

**ANÁLISIS DE OPTIMALIDAD PARA UN CONTROL CONMUTADO APLICADO
EN UN CONVERTIDOR DE POTENCIA**



**DIEGO ALFONSO ESTEBAN MÉNDEZ
JAFFRAITH SÁNCHEZ CARVAJALINO**



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA
2015**

**ANÁLISIS DE OPTIMALIDAD PARA UN CONTROL CONMUTADO APLICADO
EN UN CONVERTIDOR DE POTENCIA**

**DIEGO ALFONSO ESTEBAN MÉNDEZ
JAFFRAITH SÁNCHEZ CARVAJALINO**

**Trabajo de grado para optar al título de
Ingeniero Electrónico**

**Director
RICARDO ALZATE CASTAÑO, PhD**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA**

2015

DEDICATORIA

A Dios, por el cumplimiento de sus promesas, por ser mi guía y por abrirme puertas que nadie puede cerrar.

A mi padre Alfonso Esteban, por creer en mí y apoyarme en cada proyecto que emprendo, por su reconocimiento ante mis aciertos y sus consejos ante mis desaciertos.

A mi madre Consuelo Méndez Gil, por su amor incondicional y todo lo que hace para mi bienestar.

A mi hermana Keren Daniela Esteban Méndez, por su apoyo y admiración.

A familiares y amigos que siempre mostraron su interés y buenos deseos por la culminación de mis estudios de pregrado.

Y en memoria de mi hermano Juan David Esteban Méndez, quien en lo poco que vivió siempre sintió admiración por mí.

Diego Alfonso Esteban Méndez

DEDICATORIA

A Dios quien es el autor y consumidor de la vida, por darme la licencia de construir este proyecto de vida y porque sé que bajo su voluntad las bendiciones del cielo se derramaran sobre un corazón contrito y humillado.

A mis Padres Alcides Sánchez B. y Blanca Carvajalino N. por su amor y por darme su apoyo incondicional al guiarme con sus consejos hacia un mejor futuro, a mi hermana Katherine Sánchez C. por su creer en mí y ser soporte de mis padres.

A mi amada Diana M. Carvajal por darme los motivos suficientes para seguir luchando en la construcción de mis sueños, por darme la fuerza y el apoyo que sólo ella puede darme con su amor inefable.

A mi familia por su admiración y cariño.

A mis hermanos en la fe por sus oraciones.

Jaffraith Sánchez Carvajalino

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Ricardo Alzate por su guía y orientación en el desarrollo de nuestro proyecto. Al grupo de tesistas bajo su dirección, en especial a Carlos Vega por su asesoría.

Contenido

	Pág.
INTRODUCCIÓN.....	16
1. PLANTEAMIENTO Y DEFINICIÓN DEL PROBLEMA	19
1.1 OBJETIVOS:	20
1.1.1 Objetivo general	20
1.1.2 Objetivos específicos	20
2. OPTIMALIDAD Y CONTROL ÓPTIMO.....	21
2.1. OPTIMALIDAD	21
2.2. CONTROL ÓPTIMO	28
2.2.1. Control conmutado de mínimo tiempo (bang-bang).....	29
2.2.2. Revisión general de técnicas de control óptimo.....	34
2.3. CUANTIFICACIÓN DE LA OPTIMALIDAD	34
2.3.1. Medición directa del índice de desempeño.....	35
2.3.2. Cuantificación mediante verificación de optimalidad de primer orden	36
2.3.3. Revisión general de metodologías de cuantificación de optimalidad..	37
3. CONTROL DE UN CONVERTIDOR DE POTENCIA REDUCTOR	39
3.1. CIRCUITO CONVERTIDOR DE POTENCIA	39
3.1.1. Comportamiento del sistema en lazo abierto.....	42
3.2. AJUSTE DEL LAZO DE CONTROL.....	44
3.2.1. Efectos de la ganancia proporcional en el sistema	46

4. CONTROL ÓPTIMO CONMUTADO EN UN CONVERTIDOR BUCK.....	51
4.1. PARÁMETROS Y DISEÑO DEL CONTROL ÓPTIMO.....	51
4.2. ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO.....	54
4.3. ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO ENERGÉTICO	55
5. CONCLUSIONES	59
5.1. RECOMENDACIONES.....	60
5.2. TRABAJO FUTURO	61
REFERENCIAS	62
BIBLIOGRAFIA.....	66

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Ilustración para el concepto de minimización de un funcional	26
Figura 2. Trayectoria solución en el espacio de estados para control bang-bang .	32
Figura 3. Vector de estados en el tiempo para control bang-bang	33
Figura 4. Señal de control óptimo para control bang-bang.....	33
Figura 5. Evaluación numérica para índice de desempeño.....	36
Figura 6. Aproximación numérica para optimalidad de primer orden	37
Figura 7. Circuito convertidor de potencia <i>Buck</i>	39
Figura 8. Tensión de salida en lazo abierto sin perturbación	43
Figura 9. Corriente de inductor en lazo abierto sin perturbación	43
Figura 10. Tensión de salida en lazo abierto con perturbación en la entrada.....	44
Figura 11. Corriente de inductor en lazo abierto con perturbación en la entrada ..	44
Figura 12. Sistema de control en lazo cerrado con ajuste de rango.....	45
Figura 13. Tensión de salida en lazo cerrado con perturbación en la entrada	46
Figura 14. Tensión de salida en lazo cerrado perturbado con $K = 30$	47
Figura 15. Tensión de salida en lazo cerrado perturbado con $K = 180$	48
Figura 16. Ciclo útil D para control proporcional con $K = 180$	49
Figura 17. Tensión de salida en lazo cerrado perturbado con $K = 290$	49
Figura 18. Ciclo útil D para control proporcional con $K = 290$	50
Figura 19. Salida perturbada en lazo cerrado para control óptimo conmutado.....	54
Figura 20. Ciclo útil D para control óptimo conmutado.....	55
Figura 21. Cálculo comparativo para índice de desempeño.....	57
Figura 22. Cálculo comparativo para optimalidad de primer orden	57
Figura 23. Detalle para cálculo de optimalidad de primer orden	58
Figura A.1. Diagrama de flujo de datos para función <i>fmincon</i> de MATLAB®	74
Figura B.1. Circuito $u(t) = "1" \ \& \ D = "0"$	76
Figura B.2. Circuito $u(t) = "0" \ \& \ D = "1"$	77
Figura B.3. Circuito $u(t) = "0" \ \& \ D = "0"$	78

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Valores de diseño para circuito convertidor de potencia	41

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
ANEXO A. Solución numérica del problema de optimización.....	71
ANEXO B. Derivación del modelo del circuito en variables de estado	76

RESUMEN

Título: ANÁLISIS DE OPTIMALIDAD PARA UN CONTROL CONMUTADO APLICADO EN UN CONVERTIDOR DE POTENCIA¹

Autores: DIEGO ALFONSO ESTEBAN MÉNDEZ
JAFFRAITH SÁNCHEZ CARVAJALINO²

Palabras Clave:

Control encendido-apagado, control óptimo conmutado, convertidor de potencia Buck, principio del máximo de Pontryagin.

Descripción:

El presente proyecto de grado aborda el control de circuitos convertidores de potencia empleando control óptimo conmutado. Se realiza el diseño y la simulación para un convertidor DC-DC tipo reductor (Buck) y posteriormente se ajusta para el mismo un lazo realimentado en el cual se verifica el efecto de una acción de tipo proporcional de alta ganancia (encendido-apagado) a manera de punto de referencia convencional, para atenuar la incidencia de perturbaciones aplicadas en el sistema. Posteriormente y empleando un enfoque basado en el principio del máximo de Pontryagin, se diseña e implementa a través de simulación, una técnica de control óptimo conmutado que permite obtener un desempeño comparable con la acción encendido-apagado en términos de características dinámicas. Pruebas adicionales se desarrollaron para cuantificar la optimalidad de la técnica propuesta y verificar el desempeño del sistema controlado en términos energéticos, mostrando que un control óptimo conmutado presenta además de la minimización del funcional de costo (mínima energía del error), una menor incidencia en la generación de ruidos debidos a conmutaciones de alta frecuencia, en comparación con la técnica convencional. Trabajo adicional incluye la verificación experimental en laboratorio para los resultados de simulación presentados.

¹ Trabajo de grado

² Facultad de Ingenierías Físico-mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones. Director: Ricardo Alzate Castaño, PhD.

ABSTRACT

Title: OPTIMALITY ANALYSIS FOR A SWITCHING CONTROLLER APPLIED ON A POWER CONVERTER³

Authors: DIEGO ALFONSO ESTEBAN MÉNDEZ
JAFFRAITH SÁNCHEZ CARVAJALINO⁴

Key words:

Buck power conversion circuit, On-Off control, Pontryagin's maximum principle, switching-optimal control.

Description:

In this work, switching-based control is applied on regulation of power conversion circuits. In particular, a DC-DC Buck-type power converter has been designed and simulated, both for nominal conditions and under disturbances. First of all, a classical ON-OFF controller was employed to compensate the effects of disturbances in the loop, in order to check the correctness of the operational ranges of conditions for the controlled system. Then, by taking into account the Pontryagin's Maximum principle, an optimal-switching control was designed and implemented on the system, showing good performance for disturbance rejection, improvement of dynamical features in the response and reduction in error's energy by mean of verification of optimality criteria. Results show that despite the fact both techniques analyzed; i.e. ON-OFF and optimal-switching, are switching-based laws, the performance index on the optimal controller allows to obtain a cleaner shape with less energy consumption. Ongoing work includes the experimental verification of the optimal technique in laboratory

³ Degree work.

⁴ Physico-mechanical Engineering Faculty. School of Electrical Engineering. Supervisor: Ricardo Alzate Castaño, PhD.

INTRODUCCIÓN

Históricamente, parte de la teoría del control óptimo asociada a ecuaciones diferenciales ordinarias se ha desarrollado gracias a los aportes de grandes matemáticos como Pontryagin, Lyapunov, entre muchos otros. D. W. Bushaw se limita al sistema bang-bang y los sistemas especiales estudiados en su tesis doctoral de 1952, los cuales se modelan por medio de ecuaciones diferenciales con un término forzante discontinuo, demostrando la existencia del control óptimo-temporal de estos sistemas [1]. En 1953 J. P. La Salle demostró que el mejor sistema bang-bang es el óptimo de todos los sistemas sujetos a la misma limitación de saturación, donde se permite que el sistema funcione por debajo de la saturación si es necesario [idem]. En 1956 R. Bellman, I. Glicksberg, and O. Gross aportaron un tratamiento general para el problema óptimo [idem, pág. 8]. Cada uno de ellos estaba preocupado por llegar al punto de equilibrio en el mínimo tiempo, desde cualquier estado inicial dado, siempre que el sistema no experimentara ninguna perturbación externa durante la transición [idem].

La teoría del control óptimo tiene uno de los más importantes desarrollos con el problema del control lineal cuadrático, el cual tiene su origen en la famosa obra de N. Wiener acerca del filtrado de media cuadrática para el control de armas de fuego durante la segunda guerra mundial (1940-45) [2]. Wiener resolvió el problema de diseño de filtros que reducen al mínimo el criterio del error medio cuadrático (medida de rendimiento) de la forma:

$$J = E\{e^2(t)\},$$

donde $e(t)$ es el error y $E\{x\}$ representa el valor esperado de la variable aleatoria x . Para un caso determinista, el criterio de error anterior se generaliza a un término cuadrático integral como:

$$J = \int_0^{\infty} e^T(t)Qe(t)dt,$$

$e^T(t)$ corresponde con la función traspuesta del error y Q es una matriz definida positiva. Bellman en 1957 introdujo la técnica de programación dinámica para resolver los problemas de control óptimo en tiempo discreto. Sin embargo, la contribución más importante a los sistemas de control óptimo se hizo en el año 1956 por Pontryagin (USSR) y sus colaboradores, en el desarrollo de su famoso principio del máximo que se describe en detalle en su libro [3]. En el año 1960, en Estados Unidos, Kalman contribuyó con el regulador cuadrático lineal (LQR) y el Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG) [4], métodos para diseñar controles de realimentación óptimas. Luego, presenta el filtrado óptimo y la teoría de la estimación que conduce a su famoso filtro de Kalman discreto [5] y el filtro de Kalman continuo, o tipo Bucy [6]. Kalman tuvo un profundo efecto sobre la teoría de control óptimo y el filtro de Kalman es una de las técnicas más utilizadas en aplicaciones de la teoría de control a problemas del mundo real en una variedad de campos. Riccati publicó sus resultados en 1724 acerca de la solución de algunos tipos de ecuaciones diferenciales no lineales: la ecuación de la matriz de Riccati, que aparece en todas las técnicas de filtrado de Kalman y muchos otros campos [7]. Así, el control óptimo, tiene sus raíces en el cálculo de variaciones desarrollado durante los siglos XVI y XVII [8]. En el llamado control lineal cuadrático, el término “lineal” se refiere a que las ecuaciones matemáticas que describen la dinámica del sistema deben ser lineales y el término “cuadrático” se refiere al índice de rendimiento (performance index) que implica el cuadrado del error o error cuadrático y/o control. Originalmente este problema fue llamado el problema del control de media cuadrática y el término “lineal cuadrático” no aparecería en la literatura sino hasta finales de los años 1950.

En la actualidad, en convertidores de potencia AC/DC de vehículos eléctricos se aplican técnicas de control óptimo no lineal basado en la función de control de Lyapunov, para corregir el factor de potencia de la entrada y reducir los armónicos de la corriente que se inyecta a la red [9, 10]. También se encuentran aplicaciones

con soluciones numéricas para control óptimo de sistemas conmutados con estado de conmutación independiente, por control de vectores de parametrización [11]. Otra aplicación importante es la evolución de técnicas híbridas para resolver problemas de control óptimo mediante curvas de Bézier [12]. En [13] se presenta una solución de control óptimo para reducir las pérdidas de energía al limitar las demandas de potencia máxima de una batería, utilizando convertidores electrónicos de potencia. Un aporte importante en cuanto al análisis de optimalidad se presenta en [14] para un problema de control óptimo distribuido enfocado a un sistema dinámico de multi-escala, en el que cada agente dinámico puede ser descrito por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias; esto para procesos macroscópicos industriales. Por su parte, [15] utiliza metodologías de sistemas híbridos para formular y resolver el problema de control óptimo para superar limitaciones de corriente en diseños.

1. PLANTEAMIENTO Y DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

La optimización es una característica deseable en términos de la utilización apropiada de recursos, o tiempo, para realizar cierta labor. En el caso de los convertidores de potencia es importante la transformación, utilización y control de la energía eléctrica. Por tanto, para asegurar un desempeño apropiado en la tarea de conversión energética, se requiere de una conmutación controlada que satisfaga las condiciones requeridas, sujeto a limitaciones físicas y no linealidades del sistema.

En el análisis de optimalidad estamos interesados en encontrar el control óptimo que manipule las condiciones dinámicas del sistema de manera que satisfaga las condiciones óptimas requeridas y maximice o minimice un criterio de desempeño determinado. Por consiguiente, se hace necesaria una descripción matemática del proceso a ser controlado, una especificación del índice de desempeño, una declaración de las condiciones de frontera y las limitaciones físicas de los estados. Por tanto, en la formulación de un controlador óptimo para un circuito convertidor de potencia, se plantean inquietudes de investigación como: ¿Qué criterio de desempeño (performance) se debe elegir para mejorar el comportamiento dinámico de un convertidor de potencia? ¿Cómo diseñar una estrategia de control óptimo para un convertidor de potencia? ¿Bajo qué criterio se califica si el control es óptimo o no?, ¿Cómo cuantificar la optimalidad de un sistema?

