

ANÁLISIS TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DIFUSAS DE
ORDEN FRACCIONARIO

DUVÁN ALEXIS CONTRERAS PÁEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2021

ANÁLISIS TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DIFUSAS DE
ORDEN FRACCIONARIO

DUVÁN ALEXIS CONTRERAS PÁEZ

Trabajo de Grado para optar al título de
Magister en Matemáticas

Director

Gilberto Arenas Díaz

Doctor en Ciencias Matemáticas

Codirector

Elder Jesús Villamizar Roa

Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2021

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, deseo expresar mi agradecimiento, admiración y respeto a los directores de este trabajo, Dr. Arenas Díaz y Dr. Villamizar Roa, por la orientación, la dedicación, las sugerencias, el apoyo, la motivación y el rigor que han facilitado el alcance de los objetivos. Gracias por la confianza ofrecida desde el primer momento que llegué a la escuela de Matemáticas.

También, un trabajo de investigación es fruto del reconocimiento y del apoyo vital que nos ofrecen las personas que nos estiman, sin el cual no tendríamos la fuerza y energía que nos anima a crecer como personas y como profesionales.

Gracias a mis padres, Liliana Páez y Jairo Niño, a mis hermanos, Daniela Páez, Lina y Jhon Niño, porque con ellos compartí una infancia feliz, que guardo en el recuerdo y es un aliento para seguir esforzándome. También agradezco a mi tía, Martha Páez, sin ella no hubiese sido posible ni tan siquiera mi educación básica.

Gracias a mis amigos, que siempre me han prestado un gran apoyo moral y humano, necesarios en los momentos difíciles de este trabajo y esta profesión.

Así mismo, agradezco a mis compañeros de la escuela de Matemáticas su apoyo personal y humano, por atender mis inquietudes durante estos dos años, y en general a todas las personas que estuvieron allí.

Agradezco finalmente, no sin menos importancia, a los que hacen posible la educación pública colombiana, especialmente a la Universidad Industrial de Santander por permitirme ser su estudiante desde 2013 y docente desde el 2019. Sin su apoyo no habría logrado este objetivo.

A todos, muchas gracias.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	11
1. PRELIMINARES	18
1.1. LA INTEGRAL FRACCIONARIA	19
1.2. LA DERIVADA FRACCIONARIA	26
1.3. PRELIMINARES SOBRE LOS CONJUNTOS DIFUSOS	37
1.4. LA INTEGRAL-RLK Y DERIVADA-CK EN EL CONTEXTO DIFUSO	49
2. PROBLEMA DE VALOR INICIAL DIFUSO DE ORDEN FRACIONARIO	64
2.1. PLANTEAMIENTO DE UN PVI DIFUSO DE ORDEN FRACCIONARIO	65
2.2. NO EQUIVALENCIA	69
2.3. CONDICIONES DE EQUIVALENCIA	71
3. PRINCIPIOS DE CONTRACCIONES	74
3.1. GENERALIZACIONES	75
4. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN	83
4.1. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN AL PVI-DF	83
4.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN AL PVI-DF CON RETARDO	87
5. CONCLUSIONES	106
BIBLIOGRAFÍA	107

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Gráfica de $({}^{RL}I_a^1 f)(t)$ cuando $a = 0$, $b = 3$, $\beta = 2$, con α tomando los valores de 0, 25, 0, 5, 0, 75 y 1.	22
Figura 2. Gráfica de $({}^H I_a^\alpha f)(t)$ cuando $a = 1$, $b = 4$, $\beta = 2$, con α tomando los valores de 0.25, 0.5, 0.75 y 1.	23
Figura 3. Gráfica de $({}^{RL}D_a^\alpha f)(t)$ cuando $a = 0$, $b = 5$, $\beta = 2$, con α tomando los valores de 0.25, 0.5, 0.75 y 1.	28
Figura 4. Gráfica de $({}^{RL}I_a^\alpha f)(t)$ cuando $a = 1$, $b = 4$, $\beta = 2$, con α tomando los valores de 0.25, 0.5, 0.75 y 1.	31
Figura 5. Gráfica del r -nivel de f cuando $r = 0.5$ y p tomando los valores de 0.5, 0.75 y 1.	52
Figura 6. Gráfica del r -nivel de ${}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f$ cuando $r = 0.5$, $\alpha = 0.5$ y $p = 1$.	52
Figura 7. Gráfica de la función $\psi_1(t)$.	55
Figura 8. Gráfica de los extremos de las funciones solución, x_1 (azul) y x_2 (roja), del PVI-DF cuando $p = 0.5$.	68
Figura 9. Gráfica del 1-nivel y el soporte de la solución P al PVI-DF-R del Caso I. (a) Cuando $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ y $p = 1$. (b) Cuando $\alpha \rightarrow 1^-$, $\lambda = \frac{1}{2}$ y $p = 1$.	101
Figura 10. Gráfica del 1-nivel y el soporte de la solución P al PVI-DF-R del Caso II. (a) Cuando $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ y $p = 1$. (b) Cuando $\alpha \rightarrow 1^-$, $\lambda = \frac{1}{2}$ y $p = 1$.	105

RESUMEN

TÍTULO: ANÁLISIS TEÓRICO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DIFUSAS DE ORDEN FRACCIONARIO *

AUTOR: DUVÁN ALEXIS CONTRERAS PÁEZ **

PALABRAS CLAVE: ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS, ECUACIONES DIFERENCIALES DIFUSAS, DERIVADA GENERALIZADA DIFUSA DE CAPUTO-KATUGAMPOLA.

DESCRIPCIÓN:

El estudio de ecuaciones diferenciales fraccionarias constituye un campo de creciente interés, no solo desde el punto de vista teórico, sino también debido a su aplicabilidad al análisis de fenómenos de las ciencias físicas y naturales. Su formalización se caracteriza por la sustitución de derivadas clásicas por derivadas de orden fraccionario. Por otro lado, las ecuaciones diferenciales difusas se propusieron como un intento de manejar la incertidumbre que aparece en muchos modelos matemáticos de algunos fenómenos no deterministas del mundo real en los que predomina la incertidumbre, la subjetividad o la vaguedad. En esta tesis, además de disertar sobre la fundamentación teórica del cálculo fraccionario, se analiza la existencia de soluciones de problemas de valor inicial en el contexto fraccionario, que incluyen fenómenos de retardo. Explícitamente, considerando la derivada generalizada difusa de Caputo-Katugampola, se demuestran algunos resultados de existencia y unicidad vía teoremas de punto fijo de funciones débilmente contractivas sobre espacios métricos parcialmente ordenados.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Maestría en Matemática. Director: Gilberto Arenas Díaz, Doctor en Ciencias Matemáticas. Codirector: Elder Jesús Villamizar Roa, Doctor en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: THEORETICAL ANALYSIS OF THE FUZZY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER *

AUTHOR: DUVÁN ALEXIS CONTRERAS PÁEZ **

KEYWORDS: FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, FUZZY DIFFERENTIAL EQUATIONS, CAPUTO-KATUGAMPOLA FUZZY GENERALIZED HUKUHARA FRACTIONAL DERIVATIVE.

DESCRIPTION:

The study of fractional differential equations constitutes a field of growing interest, not only from a theoretical point of view, but also due to its applicability to the analysis of phenomena in the physical and natural sciences. Its formalization is characterized by the substitution of classical derivatives by derivatives of fractional order. On the other hand, fuzzy differential equations were proposed as an attempt to handle the uncertainty that appears in many mathematical models of some non-deterministic real-world phenomena in which uncertainty, subjectivity or vagueness predominates. In this thesis, in addition to discussing the theoretical foundation of fractional calculus, the existence of solutions to initial value problems in the fractional context, which include delay phenomena, is analyzed. Explicitly, considering the generalized diffuse Caputo-Katugampola derivative, some results of existence and uniqueness are demonstrated via fixed point theorems of weakly contractive functions on partially ordered metric spaces.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Maestría en Matemáticas. Director: Gilberto Arenas Díaz, Doctor en Ciencias Matemáticas. Codirecto: Elder Jesús Villamizar Roa, Doctor en Matemáticas.

TABLA DE SÍMBOLOS

$\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}}[f(t)]$	Media derivada de la función f .
$(If)(t)$	Integral definida sobre el intervalo $[0, t]$ de la función f .
$(I^n f)(t)$	n -ésima integral iterada de una función f .
$\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$	Función Gamma de Euler Γ de $(0, \infty)$ en $\mathbb{R}$.
$L([a, b])$	Espacio de funciones $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrables en el sentido de Lebesgue.
${}^{RL}I_a^\alpha f$	Integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α de una función f .
${}^H I f$	Integral de Hadamard definida sobre el intervalo $[0, t]$ de la función f .
${}^H I^n f$	n -ésima integral de Hadamard iterada de una función f .
${}^H I_a^\alpha f$	Integral fraccionaria de Hadamard de orden α de una función f .
${}^{RLK}I_a^{\alpha,p} f$	Integral de Riemann-Liouville-Katugampola de orden α de una función f .
Df	Derivada clásica de una función f .
$D^n f$	n -ésima derivada clásica de una función f .
$[n]$	Mayor entero menor o igual a n .
${}^{RL}D_a^\alpha f$	Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α de una función f .
${}^C D_a^\alpha f$	Derivada fraccionaria de Caputo de orden α de una función f .
$AC([a, b])$	Espacio de funciones $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ absolutamente continuas.
${}^H D_a^\alpha f$	Derivada fraccionaria de Hadamard de orden α de una función f .
${}^{RLK}D_a^{\alpha,p} f$	Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville-Katugampola de orden α de una función f .

${}^{CK}D_a^{\alpha,p}f$	Derivada fraccionaria de Caputo-Katugampola de orden α de una función f .
$u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$	Conjunto difuso definido sobre $\mathbb{R}$.
$u(x)$	Valor de pertenencia del elemento x al conjunto difuso u .
$[u]^r$	r -nivel del conjunto difuso u .
$[u]^0$	Soporte del conjunto difuso u .
$\mathcal{F}$	Familia de los números difusos.
$d_\infty(u, v)$	Distancia entre los números difusos u y v .
$K_C(\mathbb{R})$	Espacio de subconjuntos no vacíos, compactos y convexos del espacio euclidiano $\mathbb{R}$.
$f : J \rightarrow \mathcal{F}$	Función difusa f de J en $\mathcal{F}$.
$\int_a^b f(t)dt$	Integral para una función difusa f .
$C([a, b], \mathcal{F})$	Espacio de funciones difusas continuas $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$.
$\lesssim$	Orden parcial sobre los espacios $\mathcal{F}$ y $C([a, b], \mathcal{F})$.
$u \ominus_{gH} v$	Diferencia generalizada de Hukuhara entre los números difusos u y v .
$\chi_{\{A\}}$	Función característica del conjunto A .
$\text{diam}([u]^r)$	Diámetro del r -nivel $[u]^r$.
$D(f, g)$	Distancia entre las funciones difusas f y g .
$AC([a, b], \mathcal{F})$	Espacio de funciones difusas $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ absolutamente continuas.
$D_{gH}f$	Derivada generalizada de Hukuhara de la función difusa f .

$\langle a, b, c \rangle$	Número difuso triangular.
$L([a, b], \mathcal{F})$	Espacio de funciones difusas $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ integrables en el sentido de Lebesgue.
${}^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha,p} f$	Integral fraccionaria difusa generalizada de Riemann-Liouville-Katugampola de orden α de f .
${}^{RL}\mathcal{I}_a^{\alpha} f$	Integral fraccionaria difusa generalizada de Riemann-Liouville de orden α de f .
${}^H\mathcal{I}_a^{\alpha} f$	Integral fraccionaria difusa generalizada de Hadamard de orden α de f .
${}^{RLK}{}_{gH}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} f$	Derivada fraccionaria de Hukuhara generalizada difusa de Riemann-Liouville-Katugampola de orden α de f .
${}^{RL}{}_{gH}\mathcal{D}_a^{\alpha} f$	Derivada fraccionaria de Hukuhara generalizada difusa de Riemann-Liouville de orden α de f .
${}^H{}_{gH}\mathcal{D}_a^{\alpha} f$	Derivada fraccionaria de Hukuhara generalizada difusa de Hadamard de orden α de f .
${}^{CK}{}_{gH}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} f$	Derivada fraccionaria de Hukuhara generalizada difusa de Caputo-Katugampola de orden α de f .
${}^C{}_{gH}\mathcal{D}_a^{\alpha} f$	Derivada fraccionaria de Hukuhara generalizada difusa de Caputo de orden α de f .
$C_{CK}^{1,F}([a, b], \mathcal{F})$	Espacio de funciones difusas continuas $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ tales que la ${}^{CK}{}_{gH}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} f$ existe para $\alpha \in (0, 1)$ sobre $[a, b]$.
$C_{\gamma,p}([a, b], \mathcal{F})$	Espacio de funciones difusas $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ tales que $\left(\frac{(\cdot)^p - a^p}{p}\right)^{1-\gamma} f(\cdot) \in C([a, b], \mathcal{F})$.
$x^i : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$	Función difusa que es solución inferior al PVI-DF-R.
$x^s : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$	Función difusa que es solución superior al PVI-DF-R.

INTRODUCCIÓN

El cálculo fraccionario y con él, las ecuaciones diferenciales fraccionarias, comprenden un campo de investigación relevante debido a su aplicabilidad en la descripción de una variedad de fenómenos físicos del mundo real, entre los que se encuentra el transporte no difusivo en la teoría del plasma, la reología, la viscoelasticidad, las fluctuaciones de precios de alta frecuencia en mercados financieros, crecimiento, la teoría de la ruina de las compañías de seguros y procesos de desigualdad, la descripción de dinámicas poblacionales, bioingeniería y ciencias biomédicas, sistemas de control y procesamiento de señales en ingeniería, entre otros ^{1 2 3}. Para revisar algunos temas de cálculo fraccionario se puede consultar las monografías de Podlubny ⁴, Kilbas *et al.* ⁵ y Samko *et al.* ⁶.

El cálculo fraccionario y la teoría de ecuaciones diferenciales fraccionarias se han venido desarrollando a gran velocidad, y con ello, el análisis de ecuaciones diferen-

-
- ¹ D. del Castillo-Negrete, B.A. Carreras y V.E. Lynch. "Nondiffusive Transport in Plasma Turbulence: A Fractional Diffusion Approach". En: *Phys. Rev. Lett.* 94 (6 2005), pág. 065003. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.065003.
 - ² R.L. Magin. "Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues". En: *Computers & Mathematics with Applications* 59.5 (2010), págs. 1586-1593. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.039>.
 - ³ E. Scalas, R. Gorenflo y F. Mainardi. "Fractional calculus and continuous-time finance". En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 284.1 (2000), págs. 376-384. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(00\)00255-7](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00255-7).
 - ⁴ I. Podlubny. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 1998.
 - ⁵ A.A. Kilbas, H.M. Srivastava y J.J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier, 2006.
 - ⁶ S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev y col. *Fractional integrals and derivatives*. Vol. 1. Gordon y Breach Science Publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland, 1993.

ciales fraccionarias con estructura difusa también ha sido objeto de estudio ^{7 8 9}. Cabe destacar que, las ecuaciones diferenciales difusas son una herramienta adecuada para modelar sistemas dinámicos en los que es imprescindible considerar la incertidumbre, la subjetividad o la vaguedad de los fenómenos en descripción ¹⁰. Esta teoría se ha desarrollado en varias direcciones teóricas y se han considerado un gran número de aplicaciones en muchos y diversos problemas reales (ver, por ejemplo, ^{11 12 13}). Cuando se integran derivadas fraccionarias en ecuaciones diferenciales difusas se obtienen las denominadas ecuaciones diferenciales difusas fraccionarias.

El concepto de solución para ecuaciones diferenciales fraccionarias con incertidumbre, donde la derivada fraccionaria se considera en el sentido de Riemann-Liouville, fue introducido en el trabajo pionero de Agarwal, Lakshmikantham y Nieto ¹⁴. En el

⁷ N.V. Hoa. "Fuzzy fractional functional integral and differential equations". En: *Fuzzy Sets and Systems* 280.C (2015), págs. 58-90.

⁸ N.V. Hoa, V. Lupulescu y D. O'Regan. "A note on initial value problems for fractional fuzzy differential equations". En: *Fuzzy Sets and Systems* 347 (2018), págs. 54-69.

⁹ N.V. Hoa, H. Vu y T.M. Duc. "Fuzzy fractional differential equations under Caputo–Katugampola fractional derivative approach". En: *Fuzzy Sets and Systems* 375 (2019), págs. 70-99.

¹⁰ V. Angulo-Castillo y col. "Applications of generalized fixed points theorems to the existence of uncertain differential equations with finite delay". En: *Iranian Journal of Fuzzy Systems* 17.6 (2020), págs. 1-15.

¹¹ B. Bede y L. Stefanini. "Generalized differentiability of fuzzy-valued functions". En: *Fuzzy Sets and Systems* 230 (2013), págs. 119-141. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fss.2012.10.003>.

¹² L.T. Gomes, L.C. de Barros y B. Bede. *Fuzzy differential equations in various approaches*. Springer, 2015.

¹³ V. Lupulescu. "On a class of fuzzy functional differential equations". En: *Fuzzy Sets and Systems* 160.11 (2009), págs. 1547-1562.

¹⁴ R.P. Agarwal, V. Lakshmikantham y J.J. Nieto. "On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty". En: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 72.6 (2010), págs. 2859-2862.

mismo escenario, en ¹⁵, los autores demostraron la existencia de una solución para ecuaciones integrales difusas fraccionarias, donde la integral fraccionaria se consideró en el sentido de Riemann-Liouville, utilizando la medida de no compacidad de Hausdorff. En ¹⁶, Arshad y Lupulescu obtuvieron algunos resultados de existencia y unicidad de solución para ecuaciones diferenciales difusas fraccionarias considerando el concepto de diferenciabilidad de Riemann-Liouville y asumiendo una condición de decrecimiento temporal de la función f que describe la ecuación diferencial difusa fraccionaria (0.0.1). En ¹⁷, Allahviranloo *et al.* estudiaron la existencia de soluciones explícitas de ecuaciones diferenciales difusas considerando el concepto de diferenciabilidad de Hukuhara de Riemann-Liouville usando funciones de Mittag-Leffler. Por otro lado, en ¹⁸, se introdujo la ecuación diferencial fraccionaria difusa de Caputo bajo la diferenciabilidad generalizada de Hukuhara, y se obtuvieron algunos resultados de existencia y unicidad de solución para la ecuación diferencial difusa fraccionaria de valor inicial. En el mismo escenario, en ¹⁹, los autores analizaron la existencia de soluciones del problema de valor inicial difuso fraccionario mediante un método de Euler fraccionario modificado.

-
- ¹⁵ R.P. Agarwal y col. "Fuzzy fractional integral equations under compactness type condition". En: *Fractional Calculus and Applied Analysis* 15.4 (2012), págs. 572-590.
 - ¹⁶ S. Arshad y V. Lupulescu. "On the fractional differential equations with uncertainty". En: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Appl.* 74.11 (2011), págs. 3685-3693.
 - ¹⁷ T. Allahviranloo, S. Salahshour y S. Abbasbandy. "Explicit solutions of fractional differential equations with uncertainty". En: *Soft Comp.* 16.2 (2012), págs. 297-302.
 - ¹⁸ T. Allahviranloo, A. Armand y Z. Gouyandeh. "Fuzzy fractional differential equations under generalized fuzzy Caputo derivative". En: *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* 26.3 (2014), págs. 1481-1490.
 - ¹⁹ M. Mazandarani y A.V. Kamyad. "Modified fractional Euler method for solving fuzzy fractional initial value problem". En: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 18.1 (2013), págs. 12-21.

En ²⁰, los autores consideraron un problema de valor inicial difuso fraccionario bajo la diferenciabilidad generalizada de Hukuhara donde la derivada fraccionaria se tomó en el sentido de Caputo. Considerando un escenario particular del contexto difuso, a saber, el contexto intervalar, en ²¹, los autores utilizaron algunos resultados de punto fijo de funciones débilmente contractivas en espacios parcialmente ordenados para estudiar la existencia y la unicidad de la formulación integral del problema de valor inicial. En ⁸, Hoa Van Ngo, Vasile Lupulescuc y Donal O'Regand corrigieron el enunciado sobre la equivalencia entre los problemas de valor inicial asociados con una ecuación diferencial difusa fraccionaria y su correspondiente formulación integral, considerando la diferenciabilidad generalizada de Hukuhara, donde la derivada fraccionaria se toma en el sentido de Caputo. Presentaron una condición adecuada para que esta equivalencia sea válida.

Por otro lado, el análisis teórico de la derivada fraccionaria de Hadamard también ha sido de gran interés en la comunidad matemática. A diferencia de las expresiones que definen las derivadas de Riemann-Liouville y Caputo, la derivada de Hadamard se define en términos de una integral que involucra la función logarítmica de un determinado exponente. En ²², Katugampola introdujo el concepto de integral fraccionaria Riemann-Liouville-Katugampola (integral-RLK) que generaliza y unifica las definiciones de integral fraccionaria de Riemann-Liouville y la integral de Hadamard en una sola definición que involucra un parámetro (p) que, dependiendo de su valor, hace coincidir la integral-RLK con la integral-RL ($p = 1$) o la integral de Hadamard

²⁰ P. Prakash y col. "Fuzzy fractional initial value problem". En: *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* 28.6 (2015), págs. 2691-2704.

²¹ T.V. An, H. Vu y N.V. Hoa. "Applications of contractive-like mapping principles to interval-valued fractional integro-differential equations". En: *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 19.4 (2017), págs. 2577-2599.

²² U.N. Katugampola. "New approach to a generalized fractional integral". En: *Applied Mathematics and Computation* 218.3 (2011), págs. 860-865.

$(p \rightarrow 0^+)$. Posteriormente, Katugampola en ²³, introdujo el concepto de derivada fraccionaria de Caputo-Katugampola (derivada-CK) que generaliza las definiciones de la derivada fraccionaria de Caputo ($p = 1$). Considerando ecuaciones diferenciales fraccionarias con derivada-CK, en ⁹, los autores investigaron la existencia y unicidad de la solución de un problema de valor inicial utilizando aproximaciones sucesivas bajo una condición de Lipschitz generalizada.

Además, asociado al análisis matemático de un sistema dinámico, existen las denominadas ecuaciones diferenciales con retardo. Este tipo de ecuaciones diferenciales describen fenómenos en los que la función desconocida del sistema depende, no solo del estado del sistema en un instante dado, sino también, de la historia de la trayectoria hasta ese instante ^{10 24 25}. Por ejemplo, a la hora de estudiar una epidemia en una determinada región, no basta con conocer el número de infectados en un momento determinado, sino observar cómo evolucionó la enfermedad en el tiempo, para poder predecir de buena manera su comportamiento futuro. En este tipo de problemas, la condición inicial no es un número o un vector en $\mathbb{R}^n$, sino una función continua en un cierto intervalo $[t_0 - \tau, t_0]$. Esto agrega una complejidad extra en el análisis ya que ahora el problema del valor inicial es un problema de dimensión infinita, hecho que no se observa en las ecuaciones diferenciales ordinarias clásicas. Esta clase de ecuaciones diferenciales ha mostrado su potencial en la descripción de varios fenómenos en biología, ingeniería, física, ciencias de la salud y otras áreas, en particular, aquellas en las que se requiere que los sistemas diná-

²³ U.N. Katugampola. "A new approach to generalized fractional derivatives". En: *Bull. Math. Anal. Appl.* 6.4 (2014), págs. 1-15.

²⁴ J.K. Hale y S.M. Verduyn Lunel. *Introduction to functional differential equations*. Vol. 99. Springer Science & Business Media, 2013.

²⁵ V. Lupulescu y U. Abbas. "Fuzzy delay differential equations". En: *Fuzzy Optim. Decis. Mak.* 11.1 (2012), págs. 99-111.

micos con retardo que describen los fenómenos, tengan en cuenta la incertidumbre, la subjetividad o vaguedad de los datos. En ¹⁰, los autores utilizaron resultados de puntos fijos de funciones débilmente contractivas en espacios métricos parcialmente ordenados para obtener resultados de existencia y unicidad de soluciones para problemas de valor inicial asociados a las ecuaciones diferenciales ordinarias en el contexto difuso con retardo finito utilizando la noción de derivada en el contexto de la derivada de Hukuhara fuertemente generalizada. En ²⁶, los autores utilizaron algunos resultados de punto fijo de funciones débilmente contractivas en espacios parcialmente ordenados para estudiar la existencia y unicidad de la solución para ecuaciones diferenciales ordinarias de orden fraccionario con retardo finito considerando la diferenciabilidad de Caputo en el sentido generalizado de Hukuhara pero en el contexto intervalar.

El objetivo de esta tesis es analizar problemas de valor inicial asociado a ecuaciones diferenciales fraccionarias con retardo en el contexto completamente difuso. Explícitamente, motivados por los resultados en ^{9 10}, estudiamos el siguiente problema de valor inicial asociado a una ecuación diferencial difusa fraccionaria (PVI-DF) con retardo finito

$$\begin{cases} ({}_{gH}^{CK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}x)(t) = f(t, x(t)), & t \in J = [0, T], \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (0.0.1)$$

donde $p, \tau, T > 0$, ${}_{gH}^{CK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}$ denota la derivada fraccionaria de Hukuhara generalizada difusa de Caputo-Katugampola de orden $\alpha \in (0, 1]$, $f : J = [0, T] \rightarrow \mathcal{F}$ y $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathcal{F}$ son funciones difusas continuas. Para obtener la existencia y unicidad de la solución para el PVI-DF con retardo (0.0.1), en lugar de utilizar el teorema clásico del punto fijo de Banach, se aplican algunos teoremas de punto fijo,

²⁶ T.V. An, H. Vu y N.V. Hoa. "A new technique to solve the initial value problems for fractional fuzzy delay differential equations". En: *Advances in Difference Equations* 2017.1 (2017), págs. 1-20.

establecidos en ²⁷, sobre funciones débilmente contractivas definidas en conjuntos parcialmente ordenados. Precisamente, bajo una propiedad de contractividad generalizada sobre elementos comparables, (que es más débil que la condición clásica de Lipschitz), se prueba que la existencia de soluciones inferiores o superiores es suficiente para demostrar la existencia y unicidad de soluciones difusas para el PVI-DF con retardo (0.0.1) en el marco de la derivada-CK. Cabe señalar que el espacio de números difusos no es un espacio de Banach, sino un espacio métrico semilineal y parcialmente ordenado.

El contenido de esta tesis se distribuye de la siguiente manera: En el primer capítulo damos algunos preliminares sobre los operadores de integración y derivación de orden fraccionario; conjuntos difusos, y algunas nociones de orden, la derivada generalizada de Hukuhara, derivada de funciones difusas. El segundo capítulo está dedicado al problema de la no equivalencia entre los PVI-DF y su correspondiente formulación integral difusa fraccionaria, haciendo énfasis en la gH -derivada-CK; se establece una condición apropiada para que esta equivalencia sea válida. En el tercer capítulo se presentan algunos resultados de puntos fijos para funciones débilmente contractivas en espacios parcialmente ordenados. Finalmente, en el cuarto capítulo se presentan los resultados principales de este trabajo asociados con la existencia y unicidad de las soluciones al problema (0.0.1).

²⁷ E.J. Villamizar-Roa, V. Angulo-Castillo e Y. Chalco-Cano. "Existence of solutions to fuzzy differential equations with generalized Hukuhara derivative via contractive-like mapping principles". En: *Fuzzy Sets and Systems* 265 (2015), págs. 24-38.

1. PRELIMINARES

El origen del cálculo fraccionario (CF) data casi desde el inicio del cálculo mismo. Aunque la primera obra dedicada al CF apareció en el año 1974, la curiosidad sobre el significado de una derivada de orden “fraccionario” surge desde 1695 cuando L'Hôpital pregunta a Leibniz sobre el significado de $\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}}[f(t)]$.

