORITMOS IMPLEMENTADOS

Para el desarrollo de este trabajo se implementaron diferentes algoritmos, en la plataforma del software Seismic Un*x. A continuación se describen cada uno de los algoritmos implementados, hablando sobre las características de ellos como son los tiempos de cómputo.

3.1. Algoritmo usado para la STFT

Para hallar la STFT, se partió de la versión discreta de ésta, la cual se muestra en la ecuación 3.1, y con la ecuación se procedió al diseño del algoritmo. Durante el desarrollo del trabajo se diseñaron dos algoritmos, el primero se hizo a partir de la definición mostrada en la ecuación y el segundo con la ayuda de la FFT, a continuación se muestran las estructuras de los dos algoritmos.

$$F[m, l] = \langle f, g_{m,l} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]g[n-m]e^{-\frac{i2\pi ln}{N}}, \quad (3.1)$$

para cada $0 \leq l < N$, $F[m, l]$ es calculado para $0 \leq l < N$ con una transformada de Fourier de $f[n]g[n-m]$.

Los códigos desarrollados se hicieron bajo el software Seismic Un*x, el cual tiene bibliotecas para lectura y procesamiento de datos sísmicos. En el manual de este software, se describe como escribir un código bajo Seismic Un*x (Stockwell & Cohen, 2007), se hace referencia sobre la estructura de los códigos en este Software, el cual es C, pero con bibliotecas y funciones especiales.

Se empezará a explicar el primer algoritmo, el cuál es muy sencillo, pero se partió de éste para probar la metodología, y comprobar la teoría.

Este algoritmo se divide en dos partes, y son :

- Cálculo de la ventana de la STFT

- Cálculo de la STFT a partir de la definición de Transformada enventanada discreta.

La primera parte, la cual contienen los dos algoritmos, es el cálculo de la ventana a usar, que recibe como variables de entrada la longitud y el tipo de ventana a calcular. En el código se desarrollaron las ventanas nombradas en el capítulo 2 y su cálculo se desarrolla a partir de la definición dada en (Oppenheim et al., 2000), el usuario introduce el valor de la longitud L , (recordar que $L = M + 1$), y por medio de un `for` se calcula la ventana.

Para la ventana de Kaiser, se desarrolló una función que halla la función de Bessel mejorada de primer tipo a partir del valor que se introduce. Los valores calculados de la ventana se guardan en un vector para ser usados más adelante.

Para el cálculo de la STFT se siguió el algoritmo mostrado, el cual consta de tres `for` anidados, esto reduce la velocidad de cálculo. Como se puede detallar, este algoritmo es muy básico, pero fue una ayuda para el desarrollo del segundo.

El primer `for` controla la frecuencia de análisis, el segundo controla el factor de desplazamiento y el tercero controla el tiempo o mejor dicho el dato de la señal procesada. Este algoritmo se halla a partir de la definición de transformada de Fourier como se puede observar en el pseudocódigo. En la figura 3.1, se puede observar un ejemplo de una señal procesada con este algoritmo, la señal está compuesta por un seno de 40 Hz y se usó una ventana Hamming con $M = 60$.

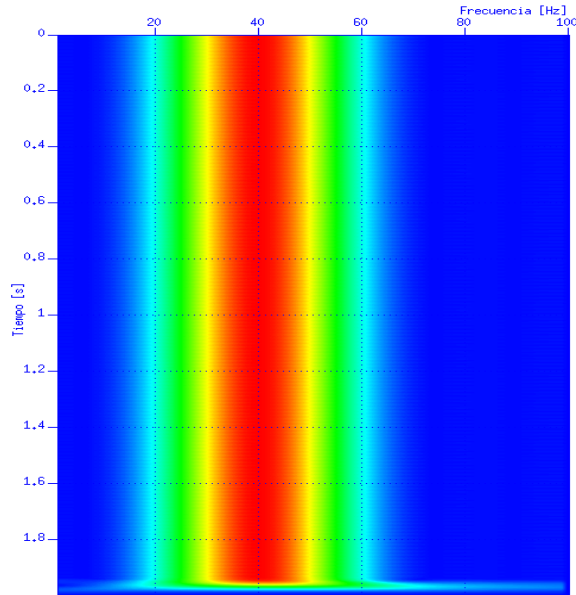


FIGURA 3.1. STFT aplicada a señal compuesta con una senoidal de 40 Hz , con $dt = 1ms$ y ventana Hamming con $M = 60$, realizada con el primer algoritmo.

Algoritmo 1: Algoritmo STFT

Data: $f_{max} < 1/(2 * dt)$

Result: Transformada de Fourier enventanada

inicialización;

for $f = f_{min}$ **to** $f \leq f_{max}$ **do**

for $b = 0$ **to** $b < N$ **do**

for $t = 0$ **to** $t < N$ **do**

$n2 \leftarrow t - b$

if $n2 < lw$ **then**

if $n2 \geq 0$ **then**

$F[m, l] = F[m, l] + f[n] * g[n2] * e^{-i2\pi * f * t * dt}$

else

 | Nada

end

else

 | Nada

end

end

end

end

El segundo algoritmo se desarrolló por medio de la FFT, y contiene más procesos que el anterior. Estos procesos se nombran a continuación:

- Cálculo de la longitud de la FFT y de los vectores.
- Cálculo de la ventana.
- Métodos de corrección de los efectos de borde.
- Cálculo de la STFT, a partir de la FFT.

Para empezar, el cálculo de la longitud de la FFT, se halló por medio de una función interna de Seismic Un*x, que va relacionada con el tipo de algoritmo de FFT, el cuál es el PFA, que no trabaja con potencias de dos sino con factores primos. Para hallar esta longitud se parte de un valor mínimo que es igual a la longitud de la señal de entrada $x[n]$, o si el usuario quiere un espectro con mayor definición ingresa la longitud que desea, claro esta que mayor que la longitud de la señal a procesar. EL valor máximo es dos veces la longitud minima.

El segundo proceso es el cálculo de la ventana, cuya longitud es ingresada por el usuario, y se desarrolló igual que para el anterior algoritmo.

El tercer proceso que se definió es opcional, y consta de un *if* que condiciona si el último valor de la señal es diferente de cero y si lo es, la extiende con una cantidad de puntos definidos externamente. La función para extender la señal puede ser de dos tipos, lineal o exponencial.

Para el cálculo de la FFT se cumplieron varios pasos, se comenzó por hallar una señal $x1[n]$, la cuál es la multiplicación de la señal de entrada por la ventana desplazada $x[n] * w[n - m]$. Despues se halla la FFT de esta señal. Y por último se escogen las frecuencias que se desean analizar, y así se realizan para todos los puntos de desplazamiento.

Algo que no se menciono es que cuando la ventana llega al borde de la señal, se asume cero a partir de este, esto para cubrir todos los puntos de desplazamiento de la señal.

Otro punto importante fue el paso en el que se escogen las frecuencias, debido a que la FFT, no entrega las componentes exactas de las frecuencias a las que se desea visualizar, se usaron dos métodos para hallar éstas:

- Interpolación de la frecuencia siguiente y la frecuencia anterior, es decir por medio de una línea recta se halla el punto intermedio, como se muestra en la figura 3.2. Pero con esta solución se encontraron problemas y fueron cuando la componente que se quería era mas grande o mas pequeña que la recta de interpolación (mirar figura 3.2). Para solucionar estos casos se debía llenar con ceros la señal para aumentar la definición del espectro, pero esto trae consigo un aumento en el tiempo de cómputo.

Una consecuencia de estos efectos, se pueden observar en la figura 3.3, donde las amplitudes de la descomposición se ven afectadas, por tal razon se aumento la longitud de la señal rellenando con ceros.

- Valor RMS de la componente espectral, este metodo es el que se muestra en el algoritmo, y no se necesita relleno de ceros, el metodo consiste en definir un radio que abarque componentes al lado izquierdo y al lado derecho, y así obtener un valor RMS con estas componentes. En la figura 3.4, se puede observar el resultado obtenido con este método sin necesidad de relleno de ceros.

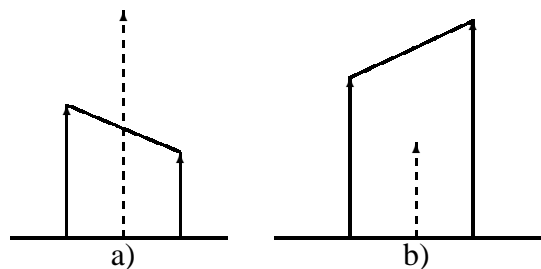


FIGURA 3.2. Casos que se presentan al interpolar la componentes espectrales.
Fuente Autor.

Los tiempos de cómputo de cada algoritmo se muestran en las tablas 3.1 y 3.2, donde se puede observar como se mejora los tiempos de cómputo al aplicar la FFT

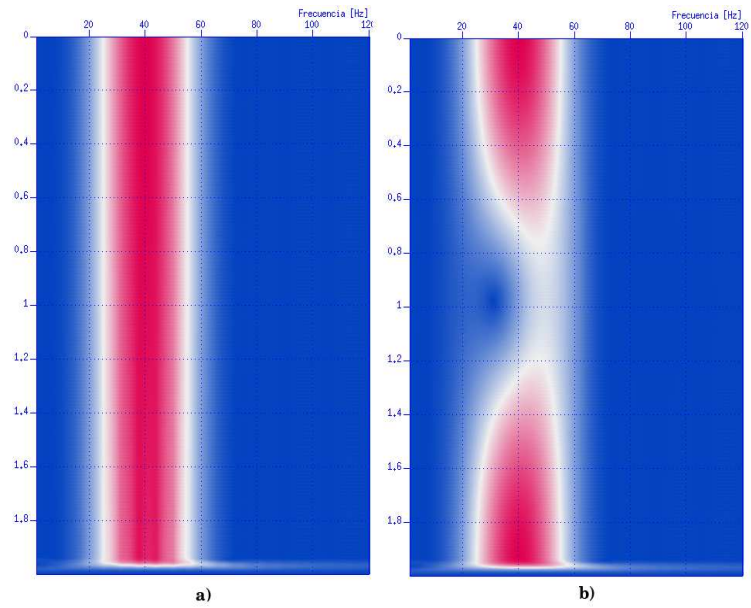


FIGURA 3.3. STFT realizada a una señal compuesta de una senoidal de 40 Hz , con $dt = 1\text{ ms}$, ventana Hamming con $M=60$ e interpolación de componentes. a) Con relleno de ceros, el vector se aumento a 10000 datos. b) Sin relleno de ceros. Fuente Autor.

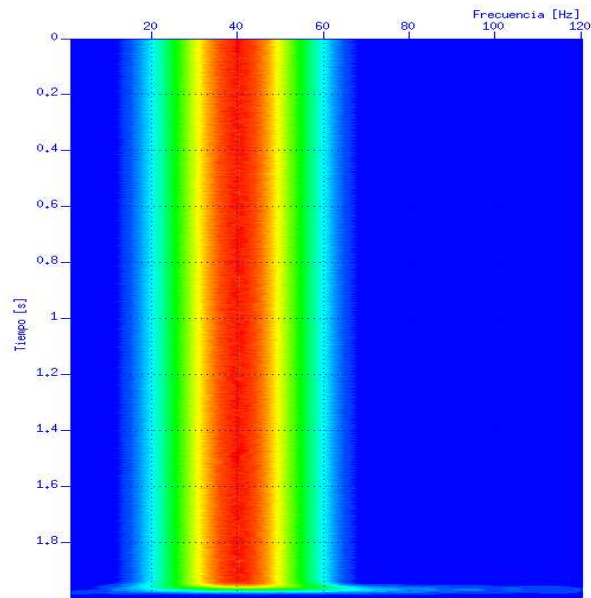


FIGURA 3.4. STFT aplicada a señal compuesta con una senoidal de 40 Hz , con $dt = 1\text{ ms}$ y ventana Hamming con $M = 60$, con valor RMS de las componentes. Fuente Autor.

Algoritmo 2: Algoritmo STFT 2

Data: $f_{max} < 1/(2 * dt)$

Result: Transformada de Fourier enventanada
inicialización;

```
for  $b = 0$  to  $b < N$  do
  for  $i = 0$  to  $i < N$  do
     $n2 \leftarrow b - j$ 
    if  $n2 < lw$  then
      if  $n2 \geq 0$  then
         $x1[i] = x[i] * g[n2]$ 
      else
        | Nada
      end
    else
      | Nada
    end
  end
   $FF = FFT(x1)$ 
  for  $f = f_{min}$  to  $f \leq f_{max}$  do
     $f1 = f + radio$ 
     $f2 = f - radio$ 
     $pmax = floor(f1/df + 1)$ 
     $pmin = floor(f2/df)$ 
     $N1 = 0$ 
    for  $i = pmin$  to  $i \leq pmax$  do
      if  $(i * df) \geq f2$  then
        if  $(i * df) \leq f1$  then
           $F[b, f].r = F[b, f].r + |FF[i].r|^2$ 
           $F[b, f].i = F[b, f].i + |FF[i].i|^2$ 
           $N1 = N1 + 1$ 
        else
          | Nada
        end
      else
        | Nada
      end
    end
     $F[b, f].r = \sqrt{F[b, f].r/N1}$ 
     $F[b, f].i = \sqrt{F[b, f].i/N1}$ 
  end
end
```

Número datos	251	626	2001	3551
Número frecuencias	Tiempo [s]	Tiempo [s]	Tiempo [s]	Tiempo [s]
30	0,20	0,46	1,36	2,79
60	0,42	0,68	2,38	5,84
100	0,54	1,08	4,41	9,66
150	-	1,74	6,59	14,83
200	-	2,20	8,77	19,77

TABLA 3.1. Tiempos de cómputo con el algoritmo básico de la STFT.

Número datos	251	626	2001	3551
Número frecuencias	Tiempo [s]	Tiempo [s]	Tiempo [s]	Tiempo [s]
30	0,10	0,15	0,50	0,60
60	0,15	0,22	0,57	0,69
100	0,18	0,25	0,63	0,71
150	-	0,30	0,65	0,85
200	-	0,36	0,71	0,94

TABLA 3.2. Tiempos de cómputo con el algoritmo de la STFT basado en la FFT.

3.2. Algoritmo usado para la CWT

Al igual que en la STFT, se desarrollaron dos algoritmos, el primero a partir de la definición discreta de transformada de wavelet 2.57 y la segunda con la cwt vista como una convolución, con la ayuda de la FFT.

El primer algoritmo al igual que en la STFT, se desarrolló para probar la metodología y para probar el software Seismic Un*x a continuación se describe este algoritmo.

Lo primero que se realiza es el cálculo de la ondícula, para lo cual se realiza el procedimiento mostrado en el algoritmo 3. Lo que se describe, es el procedimiento para hallar la ondícula a partir de un tiempo máximo, el cuál depende de la ondícula, todo se discretiza dependiendo del tiempo de muestreo de la señal a procesar.