El presente proyecto de grado busca realizar aportes y obtener resultados direccionados a la resolución de estas inquietudes, constituyendo una base para posteriores desarrollos afines al interior del grupo de investigación CEMOS, que permitan abordar de manera profunda esta temática en el contexto del área estratégica de *Energías* de la Universidad Industrial de Santander.

1.1 OBJETIVOS:

1.1.1 Objetivo general

- Cuantificar la optimalidad de una estrategia de control conmutado utilizada para manipular el comportamiento dinámico de un circuito convertidor de potencia.

1.1.2 Objetivos específicos

- Realizar una revisión general de técnicas de control óptimo
- Realizar una revisión general de las metodologías empleadas para cuantificar la optimalidad de un sistema de control
- Diseñar una estrategia de control óptimo conmutado para un circuito convertidor de potencia
- Analizar el comportamiento del sistema controlado en términos de su optimalidad.

2. OPTIMALIDAD Y CONTROL ÓPTIMO

En este capítulo se presentan algunos elementos conceptuales básicos de la teoría del control óptimo, como herramienta de potencial importancia en aplicaciones de control para circuitos convertidores de potencia, según será verificado en capítulos posteriores.

2.1. OPTIMALIDAD

La optimalidad puede definirse como la propiedad o característica de ser óptimo. La pregunta es entonces: ¿Qué hace óptimo a algo? Para responder a este interrogante, es conveniente referir conceptos como las ecuaciones de Euler-Lagrange, las funciones de Lyapunov, y más propiamente los principios matemáticos del cálculo de variaciones.

En el cálculo de variaciones se define el funcional, que se puede entender como una función que depende de otra y a su vez de ciertas variables. El cálculo de variaciones busca hallar o determinar los puntos o valores que hacen de dicho funcional un extremo, o en otras palabras alcance el valor óptimo [2].

Matemáticamente, una variable cuantitativa J es un funcional dependiente de una función $x(t)$, escrita como $J = J(x(t))$, si para cada valor de la función x , corresponde un solo valor de J .

Asimismo, el incremento de un funcional, dado por:

$$\Delta J \triangleq J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t)), \quad (2.1)$$

donde $\delta x(t)$ es llamado la variación de la función $x(t)$. Tomando la expansión en series de Taylor para $J(x(t) + \delta x(t))$ alrededor de $x(t)$, truncada al término de segundo orden, es decir (ver [2]) de

$$J(x(t) + \delta x(t)) = J(x(t)) + \frac{\partial J(x(t))}{\partial x} \delta x(t) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 J(x(t))}{\partial x^2} (\delta x(t))^2 + \mathcal{O}(3),$$

considerando la aproximación

$$J(x(t) + \delta x(t)) \cong J(x(t)) + \frac{\partial J(x(t))}{\partial x} \delta x(t) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 J(x(t))}{\partial x^2} (\delta x(t))^2,$$

y así se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta J &\cong J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t)) \\ &= \frac{\partial J(x(t))}{\partial x} \delta x(t) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 J(x(t))}{\partial x^2} (\delta x(t))^2 - J(x(t)) \\ &= \frac{\partial J(x(t))}{\partial x} \delta x(t) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 J(x(t))}{\partial x^2} (\delta x(t))^2. \end{aligned}$$

Los términos:

$$\delta J := \frac{\partial J(x(t))}{\partial x} \delta x(t); \quad \delta^2 J := \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 J(x(t))}{\partial x^2} (\delta x(t))^2, \quad (2.2)$$

suelen denominarse respectivamente, la primera y segunda variaciones del funcional J . Dichas variaciones cumplen un papel importante al momento de determinar el valor óptimo de un funcional, de manera similar a como el diferencial lo hace para encontrar los valores extremos de una función. Por lo tanto, si se cumple la condición:

$$\Delta J = J(x) - J(x^*) \geq 0, \quad (2.3)$$

entonces $J(x^*)$, para valores próximos a x^* , es un mínimo relativo; por otro lado

$$\Delta J = J(x) - J(x^*) \leq 0, \quad (2.4)$$

$J(x^*)$, para valores cercanos a x^* , es un máximo relativo. Así, para que $x^*(t)$ sea un candidato a óptimo, la primera variación de J será cero en $x^*(t)$, esto es, $\delta J(x^*(t)) = 0$ para todos los valores admisibles de $\delta x(t)$. Esto es una condición necesaria. De otro lado, una condición suficiente para un mínimo es que la segunda variación $\delta^2 J > 0$ y para un máximo $\delta^2 J < 0$ (teorema fundamental del cálculo variacional).

Si el funcional J se define en términos de una cierta función de $x(t)$ y su derivada $\dot{x}(t)$, en el intervalo $t \in [t_0, t_f]$, digamos

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \ell(x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad (2.5)$$

es posible expresar a partir de (2.1) el incremento del funcional mediante la ecuación siguiente:

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} [\ell(x(t) + \delta x(t), \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t)) - \ell(x(t), \dot{x}(t))] dt.$$

Expandiendo en series de Taylor J alrededor de $x(t)$ y truncando los términos no lineales se convierte en

$$J(x(t) + \delta x(t)) \cong \int_{t_0}^{t_f} [\ell(x(t), \dot{x}(t)) + \frac{\partial \ell(x(t), \dot{x}(t))}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial \ell(x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t)] dt,$$

Por lo tanto el incremento del funcional se transforma en:

$$\Delta J \cong \int_{t_0}^{t_f} \left[\ell(x(t), \dot{x}(t)) + \frac{\partial \ell(x(t), \dot{x}(t))}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial \ell(x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) \right] dt - \int_{t_0}^{t_f} \ell(x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

$$\Delta J \cong \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial \ell(x(t), \dot{x}(t))}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial \ell(x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) \right] dt = \delta J$$

siendo este δJ la primera variación del funcional J .

Para expresar la primera variación δJ en términos de $\delta x(t)$ completamente, se descompone el segundo término de la integral por medio de integración por partes, y así se obtiene que:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) dt &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}} \right) \frac{d}{dt} (\delta x(t)) dt, \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}} \right) d(\delta x(t)), \\ &= \left[\left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}} \right) \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \delta x(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}} \right) dt. \end{aligned}$$

Para el cálculo anterior se ha usado la fórmula de integración por partes $\int u dv = uv - \int v du$, donde $u = \frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}}$ y $v = \delta x(t)$

Reemplazando la expresión anterior en ΔJ , se obtiene que

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial \ell}{\partial x} \right) \delta x(t) dt + \left[\left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}} \right) \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \delta x(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}} \right) dt, \\ \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial \ell}{\partial x} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x(t) dt + \left[\left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}} \right) \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} \end{aligned}$$

dado que se deben satisfacer las condiciones de frontera para los estados, es necesario que $\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$ (ver [2]), es así como es posible mostrar la validez de la siguiente igualdad.

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial \ell}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) \right] dt = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial \ell}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x(t) dt,$$

y por tanto, a partir de la condición de optimalidad (necesaria para la variación de primer orden δJ) dada por el teorema fundamental del cálculo variacional, se debe cumplir que:

$$\delta J = 0 = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial \ell}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x(t) dt$$

De esta manera, tomando en cuenta que $\delta x(t)$ es necesariamente no nulo, lo anterior equivale a satisfacer la siguiente expresión:

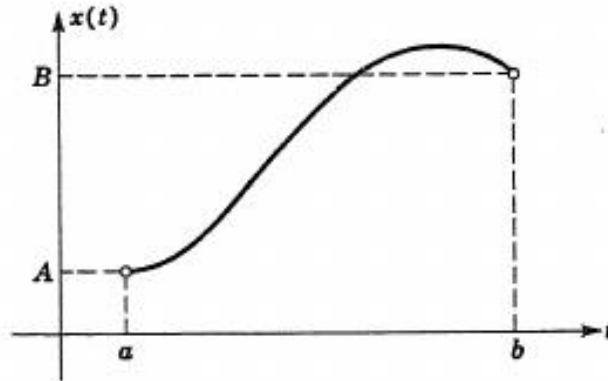
$$\frac{\partial \ell}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad (2.6)$$

conocida como ecuación de Euler-Lagrange, siendo $\ell(x(t), \dot{x}(t))$ la función Lagrangiana del sistema.

En estos términos, un problema de optimización se traduce en encontrar la función $x(t)$ que resuelve (2.6) para un $\ell(x(t), \dot{x}(t))$ particularmente dado y a partir del cual se define el funcional J en (2.5).

Para ilustrar los conceptos de funcional y optimalidad, se presenta el problema de encontrar la trayectoria mínima para una función $x(t)$ desde una posición inicial $t = a$ hasta una posición final $t = b$, según se ilustra en la Figura 1.

Figura 1. Ilustración para el concepto de minimización de un funcional



Fuente: [16]

Dicho problema se formula a través de la minimización de la longitud de arco ds , definida en el plano cartesiano mediante la distancia euclídea, es decir,

$$(ds)^2 = (dt)^2 + (dx)^2, \quad (2.7)$$

siendo dt y dx variaciones infinitesimales en el eje de la abscisa y la ordenada, respectivamente, a partir de las cuales se obtiene:

$$ds = \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2} dt. \quad (2.8)$$

Por tanto, puede definirse el funcional de costo a minimizar mediante la expresión:

$$J(x) = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2} dt = \int_a^b \ell(x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad (2.9)$$

y a partir de ello plantear la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial x} \ell(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \ell(x(t), \dot{x}(t)) \right) = 0,$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial x} \ell(x(t), \dot{x}(t)) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \ell(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1+\dot{x}(t)^2}}; \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \ell(x(t), \dot{x}(t)) \right) = \frac{\dot{x}(t)}{(1+\dot{x}(t)^2)^{\frac{3}{2}}};$$

es decir

$$\frac{\ddot{x}(t)}{(1+\dot{x}(t)^2)^{\frac{3}{2}}} = 0. \quad (2.10)$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden muestra fácilmente una solución de la forma:

$$x(t) = tk_1 + k_2,$$

donde las constantes k_1 y k_2 se determinan a partir de las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} x(a) &= ak_1 + k_2 = A, \\ x(b) &= bk_1 + k_2 = B. \end{aligned} \quad (2.11)$$

La solución del sistema lineal de ecuaciones (2.11) es dada por:

$$k_1 = \frac{A-B}{a-b}; \quad k_2 = \frac{Ba-Ab}{a-b}.$$

Por consiguiente, la trayectoria que soluciona el problema está dada por

$$x(t) = \frac{(A-B)t + (Ba-Ab)}{(a-b)},$$

de la cual se deduce que la función que minimiza la distancia entre dos puntos A y B, como era de esperarse, es una línea recta.

2.2. CONTROL ÓPTIMO

El problema de control óptimo puede resumirse en minimizar un funcional J que depende de un cierto conjunto de funciones $u(t)$ correspondientes con el esfuerzo de una acción de control, sujeto a unas ecuaciones de estado. En otras palabras, siendo un sistema dinámico descrito por la ecuación de estados

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u, t), \quad (2.12)$$

donde \mathbf{x} representa los estados del sistema y u es el vector de entradas o forzantes, es posible plantear un problema de optimización consistente en minimizar o maximizar el siguiente funcional de costo o índice de desempeño:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \ell(\mathbf{x}, u, \lambda, t) dt, \quad (2.13)$$

donde

$$\ell = V(\mathbf{x}, u, t) + \lambda^T g(\mathbf{x}, u, t), \quad (2.14)$$

se denomina el lagrangiano del sistema [2], definido a su vez en términos de una función de Lyapunov V (es decir, definida positiva con derivada parcial continua y con derivada alrededor de la trayectoria de estados semidefinida negativa [17], la cual corresponde a una función de energía que garantiza estabilidad asintótica del sistema), unos términos de compensación variantes en el tiempo denominados λ y la función $g(\mathbf{x}, u, t) = \dot{\mathbf{x}} - f(\mathbf{x}, u, t) = 0$ asociada al sistema.

Para garantizar la optimalidad de (2.13), es decir, para garantizar la existencia de una solución para el problema de control óptimo, se deben satisfacer las condiciones del denominado *principio del máximo de Pontryagin*, enunciado en el modo siguiente [18]:

Teorema (Principio del Máximo de Pontryagin)

Suponga que $u(t) \in U$ y $x(t)$ representan respectivamente el control óptimo y la trayectoria de estado para un problema de control óptimo. Entonces, existe una trayectoria adjunta $\lambda(t)$ tal que, junto con $u(t)$, $x(t)$ y $\lambda(t)$ satisfacen

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad (\text{Ecuación del sistema})$$

$$x(0) = x_0, \quad (\text{Condiciones iniciales})$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \quad (\text{Ecuación adjunta})$$

para todo $0 \leq t \leq T$, y todo $v \in U$, tal que

$$\mathcal{H}(\lambda(t), x(t), v, t) \leq \mathcal{H}(\lambda(t), x(t), u(t), t), \quad (\text{Condición de maximización})$$

donde \mathcal{H} es el Hamiltoniano dado por:

$$\mathcal{H}(x, u, \lambda) = \ell(x, u) + \lambda^T f(x, u).$$

2.2.1. Control conmutado de mínimo tiempo (bang-bang). Como caso de aplicación para el principio del máximo de Pontryagin, se presenta el problema de control del tiempo mínimo, en el cual se desea desplazar una partícula sobre una superficie sin fricción, desde un estado inicial a un estado final y en el menor tiempo posible.

Esta situación física se modela empleando la segunda ley de Newton para un movimiento traslacional, es decir:

$$\ddot{x} = u,$$

donde x representa la distancia recorrida por la partícula (de masa unitaria), mientras que u es la señal o esfuerzo de control, equivalente también a la aceleración de la partícula. Ahora bien, definiendo el siguiente vector de estados para el sistema:

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix},$$

su dinámica puede escribirse en la forma (2.12) a partir de la siguiente expresión:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Por tanto, se procede a plantear el problema de control óptimo para el caso considerado definiendo el funcional de costo para minimización del tiempo, es decir

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt = t_f - t_0. \quad (2.15)$$

Adicionalmente, se considerará una señal de control limitada en el intervalo:

$$-1 \leq u \leq 1,$$

y condiciones finales deseadas (0,0) para el vector de estados, partiendo de condiciones iniciales arbitrarias. De esta manera, es evidente la forma que toma el lagrangiano del sistema:

$$\ell(\mathbf{x}, u) = 1,$$

a partir del cual es posible formular el Hamiltoniano correspondiente:

$$\mathcal{H} = 1 + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t). \quad (2.16)$$

Para seleccionar el $u(t)$ óptimo (esto es, la señal de control que maximiza \mathcal{H}), conviene resolver explícitamente $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$ planteando la ecuación adjunta del principio del máximo:

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = 0; \quad \dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = -\lambda_1(t),$$

que a su vez se resuelve como (ver [2]):

$$\lambda_1(t) = \lambda_1(0); \quad \lambda_2(t) = \lambda_2(0) - \lambda_1(0)t.$$

De esta última expresión, se observa que la contribución de λ_2 es la única que representa variación temporal para (2.16), dado el carácter constante de λ_1 . Asimismo, es posible adecuar la influencia de $x_2(t)$ tras una apropiada selección $\lambda_1(t) = \lambda_1(0) \neq 0$. Por tanto, la señal $u(t)$ óptima deberá compensar la contribución de λ_2 para asegurar que el valor de \mathcal{H} sea máximo. En palabras simples, si λ_2 es negativo el control será el valor de control admisible más pequeño (-1) y de manera recíproca, si λ_2 es positivo el control será el valor de control admisible mayor (+1), es decir

$$u(t) = \text{sgn}(\lambda_2(t)).$$

Analíticamente, esta formulación puede ser empleada para resolver el valor de tiempo mínimo t_f^* (ver [2] y [19]):

$$t_f^* = \begin{cases} x_2(0) + \sqrt{4x_1(0) + 2x_2^2(0)} & \text{si } x_1(0) > -\frac{1}{2}x_2(0)|x_2(0)| \\ -x_2(0) + \sqrt{-4x_1(0) + 2x_2^2(0)} & \text{si } x_1(0) < -\frac{1}{2}x_2(0)|x_2(0)|, \\ |x_2(0)| & \text{si } x_1(0) = -\frac{1}{2}x_2(0)|x_2(0)| \end{cases} \quad (2.17)$$

siendo $x_1(0)$ y $x_2(0)$ los valores iniciales de la trayectoria de estado.