En 1823, Abel resolvió el problema de la tautócrona, primera aplicación del CF. Este problema consiste en encontrar la forma de una curva, de tal forma que un objeto, al deslizarse por ella sin rozamiento, llegue al punto más bajo en un tiempo independiente del punto de partida. Para esto, Abel usó una derivada de orden $\frac{1}{2}$. En 1832, Liouville, intrigado por el trabajo de Abel, realizó el primer intento de definir la derivada fraccionaria. En 1847, Riemann escribió un artículo en el que, modificando el operador fraccionario propuesto por Liouville, da lugar a la conocida integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

A lo largo del siglo XX, con el desarrollo del análisis matemático y la teoría de funciones, aparecieron nuevas definiciones de operadores fraccionarios. En este sentido, en 1967, Caputo dio una nueva definición de derivada fraccionaria que permitía interpretar físicamente las condiciones iniciales de los problemas de manera tal que estas fueran expresadas en términos de derivadas enteras. Posteriormente, en 1974 se publicó el primer texto dedicado enteramente a esta disciplina “The Fractional Calculus”, escrito por el físico y matemático J. Spanier y el químico Keith B. Oldham,²⁸

Para la comodidad del lector, en el presente capítulo se presentan algunas definiciones, notaciones estándar y resultados que serán de ayuda en este trabajo. El

²⁸ K.B. Oldham y J. Spanier. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Elsevier, 1974.

contenido de este capítulo es organizado de la siguiente manera: en la primera sección incluimos algunas generalidades sobre la integral fraccionaria; para lo cual nos hemos basado en los trabajos de Diethelm ²⁹, Podlubny ⁴, Kilbas *et al.* ⁵, Samko *et al.* ⁶ y Katugampola ^{22 30}. En la segunda sección incluimos los conceptos necesarios sobre operadores diferenciales de orden fraccionario, para esto se revisan los trabajos de Kilbas *et al.* ⁵, Diethelm ²⁹, Samko *et al.* ⁶ y Katugampola ²³. En la tercera sección se introducen conceptos asociados con el análisis en el contexto difuso; para esto nos hemos basado en los trabajos de Goetschel y Voxman ³¹, Stefanini ³², Bede y Gal ³³, Bede y Stefanini ¹¹. Por último, en la cuarta sección, se presentan los conceptos de la integral-RLK y la derivada-CK en el contexto difuso; para esto se revisa principalmente el trabajo de Hoa *et al.* ⁹.

1.1. LA INTEGRAL FRACCIONARIA

Antes de adentrarnos en los operadores de integración y derivación generalizados recordemos algunas notaciones del cálculo elemental que servirán como punto de partida para introducir las definiciones.

²⁹ K. Diethelm. *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*. Springer Science & Business Media, 2010.

³⁰ U.N. Katugampola. "Existence and uniqueness results for a class of generalized fractional differential equations". En: *arXiv preprint arXiv:1411.5229* (2014).

³¹ R. Goetschel y W. Voxman. "Elementary fuzzy calculus". En: *Fuzzy Sets and Systems* 18.1 (1986), págs. 31-43.

³² L. Stefanini. *A generalization of Hukuhara difference for interval and fuzzy arithmetic*. in: D. Dubois, M.A. Lubiano, H. Prade, M.A. Gil, P. Grzegorzewski, O. Hryniewicz (Eds.), *Soft Methods for Handling Variability and Imprecision*. An extended version is available online: <http://econpapers.repec.org/RAS/pst233.htm>: in: *Series on Advances in Soft Computing*, vol. 48, Springer 2008.

³³ B. Bede y S.G. Gal. "Solutions of fuzzy differential equations based on generalized differentiability". En: *Commun. Math. Anal.* 9.2 (2010), págs. 22-41.

La n -ésima integral iterada de una función f está definida recursivamente por

$$(I^n f)(t) = (I^{n-1}(If))(t),$$

con $(I^0 f)(t) = f(t)$, donde I representa el operador integral

$$(If)(t) = \int_0^t f(s)ds, \quad t > 0.$$

Cauchy logró expresar, a través de un proceso inductivo, que

$$(I^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)ds, \quad t > 0. \quad (1.1.1)$$

En efecto, para $n = 1$, se tiene que

$$(I^1 f)(t) = \frac{1}{(1-1)!} \int_0^t (t-s)^{1-1} f(s)ds = \int_0^t f(s)ds, \quad t > 0.$$

Para $n = 2$, se tiene

$$\begin{aligned} (I^2 f)(t) &= \frac{1}{(2-1)!} \int_0^t (t-s)^{2-1} f(s)ds \\ &= \int_0^t (t-s) f(s)ds \\ &= \left[(t-s) \int_0^s f(\tau)d\tau \right]_{s=0}^{s=t} + \int_0^t \left(\int_0^s f(\tau)d\tau \right) ds \\ &= \int_0^t \int_0^s f(\tau)d\tau ds, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Y así sucesivamente se cumple la relación para $n \in \mathbb{N}$. Este resultado es conocido como la fórmula de Cauchy y marca el inicio de la integral fraccionaria.

Considerando (1.1.1), resulta natural la extensión de $n \in \mathbb{N}$ a α real positivo y, a su vez, el factorial por su valor correspondiente en términos de la función $\Gamma(\cdot)$. Haciendo

estos cambios, tenemos una extensión de la fórmula de Cauchy que es precisamente la definición de integral fraccionaria de Riemann-Liouville. Aquí, consideramos el espacio $L([a, b])$ de todas las funciones $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrables en el sentido de Lebesgue.

Definición 1.1.1 ⁽²⁹⁾. Sea $[a, b]$ un intervalo finito del eje real $\mathbb{R}$. La **integral fraccionaria de Riemann-Liouville** (o **integral-RL**, en su forma corta), ${}^{RL}I_a^\alpha f$, de orden $\alpha > 0$ de una función $f \in L[a, b]$ está definida por

$$({}^{RL}I_a^\alpha f)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad a < t \leq b. \quad (1.1.2)$$

Ejemplo 1.1.2. Considere $\alpha > 0$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la función real definida por $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, con $\beta > 0$. Luego,

$$({}^{RL}I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^{\beta-1} ds = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha-1}, \quad t > a.$$

Note que

$$({}^{RL}I_a^1 f)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1)} (t-a)^{\beta+1-1} = \frac{(t-a)^\beta}{\beta} = \int_a^t (s-a)^{\beta-1} ds, \quad t > a.$$

En la Figura 1 se presenta la gráfica de $({}^{RL}I_a^\alpha f)(t)$ cuando $a = 0$, $b = 3$, $\beta = 2$, con α tomando los valores de 0,25, 0,5, 0,75 y 1.

Por otro lado, Hadamard en sus intentos de compactar la expresión

$$({}^H I_0^n f)(t) = \int_0^t \frac{1}{s_1} \left(\int_0^{s_1} \frac{1}{s_2} \cdots \left(\int_0^{s_{n-2}} \frac{1}{s_{n-1}} \left(\int_0^{s_{n-1}} \frac{f(s_n)}{s_n} ds_n \right) ds_{n-1} \right) \cdots ds_2 \right) ds_1,$$

propone la siguiente expresión

$$({}^H I_0^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{n-1} f(s) \frac{ds}{s}, \quad t > 0.$$

Haciendo inducción sobre n no es difícil demostrar la relación. Esto es, para $n = 1$, se tiene

$$({}^H I_0^1 f)(t) = \frac{1}{(1-1)!} \int_0^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{1-1} f(s) \frac{ds}{s} = \int_0^t \frac{f(s)}{s} ds, \quad t > 0.$$

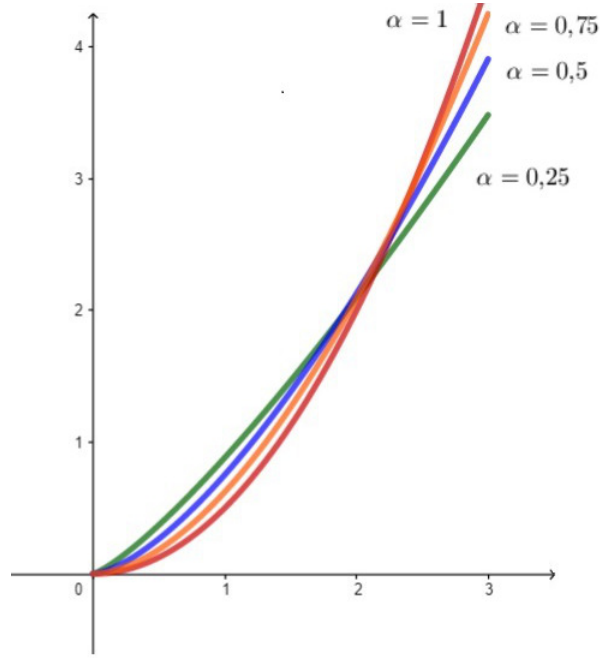


Figura 1. Gráfica de $({}^{RL} I_a^1 f)(t)$ cuando $a = 0$, $b = 3$, $\beta = 2$, con α tomando los valores de 0,25, 0,5, 0,75 y 1.

Para $n = 2$, se tiene

$$\begin{aligned} ({}^H I_0^2 f)(t) &= \frac{1}{(2-1)!} \int_0^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{2-1} f(s) \frac{ds}{s} \\ &= \int_0^t \ln \left(\frac{t}{s} \right) \frac{f(s)}{s} ds \\ &= \left[\ln \left(\frac{t}{s} \right) \int_0^s \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \right]_{s=0}^{s=t} + \int_0^t \frac{1}{s} \left(\int_0^s \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \right) ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{s} \left(\int_0^s \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \right) ds, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Y así sucesivamente se cumple la relación para $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.1.3 ⁽⁵⁾. Sea $[a, b] \subset (0, \infty)$ un intervalo finito. La **integral fraccionaria de Hadamard** (o **integral-H**, en su forma corta), ${}^H I_a^\alpha f$, de orden $\alpha > 0$ de una función $f \in L[a, b]$ está definida por

$$({}^H I_a^\alpha f)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} f(s) \frac{ds}{s}, \quad t > a. \quad (1.1.3)$$

Ejemplo 1.1.4. Considere $\alpha > 0$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la función real definida por $f(t) = \left(\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right)^{\beta-1}$, con $\beta > 0$. Luego,

$$({}^H I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \left(\ln \left(\frac{s}{a} \right) \right)^{\beta-1} \frac{ds}{s} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \alpha)} \left(\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right)^{\beta + \alpha - 1}, \quad t > a.$$

Note que

$$({}^H I_a^1 f)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + 1)} \left(\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right)^{\beta+1-1} = \frac{1}{\beta} \left(\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right)^\beta = \int_a^t \left(\ln \left(\frac{s}{a} \right) \right)^{\beta-1} \frac{ds}{s}, \quad t > a.$$

En la Figura 2 se presenta la gráfica de $({}^H I_a^\alpha f)(t)$ cuando $a = 1$, $b = 4$, $\beta = 2$, con α tomando los valores de 0.25, 0.5, 0.75 y 1.

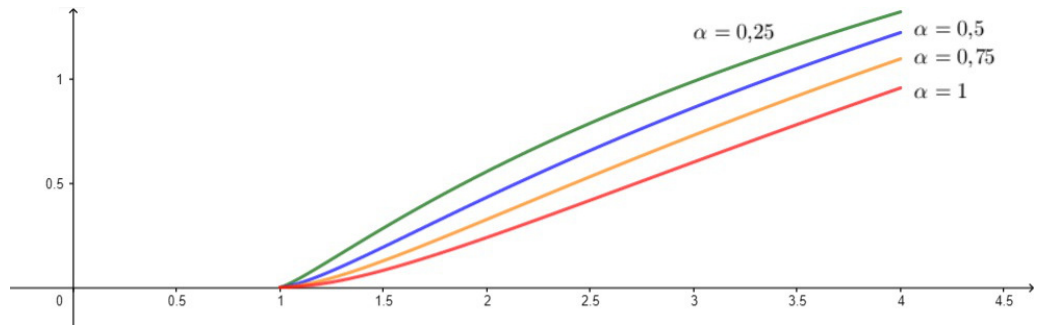


Figura 2. Gráfica de $({}^H I_a^\alpha f)(t)$ cuando $a = 1$, $b = 4$, $\beta = 2$, con α tomando los valores de 0.25, 0.5, 0.75 y 1.

A continuación, se presenta la integral fraccionaria que generaliza tanto la integral-RL como la integral-H en una sola forma. La nueva generalización se basa en la

observación de que, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_a^t s_1^{p-1} \left(\int_a^{s_1} s_2^{p-1} \dots \left(\int_a^{s_{n-2}} s_{n-1}^{p-1} \left(\int_a^{s_{n-1}} s_n^{p-1} f(s_n) ds_n \right) ds_{n-1} \right) \dots ds_2 \right) ds_1 \\ = \frac{p^{1-n}}{(n-1)!} \int_a^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{n-1} f(s) ds, \end{aligned}$$

lo cual sugiere la siguiente versión de definición de integral fraccionaria.

Definición 1.1.5 ⁽²²⁾. Sean $[a, b] \subset (0, \infty)$ un intervalo finito y $p > 0$. La **integral fraccionaria de Riemann-Liouville-Katugampola** (o **integral-RLK**, en su forma corta), ${}^{RLK}I_a^{\alpha,p} f$, de orden $\alpha > 0$ de una función $f \in L[a, b]$ está definida por

$$({}^{RLK}I_a^{\alpha,p} f)(t) := \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t > a. \quad (1.1.4)$$

Ejemplo 1.1.6. Considere $\alpha, p > 0$ y $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ la función real definida por $f(t) = t^{\beta-1}$, con $\beta > 0$. Luego,

$$({}^{RLK}I_0^{\alpha,p} f)(t) = \frac{p^{-\alpha} \Gamma(\frac{p+\beta-1}{p})}{\Gamma(\alpha + \frac{p+\beta-1}{p})} t^{\alpha p + \beta - 1}, \quad t > 0.$$

Note que

$$({}^{RLK}I_0^{1,p} f)(t) = \frac{1}{p + \beta - 1} t^{p + \beta - 1}, \quad t > 0.$$

Por otro lado,

$$({}^{RLK}I_0^{1,1} f)(t) = \frac{1}{\beta} t^\beta = ({}^{RL}I_0^1 f)(t), \quad t > 0$$

y

$$({}^{RLK}I_0^{1,0} f)(t) = \frac{1}{\beta - 1} t^{\beta-1} = ({}^H I_0^1 f)(t), \quad t > 0.$$

Esta última relación entre la integral ${}^{RLK}I_0^{1,p} f$, variando el valor de p , y las integrales ${}^{RL}I_0^1 f$ y ${}^H I_0^1 f$ no es coincidencia. El siguiente resultado muestra la relación entre (1.1.4) y las ecuaciones (1.1.2) y (1.1.3).

Proposición 1.1.7 ⁽²²⁾. Sean $\alpha \in (0, 1)$ y $p > 0$. Para $t \in (a, b]$ se sigue que

1. $\lim_{p \rightarrow 1} ({}^{RLK}I_a^{\alpha, p} f)(t) = ({}^{RL}I_a^\alpha f)(t),$
2. $\lim_{p \rightarrow 0^+} ({}^{RLK}I_a^{\alpha, p} f)(t) = ({}^H I_a^\alpha f)(t).$

Demostración. Tomando límites cuando $p \rightarrow 1$, obtenemos la equivalencia del ítem 1, y de la regla de L'Hôpital se infiere la equivalencia del ítem 2. En efecto,

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 1} ({}^{RLK}I_a^{\alpha, p} f)(t) &= \lim_{p \rightarrow 1} \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = ({}^{RL}I_a^\alpha f)(t). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0^+} ({}^{RLK}I_a^{\alpha, p} f)(t) &= \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \lim_{p \rightarrow 0^+} s^{p-1} \left(\frac{t^p - s^p}{p} \right)^{\alpha-1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (\ln(t) - \ln(s))^{\alpha-1} \frac{f(s)}{s} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} f(s) \frac{ds}{s} = ({}^H I_a^\alpha f)(t). \end{aligned} \quad \square$$

Observación 1.1.8. Sean $\alpha \in (0, 1)$, $p > 0$ y f, g funciones tales que $f(t) \leq g(t)$, para $t \in [a, b]$. Luego,

$$s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s) \leq s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} g(s), \quad s \in (a, t).$$

Por lo tanto

$$\int_a^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s) ds \leq \int_a^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} g(s) ds.$$

Esto es,

$$\begin{aligned} ({}^{RLK}I_a^{\alpha,p}f)(t) &= \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t s^{p-1}(t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s) ds \\ &\leq \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t s^{p-1}(t^p - s^p)^{\alpha-1} g(s) ds = ({}^{RLK}I_a^{\alpha,p}g)(t). \end{aligned}$$

Para la revisión de más resultados relacionados con los operadores ${}^{RLK}I_a^{\alpha,p}$, ${}^{RL}I_a^\alpha$ y ${}^HI_a^\alpha$ se sugiere revisar los trabajos de Diethelm ²⁹, Kilbas *et al.* ⁵, Podlubny ⁴, Samko *et al.* ⁶ y Katugampola ²².

1.2. LA DERIVADA FRACCIONARIA

Habiendo presentado los operadores integral-RL, integral-H e integral-RLK, ahora se mostrarán los correspondientes operadores diferenciales. Para motivar las definiciones que vienen, recordamos que, bajo ciertas condiciones, se establece la identidad $D(I f) = f$. Considerando buenas condiciones para la función f y $n \leq m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$D^n f = D^n (D^{m-n} (I^{m-n} f)) = D^m (I^{m-n} f).$$

Ahora, suponga que n no es un número entero. Entonces, todavía se puede elegir un número entero m tal que $m > n$. En vista de las definiciones mostradas en la sección anterior, el lado derecho de la identidad sigue siendo significativo. Si elegimos que el valor del entero m sea lo más pequeño posible, es decir, $m = \lfloor n \rfloor + 1$, se obtiene

$$m - n = \lfloor n \rfloor - n + 1 = 1 - (n - \lfloor n \rfloor) \in (0, 1),$$

donde $\lfloor n \rfloor$ es el mayor entero menor o igual a n . Esta idea junto con la integral-RL motivan la siguiente definición de derivada de orden fraccionario.

Definición 1.2.1 ⁽⁵⁾. Sea $[a, b] \subset (0, \infty)$ un intervalo finito. La **derivada fraccionaria de Riemann-Liouville** (o **derivada-RL**, en su forma corta), ${}^{RL}D_a^\alpha f$, de orden $\alpha > 0$

de una función $f \in L[a, b]$ está definida por

$$\begin{aligned} ({}^{RL}D_a^\alpha f)(t) &:= \left(\frac{d}{dt}\right)^{[\alpha]+1} ({}^{RL}I_a^{1-(\alpha-[\alpha])} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-(\alpha-[\alpha]))} \left(\frac{d}{dt}\right)^{[\alpha]+1} \int_a^t (t-s)^{[\alpha]-\alpha} f(s) ds, \quad a < t. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Note que, si $\alpha \in (0, 1)$, entonces

$$({}^{RL}D_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds.$$

Ejemplo 1.2.2. Considere, $\alpha \in (0, 1)$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la función real definida por

$$f(t) = (t-a)^{\beta-1},$$

con $\beta > 0$. Luego,

$$({}^{RL}D_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} (s-a)^{\beta-1} ds = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad t > a.$$

Note que

$$({}^{RL}D_a^1 f)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-1)} (t-a)^{\beta-1-1} = (\beta-1)(t-a)^{\beta-2} = \frac{d}{dt} (t-a)^{\beta-1}, \quad t > a.$$

Por otro lado, si $\beta = 1$, entonces f es una función constante y

$$({}^{RL}D_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha} \neq 0, \quad t > a.$$

Este resultado es inesperado, ya que la derivada fraccionaria de una constante es diferente de cero. Esto señala una gran diferencia entre los operadores de derivación clásicos y los fraccionarios.

En la Figura 3 se presenta la gráfica de $({}^{RL}D_a^\alpha f)(t)$ cuando $a = 0$, $b = 5$, $\beta = 2$, con α tomando los valores de 0.25, 0.5, 0.75 y 1.

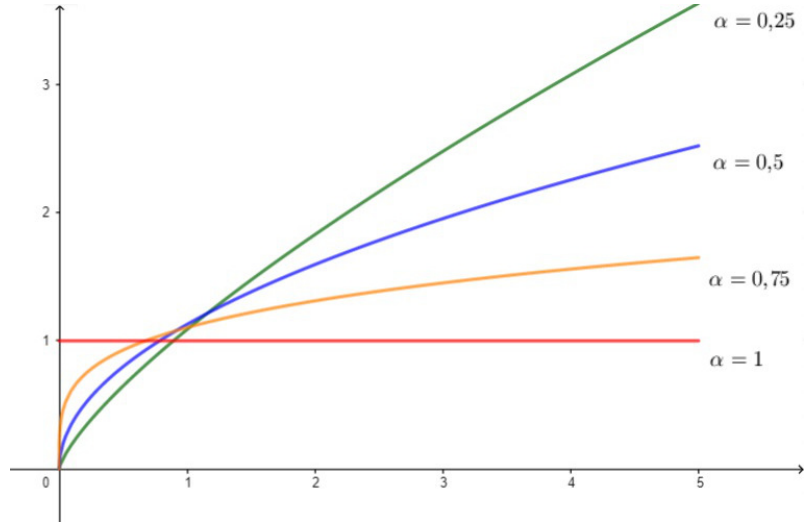


Figura 3. Gráfica de $({}^{RL}D_a^\alpha f)(t)$ cuando $a = 0$, $b = 5$, $\beta = 2$, con α tomando los valores de 0.25, 0.5, 0.75 y 1.

No es difícil ver que, de la Definición 1.2.1, se recupera la definición clásica de derivada. Si $\alpha = 0$, entonces (1.2.1) coincide con el operador identidad:

$$({}^{RL}D_a^0 f)(t) = D^{[0]+1} ({}^{RL}I_a^{[0]+1-0} f)(t) = D(I_a f)(t) = D(I f)(t) = f(t).$$

Si $\alpha = 1$, entonces (1.2.1) coincide con la derivada clásica:

$$({}^{RL}D_a^1 f)(t) = D^{[1]+1} ({}^{RL}I_a^{[1]+1-1} f)(t) = D^2 ({}^{RL}I_a^1 f)(t) = D(D(I f)(t)) = (D f)(t).$$

Al tratar de modelar fenómenos físicos reales por medio de ecuaciones diferenciales fraccionarias, surge el problema de las condiciones iniciales de orden fraccionario que, hasta este momento, no tienen una interpretación física clara. El operador diferencial de Caputo invierte el orden de la derivación en la definición de Riemann-Liouville, empleando entonces como condiciones iniciales derivadas de orden entero; esto representa un gran avance en el estudio de fenómenos físicos.

Definición 1.2.3 ⁽⁵⁾. Sea $[a, b]$ un intervalo finito del eje real $\mathbb{R}$. La **derivada fraccional de Caputo** (o **derivada-C**, en su forma corta), ${}^C D_a^\alpha f$, de orden $\alpha > 0$ de una función $f \in L[a, b]$ está definida por

$$({}^C D_a^\alpha f)(t) := {}^{RL} D_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right], \quad a < t. \quad (1.2.2)$$

Note que, si $\alpha \in (0, 1)$, entonces

$$({}^C D_a^\alpha f)(t) := {}^{RL} D_a^\alpha [f(t) - f(a)].$$

El siguiente resultado muestra la relación entre los operadores ${}^C D_a^\alpha$ y ${}^{RL} I_a^\alpha$; su demostración puede verse en ^{5, 29, 6}. También consideramos el espacio $AC([a, b])$ de todas las funciones absolutamente continuas, es decir, el conjunto de funciones $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tales que para la familia $\{(s_k, t_k) \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ de intervalos abiertos disjuntos en $[a, b]$ con $\sum_{k=1}^n (t_k - s_k) < \delta$,

se tiene $\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(s_k)| < \varepsilon$.

Teorema 1.2.4 ^(5, 29, 6). Sean $\alpha > 0$ y $f \in AC^{[\alpha]+1}[a, b]$, entonces ${}^C D_a^\alpha f$ existe en casi todo punto de $[a, b]$. Además,

$$\begin{aligned} ({}^C D_a^\alpha f)(t) &:= ({}^{RL} I_a^{1-(\alpha-[\alpha])} D^{[\alpha]+1} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-(\alpha-[\alpha]))} \int_a^t (t-s)^{[\alpha]-\alpha} f^{([\alpha]+1)}(s) ds, \quad a < t. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Note que, para $\alpha \in (0, 1)$, se tiene

$$({}^C D_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds, \quad a < t.$$

Ejemplo 1.2.5. Considere, $\alpha \in (0, 1)$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la función real definida por

$$f(t) = (t - a)^{\beta-1},$$

con $\beta > \lfloor \alpha \rfloor + 1$. Luego,

$$({}^C D_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} \frac{d}{ds} [(s-a)^{\beta-1}] ds = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-1}, \quad t > a.$$

Note que, si $\beta = 1$, entonces f es una función constante; entonces

$$({}^C D_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} \frac{d}{ds} [1] ds = 0, \quad t > a.$$

Observe que, al contrario de lo que ocurre con la derivada-RL, el valor de la derivada- C de una función constante es nulo.

Por otro lado, Hadamard propuso también su versión de derivada fraccionaria como sigue:

Definición 1.2.6 ⁽⁵⁾. Sea $[a, b] \subset (0, \infty)$ un intervalo finito. La **derivada fraccionaria de Hadamard** (o **derivada-H**, en su forma corta), ${}^H D_a^\alpha f$, de orden $\alpha > 0$ de una función $f \in L[a, b]$ está definida por

$$\begin{aligned} ({}^H D_a^\alpha f)(t) &:= \left(t \frac{d}{dt} \right)^{\lfloor \alpha \rfloor + 1} ({}^H I_a^{1-(\alpha-\lfloor \alpha \rfloor)} f)(t) \\ &= \frac{t^{\lfloor \alpha \rfloor + 1}}{\Gamma(1-(\alpha-\lfloor \alpha \rfloor))} \frac{d^{\lfloor \alpha \rfloor + 1}}{dt^{\lfloor \alpha \rfloor + 1}} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\lfloor \alpha \rfloor - \alpha} \frac{f(s)}{s} ds, \quad a < t \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Note que, para $\alpha \in (0, 1)$, se tiene

$$({}^H D_a^\alpha f)(t) = \frac{t}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{-\alpha} \frac{f(s)}{s} ds, \quad a < t.$$

Ejemplo 1.2.7. Considere, $\alpha \in (0, 1)$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función real definida por

$$f(t) = \ln^{\beta-1} \left(\frac{t}{a} \right),$$

con $\beta > 0$. Luego,

$$({}^H D_a^\alpha f)(t) = \frac{t}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{-\alpha} \frac{\ln^{\beta-1} \left(\frac{s}{a} \right)}{s} ds = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \ln^{\beta-\alpha-1} \left(\frac{t}{a} \right), \quad a < t.$$

Note que, si $\beta = 1$, entonces f es una función constante; entonces

$$({}^H D_a^\alpha f)(t) = \frac{t}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{-\alpha} \frac{ds}{s} = \frac{\ln^{-\alpha} \left(\frac{t}{a} \right)}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad a < t.$$

Observe que, al igual que ocurre con la derivada-RL, el valor de la derivada-H de una función constante es no nulo.

En la Figura 4 se presenta la gráfica de $({}^{RL} I_a^\alpha f)(t)$ cuando $a = 1$, $b = 4$, $\beta = 2$, con α tomando los valores de 0.25, 0.5, 0.75 y 1.

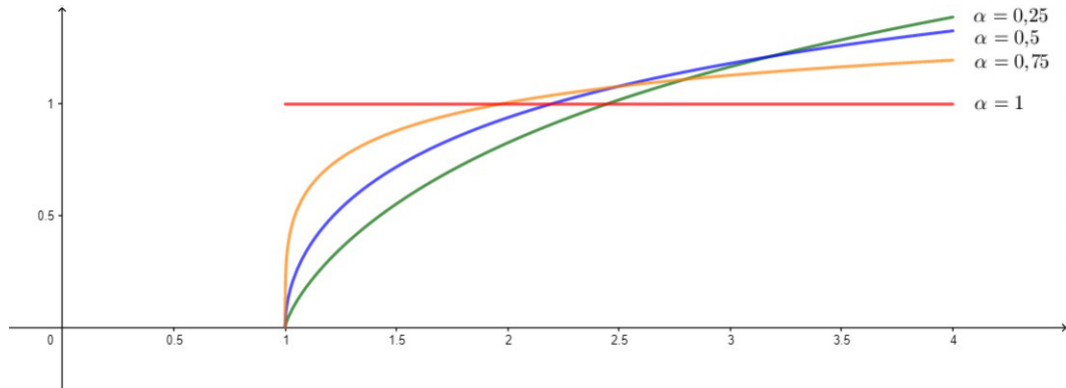


Figura 4. Gráfica de $({}^{RL} I_a^\alpha f)(t)$ cuando $a = 1$, $b = 4$, $\beta = 2$, con α tomando los valores de 0.25, 0.5, 0.75 y 1.