Después de hallar la ondícula se procede a el cálculo de la CWT, este algoritmo consta de tres *for* los cuales controlan la escala, el tiempo de desplazamiento y el tiempo de la señal de entrada, y así se realiza la CWT a partir de la definición discreta. Este algoritmo sirve tanto para wavelet reales como complejas, lo único que debe hacerse en el caso complejo es usar diferentes vectores uno para parte real y el otro para la parte imaginaria.

Estos son los procedimientos más importantes en el primer algoritmo de la CWT, con el cual se obtuvieron los primeros resultados.

Algoritmo 3: Algoritmo CWT 1

```

Data:  $f_{max} < 1/(2 * dt)$ 
Result: Transformada Wavelet Continua
inicialización;
for  $f = f_{min}$  to  $f \leq f_{max}$  do
     $a \leftarrow f_{central}/f$ 
    for  $b = 0$  to  $b < N$  do
        for  $t = 0$  to  $t < N$  do
             $n \leftarrow (t - b)/a$ 
            if  $n \leq maximo$  then
                if  $n \geq -maximo$  then
                     $n1 \leftarrow n/dt$ 
                     $F[b, f] = F[b, f] + x[i] * w[n1 + tmax]$ 
                else
                    | Nada
                end
            else
                | Nada
            end
        end
    end
     $F[b, f] = F[b, f]/\sqrt{a}$ 
end

```

Para el segundo algoritmo desarrollado se uso el hecho que la CWT puede ser vista como la convolución de la señal procesada con la ondícula escalada e invertida en el tiempo, $x(t) * \bar{\psi}(-t/a)$, como se menciona en el capítulo 2.

Este algoritmo tiene como procedimientos más importantes:

- Cálculo de la longitud de la FFT. Para esto al igual que en la STFT, se usó una función interna de Seismic Un*x, la que calcula el valor optimo entre un valor mínimo que era la suma de las longitudes de los vectores de la ondícula y la señal a procesar (para que la convolución circular se comporte como líneal), y un valor máximo que era dos veces el valor minimo. Una cosa que cabe resaltar es que la longitud de la ondícula varía dependiendo de la escala, por esto se tomó

una longitud máxima, que era cuando se aplicaba la escala más pequeña, que a la vez depende de la frecuencia de análisis. Los vectores se rellenaron con ceros para cumplir con el tamaño necesario.

- Corrección efectos de borde de la señal. Para esto se usó el mismo procedimiento que en la STFT, pero aquí se corrigen los efectos, no sólo al final de la señal, sino también al inicio. Además se adhirió otro método que es la multiplicación por una ventana, el cual fue el que dejó el resultado menos deseado, como se vió antes.
- Cálculo de la FFT de la señal a procesar.
- Cálculo de la FFT de la ondícula y corrección de fase, debido al desplazamiento en el tiempo. Esto se puede observar en el algoritmo 4.
- Multiplicación de espectros.
- Transformada inversa.

Algoritmo 4: Algoritmo CWT 2

Data: $f_{max} < 1/(2 * dt)$
Result: Transformada Wavelet Continua
 inicialización;
 $X \leftarrow FFT(x)$
 $t_{max} \leftarrow \text{maximo} * f_{max} / f_{central}$
for $f = f_{min}$ **to** $f \leq f_{max}$ **do**
 $a \leftarrow f_{central} / f$
 for $t = -t_{max}$ **to** $t \leq t_{max}$ **do**
 $w[t + t_{max}] \leftarrow \overline{\psi}(-t * dt / a)$
 end
 $W \leftarrow FFT(w)$
 $W \leftarrow W * e^{-i * t * t_{max}}$
 $F = X * W$
 $WT \leftarrow IFFT(F)$
 $CWT[f, t] \leftarrow WT / \sqrt{a}$
end

En la figura 3.5 se muestra una comparación de los resultados de aplicar los dos algoritmos en una señal compuesta de una senoidal con frecuencia constante igual a $40Hz$. Como se puede observar en la figura no hay gran diferencia entre las dos figuras, hay que

tener en cuenta que no se aplicó la corrección de bordes, pero la diferencia principal radica en los tiempos de cómputo.

Los tiempos de cómputo de cada algoritmo se muestran en las tablas 3.1 y 3.2, donde se puede observar como se mejora los tiempos al aplicar la FFT.

Número datos	251	626	2001	3551
Número frecuencias	Tiempo [s]	Tiempo [s]	Tiempo [s]	Tiempo [s]
30	0,32	0,94	2,46	13,22
60	0,40	1,30	3,91	27,83
100	0,60	1,99	9,17	60,02
150	-	2,65	15,02	96,37
200	-	3,24	25,82	160,33

TABLA 3.3. Tiempos de cómputo con el algoritmo básico de la CWT.

Número datos	251	626	2001	3551
Número frecuencias	Tiempo [s]	Tiempo [s]	Tiempo [s]	Tiempo [s]
30	0,10	0,36	0,35	0,18
60	0,20	0,85	0,70	0,35
100	0,37	1,16	1,14	0,96
150	-	1,79	1,65	2,00
200	-	2,14	2,10	3,25

TABLA 3.4. Tiempos de cómputo con el algoritmo de la CWT basado en la FFT.

3.3. Algoritmo usado para el cálculo de la FTCWT

Para el cálculo de la FTCWT, se partió del segundo algoritmo de la CWT, que es el más rápido. A este algoritmo se le adicionó el algoritmo de la FTCWT, el cual se puede observar en la expresión:

$$FT(\omega, b) = \frac{1}{C_\psi} \sum_{a=a_{min}}^{a_{max}} \frac{CWT(a, b)\Psi(a\omega)e^{-i\omega b}}{a^{3/2}} \Delta a \quad (3.2)$$

El algoritmo consta de tres *for* para controlar la escala, la frecuencia y el tiempo, por esta razón se realizó sobre el algoritmo más rapido de CWT, debido a que tres *for* anidados aumenta demasiado el tiempo de cómputo. lo que se puede observar en la tabla.

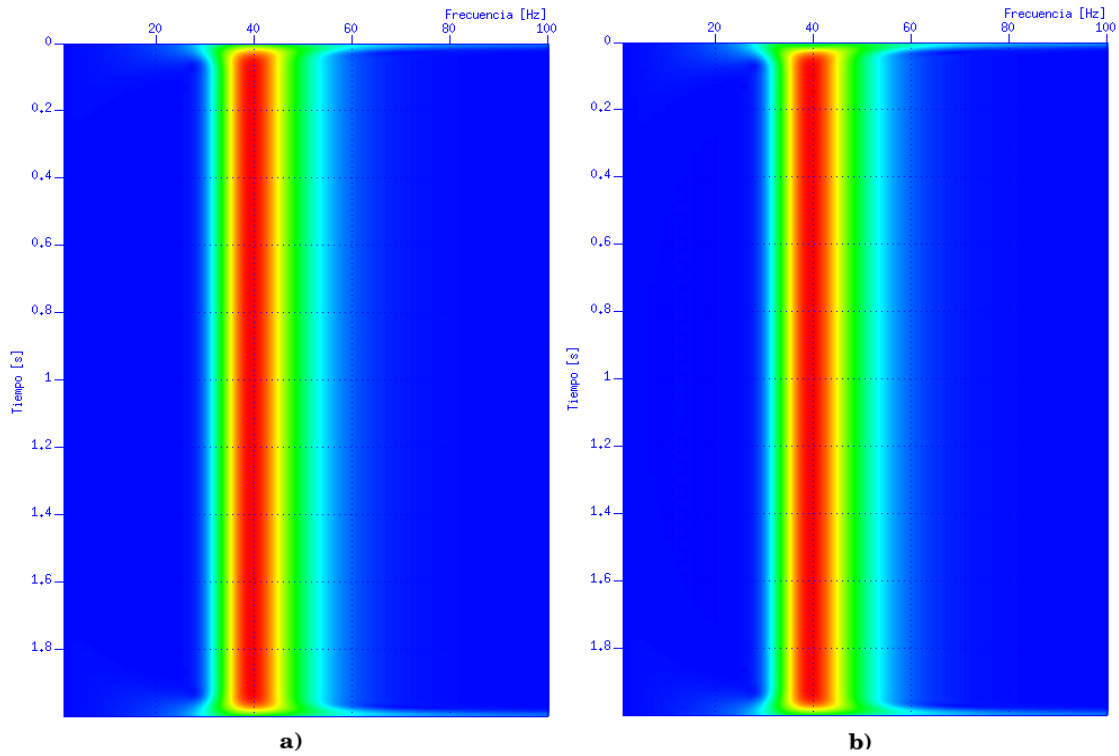


FIGURA 3.5. CWT aplicada a señal compuesta con una senoidal de 40 Hz, con $dt = 1ms$ y ondícula Morlet con $f_{central} = 1$. a) Algoritmo 1. b) Algoritmo 2. Fuente Autor.

Los efectos de la discretización de esta expresión, está en que la sumatoria será igual a la integral entre más escalas se analicen.

Número datos	251	626	2001	3551
Número frecuencias	Tiempo [s]	Tiempo [s]	Tiempo [s]	Tiempo [s]
30	1,32	4,08	8,35	23,58
60	4,47	16,24	34,63	80,62
100	15,10	41,73	90,00	245,05
150	-	94,12	200,07	520,64
200	-	192,45	390,05	1070,72

TABLA 3.5. Tiempos de cómputo con el algoritmo de la FTCWT basado en la FFT.

En este capítulo se describieron los diferentes algoritmos implementados en cada metodología. Para la CWT y la STFT se hicieron dos tipos de algoritmos, uno usando la definición discreta y el otro con la ayuda de la FFT, se compararon resultados y no

dejaron gran diferencia, sólo en los tiempos de cómputo y este factor es muy importante, en el momento de procesar grandes volúmenes de datos.

Se pudo observar que al usar la FFT para la STFT, se observó que al hacer el proceso para las frecuencias de análisis requeridas, se obtuvo mejor resultado al hallar el valor RMS de los valores cercanos, que al intentar hacer una interpolación lineal, esto debido a los efectos del poco detallamiento del espectro, ya que al rellenar con ceros se obtuvo mejores resultados, pero los tiempos empeoran.

Los tiempos de cómputo al usar la FFT en la CWT, aumentan al disminuir la longitud de los datos, que es una característica de la FFT.

El algoritmo implementado para hallar la FTCWT fue el que dejó los tiempos de cómputo más grandes, debido a que para este proceso, se necesitaba hallar primero la CWT y además este algoritmo usaba tres *for* anidados, lo que hace el proceso lento.

4. PROCESAMIENTO DE DATOS SÍSMICOS

En este capítulo se van a aplicar las metodologías vistas en el capítulo dos al procesamiento de datos sísmicos, tanto sintéticos como reales, analizando los resultados obtenidos con cada técnica. Por último se muestran diferentes usos de estos procesos en la exploración sísmica.

4.1. Procesamiento de datos sintéticos

El desarrollo de este trabajo se basó principalmente en el trabajo mostrado en el artículo (Castagna et al., 2003) y en el trabajo de doctorado (Sinha, 2005). En el artículo se comparan diferentes metodologías de descomposición espectral, por medio de una traza generada sintéticamente. La cual se compone de ondículas con frecuencias centrales diferentes, desplazadas en el tiempo y sumadas, como se ve en la figura 4.1. De este artículo se tomó la idea para la generación de la traza sintética.

En la figura 4.2 se puede observar el gráfico de la traza generada por superposición de ondículas Morlet con frecuencias centrales que coinciden con las de la figura 4.1.

En la figura 4.3 se puede observar la magnitud espectral de la traza generada, se usó el comando SUFFT de Seismic Un*x para hallar este espectro. Como se mencionó antes, el tiempo en una traza es equivalente a la profundidad en la que suceden los eventos y esto tiene relación con las capas del subsuelo. Por tal razón, al hallar la magnitud espectral de una traza, se pierde información de ésta y para poder tener toda la información se usan los métodos espectro-temporales.

En las próximas secciones se aplicarán las diferentes metodologías a esta traza, para poder comparar los resultados con los que se obtienen en el artículo antes citado.

4.1.1. Transformada de Fourier enventanada

Como ejemplo de aplicación de la STFT, se hizo un procesamiento con la ventana de Kaiser, los parametros de la ventana hallados fueron $\beta = 4,86$, el equivalente a la Blackman, $M = 410$ y $\Delta_{mlf} = 10Hz$, el cuál es un ancho de banda grande y a pesar de

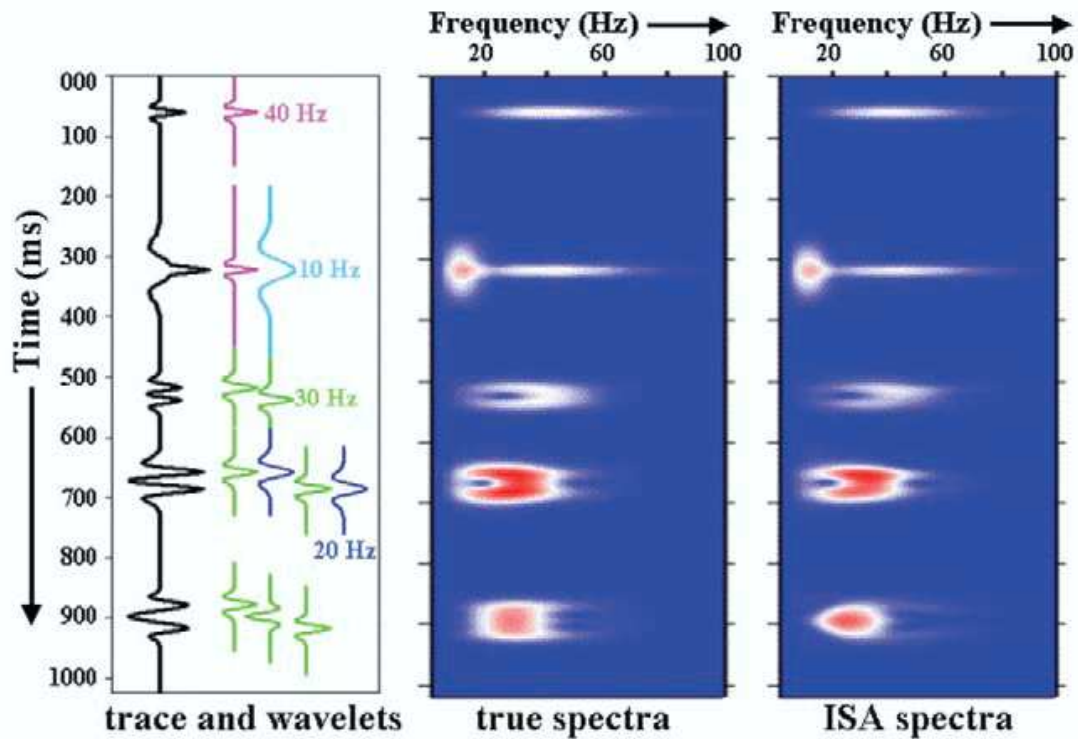


FIGURA 4.1. Traza sintética generada por ondículas con diferentes frecuencias centrales, desplazadas y superpuestas, espectro real y espectro realizado con la técnica ISA. Fuente (Castagna et al., 2003)

esto la longitud de la ventana es también grande. En la figura 4.4, se muestra el resultado de la descomposición, debido a la gran longitud de la ventana resulta un corrimiento en los eventos de tal forma que el primer evento no aparece y esto es un resultado inadecuado, debido a la importancia de la localización de los eventos.