Como ilustración, considere la trayectoria solución en el espacio de estados mostrada en la Figura 2 para $x_1(0) = -1$ y $x_2(0) = -1$. Según las predicciones teóricas el valor de tiempo mínimo es $t_f^* = 3.45$ s, resultado que se verifica a partir de las señales en el tiempo para el vector de estados (Figura 3) y la señal de control (Figura 4).

Estas simulaciones para el controlador bang-bang se realizaron en MATLAB®, empleando la función *fmincon* como parte del paquete de herramientas para optimización (*Optimization Toolbox*), de la manera descrita en el Anexo A.

Obsérvese también, que a través de esta acción de control la trayectoria del sistema converge hacia el valor final deseado en el punto (0,0). Donde *ns* corresponde al número de subintervalos de optimización.

Figura 2. Trayectoria solución en el espacio de estados para control bang-bang

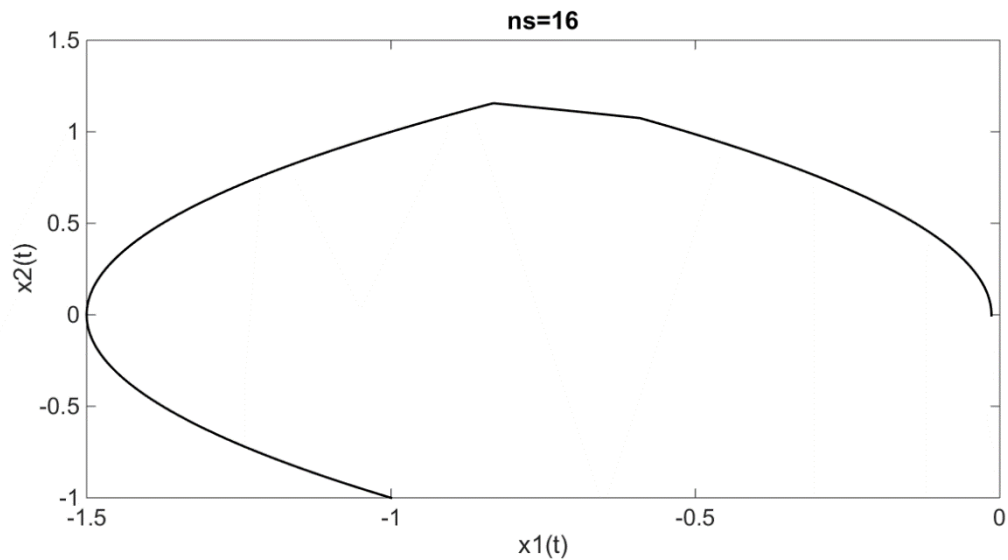


Figura 3. Vector de estados en el tiempo para control bang-bang

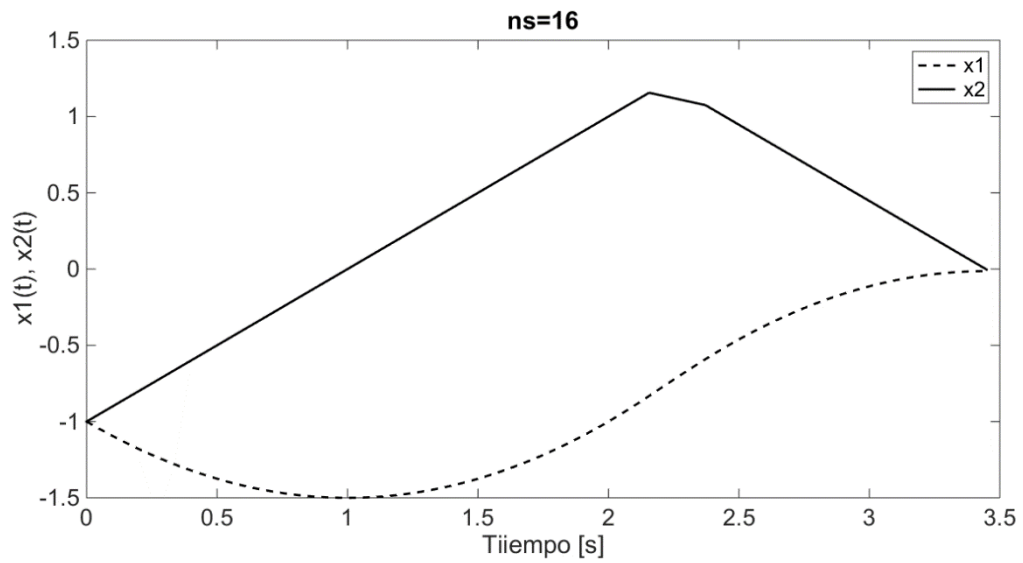
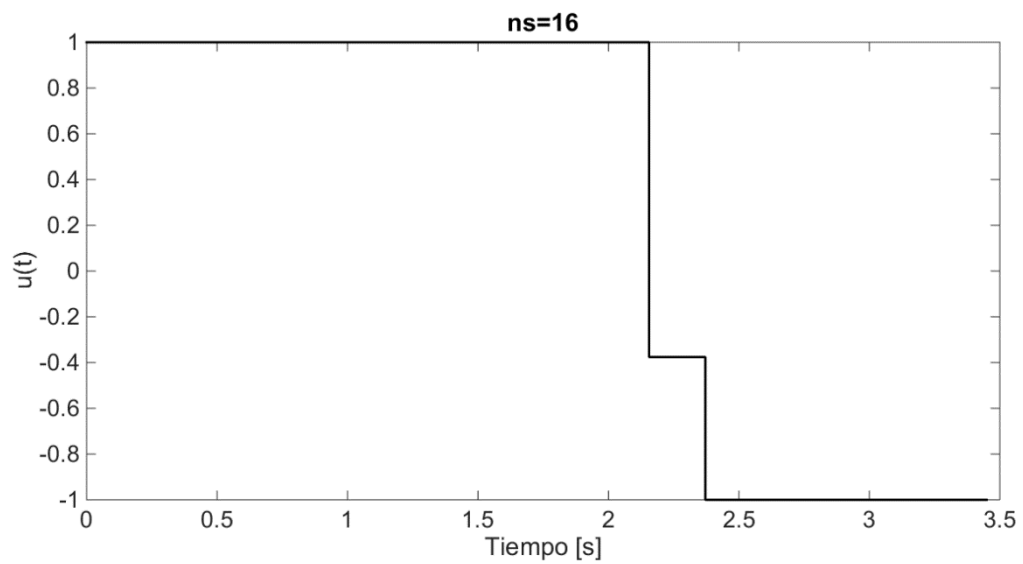


Figura 4. Señal de control óptimo para control bang-bang



2.2.2. Revisión general de técnicas de control óptimo. Además de las técnicas del cálculo de variaciones y el principio del máximo tratadas anteriormente, la programación dinámica forma parte del conjunto de técnicas principales para resolver el problema de control óptimo [2, 19, 23]. La programación dinámica se basa en la aplicación del principio de optimalidad de Bellman [19, 24] a sistemas de tiempo discreto. Adicionalmente, se han desarrollado otras metodologías enfocadas a resolver problemas específicos como:

- El regulador lineal cuadrático o LQR para problemas de regulación y seguimiento de una referencia, en el cual se busca minimizar un funcional de costo cuadrático dependiente del error o la energía para un sistema lineal [2, 19, 26], a partir de la solución de la ecuación algebraica de Riccati y la ganancia de Kalman [2, 25].
- La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman [25], la cual se basa en la minimización de la ecuación Hamiltoniana (2.16) y la aplicación del principio de optimalidad de Bellman de programación dinámica [26].
- Problemas de control óptimo con restricciones, como el bang-bang de mínimo tiempo [27] detallado en (2.2.1) y aplicado por ejemplo a problemas de optimización de combustible para aeronaves [28].

2.3. CUANTIFICACIÓN DE LA OPTIMALIDAD

La definición de optimalidad o de control óptimo, abordada en secciones precedentes, corresponde con concepciones teóricas cuya validez práctica requiere de ciertas medidas que permitan determinar cuantitativamente, que tan óptima es una solución con respecto al valor teórico idealmente propuesto. A continuación, se presentarán dos alternativas para cuantificar la optimalidad en un problema de control óptimo.

2.3.1. Medición directa del índice de desempeño. Una primera forma de asignar un valor a la optimalidad, es a partir de la verificación del valor correspondiente para la función objetivo dada por J en (2.5), a partir de la cual se plantea el problema de minimización.

Algunos problemas específicos (como por ejemplo el caso ilustrado en el ejemplo anterior para el movimiento de la masa sin fricción), permiten determinar analíticamente este valor óptimo para el funcional a partir de consideraciones matemáticas. Sin embargo, en general esta respuesta suele obtenerse a través de soluciones computacionales para aproximar mínimos locales alrededor de una región de interés.

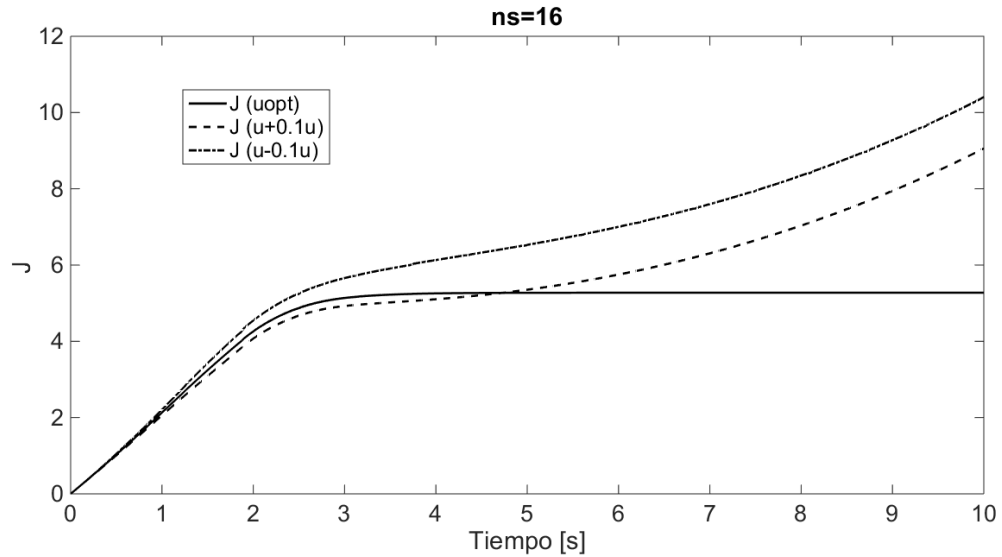
En el caso particular de un problema de control óptimo, suele evaluarse la expresión matemática que define el funcional de costo (o función objetivo) para cada instante del tiempo, mostrando que en el estado estacionario (i.e. cuando la dinámica del sistema se hace cero) el valor acumulado para dicho funcional es mínimo, comparado con cualquier valor obtenido a través de un esfuerzo de control diferente al definido como $u(t)$ óptimo.

En la Figura 5, se ilustra el cálculo para una expresión equivalente a (2.15), dada por:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T \mathbf{x} dt, \quad (2.18)$$

donde se considera una relación directa entre la energía del error (siendo el valor deseado cero, entonces este error corresponde con el vector de estado \mathbf{x} , sujeto a la señal de control u , y su energía con la integral de su valor al cuadrado) y el tiempo que se requiere para llevar el estado al origen. Por tanto, bajo esta suposición minimizar (2.15) equivale numéricamente con la minimización de (2.18).

Figura 5. Evaluación numérica para índice de desempeño



En esta misma Figura, se observa como para perturbaciones por encima y por debajo de la señal óptima (esto es, $u(t) \pm \delta u(t)$) el valor acumulado para el funcional no satisface los requerimientos de ser un mínimo.

2.3.2. Cuantificación mediante verificación de optimalidad de primer orden.

La optimalidad de primer orden, es una condición empleada en métodos numéricos especializados para determinar puntos candidatos a óptimos en el cálculo de variaciones basadas en el principio del máximo. Algunos de ellos se basan en aproximaciones refinadas como el método KKT (Karush, Kuhn y Tucker), según se explica en [20, 21].

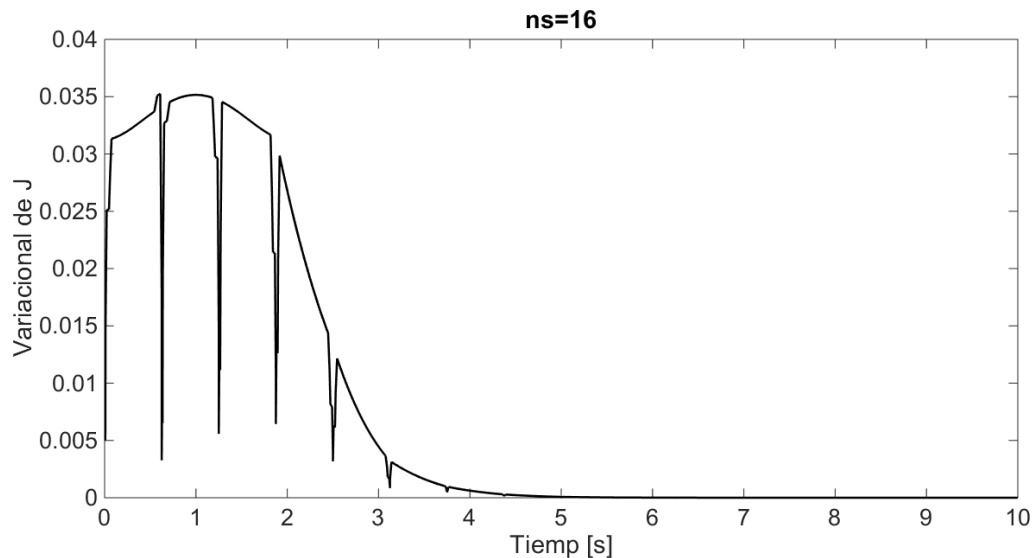
Una manera simple de definir esta optimalidad de primer orden, es mediante la verificación de que el primer variacional para un funcional de costo, evaluado en el punto o trayectoria óptima, deba ser (idealmente) cero [20]. Por tanto, es posible emplear esta condición como una medida de optimalidad teniendo en cuenta que según esto, la trayectoria solución del problema de control que más se aproxima a

las condiciones óptimas será aquella en la cual la medida de optimalidad de primer orden sea más cercana a cero.

En la Figura 6, se observa una gráfica que aproxima el primer variacional para el funcional de costo dado en (2.18), para el movimiento de una masa sin fricción.

Como comentario final, se aprecia la relación existente entre la solución óptima analítica (2.17) para el problema de minimización del tiempo en el movimiento de la masa sin fricción y el tiempo de establecimiento verificado en las aproximaciones cuantitativas de la optimalidad visualizadas en las Figuras 5 y 6. En el capítulo 4 se realizarán mediciones similares para verificar la optimalidad de una estrategia de control para regulación de tensión en un circuito convertidor de potencia DC-DC.