A continuación se presenta una noción de derivada fraccionaria que generaliza tanto la derivada-RL como la derivada-H en forma unificada dependiente de parámetro p .

Definición 1.2.8 ⁽²³⁾. Sean $[a, b] \subset (0, \infty)$ un intervalo finito y $p > 0$. La **derivada fraccionaria de Riemann-Liouville-Katugampola** (o **derivada-RLK**, en su forma corta), ${}^{RLK}D_a^{\alpha,p}f$, de orden $\alpha > 0$ de una función $f \in L[a, b]$ está definida por

$$\begin{aligned} ({}^{RLK}D_a^{\alpha,p}f)(t) &= \left(t^{1-p} \frac{d}{dt} \right)^{[\alpha]+1} ({}^{RLK}I_a^{1-(\alpha-[\alpha]).p}f)(t) \\ &= \frac{p^{\alpha-[\alpha]}}{\Gamma(1-(\alpha-[\alpha]))} \left(t^{1-p} \frac{d}{dt} \right)^{[\alpha]+1} \int_a^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{[\alpha]-\alpha} f(s) ds, \quad a < t. \end{aligned}$$

Note que, para $\alpha \in (0, 1)$, se tiene

$$({}^{RLK}D_a^{\alpha,p}f)(t) = \frac{p^\alpha t^{1-p}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{-\alpha} f(s) ds, \quad a < t.$$

Un resultado análogo a la Proposición 1.1.7 para el operador ${}^{RLK}D_a^{\alpha,p}$, que se relaciona con los operadores ${}^{RL}D_a^\alpha$ y ${}^H D_a^\alpha$, variando el valor del parámetro p , se presenta a continuación.

Proposición 1.2.9 ⁽²³⁾. Sea $\alpha \in (0, 1)$ y $p > 0$. Para $t \in (a, b]$ se sigue que

1. $\lim_{p \rightarrow 1} ({}^{RLK}D_a^{\alpha,p}f)(t) = ({}^{RL}D_a^\alpha f)(t),$
2. $\lim_{p \rightarrow 0^+} ({}^{RLK}D_a^{\alpha,p}f)(t) = ({}^H D_a^\alpha f)(t).$

Demostración. Tomando el límite cuando $p \rightarrow 1$, obtenemos la equivalencia del ítem 1; y de la regla de L'Hôpital se infiere la equivalencia del ítem 2. En efecto,

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 1} ({}^{RLK}D_a^{\alpha,p}f)(t) &= \lim_{p \rightarrow 1} \frac{p^\alpha t^{1-p}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{-\alpha} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds = ({}^{RL}D_a^\alpha f)(t). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{p \rightarrow 0^+} ({}^{RLK}D_a^{\alpha,p} f)(t) &= \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{p^\alpha t^{1-p}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{-\alpha} f(s) ds \\
&= \frac{t}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \left[\lim_{p \rightarrow 0^+} s^{p-1} \left(\frac{p}{t^p - s^p} \right)^\alpha \right] f(s) ds \\
&= \frac{t}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \left[s^{-1} \left(\frac{1}{\ln(t) - \ln(s)} \right)^\alpha \right] f(s) ds \\
&= \frac{t}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{-\alpha} \frac{f(s)}{s} ds = ({}^H D_a^\alpha f)(t). \quad \square
\end{aligned}$$

De forma análoga a la Definición 1.2.3, se define la versión del operador diferencial fraccionario de Caputo-Katugampola.

Definición 1.2.10 ⁽²³⁾. Sean $[a, b] \subset (0, \infty)$ un intervalo finito y $p > 0$. La **derivada fraccionaria de Caputo-Katugampola** (o **derivada-CK**, en su forma corta), ${}^{CK}D_a^{\alpha,p} f$, de orden $\alpha > 0$ de una función $f \in L[a, b]$ está definida por

$$({}^{CK}D_a^\alpha f)(t) := {}^{RLK}D_a^{\alpha,p} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right], \quad a < t.$$

Note que, para $\alpha \in (0, 1)$, se tiene

$$\begin{aligned}
({}^{CK}D_a^{\alpha,p} f)(t) &= {}^{RLK}D_a^{\alpha,p} [f(t) - f(a)] \\
&= ({}^{RLK}D_a^{\alpha,p} f)(t) - ({}^{RLK}D_a^{\alpha,p} f)(a) \\
&= ({}^{RLK}D_a^{\alpha,p} f)(t) - \frac{f(a)p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} (t^p - a^p)^{-\alpha}, \quad a < t. \quad (1.2.5)
\end{aligned}$$

El siguiente resultado muestra la relación entre los operadores ${}^{CK}D_a^\alpha$ y ${}^{RLK}I_a^\alpha$; su demostración puede verse en ²³.

Teorema 1.2.11 ⁽²³⁾. Sean $\alpha \in (0, 1)$ y $p \in \mathbb{R}^+$. Suponga que $f \in AC[a, b]$ y $t \in [a, b]$.

Entonces,

$$({}^{CK}D_a^{\alpha,p}f)(t) = {}^{RLK}I_a^{(1-\alpha),p}(Df)(t) = \frac{p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t^p - s^p)^{-\alpha} \left(\frac{d}{ds} f \right) (s) ds, \quad t > a.$$

Demostración. Sean $\alpha \in (0, 1)$, $p \in \mathbb{R}^+$ y $f \in AC^1[a, b]$. De la definición del operador ${}^{CK}D_a^{\alpha,p}$, se sigue que

$$\begin{aligned} ({}^{CK}D_a^{\alpha,p}f)(t) &= D_a^{\alpha,p}(f(t) - f(a)) \\ &= \frac{t^{1-p}p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{s^{p-1}}{(t^p - s^p)^\alpha} (f(s) - f(a)) ds \\ &= \frac{t^{1-p}p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left[\left((f(s) - f(a)) \frac{(t^p - s^p)^{1-\alpha}}{(\alpha-1)p} \right) \right]_a^t \\ &\quad - \int_a^t \frac{(t^p - s^p)^{1-\alpha}}{(\alpha-1)p} \frac{d}{ds} (f(s) - f(a)) ds \\ &= \frac{t^{1-p}p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{(1-\alpha)p} \frac{d}{dt} \int_a^t (t^p - s^p)^{1-\alpha} \left(\frac{d}{ds} f(s) \right) ds \\ &= \frac{t^{1-p}p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{(1-\alpha)p} \int_a^t \frac{(1-\alpha)pt^{p-1}}{(t^p - s^p)^\alpha} \left(\frac{d}{ds} f(s) \right) ds \\ &= \frac{p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t^p - s^p)^{-\alpha} \left(\frac{d}{ds} f \right) (s) ds. \end{aligned} \quad \square$$

Observación 1.2.12. Sea $\alpha \in (0, 1)$ y $p > 0$. Para $t \in (a, b]$, se sigue que

$$\lim_{p \rightarrow 1} ({}^{CK}D_a^{\alpha,p}f)(t) = ({}^CD_a^\alpha f)(t),$$

esto es,

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 1} ({}^{CK}D_a^{\alpha,p}f)(t) &= \lim_{p \rightarrow 1} \frac{p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t^p - s^p)^{-\alpha} \left(\frac{d}{ds} f \right) (s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t - s)^{-\alpha} \left(\frac{d}{ds} f \right) (s) ds = ({}^CD_a^\alpha f)(t). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.13. Considere $\alpha \in (0, 1)$, $p > 0$, $f_p : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ la función real definida por

$f_p(t) = t^p$. Luego,

$$({}^{CK}D_0^{\alpha,p} f_p)(t) = \frac{p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{-\alpha} \frac{d}{ds} [s^p] ds = \frac{p^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} t^{p(1-\alpha)}, \quad t > 0.$$

Note que

$$({}^{CK}D_0^{0,p} f_p)(t) = \int_0^t \left(\frac{d}{ds} f_p(s) \right) ds = p \int_0^t s^{p-1} ds = t^p - 0^p = f_p(t).$$

$$({}^{CK}D_0^{1,p} f_p)(t) = p.$$

$$({}^{CK}D_0^{\alpha,1} f_1)(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} = ({}^CD_0^{\alpha,1} f_1)(t), \quad t > 0.$$

$$({}^{CK}D_0^{\alpha,p} f_0)(t) = \frac{p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{-\alpha} \frac{d}{ds} [1] ds = 0, \quad t > 0.$$

Habiendo establecido una breve introducción a los operadores ${}^{RLK}I_a^{\alpha,p}$, ${}^{RLK}D_a^{\alpha,p}$ y ${}^{CK}D_a^{\alpha,p}$, a continuación se mostrará cómo interactúan. Estos últimos resultados están dedicados a mostrar el teorema fundamental del cálculo en este contexto.

Teorema 1.2.14 ⁽²³⁾. Sean $\alpha \in (0, 1)$, $p > 0$, y $f \in L[a, b]$. Entonces,

$$({}^{RLK}D_a^{\alpha,p} {}^{RLK}I_a^{\alpha,p} f)(t) = f(t), \quad t \in (a, b].$$

Demostración. Para el desarrollo de la prueba se usa el teorema de Fubini y la

técnica de Dirichlet. De la integración directa, se tiene

$$\begin{aligned}
({}^{RLK}D_a^{\alpha,p} {}^{RLK}I_a^{\alpha,p} f)(t) &= \frac{p^\alpha t^{1-p}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \tau^{p-1} (t^p - \tau^p)^{-\alpha} \left(\frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^\tau s^{p-1} (\tau^p - s^p)^{\alpha-1} f(s) ds \right) d\tau \\
&= \frac{p t^{1-p}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t s^{p-1} f(s) \left(\int_s^t \frac{(\tau^p - s^p)^{\alpha-1}}{(t^p - \tau^p)^\alpha} \tau^{p-1} d\tau \right) ds \\
&= \frac{p t^{1-p}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t s^{p-1} f(s) \left(\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{p} \right) ds \\
&= t^{1-p} \frac{d}{dt} \int_a^t s^{p-1} f(s) ds \\
&= t^{1-p} t^{p-1} f(t) \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

Observe que la integral interna se evalúa mediante el cambio de variable

$$x = \frac{\tau^p - s^p}{t^p - s^p},$$

y usando la función Beta

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^\alpha (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

completando así la demostración. □

Teorema 1.2.15 ⁽²⁹⁾. Sean $\alpha \in (0, 1)$, $p > 0$, y f una función tal que

$${}^{RLK}I_a^{(1-\alpha),p} f \in AC[a, b].$$

Entonces,

$$({}^{RLK}I_a^{\alpha,p} {}^{RLK}D_a^{\alpha,p} f)(t) = f(t) - \frac{(t^p - a^p)^{\alpha-1} p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{z \rightarrow a^+} ({}^{RLK}I_a^{(1-\alpha),p} f)(z), \quad t \in (a, b].$$

Observación 1.2.16. Cuando se trata de la composición de la integral-RLK y la

derivada-CK, se tiene que la derivada-CK es la inversa a izquierda de la integral-RLK, mientras que la derivada-CK no es la inversa a derecha de la integral-RLK, esto es,

$$\begin{aligned}
({}^{CK}D_a^{\alpha,p} {}^{RLK}I_a^{\alpha,p} f)(t) &= {}^{RLK}D_a^{\alpha,p} [{}^{RLK}I_a^{\alpha,p} f(t) - {}^{RLK}I_a^{\alpha,p} f(a)] \\
&= {}^{RLK}D_a^{\alpha,p} \left[{}^{RLK}I_a^{\alpha,p} f(t) - \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s) ds \right] \\
&= ({}^{RLK}D_a^{\alpha,p} {}^{RLK}I_a^{\alpha,p} f)(t) = f(t)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
({}^{RLK}I_a^{\alpha,p} {}^{CK}D_a^{\alpha,p} f)(t) &= {}^{RLK}I_a^{\alpha,p} {}^{RLK}D_a^{\alpha,p} [f(t) - f(a)] \\
&= [f(t) - f(a)] - \frac{(t^p - a^p)^{\alpha-1} p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{z \rightarrow a^+} {}^{RLK}I_a^{(1-\alpha),p} [f(z) - f(a)] \\
&= f(t) - f(a).
\end{aligned}$$

1.3. PRELIMINARES SOBRE LOS CONJUNTOS DIFUSOS

Comenzamos recordando algunos preliminares sobre los conjuntos difusos definidos sobre $\mathbb{R}$. Un conjunto difuso en $\mathbb{R}$ es una función $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ donde el valor $u(x)$ denota el grado de pertenencia del elemento x al conjunto difuso u . Para $r \in [0, 1]$, el r -nivel de u se define mediante el conjunto

$$[u]^r = \{x \in \mathbb{R} \mid u(x) \geq r\}, \quad r \in (0, 1].$$

Para $r = 0$, se define el soporte de u como el conjunto

$$[u]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > 0\}}.$$

Se denota por $\mathcal{F}$ a la familia de números difusos $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ que satisfacen las siguientes propiedades:

1. Existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u(x_0) = 1$.

2. Para $x, y \in \mathbb{R}$,

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min \{u(x), u(y)\}$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$.

3. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $u(x) - u(x_0) < \varepsilon$, siempre que $\|x - x_0\| < \delta$.

4. $[u]^0$ es compacto.

Según el principio de extensión de Zadeh ³⁴, las operaciones de suma y multiplicación escalar en $\mathcal{F}$ se definen como:

$$(u + v)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \min \{u(y), v(x - y)\}$$

y

$$(\lambda u)(x) = \begin{cases} u\left(\frac{x}{\lambda}\right), & \lambda \neq 0, \\ \chi_{\{0\}}(x), & \lambda = 0, \end{cases}$$

donde $\chi_{\{0\}}$ es la función característica del conjunto $\{0\}$. Además, se mantienen las siguientes relaciones:

$$[\lambda u + v]^r = \lambda[u]^r + [v]^r, \quad \forall u, v \in \mathcal{F}, \quad \forall r \in [0, 1], \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

El espacio $\mathcal{F}$ es un espacio métrico completo con la métrica $d_\infty(u, v)$ definida por

$$d_\infty(u, v) = \sup_{r \in [0, 1]} d([u]^r, [v]^r), \quad \forall u, v \in \mathcal{F},$$

donde $d(\cdot, \cdot)$ es la conocida métrica de Pompeiu-Hausdorff en el espacio $K_C(\mathbb{R})$ de

³⁴ L.A. Zadeh. "Fuzzy sets". En: *Information and Control* 8.3 (1965), págs. 338-353.

todos los subconjuntos no vacíos, compactos y convexos del espacio euclidiano $\mathbb{R}$. Recordemos que la pareja $(K_C(\mathbb{R}), d)$ es también un espacio métrico completo ³⁵. ³⁶ A continuación, se presentan los elementos básicos concernientes a la integrabilidad de funciones difusas, los cuales son necesarios para extender las definiciones de los operadores, integral y diferencial, de orden fraccionario y abordar el análisis de las ecuaciones diferenciales difusas de orden fraccionario. Para complementar las siguientes definiciones y resultados ver ³⁷.

Para el desarrollo de la integración de funciones difusas $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$, requerimos un concepto de medibilidad más fuerte, dado en términos de la medibilidad de la multifunción

$$t \mapsto f_r(t) := [f(t)]^r = [\underline{f}^r(t), \overline{f}^r(t)], \quad \forall r \in [0, 1].$$

Definición 1.3.1. Una función difusa f es **fuertemente medible** si para cada $r \in [0, 1]$, la multifunción $t \mapsto f_r(t)$ es medible según Lebesgue, donde el espacio $K_C(\mathbb{R})$ está dotado con la topología generada por la métrica de Hausdorff.

Lema 1.3.2.

1. Si f es una función difusa fuertemente medible, entonces f es medible con respecto a la topología generalizada por la métrica d_∞ .
2. Si f es una función difusa continua (considerando $\mathcal{F}$ con la métrica d_∞), entonces f es fuertemente medible.

³⁵ P. Diamond y P. Kloeden. *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications*. River Edge, NJ, Singapore: World Scientific Publishing Co. Inc., 1994.

³⁶ M.L. Puri y D.A. Ralescu. "Fuzzy random variables". En: *J. Math. Anal. Appl.* 114.2 (1986), págs. 409-422.

³⁷ E. J. Villamizar-Roa y G. Arenas-Díaz. *Introducción a las ecuaciones diferenciales difusas*. Ediciones UIS, Bucaramanga, 2018.

3. Sean f fuertemente medible y considere la multifunción $t \mapsto f_r(t)$ para cada $r \in [0, 1]$. Entonces las funciones $t \mapsto \underline{f}^r(t)$ y $t \mapsto \overline{f}^r(t)$ son medibles.

Definición 1.3.3. Se dice que una función difusa $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ es **integrablemente acotada** si, para cada $r \in [0, 1]$, la multifunción $t \mapsto f_r(t)$ es integrablemente acotada.

Definición 1.3.4. La **integral** para una función difusa $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ sobre $[a, b]$, denotada por $\int_a^b f(t)dt$, se define por medio del conjunto

$$\begin{aligned} \left[\int_a^b f(t)dt \right]^r &= \int_a^b f_r(t)dt \\ &= \left\{ \int_a^b g(t)dt \mid g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ es una selección medible de } f_r \right\} \end{aligned}$$

para todo $0 \leq r \leq 1$.

Se dice que una función difusa $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ fuertemente medible e integralmente acotada es integrable sobre $[a, b]$, si $\int_a^b f(t)dt \in \mathcal{F}$.

El siguiente teorema proporciona condiciones de suficiencia para que una función difusa sea integrable.

Teorema 1.3.5. Si f es fuertemente medible e integralmente acotada, entonces existe un único conjunto difuso $u \in \mathcal{F}$ tal que

$$[u]^r = \int_a^b f_r(t)dt, \quad \forall r \in [0, 1].$$

A partir del anterior resultado podemos considerar la siguiente observación.

Observación 1.3.6. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ es integrable, entonces, en vista del Lema 1.3.2 ítem 3, $\int_a^b f(t)dt$ se obtiene por la integración de los r -niveles, esto es,

$$\left[\int_a^b f(t)dt \right]^r = \left[\int_a^b \underline{f}^r(t)dt, \int_a^b \overline{f}^r(t)dt \right],$$

donde $[f(t)]^r = [\underline{f}^r(t), \overline{f}^r(t)]$, $r \in [0, 1]$.

Se considera, inicialmente, el orden parcial sobre el espacio $\mathcal{F}$ dado por

$$u, v \in \mathcal{F}, \quad u \lesssim v \quad \Leftrightarrow \quad [u]^r \subseteq [v]^r, \quad \forall r \in [0, 1].$$

Esto es, si $u, v \in \mathcal{F}$ con $[u]^r = [\underline{u}^r, \overline{u}^r]$ y $[v]^r = [\underline{v}^r, \overline{v}^r]$, para $r \in [0, 1]$, se tiene

$$u \lesssim v \quad \Leftrightarrow \quad \underline{v}^r \leq \underline{u}^r \leq \overline{u}^r \leq \overline{v}^r, \quad \forall r \in [0, 1].$$

Una consecuencia inmediata con respecto este a orden es

$$u \lesssim v \quad \Leftrightarrow \quad u + w \lesssim v + w, \quad \forall u, v, w \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.3.7. Se dice que $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ es una **sucesión no decreciente** si $u_k \lesssim u_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por otro lado, $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ es una **sucesión no creciente** si $u_{k+1} \lesssim u_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Lema 1.3.8 ⁽³⁸⁾. Sobre $\mathcal{F}$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ es una sucesión no decreciente tal que $u_k \rightarrow u$ en $\mathcal{F}$, entonces $u_k \lesssim u$ para cada $k \in \mathbb{N}$.
2. Si $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ es una sucesión no creciente tal que $u_k \rightarrow u$ en $\mathcal{F}$, entonces $u \lesssim u_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.
3. Cada par de elementos de $\mathcal{F}$ tiene un límite superior y un límite inferior en $\mathcal{F}$.

Sobre el espacio de funciones difusas continuas $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$, $C([a, b], \mathcal{F})$, se con-

³⁸ J.J. Nieto y R. Rodríguez-López. "Applications of contractive-like mapping principles to fuzzy equations". En: *Rev. Mat. Complut.* 19.2 (2006), págs. 361-383.

sidera el siguiente orden parcial

$$f, g \in C([a, b], \mathcal{F}), \quad f \lesssim g \quad \Leftrightarrow \quad f(t) \lesssim g(t), \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.3.1)$$

Esto es, si $f, g \in C([a, b], \mathcal{F})$ con $[f(t)]^r = [\underline{f}^r(t), \overline{f}^r(t)]$ y $[g(t)]^r = [\underline{g}^r(t), \overline{g}^r(t)]$, para $r \in [0, 1]$ y $t \in [a, b]$, se tiene que

$$f \lesssim g \quad \Leftrightarrow \quad \underline{g}^r(t) \leq \underline{f}^r(t) \leq \overline{f}^r(t) \leq \overline{g}^r(t), \quad \forall r \in [0, 1], \forall t \in [a, b].$$

Lema 1.3.9 ⁽³⁸⁾. *Sobre $C([a, b], \mathcal{F})$ se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Si $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C([a, b], \mathcal{F})$ es una sucesión no decreciente tal que $f_k \rightarrow f$ en $C([a, b], \mathcal{F})$, entonces $f_k \lesssim f$ para cada $k \in \mathbb{N}$.*
2. *Si $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C([a, b], \mathcal{F})$ es una sucesión no creciente tal que $f_k \rightarrow f$ en $C([a, b], \mathcal{F})$, entonces $f \lesssim f_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.*

En los espacios $(\mathcal{F}, \lesssim)$ y $(C(J, \mathcal{F}), \lesssim)$, cualquier par de elementos siempre tiene límite superior (cf. ³⁸).

Teorema 1.3.10 ⁽³¹⁾. *Sea $u \in \mathcal{F}$ un número difuso con r -niveles dados por $[u]^r = [\underline{u}^r, \overline{u}^r]$. Entonces u está completamente determinado por un par $(\underline{u}, \overline{u})$ de funciones $\underline{u}, \overline{u} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, que definen, respectivamente, los extremos izquierdo y derecho de cada r -nivel, y que satisfacen:*

1. *La función $r \mapsto \underline{u}(r) = \underline{u}^r$ es acotada, no decreciente, continua en $(0, 1]$ y continua por la derecha en 0.*
2. *La función $r \mapsto \overline{u}(r) = \overline{u}^r$ es acotada, no creciente, continua en $(0, 1]$ y continua por la derecha en 0.*
3. *$\underline{u}^r \leq \overline{u}^r$, para todo $r \in [0, 1]$.*

Definición 1.3.11. Sean $u, v \in \mathcal{F}$. La **diferencia generalizada de Hukuhara** (o **gH -diferencia**) $u \ominus_{gH} v$ es un elemento $z \in \mathcal{F}$ tal que

$$u \ominus_{gH} v = z \Leftrightarrow \begin{cases} (a) & u = v + z, & o, \\ (b) & v = u + (-1)z. \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Note que si (a) y (b) se satisfacen de manera simultánea, entonces z es un elemento de $\mathbb{R}$; además, $u \ominus_{gH} u = \chi_{\{0\}}$, y si $u \ominus_{gH} v$ existe, es única. También, si $u, v \in \mathcal{F}$, donde $v = \{c\} \in \mathbb{R}$, entonces

$$u \ominus_{gH} v = u - v \quad \text{y} \quad v \ominus_{gH} u = v - u.$$

En la siguiente proposición se muestran algunos resultados inmediatos. La prueba puede ser consultada en ³².

Proposición 1.3.12 (³²). Sean $u, v \in \mathcal{F}$. Si $u \ominus_{gH} v$ existe, es única y satisface las siguientes propiedades:

1. $u \ominus_{gH} u = \chi_{\{0\}}$.
2. $(u + v) \ominus_{gH} v = u$.
3. $u \ominus_{gH} (u - v) = v$.
4. Si $u \ominus_{gH} v$ existe, entonces también existe $(-v) \ominus_{gH} (-u)$ y

$$0 \ominus_{gH} (u \ominus_{gH} v) = (-v) \ominus_{gH} (-u).$$

5. $u \ominus_{gH} v = v \ominus_{gH} u = z$ si, y solo si, $z = -z$ (en particular $z = 0$ si, y solo si, $u = v$).

6. Si $u \ominus_{gH} v$ existe, entonces $u + (v \ominus_{gH} u) = v$ ó $v - (v \ominus_{gH} u) = u$. Si ambas igualdades se cumplen, entonces $v \ominus_{gH} u$ es la función característica de un número real.

Definición 1.3.13. Sea $u \in \mathcal{F}$ un número difuso con r -niveles $[u]^r = [\underline{u}^r, \overline{u}^r]$ para $r \in [0, 1]$. El **diámetro** de $[u]^r$ está definido por

$$\text{diam}([u]^r) := \overline{u}^r - \underline{u}^r, \quad r \in [0, 1].$$

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ una función difusa con r -niveles

$$[f(t)]^r = [\underline{f}^r(t), \overline{f}^r(t)], \quad t \in [a, b].$$

f es llamada **d -creciente** (**d -decreciente**), si para cada $r \in [0, 1]$, la función

$$t \mapsto \text{diam}([f(t)]^r) := \overline{f}^r(t) - \underline{f}^r(t), \quad t \in [a, b],$$

es no decreciente (no creciente), respectivamente.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ es d -creciente o d -decreciente en $[a, b]$, entonces decimos que f es **d -monótona** en $[a, b]$. Las funciones difusas f y g son llamadas **diferentemente d -monótonas** sobre $[a, b]$ si f es d -creciente (d -decreciente) mientras que g es d -decreciente (d -creciente) sobre $[a, b]$. Si f y g son simultáneamente d -creciente (d -decreciente) sobre $[a, b]$, entonces f y g son llamadas **equivalentemente d -monótonas** sobre $[a, b]$.

Proposición 1.3.14 ⁽³²⁾. Sean $u, v \in \mathcal{F}$ dos números difusos con r -niveles dados por

$$[u]^r = [\underline{u}^r, \overline{u}^r] \text{ y } [v]^r = [\underline{v}^r, \overline{v}^r].$$

La gH -diferencia $u \ominus_{gH} v \in \mathcal{F}$ existe si, y solo si, una de las siguientes condiciones se cumple:

1. $\text{diam}([u]^r) \geq \text{diam}([v]^r)$ para todo $r \in [0, 1]$, $\underline{u}^r - \underline{v}^r$ es no decreciente con respecto a r y $\overline{u}^r - \overline{v}^r$ es no creciente con respecto a r , o
2. $\text{diam}([u]^r) \leq \text{diam}([v]^r)$ para todo $r \in [0, 1]$, $\overline{u}^r - \overline{v}^r$ es no decreciente con respecto a r y $\underline{u}^r - \underline{v}^r$ es no creciente con respecto a r .

Lema 1.3.15 ⁽³³⁾. Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ una función difusa d -monótona y $w \in \mathcal{F}$ dado. Además, sea $g : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ la función difusa definida por $g(t) = w \ominus_{gH} f(t)$, $t \in [a, b]$.

1. Si $\text{diam}([f(t)]^r) \leq \text{diam}([w]^r)$ para cada $r \in [0, 1]$ y para todo $t \in [a, b]$, entonces g y f son de manera diferente d -monótonas en $[a, b]$.
2. Si $\text{diam}([f(t)]^r) \geq \text{diam}([w]^r)$ para cada $r \in [0, 1]$ y para todo $t \in [a, b]$, entonces g y f son de manera equivalente d -monótonas en $[a, b]$.

Demostración. Si $\text{diam}([f(t)]^r) \leq \text{diam}([w]^r)$ para cada $r \in [0, 1]$ y para todo $t \in [a, b]$, entonces

$$\text{diam}([g(t)]^r) = \text{diam}([w]^r) - \text{diam}([f(t)]^r), \quad \forall t \in [a, b].$$

Así, si f es d -creciente, entonces g es d -decreciente en $[a, b]$. De manera análoga, si f es d -decreciente, entonces g es d -creciente en $[a, b]$.

Por otro lado, si $\text{diam}([f(t)]^r) \geq \text{diam}([w]^r)$ para cada $r \in [0, 1]$ y para todo $t \in [a, b]$, entonces

$$\text{diam}([g(t)]^r) = \text{diam}([f(t)]^r) - \text{diam}([w]^r), \quad \forall t \in [a, b].$$

Así, si f es d -creciente, entonces g es d -creciente en $[a, b]$. De manera análoga, si f es d -decreciente, entonces g es d -decreciente en $[a, b]$. $\square$

Corolario 1.3.16. Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ una función difusa d -monótona y $g : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ la función difusa definida por $g(t) = f(t) \ominus_{gH} f(a)$, $t \in [a, b]$, entonces g es d -creciente.