Un detalle importante es que el programa no tiene que hacer corrección de efectos de borde, debido a que la señal empieza en cero y termina en cero.

Si se mejora la resolución en tiempo, entonces se pierde resolución en frecuencia, que de por si ya es baja en este caso. Como se observó en la figura 4.3, las amplitudes del espectro son casi nulas a 120Hz y por tanto en la descomposición debido a la inadecuada resolución en frecuencia, estas componentes se extienden a más de 120Hz .

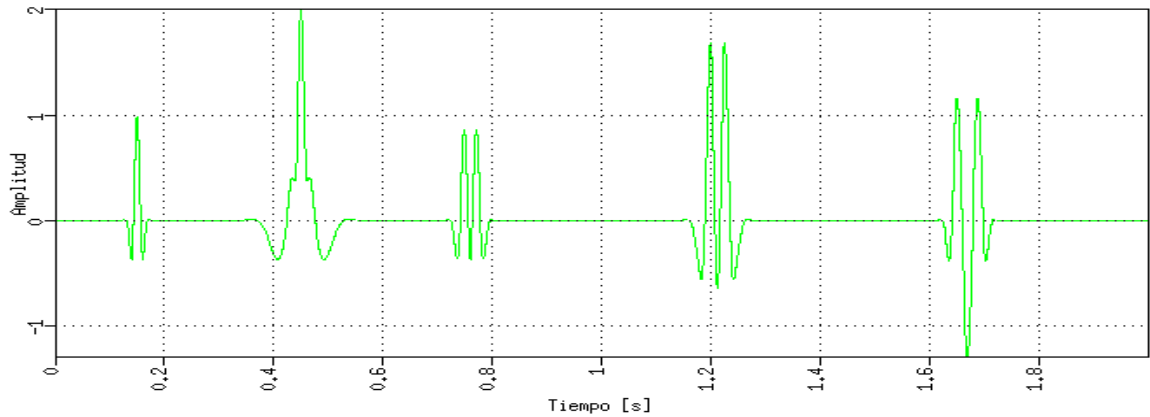


FIGURA 4.2. Traza sintética generada por ondículas Morlet con diferentes frecuencias centrales, desplazadas y superpuestas. Fuente Autor

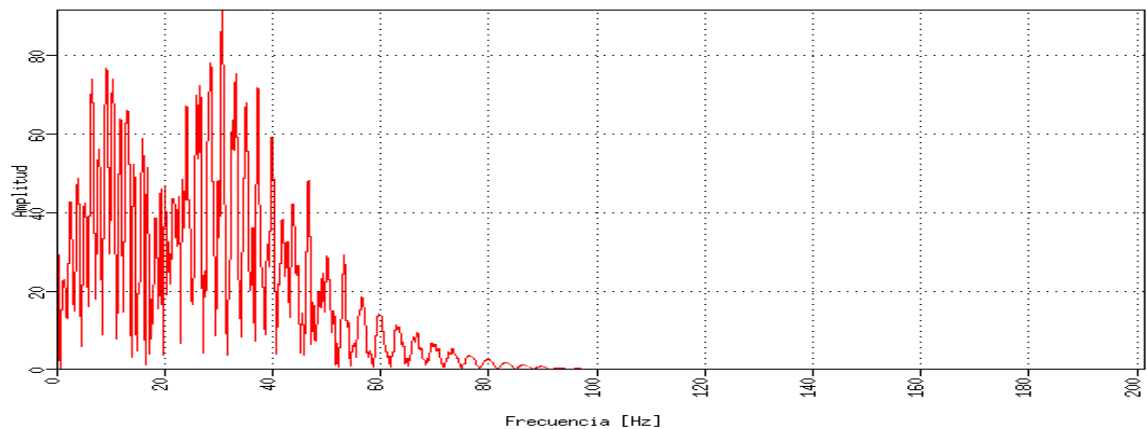


FIGURA 4.3. Magnitud espectral de la traza sintética generada. Fuente Autor

4.1.2. Transformada wavelet continua

En el capítulo 2 se estudiaron las tres metodologías mencionadas en el trabajo de doctorado (Sinha, 2005) y se analizó el comportamiento de la CWT sobre señales con comportamiento conocido, en esta parte se va a analizar el procesamiento de la traza sintética con la CWT.

Como se observó en el anterior ejemplo la resolución temporal es muy importante en el procesamiento de trazas sísmicas y por tal razón en el siguiente ejemplo de procesamiento se trató de mantener una buena resolución en tiempo, sin afectar la resolución en frecuencia.

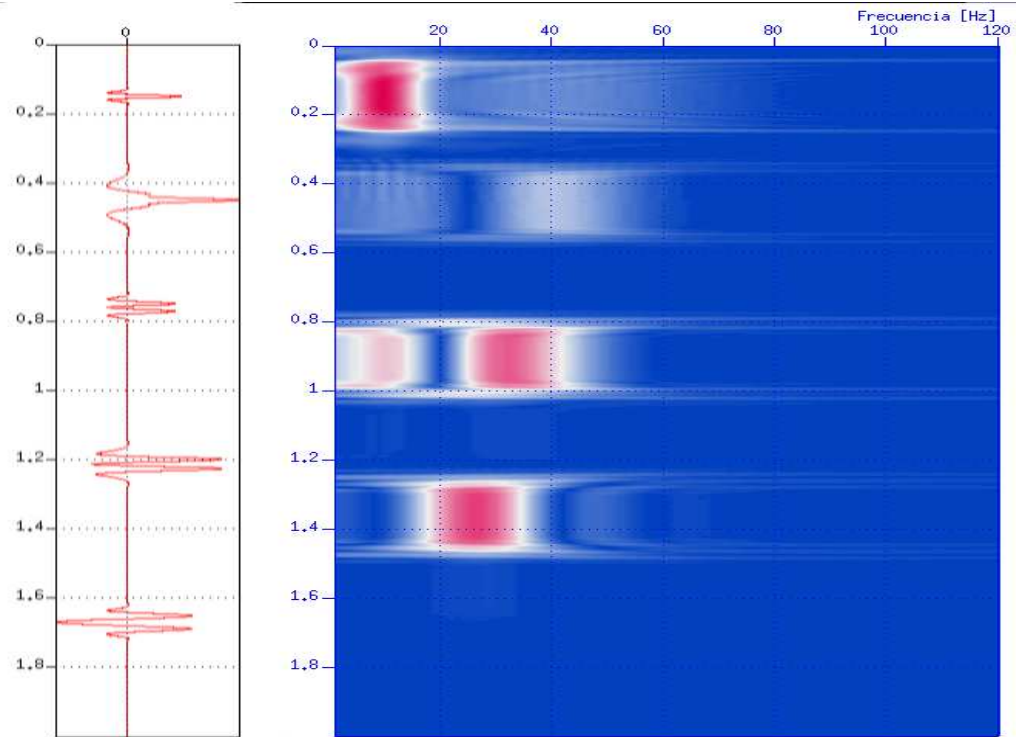


FIGURA 4.4. Descomposición espectral de la traza sintetica con la STFT, con una ventana Kaiser, con $\beta = 4,86, M = 410$ y $\Delta_{mlf} = 10Hz$. Fuente Autor.

Para empezar el análisis se va a definir la wavelet a utilizar, la cual es la wavelet Morlet compleja con ancho de banda fijo. Para esta wavelet $\Delta_{\omega_0} = \Delta_{t_0} = 0,7071$, estos son los valores de inicio de resolución, es decir, son los valores para cuando $f = f_{central}$, son iguales ya la wavelet tiene isoresolución. Se puede definir la frecuencia central para tener la resolución que se quiera, a una frecuencia que se desee.

Partiendo de las expresiones dadas en el capítulo 2, se tiene

$$f_{central} = \frac{\Delta_{\omega_0} f}{2\pi \Delta_f} \quad (4.1)$$

Donde Δ_f es el ancho de banda efectivo que se desea a la frecuencia f . Lo mismo se puede hacer para la duración efectiva y la expresión queda.

$$f_{central} = \frac{\Delta_t f}{\Delta_{t_0}} \quad (4.2)$$

Por ejemplo, se seleccionó un ancho de banda efectivo de 2 Hz , para la frecuencia de 40 Hz , entonces se cálculo que la frecuencia central para que se cumpla este requerimiento es de $2,2\text{ Hz}$, y por tanto la duración efectiva a esta frecuencia es de $\Delta_t = 0,039$.

La figura 4.5 representa la descomposición para la frecuencia central hallada. Se puede observar que a bajas frecuencias la resolución en frecuencia es mucho mejor que la resolución temporal, por esto se ven esos efectos a bajas frecuencias y las amplitudes se ven alargadas. Caso contrario ocurre a altas frecuencias donde la resolución temporal es mejor y el espectro se alarga hacia las altas frecuencias

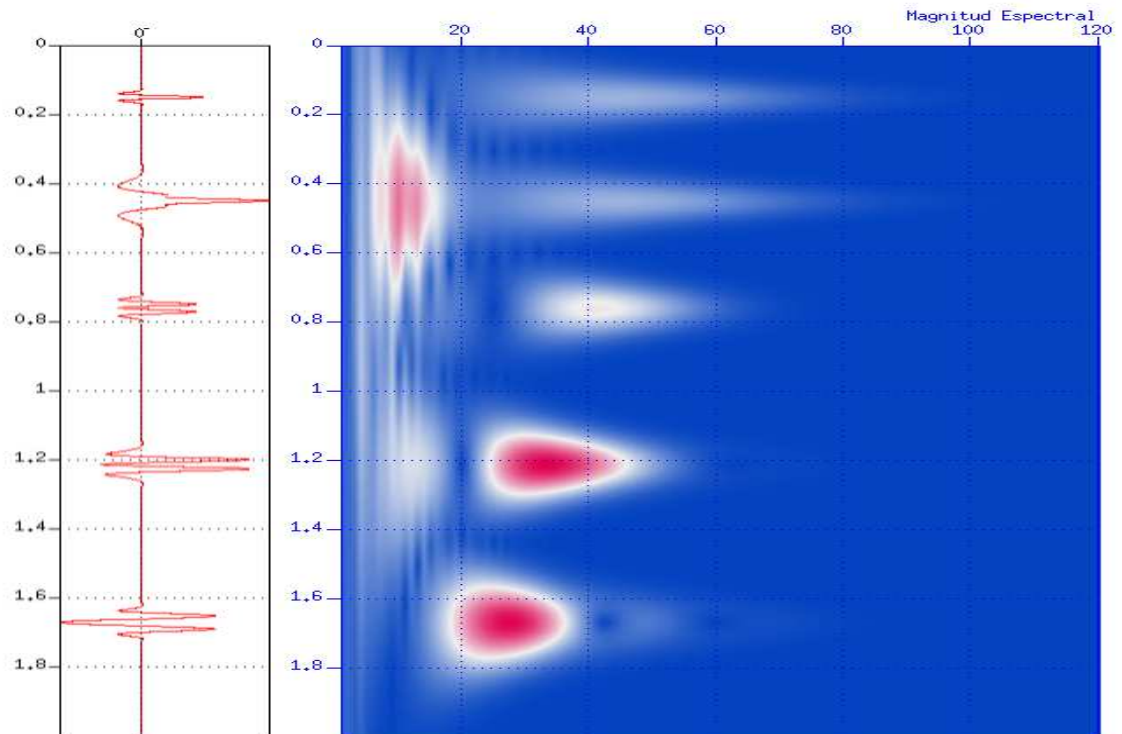


FIGURA 4.5. CWT aplicada a la traza sintética con $f_{central} = 2,2$ y wavelet Morlet compleja. Fuente Autor.

Si se disminuye la frecuencia a la que se desea este ancho de banda efectivo, por ejemplo a 20 Hz , se obtiene una frecuencia central $f_{central} = 1,12\text{ Hz}$ y la misma duración efectiva hallada antes $\Delta_t = 0,039$. La figura 4.6 muestra que al reducir la frecuencia central se mejora la resolución temporal a bajas frecuencias, por esto se reducen los efectos que se observaban en la figura 4.5

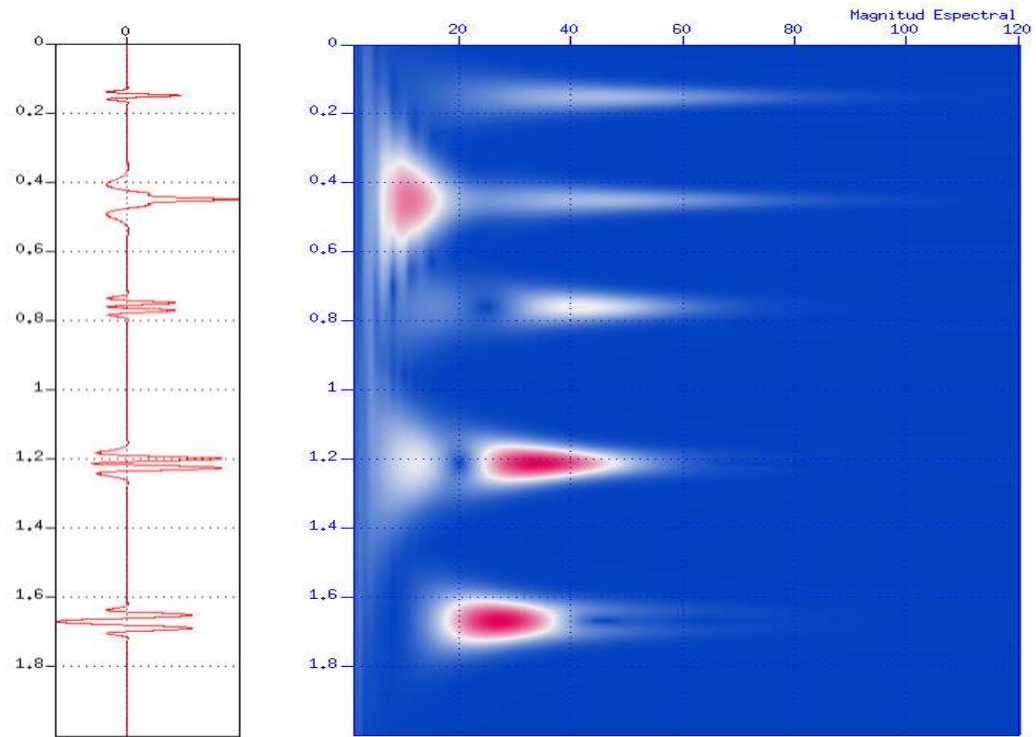


FIGURA 4.6. CWT aplicada a la traza sintética con $f_{central} = 1,12$ y wavelet Morlet compleja. Fuente Autor.