Figura 6. Aproximación numérica para optimalidad de primer orden



2.3.3. Revisión general de metodologías de cuantificación de optimalidad.

Adicional a las dos metodologías presentadas para cuantificar la optimalidad de un sistema de control, esta medida se puede aproximar alternativamente a través de

algoritmos numéricos de optimización no lineal, como puede ser la norma infinita de las condiciones de KKT [20, 21] y las condiciones de optimalidad de segundo orden para decidir si el óptimo encontrado es mínimo o máximo [20]. También se definen medidas de optimalidad de factibilidad, complementariedad y estacionariedad [29] sobre el desempeño del solucionador óptimo. Otra medida es la integral de sensibilidad de Bode [30] en la cual se busca obtener información cuantitativa para compensar desempeño y optimalidad en el diseño de un sistema de control.

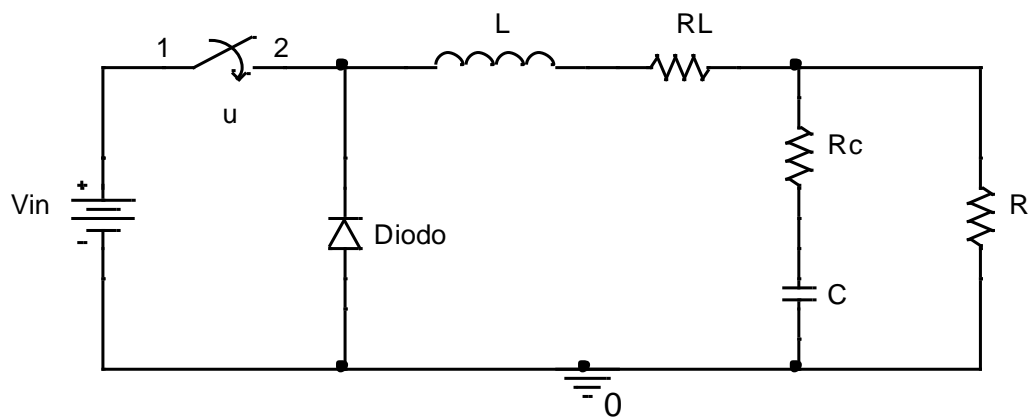
3. CONTROL DE UN CONVERTIDOR DE POTENCIA REDUCTOR

Posterior a las definiciones del control óptimo y las medidas de optimalidad, el presente capítulo introduce y describe un lazo de control para regulación de tensión, a la salida de un circuito convertidor de potencia DC-DC tipo reductor o *Buck*. Se realizará la descripción general del circuito y el cálculo de sus valores de parámetro, para posteriormente aplicar sobre el mismo una acción de control del tipo encendido-apagado.

3.1. CIRCUITO CONVERTIDOR DE POTENCIA

El convertidor DC-DC tipo *Buck*, es el sistema (planta) sobre el cual se realizará la acción de control y el respectivo análisis de comportamiento dinámico. Este circuito realiza una transferencia de energía, convirtiendo una fuente de entrada continua no regulada en una baja tensión de salida deseada. El diagrama esquemático para este convertidor, se muestra en la Figura 7.

Figura 7. Circuito convertidor de potencia *Buck*



Para determinar los parámetros circuitales de inductancia mínima y capacitancia, se toma como base el modelo ideal asumiendo un voltaje de entrada $V_{in} = 24 \text{ V}$, un

voltaje de salida $V_o = 12 \text{ V}$ con rizado ΔV_o del 0.5%, una resistencia de carga $R = 10 \text{ } \Omega$ y una frecuencia de conmutación $f = 10 \text{ kHz}$.

A partir de ello y con base en [31], se determina el valor para el ciclo útil D de la señal PWM de activación para el conmutador, mediante:

$$D = \frac{V_o}{V_{in}} = 0.5. \quad (3.1)$$

Con este valor, es posible determinar la inductancia mínima del circuito (para que la bobina opere en corriente permanente) dada por (ver [31])

$$L_{min} = \frac{(1-D)R}{2f} = 250 \text{ } \mu\text{H}, \quad (3.2)$$

Seleccionando el valor de la inductancia un 25% mayor al valor mínimo:

$$L = 1.25L_{min} = 312.5 \text{ } \mu\text{H}, \quad (3.3)$$

para asegurar que el circuito opere en régimen permanente, que aproximado a valores comerciales corresponderá con una inductancia nominal $L = 330 \text{ } \mu\text{H}$. De esta manera, la capacitancia del circuito se calcula como (ver [31])

$$C = \frac{V_o(1-D)}{8Lf^2\Delta V_o} = 378.7 \text{ } \mu\text{F}, \quad (3.4)$$

aproximado a valores comerciales de la combinación en paralelo de capacitores de $330 \text{ } \mu\text{F}$ y $47 \text{ } \mu\text{F}$, para una capacitancia equivalente de $377 \text{ } \mu\text{F}$.

Adicionalmente se consideran las pérdidas activas en la bobina y el capacitor, siendo $R_c = 0.05 \text{ } \Omega$ la resistencia equivalente de los electrodos y terminales de conexión del capacitor, mientras $R_L = 0.2 \text{ } \Omega$ representa la resistencia inherente al

conductor metálico de la bobina. La Tabla 1 resume los valores de parámetros circuitales empleados en el convertidor *Buck*.

Tabla 1. Valores de diseño para circuito convertidor de potencia

PARÁMETRO	VALOR
Tensión de entrada	24 [V]
Tensión de salida	12 [V]
Resistencia de carga	10 [Ω]
Frecuencia de conmutación	10 [kHz]
Ciclo útil PWM	50%
Inductancia	330 [μ H]
Capacitancia	377 [μ F]
Resistencia inductiva	0.2 [Ω]
Resistencia capacitiva	0.05 [Ω]

Posterior al cálculo de los elementos del circuito, se obtiene un modelo matemático para caracterizar, a través de simulación, su comportamiento dinámico. Por tanto, seleccionando como variables de estado a la corriente en la bobina $x_1(t) = i_L$ y la tensión en el capacitor $x_2(t) = V_c$, un modelo en el espacio de estados válido para el sistema, es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(R_L + \frac{RR_c}{R+R_c})\frac{1}{L} & -\frac{R}{(R+R_c)L} \\ \frac{R}{(R+R_c)C} & -\frac{1}{(R+R_c)C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_{in}}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (3.5)$$

donde $u(t) \in [0, 1]$. El desarrollo para este modelo en el espacio de estados está basado en [32] y se presenta en el Anexo B.

3.1.1. Comportamiento del sistema en lazo abierto. A partir de los parámetros calculados para el circuito convertidor y de las ecuaciones de estado que describen su modelo matemático, se realiza la verificación del diseño empleando simulaciones numéricas en MATLAB®. La Figura 8 ilustra el voltaje de salida para el circuito real con pérdidas resistivas en L y C, partiendo del reposo y operando ante condiciones nominales.

Como se observa, el sistema se establece alrededor del valor final deseado de 12 V posterior a un tiempo de aproximadamente 8 ms. Un comportamiento similar se observa para la gráfica de corriente en la Figura 9, estableciéndose en un valor final (promedio) de aproximadamente 1.2 A. Ante estos resultados se corrobora el apropiado diseño del convertidor de potencia, para obtener el voltaje deseado a la salida en estado estacionario.

De otro lado, las Figuras 10 y 11 muestran el comportamiento del sistema ante una perturbación en la entrada de suministro V_{in} correspondiente con un decremento del 25% en su valor nominal, pasando de 24 V a 18 V, aplicada en $t = 25\text{ms}$. Como se observa de la Figura 10, posterior a la perturbación el sistema no mantiene la tensión nominal deseada a la salida, cayendo a 8.8 V. Este comportamiento justifica la inclusión de un controlador para el sistema, que permita regular los niveles de tensión a la salida hacia valores nominales deseados, a pesar de la influencia de perturbaciones.

Figura 8. Tensión de salida en lazo abierto sin perturbación

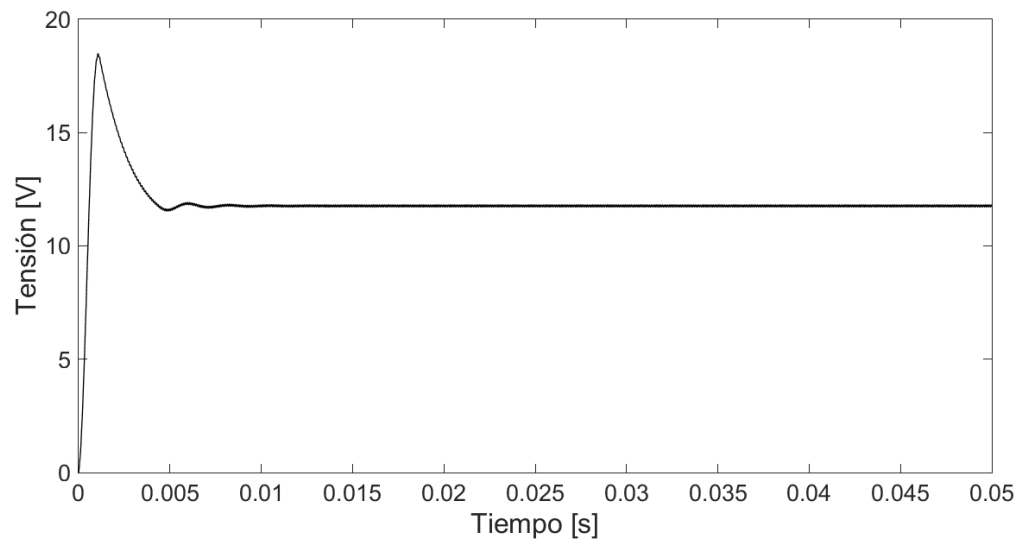


Figura 9. Corriente de inductor en lazo abierto sin perturbación

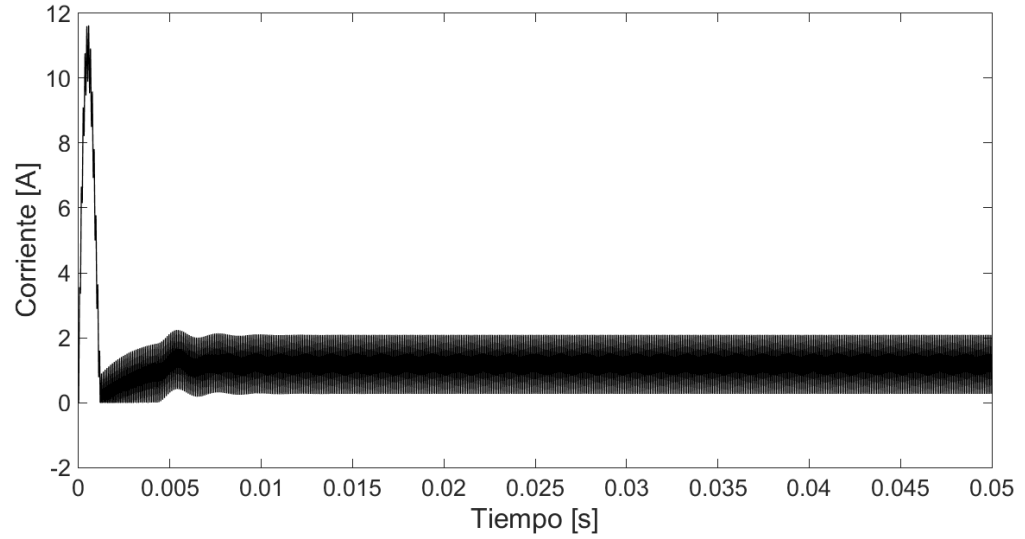


Figura 10. Tensión de salida en lazo abierto con perturbación en la entrada

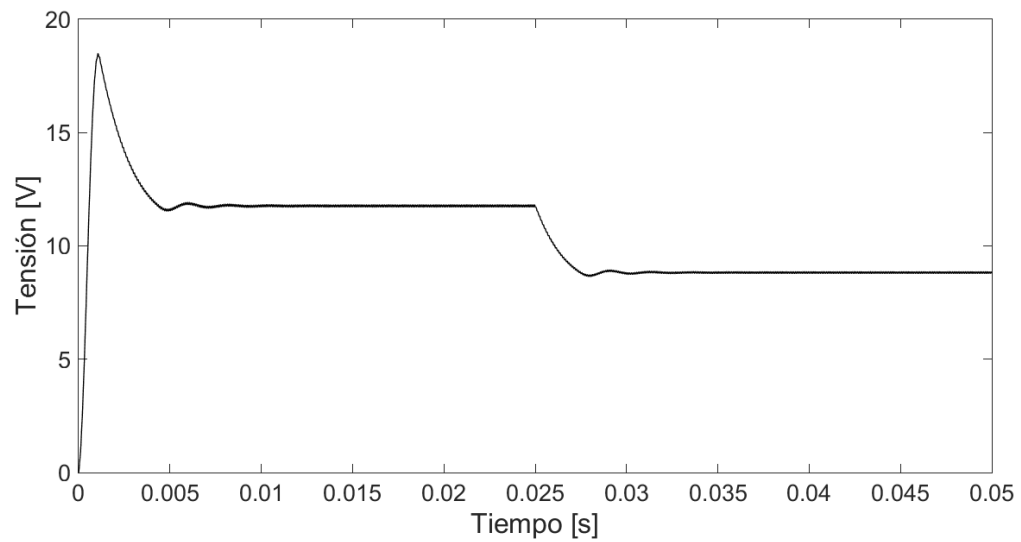
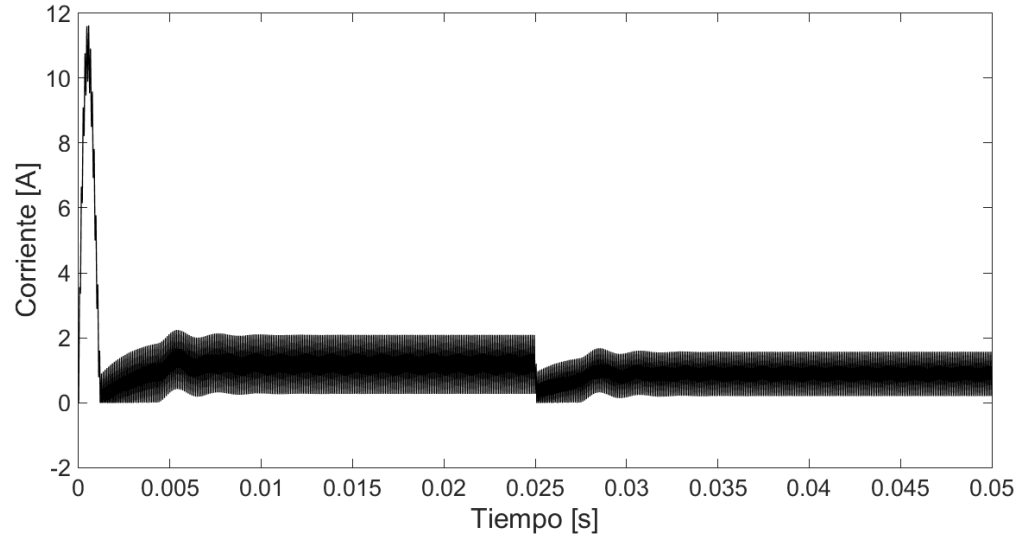


Figura 11. Corriente de inductor en lazo abierto con perturbación en la entrada



3.2. AJUSTE DEL LAZO DE CONTROL

Antes de realizar cualquier acción de control sobre el sistema, se debe asegurar que los rangos de operación pertenecientes a la señal de error sean los adecuados

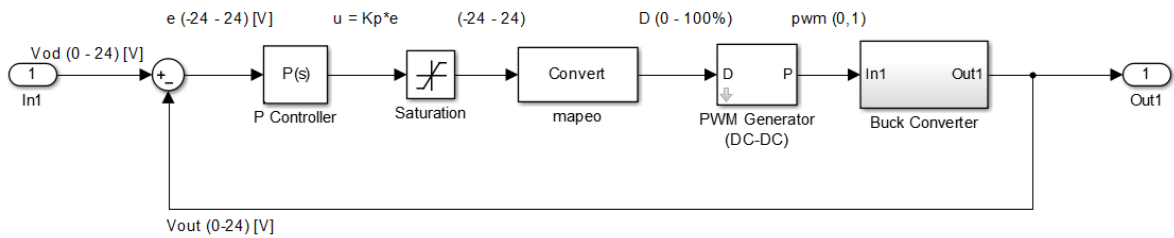
para la señal de control actuante y de esta manera evitar fenómenos indeseados de saturación y bandas muertas. Este ajuste se desarrollará tomando como base los desarrollos presentados en [33] y [34].