Considerando la métrica $D(\cdot, \cdot)$ sobre $C([a, b], \mathcal{F})$, definida por

$$D(f, g) = \sup_{t \in [a, b]} d_{\infty}(f(t), g(t)), \quad f, g \in C([a, b], \mathcal{F}), \quad (1.3.3)$$

se tiene que $(C([a, b], \mathcal{F}), D)$ es un espacio métrico completo (cf. ³⁵). Para nuestros objetivos, en la Sección 4.2, usaremos la métrica $D_{\rho,p}(\cdot, \cdot)$ sobre $C([a, b], \mathcal{F})$ definida por (cf. ³⁸)

$$D_{\rho,p}(f, g) = \sup_{t \in J} e^{-\rho^p t^p} d_{\infty}(f(t), g(t)), \quad f, g \in C([a, b], \mathcal{F}), \quad (1.3.4)$$

para $\rho > 0$ y $p > 0$ fijos, que es equivalente a $D(\cdot, \cdot)$ definida en (1.3.3) dado que $[a, b]$ es un intervalo compacto. En el espacio $C([a, b] \times [a - \tau, b], \mathcal{F})$ con $\tau > 0$, también se usa la métrica

$$D'_{\rho,p}(f, g) = \sup_{(t,s) \in [a,b] \times [a-\tau,b]} e^{-\rho^p(t^p+s^p)} d_{\infty}(f(t, s), g(t, s)), \quad f, g \in C([a, b] \times [a - \tau, b], \mathcal{F}). \quad (1.3.5)$$

Desde el punto de vista del cálculo difuso, varios autores han establecido diferentes conceptos de diferenciabilidad difusa con el fin de ampliar la clase de funciones difusas diferenciables. Esto permite comprender e interpretar de una mejor manera los problemas de valor inicial asociados a ecuaciones diferenciales difusas (cf. ^{39 40}

³⁹ H.T. Banks y M.Q. Jacobs. "A differential calculus for multifunctions". En: *J. Math. Anal. Appl.* 29.2 (1970), págs. 246-272.

⁴⁰ B. Bede y S.G. Gal. "Generalizations of the differentiability of fuzzy number valued functions with applications to fuzzy differential equations". En: *Fuzzy Sets and Systems* 151.3 (2005), págs. 581-599.

³³ ⁴¹ ⁴² ⁴³ ⁴⁴ ³⁶ ⁴⁵ ⁴⁶). Una primera generalización del concepto de diferenciabilidad difusa es presentada por Puri y Ralescu en ⁴⁷. Después, basado en la gH -diferencia sobre $\mathcal{F}$ (1.3.2), en ¹¹, Bede y Stefanini establecieron la siguiente noción de diferenciabilidad que generaliza la H -diferenciabilidad.

Definición 1.3.17 (¹¹). Sean $t_0 \in (a, b)$ y $h > 0$ tales que $t_0 + h \in (a, b)$, entonces la **derivada generalizada de Hukuhara** (o **gH -derivada**) para una función difusa $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ en $t_0 \in (a, b)$ está definida por

$$(D_{gH}f)(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(t_0 + h) \ominus_{gH} f(t_0)]. \quad (1.3.6)$$

Si $(D_{gH}f)(t_0) \in \mathcal{F}$ que satisface (1.3.6) existe, decimos que f es diferenciable en el sentido de Hukuhara generalizado (o **gH -diferenciable**, para abreviar) en t_0 .

El siguiente resultado muestra la relación entre una función difusa f y las funciones extremos de sus r -niveles $\underline{f}^r$ y $\overline{f}^r$.

-
- ⁴¹ Y. Chalco-Cano, H. Román-Flores y M.D. Jiménez-Gamero. "Generalized derivative and π -derivative for set-valued functions". En: *Inform. Sci.* 181.11 (2011), págs. 2177-2188.
- ⁴² W. González-Calderón y E.J. Villamizar-Roa. "A note on the Cauchy problem of fuzzy differential equations". En: *Rev. Acad. Colombiana Cienc. Exact. Fís. Natur.* 34.133 (2010), págs. 541-552.
- ⁴³ O. Kaleva. "Fuzzy differential equations". En: *Fuzzy Sets and Systems* 24.3 (1987), págs. 301-317.
- ⁴⁴ C.V. Negoita y D.A. Ralescu. *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*. John Wiley, 1975.
- ⁴⁵ L. Stefanini y B. Bebe. "Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations". En: *Nonlinear Analysis* 71 (2009), págs. 1311-1328.
- ⁴⁶ L. Stefanini, L. Sorini y M.L. Guerra. "Parametric representation of fuzzy numbers and application to fuzzy calculus". En: *Fuzzy Sets and Systems* 157.18 (2006), págs. 2423-2455.
- ⁴⁷ M.L. Puri y D.A. Ralescu. "Differential and fuzzy functions". En: *J. Math. Anal. Appl.* 91.2 (1983), págs. 552-558.

Teorema 1.3.18 ⁽¹¹⁾. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ con r -niveles $[f(t)]^r = [\underline{f}^r(t), \overline{f}^r(t)]$ para todo $r \in [0, 1]$. Suponga que $\underline{f}^r$ y $\overline{f}^r$ son funciones de valor real, diferenciables en $t \in (a, b)$, uniformemente en $r \in [0, 1]$. Entonces la función f es gH -diferenciable en $t_0 \in (a, b)$ fijo si, y solo si, se cumple uno de los siguientes dos casos:

1. si $(\underline{f}^r)'(t_0)$ y $(\overline{f}^r)'(t_0)$ son funciones crecientes y decrecientes para $r \in [0, 1]$, respectivamente, y $(\underline{f}^1)'(t_0) \leq (\overline{f}^1)'(t_0)$, o
2. si $(\underline{f}^r)'(t_0)$ y $(\overline{f}^r)'(t_0)$ son funciones decrecientes y crecientes para $r \in [0, 1]$, respectivamente, y $(\overline{f}^1)'(t_0) \leq (\underline{f}^1)'(t_0)$.

Además, para $r \in [0, 1]$, se tiene que

$$[(D_{gH}f)(t_0)]^r = \left[\min \left\{ (\underline{f}^r)'(t_0), (\overline{f}^r)'(t_0) \right\}, \max \left\{ (\underline{f}^r)'(t_0), (\overline{f}^r)'(t_0) \right\} \right].$$

Observación 1.3.19. Considere una función difusa $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ tal que sea gH -diferenciable y d -monótona sobre $[a, b]$ y con r -niveles $[f(t)]^r = [\underline{f}^r(t), \overline{f}^r(t)]$ para todo $r \in [0, 1]$. Si f es d -creciente, entonces

$$t \mapsto \frac{d}{dt} [\text{diam}([f(t)]^r)] = \text{diam}([(D_{gH}f)(t)]^r) = (\overline{f}^r)'(t) - (\underline{f}^r)'(t) \geq 0 \quad t \in [a, b].$$

Luego,

$$[(D_{gH}f)(t)]^r = [(\underline{f}^r)'(t), (\overline{f}^r)'(t)].$$

Por otro lado, si f es d -decreciente, entonces

$$t \mapsto \frac{d}{dt} [\text{diam}([f(t)]^r)] = \text{diam}([(D_{gH}f)(t)]^r) = (\overline{f}^r)'(t) - (\underline{f}^r)'(t) \leq 0 \quad t \in [a, b].$$

Luego,

$$[(D_{gH}f)(t)]^r = [(\overline{f}^r)'(t), (\underline{f}^r)'(t)].$$

Ejemplo 1.3.20. Considere la función difusa $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}$ definida por $f(t) = C \cdot t^p$, donde $C = \langle a, b, c \rangle$ es un número difuso triangular con $a < b < c \in \mathbb{R}$ y $p > 0$. Entonces,

$$[f(t)]^r = [\underline{f}^r(t), \overline{f}^r(t)] = [((b-a)r + a)t^p, (c - (c-b)r)t^p], \quad r, t \in [0, 1].$$

Está claro que f es d -creciente en $[0, 1]$, para $t \in (0, 1)$, y se tiene

$$(D_{gH}f)(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C \cdot ((t+h)^p - t^p)}{h} = pC \cdot t^{p-1}.$$

Por lo tanto,

$$[(D_{gH}f)(t)]^r = pt^{p-1}[C]^r = [((b-a)r + a)pt^{p-1}, (c - (c-b)r)pt^{p-1}] = [(\underline{f}^r)'(t), (\overline{f}^r)'(t)].$$

1.4. LA INTEGRAL-RLK Y DERIVADA-CK EN EL CONTEXTO DIFUSO

Con los preliminares presentados en las secciones anteriores pueden ser introducidos los operadores fraccionarios en el contexto difuso, es decir, de manera natural se extienden estas operaciones a funciones de valor difuso o funciones difusas. Para los objetivos de este trabajo, aunque se ha mostrado que los operadores ${}^{RLK}I_a^{\alpha,p}$, ${}^{RLK}D_a^{\alpha,p}$ y ${}^{CK}D_a^{\alpha,p}$ están definidos para $\alpha > 0$ arbitrario, se desarrollará esta sección considerando $\alpha \in (0, 1)$.

Definición 1.4.1 ⁽⁹⁾. Sean $f \in L([a, b], \mathcal{F})$ una función difusa, $\alpha \in (0, 1)$ y $p > 0$. La integral fraccionaria difusa generalizada de Riemann-Liouville-Katugampola (o gH -integral-RLK, en su forma corta), ${}^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha,p}$, de orden α de f se define por:

$$({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha,p}f)(t) := \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t s^{p-1}(t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t \geq a.$$

Observación 1.4.2. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ una función difusa con r -niveles

$$[f(t)]^r = [\underline{f}^r(t), \overline{f}^r(t)], \quad \forall r \in [0, 1].$$

De la Observación 1.1.8, los r -niveles de ${}^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha,p} f$ se expresan como

$$[({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha,p} f)(t)]^r = [({}^{RLK}I_a^{\alpha,p} \underline{f}^r)(t), ({}^{RLK}I_a^{\alpha,p} \overline{f}^r)(t)], \quad t \in (a, b].$$

Observación 1.4.3. De la definición de la función $\text{diam}(\cdot)$, Definición 1.3.13, se sigue que

$$\begin{aligned} \text{diam}([({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha,p} f)(t)]^r) &= \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_a^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} \overline{f}^r(s) ds - \int_a^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} \underline{f}^r(s) ds \right) \\ &= \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} (\overline{f}^r(s) - \underline{f}^r(s)) ds \\ &= \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} \text{diam}([f(t)]^r) ds \\ &= {}^{RLK}I_a^{\alpha,p} (\text{diam}([f(t)]^r)). \end{aligned}$$

Observación 1.4.4. Sean $p > 0$, $\alpha \in [0, 1]$ y $f, g : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ funciones difusas con r -niveles

$$[f(t)]^r = [\underline{f}^r(t), \overline{f}^r(t)] \text{ y } [g(t)]^r = [\underline{g}^r(t), \overline{g}^r(t)], \quad \forall r \in [0, 1], \quad \forall t \in [a, b].$$

Si $f \lesssim g$, de (1.3.1), se tiene que

$$\underline{g}^r(t) \leq \underline{f}^r(t) \leq \overline{f}^r(t) \leq \overline{g}^r(t), \quad \forall r \in [0, 1], \forall t \in [a, b].$$

Aplicando el operador ${}^{RLK}I_a^{\alpha,p}$, de la Observación 1.1.8, se sigue que $\forall r, \alpha \in [0, 1]$ y

$$\forall t \in [a, b]$$

$$({}^{RLK}I_a^{\alpha,p} \underline{g}^r)(t) \leq ({}^{RLK}I_a^{\alpha,p} \underline{f}^r)(t) \leq ({}^{RLK}I_a^{\alpha,p} \overline{f}^r)(t) \leq ({}^{RLK}I_a^{\alpha,p} \overline{g}^r)(t).$$

Esto es, $[(\mathcal{I}_a^{\alpha,p} f)(t)]^r \subseteq [(\mathcal{I}_a^{\alpha,p} g)(t)]^r$, para $r \in [0, 1]$ y $t \in [a, b]$. Así, si $f \lesssim g$, entonces ${}^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha,p} f \lesssim {}^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha,p} g$.

Ejemplo 1.4.5. Sean $p > 0$, $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}$ una función difusa definida por $f(t) = C \cdot g(t)$, donde $C = \langle -1, 0, 1 \rangle$ es un número triangular difuso y $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es la función real dada por

$$g(t) = \begin{cases} t^p, & \text{si } 0 \leq t < (0.5)^{\frac{1}{p}}, \\ 1 - t^p, & \text{si } (0.5)^{\frac{1}{p}} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Para $r \in [0, 1]$, se tiene que

$$[f(t)]^r = \begin{cases} t^p[r-1, 1-r], & \text{si } 0 \leq t < (0.5)^{\frac{1}{p}}, \\ (1-t^p)[r-1, 1-r], & \text{si } (0.5)^{\frac{1}{p}} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

En la Figura 5 se presenta la gráfica del r -nivel de f cuando $r = 0.5$ y p tomando los valores de 0.5, 0.75 y 1.

Así, para $0 \leq t < (0.5)^{\frac{1}{p}}$, se obtiene que

$$\begin{aligned} [({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t)]^r &= \left[\frac{(r-1)p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} s^p ds, \right. \\ &\quad \left. \frac{(1-r)p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} s^p ds \right] \\ &= \left[\frac{(r-1)p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{t^{\alpha p+p}}{\alpha(\alpha+1)p}, \frac{(1-r)p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{t^{\alpha p+p}}{\alpha(\alpha+1)p} \right] \\ &= \frac{p^{-\alpha} t^{\alpha p+p}}{\Gamma(\alpha+2)} [C]^r. \end{aligned}$$

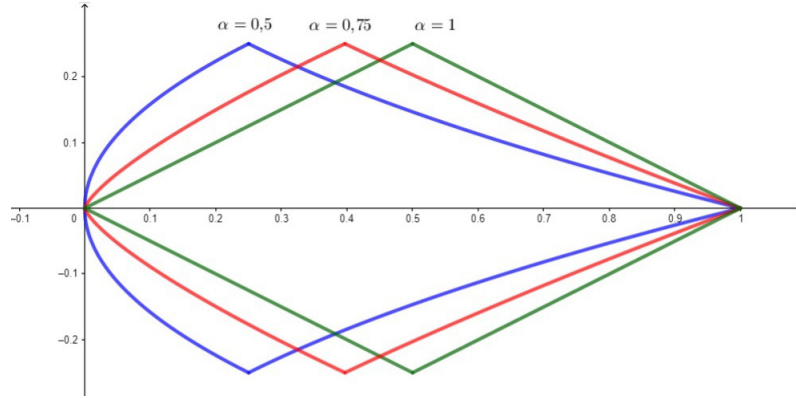


Figura 5. Gráfica del r -nivel de f cuando $r = 0.5$ y p tomando los valores de 0.5, 0.75 y 1.

Por otro lado, para $(0.5)^{\frac{1}{p}} \leq t \leq 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \left[\mathcal{I}_{(0.5)^{\frac{1}{p}}}^{\alpha, p} f(t) \right]^r &= \left[\frac{(r-1)p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{(0.5)^{\frac{1}{p}}}^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} (1 - s^p) ds, \right. \\
 &\quad \left. \frac{(1-r)p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{(0.5)^{\frac{1}{p}}}^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} (1 - s^p) ds \right] \\
 &= \left[\frac{(r-1)p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(0.5\alpha + 1 - t^p)(t^p - 0.5)^\alpha}{\alpha(\alpha+1)p}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{(1-r)p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(0.5\alpha + 1 - t^p)(t^p - 0.5)^\alpha}{\alpha(\alpha+1)p} \right] \\
 &= \frac{p^{-\alpha}(0.5\alpha + 1 - t^p)(t^p - 0.5)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} [C]^r.
 \end{aligned}$$

En la Figura 6 se presenta la gráfica del r -nivel de ${}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha, p} f$ cuando $r = 0.5$, $\alpha = 0.5$ y $p = 1$.

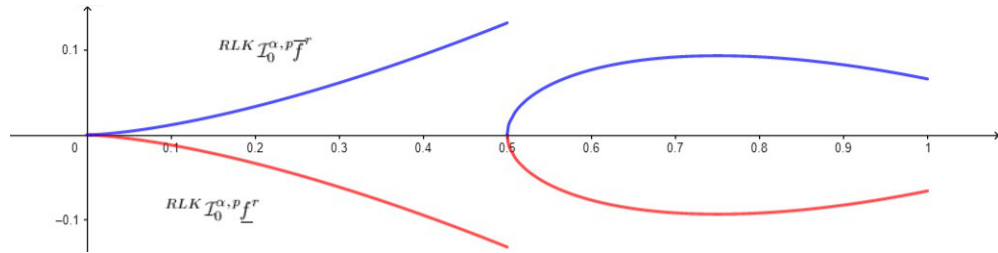


Figura 6. Gráfica del r -nivel de ${}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha, p} f$ cuando $r = 0.5$, $\alpha = 0.5$ y $p = 1$.

La siguiente observación es un resultado análogo a la Proposición 1.1.7 en la que se muestra la relación entre la gH -integral-RLK y la integral fraccionaria generalizada de Riemann-Liouville, así como la gH -integral-RLK con la integral fraccionaria generalizada de Hadamard para funciones difusas.

Observación 1.4.6. Sean $\alpha \in (0, 1)$, $p > 0$ y $f \in L([a, b], \mathcal{F})$. Entonces, para $t \in (a, b]$, tenemos las siguientes afirmaciones que relacionan la gH -integral-RLK con la integral fraccionaria generalizada de Riemann-Liouville (gH -integral-RL para abreviar), así como la gH -integral-RLK con la integral fraccionaria generalizada de Hadamard (gH -integral- H para abreviar)

1. $\lim_{p \rightarrow 1} ({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha, p} f)(t) = ({}^{RL}\mathcal{I}_a^\alpha f)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$
2. $\lim_{p \rightarrow 0^+} ({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha, p} f)(t) = ({}^H\mathcal{I}_a^\alpha f)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s)}{s} ds.$

El siguiente resultado será de suma importancia para el objetivo de la Sección 2.2.

Lema 1.4.7 ⁽⁹⁾. Sea $f \in L([a, b], \mathcal{F})$ una función difusa tal que, para cada $r \in [0, 1]$, la función $t \mapsto \text{diam}([f(t)]^r)$ es creciente en $[a, b]$. Entonces, las funciones reales

$$t \mapsto \psi_1(t) := \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} \text{diam}([f(s)]^r) ds$$

y

$$t \mapsto \psi_2(t) := \frac{p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{-\alpha} \text{diam}([f(s)]^r) ds,$$

son crecientes en $[a, b]$, con $\alpha \in (0, 1)$.

Demostración. Primero se probará que ψ_2 es creciente en $(a, b]$. Sea $f \in L([a, b], \mathcal{F})$ una función difusa tal que, para cada $r \in [0, 1]$, la función $t \mapsto \text{diam}([f(t)]^r)$ es creciente en $[a, b]$ y sean $t_1, t_2 \in (a, b]$ tales que $t_1 \leq t_2$. Se sigue que

$$\int_a^{t_2} s^{p-1} (t_2^p - s^p)^{-\alpha} ds \geq \int_a^{t_1} s^{p-1} (t_1^p - s^p)^{-\alpha} ds,$$

y como $\sup_{s \in [a, t_1]} \text{diam}([f(s)]^r) = \text{diam}([f(t_1)]^r)$, se tiene que

$$\int_{t_1}^{t_2} s^{p-1} (t_2^p - s^p)^{-\alpha} ds \geq \int_a^{t_1} s^{p-1} [(t_1^p - s^p)^{-\alpha} - (t_2^p - s^p)^{-\alpha}] ds,$$

y

$$\begin{aligned} & \frac{p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} s^{p-1} (t_2^p - s^p)^{-\alpha} \text{diam}([f(s)]^r) ds \\ & \geq \frac{p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} s^{p-1} [(t_2^p - s^p)^{-\alpha} - (t_1^p - s^p)^{-\alpha}] \text{diam}([f(t_1)]^r) ds \\ & \geq \frac{p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^{t_1} s^{p-1} [(t_1^p - s^p)^{-\alpha} - (t_2^p - s^p)^{-\alpha}] \text{diam}([f(t_1)]^r) ds \\ & \geq \frac{p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^{t_1} s^{p-1} [(t_1^p - s^p)^{-\alpha} - (t_2^p - s^p)^{-\alpha}] \text{diam}([f(s)]^r) ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \psi_2(t_2) - \psi_2(t_1) &= \frac{p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} s^{p-1} (t_2^p - s^p)^{-\alpha} \text{diam}([f(s)]^r) ds \\ &\quad - \frac{p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t s^{p-1} [(t_1^p - s^p)^{-\alpha} - (t_2^p - s^p)^{-\alpha}] \text{diam}([f(s)]^r) ds \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Así, ψ_2 es una función creciente. Para la función ψ_1 , basta tomar $\beta = 1 - \alpha$. $\square$

Ejemplo 1.4.8. En el Ejemplo 1.4.5, la función f es d -creciente para $0 \leq t < 0.5^{\frac{1}{p}}$ y d -decreciente para $0.5^{\frac{1}{p}} \leq t \leq 1$. De la Observación 1.4.3, se tiene que

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= {}^{RLK}I_0^{\alpha,p} \text{diam}([f(t)]^r) \\ &= \text{diam}([{}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f(t)]^r) \\ &= \text{diam}\left(\frac{p^{-\alpha} t^{\alpha p + p}}{\Gamma(\alpha + 2)} [C]^r\right) \\ &= \frac{2(1-r)p^{-\alpha} t^{\alpha p + p}}{\Gamma(\alpha + 2)}, \quad 0 \leq t \leq 0.5^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\psi_1(t) &= {}^{RLK}I_{0.5^{\frac{1}{p}}}^{\alpha,p} \text{diam}([f(t)]^r) \\
&= \text{diam} \left(\left[{}^{RLK}I_{0.5^{\frac{1}{p}}}^{\alpha,p} f(t) \right]^r \right) \\
&= \text{diam} \left(\frac{p^{-\alpha}(0.5\alpha + 1 - t^p)(t^p - 0.5)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} [C]^r \right) \\
&= \frac{2(1-r)p^{-\alpha}(0.5\alpha + 1 - t^p)(t^p - 0.5)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)}, \quad 0.5^{\frac{1}{p}} \leq t \leq 1.
\end{aligned}$$

En particular, si $\alpha = r = 0.5$ y $p = 1$, se obtiene que

$$\psi_1(t) = \begin{cases} \frac{t^{1.5}}{\Gamma(2.5)}, & \text{si } 0 \leq t < 0.5, \\ \frac{(1.25 - t)\sqrt{t - 0.5}}{\Gamma(2.5)}, & \text{si } 0.5 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

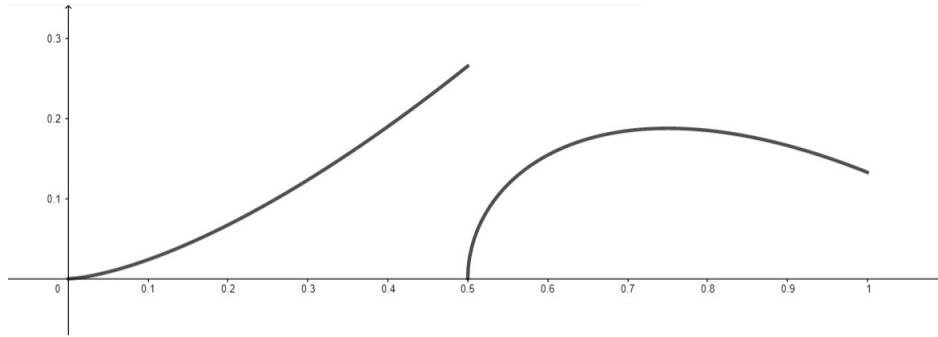


Figura 7. Gráfica de la función $\psi_1(t)$.

Note que ψ_1 es creciente para $0 \leq t < 0.5$ y para $0.5 \leq t < 0.75$, y decreciente en $0.75 \leq t \leq 1$. Esto último, si la condición sobre la función difusa f de que sea d -creciente no se cumple, entonces la monotonicidad de las funciones ψ_1 y ψ_2 no está garantizada.

A continuación se define la derivada-RLK en el contexto difuso.

Definición 1.4.9 ⁽⁹⁾. Sean $f \in L([a, b], \mathcal{F})$ una función difusa y $p > 0$. La **derivada**

fraccionaria de Hukuhara generalizada difusa de Riemann-Liouville-Katugampola (o gH-derivada-RLK), ${}^{RLK}_{gH}\mathcal{D}_a^{\alpha,p}f$, de orden $\alpha \in (0, 1)$ de f se define como

$$\begin{aligned} ({}^{RLK}_{gH}\mathcal{D}_a^{\alpha,p}f)(t) &:= t^{1-p}D_{gH}({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p}f)(t) \\ &= \frac{p^\alpha t^{1-p}}{\Gamma(1-\alpha)}D_{gH}\left(\int_a^t s^{p-1}(t^p - s^p)^{-\alpha}f(s)ds\right), \quad t \in [a, b], \end{aligned}$$

desde que $D_{gH}({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p}f)$ exista para cada $t \in [a, b]$.

Observación 1.4.10. Considere $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ una función difusa d -monótona con r -niveles $[f(t)]^r = [\underline{f}^r(t), \overline{f}^r(t)]$, $r \in [0, 1]$, y $\alpha \in (0, 1)$. De la Observación 1.4.2, para $r \in [0, 1]$,

$$[({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p}f)(t)]^r = [({}^{RLK}I_a^{(1-\alpha),p}\underline{f}^r)(t), ({}^{RLK}I_a^{(1-\alpha),p}\overline{f}^r)(t)].$$

Si ${}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p}f$ es d -creciente, del Teorem 1.3.18 y la Observación 1.3.19, se tiene que

$$[D_{gH}({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p}f)(t)]^r = [({}^{RLK}I_a^{(1-\alpha),p}\underline{f}^r)'(t), ({}^{RLK}I_a^{(1-\alpha),p}\overline{f}^r)'(t)], \quad \text{para } r \in [0, 1].$$

Luego,

$$[({}^{RLK}_{gH}\mathcal{D}_a^{\alpha,p}f)(t)]^r = [({}^{RLK}D_a^{\alpha,p}\underline{f}^r)(t), ({}^{RLK}D_a^{\alpha,p}\overline{f}^r)(t)].$$

Por otro lado, si ${}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p}f$ es d -decreciente, del Teorem 1.3.18 y la Observación 1.3.19, se tiene que

$$[D_{gH}({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p}f)(t)]^r = [({}^{RLK}I_a^{(1-\alpha),p}\overline{f}^r)'(t), ({}^{RLK}I_a^{(1-\alpha),p}\underline{f}^r)'(t)], \quad \text{para } r \in [0, 1].$$

Luego,

$$[({}^{RLK}_{gH}\mathcal{D}_a^{\alpha,p}f)(t)]^r = [({}^{RLK}D_a^{\alpha,p}\overline{f}^r)(t), ({}^{RLK}D_a^{\alpha,p}\underline{f}^r)(t)].$$

Ejemplo 1.4.11. Considere la función difusa $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}$ definida en el Ejem-

plo 1.3.20. Entonces,

$$\begin{aligned}
({}_{gH}^{RLK} \mathcal{D}_0^{\alpha,p} f)(t) &= \frac{p^\alpha t^{1-p} C}{\Gamma(1-\alpha)} D_{gH} \left(\int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{-\alpha} s^p ds \right) \\
&= \frac{p^\alpha t^{1-p} C}{\Gamma(1-\alpha)} D_{gH} \left(\left[\frac{(t^p - s^p)^{1-\alpha} ((\alpha-1)s^p - t^p)}{p(\alpha-2)(\alpha-1)} \right]_{s=0}^{s=t} \right) \\
&= \frac{p^{\alpha-1} t^{1-p} C}{\Gamma(3-\alpha)} D_{gH} (t^{(2-\alpha)p}) \\
&= \frac{p^\alpha C}{\Gamma(2-\alpha)} t^{(1-\alpha)p}.
\end{aligned}$$

Note que la función $t \mapsto \left({}^{RLK} \mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p} f \right)(t) = \frac{p^{\alpha-1} C}{\Gamma(3-\alpha)} t^{(2-\alpha)p}$ es d-creciente en $\mathbb{R}_0^+$. Por tanto, para $r \in [0, 1]$,

$$\left[\left({}_{gH}^{RLK} \mathcal{D}_a^{\alpha,p} f \right)(t) \right]^r = \frac{p^\alpha t^{p-\alpha p}}{\Gamma(2-\alpha)} [C]^r = \left[\left({}^{RLK} D_a^{\alpha,p} \underline{f}^r \right)(t), \left({}^{RLK} D_a^{\alpha,p} \overline{f}^r \right)(t) \right].$$

El siguiente resultado es análogo a la Proposición 1.2.9, en este se muestra la relación entre la gH-derivada-RLK y la derivada fraccionaria de Hukuhara generalizada de Riemann-Liouville, así como la gH-derivada-RLK con la derivada fraccionaria de Hukuhara generalizada de Hadamard para funciones difusas. La demostración de las siguientes identidades se sigue de forma análoga a la demostración de la Proposición 1.2.9.

