
Interpretación física de los parámetros equivalentes como solución a la ambigüedad en la
caracterización de la birrefringencia

Camilo Andrés Cadena Durán
Filósofo

Trabajo de grado para optar al título de Físico

Director:
Dr. Rafael Ángel Torres Amaris
Doctor en Ciencias Naturales (Física)

Codirector:
Jhon Stivenson Pabón Niño
Magister en Matemática Aplicada
Candidato a Doctor en Ciencias en Óptica

Universidad Industrial de Santander

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2025

Dedicatoria

A Dios:

Quienes desean conquistar el favor de un príncipe suelen salirle al encuentro, las más de las veces, con aquellas cosas a las que confieren más valor o ante las cuales le ven deleitarse en mayor medida. Por eso vemos muchas veces que les son presentados caballos, armas, vestimentas doradas, piedras preciosas y adornos semejantes dignos de su eminente posesión. Deseando yo, por tanto, ofrecerme a Vuestra Magnificencia con algún testimonio de mi afecto y mi obligación hacia Vos, no he encontrado entre mis pertenencias cosa alguna que considere más valiosa o estime tanto como el conocimiento de las acciones de [la naturaleza], adquirido por mí mediante una larga experiencia de las cosas modernas y una continua lectura de las antiguas: tras haberlas estudiado y examinado durante largo tiempo con gran diligencia, las envío ahora – comprendidas en un pequeño volumen – a Vuestra Magnificencia.

Nicolás Maquiavelo

Agradecimientos

Hoy agradezco a mi gente: a los que me acompañaron e hicieron de esta aventura un placer y un sueño que me alegra y me entristece terminar. Para mis padres, una reverencia: por apoyar tanto a sus hijos, por darnos tanta libertad, amor y sabiduría. A mi hermano, por su valor para decir *sí* a sus sueños de estudiar Medicina y darme la perfecta excusa para hacer simultaneidad. A Adelita, mi sustento, la amada de mi alma. A Inés, por soportar mis obsesiones durante nuestra vida juntos. A Pipe, por sembrarme el amor por la Física y enseñarme rumiar tantas ideas en torno a ella. A Critian, por ser un nuevo camino hacia Dios. A Ángel, por enseñarme sobre las responsabilidades que implica pertenecer a una comunidad. A Yin (alias Pantalones) por su amistad, y por servirme de guía para los delicados pasos matemáticos que di en este trabajo. A Ceci, quien fue siempre tan colaboradora conmigo y con el despelote burocrático de la simultaneidad. Al Dr. Coffmann y su fascinante habilidad para hacerme reír...

A Jhon, a quien estimo con tanto afecto por darme la confianza y trabajar con esfuerzo a mi lado para sacar todas estas ideas adelante.

A Rafa, a quien debo el placer de conocer las más hermosas ideas de la Óptica y quien un día me abrió las puertas del Grupo aún cuando tenía tan poco que ofrecer.

A Angélica, Jhonatan, Jhonny, Sofi, Confley, Angie, Carlos, Goofy, Sharith, Ámbar, Reyes, Óscar, Brayán... Y los tantos otros otros, a quienes ahora veo poco, pero que saludo con una sonrisa por la genuina alegría que me produce verlos...

*Para toda mi gente:
mi corazón <3*

Tabla de contenido

Introducción	10
1 Fundamentos	12
1.1 La polarización de la luz	12
1.2 Los medios birrefringentes	15
1.2.1 Características físicas	15
1.2.2 Tratamiento matemático	17
1.2.3 Tipos de birrefringentes	17
1.3 El Primer Teorema de Equivalencia de Jones	18
1.3.1 Los parámetros de los birrefringentes	19
1.3.2 Relaciones entre parámetros intrínsecos y equivalentes	19
1.3.2.1 Problemas de periodicidad	20
1.3.2.2 Problemas de paridad	21
1.3.2.3 Corolario de No Unicidad Paramétrica	21
1.4 Las Leyes de los Birrefringentes	22
1.4.1 Ley de los Birrefringentes Lineales	22
1.4.2 Ley de los Birrefringentes Elípticos	22
1.4.3 La LBE como Criterio de Selección	24
1.4.4 El poder predictivo de los parámetros equivalentes	25
1.4.5 Notas preliminares para medir los parámetros equivalentes	25
1.5 Contribuciones	26
2 Enfoques actuales en la medición	28
2.1 Medición de parámetros intrínsecos	29
2.1.1 Método de medición de Tres Intensidades	29
2.1.2 Método de análisis de Fourier	29
2.1.3 Debilidades de este enfoque	30
2.2 Medición de parámetros equivalentes	30
2.2.1 Elipsómetro heterodino de doble frecuencia	30
2.2.2 Debilidades de este enfoque	30
2.3 Medición de subconjuntos de parámetros	31