Algo que se observó en el capítulo dos, era que al procesar la señal por bloques se mantenían unos rangos de resolución en los bloques procesados y más adelante se observó que si se quería mantener una resolución igual para todas las frecuencias, se podía procesar cada frecuencia como un bloque independiente y después unir estos resultados.

Si se desea un ancho de banda efectivo para todas las frecuencias, el proceso sería hallar la frecuencia central para la frecuencia de $1 Hz$, y el resto de frecuencias centrales son múltiplo de la frecuencia de análisis, es decir $f_{central}(f) = f_{central}(1Hz) * f$.

Por ejemplo se desea un ancho de banda efectivo de $2 Hz$ para todas las frecuencias de análisis, entonces la frecuencia central para tener este ancho de banda a $1 Hz$, es $0,0562 Hz$ y el resto de frecuencias centrales son múltiplo de las frecuencias de análisis con la anterior frecuencia central. En la figura 4.7 se muestra este proceso para la traza sintética, como se puede observar a medida que se aumenta la frecuencia central, se mejora la resolución

temporal. A diferencia de los procesos con frecuencia central fija, a bajas frecuencias se mejoró la resolución temporal y se mantiene durante todo el análisis.

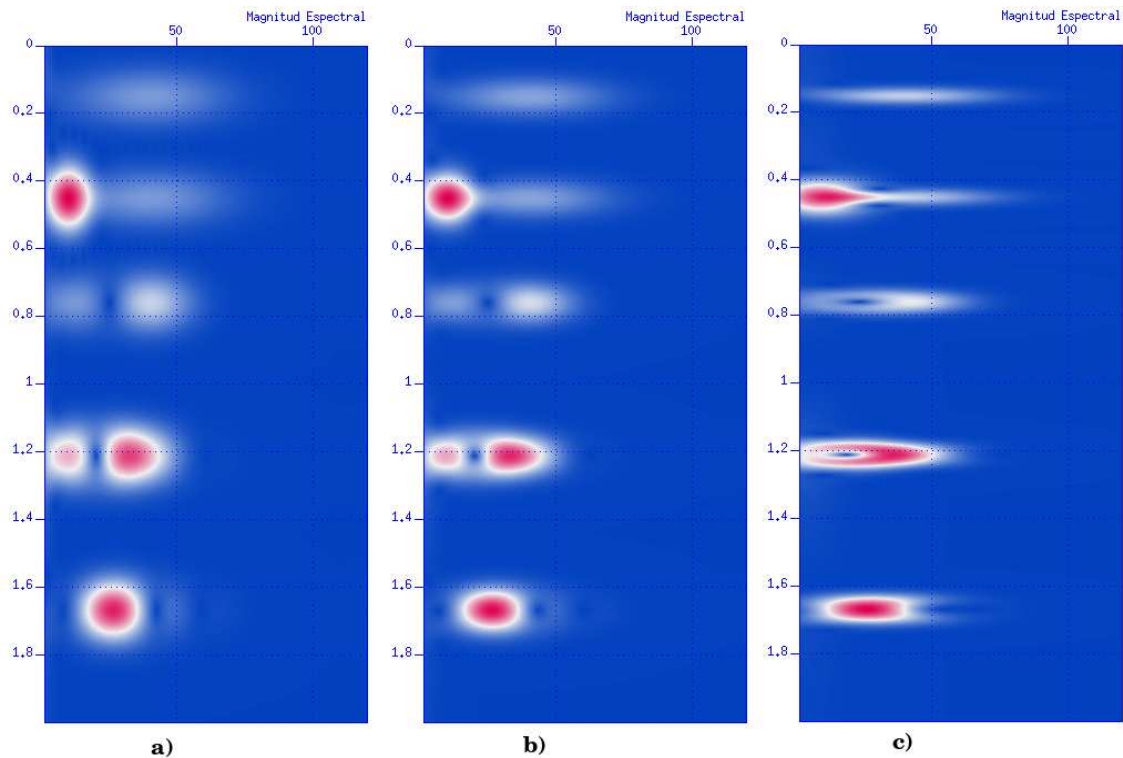


FIGURA 4.7. CWT con variación de la frecuencia central y wavelet Morlet compleja. a) Frecuencia central para 1 Hz de $f_{central} = 0,018$. b) Frecuencia central para 1 Hz de $f_{central} = 0,037$. Frecuencia central para 1 Hz de $f_{central} = 0,056$. Fuente Autor.

4.1.3. Transformada de Fourier de los coeficientes wavelet

Como se mencionó antes, esta metodología depende del proceso de la CWT y el resultado de aplicarlo es el aumento del ancho de banda, mejorando así la resolución temporal. La transformada de Fourier de coeficientes Wavelet consiste en la transformada de Fourier de la transformada inversa Wavelet, es decir se le hace la transformada de Fourier a una señal prefiltrada, ya que solo se compone de las frecuencias analizadas en la CWT.

En la figura 4.8 se muestra la FTCWT de la traza sintética, se realizó la CWT con $f_{central} = 2,2$, en la imagen se puede comparar como al aplicar la FTCWT, se aumenta el ancho de banda y como se mejora la resolución temporal, por eso se intenta mejorar la

resolución temporal a bajas frecuencias, pero como el resultado depende del procesamiento con la CWT, estos resultados no van a mejorar ostensiblemente la imagen.

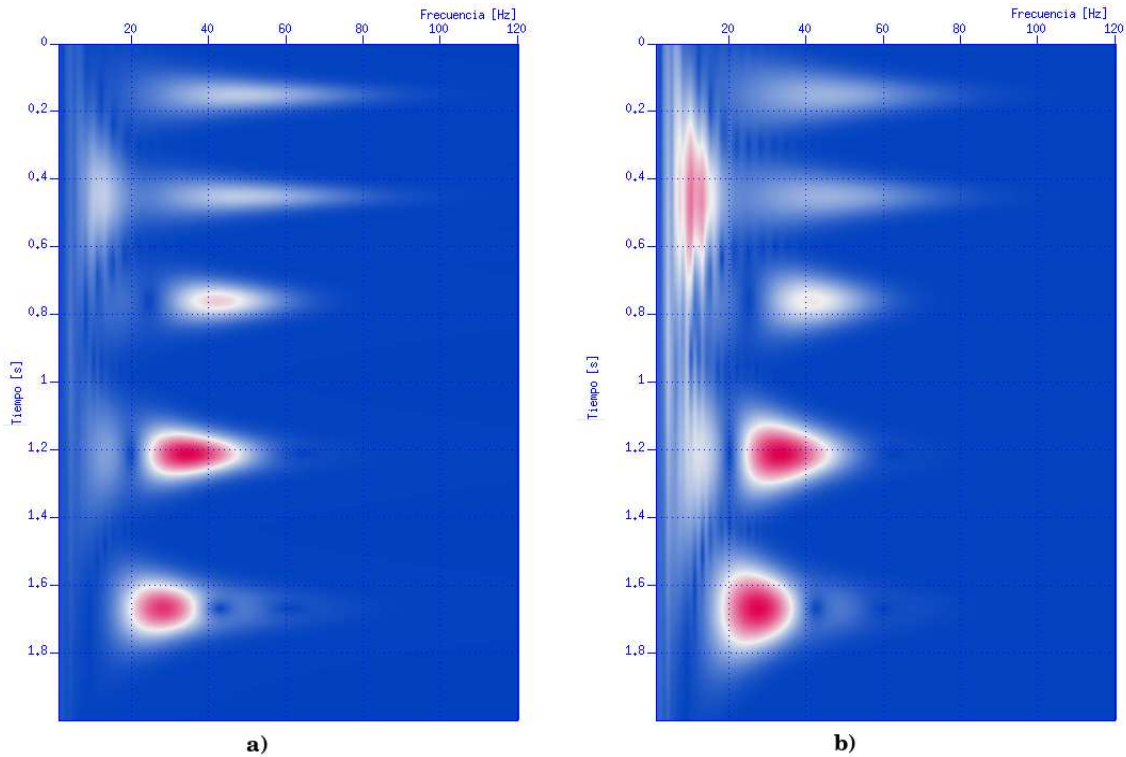


FIGURA 4.8. FTCWT de la traza sintética con $f_{central} = 2, 2$, ondícula Morlet Compleja. a)FTCWT. b)CWT. Fuente Autor.

En la figura 4.9 se muestra el mismo proceso para la traza sísmica pero con $f_{central} = 1, 12$, se observaron los mismos efectos antes mencionados.

4.2. Procesamiento de datos sísmicos reales

En esta parte del proyecto se va a procesar datos reales, pero antes que eso, es necesario conocer algunas características de una traza real. Como se mencionó en el capítulo uno, una traza sísmica es el resultado de la reflexión de una onda a través del subsuelo, con un preprocesamiento apropiado.

En la figura 4.10, se muestra una traza real de una línea sísmica y como se puede ver comienza y termina en cero, por lo tanto los efectos de borde no van a ser tan significativos.

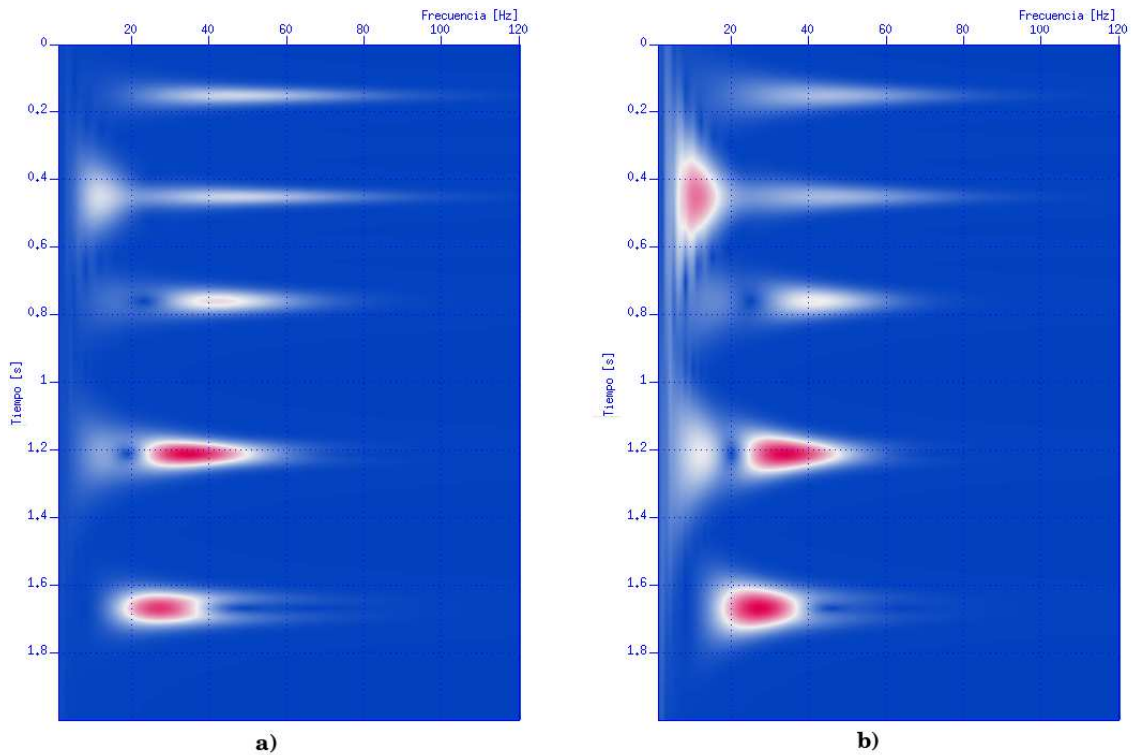


FIGURA 4.9. FTCWT de la traza sintética con $f_{central} = 1, 12$, ondícula Morlet Compleja. a)FTCWT. b)CWT. Fuente Autor.

En la figura 4.11, se puede ver la magnitud espectral de esta traza, la cual aparentemente no tiene amplitudes significativas después de los $120Hz$ y esto se confirma viendo la imagen de la energía de la señal, la cual indica que a los $120Hz$, ya está más del 98% de la energía de la señal. Por esta razón a partir de este momento se hace la descomposición espectral hasta la frecuencia mencionada.