Por tanto, asumiendo como rango de variación del error al intervalo $[-24, 24]$ V y tras verificar un comportamiento lineal del convertidor para la relación entre ciclo útil D y el voltaje de salida V_o , la ecuación de mapeo:

$$D = \frac{1}{48} e + \frac{1}{2},$$

permitirá realizar el acondicionamiento de señales (acople) entre la salida del controlador (señal de control $u(t) = e$ para un cierre de lazo simple, o proporcional unitario) y la entrada D de conmutación al circuito, con niveles (rangos) de señal apropiados. El diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado resultante, se ilustra en la Figura 12.

Figura 12. Sistema de control en lazo cerrado con ajuste de rango

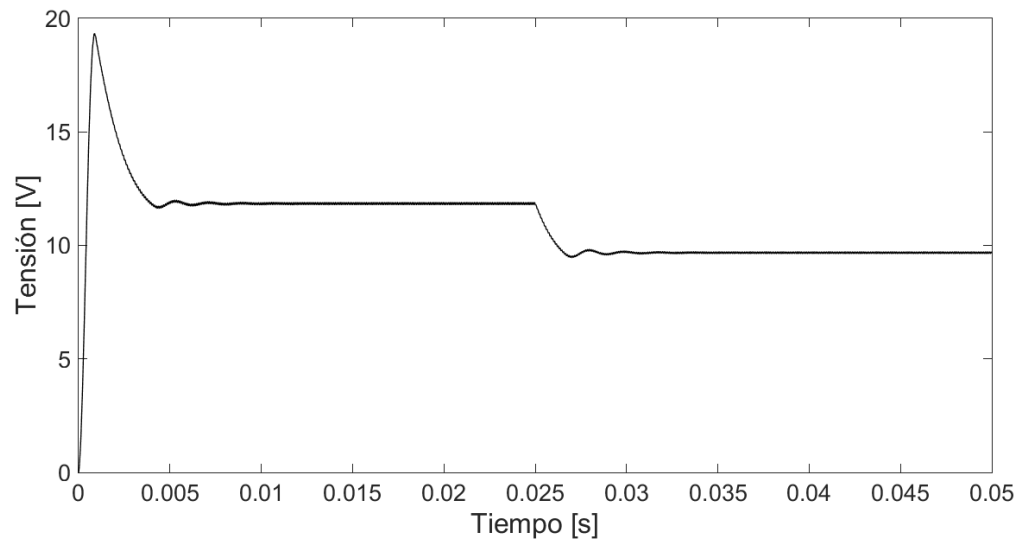


Para verificar la pertinencia del ajuste de lazo efectuado mediante la función de mapeo, se presenta en la Figura 13 la tensión de salida del circuito en lazo cerrado, sometido a perturbaciones en el voltaje de suministro V_{in} de manera similar al caso visualizado en la Figura 10. Según se observa de este resultado, previo al instante en que se aplica la perturbación, el comportamiento del sistema en lazo cerrado

satisface las especificaciones de comportamiento nominal observadas en lazo abierto, permitiendo verificar la validez del procedimiento de ajuste de rangos propuesto.

Más aún, se observa como el efecto de la perturbación es atenuado en lazo cerrado, generando un valor final de aproximadamente 9.7 V, es decir, un valor superior al obtenido en estado estacionario de la Figura 10. Este resultado coincide con las predicciones teóricas para el comportamiento de un sistema realimentado.

Figura 13. Tensión de salida en lazo cerrado con perturbación en la entrada



3.2.1. Efectos de la ganancia proporcional en el sistema. Al cerrar el lazo de control se constituye de manera inherente un controlador proporcional de ganancia unitaria, es decir:

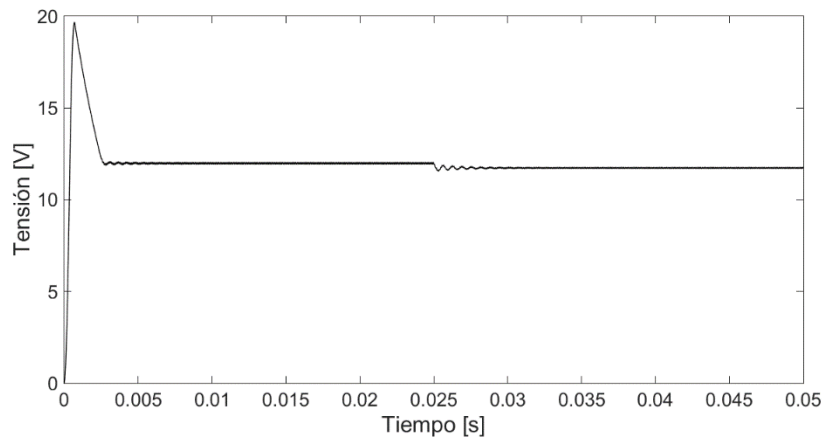
$$u(t) = e(t).$$

Sin embargo, de una manera más general, la acción de control básica que puede constituirse inicialmente es del tipo proporcional:

$$u(t) = Ke(t),$$

siendo K la ganancia proporcional o ganancia de lazo del sistema. Al aumentar dicha ganancia proporcional, se experimentan disminuciones en los efectos visibles de perturbaciones determinísticas debidos al incremento de energía en la señal de control. Por ejemplo, en la Figura 14 para $K = 30$, se observa un decaimiento más rápido de la respuesta hacia el valor final, tanto antes como después de la perturbación. También es evidente el incremento en el valor de estado estacionario perturbado.

Figura 14. Tensión de salida en lazo cerrado perturbado con $K = 30$



Para $K = 180$ en la Figura 15, se observa un comportamiento similar en la tendencia del estado estacionario. Sin embargo también se denota mayor presencia de micro-oscilaciones en la respuesta (chattering), mejor apreciados en la señal de control (Figura 16). Dichas micro-oscilaciones se hacen más evidentes para valores mayores de la ganancia. Por ejemplo en la Figura 17, para $K = 290$, se observa una micro-oscilación sostenida en la respuesta, consecuencia de una señal de control en valores extremos (saturada) según se observa en la Figura 18.

Este último, es el valor práctico que permite obtener el denominado controlador encendido-apagado u on-off. Es decir:

$$u(t) = \text{sgn}(e(t)) = \begin{cases} 1, & e(t) > 0 \\ 0, & e(t) \leq 0 \end{cases}.$$

Esta acción de control será importante en el próximo capítulo, para comparar con su versión óptima en la forma de un control conmutado.

Figura 15. Tensión de salida en lazo cerrado perturbado con $K = 180$

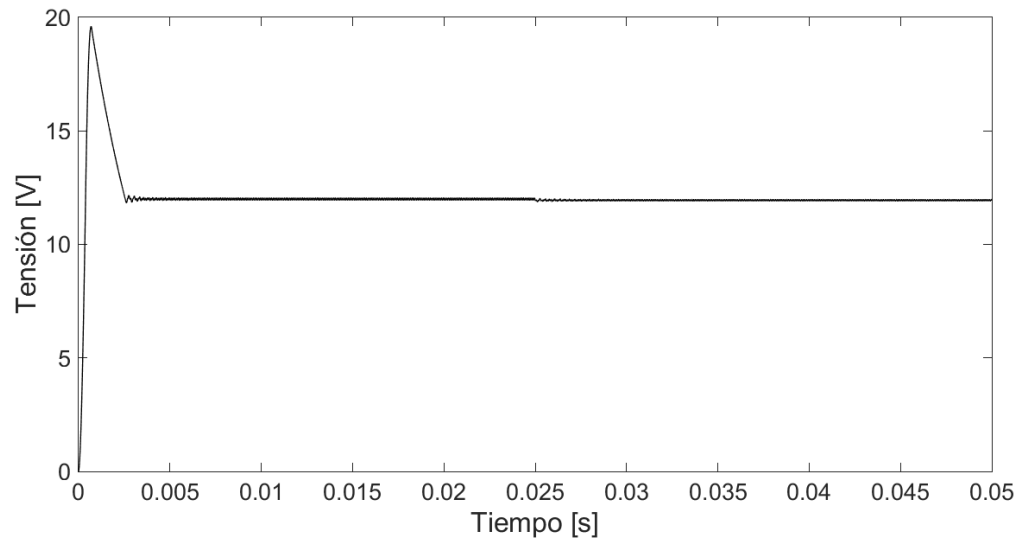


Figura 16. Ciclo útil D para control proporcional con $K = 180$

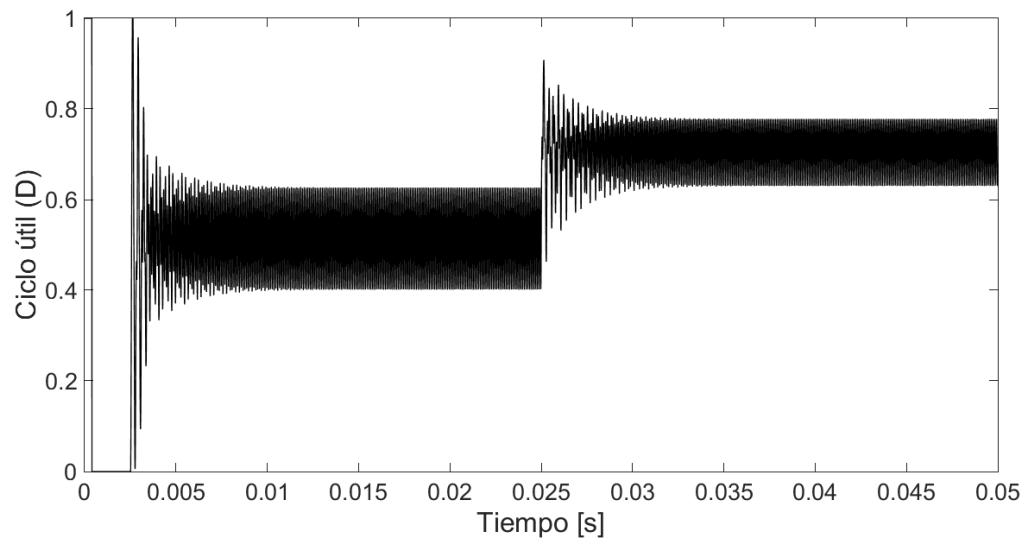


Figura 17. Tensión de salida en lazo cerrado perturbado con $K = 290$

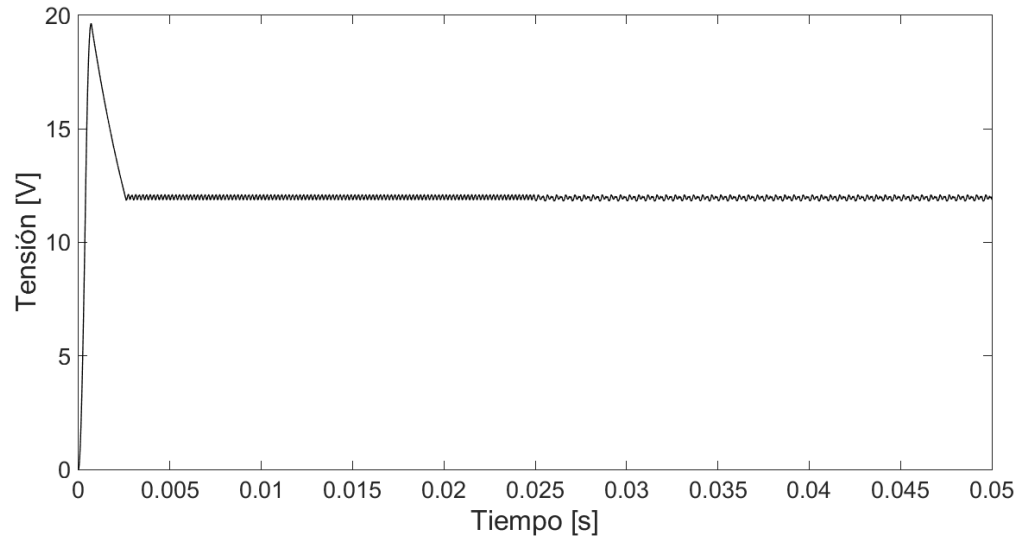
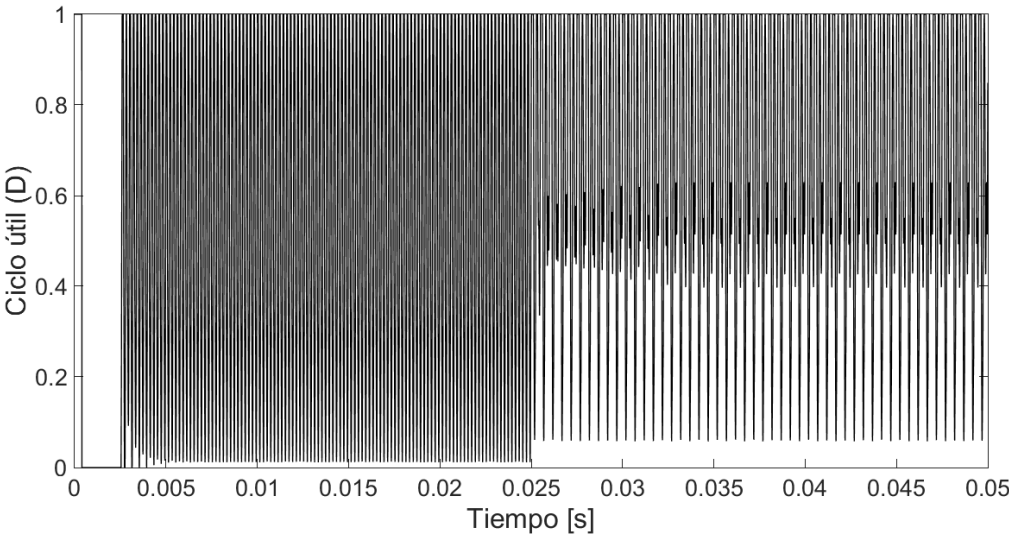


Figura 18. Ciclo útil D para control proporcional con $K = 290$



4. CONTROL ÓPTIMO CONMUTADO EN UN CONVERTIDOR BUCK

A partir de los desarrollos presentados en los Capítulos 2 y 3, se aborda el diseño y la simulación de un controlador óptimo conmutado para regular la tensión de salida en un convertidor DC-DC tipo *Buck*. Para efectos de comparación, se realiza un contraste entre el desempeño del controlador óptimo y el proporcional de alta ganancia (ON-OFF) ilustrado en el Capítulo 3.

4.1. PARÁMETROS Y DISEÑO DEL CONTROL ÓPTIMO

Para constituir la ley de control óptimo se considera como objetivo la minimización de la energía del error de tensión en el capacitor del circuito, es decir:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{(x_2 - x_{2d})^2}{R} dt, \quad (4.1)$$

siendo x_2 la tensión en el capacitor y x_{2d} la tensión de salida deseada, a partir de la representación en variables de estado dada por (3.5). Asimismo, tomando en consideración que la señal de control corresponde con el ciclo útil de una señal modulada en ancho de pulso (PWM), se deben imponer las siguientes condiciones sobre $u(t)$:

$$0 \leq u(t) \leq 1.$$

La restricción del estado x_2 , se produce a partir del valor de la tensión deseada en un tiempo final,

$$x_{2d} - x_2 = 0,$$

donde $x_{2d} = 12 V$.