Proposición 1.4.12 ⁽⁹⁾. Sean $\alpha \in (0, 1)$ y $p > 0$. Para $t \in (a, b]$ se sigue que

1. $\lim_{p \rightarrow 1} \left({}_{gH}^{RLK} \mathcal{D}_a^{\alpha,p} f \right)(t) = \left({}_{gH}^{RL} \mathcal{D}_a^\alpha f \right)(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} D_{gH} \left(\int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \right).$
2. $\lim_{p \rightarrow 0^+} \left({}_{gH}^{RLK} \mathcal{D}_a^{\alpha,p} f \right)(t) = \left({}_{gH}^H \mathcal{D}_a^\alpha f \right)(t) := \frac{t}{\Gamma(1-\alpha)} D_{gH} \left(\int_a^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{-\alpha} \frac{f(s)}{s} ds \right).$

Una función difusa $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ se dice que es absolutamente continua si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, de modo que, para cada familia $\{(s_k, t_k) | k = 1, 2, \dots, n\}$ de

intervalos abiertos disjuntos en $[a, b]$ con $\sum_{k=1}^n (t_k - s_k) < \delta$, tenemos que

$$\sum_{k=1}^n d_{\infty}(f(t_k), f(s_k)) < \varepsilon.$$

Aquí $AC([a, b], \mathcal{F})$ denota el conjunto de todas las funciones difusas absolutamente continuas.

Lema 1.4.13 ⁽⁹⁾. Sea $f \in L([a, b], \mathcal{F})$ una función difusa d -monótona tal que $({}^{RLK}_{gH}\mathcal{D}_a^{\alpha,p}f)(t)$ existe para $t \in (a, b]$ y $g(t) := f(t) \ominus_{gH} f(a)$, $t \in (a, b]$. Entonces, ${}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p}g \in AC([a, b], \mathcal{F})$ y $\frac{d}{dt} \text{diam} \left(\left[\left({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p}g \right)(t) \right]^r \right) \geq 0$ para $t \in (a, b]$.

Demostración. Dado que la derivada- RLK de la función f existe para todo $t \in (a, b]$, $\left({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p}f \right) \in AC([a, b], \mathcal{F})$ y $\left({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p}g \right) \in AC([a, b], \mathcal{F})$. Además, dado que f es una función difusa d -monótona, y del Lema 1.4.7, se deduce que $\left({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p}g \right)$ es d -creciente en $(a, b]$ ó $\frac{d}{dt} \text{diam} \left(\left[\left({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p}g \right)(t) \right]^r \right) \geq 0$ para $t \in (a, b]$. $\square$

Definición 1.4.14 ⁽⁹⁾. Sean $p > 0$ y $f \in L([a, b], \mathcal{F})$ una función difusa tal que ${}^{RLK}_{gH}\mathcal{D}_a^{\alpha,p}f$ existe sobre $[a, b]$. La **derivada fraccionaria de Hukuhara generalizada difusa de Caputo-Katugampola (o gH-derivada-CK)**, ${}^{CK}_{gH}\mathcal{D}_a^{\alpha,p}f$, de orden $\alpha \in (0, 1)$, de f se define como

$$\left({}^{CK}_{gH}\mathcal{D}_a^{\alpha,p}f \right)(t) := {}^{RLK}_{gH}\mathcal{D}_a^{\alpha,p}[f(t) \ominus_{gH} f(a)], \quad t \in [a, b].$$

El conjunto de funciones difusas $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ que son continuas y tales que la ${}^{CK}_{gH}\mathcal{D}_a^{\alpha,p}f$ existe para $\alpha \in (0, 1)$ sobre $[a, b]$ se denota por $C_{CK}^{1,F}([a, b], \mathcal{F})$.

Teorema 1.4.15 ⁽⁹⁾. Si $f \in AC([a, b], \mathcal{F})$ es una función difusa d -monótona, y $\alpha \in (0, 1)$, entonces

$$\left({}^{CK}_{gH}\mathcal{D}_a^{\alpha,p}f \right)(t) = \frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t^p - s^p)^{-\alpha} (D_{gH}f)(s) ds, \quad t \in (a, b]. \quad (1.4.1)$$

Demostración. Sea $f \in AC([a, b], \mathcal{F})$. Se sigue que ${}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p} f \in AC([a, b], \mathcal{F})$. Por lo tanto, $D_{gH} \left({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p} f \right)$ existe para $t \in (a, b]$, y

$$\left({}^{RLK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} f \right) (t) = t^{1-p} D_{gH} \left({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p} f \right) (t), \quad t \in (a, b].$$

Note que, $t \mapsto \left({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p} f \right) (a) = \frac{(t^p - a^p)^{1-\alpha} p^{\alpha-1}}{\Gamma(2-\alpha)} f(a)$ es d -creciente en $(a, b]$. Si f es d -monótona en $[a, b]$ y ${}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p} f$ es d -creciente en $(a, b]$, entonces

$$\begin{aligned} \left({}^{CK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} f \right) (t) &= {}^{RLK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} [f(t) \ominus_{gH} f(a)] \\ &= \left({}^{RLK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} f \right) (t) \ominus_{gH} \left({}^{RLK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} f \right) (a) \\ &= \left({}^{RLK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} f \right) (t) \ominus_{gH} \frac{(t^p - a^p)^{-\alpha} p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(a). \end{aligned}$$

Además, por la Observación 1.4.10 y (1.2.5), para cada $r \in [0, 1]$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left[\left({}^{RLK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} f \right) (t) \right]^r &= \left[\left({}^{RLK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} \underline{f}^r \right) (t), \left({}^{RLK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} \overline{f}^r \right) (t) \right] \\ &= \left[\left({}^{CK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} \underline{f}^r \right) (t), \left({}^{CK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} \overline{f}^r \right) (t) \right] + \frac{(t^p - a^p)^{-\alpha} p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\underline{f}^r(a), \overline{f}^r(a) \right], \end{aligned}$$

para $t \in (a, b]$ y para cada $r \in [0, 1]$; esto es,

$$\left({}^{RLK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} f \right) (t) = {}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p} (s^{1-p} (D_{gH} f(t))) + \frac{(t^p - a^p)^{-\alpha} p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(a),$$

Así, se obtiene (1.4.1).

Por otro lado, si f d -decreciente sobre $[a, b]$ y ${}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p} f$ es d -decreciente sobre $(a, b]$, se sigue que

$$\begin{aligned} \left({}^{CK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} f \right) (t) &= {}^{RLK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} [f(t) \ominus_{gH} f(a)] \\ &= \left({}^{RLK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} f \right) (t) + \left(-{}^{RLK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} f \right) (a) \\ &= \left({}^{RLK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} f \right) (t) + (-1) \frac{(t^p - a^p)^{-\alpha} p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(a), \quad t \in (a, b]. \end{aligned}$$

Además, por Observación 1.4.10 y (1.2.5), para cada $r \in [0, 1]$, se tiene que

$$[(^{RLK} \mathcal{D}_a^{\alpha,p} f)(t)]^r = [({}^{RLK} D_a^{\alpha,p} \overline{f}^r)(t), ({}^{RLK} D_a^{\alpha,p} \underline{f}^r)(t)], \quad t \in (a, b]$$

y

$$\begin{aligned} & \left[{}^{RLK} I_a^{(1-\alpha),p} \left(s^{1-p} \frac{d}{ds} \overline{f}^r(t) \right), {}^{RLK} I_a^{(1-\alpha),p} \left(s^{1-p} \frac{d}{ds} \underline{f}^r(t) \right) \right] \\ &= [({}^{RLK} D_a^{\alpha,p} \overline{f}^r)(t), ({}^{RLK} D_a^{\alpha,p} \underline{f}^r)(t)] + (-1) \frac{(t^p - a^p)^{-\alpha} p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} [\underline{f}^r(a), \overline{f}^r(a)]. \end{aligned}$$

Entonces,

$${}^{RLK} \mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p} (s^{1-p} D_{gH} f(t)) = ({}^{RLK} \mathcal{D}_a^{\alpha,p} f)(t) + \frac{(t^p - a^p)^{-\alpha} p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} (-f(a)).$$

Así, se concluye (1.4.1). □

Observación 1.4.16. De forma análoga a la Observación 1.2.12 se tiene la relación entre la gH -derivada- CK y la derivada fraccionaria de Hukuhara generalizada de Caputo (gH -derivada- C),

$$\lim_{p \rightarrow 1} ({}^{CK} \mathcal{D}_a^{\alpha,p} f)(t) = ({}^C \mathcal{D}_a^\alpha f)(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} (D_{gH} f)(s) ds.$$

Observación 1.4.17. Considere $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}$ una función difusa d -monótona con r -niveles $[f(t)]^r = [\underline{f}^r(t), \overline{f}^r(t)]$, $r \in [0, 1]$, y $\alpha \in (0, 1)$. Si f es d -creciente, del Teorema 1.3.18 y la Observación 1.3.19, se tiene que $[D_{gH} f(t)]^r = [(\underline{f}^r)'(t), (\overline{f}^r)'(t)]$, para $r \in [0, 1]$. De la Observación 1.4.2, se sigue que

$$[({}^{CK} \mathcal{D}_a^{\alpha,p} f)(t)]^r = [({}^{CK} D_a^{\alpha,p} \underline{f}^r)(t), ({}^{CK} D_a^{\alpha,p} \overline{f}^r)(t)].$$

Por otro lado, si f es d -decreciente, del Teorema 1.3.18 y la Observación 1.3.19, se

tiene que $[D_{gH}f(t)]^r = [(\overline{f^r})'(t), (\underline{f^r})'(t)]$, para $r \in [0, 1]$. De la Observación 1.4.2, se sigue que

$$[(^{CK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p}f)(t)]^r = [(^{CK}D_a^{\alpha,p}\overline{f^r})(t), (^{CK}D_a^{\alpha,p}\underline{f^r})(t)].$$

Ejemplo 1.4.18. Considere la función difusa $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}$ definida en el Ejemplo 1.3.20. Entonces,

$$\begin{aligned} (^{CK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}f)(t) &= \frac{p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t^p - s^p)^{-\alpha} (D_{gH}f)(s) ds \\ &= \frac{p^{\alpha+1}C}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t^p - s^p)^{-\alpha} s^{p-1} ds \\ &= \frac{p^{\alpha+1}C}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{(t^p - s^p)^{1-\alpha}}{(\alpha-1)p} \right]_{s=0}^{s=t} \\ &= \frac{p^\alpha C}{\Gamma(2-\alpha)} t^{(1-\alpha)p}. \end{aligned}$$

Es claro que la función f es d -creciente sobre $[0, \infty)$. Por tanto, para $r \in [0, 1]$, se tiene que

$$[(^{CK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}f)(t)]^r = \frac{p^\alpha t^{p-\alpha p}}{\Gamma(2-\alpha)} [C]^r = [(^{CK}D_0^{\alpha,p}\underline{f^r})(t), (^{CK}D_0^{\alpha,p}\overline{f^r})(t)].$$

Los siguientes resultados son versiones análogas a los Teoremas 1.2.14 y 1.2.15 y la Observación 1.2.16, en los cuales se muestra la relación entre el operador integral fraccionario $^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha,p}$ y los operadores diferenciales fraccionarios $^{RLK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p}$ y $^{CK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p}$.

Proposición 1.4.19 ⁽⁹⁾. Sean $f \in L([a, b], \mathcal{F})$ una función difusa, $\alpha \in (0, 1)$ y $p > 0$. Entonces,

$$(^{RLK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} {}^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha,p}f)(t) = f(t), \quad t \in (a, b].$$

Demostración. Para $t \in (a, b]$, mediante la fórmula de Dirichlet, la fórmula conocida

para la función Beta y la sustitución $x = \frac{\tau^p - s^p}{t^p - s^p}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
({}^{RLK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} {}^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha,p} f)(t) &= \frac{p^\alpha t^{1-p}}{\Gamma(1-\alpha)} D_{gH} \left(\int_a^t \frac{s^{p-1}}{(t^p - s^p)^\alpha} \left(\frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^s \frac{\tau^{p-1}}{(s^p - \tau^p)^{1-\alpha}} f(\tau) d\tau \right) ds \right) \\
&= \frac{pt^{1-p}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} D_{gH} \left(\int_a^t s^{p-1} f(s) \int_s^t \frac{(\tau^p - s^p)^{\alpha-1}}{(t^p - \tau^p)^\alpha} \tau^{p-1} d\tau ds \right) \\
&= \frac{pt^{1-p}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} D_{gH} \left(\int_a^t s^{p-1} f(s) ds \int_0^1 \frac{(1-x)^{1-\alpha-1} x^{\alpha-1}}{p} dx \right) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)t^{1-p}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1)} D_{gH} \left(\int_a^t s^{p-1} f(s) ds \right) \\
&= t^{1-p} t^{p-1} f(t) = f(t). \quad \square
\end{aligned}$$

Lema 1.4.20 ⁽⁹⁾. Sea $f \in L([a, b], \mathcal{F})$ tal que ${}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p} f \in AC([a, b], \mathcal{F})$. Si

$$\frac{d}{dt} \text{diam} \left(\left[({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p} f)(t) \right]^r \right) \geq 0 \quad \text{o} \quad \frac{d}{dt} \text{diam} \left(\left[({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p} f)(t) \right]^r \right) \leq 0$$

para $t \in (a, b]$, entonces

$$({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha,p} {}^{gH}\mathcal{D}_a^{\beta,p} f)(t) = f(t) \ominus_{gH} \frac{(t^p - a^p)^{\alpha-1} p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{z \rightarrow a^+} ({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p} f)(z), \quad t \in (a, b].$$

Demostración. Sea $\psi \in L([a, b], \mathbb{R}) \cap AC([a, b], \mathbb{R})$. Entonces,

$$({}^{RLK}I_a^{\alpha,p} {}^{RLK}D_a^{\alpha,p} \psi)(t) = \psi(t) - \frac{(t^p - a^p)^{\alpha-1} p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} ({}^{RLK}I_a^{(1-\alpha),p} \psi)(a), \quad t \in (a, b].$$

Si $\frac{d}{dt} \text{diam} \left(\left[({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p} f)(t) \right]^r \right) \geq 0$ para $t \in (a, b]$, entonces ${}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p} f$ es d -creciente en $(a, b]$. Así, de la Observación 1.4.10 y para cada $r \in [0, 1]$, se obtiene

que

$$\begin{aligned}
\left[\left({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha,p} {}^{gH}{}^{RLK}\mathcal{D}_a^{\beta,p} f \right) (t) \right]^r &= \left[\left({}^{RLK}I_a^{\alpha,p} {}^{RLK}D_a^{\beta,p} \underline{f}^r \right) (t), \left({}^{RLK}I_a^{\alpha,p} {}^{RLK}D_a^{\beta,p} \overline{f}^r \right) (t) \right] \\
&= \left[\underline{f}^r(t) - \frac{(t^p - a^p)^{\alpha-1} p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left({}^{RLK}I_a^{(1-\alpha),p} \underline{f}^r \right) (a), \right. \\
&\quad \left. \overline{f}^r(t) - \frac{(t^p - a^p)^{\alpha-1} p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left({}^{RLK}I_a^{(1-\alpha),p} \overline{f}^r \right) (a) \right] \\
&= \left[\underline{f}^r(t), \overline{f}^r(t) \right] \\
&\quad \ominus \frac{(t^p - a^p)^{\alpha-1} p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left[\left({}^{RLK}I_a^{(1-\alpha),p} \underline{f}^r \right) (a), \left({}^{RLK}I_a^{(1-\alpha),p} \overline{f}^r \right) (a) \right],
\end{aligned}$$

para $t \in (a, b]$. De forma analoga, si $\frac{d}{dt} \text{diam} \left(\left[\left({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{(1-\alpha),p} f \right) (t) \right]^r \right) \leq 0$ para $t \in (a, b]$ y para cada $r \in [0, 1]$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
&\left[\left({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha,p} {}^{gH}{}^{RLK}\mathcal{D}_a^{\beta,p} f \right) (t) \right]^r = \\
&-\frac{(t^p - a^p)^{\alpha-1} p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left[\left({}^{RLK}I_a^{(1-\alpha),p} \underline{f}^r \right) (a), \left({}^{RLK}I_a^{(1-\alpha),p} \overline{f}^r \right) (a) \right] \ominus \left(- \left[\underline{f}^r(t), \overline{f}^r(t) \right] \right). \quad \square
\end{aligned}$$

El siguiente resultado muestra la relación entre los operadores ${}^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha,p}$ y ${}^{gH}{}^{CK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p}$ en la cual, de forma análoga a la Observación 1.2.16, se tiene que el operador ${}^{gH}{}^{CK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p}$ es el inverso a izquierda del operador ${}^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha,p}$, pero no es el inverso a derecha del mismo. La demostración de este resultado puede hallarse en ⁹.

Teorema 1.4.21 (⁹). Si $f \in AC([a, b], \mathcal{F})$ es una función difusa d -monótona y $\alpha \in (0, 1)$, entonces

$$\left({}^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha,p} {}^{gH}{}^{CK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} f \right) (t) = f(t) \ominus_{gH} f(a), \quad t \in (a, b]$$

y

$$\left({}^{gH}{}^{CK}\mathcal{D}_a^{\alpha,p} {}^{RLK}\mathcal{I}_a^{\alpha,p} f \right) (t) = f(t), \quad t \in (a, b].$$

2. PROBLEMA DE VALOR INICIAL DIFUSO DE ORDEN FRACCIONARIO

Se conocen diversos resultados relativos a la existencia y unicidad de solución de problemas de valor inicial de orden fraccionario (PVI-F) ^{29 5 6}. Estos resultados normalmente son demostrados aplicando teoremas de punto fijo al operador proveniente de la correspondiente formulación integral, sin embargo, en la teoría de las ecuaciones diferenciales difusas de orden fraccionario (ED-DF) hay un inconveniente menor en algunos artículos, ya que la afirmación de la equivalencia entre el problema de valor inicial difuso de orden fraccionario (PVI-DF) asociado a una ED-DF,

$$\begin{cases} ({}^C_{gH}\mathcal{D}_0^\alpha x)(t) = f(t, x(t)), & t \in (0, T], \\ x(0) = x_0, & x_0 \in \mathcal{F}, \end{cases}$$

donde $\alpha \in (0, 1)$, $p, T > 0$, ${}^C_{gH}\mathcal{D}_0^\alpha$ denota la gH -derivada- C , $f : J \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ es una función difusa continua conocida, y su correspondiente formulación integral difusa fraccionaria (EI-DF)

$$\begin{cases} x(t) \ominus_{gH} x(0) = ({}^{RL}\mathcal{I}_0^\alpha f)(t, x(t)), & t \in (0, T], \\ x(0) = x_0, & x_0 \in \mathcal{F}, \end{cases}$$

no es correcta. En general, una solución de la EI-DF no es una solución de la ED-DF. Este hecho fue observado en ⁸.

El objetivo del presente capítulo es mostrar que una ED-DF y su correspondiente EI-DF no son equivalentes, considerando los operadores ${}^{CK}_{gH}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}$ y ${}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p}$, y presentar condiciones apropiadas para que esta equivalencia sea válida.

2.1. PLANTEAMIENTO DE UN PVI DIFUSO DE ORDEN FRACCIONARIO

Para el propósito del presente capítulo, considere el siguiente PVI-DF

$$\begin{cases} ({}^{CK}_{gH}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}x)(t) = f(t, x(t)), & t \in (0, T], \\ x(0) = x_0, & x_0 \in \mathcal{F}, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

donde $\alpha \in (0, 1)$, $p, T > 0$, ${}^{CK}_{gH}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}$ denota la gH -derivada-CK, $f : J \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ es una función difusa continua conocida, y su correspondiente formulación integral difusa fraccionaria (EI-DF)

$$\begin{cases} x(t) \ominus_{gH} x(0) = ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p}f)(t, x(t)), & t \in (0, T], \\ x(0) = x_0, & x_0 \in \mathcal{F}, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Definición 2.1.1. Una función $x : J = [0, T] \rightarrow \mathcal{F}$ se dice que es una **solución del PVI-DF (2.1.1)** si $x(\cdot) \in C(J, \mathcal{F})$, $x(0) = x_0$ y $({}^{CK}_{gH}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}x)(t) = f(t, x(t))$ sobre $t \in (0, T]$. Se dice que una solución $x(\cdot)$ de (2.1.1) es **d -monótona** sobre J si es d -creciente o d -decreciente sobre J .

Observación 2.1.2. Si $x(\cdot) \in C(J, \mathcal{F})$ es d -creciente, entonces (2.1.2) se puede escribir como

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p}f)(t, x(t)), & t \in (0, T], \\ x(0) = x_0, & x_0 \in \mathcal{F}. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Por otro lado, si $x(\cdot) \in C(J, \mathcal{F})$ es d -decreciente, entonces (2.1.2) se puede escribir como

$$\begin{cases} x_0 = x(t) + (-1) ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p}f)(t, x(t)), & t \in (0, T], \\ x(0) = x_0, & x_0 \in \mathcal{F}, \end{cases}$$

o equivalente

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \ominus_H (-1) \left({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f \right) (t, x(t)), & t \in (0, T], \\ x(0) = x_0, & x_0 \in \mathcal{F}. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Ejemplo 2.1.3. *Considere el siguiente PVI-DF*

$$\begin{cases} \left({}^{CK}_{gH}\mathcal{D}_0^{\frac{1}{2},p} x \right) (t) = \langle -t^p, 0, t^{2p} \rangle, & t \in (0, 1], \\ x(0) = x_0 = \langle -2, 0, 2 \rangle, \end{cases}$$

con $p > 0$. Se tiene que $f(t) = \langle -t^p, 0, t^{2p} \rangle$, para $t \in (0, 1]$. Aplicando el operador ${}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\frac{1}{2},p}$ a la ED-DF, del Teorema 1.4.21, se sigue

$$\begin{aligned} x(t) \ominus_{gH} x(0) &= \frac{p^{1-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\frac{1}{2}-1} \langle -s^p, 0, s^{2p} \rangle ds \\ &= \frac{p^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left\langle - \int_0^t s^{2p-1} (t^p - s^p)^{-\frac{1}{2}} ds, 0, \int_0^t s^{3p-1} (t^p - s^p)^{-\frac{1}{2}} ds \right\rangle \\ &= \frac{p^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left\langle -\frac{4}{3} t^{\frac{3p}{2}}, 0, \frac{16}{15} t^{\frac{5p}{2}} \right\rangle \\ &= \left\langle -\frac{4p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3p}{2}}, 0, \frac{16p^{-\frac{1}{2}}}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5p}{2}} \right\rangle, \quad t \in (0, 1]. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Note que, de la Observacion 2.1.2, la EI-DF (2.1.5) tiene una solución d -creciente

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 + \left({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\frac{1}{2},p} f \right) (t, x(t)) \\ &= \langle -2, 0, 2 \rangle + \left\langle -\frac{4p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3p}{2}}, 0, \frac{16p^{-\frac{1}{2}}}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5p}{2}} \right\rangle \\ &= \left\langle -2 - \frac{4p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3p}{2}}, 0, 2 + \frac{16p^{-\frac{1}{2}}}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5p}{2}} \right\rangle, \quad t \in (0, 1], \end{aligned}$$

y una solución d -decreciente

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= x_0 \ominus_H (-1) \left({}^{RLK} \mathcal{I}_0^{\frac{1}{2}, p} f \right) (t, x(t)) \\
&= \langle -2, 0, 2 \rangle \ominus_H \left\langle -\frac{16p^{-\frac{1}{2}}}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5p}{2}}, 0, \frac{4p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3p}{2}} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{16p^{-\frac{1}{2}}}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5p}{2}} - 2, 0, 2 - \frac{4p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3p}{2}} \right\rangle, \quad t \in (0, 1].
\end{aligned}$$

Es claro que las funciones x_1 y x_2 son soluciones de la EI-DF. Por otro lado, las funciones x_1 y x_2 también son solución del PVI-DF. Dado que x_1 es d -creciente, de la Observación 1.4.17, se sigue que

$$\begin{aligned}
\left({}^{CK} \mathcal{D}_0^{\frac{1}{2}, p} x_1 \right) (t) &= \left\langle {}^{CK} D_0^{\frac{1}{2}, p} \left[-2 - \frac{4p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3p}{2}} \right], 0, {}^{CK} D_0^{\frac{1}{2}, p} \left[2 + \frac{16p^{-\frac{1}{2}}}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5p}{2}} \right] \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{2p}{\pi} \int_0^t (t^p - s^p)^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{3p}{2}-1} ds, 0, \frac{8p}{3\pi} \int_0^t (t^p - s^p)^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{5p}{2}-1} ds \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{2}{\pi} \left[t^p \arcsen \left(\frac{s^{\frac{p}{2}}}{t^{\frac{p}{2}}} \right) - t^{\frac{p}{2}} s^{\frac{p}{2}} \sqrt{1 - \frac{s^{\frac{p}{2}}}{t^{\frac{p}{2}}}} \right]_{s=0}^{s=t}, 0, \right. \\
&\quad \left. \frac{2}{3\pi} \left[3t^{2p} \arcsen \left(\frac{s^{\frac{p}{2}}}{t^{\frac{p}{2}}} \right) - t^{\frac{p}{2}} s^{\frac{p}{2}} \sqrt{\frac{t^p - s^p}{t^p}} (2s^p + 3t^p) \right]_{s=0}^{s=t} \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} t^p \right], 0, \frac{2}{3\pi} \left[\frac{3\pi}{2} t^{2p} \right] \right\rangle = \langle -t^p, 0, t^{2p} \rangle, \quad t \in (0, 1].
\end{aligned}$$

Por otro lado, dado que x_2 es d -decreciente, de la Observación 1.4.17, se sigue

$$\begin{aligned}
\left({}^{CK}_{gH}\mathcal{D}_0^{\frac{1}{2},p} x_2 \right) (t) &= \left\langle {}^{CK}D_0^{\frac{1}{2},p} \left[-2 - \frac{4p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3p}{2}} \right], 0, {}^{CK}D_0^{\frac{1}{2},p} \left[2 + \frac{16p^{-\frac{1}{2}}}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5p}{2}} \right] \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{2p}{\pi} \int_0^t (t^p - s^p)^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{3p}{2}-1} ds, 0, \frac{8p}{3\pi} \int_0^t (t^p - s^p)^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{5p}{2}-1} ds \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{2}{\pi} \left[t^p \arcsen \left(\frac{s^{\frac{p}{2}}}{t^{\frac{p}{2}}} \right) - t^{\frac{p}{2}} s^{\frac{p}{2}} \sqrt{1 - \frac{s^{\frac{p}{2}}}{t^{\frac{p}{2}}}} \right]_{s=0}^{s=t}, 0, \right. \\
&\quad \left. \frac{2}{3\pi} \left[3t^{2p} \arcsen \left(\frac{s^{\frac{p}{2}}}{t^{\frac{p}{2}}} \right) - t^{\frac{p}{2}} s^{\frac{p}{2}} \sqrt{\frac{t^p - s^p}{t^p}} (2s^p + 3t^p) \right]_{s=0}^{s=t} \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} t^p \right], 0, \frac{2}{3\pi} \left[\frac{3\pi}{2} t^{2p} \right] \right\rangle = \langle -t^p, 0, t^{2p} \rangle, \quad t \in (0, 1].
\end{aligned}$$

En la Figura 8 se presenta la gráfica de los extremos de las funciones solución, x_1 (azul) y x_2 (roja), del PVI-DF cuando $p = 0.5$.