4.2.1. Transformada de Fourier enventanada

Se aplicó la transformada de Fourier enventanada a la traza mostrada, ver figura 4.12, y se notaron los mismos problemas que para las otras señales, y es que por motivo de que la señal no es infinita y se rellena con ceros, aparece un corrimiento en los eventos, ya que cuando la ventana llega al borde se empieza a llenar con ceros de ahí en adelante, los cuales afectan de manera negativa la ubicación de los eventos, y si se quiere una mejor resolución en frecuencia se aumenta la longitud y este corrimiento se hace cada vez

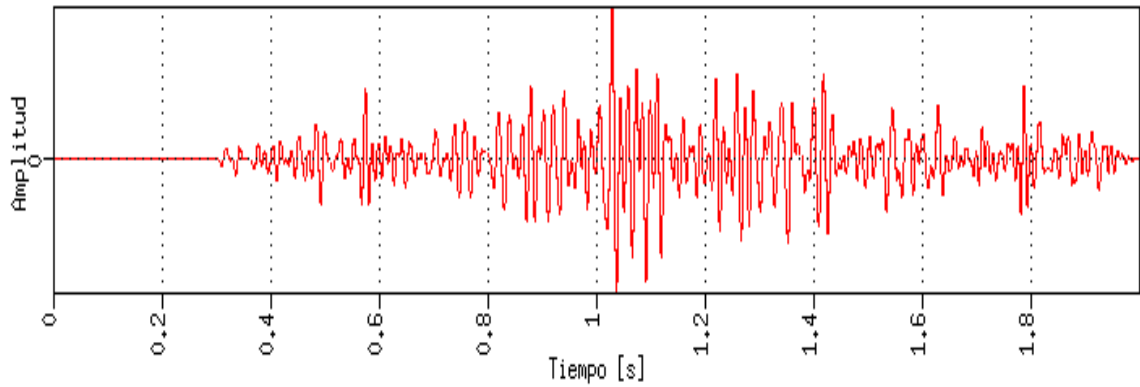


FIGURA 4.10. Trazas reales de una línea sísmica. Fuente Autor

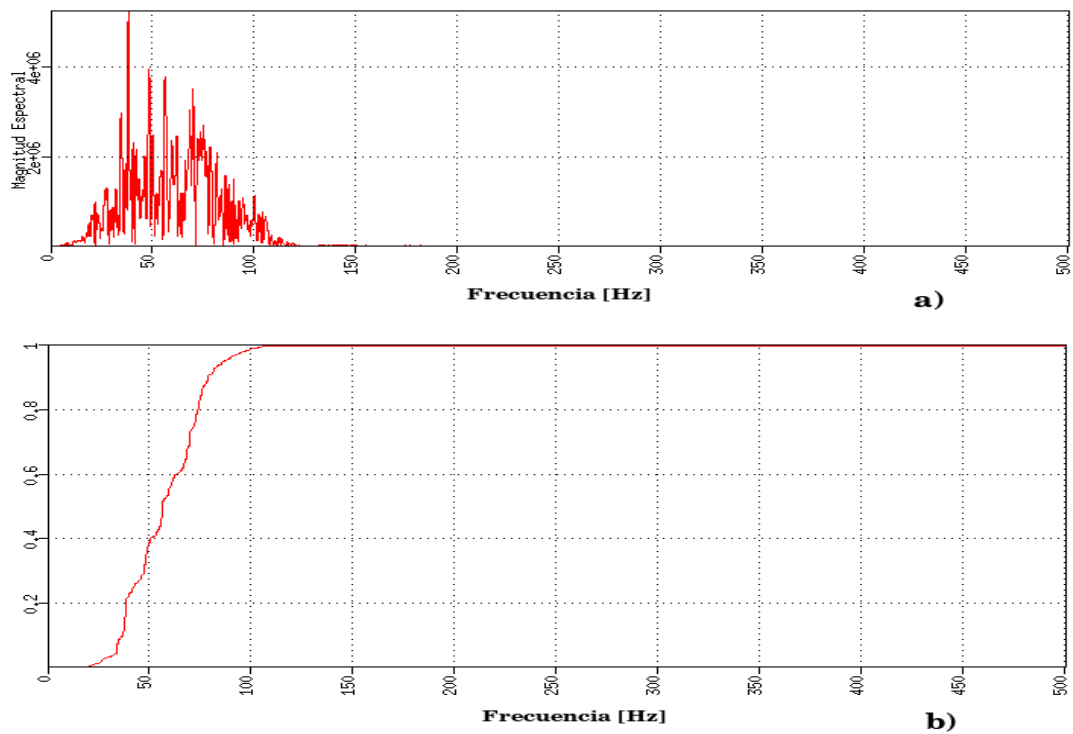


FIGURA 4.11. Magnitud espectral y distribución de energía de una traza real. a) Magnitud espectral. b) Distribución de energía. Fuente Autor.

más evidente. El ancho del lóbulo principal en la figura es de $\Delta_{mf} = 60 \text{ Hz}$ no es una resolución adecuada.

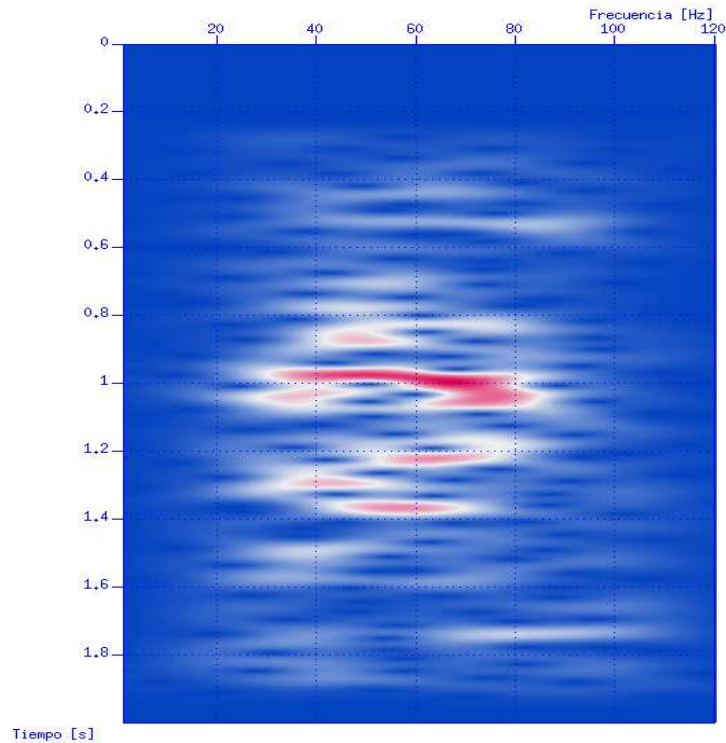


FIGURA 4.12. STFT de una traza real, con ventana Blackman y $M = 100$.
Fuente Autor

4.2.2. Transformada wavelet continua

Como se puede ver en la figura 4.13, se realizó la CWT, para la misma traza, pero se cambió la frecuencia central. Se puede notar como al escoger una frecuencia central cada vez más pequeña, la resolución temporal se mejora para las mismas frecuencias donde con la frecuencia central más grande está resolución temporal no es buena, mejorando la resolución en frecuencia. Este cambio de una a otra resolución es muy importante tenerlo en cuenta, ya que como se verá más adelante cuando la resolución temporal es buena se usa para el detallamiento de formaciones.

En la figura 4.14 se hizo la CWT con frecuencia central variable, aunque este proceso le quita la característica principal a la CWT, que es la variación de las resoluciones con la frecuencia, se ha visto que en ocasiones este proceso es adecuado como pasó con algunas señales del capítulo 2.

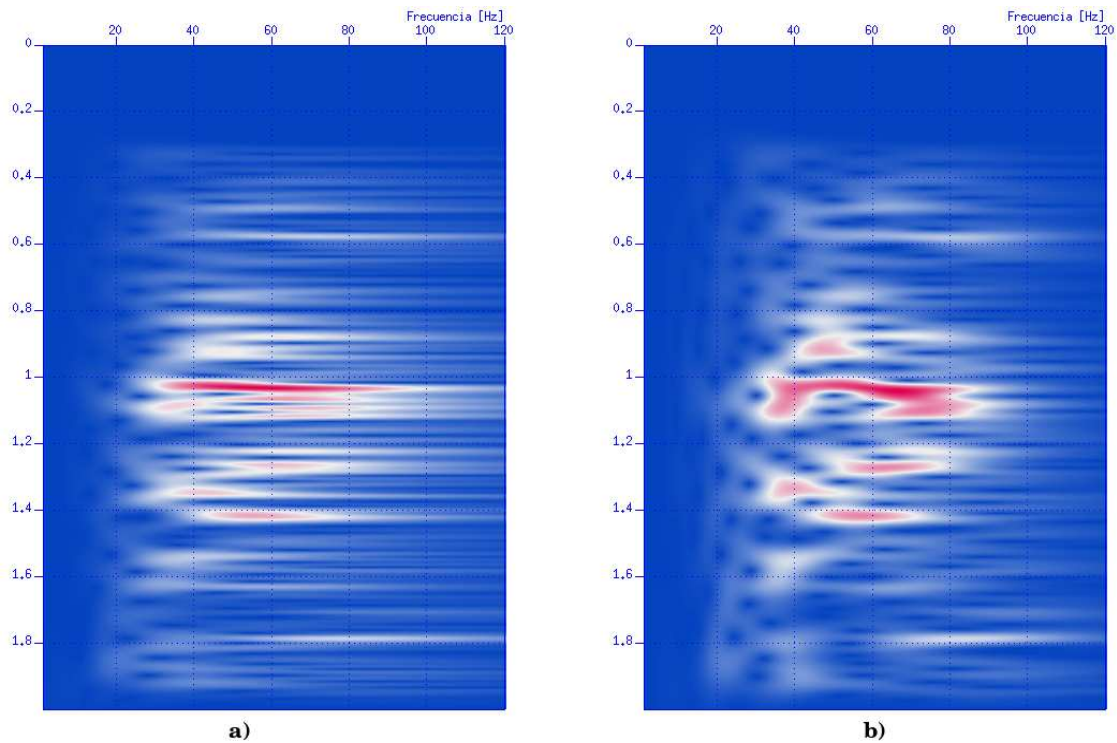


FIGURA 4.13. CWT aplicado a una traza real con una ondícula Morlet Compleja. a) Frecuencia central $f_{central} = 0,5$. b) Frecuencia central $f_{central} = 1$. Fuente Autor

En la figura 4.14 la parte a) tiene un gran parecido con la CWT con frecuencia fija para la frecuencia central de 1 Hz , pero observando bien, existen muchas diferencias, en la siguiente sección se va a mostrar cual fue la aplicación que se encontró para la CWT con frecuencia variable.

4.2.3. Transformada de Fourier de los coeficientes wavelet

Se realizó la transformada de Fourier de los coeficientes wavelet con las mismas frecuencias centrales que en la CWT; en la figura 4.15 se puede observar que a bajas frecuencias se intenta mejorar la resolución temporal, pero algunas amplitudes disminuyen a bajas frecuencias, además el tiempo de procesamiento es grande y esto juega un papel muy importante al momento de procesar una línea sísmica que sea grande, por ejemplo de 5000 trazas.

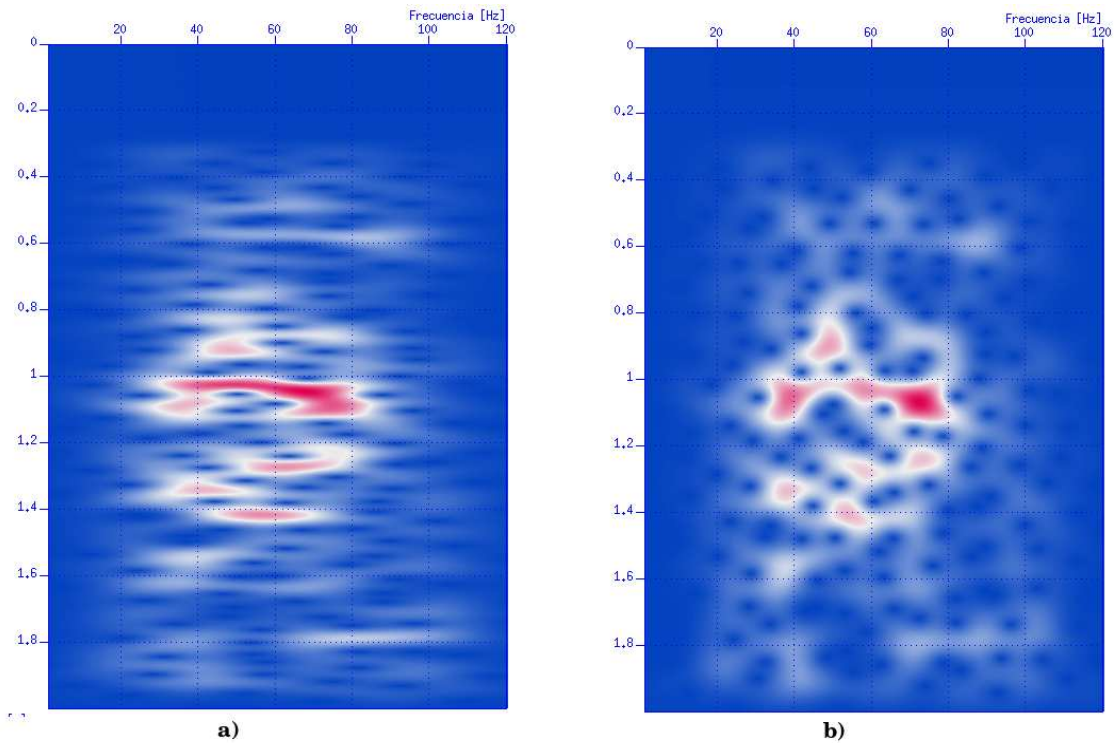


FIGURA 4.14. CWT aplicado a una traza real con una ondícula Morlet Compleja y frecuencia central variable. a) Frecuencia central a 1 Hz $f_{central} = 0,018$. b) Frecuencia central a 1 Hz $f_{central} = 0,037$. Fuente Autor

Algo que se ha visto es que con la CWT se pueden lograr resultados similares a los de la FTCWT, cambiando la frecuencia central y todo se logra con tiempos menores a los de la FTCWT, ya que para ésta se debe realizar primero la CWT.

4.3. Resultados obtenidos con líneas sísmicas

Por último en este capítulo se van a mostrar algunos resultados que se obtuvieron al procesar líneas sísmicas reales, con las metodologías estudiadas. Estos resultados fueron de interés en el Instituto Colombiano del Petróleo ICP.

4.3.1. Detallamiento de estructuras

Procesando datos se observó que al mirar a altas frecuencias, se detallan características del subsuelo, que con la sísmica normal no se detallan.

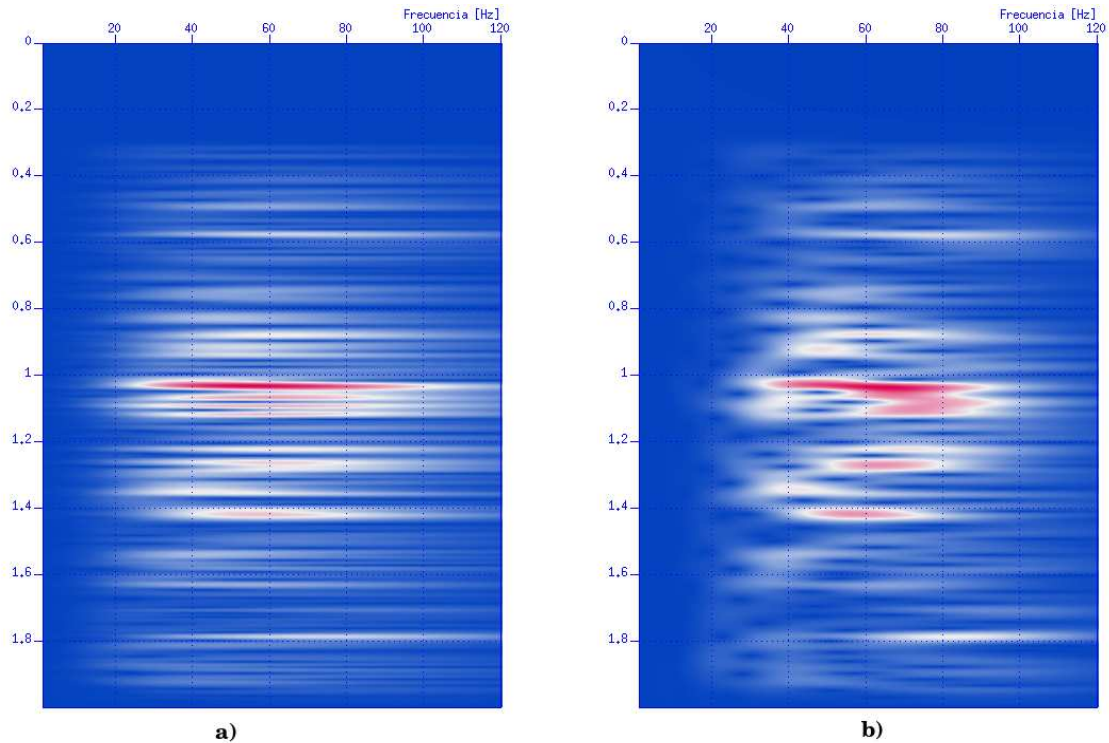


FIGURA 4.15. FTCWT aplicado a una traza real con una ondícula Morlet Compleja. a) Frecuencia central $f_{central} = 0,5$. b) Frecuencia central $f_{central} = 1$. Fuente Autor

Lo primero que se hizo fue el procesamiento de una línea sísmica, la cual contiene una falla muy importante de nuestro subsuelo, en la grafica de la figura 4.16 se puede observar la línea original, en la cual no se puede detallar esta falla, parece que las capas fuesen continuas. En la parte b) del grafico se hizo la CWT con una frecuencia central de $f_{cdntral} = 0,8125$, como se puede observar en el grafico, se detalla la falla y esto gracias a que a grandes frecuencias la resolución temporal es adecuada y por esto se ven mejor las estructuras.