De la ecuación anterior se plantean las restricciones en los estados como desigualdades, es decir

$$g_1 = [x_{2d} - x_2] \geq 0,$$

$$g_2 = [x_2 - x_{2d}] \geq 0.$$

De las condiciones de optimalidad necesarias, se forma la ecuación Hamiltoniana (ver sección 2.2.1).

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, u, \lambda) = & \ell(x) + \lambda_1(-\gamma x_1 - b x_2 + c u) + \lambda_2(\alpha x_1 - \beta x_2) \\ & + \lambda_3\{(x_{2d} - x_2)^2 H(g_1) + (x_2 - x_{2d})^2 H(g_2)\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde

$$\ell(x) = \frac{(x_2 - x_{2d})^2}{R}$$

$$\gamma = (R_L + \frac{RR_c}{R+R_c})\frac{1}{L}; b = \frac{R}{(R+R_c)L}; c = \frac{V_{in}}{L}; \alpha = \frac{R}{(R+R_c)C}; \beta = \frac{1}{(R+R_c)C}$$

$$H(g_i) = \begin{cases} 0, & \text{si } g_i(x(t), t) \geq 0, \\ 1, & \text{si } g_i(x(t), t) < 0. \end{cases}$$

De acuerdo al Principio del Máximo de Pontryagin, se tiene

$$\mathcal{H}(\lambda(t), x(t), v, t) \leq \mathcal{H}(\lambda(t), x(t), u(t), t), \quad (4.3)$$

Con lo cual, usando la expresión para el Hamiltoniano dada en (4.2) se obtiene

$$c\lambda_1 v \leq c\lambda_1 u, \text{ para todo } u \in U, \text{ es decir, } c\lambda_1 v = \min_{0 \leq u \leq 1} \{c\lambda_1 u\}$$

Consecuentemente se obtiene la ley de control óptimo

$$v = u_{opt} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_1(t) < 0, \\ 0 & \text{si } \lambda_1(t) > 0. \end{cases}$$

Resolviendo las ecuaciones complementarias (adjuntas), para conocer la naturaleza de la función de coestado λ_1

$$\dot{\lambda}_1^* = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = \gamma \lambda_1 - \alpha \lambda_2$$

$$\dot{\lambda}_2^* = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = \frac{2(x_2 - x_{2d})}{R} + b\lambda_1 + \beta\lambda_2 + 2\lambda_3(x_{2d} - x_2)H(g_1) - 2\lambda_3(x_2 - x_{2d})H(g_2)$$

$$\dot{\lambda}_3^* = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_3} = 0.$$

Dado que, para obtener una solución analítica al anterior sistema de ecuaciones, es necesario conocer las condiciones iniciales de las funciones de coestado λ , de las cuales no se tiene información directa. Por lo tanto, se hace necesaria una solución del problema por medio de métodos numéricos.

Ahora bien, para efectuar la solución numérica del problema de control óptimo (ver Anexo A) se incorpora la condición final deseada (estado final en condición de equilibrio) a manera de restricción de igualdad no lineal, es decir

$$c_{eq}(u) = x_2(t_f) = x_{2d}$$

De esta manera, se configura la función *fmincon* del paquete de herramientas para optimización (*Optimization Toolbox*) de MATLAB® (ver Anexo A) para realizar el cálculo de una señal de control que permita verificar la minimización del funcional de costo a través de un problema de optimización no lineal con restricciones (programación no lineal). En el caso particular implementado, se emplearon 16 subintervalos en el horizonte de optimización ($ns = 16$).

4.2. ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO

En la Figura 19, se presentan los resultados de simulación para la tensión de salida del circuito convertidor *Buck* bajo la acción de un controlador óptimo conmutado, con señal de control respectiva visualizada en la Figura 20. Por tanto, teniendo en cuenta que la estrategia de control óptimo implementada corresponde con una ley conmutada (es decir, constituida por un tren de pulsos binarios modulado en ancho de manera óptima), es interesante comparar su desempeño dinámico con respecto al caso del controlador encendido-apagado (ver sección 3.2.1), que bien puede entenderse como una ley conmutada no óptima.

Se observa entonces como se eliminan las micro-oscilaciones (chattering) de la respuesta del sistema al igual que se reduce manera notoria el sobreimpulso inicial, para el caso del controlador óptimo, aunque también se presenta un transitorio inicial levemente más prolongado comparado con los resultados previos de la Figura 17. Asimismo, se percibe un transitorio al momento de aplicar la perturbación en la carga, situación no verificada en el caso del controlador encendido-apagado.

Figura 19. Salida perturbada en lazo cerrado para control óptimo conmutado

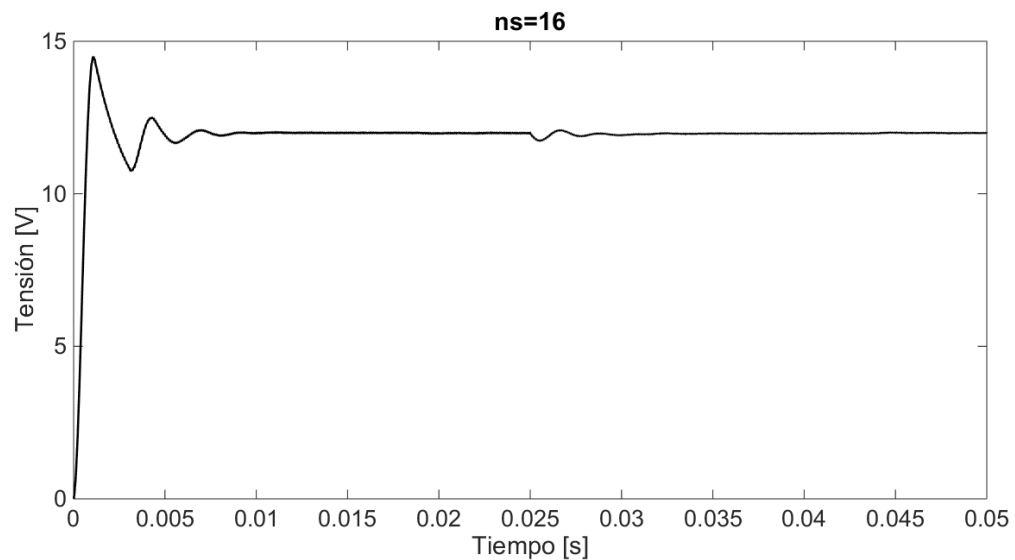
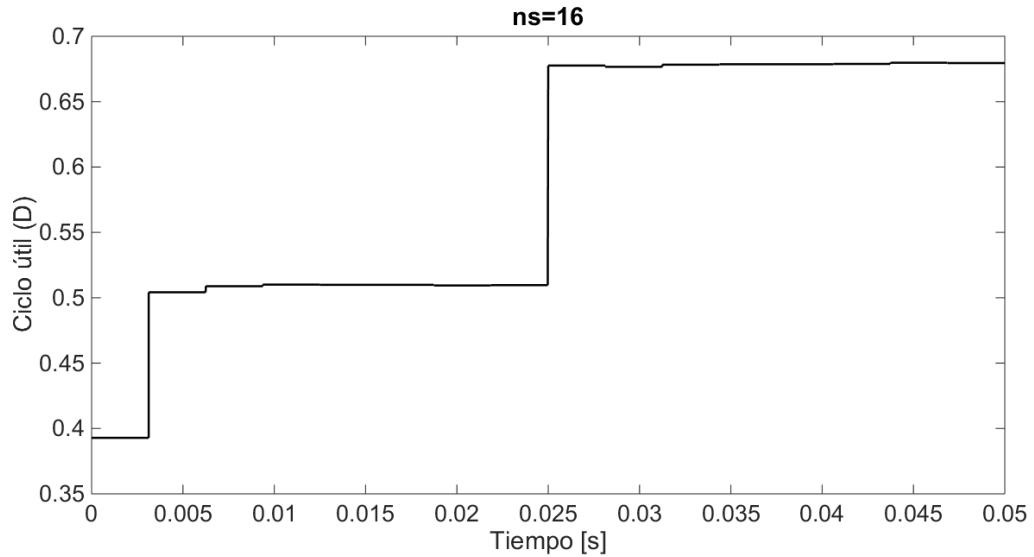


Figura 20. Ciclo útil D para control óptimo conmutado



En términos de la señal de control, para el caso del controlador óptimo se observa como el valor del ciclo útil tiende a establecerse alrededor del valor nominal (0.5 ó 50%), antes de aplicarse la perturbación en $t = 0.025$ s, momento en el cual se posiciona en un valor mayor para efectos de compensación. Este comportamiento contrasta lo observado en el controlador encendido-apagado de la Figura 18, donde el ciclo útil se mueve erráticamente entre los valores extremos 0 y 1.

Desde el punto de vista del desgaste de elementos de actuación y generación de ruidos de alta frecuencia, este comportamiento encendido-apagado es indeseable, implicando por tanto una ventaja para el controlador óptimo propuesto.

4.3. ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO ENERGÉTICO

Con base en el funcional de costo definido en (4.1) y las medidas de optimalidad abordadas en la sección 2.3, se realizará una verificación de la optimalidad del controlador propuesto como una manera de cuantificar su desempeño.

Por tanto, la Figura 21 presenta el cálculo para J tanto en el caso del controlador óptimo conmutado como para el controlador encendido-apagado (denominado “clásico” en la gráfica). Como se observa, el valor final en ambos casos es constante debido a que el error se hace cero y por tanto la integral en (4.1) no se incrementa en el estado estacionario. Asimismo, es claro que la estrategia de control óptimo minimiza el valor de J y por tanto, se puede decir que la energía del error es menor como consecuencia de esta acción de control.

De manera similar, se presenta en la Figura 22 el cálculo para la optimalidad de primer orden, donde puede observarse que en el caso del controlador óptimo este valor tiende a cero a partir del instante en que la señal de control de la Figura 20 alcanza el valor nominal (óptimo sin perturbación). Para el caso del controlador encendido-apagado se nota una convergencia aparente hacia cero en un instante posterior, sin embargo el detalle de la Figura 23 permite comprobar que en este caso la optimalidad de primer no se cumple debido a que el variacional no se anula en el estado estacionario (a pesar de tener valores pequeños), demostrando por tanto que no es un controlador óptimo a partir del criterio definido por el funcional de costo (4.1).

En resumen, los resultados presentados demuestran que tanto desde al punto de vista dinámico como energético, el controlador óptimo presenta un desempeño superior que su contraparte clásica convencional (control encendido-apagado), para regular la tensión de salida en un circuito convertidor de potencia DC-DC tipo *Buck* ante la acción de perturbaciones.

Figura 21. Cálculo comparativo para índice de desempeño

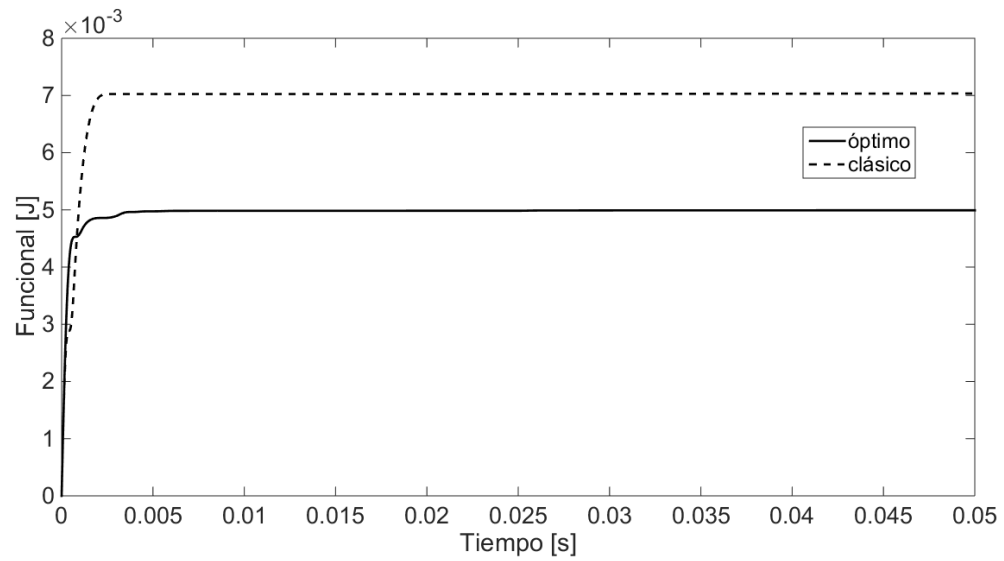


Figura 22. Cálculo comparativo para optimalidad de primer orden

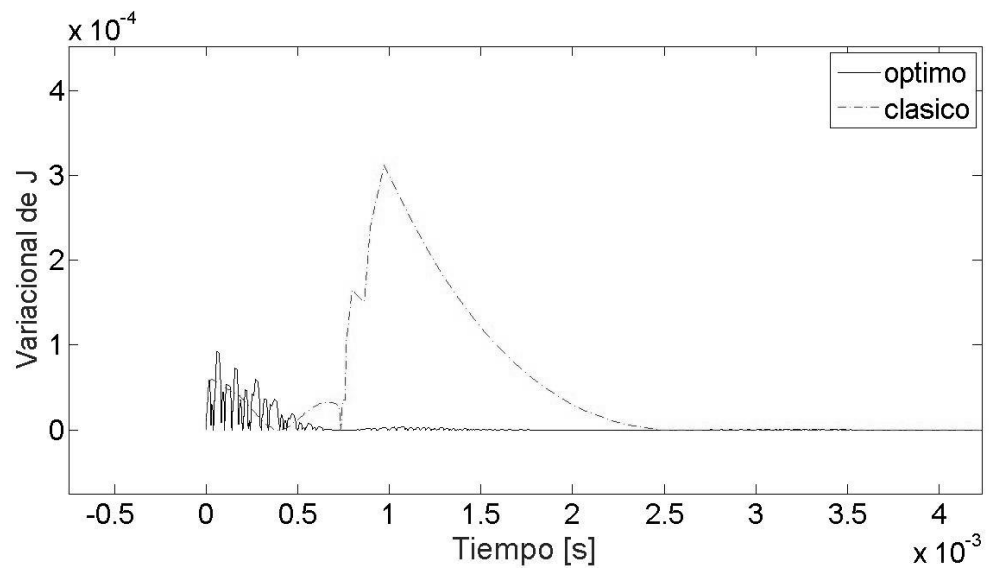
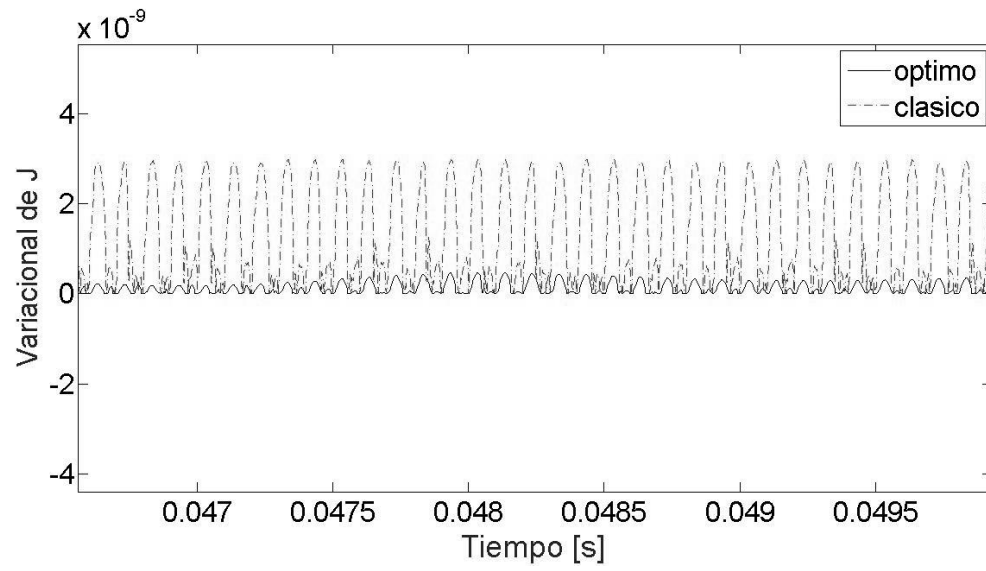