2.3.1	Polarimetría espectroscópica de matrices de Mueller	31
2.3.2	Método de Sénarmont Generalizado	31
2.3.3	Debilidades de este enfoque	32
2.4	Conclusiones	32
3	Nuevo método de medición	34
3.1	Teorema de Monerie-Jeunhomme	34
3.2	Definición de los estados incidentes y emergentes	36
3.3	Medición de los parámetros equivalentes	37
3.4	Medición de los parámetros intrínsecos	38
3.4.1	Modos propios	38
3.4.2	Retardo elíptico	40
3.5	Experimentos y resultados	41
3.5.1	Evaluación de las discrepancias teórico-experimentales	44
3.5.2	Verificación del Corolario de Selección	45
3.6	Discusión sobre los hallazgos	46
4	Contribuciones, conclusiones y perspectivas	47
	Referencias	48

Lista de figuras

Figura 1	Representación visual de la elipse de polarización y la esfera de Poincaré.	14
Figura 2	Representación visual del Primer Teorema de Equivalencia de Jones: la descomposición del BE en términos del BC y BL equivalentes.	18
Figura 3	Representación visual de las Leyes de los Birrefringentes. En la LBE, para un estado incidente arbitrario $\mathbf{S}^i(2\alpha^i, 2\chi^i)$, el vértice del cono se encuentra en el estado enantiógiro $\mathbf{S}^\circ(2\alpha^i, -2\chi^i)$. Por otro lado, en la LBE, para un estado incidente arbitrario $\mathbf{S}^i(2\alpha^i, 2\chi^i)$, el vértice del cono se encuentra en el estado $\mathbf{S}^\times(2\alpha^i + \varphi, -2\chi^i)$	24
Figura 4	Representación visual del Corolario de No Unicidad Paramétrica para el caso de la ambigüedad de paridad. Dados unos parámetros intrínsecos y un estado de polarización incidente $\mathbf{S}^i(2\alpha^i, 2\chi^i)$, existen dos soluciones matemáticas para los parámetros equivalentes: (δ, φ) y $(-\delta, -\varphi)$. Por las propiedades de la Ec. 1.40, ambos conjuntos de parámetros generan el mismo cono; sin embargo, la curva de estados emergentes es diferente en cada caso, pues los vértices de los conos están ubicados en estados distintos.	25
Figura 5	Representación, en el espacio físico y en la esfera de Poincaré, de la transformación de los estados polarizados \mathbf{S}_L^i y \mathbf{S}_C^i al atravesar un BE .	37
Figura 6	Curvas de los estados emergentes generadas por un BE para los estados \mathbf{S}_L^i y \mathbf{S}_C^i . El análisis de la transformación del estado lineal permite hallar φ y α' . Por otro lado, δ se encuentra a partir del estudio de la transformación del estado circular.	39
Figura 7	Esquema del proceso para hallar los modos propios $\hat{\mathbf{n}}$ del BE . La transformación de los estados \mathbf{S}_L^i y \mathbf{S}_C^i (Fig. (a)) sucede en planos paralelos (Fig. (b)); por lo tanto, es posible definir los vectores coplanares $\Delta\vec{\mathbf{S}}_L$ y $\Delta\vec{\mathbf{S}}_C$ (Fig. (c)), de modo que su producto cruz normalizado define $\hat{\mathbf{n}}$ (Fig. (d)).	40
Figura 8	Representación de la transformación de dos estados de polarización. El análisis de dichos estados permite definir los vectores $\vec{\mathbf{R}}^i$ y $\vec{\mathbf{R}}^e$, con los que se puede hallar el retardo elíptico γ	41

-
- Figura 9 Representación de montaje experimental para el nuevo método de medición de birrefringencia. **C** es un colimador, **P** es un polarizador lineal, **QWP** es una lámina de cuarto de onda y **BE** es la muestra a analizar. 42
- Figura 10 Gráfica de estados emergentes generados experimentalmente por el **BE** (Tabla 4) superpuesta con curva de estados emergentes predicha por la LBE a través de la Ec. 1.39. La correspondencia entre los datos experimentales y la curva teórica confirma la validez del Corolario de Selección. 45

Resumen

Título: Interpretación física de los parámetros equivalentes como solución a la ambigüedad en la caracterización de la birrefringencia¹

Autor: Camilo Andrés Cadena Durán²

Palabras clave: Polarización, Birrefringencia, Teorema de Equivalencia de Jones, Parámetros intrínsecos, Parámetros equivalentes.

Descripción: La caracterización de medios birrefringentes presenta una ambigüedad debido a la descripción dual a través de parámetros intrínsecos o equivalentes, cuyas relaciones matemáticas no son biyectivas y pueden conducir a resultados equívocos. Este trabajo resuelve dicha ambigüedad proponiendo la Ley de los Birrefringentes Elípticos (LBE) como un criterio físico que, basado en la trayectoria observable de todos los posibles estados emergentes de polarización, permite identificar de manera unívoca el conjunto de parámetros equivalentes con significado físico. Asimismo, se desarrolla una nueva metodología experimental que, a partir de la medición de la transformación de solo dos estados de polarización incidentes, determina de forma simultánea e independiente ambos conjuntos de parámetros. La validez de este enfoque se ha confirmado experimentalmente en diversos medios, ofreciendo así una solución integral y físicamente fundamentada para la caracterización completa de la birrefringencia.