En la figura 4.17 se proceso la misma línea con la CWT, pero variando la frecuencia central, como este método mantiene la resolución, a altas frecuencias no mejora la resolución temporal y por esto no se ve tan bien la falla. Este es un factor para considerar buenas resoluciones a altas frecuencias para poder conocer algunas estructuras del subsuelo.

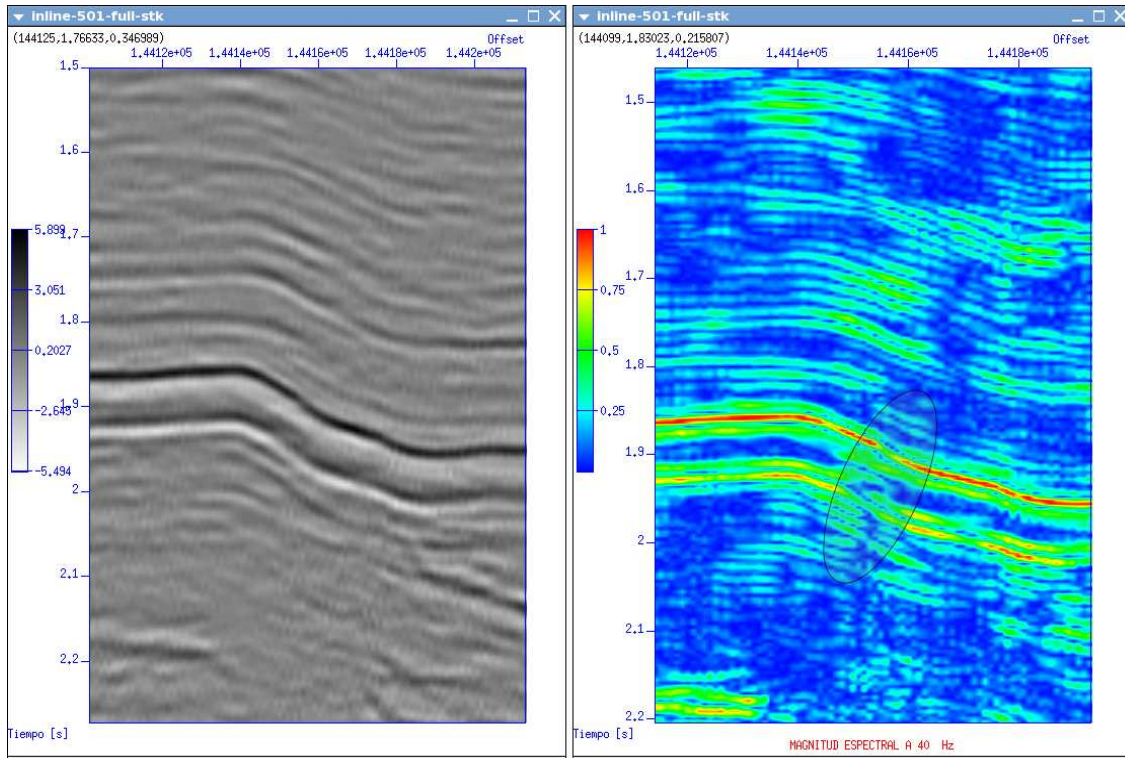


FIGURA 4.16. CWT aplicado a una línea sísmica con una ondícula Morlet Compleja. a) Línea sísmica original b) CWT con frecuencia central fija $f_{central} = 0,8125$. Fuente Autor

Otro ejemplo de procesamiento se hizo con la FTCWT, aunque el tiempo de computo fue demasiado, ya que cada traza de la línea contenía 3551 muestras y como se ve en la tabla de tiempos de computo de la FTCWT. Esta es una de las razones por la cual se evita el uso de este método.

En la figura 4.18 se encontró otro fenómeno, aparecieron unas amplitudes, cerca al lecho marino, a altas frecuencias en una línea offshore, este efecto aún es motivo de análisis, debido a que no se tuvo mayor información acerca de la litología.

En la figura 4.19 se muestra otra línea sísmica, la cual se procesó con la CWT y frecuencia central $f_{central} = 0,5$, como se vio antes entre más pequeña sea la frecuencia central, más rápido se mejora la resolución temporal y esto trae consigo que se vean mejor las estructuras del subsuelo.

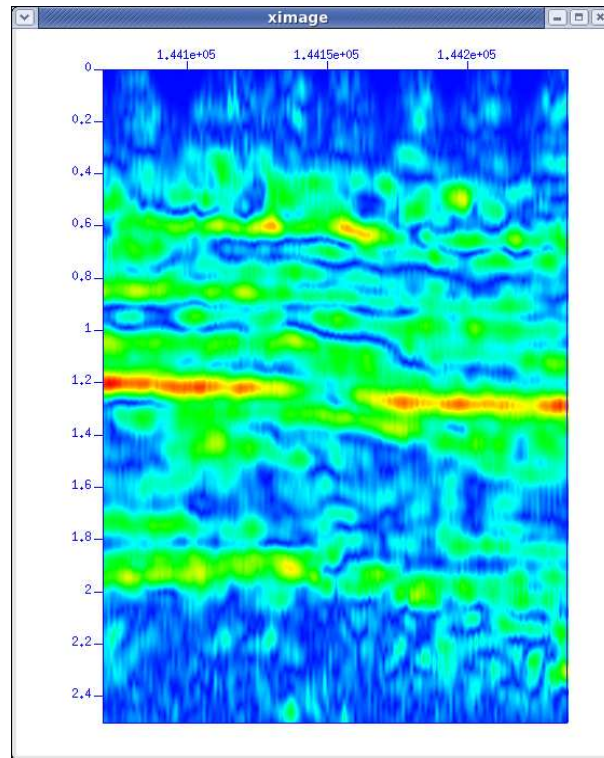


FIGURA 4.17. CWT aplicado a una línea sísmica con una ondícula Morlet Compleja y frecuencia variable, la frecuencia de 1 Hz fue de $0,037$. Fuente Autor.

4.3.2. Detección de hidrocarburos

Basandose en el artículo (Burnett & Castagna, 2004), se habla sobre una característica de las trazas que contienen efectos de los hidrocarburos, la característica es mostrada en la figura 4.20, para probar esto se escogió una línea con un pozo y se le aplico la CWT con frecuencia variable, esto para tener una buena resolución en frecuencia para todas las frecuencias de análisis. En la figura 4.21 se puede ver como el comportamiento de la descomposición se ajusta a lo que predice el gráfico del artículo.

Se realizó la misma descomposición para la línea sísmica y el gran cambio se noto a 47 Hz , donde las amplitudes son mayores que a las halladas con la CWT de frecuencia central variable. Ver figura 4.22.

Pero la principal diferencia se detalló a bajas frecuencias donde para la CWT con frecuencia central fija se obtiene una baja resolución temporal, mientras que con la otra

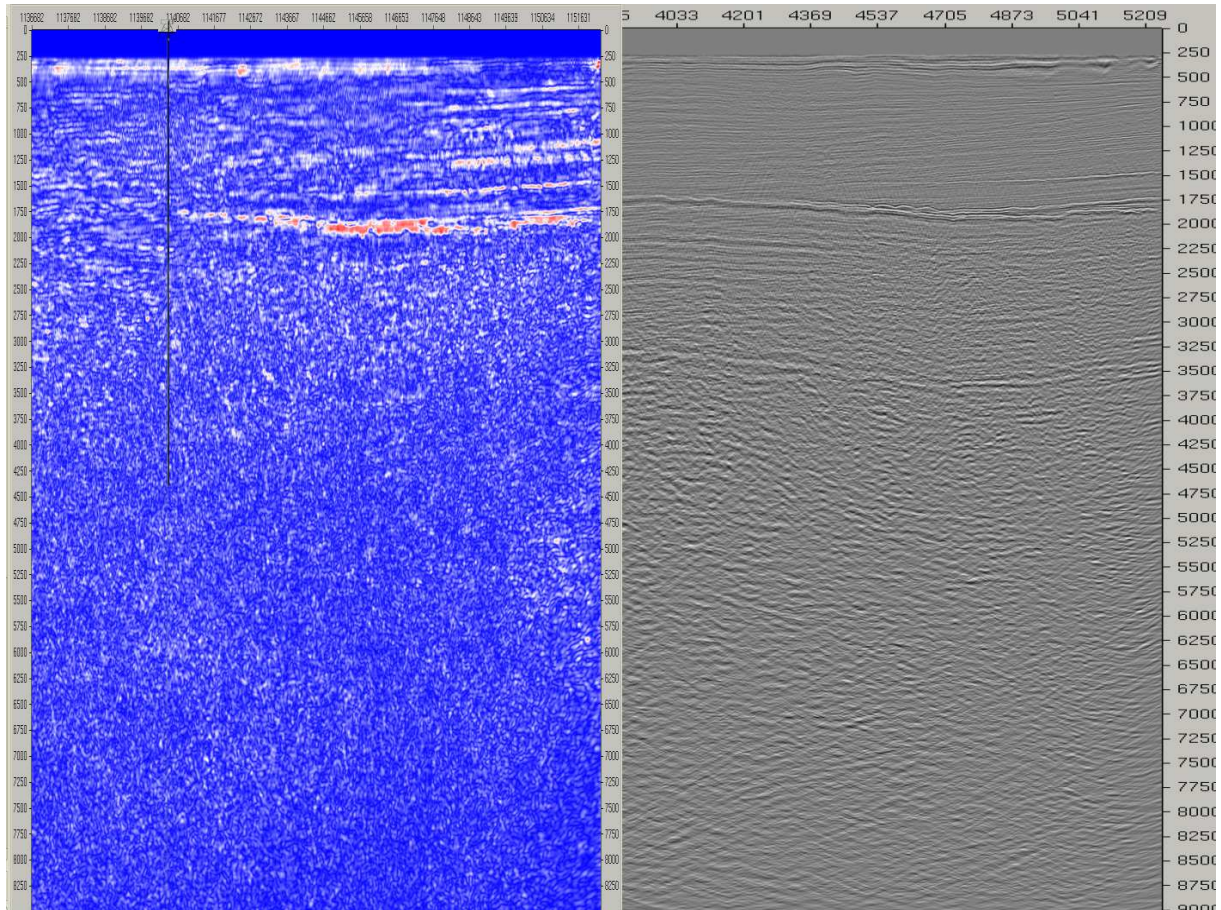


FIGURA 4.18. Descomposición espectral datos reales offshore con la FTCWT y $f_{central} = 0, 5$. a) 35 Hz. b) Línea original. Fuente Autor.

forma de realizar la CWT, se mejoraron estas resoluciones. En la figura 4.23 se muestra estas diferencias y como para la CWT con frecuencia central fija, las componentes de la línea se ven alargadas debido a la gran resolución en frecuencia.

En este capítulo se aplicaron las metodologías a datos sísmicos, detallando así el funcionamiento con este tipo de datos. Como se vio en el capítulo 2, la STFT produce una mala ubicación de los eventos y esto es un mal resultado debido a la importancia del tiempo para localizar la profundidad.

Cuando se usó la CWT, se obtuvo mejores resultados a los que dejó la STFT. Pero se debe tener cuidado en el momento de elegir la frecuencia central de la wavelet, se observó

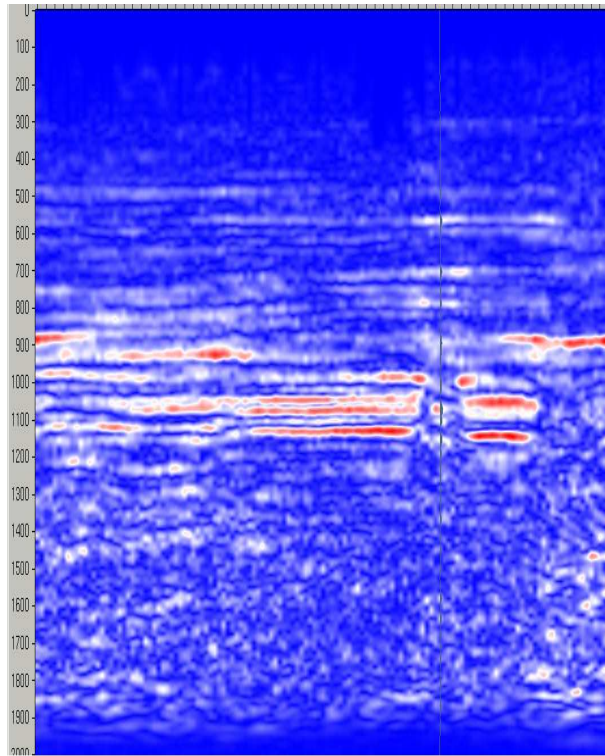


FIGURA 4.19. CWT aplicado a una línea sísmica con una ondícula Morlet Compleja y frecuencia central de $f_{central} = 0,5$. Fuente Autor.