Figura 23. Detalle para cálculo de optimalidad de primer orden



5. CONCLUSIONES

Con base en los procedimientos desarrollados y los resultados obtenidos en el presente proyecto de grado, se puede concluir que:

- Se realizó una revisión general de técnicas de control óptimo. En particular, se realizó un abordaje enfatizado en el principio del máximo de Pontryagin y el caso del control de tiempo mínimo (controlador Bang-bang) como ejemplo de control óptimo conmutado. Lo anterior se evidencia a partir de los desarrollos de la sección 2.2 y los resultados de las Figuras 2, 3 y 4. Asimismo, un abordaje general se presentó en la sección 2.2.2.
- Se realizó una revisión general de las metodologías empleadas para cuantificar la optimalidad de un sistema de control. En particular, se enfatizó sobre dos técnicas particulares de cuantificación de optimalidad: la medida directa del índice de desempeño y la verificación de la optimalidad de primer orden. Lo anterior se evidencia a partir de los desarrollos de la sección 2.3 y los resultados de las Figuras 5 y 6. Asimismo, un abordaje general se presentó en la sección 2.3.3.
- Se diseñó una estrategia de control óptimo conmutado para un circuito convertidor de potencia. Inicialmente, se configuró un controlador clásico proporcional de alta ganancia (encendido-apagado) sobre un circuito convertidor de potencia DC-DC tipo *Buck*, según ilustrado en el Capítulo 3. Este ejercicio sirvió como punto de partida para verificar el modelado, diseño y simulación del sistema en lazo abierto y cerrado. Posteriormente, se diseñó e implementó sobre el mismo circuito, un controlador óptimo conmutado para minimizar la energía del error de regulación en la tensión de salida, empleando programación no lineal con restricciones en MATLAB®. Lo

anterior, se evidencia a partir de los desarrollos de la sección 4.1 y los resultados de las Figuras 19 y 20.

- Se analizó el comportamiento del sistema controlado en términos de su optimalidad. Para ello se emplearon las dos técnicas exploradas en detalle en el Capítulo 2, es decir, la medida directa del funcional de costo y la verificación de la optimalidad de primer orden. También, se realizó una comparación entre la optimalidad del control propuesto y el controlador convencional (encendido-apagado) desarrollado en el Capítulo 3, a partir de lo cual pudo observarse como desde el punto de vista dinámico y energético, el controlador propuesto sugiere un mejor desempeño que su contra-parte convencional. Todo esto se evidencia a partir de los desarrollos incluidos en las secciones 4.2, 4.3 y los resultados de las Figuras 19, 20, 21, 22 y 23.

5.1. RECOMENDACIONES

- Para definir las especificaciones de desempeño requeridas, se requiere un estudio del comportamiento del modelo del circuito sobre condiciones de operación precisas, en el contexto de la aplicación específica sobre la cual se direccionen las tareas de análisis.
- A través de la caracterización del sistema se definen las restricciones operativas del mismo y a partir de ellas será posible incorporar mayor información en el diseño del controlador, para un mejor desempeño potencial en el momento de su implementación.
- Debido a la utilización de paquetes numéricos de optimización para el cálculo de la ley de control, se recomienda hacer una lectura cuidadosa y procurar un

entendimiento lo más detallado posible de las rutinas, para facilitar un resultado coherente en términos de las necesidades del problema abordado.

- Para el caso particular presentado en el presente proyecto de grado, se recomienda seleccionar de manera precisa el valor correspondiente al número de etapas de simulación ns (subintervalos que dividen el tiempo de integración en el funcional de costo, para construir un problema de optimización continuo global en la superposición de pequeños problemas de optimización local, discretos), que permita un costo computacional razonable en el horizonte de tiempo de optimización requerido por el algoritmo de control.

5.2. TRABAJO FUTURO

A manera de trabajo futuro se proponen:

- Desarrollar los procedimientos computacionales que permitan reemplazar la utilización del comando *fmincon(.)* de MATLAB® en la realización del controlador óptimo.
- Verificación experimental en laboratorio para la estrategia de control óptimo conmutado propuesta, aplicada sobre un circuito convertidor de potencia tipo *Buck*.
- Analizar la robustez (i.e. sensibilidad ante cambios en valores nominales del sistema) para la técnica de control óptimo conmutado propuesta.
- Proyectar los desarrollos propuestos hacia técnicas de control óptimo más elaboradas (e.g. más complejas desde el punto de vista de definición para el funcional de costo y/o la cantidad de variables involucradas) y hacia otro tipo de topologías de circuitos convertidores de potencia.

REFERENCIAS

- [1] R. Oldenburger. *Optimal Control*. New York: Ed. Holt, Rinehart and Winston, 1966. 242p; ISBN 26485-0116.
- [2] D. S. Naidu. *Optimal Control Systems*. New York: Ed. CRC PRESS, 2002. 433P; ISBN 0-8493-0892-5.
- [3] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Wiley-Interscience, New York, NY, 1962. (Translated from Russian).
- [4] R. E. Kalman. Contribution to the theory of optimal control. *Bol. Soc. Matem. Mex.*, 5:102-119, 1960.
- [5] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering in prediction problems. *ASME Journal of Basic Engineering*, 82:34-45, March 1960.
- [6] R. E. Kalman and R. S. Bucy. "New results in linear filtering and prediction theory." *Transactions ASME J. Basic Eng.*, 83:95-107, 1961.
- [7] S. Bittanti, A. J. Laub, and J. C. Willems, editors. *The Riccati Equation*. Springer-Verlag, New York, NY, 1991.
- [8] H. J. Sussmann and J. C. Willems. "300 years of optimal control: from the brachistochrone to the maximum principle." *IEEE Control Systems Magazine*, 17:32-44, June 1997.
- [9] M. Pahlevaninezhad, P. Das, A. Safaee, P. Jain, A. Bakhshai and G. Moschopoulos. "An Optimal Lyapunov-Based Control Strategy for Digitally Controlled Single-Phase Power Factor Correction AC/DC Converters" IEEE 2011.
- [10] M. Pahlevaninezhad, P. Das, S. Eren, A. Bakhshai and P. Jain. "An Optimal Control Strategy for Digitally Controlled Single-Phase Power Factor Correction AC-DC Boost Converter" IEEE 2011.
- [11] A. Bekishev, A. Iskhakov, L. Klyachko, V. Pospelov and S. Skovpen. "A Method of Optimal Control for Switched-Mode Power Converters" IEEE 2008.

- [12] A. Ghosh, A. Chowdhury, R. Giri, S. Das and A. Abraham. "A Hybrid Evolutionary Direct Search Technique for Solving Optimal Control Problems" IEEE, 2010 10th International Conference on Hybrid Intelligent Systems.
- [13] G. M. Vosters, T. J. Hassell, W. W. Weaver and J. Wolffe. "Optimal Control of Power Electronic Converters for Traction Applications" IEEE 2011.
- [14] G. Foderaro and S. Ferrari. "Necessary Conditions for Optimality for a Distributed Optimal Control Problem" 49th IEEE Conference on Decision and Control, December 15-17, 2010, Hilton Atlanta Hotel, Atlanta, GA, USA.
- [15] T. Geyer, G. Papafotiou, M. Morari. "On the Optimal Control of Switch-Mode DC-DC Converters" Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004.
- [16] D. G. Schultz and J. L. Melsa. *State functions and linear control systems*. McGraw-Hill Series in Electronic Systems. New York 1967; ISBN 67-23481; Págs. 199-209.
- [17] J-J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, Inc. New Jersey 1991; ISBN 0-13-040890-5.
- [18] D. G. Luenberger, *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications*, John Wiley & Sons, Inc. New York, Toronto 1979; ISBN 0-471-02594-1; Págs. 400-401.
- [19] D. E. Kirk. *Optimal Control Theory: An Introduction*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York 1937; ISBN 0-486-43484-2.
- [20] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*, Springer-Verlag. New York 1999; ISBN 0-387-98793-2; Cap. 12.
- [21] M. J. Cánovas, V. Huertas and M. Sempere "Optimización matemática aplicada. Enunciados, ejercicios y aplicaciones del mundo real con MATLAB" Editorial Clud Universitaria. ISBN 978-84-9948-544-7; Cap. 3.
- [22] *Optimization Toolbox™ User's Guide*, The MathWorks, Inc., 2015.
- [23] R. Vinter. *Optimal Control*, Springer New York, Dordrecht Heidelberg London 2010; ISBN 978-0-8176-4990-6.
- [24] R. E. Bellman and S. E. Dreyfus, *Applied Dynamic Programming*. Princeton, New York; Princeton University Press, 1962.

- [25] A. Locatelli, *Optimal Control An Introduction*. Birkhäuser Verlag 2001; ISBN 3-7643-6408-4.
- [26] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Linear Optimal Control*. Prentice-Hall, Inc. N. J. 1971; ISBN 13-536870-7.
- [27] M. J. Jafarian and J. Nazarzadeh. "Time-optimal sliding-mode control for multi-quadrant buck converters" IET Power Electronics 2010.
- [28] A. E. Bryson Jr, Yu-Chi Ho. *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control*; Taylor & Francis Group. London 1975; ISBN-10:0-89116-228-3.
- [29] E. D. Dolan, J. J. Moré and T. S. Munson. "Optimality Measures for Performance Profiles". Argonne National Laboratory, Mathematics and Computer Science Division, Argonne Illinois Mayo 2004.
- [30] D. Desiderio and M. Lovera. "On performance and optimality tradeoffs in guidance and control law design" Proceedings of the 18th World Congress The International Federation of Automatic Control, August 28 - September 2, 2011 Milano Italy.
- [31] D. W. Hart, *Electrónica de potencia*, Pearson educación. S.A., Madrid 2001; ISBN: 84-205-3179-0; Págs. 203-212.
- [32] V. G. Ortega, "Simulador convertidores DC-DC", proyecto final de carrera, Escola Técnica Superior d'Enginyeria, Universitat Rovira i Virgili, 2002.
- [33] C. R. E, Durán Blanco, "Control conmutado basado en FPAA para un convertidor DC-DC", Trabajo fin de carrera, Escuela Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2014.
- [34] J. A. Cruz Rodríguez and D. E. Serrano Calderón, "Control Conmutado basado en PSOC para un convertidor DC-DC", Trabajo fin de carrera, Escuela Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2014.

- [35]** Q. Lin, R. Loxton and K. Lay Teo “The Control Parameterization Method For Nonlinear Optimal Control: A Survey” *Journal of Industrial and Management Optimization*, Vol 10, Number 1, Págs. 275-309, January 2014.
- [36]** B. C. Chachuat, “Nonlinear and Dynamic Optimization: From Theory to Practice”; *Laboratoire d’Automatique, École Polytechnique Fédérale de Lausanne*, 2006/2007. Cap. 3.

BIBLIOGRAFIA

A. Bekishev, A. Iskhakov, L. Klyachko, V. Pospelov and S. Skovpen. "A Method of Optimal Control for Switched-Mode Power Converters" IEEE 2008.

A. E. Bryson Jr, Yu-Chi Ho. *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control*; Taylor & Francis Group. London 1975; ISBN-10:0-89116-228-3.

A. Ghosh, A. Chowdhury, R. Giri, S. Das and A. Abraham. "A Hybrid Evolutionary Direct Search Technique for Solving Optimal Control Problems" IEEE, 2010 10th International Conference on Hybrid Intelligent Systems.

A. Locatelli, *Optimal Control An Introduction*. Birkhäuser Verlag 2001; ISBN 3-7643-6408-4.

B. C. Chachuat, "Nonlinear and Dynamic Optimization: From Theory to Practice"; Laboratoire d'Automatique, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2006/2007. Cap. 3.

B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Linear Optimal Control*. Prentice-Hall, Inc. N. J. 1971; ISBN 13-536870-7.

C. R. E, Durán Blanco, "Control conmutado basado en FPAA para un convertidor DC-DC", Trabajo fin de carrera, Escuela Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2014.

D. Desiderio and M. Lovera. "On performance and optimality tradeoffs in guidance and control law design" Proceedings of the 18th World Congress

The International Federation of Automatic Control, August 28 - September 2, 2011
Milano Italy.

D. E. Kirk. *Optimal Control Theory: An Introduction*. Dover Publications, Inc.,
Mineola, New York 1937; ISBN 0-486-43484-2.

D. G. Luenberger, *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and
Applications*, John Wiley & Sons, Inc. New York, Toronto 1979; ISBN 0-471-02594-
1; Págs. 400-401.

D. G. Schultz and J. L. Melsa. *State functions and linear control systems*. McGraw-
Hill Series in Electronic Systems. New York 1967; ISBN 67-23481; Págs. 199-209.

D. S. Naidu. *Optimal Control Systems*. New York: Ed. CRC PRESS, 2002. 433P;
ISBN 0-8493-0892-5.

D. W. Hart, *Electrónica de potencia*, Pearson educación. S.A., Madrid 2001; ISBN:
84-205-3179-0; Págs. 203-212.

E. D. Dolan, J. J. Moré and T. S. Munson. "Optimality Measures for Performance
Profiles". Argonne National Laboratory, Mathematics and Computer Science
Division, Argonne Illinois Mayo 2004.

G. Foderaro and S. Ferrari. "Necessary Conditions for Optimality for a Distributed
Optimal Control Problem" 49th IEEE Conference on Decision and Control,
December 15-17, 2010, Hilton Atlanta Hotel, Atlanta, GA, USA.

G. M. Vosters, T. J. Hassell, W. W. Weaver and J. W"olfle. "Optimal Control of
Power Electronic Converters for Traction Applications" IEEE 2011.

H. J. Sussmann and J. C. Willems. "300 years of optimal control: from the brachistochrone to the maximum principle." *IEEE Control Systems Magazine*, 17:32-44, June 1997.

J. A. Cruz Rodríguez and D. E. Serrano Calderón, "Control Conmutado basado en PSOC para un convertidor DC-DC", Trabajo fin de carrera, Escuela Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2014.

J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*, Springer-Verlag. New York 1999; ISBN 0-387-98793-2; Cap. 12.

J-J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, Inc. New Jersey 1991; ISBN 0-13-040890-5.

L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Wiley-Interscience, New York, NY, 1962. (Translated from Russian).

M. J. Cánovas, V. Huertas and M. Sempere "Optimización matemática aplicada. Enunciados, ejercicios y aplicaciones del mundo real con MATLAB" Editorial Clud Universitaria. ISBN 978-84-9948-544-7; Cap. 3.

M. J. Jafarian and J. Nazarzadeh. "Time-optimal sliding-mode control for multi-quadrant buck converters" *IET Power Electronics* 2010.

M. Pahlevaninehzad, P. Das, S. Eren, A. Bakhshai and P. Jain. "An Optimal Control Strategy for Digitally Controlled Single-Phase Power Factor Correction AC-DC Boost Converter" *IEEE* 2011.

M. Pahlevaninezad, P. Das, A. Safaee, P. Jain, A. Bakshai and G. Moschopoulos. "An Optimal Lyapunov-Based Control Strategy for Digitally Controlled Single-Phase Power Factor Correction AC/DC Converters" IEEE 2011.

Optimization Toolbox™ User's Guide, The MathWorks, Inc., 2015.