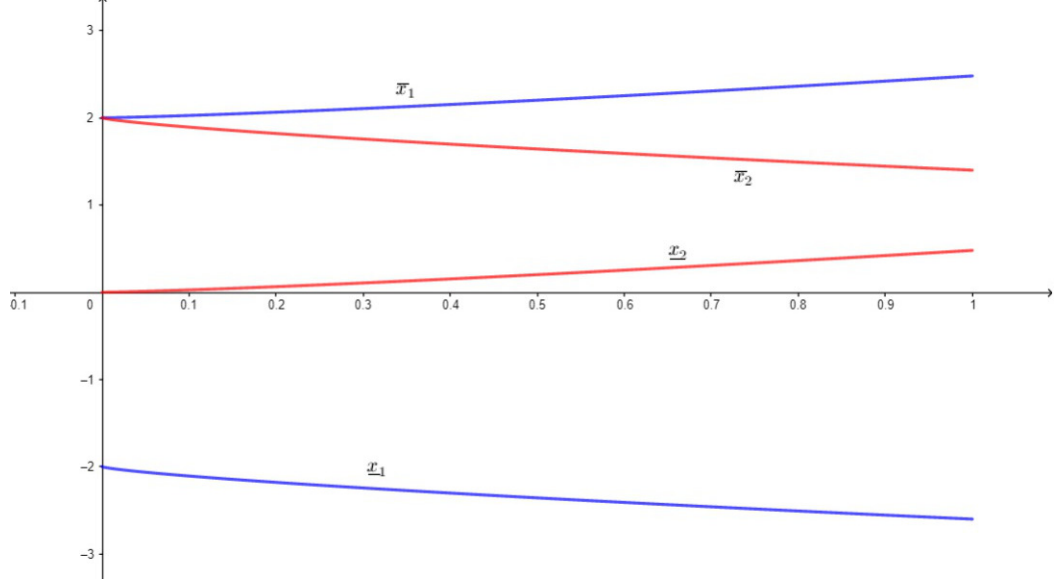


Figura 8. Gráfica de los extremos de las funciones solución, x_1 (azul) y x_2 (roja), del PVI-DF cuando $p = 0.5$.

2.2. NO EQUIVALENCIA

Como ya se mencionó, en la teoría de las ED-DF hay un inconveniente menor, ya que la equivalencia entre el PVI-DF asociado a una ED-DF y su correspondiente formulación integral difusa fraccionaria no se tiene como se mostró en ⁸. En general, el PVI-DF asociado a una ED-DF considerando el operador ${}^C_{gH}\mathcal{D}_a^\alpha$ no es equivalente a su correspondiente formulación del PVI-DF asociado a una EI-DF considerando el operador ${}^{RL}\mathcal{I}_a^\alpha$. Por otro lado, dado que los operadores ${}^{CK}_{gH}\mathcal{D}_a^\alpha$ y ${}^{RLK}_{gH}\mathcal{I}_a^\alpha$ generalizan los operadores ${}^C_{gH}\mathcal{D}_a^\alpha$ y ${}^{RL}\mathcal{I}_a^\alpha$, respectivamente, es natural la no equivalencia entre los PVI-DF (2.1.1) y (2.1.2), ⁹. Para ilustrar este hecho, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.1. *Considere el siguiente PVI-DF*

$$\begin{cases} \left({}^{CK}_{gH}\mathcal{D}_0^{\frac{1}{2},p} x \right) (t) = \langle t^p - 1, 0, 1 - t^p \rangle, & t \in J = (0, 1] \\ x(0) = x_0 = \langle -2, 0, 1 \rangle. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

con $p \in (0, 1]$. Se tiene que $f(t) = \langle t^p - 1, 0, 1 - t^p \rangle$, para $t \in (0, 1]$. Luego

$$\begin{aligned} \left({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\frac{1}{2},p} f \right) (t) &= \frac{p^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{-\frac{1}{2}} \langle s^p - 1, 0, 1 - s^p \rangle ds \\ &= \frac{p^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left\langle \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{-\frac{1}{2}} (s^p - 1) ds, 0, \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{-\frac{1}{2}} (1 - s^p) ds \right\rangle \\ &= \frac{p^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left\langle \left[-\frac{2\sqrt{t^p - s^p}(s^p + 2t^p - 3)}{3p} \right]_{s=0}^{s=t}, 0, \left[\frac{2\sqrt{t^p - s^p}(s^p + 2t^p - 3)}{3p} \right]_{s=0}^{s=t} \right\rangle \\ &= \frac{p^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left\langle \frac{2t^{\frac{p}{2}}(2t^p - 3)}{3p}, 0, \frac{2t^{\frac{p}{2}}(3 - 2t^p)}{3p} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{2p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{p}{2}}(2t^p - 3), 0, \frac{2p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{p}{2}}(3 - 2t^p) \right\rangle, \quad t \in J = (0, 1]. \end{aligned}$$

Ahora, aplicando el operador ${}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\frac{1}{2},p}$ a la ED-DF, del Teorema 1.4.21, se sigue que

$$x(t) \ominus_{gH} x(0) = \left\langle \frac{2p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{p}{2}} (2t^p - 3), 0, \frac{2p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{p}{2}} (3 - 2t^p) \right\rangle, \quad t \in (0, 1].$$

Sería natural pensar que, de esta última ecuación, se tiene una función solución al PVI-DF. Sin embargo, note que, para $r \in [0, 1]$, se tiene que

$$\left[\left({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\frac{1}{2},p} f \right) (t) \right]^r = \left[\frac{2(r-1)p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{p}{2}} (3 - 2t^p), \frac{2(1-r)p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{p}{2}} (3 - 2t^p) \right],$$

de donde se concluye que

$$\text{diam} \left(\left[\left({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\frac{1}{2},p} f \right) (t) \right]^r \right) = \frac{4(1-r)p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{p}{2}} (3 - 2t^p), \quad t \in (0, 1], \quad r \in [0, 1],$$

y

$$\frac{d}{dt} \left[\text{diam} \left(\left[\left({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\frac{1}{2},p} f \right) (t) \right]^r \right) \right] = \frac{2(1-r)p^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} (t^{\frac{p}{2}-1} - 2t^{\frac{3p}{2}-1}), \quad t \in (0, 1], \quad r \in [0, 1].$$

De esto último, para $r \in [0, 1]$, se sigue que

$$t \mapsto \frac{d}{dt} \left[\text{diam} \left(\left[\left({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\frac{1}{2},p} f \right) (t) \right]^r \right) \right] > 0, \quad \text{si} \quad 0 < t < \sqrt[p]{\frac{1}{2}}$$

y

$$t \mapsto \frac{d}{dt} \left[\text{diam} \left(\left[\left({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\frac{1}{2},p} f \right) (t) \right]^r \right) \right] < 0, \quad \text{si} \quad \sqrt[p]{\frac{1}{2}} < t < 1,$$

es decir, la función difusa $t \mapsto \left({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\frac{1}{2},p} f \right) (t)$ es d -creciente para $0 < t < \sqrt[p]{\frac{1}{2}}$ y d -decreciente para $\sqrt[p]{\frac{1}{2}} < t < 1$. Por otro lado, del Colorario 1.3.16, la función difusa $t \mapsto x(t) \ominus_{gH} x(0)$ es d -creciente para $t \in (0, 1]$. Esto implica una inconsistencia en la

expresión

$$x(t) \ominus_{gH} x_0 = \left({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\frac{1}{2},p} f \right) (t), \quad t \in (0, 1].$$

Por lo tanto, la solución del problema asociado a la ecuación integral no es una solución al PVI-DF.

Observación 2.2.2. Del Ejemplo 2.1.3, para $r \in [0, 1]$ y $t \in (0, 1]$, se tiene que

$$[f(t)]^r = [-(1-r)t^p, (1-r)t^{2p}]$$

y

$$\text{diam}([f(t)]^r) = (1-r)(t^{2p} + t^p).$$

Es claro que la función $t \mapsto \text{diam}([f(t)]^r)$ es no decreciente en $(0, 1]$, para $r \in [0, 1]$. Luego, del Lema 1.4.7, $t \mapsto \left({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\frac{1}{2},p} f \right) (t)$ es una función difusa d -creciente en $(0, 1]$. Esto último evita la inconsistencia tenida en el Ejemplo 2.1.3 para la expresión

$$x(t) \ominus_{gH} x_0 = \left({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\frac{1}{2},p} f \right) (t), \quad t \in (0, 1]$$

del Ejemplo 2.2.1.

2.3. CONDICIONES DE EQUIVALENCIA

Para analizar las condiciones de equivalencia entre la solución del PVI-DF (2.1.1) asociado a una ED-DF y la solución del PVI-DF (2.1.2) asociado a una EI-DF, se establece el siguiente resultado, donde se impone una condición de monotonicidad a la función difusa $t \mapsto \left({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f \right) (t, x)$. Aquí, para $\gamma \in (0, 1)$ y $p > 0$, $C_{\gamma,p}([a, b], \mathcal{F})$ denota el espacio de funciones definido por

$$C_{\gamma,p}([a, b], \mathcal{F}) = \left\{ f : (a, b] \rightarrow \mathcal{F} \mid \left(\frac{(\cdot)^p - a^p}{p} \right)^{1-\gamma} f(\cdot) \in C([a, b], \mathcal{F}) \right\}.$$

Lema 2.3.1 ⁽⁹⁾. Sea $f : J \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ una función difusa tal que $t \mapsto f(t, u)$ pertenece a $C_{\gamma,p}(J, \mathcal{F})$, $0 \leq \gamma \leq \alpha$, para cualquier $u \in \mathcal{F}$. Entonces, una función difusa d -monótona $x \in C(J, \mathcal{F}) \cap C_{CK}^{1,F}(J, \mathcal{F})$ es una solución del PVI-DF (2.1.1) si, y solo si, x satisface el PVI-DF (2.1.2), y la función difusa $t \mapsto ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t, x)$ es d -creciente sobre J .

Demostración. La demostración sigue las ideas del Lema 3.1 en ⁹.

Sea $x \in C(J, \mathcal{F}) \cap C_{CK}^{1,F}(J, \mathcal{F})$ una función solución difusa d -monótona de (2.1.1). Dado que x es d -monótona sobre J , se sigue que $t \mapsto x(t) \ominus_{gH} x(0)$ es d -creciente sobre J (ver Colorario 1.3.16). Por lo tanto, aplicando el operador ${}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p}$ en la ED-DF (2.1.1), usando el Teorema 1.4.21 y teniendo en cuenta que $f(\cdot, x) \in C_{\gamma,p}(J, \mathcal{F})$ para cualquier $x \in \mathcal{F}$, se tiene que

$$\begin{aligned} ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} {}^{CK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p} x)(t) &= x(t) \ominus_{gH} x(0) \\ &= \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \\ &= ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t, x(t)), \quad t \in J. \end{aligned}$$

Esto es,

$$x(t) \ominus_{gH} x(0) = ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t, x(t)), \quad t \in J.$$

Además, como $t \mapsto x(t) \ominus_{gH} x(0)$ es d -creciente sobre J , se sigue que $t \mapsto ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t, x(t))$ es también d -creciente sobre J . Entonces, tenemos la condición de necesidad.

A continuación probamos la suficiencia. Sea $x \in C(J, \mathcal{F}) \cap C_{CK}^{1,F}(J, \mathcal{F})$ una función difusa d -monótona que satisface (2.1.2) donde $f : J \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ es una función difusa tal que $t \mapsto f(t, u)$ pertenece a $C_{\gamma,p}(J, \mathcal{F})$, $0 \leq \gamma \leq \alpha$, para cualquier $u \in \mathcal{F}$ y $t \mapsto ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t, x)$ es d -creciente sobre J . De la continuidad de la función difusa f , la función difusa $t \mapsto ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t, x(t))$ es continua sobre $(0, T]$ y $({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(0, x(0)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t, x(t)) = 0$ en la métrica definida en (1.3.3).

Entonces, $x(0) = x_0$. Además, dado que $t \mapsto ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t, x(t))$ es d -creciente sobre J , aplicando el operador ${}^{RLK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}$ en (2.1.2), de la Proposición 1.4.19 y la Definición 1.4.14, se sigue que

$$\begin{aligned} {}^{RLK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}[x(t) \ominus_{gH} x(0)] &= ({}^{CK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p} x)(t) \\ &= ({}^{RLK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p} {}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t, x(t)) \\ &= f(t, x(t)), \quad t \in J. \end{aligned}$$

Esto es,

$$({}^{CK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p} x)(t) = f(t, x(t)), \quad t \in J,$$

lo que completa la demostración. □

3. PRINCIPIOS DE CONTRACCIONES

El principio de funciones contractivas de Banach es uno de los resultados fundamentales del análisis. Se considera como el origen de la teoría de puntos fijos. También, su importancia está en su aplicabilidad en varias ramas de las matemáticas. La generalización del principio anterior ha sido de gran interés de investigación. En particular, ha habido una línea de trabajos relacionados con funciones de distancia alternantes. Se tienen funciones de control que alteran la distancia entre dos puntos en un espacio métrico. Estas funciones fueron propuestas por Khan y colaboradores en 1984, donde presentan algunos resultados de punto fijo con la ayuda de tales funciones.

El objetivo de este capítulo es considerar algunos teoremas de punto fijo establecidos en ⁴⁸ sobre funciones débilmente contractivas, definidas sobre conjuntos parcialmente ordenados, en lugar de usar el teorema clásico de contracciones. Algunos resultados de punto fijo de funciones débilmente contractivas en espacios métricos completos fueron obtenidos en (^{38 48 49 50}). A continuación se presentan algunos resultados de punto fijo obtenidos en ⁴⁸, que generalizan otros de ^{38 49 50}.

⁴⁸ J. Harjani y K. Sadarangani. "Generalized contractions in partially ordered metric spaces and applications to ordinary differential equations". En: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 72.3-4 (2010), págs. 1188-1197.

⁴⁹ P.N. Dutta y B.S. Choudhury. "A generalisation of contraction principle in metric spaces". En: *Fixed Point Theory and Applications* 2008.1 (2008), pág. 406368.

⁵⁰ B.E. Rhoades. "Some theorems on weakly contractive maps". En: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 47.4 (2001), págs. 2683-2693.

3.1. GENERALIZACIONES

Definición 3.1.1. Una **función de distancia alternante** es una función $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que:

1. ψ es continua y no decreciente, y
2. $\psi(t) = 0$ si, solo si, $t = 0$.

Definición 3.1.2. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función. Se dice que f es **débilmente contractiva** si

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y)),$$

para cualquier $x, y \in X$, donde ψ y ϕ son funciones de distancia alternante.

Observación 3.1.3. Sea $f : X \rightarrow X$ una función contractiva. Así, para $\lambda \in [0, 1)$, se tiene que

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) = d(x, y) - (1 - \lambda)d(x, y).$$

Considerando ψ y ϕ funciones de distancia alternante definidas por $\psi(t) = t$ y $\phi(t) = (1 - \lambda)t$, se obtiene que

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y)).$$

Es decir, las funciones que son contractivas constituyen una subclase de las funciones débilmente contractivas.

Teorema 3.1.4 ⁽⁴⁸⁾. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y supóngase que existe una métrica d en X tal que (X, d) es un espacio métrico completo. Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua y no decreciente tal que

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y)), \quad \forall x \geq y,$$

donde ψ y ϕ son funciones de distancia alternante. Si existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 \leq f(x_0)$, entonces f tiene un punto fijo.

Demostración. Si $f(x_0) = x_0$, entonces la demostración está terminada.

Suponga que $x_0 < f(x_0)$. Dado que $x_0 < f(x_0)$ y f es una función no decreciente, se obtiene que

$$x_0 < f(x_0) < f^2(x_0) = f(f(x_0)) < f^3(x_0) < \cdots < f^n(x_0) < f^{n+1}(x_0) < \cdots$$

Tomando $x_{n+1} = f(x_n)$, entonces, para cada entero $n \geq 1$, de la expresión

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y)), \quad \forall x \geq y$$

y, teniendo en cuenta que los elementos x_n y x_{n+1} son comparables, se sigue que

$$\psi(d(x_{n+1}, x_n)) = \psi(d(f(x_n), f(x_{n-1}))) \leq \psi(d(x_n, x_{n-1})) - \phi(d(x_n, x_{n-1})) \leq \psi(d(x_n, x_{n-1})).$$

Usando el hecho de que ψ es no decreciente, se tiene que $d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1})$.

Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_0}, x_{n_0-1}) = 0$, entonces $x_{n_0} = f(x_{n_0-1}) = x_{n_0-1}$ y x_{n_0-1} es un punto fijo y la demostración está terminada. En caso contrario, suponga que $d(x_{n_0}, x_{n_0-1}) \neq 0$ para todos $n \in \mathbb{N}$. Entonces, dado que $d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1})$, la sucesión $\{d(x_{n+1}, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y, en consecuencia, existe $r \geq 0$ tal que $d(x_{n+1}, x_n) \rightarrow r$ cuando $n \rightarrow \infty$. Haciendo $n \rightarrow \infty$ en

$$\psi(d(x_{n+1}, x_n)) \leq \psi(d(x_n, x_{n-1})) - \phi(d(x_n, x_{n-1})) \leq \psi(d(x_n, x_{n-1})),$$

se obtiene que

$$\psi(r) \leq \psi(r) - \phi(r) \leq \psi(r),$$

implicando que $\phi(r) = 0$. Como ϕ es una función de distancia alternante, $r = 0$, y,

por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0.$$

A continuación, se demuestra que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una secuencia de Cauchy. Suponga que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no es una sucesión de Cauchy. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ para la cual se puede encontrar subsucesiones $\{x_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{x_{m(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $n(k) > m(k) > k$ tales que $d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \geq \varepsilon$. Además, correspondiente a $m(k)$ se puede elegir $n(k)$ de tal manera que sea el entero más pequeño tal que $n(k) > m(k)$ y satisfaga $d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \geq \varepsilon$. Luego, $d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}) \geq \varepsilon$. Usando las dos últimas expresiones y la desigualdad triangular, se tiene que

$$\varepsilon \leq d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \leq d(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}) < d(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) + \varepsilon.$$

Haciendo $k \rightarrow \infty$ y usando que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$, se obtiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = \varepsilon.$$

Nuevamente, de la desigualdad triangular,

$$d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \leq d(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}),$$

$$d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}) \leq d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}).$$

Haciendo $k \rightarrow \infty$ en las dos desigualdades anteriores y usando $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = \varepsilon$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}) = \varepsilon.$$

Como $n(k) > m(k)$ y $x_{n(k)-1}$ y $x_{m(k)-1}$ son comparables (de hecho, $x_{m(k)-1} \leq x_{n(k)-1}$),

tomando $x = x_{n(k)-1}$ y $y = x_{m(k)-1}$ en

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y)), \quad \forall x \geq y,$$

se obtiene que

$$\psi(d(x_{n(k)}, x_{m(k)})) \leq \psi(d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1})) - \phi(d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1})).$$

Haciendo $k \rightarrow \infty$ y teniendo en cuenta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = \varepsilon \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}) = \varepsilon,$$

se tiene que $\psi(\varepsilon) \leq \psi(\varepsilon) - \phi(\varepsilon)$. Como ψ es una función de distancia alternante, de la última desigualdad se tiene $\phi(\varepsilon) = 0$ y, en consecuencia, $\varepsilon = 0$, que es una contradicción. Esto muestra que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y, dado que X es un espacio métrico completo, existe $z \in X$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$. Además, la continuidad de f implica que

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = f(z)$$

y esto prueba que z es un punto fijo. □

El siguiente resultado muestra que el anterior teorema sigue siendo válido aún si f no es necesariamente continua suponiendo algunas condiciones sobre X .

Teorema 3.1.5 ⁽⁴⁸⁾. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y supóngase que existe una métrica d en X tal que (X, d) es un espacio métrico completo. Sea $f : X \rightarrow X$ una función monótona no decreciente tal que*

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y)), \quad \forall x \geq y,$$

para algunas funciones de distancia alternante ψ y ϕ . Supóngase que X verifica que, si una sucesión no decreciente $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es convergente a $x \in X$, entonces $x_k \leq x$, para todo $k \in \mathbb{N}$, o que f sea continua. Si existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 \leq f(x_0)$, entonces f tiene un punto fijo.

Demostración. Siguiendo la demostración del teorema anterior, basta comprobar que

$$f(z) = z.$$

Como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión no decreciente en X y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$, entonces $x_n \preceq z$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia,

$$\psi(d(x_{n+1}, f(z))) = \psi(d(f(x_n), f(z))) \leq \psi(d(x_n, z)) - \phi(d(x_n, z)).$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$ y teniendo en cuenta que ψ y ϕ son funciones de distancia alternante, se sigue

$$\psi(d(z, f(z))) \leq \psi(0) - \phi(0) = 0.$$

Esto implica que $\psi(d(z, f(z))) = 0$. Así, $d(z, f(z)) = 0$, o equivalentemente, $f(z) = z$. □

Note que la condición

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y)), \quad \forall x \geq y,$$

en el Teorema 3.1.5 que satisface f es más débil que la condición

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y)), \quad \forall x, y \in X,$$

que verifica una función débilmente contractiva, ya que se exige esta condición solamente para cada pareja de elementos que están relacionados.

A continuación se presenta un ejemplo donde se puede apreciar que las hipótesis de los Teoremas 3.1.4 y 3.1.5 no garantizan la unicidad del punto fijo.

Ejemplo 3.1.6. Sea $X = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ y considérese el orden

$$(x, y) \leq (z, t) \Leftrightarrow x \leq z \wedge y \leq t.$$

Se tiene que $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado cuyos diferentes elementos son no comparables. Además, (X, d_2) es un espacio métrico completo considerando d_2 la distancia euclidiana. La función identidad $f : X \rightarrow X$ definida por $f(x, y) = (x, y)$ es continua y no decreciente. La condición (1) del Teorema 3.1.5 se satisface ya que los elementos de X solo son comparables entre sí. Además, $(x, -x) \leq f(x, -x) = (x, -x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Así, f tiene infinitos puntos fijos en X .

El siguiente resultado agrega una condición suficiente sobre el espacio X para garantizar la unicidad del punto fijo en los Teoremas 3.1.4 y 3.1.5.

Teorema 3.1.7 ⁽⁴⁸⁾. *Añadiendo la condición*

para $x, y \in X$ existe una cota inferior o una cota superior

a las hipótesis del Teorema 3.1.4 (respectivamente el Teorema 3.1.5), se obtiene la unicidad del punto fijo de f .

Demostración. Sean $z, y \in X$ dos puntos fijos. Considérese los siguientes dos casos:

Caso I: Si y es comparable a z , entonces $f^n(y) = y$ es comparable a $f^n(z) = z$ para

$n = 0, 1, 2, \dots$ y

$$\begin{aligned}
\psi(d(z, y)) &= \psi(d(f^n(z), f^n(y))) \\
&\leq \psi(d(f^{n-1}(z), f^{n-1}(y))) - \phi(d(f^{n-1}(z), f^{n-1}(y))) \\
&\leq \psi(d(f^{n-1}(z), f^{n-1}(y))) \\
&\leq \psi(d(f^{n-2}(z), f^{n-2}(y))) - \phi(d(f^{n-2}(z), f^{n-2}(y))) \\
&\leq \dots \\
&\leq \psi(d(z, y)) - \phi(d(z, y)).
\end{aligned}$$

Como ψ y ϕ son funciones de distancia alternante, de la última desigualdad se tiene que $\phi(d(z, y)) = 0$, y esto implica que $z = y$.

Caso II: Si y no es comparable con z , entonces existe $x \in X$ comparable con y y z . La monotonidad de f implica que $f^n(x)$ es comparable con $f^n(y) = y$ y con $f^n(z) = z$, para $n = 0, 1, 2, \dots$. Además,

$$\begin{aligned}
\psi(d(z, f^n(x))) &= \psi(d(f^n(z), f^n(x))) \\
&\leq \psi(d(f^{n-1}(z), f^{n-1}(x))) - \phi(d(f^{n-1}(z), f^{n-1}(x))) \\
&\leq \psi(d(f^{n-1}(z), f^{n-1}(x))) \\
&\leq \psi(d(f^{n-2}(z), f^{n-2}(x))) - \phi(d(f^{n-2}(z), f^{n-2}(x))) \\
&\leq \dots \\
&= \psi(d(z, f^n(x))).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la última desigualdad prueba que $\{\psi(d(z, f^n(x)))\}$ es una sucesión decreciente no negativa. De la monotonidad de ψ , se sigue que $\{d(z, f^n(x))\}$ también es una sucesión decreciente no negativa y, en consecuencia, existe θ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(z, f^n(x)) = \theta.$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$ en

$$\psi(d(z, f^n(x))) \leq \psi(d(f^{n-1}(z), f^{n-1}(x))) - \phi(d(f^{n-1}(z), f^{n-1}(x))) \leq \psi(d(f^{n-1}(z), f^{n-1}(x)))$$

y, teniendo en cuenta que ψ y ϕ son funciones de distancia alternantes, se obtiene que

$$\psi(\theta) \leq \psi(\theta) - \phi(\theta) \leq \psi(\theta),$$

lo que implica que $\phi(\theta) = 0$ y, en consecuencia, $\theta = 0$. De manera análoga, se puede demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(y, f^n(x)) = \theta.$$

Finalmente, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(z, f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y, f^n(x)) = 0,$$

la unicidad del límite implica que $y = z$. Esto termina la demostración. □

4. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN

Es bien sabido que los resultados generales de teoremas de punto fijo juegan un papel importante en la búsqueda de soluciones de ecuaciones no lineales, diferenciales e integrales. Así, el objetivo de este capítulo es analizar la existencia y unicidad de solución al PVI-DF (2.1.1) y extender este resultado para PVI-DF con retardo, considerando algunos teoremas generales de punto fijo establecidos en ⁴⁸ sobre funciones débilmente contractivas en espacios parcialmente ordenados, en lugar de usar los teoremas clásicos de contracciones.

4.1. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN AL PVI-DF

Una vez establecidas las condiciones que garanticen la equivalencia entre los problemas (2.1.1) y (2.1.2), es importante conocer la existencia de solución a estos problemas.

Definición 4.1.1. Una función difusa $x^i(\cdot) \in C_{CK}^{1,F}(J, \mathcal{F})$ es llamada una **solución inferior** de (2.1.1) si

$$\begin{cases} ({}_{gH}^{CK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}x^i)(t) \lesssim f(t, x^i(t)), & t \in (0, T], \\ x^i(0) \lesssim x(0), & x^i(0), x(0) \in \mathcal{F}. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Una función difusa $x^s(\cdot) \in C(J, \mathcal{F}) \cap C_{CK}^{1,F}(J, \mathcal{F})$ es llamada una **solución superior** de (2.1.1) si

$$\begin{cases} ({}_{gH}^{CK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}x^s)(t) \gtrsim f(t, x^s(t)), & t \in (0, T], \\ x^s(0) \gtrsim x(0), & x^s(0), x(0) \in \mathcal{F}. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

El siguiente es uno de los resultados principales del presente trabajo en el cual se muestran condiciones para la existencia y unicidad de solución del PVI-DF (2.1.1).

Teorema 4.1.2. Sea $f \in C(J \times \mathcal{F}, \mathcal{F})$. Asuma las siguientes condiciones:

1. Existe una solución inferior d -monótona $x^l \in C(J, \mathcal{F}) \cap C_{CK}^{1,F}(J, \mathcal{F})$ para el problema (2.1.1);
2. Si $\eta \gtrsim \lambda$, entonces $f(t, \eta) \gtrsim f(t, \lambda)$;
3. f es débilmente contractiva para elementos comparables, es decir, para algunas funciones de distancia alternante ψ y ϕ , se tiene que

$$\psi(d_\infty[f(t, \eta), f(t, \lambda)]) \leq \psi(d_\infty[\eta, \lambda]) - \phi(d_\infty[\eta, \lambda]) \quad \text{para } \eta \gtrsim \lambda.$$

Entonces existe una única solución d -monótona x para el problema (2.1.1) sobre J .

Demostración. Considere $x \in C(J, \mathcal{F})$ y denote $X(t) = x(t) \ominus_{gH} x(0)$ para $t \in J$. Defina el operador $Q : C(J, \mathcal{F}) \rightarrow C(J, \mathcal{F})$ por

$$(QX)(t) = \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds, \quad t \in J.$$

Se mostrará que Q verifica las condiciones del Teorema 3.1.4.