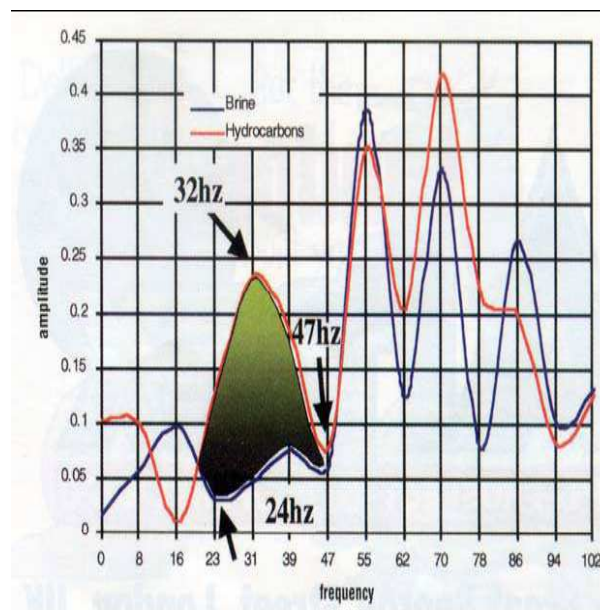


FIGURA 4.20. Reflectividad de hidrocarburos entre 32 y 47 Hz. Fuente (Burnett & Castagna, 2004)

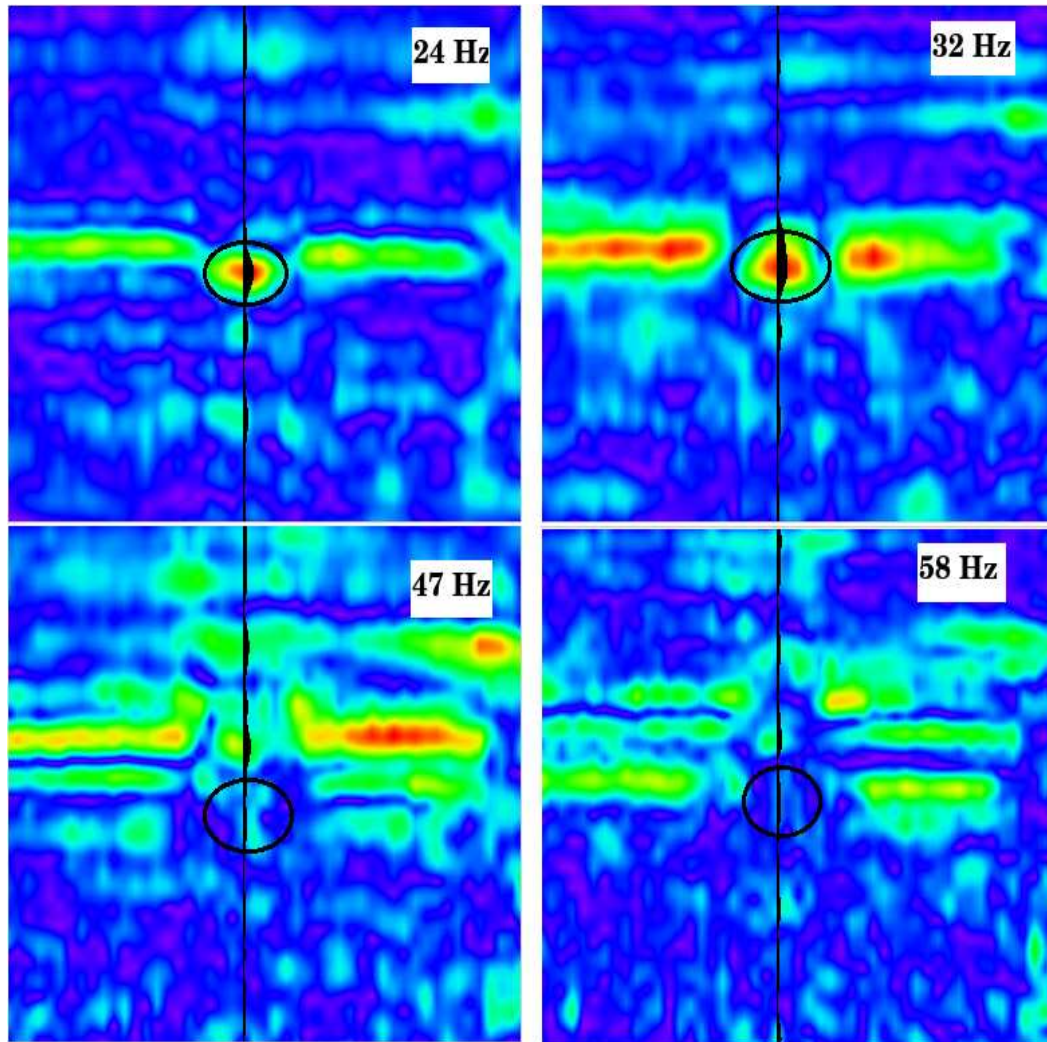


FIGURA 4.21. Descomposición para una línea con un pozo de hidrocarburo. La descomposición fue hecha con la CWT con frecuencia variable, la frecuencia de 1 Hz fue $f_{central} = 0,025$. Fuente Autor

que entre más pequeña sea la frecuencia central, más rápido mejora la resolución temporal, lo que causa una mejora en la resolución a bajas frecuencias.

Otra opción con la CWT, es ajustar un ancho de banda fijo para todas las frecuencias a analizar, pero como se observó, esto mejora la resolución a bajas frecuencias, pero a altas frecuencias se necesita una mejor resolución temporal debido a los cambios rápidos de la señal, por tal razón se recomienda dejar el ancho de banda fijo, para el análisis de absorción de energía a bajas frecuencias.

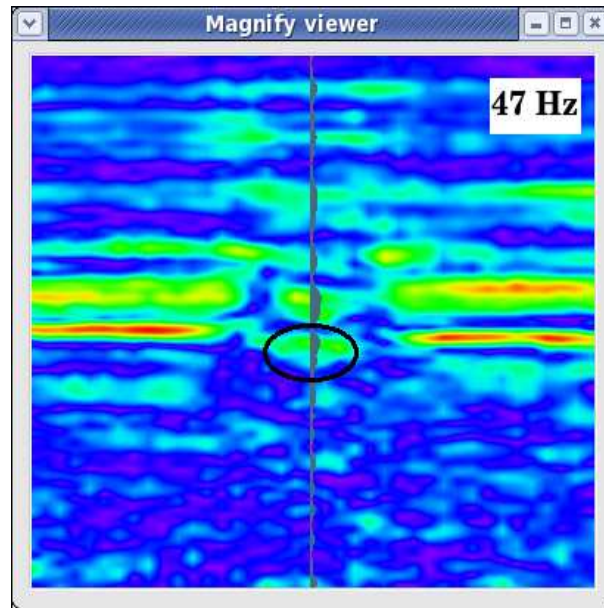


FIGURA 4.22. Descomposición para una línea con un pozo de hidrocarburo. La descomposición fue hecha con la CWT con frecuencia central 1 Hz. Fuente Autor

En cambio para el análisis de estructuras se recomienda el uso de la CWT normal, ya que a altas frecuencias se puede analizar bien las capas, debido a la buena resolución temporal.

Con la FTCWT se mejora la resolución temporal hallada con la CWT, pero como se estudio en el capítulo tres, los tiempos de cómputo son muy elevados y si se desea procesar una línea completa, se demoraría demasiado tiempo haciendolo, lo cual no es conveniente.

La FTCWT, también es recomendable cuando se analicen estructuras.

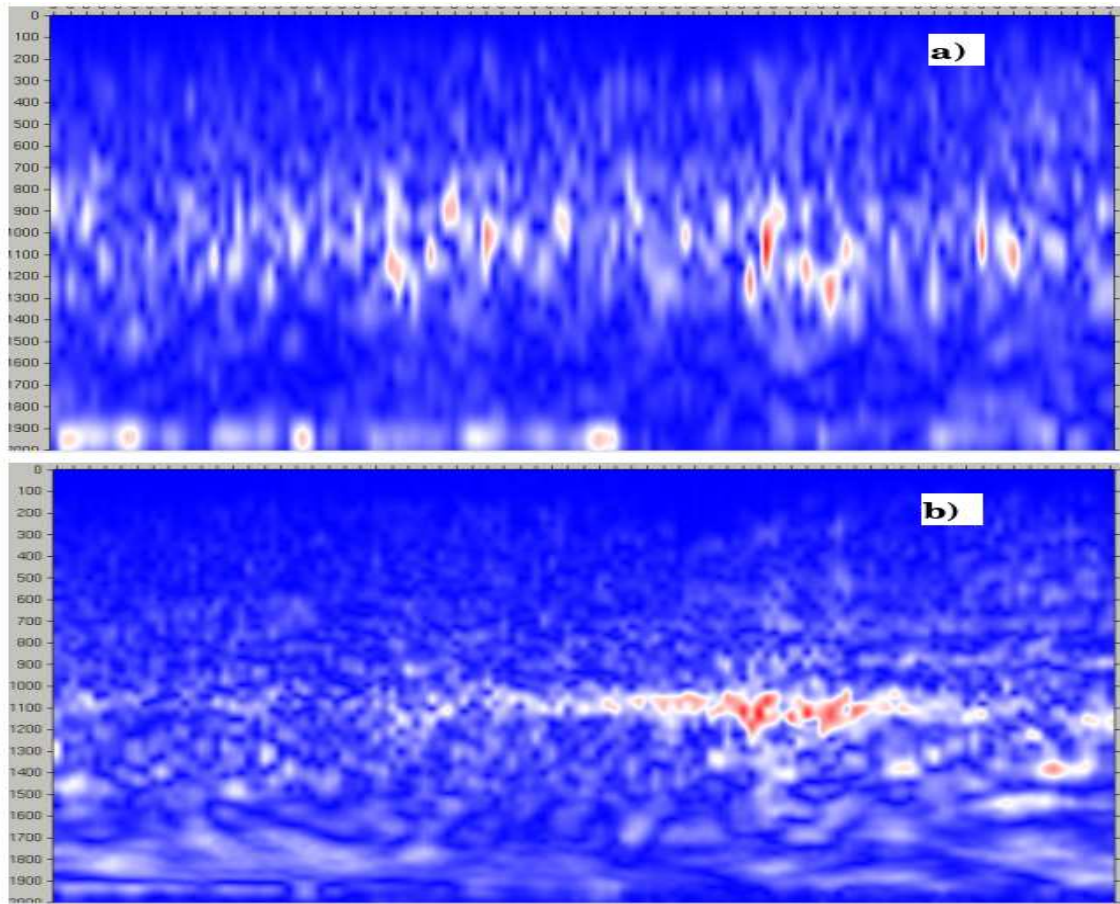


FIGURA 4.23. Línea sísmica a 7 Hz, por medio de la CWT. a)CWT con frecuencia central fija $f_{central} = 0,5$. b) Descomposición hecha con la CWT con frecuencia variable, la frecuencia de 1 Hz fue $f_{central} = 0,025$ Fuente Autor

5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

5.1. Conclusiones

- (i) Durante el desarrollo del proyecto, se analizaron tres metodologías cuya principal característica es la descomposición de una señal en el plano tiempo-frecuencia. Esta característica es el principal atributo para ser usadas en el procesamiento de datos sísmicos, ya que estos no son estacionarios y sus propiedades varían con el tiempo. La principal diferencia entre la STFT y la CWT es que la primera mantiene una resolución temporal y en frecuencia constante para todas las frecuencias de análisis, mientras que en la CWT estas resoluciones varían con la escala de análisis y por consiguiente con la frecuencia de análisis. La FTCWT es un post-proceso de la CWT y los resultados son muy parecidos a los arrojados por la CWT.
- (ii) La transformada de Fourier enventanada consiste en la transformada de Fourier de una sección de la señal a procesar, la cual está determinada por la longitud de la ventana y la variable de desplazamiento. A diferencia, con la CWT, no sólo se realiza un desplazamiento, sino un escalado de la ondícula, lo que hace variar el ancho de banda del filtro y por consiguiente la resolución temporal. La FTCWT se basa en la transformada de Fourier de la transformada inversa de la CWT, es decir, se realiza la transformada de Fourier de la señal reconstruida sólo con las escalas analizadas.
- (iii) El principal factor que afecta la resolución en la STFT, es la longitud de la ventana. Entre más larga sea ésta, mejor resolución en frecuencia tendrá la descomposición. Pero por el principio de incertidumbre, se afectará de forma negativa la resolución temporal. Además se observó que a medida que la ventana se hace más larga, se pierde la ubicación de los eventos y debido al relleno con ceros, las componentes tienden a cero antes que se termine el tiempo de análisis. Otros factores que afectan el resultado de la STFT dependen de las características de la ventana usada. La amplitud de los lóbulos laterales producen fugas que

se suman con las componentes vecinas, produciendo amplitudes erróneas. La pendiente de caída de los lóbulos laterales es un indicador de la velocidad con que desaparecen los efectos de los lóbulos. El efecto en el borde final no es suprimido por la multiplicación de la ventana de análisis, por esta razón se alcanzan a visualizar los efectos de los cambios bruscos, cuando la señal finaliza en valores distintos de cero.

- (iv) El principal factor que afecta el resultado de la CWT, es el tipo de ondícula usada. Dependiendo del tipo de onda, el resultado es diferente. Entre mejor correlacionadas estén la ondícula y la señal a procesar, mejor va a ser el resultado, esta es la explicación del porque se usó la wavelet Morlet, ya que es la que más se acerca al comportamiento de un evento, además esta ondícula fue diseñada para la exploración sísmica. La ondícula tiene otra característica muy importante y es la frecuencia central, que se relaciona con la frecuencia en la que se aplica el ancho de banda inicial de la ondícula. Existe una ondícula en la que también se puede variar el ancho de banda inicial, y por tanto se tiene otra variable para controlar el ancho de banda. El efecto de los bordes, también afecta el producto del análisis y son muy evidentes cuando la señal inicia y finaliza en valores diferentes de cero, debido al relleno con ceros. La fase del sistema arrojó que no existe retardo de grupo. Por último se debe tener cuidado en la convolución circular, para que se comporte de forma lineal.

Al realizar la CWT con ondículas reales, se pierde detallamiento en la imagen, ya que sólo se posee parte real. Además cuando se usa la ondícula compleja, se obtiene una amplitud y una fase, que puede ser usada para otros análisis.

- (v) En el desarrollo de la FTCWT, se debe tener los mismos cuidados que con la CWT, ya que es un post-procesamiento de la transformada wavelet. Si en la transformada wavelet se descompuso hasta una frecuencia máxima, la FTCWT no se puede analizar para una frecuencia mayor a ésta, por que se basa en la transformada inversa de la CWT. El principal resultado de aplicar la FTCWT es el aumento del ancho de banda y el aumento de las amplitudes a altas frecuencias.