Q. Lin, R. Loxton and K. Lay Teo "The Control Parameterization Method For Nonlinear Optimal Control: A Survey" *Journal of Industrial and Management Optimization*, Vol 10, Number 1, Págs. 275-309, January 2014.

R. E. Bellman and S. E. Dreyfus, *Applied Dynamic Programming*. Princeton, New York; Princeton University Press, 1962.

R. E. Kalman and R. S. Bucy." New results in linear filtering and prediction theory." *Transactions ASME J. Basic Eng.*, 83:95-107, 1961.

R. E. Kalman. A new approach to linear filtering in prediction problems. *ASME Journal of Basic Engineering*, 82:34-45, March 1960.

R. E. Kalman. Contribution to the theory of optimal control. *Bol. Soc. Matem. Mex.*, 5:102-119, 1960.

R. Oldenburger. *Optimal Control*. New York: Ed. Holt, Rinehart and Winston, 1966. 242p; ISBN 26485-0116.

R. Vinter. *Optimal Control*, Springer New York, Dordrecht Heidelberg London 2010; ISBN 978-0-8176-4990-6.

S. Bittanti, A. J. Laub, and J. C. Willems, editors. *The Riccati Equation*. Springer-Verlag, New York, NY, 1991.

T. Geyer, G. Papafotiou, M. Morari. "On the Optimal Control of Switch-Mode DC-DC Converters" Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004.

V. G. Ortega,"Simulador convertidores DC-DC", proyecto final de carrera, Escola Técnica Superior d'Enginyeria, Universitat Rovira i Virgili, 2002.

ANEXO A. Solución numérica del problema de optimización

Como ya mencionado en el Capítulo 2, la solución de un problema de optimización y/o de control óptimo, puede implicar resolver ecuaciones complejas. Por esta razón, es común abordar la aproximación de soluciones de optimización mediante rutinas de métodos numéricos desarrollados específicamente para este tipo de situaciones, principalmente a partir de algoritmos de programación dinámica [20, 21].

Para este propósito, MATLAB® ofrece el paquete de herramientas de optimización (*Optimization toolbox* [22]), el cual permite encontrar parámetros con restricciones que minimizan o maximizan objetivos, a partir de soluciones mediante programación lineal, programación cuadrática, optimización no lineal o mínimos cuadrados no lineales.

En particular, para este trabajo se empleó una optimización no lineal con restricciones (programación no lineal) a partir del solucionador *fmincon* (.). Dicha función, resuelve un problema de optimización formulado de la manera siguiente:

$$\exists \min_u J(u) : \begin{cases} c(u) \leq 0, \\ c_{eq}(u) = 0, \\ Au \leq b, \\ A_{eq}u = b_{eq}, \\ l_b \leq u \leq u_b; \end{cases}$$

siendo $J(u)$ la función objetivo a minimizar, u el parámetro de optimalidad, $c(u)$ las restricciones no lineales de desigualdad, $c_{eq}(u)$ las restricciones no lineales de igualdad, $\{A, A_{eq}, b, b_{eq}\}$ los parámetros para las restricciones lineales de igualdad y desigualdad, mientras que $\{l_b, u_b\}$ son respectivamente las cotas inferior y superior para u .

A continuación, se ilustrará el uso de la función $fmincon(.)$ a partir de la definición para los diferentes parámetros requeridos en el contexto del problema de minimización del tiempo que requiere una partícula sin fricción, para desplazarse entre dos puntos (ejemplo analizado en el Capítulo 2).

Inicialmente, se plantea la función objetivo a minimizar $J(u)$, a partir de la expresión:

$$J(u) = t,$$

por ser un problema de optimización para hallar el tiempo mínimo. Ahora bien, numéricamente la información para este funcional en términos del vector de estados del sistema implica adicionar una tercera variable dinámica $x_3(t) = t$, para forzar a que la minimización de $J(u)$ corresponda con la minimización de esta tercera variable de estado.

Así entonces, el nuevo vector de estados se representa mediante:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ t \end{bmatrix},$$

con lo cual, la dinámica del sistema ampliado se convierte en:

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/u \end{bmatrix} u.$$

Luego, tomando en consideración las características del problema, se incorpora la condición final deseada (estado final en condición de reposo) a manera de restricción de igualdad no lineal, es decir:

$$c_{eq}(u) = \mathbf{x}(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Note cómo la restricción en el valor final se realiza sobre el vector de estados original \mathbf{x} , y no en su versión ampliada \mathbf{z} , debido a que en este último la dirección adicional corresponde con el funcional de costo a optimizar.

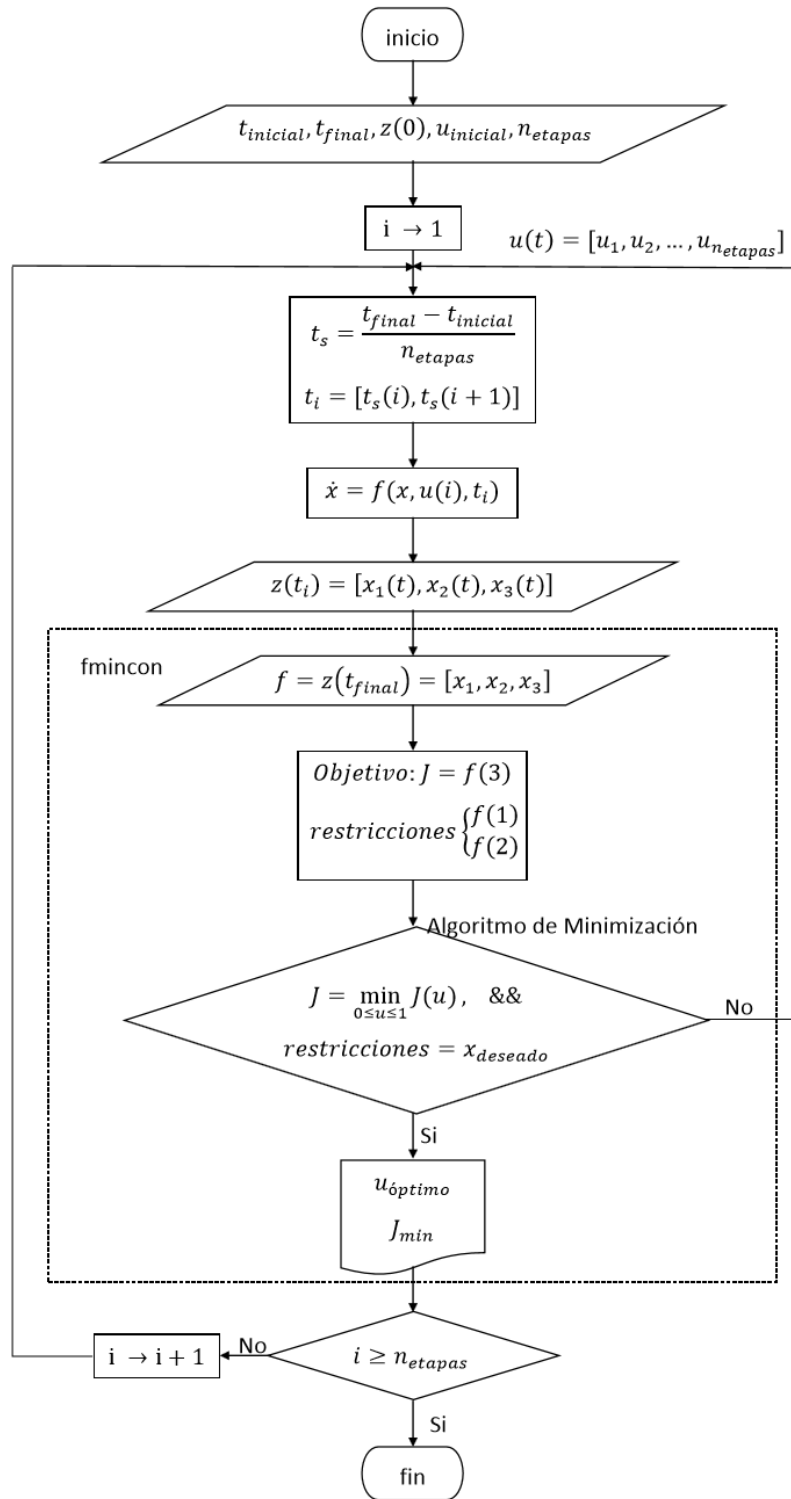
Asimismo, para este problema particular, no se emplean (y por tanto no se definen) funciones de restricción no lineal de desigualdad $c(u)$, ni restricciones lineales dadas por $\{A, A_{eq}, b, b_{eq}\}$.

Sin embargo, y siendo consistentes con (2.14), es requerido que $l_b = -1$ y $u_b = 1$, es decir:

$$-1 \leq u \leq 1.$$

Una vez definidas las expresiones anteriormente descritas, se procedió a codificar en MATLAB® las rutinas computacionales necesarias para implementar el diagrama de flujo de señal ilustrado en la Figura A1, en el cual se presenta el desarrollo lógico del algoritmo que permite encontrar el valor de la señal de control u que minimiza el índice de desempeño $J(u)$.

Figura A.1. Diagrama de flujo de datos para función *fmincon* de MATLAB®



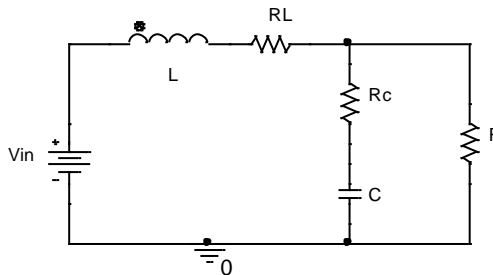
Como se observa en el diagrama, el algoritmo realiza una descomposición del horizonte de tiempo en intervalos (número de etapas) y ejecuta al interior de cada uno de ellos el cálculo correspondiente para la señal u de control óptima (i.e. minimización local), la cual mantiene hasta el inicio del intervalo siguiente, cuando se recalcula. Esta señal óptima es entonces la entrada de control para el sistema $\dot{x} = f(x, u, t)$, cuyos valores finales son la información empleada para determinar una medida de error sobre la cual asignar los valores del intervalo siguiente. Este procedimiento busca que al transcurrir escasas iteraciones, la convergencia de la técnica garantice alcanzar un valor óptimo a través de la constante verificación de condiciones de minimización sobre el valor del funcional de costo J seleccionado. Para mayor ilustración respecto a la descomposición de un problema de optimización numérica global en intervalos locales, se recomienda al lector interesado consultar [35, 36].

ANEXO B. Derivación del modelo del circuito en variables de estado

Para el análisis del convertidor reductor, suponemos que el circuito de la Figura 1 opera en régimen permanente en estado estacionario. Sin embargo, en el transitorio es de esperar un comportamiento en régimen discontinuo, para el cual es necesario definir un conjunto de ecuaciones que permita describir la dinámica completa del sistema. A continuación, se presentan los tres casos posibles:

- *Condición 1.* $u(t) = "1"$ & $D = "0"$. Con el conmutador cerrado "ON" y diodo polarizado en inverso "OFF".

Figura B.1. Circuito $u(t) = "1"$ & $D = "0"$



$$V_L = V_{in} - i_L \cdot R_L - V_o = L \frac{di_L}{dt}. \quad (\text{B.1})$$

Dado que los elementos almacenadores están cargados y no existe ningún tipo de excitación, estos se comportan como fuentes de energía, y por consiguiente, el valor de V_o se halla por medio del principio de superposición.

$$V_o = \left(\frac{R \cdot R_c}{R + R_c} \right) i_L + \left(\frac{R}{R + R_c} \right) V_C. \quad (\text{B.2})$$

Reorganizando términos, obtenemos la ecuación (B.1) y reemplazando V_o dada por (B.2), obtenemos:

$$\frac{d}{dt} i_L(t) = - \left(R_L + \frac{RR_c}{R+R_c} \right) \frac{i_L(t)}{L} - \left(\frac{R}{(R+R_c)L} \right) V_c(t) + \frac{V_{in}}{L}. \quad (\text{B.3})$$

Aplicando ley de corrientes de Kirchoff en el nodo de salida, se obtiene la segunda ecuación de estado:

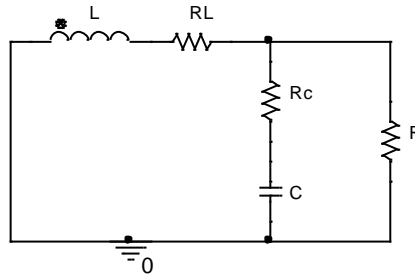
$$C \frac{d}{dt} V_c(t) = i_L - \frac{V_o}{R}. \quad (\text{B.4})$$

Reemplazando V_o dada en (B.2) y reorganizando, se obtiene una forma alternativa para (B.4) dada por:

$$\frac{d}{dt} V_c(t) = \left(\frac{R}{(R+R_c)C} \right) i_L(t) - \left(\frac{1}{(R+R_c)C} \right) V_c(t). \quad (\text{B.5})$$

- *Condición 2*, $u(t) = 0$ & $D = "1"$. El conmutador está abierto "OFF" y el diodo se polariza en directa "ON".

Figura B.2. Circuito $u(t) = "0"$ & $D = "1"$



Fuente: Autores

$$V_L = - i_L R_L - V_o = L \frac{d}{dt} i_L. \quad (\text{B.6})$$

Reemplazando V_o dado por (B.2) y reorganizando los términos se obtiene:

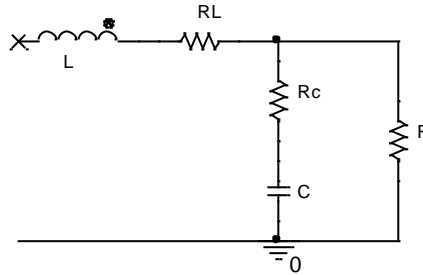
$$\frac{d}{dt} i_L(t) = - \left(R_L + \frac{RR_c}{R+R_c} \right) \frac{i_L(t)}{L} - \left(\frac{R}{(R+R_c)L} \right) V_c(t). \quad (\text{B.7})$$

Aplicando ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo de salida, se obtiene la segunda ecuación de estado:

$$\frac{d}{dt} V_c(t) = \left(\frac{R}{(R+R_c)C} \right) i_L(t) - \left(\frac{1}{(R+R_c)C} \right) V_c(t). \quad (\text{B.8})$$

- *Condición 3*, $u(t) = 0$ & $D = "0"$. El conmutador está abierto "OFF" y el diodo se polariza en inversa "OFF".

Figura B.3. Circuito $u(t) = "0"$ & $D = "0"$



Fuente: Autores

$$\frac{d}{dt} i_L(t) = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{d}{dt} V_c(t) = - \frac{V_c(t)}{(R+R_c)C} \quad (\text{B.10})$$

Luego, tomando como variables de estado a la corriente en la bobina $x_1(t) = i_L$ y la tensión en el capacitor $x_2(t) = V_c$, las ecuaciones diferenciales para cada condición se resumen en (B.11), (B.12) y (B.13)

$u(t) = 1$ & $D = "0"$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = - \left(R_L + \frac{RR_c}{R+R_c} \right) \frac{x_1(t)}{L} - \left(\frac{R}{(R+R_c)L} \right) x_2(t) + \frac{V_{in}}{L}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \left(\frac{R}{(R+R_c)C}\right)x_1(t) - \left(\frac{1}{(R+R_c)C}\right)x_2(t) \quad (\text{B.11})$$

$u(t) = 0$ & $D = "1"$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -\left(R_L + \frac{RR_c}{R+R_c}\right)\frac{x_1(t)}{L} - \left(\frac{R}{(R+R_c)L}\right)x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \left(\frac{R}{(R+R_c)C}\right)x_1(t) - \left(\frac{1}{(R+R_c)C}\right)x_2(t) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$u(t) = "0"$ & $D = "0"$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -\frac{x_2(t)}{(R+R_c)C} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$