Sean $x \gtrsim y \in C(J, \mathcal{F})$. Si $t \in J$, de la condición 2 y la Observación 1.4.4, se sigue que

$$\begin{aligned} (QX)(t) &= \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \\ &\gtrsim \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds = (QY)(t), \quad \forall x \gtrsim y. \end{aligned}$$

Así, el operador Q es no decreciente. De la condición 3, se tiene que

$$\psi(d_\infty[f(t, x), f(t, y)]) \leq \psi(d_\infty[\eta, \lambda]) - \phi(d_\infty[\eta, \lambda]) \leq \psi(d_\infty[x, y]), \quad \text{para } x \gtrsim y.$$

Como ψ es una función de distancia alternante, se sigue que

$$d_{\infty}[f(t, x), f(t, y)] \leq d_{\infty}[x, y], \quad \text{para } x \gtrsim y.$$

De hecho, si

$$d_{\infty}[x, y] < d_{\infty}[f(t, x), f(t, y)], \quad \text{para algunos } x \gtrsim y,$$

siendo ψ una función de distancia alternante, se tiene que

$$\psi(d_{\infty}[x, y]) \leq \psi(d_{\infty}[f(t, x), f(t, y)]), \quad \text{para algunos } x \gtrsim y.$$

Así,

$$\psi(d_{\infty}[x, y]) \leq \psi(d_{\infty}[x, y]) - \phi(d_{\infty}[x, y]), \quad \text{para algunos } x \gtrsim y$$

y

$$-\phi(d_{\infty}[x, y]) = 0.$$

Entonces, $d_{\infty}[x(t), y(t)] = 0$ para $x \gtrsim y$ y $t \in J$. Esto genera una contradicción, ya que para $x \gtrsim y$ y $t \in J$, $d_{\infty}[f(t, x(t)), f(t, y(t))] = 0$.

Ahora, si $x \gtrsim y$ y $t \in J$, se sigue que

$$\begin{aligned} d_{\infty}[QX, QY] &= d_{\infty} \left[\frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds, \right. \\ &\quad \left. \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right] \\ &\leq \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} d_{\infty}[f(t, x(t)), f(t, y(t))] ds \\ &\leq \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} d_{\infty}[x(t), y(t)] ds. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
D_{\rho,p}[QX, QY] &= \sup_{t \in J} \{e^{-(\rho t)^p} d_{\infty}[QX, QY]\} \\
&\leq \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in J} \left\{ e^{-(\rho t)^p} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} d_{\infty}[x(t), y(t)] ds \right\} \\
&= \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in J} \left\{ e^{-(\rho t)^p} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} e^{(\rho s)^p} e^{-(\rho s)^p} d_{\infty}[x(t), y(t)] ds \right\} \\
&\leq \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in J} \left\{ e^{-(\rho t)^p} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} e^{(\rho s)^p} D_{\rho,p}[x, y] ds \right\} \\
&= \frac{p^{1-\alpha} D_{\rho,p}[x, y]}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in J} \left\{ \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} e^{-\rho^p(t^p - s^p)} ds \right\}.
\end{aligned}$$

Tomando $u = (t^p - s^p)^{\alpha}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
D_{\rho,p}[QX, QY] &\leq \frac{p^{1-\alpha} D_{\rho,p}[x, y]}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in J} \left\{ \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} e^{-\rho^p(t^p - s^p)} ds \right\} \\
&= \frac{p^{1-\alpha} D_{\rho,p}[x, y]}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in J} \left\{ \frac{\Gamma(\alpha, (\rho t)^p)}{p \rho^{\alpha p}} \right\} \\
&\leq \frac{p^{1-\alpha} D_{\rho,p}[x, y]}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{p \rho^{\alpha p}} = \frac{p^{-\alpha}}{\rho^{\alpha p}} D_{\rho,p}[x, y].
\end{aligned}$$

Para una función de distancia alternante μ , se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu(D_{\rho,p}[QX, QY]) &\leq \mu\left(\frac{p^{-\alpha}}{\rho^{\alpha p}} D_{\rho,p}[x, y]\right) \\
&= \mu(D_{\rho,p}[x, y]) - \left(\mu(D_{\rho,p}[x, y]) - \mu\left(\frac{p^{-\alpha}}{\rho^{\alpha p}} D_{\rho,p}[x, y]\right)\right).
\end{aligned}$$

Considerando $\sigma(t) = \mu(t) - \mu\left(\frac{p^{-\alpha}}{\rho^{\alpha p}} t\right)$, se sigue que

$$\mu(D_{\rho,p}[QX, QY]) = \mu(D_{\rho,p}[x, y]) - \sigma(D_{\rho,p}[x, y]), \quad x \gtrsim y, t \in J.$$

De la condición 1 se tiene que

$$\begin{cases} ({}^{CK}_{gH}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}x^i)(t) \lesssim f(t, x^i(t)), & t \in J = [0, T], \\ x^i(0) \lesssim x(0), & x^i(0), x(0) \in \mathcal{F}. \end{cases}$$

Ahora se mostrará que $X^i \lesssim QX^i$ sobre J . Para $t \in J$, de la Proposición 4.2.4 y la Observación 1.4.4, se tiene que

$$\begin{aligned} ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} {}^{CK}_{gH}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}x^i)(t) &= x^i(t) \ominus_{gH} x^i(0) \\ &= X^i(t) \\ &\lesssim ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p}f)(t, x^i(t)) \\ &= \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s, x^i(s)) ds \\ &= (QX^i)(t), \quad t \in J. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X^i(t) \lesssim (QX^i)(t), \quad t \in J.$$

El operador Q satisface las hipótesis del Teorema 3.1.5, esto es, Q tiene un punto fijo en $C(J, \mathcal{F})$. Además, ya que cada par de funciones difusas en $C(J, \mathcal{F})$ tiene un límite superior, el Teorema 3.1.7 implica que el operador Q tiene un punto fijo único x , y este es la solución única para el problema (2.1.1). $\square$

Observación 4.1.3. En el Teorema 4.1.2, reemplazando la condición 1 por la existencia de x^s en su lugar de x^i , el resultado sigue siendo válido.

4.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN AL PVI-DF CON RETARDO

Se sabe que las ecuaciones diferenciales, ordinarias y parciales, desempeñan un papel importante en la dinámica de poblaciones de forma teórica. Asociado al análisis matemático de un sistema dinámico, existen las denominadas ecuaciones dife-

enciales con retardo. Este tipo de ecuaciones diferenciales describen fenómenos en los que la función desconocida del sistema depende, no solo del estado del sistema en un instante dado, sino también, de la historia de la trayectoria hasta ese instante^{10 24 25}. Si se quieren modelos más realistas se debe considerar problemas de valor inicial con retardo (PVI-R) en el tiempo en los cuales la condición inicial está sujeta a una trayectoria que modela los últimos estados del sistema. Para nuestro propósito consideramos el modelo clásico de un PVI-R en el cual se incorporan características difusas y la derivada temporal se toma en el sentido de la derivada ${}^{CK}_{gH}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}$. Después de obtener las condiciones que garanticen la existencia y unicidad de solución al PVI-DF (2.1.1), se quiere extender el resultado del Teorema 4.1.2 para garantizar la existencia y unicidad de solución al PVI-DF-R. Consideramos entonces el siguiente PVI-DF-R

$$\begin{cases} ({}^{CK}_{gH}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}x)(t) = f(t, x(t)), & t \in J = [0, T], \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (4.2.1)$$

donde $\alpha \in (0, 1)$, $p, \tau, T > 0$, ${}^{CK}_{gH}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}$ denota la gH -derivada-CK, $f : J \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ y $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathcal{F}$ son funciones difusas continuas conocidas. Su correspondiente formulación integral es dada por

$$\begin{cases} x(t) \ominus_{gH} x(0) = ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p}f)(t, x(t)), & t \in (0, T], \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Observación 4.2.1. Si $x(\cdot) \in C(J, \mathcal{F})$ es d -creciente, entonces (4.2.2) se puede escribir como

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(0) + ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p}f)(t, x(t)), & t \in J = [0, T], \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Por otro lado, si $x(\cdot) \in C(J, \mathcal{F})$ es d -decreciente, entonces (4.2.2) se puede escribir como

$$\begin{cases} \varphi(0) = x(t) + (-1) \left({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f \right) (t, x(t)), & t \in J = [0, T], \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-\tau, 0], \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(0) \ominus_H (-1) \left({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f \right) (t, x(t)), & t \in J = [0, T], \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (4.2.4)$$

Para mostrar la existencia de solución de (4.2.2) aplicamos algunos teoremas del punto fijo sobre funciones débilmente contractivas.

Definición 4.2.2. Una función difusa $x : [-\tau, T] \rightarrow \mathcal{F}$ se dice que es una **solución al PVI-DF-R** (4.2.1) si se cumple que x es continua,

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0]$$

y además,

$$\left({}^{CK}_{gH}\mathcal{D}_0^{\alpha,p} x \right) (t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0, T].$$

Ejemplo 4.2.3. Considere el siguiente PVI-DF-R

$$\begin{cases} \left({}^{CK}_{gH}\mathcal{D}_0^{\frac{1}{2},p} x \right) (t) = \langle -t^p, 0, t^{2p} \rangle, & t \in [0, 1], \\ x(t) = \varphi(t) = \langle t - 2, 0, t^2 + 2 \rangle, & t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

con $p > 0$. Del Ejemplo 2.1.3, se tiene

$$x(t) \ominus_{gH} \varphi(0) = \left\langle -\frac{4p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3p}{2}}, 0, \frac{16p^{-\frac{1}{2}}}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5p}{2}} \right\rangle, \quad t \in (0, 1].$$

De la Observación 4.2.1, se tiene la función d -creciente

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \varphi(0) + \left\langle -\frac{4p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3p}{2}}, 0, \frac{16p^{-\frac{1}{2}}}{15\sqrt{\pi}}t^{\frac{5p}{2}} \right\rangle \\
 &= \langle -2, 0, 2 \rangle + \left\langle -\frac{4p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3p}{2}}, 0, \frac{16p^{-\frac{1}{2}}}{15\sqrt{\pi}}t^{\frac{5p}{2}} \right\rangle \\
 &= \left\langle -2 - \frac{4p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3p}{2}}, 0, 2 + \frac{16p^{-\frac{1}{2}}}{15\sqrt{\pi}}t^{\frac{5p}{2}} \right\rangle, \quad t \in [0, 1],
 \end{aligned}$$

y la función d -decreciente

$$\begin{aligned}
 x_2(t) &= \varphi(0) \ominus_H (-1) \left\langle -\frac{4p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3p}{2}}, 0, \frac{16p^{-\frac{1}{2}}}{15\sqrt{\pi}}t^{\frac{5p}{2}} \right\rangle \\
 &= \langle -2, 0, 2 \rangle \ominus_H \left\langle -\frac{16p^{-\frac{1}{2}}}{15\sqrt{\pi}}t^{\frac{5p}{2}}, 0, \frac{4p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3p}{2}} \right\rangle \\
 &= \left\langle \frac{16p^{-\frac{1}{2}}}{15\sqrt{\pi}}t^{\frac{5p}{2}} - 2, 0, 2 - \frac{4p^{-\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3p}{2}} \right\rangle, \quad t \in [0, 1].
 \end{aligned}$$

Es claro que las funciones x_1 y x_2 son soluciones de la ED-DF y EI-DF, ver Ejemplo 2.1.3.

El siguiente resultado da condiciones bajo las cuales se tiene la equivalencia entre los problemas (4.2.1) y (4.2.2); lo consideramos como el segundo resultado principal de esta tesis.

Proposición 4.2.4. *Sea $f : J \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ una función difusa tal que $t \mapsto f(t, u)$ pertenece a $C_{\gamma,p}(J, \mathcal{F})$, $0 \leq \gamma \leq \alpha$, para cualquier $u \in \mathcal{F}$. Entonces, una función difusa d -monótona $x \in C(J_0, \mathcal{F}) \cap C_{CK}^{1,F}(J, \mathcal{F})$ es una solución del PVI-DF-R (4.2.1) si, y solo si, x satisface el PVI-DF-R (4.2.2) y la función difusa $t \mapsto ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t, x)$ es d -creciente sobre J .*

Demostración. Sea $x \in C(J_0, \mathcal{F}) \cap C_{CK}^{1,F}(J, \mathcal{F})$ una solución difusa d -monótona de (4.2.1). En particular, se tiene que $x(t) = \varphi(t)$, para todo $t \in [-\tau, 0]$. Dado que

x es d -monótona sobre J , se sigue que $t \mapsto x(t) \ominus_{gH} x(0)$ es d -creciente sobre J (ver Colorario 1.3.16). Por lo tanto, aplicando el operador ${}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p}$ en la ED-DF (4.2.1), usando el Teorema 1.4.21 y teniendo en cuenta que $f(\cdot, x) \in C_{\gamma,p}(J, \mathcal{F})$ para cualquier $x \in \mathcal{F}$, se tiene que

$$\begin{aligned} ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} {}^{CK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p} x)(t) &= x(t) \ominus_{gH} x(0) \\ &= \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \\ &= ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t, x(t)), \quad t \in J. \end{aligned}$$

Esto es,

$$x(t) \ominus_{gH} x(0) = ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t, x(t)), \quad t \in J.$$

Además, como $t \mapsto x(t) \ominus_{gH} x(0)$ es d -creciente sobre J , se sigue que $t \mapsto ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t, x(t))$ es también d -creciente sobre J . Entonces, tenemos la condición de necesidad.

A continuación, probamos la suficiencia. Sea $x \in C(J_0, \mathcal{F}) \cap C_{CK}^{1,F}(J, \mathcal{F})$ una función difusa d -monótona que satisface (4.2.2) donde $f : J \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ es una función difusa tal que $t \mapsto f(t, u)$ pertenece a $C_{\gamma,p}(J, \mathcal{F})$, $0 \leq \gamma \leq \alpha$, para cualquier $u \in \mathcal{F}$, y $t \mapsto ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t, x)$ d -creciente sobre J . De la continuidad de la función difusa f , la función difusa $t \mapsto ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t, x(t))$ es continua sobre $(0, T]$ y $({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(0, x(0)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t, x(t)) = 0$ en la métrica definida en (1.3.3). Entonces, $x(0) = \varphi(0)$. Además, dado que $t \mapsto ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t, x(t))$ es d -creciente sobre J , aplicando el operador ${}^{RLK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}$ en (4.2.2), de la Proposición 1.4.19 y la Definición 1.4.14, se sigue que

$$\begin{aligned} {}^{RLK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p} [x(t) \ominus_{gH} x(0)] &= ({}^{CK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p} x)(t) \\ &= ({}^{RLK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p} {}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t, x(t)) \\ &= f(t, x(t)), \quad t \in J. \end{aligned}$$

Esto es,

$$({}_{gH}^{CK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}x)(t) = f(t, x(t)), \quad t \in J.$$

Lo que completa la demostración. $\square$

Definición 4.2.5. Una función difusa $x^i(\cdot) \in C(J_0, \mathcal{F}) \cap C_{CK}^{1,F}(J, \mathcal{F})$ es llamada una **solución inferior** para (4.2.1) si

$$\begin{cases} ({}_{gH}^{CK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}x^i)(t) \lesssim f(t, x^i(t)), & t \in J = [0, T], \\ x^i(t) = \varphi^i(t) \lesssim \varphi(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

Una función difusa $x^s(\cdot) \in C(J_0, \mathcal{F}) \cap C_{CK}^{1,F}(J, \mathcal{F})$ es llamada una **solución superior** para (4.2.1) si

$$\begin{cases} ({}_{gH}^{CK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p}x^s)(t) \gtrsim f(t, x^s(t)), & t \in J = [0, T], \\ x^s(t) = \varphi^s(t) \gtrsim \varphi(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

El tercer resultado principal del trabajo presenta las condiciones para la existencia y unicidad de solución del PVI-DF-R (4.2.1).

Teorema 4.2.6. Sea $f \in C(J \times \mathcal{F}, \mathcal{F})$. Asuma las siguientes condiciones:

1. Existe una solución inferior d -monótona $x^l \in C(J_0, \mathcal{F}) \cap C_{CK}^{1,F}(J, \mathcal{F})$ para el problema (4.2.1);
2. Si $\eta \gtrsim \lambda$, entonces $f(t, \eta) \gtrsim f(t, \lambda)$;
3. f es débilmente contractiva para elementos comparables, es decir, para algunas funciones de distancia alternante ψ y ϕ , se tiene

$$\psi(d_\infty[f(t, \eta), f(t, \lambda)]) \leq \psi(d_\infty[\eta, \lambda]) - \phi(d_\infty[\eta, \lambda]) \quad \text{para } \eta \gtrsim \lambda.$$

Entonces existe una única solución d -monótona x para el problema (4.2.1) sobre J_0 .

Demostración. Considere $x \in C(J_0, \mathcal{F})$ y denote $X(t) = x(t) \ominus_{gH} x(0)$ para $t \in J_0$. Defina el operador $Q : C(J_0, \mathcal{F}) \rightarrow C(J_0, \mathcal{F})$ por

$$(QX)(t) = \begin{cases} \varphi(t) \ominus_{gH} \varphi(0), & t \in [-\tau, 0], \\ \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds, & t \in J. \end{cases}$$

Se mostrará que Q verifica las condiciones del Teorema 3.1.4.

Sean $x \gtrsim y \in C(J_0, \mathcal{F})$. Si $t \in [-\tau, 0]$,

$$(QX)(t) = \varphi(t) \ominus_{gH} \varphi(0) = (QY)(t),$$

y, si $t \in J$, de la condición 2 y la Observación 1.4.4, se sigue que

$$\begin{aligned} (QX)(t) &= \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \\ &\gtrsim \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds = (QY)(t), \quad \forall x \gtrsim y. \end{aligned}$$

Así, el operador Q es no decreciente. De la condición 3, se tiene que

$$\psi(d_\infty[f(t, x), f(t, y)]) \leq \psi(d_\infty[\eta, \lambda]) - \phi(d_\infty[\eta, \lambda]) \leq \psi(d_\infty[x, y]), \quad \text{para } x \gtrsim y.$$

Como ψ es una función de distancia alternante, se sigue que

$$d_\infty[f(t, x), f(t, y)] \leq d_\infty[x, y], \quad \text{para } x \gtrsim y.$$

De hecho, si

$$d_\infty[x, y] < d_\infty[f(t, x), f(t, y)], \quad \text{para algunos } x \gtrsim y,$$

siendo ψ una función de distancia alternante, se tiene que

$$\psi(d_\infty[x, y]) \leq \psi(d_\infty[f(t, x), f(t, y)]), \quad \text{para algunos } x \gtrsim y.$$

Así,

$$\psi(d_\infty[x, y]) \leq \psi(d_\infty[x, y]) - \phi(d_\infty[x, y]), \quad \text{para algunos } x \gtrsim y$$

y

$$-\phi(d_\infty[x, y]) = 0.$$

Entonces, $d_\infty[x(t), y(t)] = 0$ para $x \gtrsim y$ y $t \in J_0$. Esto genera una contradicción, ya que para $x \gtrsim y$ y $t \in J_0$, $d_\infty[f(t, x(t)), f(t, y(t))] = 0$.

Ahora, si $x \gtrsim y$ y $t \in [-\tau, 0]$, se tiene que

$$d_\infty[QX, QY] = d_\infty[\varphi(t) \ominus_{gH} \varphi(0), \varphi(t) \ominus_{gH} \varphi(0)] = d_\infty[\varphi(t), \varphi(t)] = 0,$$

y para $x \gtrsim y$ con $t \in J$, se sigue que

$$\begin{aligned} d_\infty[QX, QY] &= d_\infty \left[\frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds, \right. \\ &\quad \left. \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right] \\ &\leq \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} d_\infty[f(t, x(t)), f(t, y(t))] ds \\ &\leq \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} d_\infty[x(t), y(t)] ds. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
D_{\rho,p}[QX, QY] &= \sup_{t \in J} \{e^{-(\rho t)^p} d_{\infty}[QX, QY]\} \\
&\leq \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in J} \left\{ e^{-(\rho t)^p} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} d_{\infty}[x(t), y(t)] ds \right\} \\
&= \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in J} \left\{ e^{-(\rho t)^p} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} e^{(\rho s)^p} e^{-(\rho s)^p} d_{\infty}[x(t), y(t)] ds \right\} \\
&\leq \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in J} \left\{ e^{-(\rho t)^p} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} e^{(\rho s)^p} D_{\rho,p}[x, y] ds \right\} \\
&= \frac{p^{1-\alpha} D_{\rho,p}[x, y]}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in J} \left\{ \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} e^{-\rho^p(t^p - s^p)} ds \right\}.
\end{aligned}$$

Tomando $u = (t^p - s^p)^{\alpha}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
D_{\rho,p}[QX, QY] &\leq \frac{p^{1-\alpha} D_{\rho,p}[x, y]}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in J} \left\{ \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} e^{-\rho^p(t^p - s^p)} ds \right\} \\
&= \frac{p^{1-\alpha} D_{\rho,p}[x, y]}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in J} \left\{ \frac{\Gamma(\alpha, (\rho t)^p)}{p \rho^{\alpha p}} \right\} \\
&\leq \frac{p^{1-\alpha} D_{\rho,p}[x, y]}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{p \rho^{\alpha p}} = \frac{p^{-\alpha}}{\rho^{\alpha p}} D_{\rho,p}[x, y].
\end{aligned}$$

Para una función de distancia alternante μ , se llega a que

$$\begin{aligned}
\mu(D_{\rho,p}[QX, QY]) &\leq \mu\left(\frac{p^{-\alpha}}{\rho^{\alpha p}} D_{\rho,p}[x, y]\right) \\
&= \mu(D_{\rho,p}[x, y]) - \left(\mu(D_{\rho,p}[x, y]) - \mu\left(\frac{p^{-\alpha}}{\rho^{\alpha p}} D_{\rho,p}[x, y]\right)\right).
\end{aligned}$$

Considerando $\sigma(t) = \mu(t) - \mu\left(\frac{p^{-\alpha}}{\rho^{\alpha p}} t\right)$, se sigue que

$$\mu(D_{\rho,p}[QX, QY]) = \mu(D_{\rho,p}[x, y]) - \sigma(D_{\rho,p}[x, y]), \quad x \gtrsim y, t \in J_0.$$

De la condición 1 se tiene que

$$\begin{cases} ({}^{CK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p} x^i)(t) \lesssim f(t, x^i(t)), & t \in J = [0, T], \\ x^i(t) = \varphi^i(t) \lesssim \varphi(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

Ahora, se mostrará que $X^i \lesssim QX^i$ sobre J_0 . Para $t \in [-\tau, 0]$, se sigue que $x^i(t) = \varphi^i(t) \lesssim \varphi(t)$. Entonces

$$X^i(t) = x^i(t) \ominus_{gH} x^i(0) = \varphi^i(t) \ominus_{gH} \varphi^i(0) \lesssim \varphi(t) \ominus_{gH} \varphi(0) = (QX^i)(t),$$

y, para $t \in J$, por el Lema 4.2.4 y la Observación 1.4.4, se tiene que

$$\begin{aligned} ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} {}^{CK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p} x^i)(t) &= x^i(t) \ominus_{gH} x^i(0) \\ &= X^i(t) \\ &\lesssim ({}^{RLK}\mathcal{I}_0^{\alpha,p} f)(t, x^i(t)) \\ &= \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} f(s, x^i(s)) ds \\ &= (QX^i)(t), \quad t \in J. \end{aligned}$$

Luego,

$$X^i(t) \lesssim (QX^i)(t), \quad t \in J_0.$$

El operador Q satisface las hipótesis del Teorema 3.1.5, esto es, Q tiene un punto fijo x en $C(J_0, \mathcal{F})$. Además, ya que cada par de funciones difusas en $C(J_0, \mathcal{F})$ tiene un límite superior, el Teorema 3.1.7 implica que el operador Q tiene un punto fijo único x , y este es la solución única para el problema (4.2.1). $\square$

Observación 4.2.7. En el Teorema 4.2.6, reemplazando la condición 1 por la existencia de x^s en su lugar de x^i , el resultado sigue siendo válido.

Observación 4.2.8. Note que, haciendo $\tau = 0$ en el PVI-DF-R (4.2.1) se obtiene

PVI-DF (2.1.1). Luego, haciendo $\tau = 0$ en el Teorema 4.2.6 se obtiene el Teorema 4.1.2.

Ejemplo 4.2.9. *Un modelo matemático natural descrito por ecuaciones diferenciales ordinarias con retraso finito viene dado por el modelo tipo Thomas Malthus para la dinámica de población, en el que la tasa de natalidad no cambia tan pronto como nacen nuevos individuos; de hecho, los nuevos individuos necesitan un tiempo para convertirse en individuos reproductivos, es decir, se hace presente el fenómeno de retardo. El siguiente ejemplo corresponde a una modificación de ese modelo clásico de dinámica de poblaciones en el que se incorporan características difusas y la derivada temporal se toma en el sentido de la derivada fraccionaria de Hukuhara generalizada difusa de Caputo-Katugampola. Explícitamente, consideramos el siguiente problema de valor inicial para ecuaciones diferenciales difusas fraccionarias con retardo finito PVI-DF-R*

$$\begin{cases} ({}_{gH}^{CK} \mathcal{D}_0^{\alpha,p} P)(t) = \lambda P(t-1), & t \in [0, 2], \\ P(t) = P_0, & t \in [-1, 0], \end{cases}$$

donde $\lambda > 0$, $[P(t)]^r = [\underline{P}^r(t), \overline{P}^r(t)]$ y $[P_0]^r = [\underline{P}_0^r, \overline{P}_0^r] = [1+r, 3-r]$, para $r, \alpha \in [0, 1]$. Consideramos los siguientes dos casos:

Caso I: P una función difusa d -creciente sobre $[0, 2]$.

Caso II: P una función difusa d -decreciente sobre $[0, 2]$.

Para buscar una solución difusa del PVI-DF-R, utilizamos el método de pasos. Para eso, tenga en cuenta que, si $0 \leq t \leq 1$, $-1 \leq t-1 \leq 0$, entonces

$$\overline{P}^r(t-1) = \overline{P}_0^r = (3-r) \quad \text{y} \quad \underline{P}^r(t-1) = \underline{P}_0^r = (1+r).$$

Por lo tanto, para $r \in [0, 1]$, tenemos que

$$[\lambda P(t-1)]^r = [\lambda \underline{P}^r(t-1), \lambda \overline{P}^r(t-1)] = [\lambda(1+r), \lambda(3-r)]. \quad (4.2.5)$$

Caso I: P una función difusa d -creciente sobre $[0, 2]$.