- (vi) Los tiempos de cómputo de los diferentes algoritmos, mostraron una eficiencia cuando se usaba la FFT, además que este algoritmo se basa en factores primos y no en longitudes en potencias de dos, por lo que las longitudes de análisis son menores. Los resultados entre esta versión con la FFT y la sacada a partir de la definición discreta de las metodologías no mostraron gran diferencia, pero el tiempo es un factor muy importante, en el momento de procesar grandes volúmenes de datos. La transformada de Fourier inventanada mostró unos resultados erróneos cuando se intentó hallar las componentes en las frecuencias deseadas, por medio de interpolación, debido al poco detallamiento del espectro. La FTCWT fue el algoritmo que presentó el peor tiempo de cómputo, debido a que son dos procesos que se deben realizar, además contiene tres *for* anidados. En esta metodología se sacrifica por una mejora en la resolución, el tiempo de cómputo.
- (vii) Cuando se aplicó las metodologías en datos sísmicos, la STFT dejó una mala ubicación de los eventos y como se mencionó antes, esto traería una mala interpretación de la profundidad del evento. En la CWT se obtuvo dos casos importantes, cuando la frecuencia central es fija y pequeña, se puede analizar de forma clara las estructuras a altas frecuencias. Cuando el ancho de banda se deja fijo, si se escoge un buen ancho de banda y una aceptable duración efectiva, es posible visualizar mejor los efectos de absorción de energía, aunque no se posea una excelente resolución temporal, además se mejora la resolución temporal a bajas frecuencias, que es donde se observa mejor estos fenómenos. La FTCWT deja resultados parecidos a los de la CWT, pero aumenta el ancho de banda, mejorando la resolución temporal en la descomposición con la CWT. EN este caso entra a jugar un papel muy importante los tiempos de cómputo y si es factible procesar con la FTCWT, si con la CWT se pueden conseguir resultados satisfactorios ajustando la frecuencia central.
- (viii) El ancho de banda limitado por la adquisición sísmica (respuesta de señal) junto con la interacción de capas delgadas del subsuelo raramente sigue una verdadera

frontera geológica, ocultando en la superficie la información necesaria para caracterizar el subsuelo. Mientras las técnicas convencionales de interpretación requieren una mayor atención en la ondícula de la fuente (reconstrucción de la señal) y su relación con el espesor de los eventos geológicos, así como su dominio frecuencial. La descomposición espectral facilita el proceso de manera directa. Esto permite examinar y controlar la ondícula fuente, en el proceso de interacción con las impedancias (respuesta de la señal a eventos geológicos determinados) con respecto a la señal y el ruido, frecuencia por frecuencia. Por eso esta simple y robusta tecnología ha sido implementada por muchos geofísicos en exploración para tener un mejor rol en la interpretación estratigráfica, estructural, de espesor, heterogeneidad y conformación de un yacimiento dado. Proveyendo una mayor fidelidad en la integración de la información, tanto en interpretación geológica como la simulación de yacimientos, que las técnicas convencionales "Amplitud/atributo", que redundan con frecuencia en incertidumbres.

- (ix) Los resultados obtenidos con datos sísmicos, son de interés para el Instituto Colombiano del Petróleo, ya que la herramienta de descomposición espectral puede ser usada como un indicador o descriptor de las estructuras geológicas.
- (x) Desarrollar estos programas en Seismic Un*x dejaron mejores tiempos de cómputo, que hacerlos en Matlab, esto por que no se usaron gran cantidad de funciones externas y además en Seismic Un*x se programa en C, lo cual hace más rápido el procesamiento de los datos.
- (xi) El desarrollo de este proyecto, dejó como resultado, la experiencia de trabajar en una de las empresas más importantes del país, aprendiendo sobre la industria del petróleo y sobre todos los procedimientos y normas que se deben tener en cuenta cuando se labora en el sector industrial.

5.2. Trabajo futuro

Este trabajo no está concluido y se pretende seguir trabajando en la explicación física de las propiedades encontradas en los datos reales. Para esto hay que caracterizar muy bien las respuestas espectrales encontradas. Además se desea usar la fase de la descomposición en la CWT, como complemento en busca de fenómenos geofísicos.

Otro trabajo consiste en mejorar los códigos por medios de la paralelización y programarlos en PROMAX, para poder procesar volúmenes de datos grandes, y obtener resultados más rápido.

BIBLIOGRAFÍA

- Burnett, M. D., & Castagna, J. P. (2004). Advances in spectral decomposition and reflectivity modeling in the frio formation of the gulf coast.
- Castagna, J. P., Sun, S., & Siegfried, R. W. (2003). Instantaneous spectral analysis: Detection of low-frequency shadows associated with hydrocarbons. *The Leading Edge*, V. 22, 120–127.
- Chakraborty, A., & Okaya, D. (1995). Frequency-time decomposition of seismic data using wavelet-based methods. *Geophysics*, V. 60(No. 6), 1906–1916.
- Chui, C. K. (1997). *Wavelets: A mathematical tool for signal processing* (first ed.). Texas: Editorial Board.
- Hall, M. (2005). Predicting stratigraphy with spectral decomposition. *CSEG, National Convention*.
- Mallat, S. (1998). *A wavelet tour of signal processing* (Second ed.). 525 B Street, Suite 1900, San Diego, California 92101-4495, USA: Academic Press.
- Meyers, S. D., Kelly, B. G., & O'Brien, J. J. (1992). An introduction to wavelet analysis in oceanography and meteorology: With application to the dispersion of yanai waves. *Monthly Weather Review*, v. 121, 2858–2866.
- Oppenheim, A. V., Schaffer, R. W., & Buck, J. R. (2000). *Tratamiento de senales en tiempo discreto* (Segunda, traducido de Discrete-Time Signal Processing, second edition ed.). Nunez de Balboa, 120 28006 Madrid: Prentice Hall.
- Sinha, S. (2005). *Spectral decomposition of seismic data with continuous wavelet transform*. Unpublished doctoral dissertation, School of Geology and Geophysics, University of Oklahoma, U.S.A.
- Soalres, L. R., Oliveira, H. M. de, Cintra, R. J. S., & Souza, R. C. de. (2003). Fourier eigenfunctions, uncertainty gabor principle and isoresolution wavelets. *XX Simposio Brasileiro de Telecomunicaciones*.
- Stockwell, J. W., & Cohen, J. K. (2007). *The new su user's manual*.

Teixidó, M. (2000). *Caracterización del subsuelo mediante sísmica de reflexión de alta resolución*. Unpublished doctoral dissertation, Departamento de Geodinámica y Geofísica, Universidad de Barcelona, Barcelona.

Recursos de la internet

- Historia Jean Morlet and Alex Grossman
http://www.gvsu.edu/math/wavelets/student_work/Kieft/Morlet-Grossman%20Page.html
- Información sobre métodos sísmicos.
<http://upcommons.upc.edu/pfc/bitstream/2099.1/3404/7//41205-7.pdf>

ANEXO A. HERRAMIENTA DESARROLLADA

A.1. Software Seismic Un*x

A.1.1. Comandos de Un*x

A continuacion se muestra una tabla con una lista de comandos:

Comando	Descripción
	El "pipe" conecta 2 procesos
&	Ejecuta un proceso en segundo plano
cat	Muestra texto en pantalla. Ejemplo: cat zebra.txt
cd	Cambia al directorio principal o a un directorio especifico.
cd ..	Retrocede a un directorio anterior.
chmod	Cambia los modos de permiso de una archivo. Ejemplo: chmod +x filter.su
cp	Hace una copia de un archivo. Ejemplo: cp zebra2.txt zebra3.txt
find	Buscar archivos dentro y por debajo de un directorio. Ejemplo: find . -name 'acq*.sh' -print
ls	Lista de directorios y archivos
ls -a	Lista de directorios y archivos, incluyendo archivos ocultos.
ls -lF	Lista de directorios y archivos usando long format.
man	Accede al manual. Ejemplo: man ls
mkdir	Crea un directorio. Ejemplo: mkdir data
more	Muestra el contenido de un archivo de texto. Si el archivo ocupa más espacio que lo que ocupa la pantalla, pulsa bar para avanzar o Enter para retroceder
mv	Mueve o cambia el nombre de un archivo o directorio. Ejemplo: mv zebra2.txt zebra3.txt
pwd(cwd)	Muestra el directorio actual de trabajo
rm	Borra un archivo. Ejemplo: rm zebra.txt
rmdir	Remueve un directorio
Control-c	Cancela un proceso en una ventana activa.

TABLA A.1. Comandos Unix

A.1.2. Comandos Seismic Unix

En Seismic Unix, se tienen muchos comandos, dependiendo del procesamiento que se quiere hacer, y también se combinan con comandos unix. En la siguiente tabla se muestran algunos.

Comando	Descripción
surange	Muestra los headers del archivo
suxwigb	Dibuja las trazas sísmicas
suximage	Muestra una imagen en escala de grises de las trazas
sushw	SE usa para editar headers
segypread	Lectura archivo segy
segyhdrs	Crea el archivo de headers para convertir a .segyp
segypwrite	Convierte de formato .su a .segyp

TABLA A.2. Algunos comando de Seismic Unix.

Para procesar archivos .segyp con Seismic Unix, primero se tienen que convertir a .su, o sino los comandos no tienen efecto.

A.2. Herramienta de visualización

Para visualizar los archivos .segyp, se uso el software GSEGYView, el cual es libre y trabaja bajo cualquier sistema operativo. En las figuras A.2 y A.2 se muestran algunas imágenes del software.



FIGURA A.1. Ventana principal del software GSEGYView

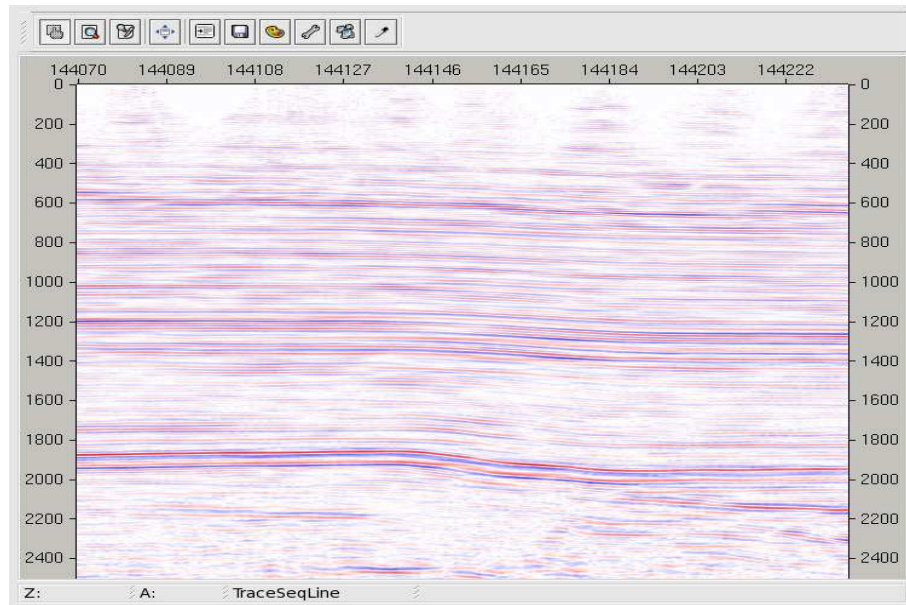


FIGURA A.2. Visualización de datos sísmicos con GSEGYView

A.3. Software desarrollado

La herramienta que se desarrolló, corre bajo las librerías de Seismic Unix, esto para aprovechar los comandos de lectura de trazas y otros mas. Los códigos desarrollados tienen los siguientes nombres:

- ROFTCOMXCWT: Realiza la descomposicion FTCWT, con wavelet compleja o analítica
- ROCOMXCWT: Realiza la descomposicion CWT, con wavelet compleja o analítica
- ROCWTRE: Realiza la CWT, con wavelet real
- ROFTCWTRE: Realiza la FTCWT con wavelet real
- ROSTFT: Realiza la STFT.

Para instalar el programa se copian los archivos punto C, en el siguiente directorio: `CWPROOT/src/su/main`. Luego se edita el archivo `Make`, adicionando los nombres de los codigos y por ultimo se da `make remake`, desde terminal y asi se compilaran los codigos.

Para procesar una línea sísmica en formato .sgy (es el formato en el que vienen la mayoría de datos sísmicos) se tiene que convertir a .su, o sino Seismic Unix no reconoce el archivo. El comando es el siguiente:

```
segypread tape=data.sgy verbose=1 endian=0 | segyclean>datos.su
```

Cada código tiene variables de entrada. Las más importantes son:

- fmin, fmax: Frecuencia mínima y frecuencia máxima a analizar.
- frecen: Frecuencia central de la ondícula.
- wind: Tipo de ventana a usar.
- fband: Varía el ancho de banda de la ondícula.
- wav: tipo de ondícula.
- nt2: Sirve para rellenar con ceros la señal de entrada.
- radio: Solo para la transformada de Fourier enventanada. aumenta el radio para hallar el valor RMS.

Para más información cada código tiene una ayuda incluida.

ANEXO B. TRANSFORMADA DE FOURIER DE FACTORES PRIMOS PFA FFT

En Seismic Un*x existe un algoritmo de FFT llamado algoritmo de factores primos PFA-FFT, para el desarrollo del trabajo se usó este algoritmo. A continuación se va a explicar en que consiste.

Recordando la definición de DFT:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}nk} \quad (\text{B.1})$$

Suponiendo que $N = N_1 N_2$, donde N_1 y N_2 son primos relativos, se puede definir una bijectiva reindexación de la entrada n y la salida k por:

$$n = n_1 N_2 + n_2 N_1 \pmod{N} \quad (\text{B.2})$$

Se dice que $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a - b$ es un entero múltiplo de n .

$$k = k_1 N_2^{-1} N_2 + k_2 N_1^{-1} N_1 \pmod{N} \quad (\text{B.3})$$

donde N_1^{-1} , es el inverso multiplicativo modular de N_1 con módulo N_2 y N_2^{-1} es el inverso multiplicativo modular de N_2 con módulo N_1 . Los índices k_a y n_a van desde $0, \dots, N_a - 1$, en este caso para $a = 1, 2$. Estos inversos existen solo si N_1 y N_2 son primos relativos, y esta condición es requerida para que el primer mapeo sea bijectivo.

Esta reindexación de n es llamada mapeo Ruritaniano y la reindexación de k es llamada mapeo CRT.

Estas reindexaciones son sustituidas en la expresión de la DFT y en particular en el producto nk en el exponente.

$$X_{k_1 N_2^{-1} N_2 + k_2 N_1^{-1} N_1} = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \left(\sum_{n_2=0}^{N_2-1} x_{n_1 N_2 + n_2 N_1} e^{-\frac{2\pi i}{N_2} n_2 k_2} \right) e^{-\frac{2\pi i}{N_2} n_1 k_1} \quad (\text{B.4})$$

¹Se dice que b es el inverso multiplicativo modular de a con modulo n , si $a * b^{-1} \equiv 1 \pmod{n}$