Primero, considere la ED-DF para $t \in [0, 1]$. Dado que la función P es d -creciente, para $t \in [0, 1]$ y $r \in [0, 1]$, de la Observación 1.4.17, se tiene que

$$\begin{aligned} [({}^{CK}D_0^{\alpha,p} P)(t)]^r &= [({}^{CK}D_0^{\alpha,p} \underline{P}^r)(t), ({}^{CK}D_0^{\alpha,p} \overline{P}^r)(t)] \\ &= [\lambda \underline{P}^r(t-1), \lambda \overline{P}^r(t-1)] = [\lambda P(t-1)]^r. \end{aligned}$$

Así, de esta última ecuación y la ecuación (4.2.5), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden fraccionario

$$\begin{cases} ({}^{CK}D_0^{\alpha,p} \underline{P}^r)(t) = \lambda(1+r), & t \in [0, 1], \\ ({}^{CK}D_0^{\alpha,p} \overline{P}^r)(t) = \lambda(3-r), & t \in [0, 1], \\ \underline{P}^r(t) = \underline{P}_0^r = (1+r), & t \in [-1, 0], \\ \overline{P}^r(t) = \overline{P}_0^r = (3-r), & t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Luego, aplicando el operador ${}^{RLK}I_0^{\alpha,p}$, se sigue que

$$\underline{P}^r(t) = \underline{P}^r(0) + \frac{\lambda(1+r)p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1}(t^p - s^p)^{\alpha-1} ds = (1+r) + \frac{\lambda(1+r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha p}, \quad t \in [0, 1],$$

$$\overline{P}^r(t) = \overline{P}^r(0) + \frac{\lambda(3-r)p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1}(t^p - s^p)^{\alpha-1} ds = (3-r) + \frac{\lambda(3-r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha p}, \quad t \in [0, 1].$$

Es decir, los r -niveles de la función difusa solución del PVI-DF-R candidata para $t \in [0, 1]$ son

$$[P(t)]^r = \left[(1+r) + \frac{\lambda(1+r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha p}, (3-r) + \frac{\lambda(3-r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha p} \right], \quad r \in [0, 1].$$

Ahora, considere la ED-DF para $t \in [1, 2]$. Luego, $(t - 1) \in [0, 1]$. Así, para $r \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} [\lambda P(t - 1)]^r &= [\lambda \underline{P}^r(t - 1), \lambda \overline{P}^r(t - 1)] \\ &= \left[\lambda(1 + r) + \frac{\lambda^2(1 + r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}(t - 1)^{\alpha p}, \lambda(3 - r) + \frac{\lambda^2(3 - r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}(t - 1)^{\alpha p} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Dado que la función P es d -creciente, para $t \in [1, 2]$ y $r \in [0, 1]$, de la Observación 1.4.17, se tiene que

$$\begin{aligned} [({}^{CK}D_0^{\alpha, p} P)(t)]^r &= [({}^{CK}D_0^{\alpha, p} \underline{P}^r)(t), ({}^{CK}D_0^{\alpha, p} \overline{P}^r)(t)] \\ &= [\lambda \underline{P}^r(t - 1), \lambda \overline{P}^r(t - 1)] = [\lambda P(t - 1)]^r. \end{aligned}$$

Así, de esta última ecuación y la ecuación (4.2.6), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden fraccionario

$$\left\{ \begin{array}{ll} ({}^{CK}D_0^{\alpha, p} \underline{P}^r)(t) = \lambda(1 + r) + \frac{\lambda^2(1 + r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}(t - 1)^{\alpha p}, & t \in [1, 2], \\ ({}^{CK}D_0^{\alpha, p} \overline{P}^r)(t) = \lambda(3 - r) + \frac{\lambda^2(3 - r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}(t - 1)^{\alpha p}, & t \in [1, 2], \\ \underline{P}^r(t) = (1 + r) + \frac{\lambda(1 + r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}t^{\alpha p}, & t \in [0, 1], \\ \overline{P}^r(t) = (3 - r) + \frac{\lambda(3 - r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}t^{\alpha p}, & t \in [0, 1]. \end{array} \right.$$

Por otro lado, del Teorema 1.2.11, se sigue que

$$\begin{aligned}
({}^{CK}D_0^{\alpha,p}\underline{P}^r)(t) &= \frac{p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t^p - s^p)^{-\alpha} \frac{d}{ds} [\underline{P}^r(s)] ds \\
&= \frac{p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\int_0^1 (t^p - s^p)^{-\alpha} \frac{d}{ds} [\underline{P}^r(s)] ds + \int_1^t (t^p - s^p)^{-\alpha} \frac{d}{ds} [\underline{P}^r(s)] ds \right] \\
&= \frac{p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (t^p - s^p)^{-\alpha} \frac{d}{ds} \left[(1+r) + \frac{\lambda(1+r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} s^{\alpha p} \right] ds + ({}^{CK}D_1^{\alpha,p}\underline{P}^r)(t) \\
&= \frac{\lambda(1+r)p}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t^p - s^p)^{-\alpha} s^{\alpha p-1} ds + ({}^{CK}D_1^{\alpha,p}\underline{P}^r)(t).
\end{aligned}$$

Luego, para la primera EDO, se tiene que

$$({}^{CK}D_1^{\alpha,p}\underline{P}^r)(t) = \lambda(1+r) + \frac{\lambda^2(1+r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(t-1)^{\alpha p} - \frac{\lambda(1+r)p}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t^p - s^p)^{-\alpha} s^{\alpha p-1} ds.$$

De forma análoga, para la segunda EDO,

$$({}^{CK}D_1^{\alpha,p}\overline{P}^r)(t) = \lambda(3-r) + \frac{\lambda^2(3-r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(t-1)^{\alpha p} - \frac{\lambda(3-r)p}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t^p - s^p)^{-\alpha} s^{\alpha p-1} ds.$$

Luego, aplicando el operador ${}^{RLK}I_1^{\alpha,p}$, se sigue

$$\begin{aligned}
\underline{P}^r(t) &= \underline{P}^r(1) + \frac{\lambda(1+r)p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} ds \\
&\quad + \frac{\lambda^2(1+r)p^{1-2\alpha}}{\alpha\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} (s-1)^{\alpha p} ds \\
&\quad - \frac{\lambda(1+r)p^{2-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 (s^p - \tau^p)^{-\alpha} \tau^{\alpha p-1} d\tau \right) ds \\
&= (1+r) + \frac{\lambda(1+r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\lambda(1+r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} (t^p - 1)^\alpha \\
&\quad + \frac{\lambda^2(1+r)p^{1-2\alpha}}{\alpha\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} (s-1)^{\alpha p} ds \\
&\quad - \frac{\lambda(1+r)p^{2-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 (s^p - \tau^p)^{-\alpha} \tau^{\alpha p-1} d\tau \right) ds,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\overline{P^r}(t) &= \overline{P^r}(1) + \frac{\lambda(3-r)p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t s^{p-1}(t^p - s^p)^{\alpha-1} ds \\
&\quad + \frac{\lambda^2(3-r)p^{1-2\alpha}}{\alpha\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t s^{p-1}(t^p - s^p)^{\alpha-1}(s-1)^{\alpha p} ds \\
&\quad - \frac{\lambda(3-r)p^{2-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t s^{p-1}(t^p - s^p)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 (s^p - \tau^p)^{-\alpha} \tau^{\alpha p-1} d\tau \right) ds \\
&= (3-r) + \frac{\lambda(3-r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\lambda(3-r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} (t^p - 1)^\alpha \\
&\quad + \frac{\lambda^2(3-r)p^{1-2\alpha}}{\alpha\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t s^{p-1}(t^p - s^p)^{\alpha-1}(s-1)^{\alpha p} ds \\
&\quad - \frac{\lambda(3-r)p^{2-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t s^{p-1}(t^p - s^p)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 (s^p - \tau^p)^{-\alpha} \tau^{\alpha p-1} d\tau \right) ds.
\end{aligned}$$

En la Figura 9 se presenta la gráfica del 1-nivel (trazo punteado) y las funciones extremos del soporte (trazos continuos) de la función solución P al PVI-DF-R para el Caso I cuando $\lambda = \frac{1}{2}$, $p = 1$ y (a) $\alpha = \frac{1}{2}$, (b) $\alpha \rightarrow 1^-$.

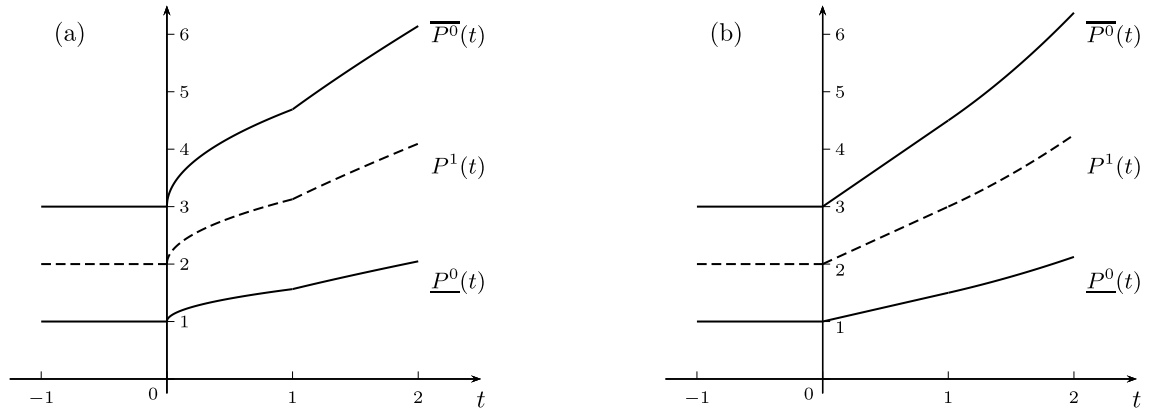


Figura 9. Gráfica del 1-nivel y el soporte de la solución P al PVI-DF-R del Caso I. (a) Cuando $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ y $p = 1$. (b) Cuando $\alpha \rightarrow 1^-$, $\lambda = \frac{1}{2}$ y $p = 1$.

Case II: P una función difusa d -decreciente sobre $[0, 2]$.

Primero, considere la ED-DF para $t \in [0, 1]$. Dado que la función P es d -decreciente,

para $t \in [0, 1]$ y $r \in [0, 1]$, de la Observación 1.4.17, se tiene

$$\begin{aligned} [({}^{CK}\mathcal{D}_0^{\alpha,p} P)(t)]^r &= [({}^{CK}D_0^{\alpha,p} \overline{P^r})(t), ({}^{CK}D_0^{\alpha,p} \underline{P^r})(t)] \\ &= [\lambda \underline{P^r}(t-1), \lambda \overline{P^r}(t-1)] = [\lambda P(t-1)]^r. \end{aligned}$$

Así, de esta última ecuación y la ecuación (4.2.5), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} ({}^{CK}D_0^{\alpha,p} \underline{P^r})(t) = \lambda(3-r), & t \in [0, 1], \\ ({}^{CK}D_0^{\alpha,p} \overline{P^r})(t) = \lambda(1+r), & t \in [0, 1], \\ \underline{P^r}(t) = \underline{P_0^r} = (1+r), & t \in [-1, 0], \\ \overline{P^r}(t) = \overline{P_0^r} = (3-r), & t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Luego, aplicando el operador ${}^{RLK}I_0^{\alpha,p}$, se sigue

$$\underline{P^r}(t) = \underline{P^r}(0) + \frac{\lambda(3-r)p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1}(t^p - s^p)^{\alpha-1} ds = (1+r) + \frac{\lambda(3-r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha p}, \quad t \in [0, 1],$$

$$\overline{P^r}(t) = \overline{P^r}(0) + \frac{\lambda(1+r)p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{p-1}(t^p - s^p)^{\alpha-1} ds = (3-r) + \frac{\lambda(1+r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha p}, \quad t \in [0, 1].$$

Es decir, los r -niveles de la función difusa solución del PVI-DF-R candidata para $t \in [0, 1]$ son

$$[P(t)]^r = \left[(1+r) + \frac{\lambda(3-r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha p}, (3-r) + \frac{\lambda(1+r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha p} \right], \quad r \in [0, 1].$$

Ahora, considere la ED-DF para $t \in [1, 2]$. Luego, $(t-1) \in [0, 1]$. Así, para $r \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} [\lambda P(t-1)]^r &= [\lambda \underline{P^r}(t-1), \lambda \overline{P^r}(t-1)] \\ &= \left[\lambda(1+r) + \frac{\lambda^2(3-r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} (t-1)^{\alpha p}, \lambda(3-r) + \frac{\lambda^2(1+r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} (t-1)^{\alpha p} \right]. \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Dado que la función P es d -decreciente, para $t \in [1, 2]$ y $r \in [0, 1]$, de la Observación 1.4.17, se tiene

$$\begin{aligned} \left[({}^{CK}D_0^{\alpha,p} P)(t) \right]^r &= [({}^{CK}D_0^{\alpha,p} \overline{P^r})(t), ({}^{CK}D_0^{\alpha,p} \underline{P^r})(t)] \\ &= [\lambda \underline{P^r}(t-1), \lambda \overline{P^r}(t-1)] = [\lambda P(t-1)]^r. \end{aligned}$$

Así, de esta última ecuación y la ecuación (4.2.7), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\left\{ \begin{array}{ll} ({}^{CK}D_0^{\alpha,p} \underline{P^r})(t) = \lambda(3-r) + \frac{\lambda^2(1+r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(t-1)^{\alpha p}, & t \in [1, 2], \\ ({}^{CK}D_0^{\alpha,p} \overline{P^r})(t) = \lambda(1+r) + \frac{\lambda^2(3-r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(t-1)^{\alpha p}, & t \in [1, 2], \\ \underline{P^r}(t) = (1+r) + \frac{\lambda(3-r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha p}, & t \in [0, 1], \\ \overline{P^r}(t) = (3-r) + \frac{\lambda(1+r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha p}, & t \in [0, 1]. \end{array} \right.$$

Por otro lado, del Teorema 1.2.11, se sigue

$$\begin{aligned} ({}^{CK}D_0^{\alpha,p} \underline{P^r})(t) &= \frac{p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t^p - s^p)^{-\alpha} \frac{d}{ds} [\underline{P^r}(s)] ds \\ &= \frac{p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\int_0^1 (t^p - s^p)^{-\alpha} \frac{d}{ds} [\underline{P^r}(s)] ds + \int_1^t (t^p - s^p)^{-\alpha} \frac{d}{ds} [\underline{P^r}(s)] ds \right] \\ &= \frac{p^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (t^p - s^p)^{-\alpha} \frac{d}{ds} \left[(1+r) + \frac{\lambda(3-r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha p} \right] ds + ({}^{CK}D_1^{\alpha,p} \underline{P^r})(t) \\ &= \frac{\lambda(3-r)p}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t^p - s^p)^{-\alpha} s^{\alpha p-1} ds + ({}^{CK}D_1^{\alpha,p} \underline{P^r})(t). \end{aligned}$$

Luego, para la primera EDO,

$$({}^{CK}D_1^{\alpha,p} \underline{P^r})(t) = \lambda(3-r) + \frac{\lambda^2(1+r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(t-1)^{\alpha p} - \frac{\lambda(3-r)p}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t^p - s^p)^{-\alpha} s^{\alpha p-1} ds.$$

De forma análoga, para la segunda EDO,

$$({}^{CK}D_1^{\alpha,p}\overline{P^r})(t) = \lambda(1+r) + \frac{\lambda^2(3-r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(t-1)^{\alpha p} - \frac{\lambda(1+r)p}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t^p - s^p)^{-\alpha} s^{\alpha p-1} ds.$$

Luego, aplicando el operador ${}^{RLK}I_1^{\alpha,p}$, se sigue

$$\begin{aligned} \underline{P^r}(t) &= \underline{P^r}(1) + \frac{\lambda(3-r)p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} ds \\ &\quad + \frac{\lambda^2(1+r)p^{1-2\alpha}}{\alpha\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} (s-1)^{\alpha p} ds \\ &\quad - \frac{\lambda(3-r)p^{2-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 (s^p - \tau^p)^{-\alpha} \tau^{\alpha p-1} d\tau \right) ds \\ &= (1+r) + \frac{\lambda(3-r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\lambda(3-r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} (t^p - 1)^\alpha \\ &\quad + \frac{\lambda^2(1+r)p^{1-2\alpha}}{\alpha\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} (s-1)^{\alpha p} ds \\ &\quad - \frac{\lambda(3-r)p^{2-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 (s^p - \tau^p)^{-\alpha} \tau^{\alpha p-1} d\tau \right) ds. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \overline{P^r}(t) &= \overline{P^r}(1) + \frac{\lambda(1+r)p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} ds \\ &\quad + \frac{\lambda^2(3-r)p^{1-2\alpha}}{\alpha\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} (s-1)^{\alpha p} ds \\ &\quad - \frac{\lambda(1+r)p^{2-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 (s^p - \tau^p)^{-\alpha} \tau^{\alpha p-1} d\tau \right) ds \\ &= (3-r) + \frac{\lambda(1+r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\lambda(1+r)p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} (t^p - 1)^\alpha \\ &\quad + \frac{\lambda^2(3-r)p^{1-2\alpha}}{\alpha\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} (s-1)^{\alpha p} ds \\ &\quad - \frac{\lambda(1+r)p^{2-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t s^{p-1} (t^p - s^p)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 (s^p - \tau^p)^{-\alpha} \tau^{\alpha p-1} d\tau \right) ds. \end{aligned}$$

En la Figura 10 se presenta la gráfica del 1-nivel (trazo punteado) y las funciones

extremos del soporte (trazos continuos) de la función solución P al PVI-DF-R para el Caso II cuando $\lambda = \frac{1}{2}$, $p = 1$ y (a) $\alpha = \frac{1}{2}$, (b) $\alpha \rightarrow 1^-$.

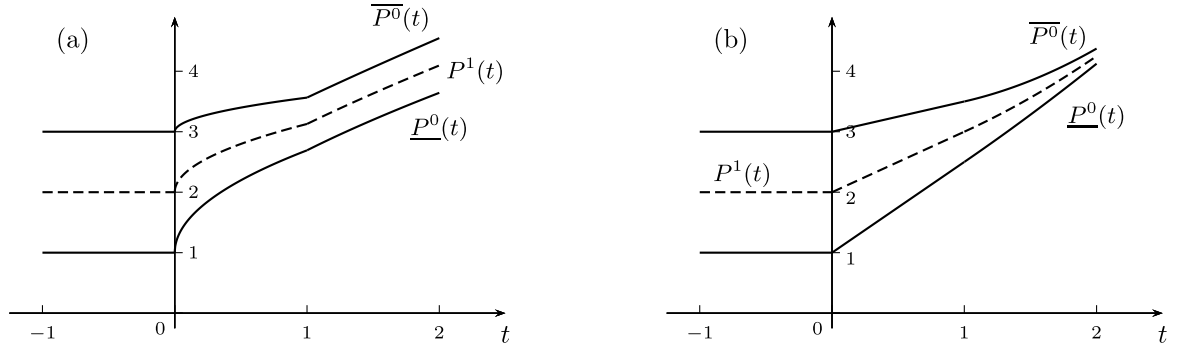


Figura 10. Gráfica del 1-nivel y el soporte de la solución P al PVI-DF-R del Caso II. (a) Cuando $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ y $p = 1$. (b) Cuando $\alpha \rightarrow 1^-$, $\lambda = \frac{1}{2}$ y $p = 1$.

Observación 4.2.10. Para el Ejemplo 4.2.9, si se toma $p = 1$ y $\alpha \rightarrow 1^-$, se tiene

Caso I: para $r \in [0, 1]$

$$[P(t)]^r = \begin{cases} [(1+r)(1+\lambda t), (3-r)(1+\lambda t)], & t \in [0, 1], \\ \left[(1+r) \left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2}{2} t^2 - \lambda^2 t + \frac{\lambda^2}{2} \right), (3-r) \left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2}{2} t^2 - \lambda^2 t + \frac{\lambda^2}{2} \right) \right], & t \in (1, 2]. \end{cases}$$

Caso II: para $r \in [0, 1]$

$$[P(t)]^r = \begin{cases} [(1+r) + \lambda(3-r)t, (3-r) + \lambda(1+r)t], & t \in [0, 1], \\ \left[(1+r) + \lambda(3-r) + \lambda(3-r)(t-1) + \lambda^2(1+r) \frac{(t-1)^2}{2}, \right. \\ \quad \left. (3-r) + \lambda(1+r) + \lambda(3-r)(t-1) + \lambda^2(3-r) \frac{(t-1)^2}{2} \right], & t \in (1, 2]. \end{cases}$$

5. CONCLUSIONES

Se analizaron los fundamentos del cálculo fraccionario extendidos al contexto difuso.

Se estudiaron las condiciones necesarias y suficientes para la equivalencia entre el PVI-DF y su correspondiente formulación EI-DF.

Se obtuvieron algunos resultados relacionados con existencia y unicidad del PVI-DF vía teoremas de punto fijo de funciones débilmente contractivas en espacios métricos parcialmente ordenados.

Se extendieron los resultados de existencia y unicidad de solución a PVI-DF-R.

BIBLIOGRAFÍA

- Agarwal, R.P., V. Lakshmikantham y J.J. Nieto. "On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty". En: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 72.6 (2010), págs. 2859-2862 (vid. pág. 12).
- Agarwal, R.P. y col. "Fuzzy fractional integral equations under compactness type condition". En: *Fractional Calculus and Applied Analysis* 15.4 (2012), págs. 572-590 (vid. pág. 13).
- Allahviranloo, T., A. Armand y Z. Gouyandeh. "Fuzzy fractional differential equations under generalized fuzzy Caputo derivative". En: *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* 26.3 (2014), págs. 1481-1490 (vid. pág. 13).
- Allahviranloo, T., S. Salahshour y S. Abbasbandy. "Explicit solutions of fractional differential equations with uncertainty". En: *Soft Comp.* 16.2 (2012), págs. 297-302 (vid. pág. 13).
- An, T.V., H. Vu y N.V. Hoa. "A new technique to solve the initial value problems for fractional fuzzy delay differential equations". En: *Advances in Difference Equations* 2017.1 (2017), págs. 1-20 (vid. pág. 16).
- "Applications of contractive-like mapping principles to interval-valued fractional integro-differential equations". En: *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 19.4 (2017), págs. 2577-2599 (vid. pág. 14).

- Angulo-Castillo, V. y col. "Applications of generalized fixed points theorems to the existence of uncertain differential equations with finite delay". En: *Iranian Journal of Fuzzy Systems* 17.6 (2020), págs. 1-15 (vid. págs. 12, 15, 16, 88).
- Arshad, S. y V. Lupulescu. "On the fractional differential equations with uncertainty". En: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Appl.* 74.11 (2011), págs. 3685-3693 (vid. pág. 13).
- Banks, H.T. y M.Q. Jacobs. "A differential calculus for multifunctions". En: *J. Math. Anal. Appl.* 29.2 (1970), págs. 246-272 (vid. pág. 46).
- Bede, B. y S.G. Gal. "Generalizations of the differentiability of fuzzy number valued functions with applications to fuzzy differential equations". En: *Fuzzy Sets and Systems* 151.3 (2005), págs. 581-599 (vid. pág. 46).
- "Solutions of fuzzy differential equations based on generalized differentiability". En: *Commun. Math. Anal.* 9.2 (2010), págs. 22-41 (vid. págs. 19, 45, 47).
- Bede, B. y L. Stefanini. "Generalized differentiability of fuzzy-valued functions". En: *Fuzzy Sets and Systems* 230 (2013), págs. 119-141. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fss.2012.10.003> (vid. págs. 12, 19, 47, 48).
- Castillo-Negrete, D. del, B.A. Carreras y V.E. Lynch. "Nondiffusive Transport in Plasma Turbulence: A Fractional Diffusion Approach". En: *Phys. Rev. Lett.* 94 (6 2005), pág. 065003. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.065003 (vid. pág. 11).
- Chalco-Cano, Y., H. Román-Flores y M.D. Jiménez-Gamero. "Generalized derivative and π -derivative for set-valued functions". En: *Inform. Sci.* 181.11 (2011), págs. 2177-2188 (vid. pág. 47).

- Diamond, P. y P. Kloeden. *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications*. River Edge, NJ, Singapore: World Scientific Publishing Co. Inc., 1994 (vid. págs. 39, 46).
- Diethelm, K. *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*. Springer Science & Business Media, 2010 (vid. págs. 19, 21, 26, 29, 36, 64).
- Dutta, P.N. y B.S. Choudhury. "A generalisation of contraction principle in metric spaces". En: *Fixed Point Theory and Applications* 2008.1 (2008), pág. 406368 (vid. pág. 74).
- Goetschel, R. y W. Voxman. "Elementary fuzzy calculus". En: *Fuzzy Sets and Systems* 18.1 (1986), págs. 31-43 (vid. págs. 19, 42).
- Gomes, L.T., L.C. de Barros y B. Bede. *Fuzzy differential equations in various approaches*. Springer, 2015 (vid. pág. 12).
- González-Calderón, W. y E.J. Villamizar-Roa. "A note on the Cauchy problem of fuzzy differential equations". En: *Rev. Acad. Colombiana Cienc. Exact. Fís. Natur.* 34.133 (2010), págs. 541-552 (vid. pág. 47).
- Hale, J.K. y S.M. Verduyn Lunel. *Introduction to functional differential equations*. Vol. 99. Springer Science & Business Media, 2013 (vid. págs. 15, 88).
- Harjani, J. y K. Sadarangani. "Generalized contractions in partially ordered metric spaces and applications to ordinary differential equations". En: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 72.3-4 (2010), págs. 1188-1197 (vid. págs. 74, 75, 78, 80, 83).

- Hoa, N.V. “Fuzzy fractional functional integral and differential equations”. En: *Fuzzy Sets and Systems* 280.C (2015), págs. 58-90 (vid. pág. 12).
- Hoa, N.V., V. Lupulescu y D. O’Regan. “A note on initial value problems for fractional fuzzy differential equations”. En: *Fuzzy Sets and Systems* 347 (2018), págs. 54-69 (vid. págs. 12, 14, 64, 69).
- Hoa, N.V., H. Vu y T.M. Duc. “Fuzzy fractional differential equations under Caputo–Katugampola fractional derivative approach”. En: *Fuzzy Sets and Systems* 375 (2019), págs. 70-99 (vid. págs. 12, 15, 16, 19, 49, 53, 55, 57, 58, 61-63, 69, 72).
- Kaleva, O. “Fuzzy differential equations”. En: *Fuzzy Sets and Systems* 24.3 (1987), págs. 301-317 (vid. pág. 47).
- Katugampola, U.N. “A new approach to generalized fractional derivatives”. En: *Bull. Math. Anal. Appl.* 6.4 (2014), págs. 1-15 (vid. págs. 15, 19, 32, 33, 35).
- “Existence and uniqueness results for a class of generalized fractional differential equations”. En: *arXiv preprint arXiv:1411.5229* (2014) (vid. pág. 19).
- “New approach to a generalized fractional integral”. En: *Applied Mathematics and Computation* 218.3 (2011), págs. 860-865 (vid. págs. 14, 19, 24-26).
- Kilbas, A.A., H.M. Srivastava y J.J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier, 2006 (vid. págs. 11, 19, 23, 26, 29, 30, 64).
- Lupulescu, V. “On a class of fuzzy functional differential equations”. En: *Fuzzy Sets and Systems* 160.11 (2009), págs. 1547-1562 (vid. pág. 12).

- Lupulescu, V. y U. Abbas. "Fuzzy delay differential equations". En: *Fuzzy Optim. Decis. Mak.* 11.1 (2012), págs. 99-111 (vid. págs. 15, 88).
- Magin, R.L. "Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues". En: *Computers & Mathematics with Applications* 59.5 (2010), págs. 1586-1593. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.039> (vid. pág. 11).
- Mazandarani, M. y A.V. Kamyad. "Modified fractional Euler method for solving fuzzy fractional initial value problem". En: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 18.1 (2013), págs. 12-21 (vid. pág. 13).
- Negoita, C.V. y D.A. Ralescu. *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*. John Wiley, 1975 (vid. pág. 47).
- Nieto, J.J. y R. Rodríguez-López. "Applications of contractive-like mapping principles to fuzzy equations". En: *Rev. Mat. Complut.* 19.2 (2006), págs. 361-383 (vid. págs. 41, 42, 46, 74).
- Oldham, K.B. y J. Spanier. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Elsevier, 1974 (vid. pág. 18).
- Podlubny, I. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 1998 (vid. págs. 11, 19, 26).
- Prakash, P. y col. "Fuzzy fractional initial value problem". En: *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* 28.6 (2015), págs. 2691-2704 (vid. pág. 14).
- Puri, M.L. y D.A. Ralescu. "Differential and fuzzy functions". En: *J. Math. Anal. Appl.* 91.2 (1983), págs. 552-558 (vid. pág. 47).

- Puri, M.L. y D.A. Ralescu. "Fuzzy random variables". En: *J. Math. Anal. Appl.* 114.2 (1986), págs. 409-422 (vid. págs. 39, 47).
- Rhoades, B.E. "Some theorems on weakly contractive maps". En: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 47.4 (2001), págs. 2683-2693 (vid. pág. 74).
- Samko, S.G., A.A. Kilbas, O.I. Marichev y col. *Fractional integrals and derivatives*. Vol. 1. Gordon y Breach Science Publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland, 1993 (vid. págs. 11, 19, 26, 29, 64).
- Scalas, E., R. Gorenflo y F. Mainardi. "Fractional calculus and continuous-time finance". En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 284.1 (2000), págs. 376-384. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(00\)00255-7](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00255-7) (vid. pág. 11).
- Stefanini, L. *A generalization of Hukuhara difference for interval and fuzzy arithmetic*. in: D. Dubois, M.A. Lubiano, H. Prade, M.A. Gil, P. Grzegorzewski, O. Hryniewicz (Eds.), *Soft Methods for Handling Variability and Imprecision*. An extended version is available online: <http://econpapers.repec.org/RAS/pst233.htm>: in: *Series on Advances in Soft Computing*, vol. 48, Springer 2008 (vid. págs. 19, 43, 44).
- Stefanini, L. y B. Bebe. "Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations". En: *Nonlinear Analysis* 71 (2009), págs. 1311-1328 (vid. pág. 47).
- Stefanini, L., L. Sorini y M.L. Guerra. "Parametric representation of fuzzy numbers and application to fuzzy calculus". En: *Fuzzy Sets and Systems* 157.18 (2006), págs. 2423-2455 (vid. pág. 47).

Villamizar-Roa, E. J. y G. Arenas-Díaz. *Introducción a las ecuaciones diferenciales difusas*. Ediciones UIS, Bucaramanga, 2018 (vid. pág. 39).

Villamizar-Roa, E.J., V. Angulo-Castillo e Y. Chalco-Cano. “Existence of solutions to fuzzy differential equations with generalized Hukuhara derivative via contractive-like mapping principles”. En: *Fuzzy Sets and Systems* 265 (2015), págs. 24-38 (vid. pág. 17).

Zadeh, L.A. “Fuzzy sets”. En: *Information and Control* 8.3 (1965), págs. 338-353 (vid. pág. 38).