¹Trabajo de Grado

²Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Dr. Rafael Ángel Torres Amaris. Codirector: Mg. Jhon Stivenson Pabón Niño

Abstract

Title: Physical interpretation of the equivalent parameters as a solution to the ambiguity in birefringence characterization. ³

Author: Camilo Andrés Cadena Durán⁴

Key words: Polarization, Birefringence, Jones Equivalence Theorem, Intrinsic Parameters, Equivalent Parameters.

Description: The characterization of birefringent media presents an ambiguity due to the dual description in terms of intrinsic or equivalent parameters, whose mathematical relations are not bijective and may lead to misleading results. This work resolves such ambiguity by proposing the Law of Elliptical Birefringents (LEB) as a physical criterion which, based on the observable trajectory of all possible emergent polarization states, allows the unique identification of the set of equivalent parameters with physical meaning. In addition, a new experimental methodology is developed which, from the measurement of the transformation of only two incident polarization states, simultaneously and independently determines both sets of parameters. The validity of this approach has been experimentally confirmed in different media, thus providing a comprehensive and physically grounded solution for the complete characterization of birefringence.

³Undergraduate thesis

⁴Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Dr. Rafael Ángel Torres Amaris. Codirector: Mg. Jhon Stivenson Pabón Niño

Introducción

Problema de investigación

La birrefringencia, una propiedad óptica fundamental de un sinnúmero de materiales, desempeña un papel crucial en una vasta gama de aplicaciones científicas y tecnológicas. Su relevancia abarca desde la microscopía (Hoa y cols., 2014) y el estudio de tejidos biológicos como la piel (Pierce, Strasswimmer, Park, Cense, y de Boer, 2004), hasta áreas fundamentales de la física como la electrodinámica cuántica, donde autores como Mignani y cols. (2017) investigan esta propiedad incluso para el vacío.

Por este motivo, la caracterización precisa de la birrefringencia es indispensable no solo para el diseño y la optimización de componentes ópticos, el desarrollo industrial o las aplicaciones médicas, sino también para el entendimiento de fenómenos físicos complejos y las propiedades del universo. Sin embargo, como se mostrará en este trabajo, hoy en día existen algunas ambigüedades en la interpretación precisa de esta propiedad óptica y de su medición.

Tradicionalmente, la descripción de los medios birrefringentes se aborda desde dos perspectivas: a través de sus parámetros intrínsecos (el retardo elíptico y los modos propios de polarización) y mediante sus parámetros equivalentes, deducidos del Primer Teorema de Equivalencia de Jones. Este teorema postula que cualquier sistema birrefringente arbitrario puede ser representado como una combinación de un retardador lineal y un rotador de actividad óptica equivalentes.

A pesar de la utilidad de ambos enfoques, las relaciones matemáticas que los conectan no son biyectivas. Esto genera una ambigüedad fundamental: un único conjunto de propiedades físicas intrínsecas puede corresponder a múltiples conjuntos de parámetros equivalentes matemáticamente válidos. Este es un problema que puede pasar desapercibido si se interpretan los parámetros equivalentes como una mera herramienta matemática, tal como se ha hecho habitualmente. Sin embargo, en el presente trabajo se demostrará que dichos parámetros sí tienen un significado físico bien definido y observable, por lo que esta falta de unicidad paramétrica, lejos de ser una mera curiosidad matemática, plantea un problema central en

la metrología actual.

Este trabajo aborda la ambigüedad fundamental previamente descrita. La hipótesis central es que la Ley de los Birrefringentes Elípticos (LBE) —que describe la trayectoria única y observable de todos los posibles estados de polarización emergentes en la esfera de Poincaré— constituye el criterio físico suficiente para resolverla. Al anclar la descripción matemática a una propiedad geométrica medible, es posible identificar de forma inequívoca el único conjunto de parámetros equivalentes que es físicamente significativo. Esta reinterpretación tiene una implicación profunda: al definir la trayectoria completa de los estados emergentes, confiere un poder predictivo global que la descripción basada únicamente en parámetros intrínsecos no puede ofrecer.

Asimismo, para eludir cualquier ambigüedad inherente a los métodos actuales, este trabajo presenta un nuevo método de medición fundamentado en la reinterpretación física de los parámetros equivalentes. Dicho enfoque permite la determinación simultánea e independiente de todos los parámetros que definen al medio, y su validez se confirma experimentalmente mediante la caracterización de distintos medios ópticos.

La estructura de esta tesis se organiza de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se establecen los fundamentos teóricos; se formaliza la ambigüedad a través del Corolario de No Unicidad Paramétrica y se postula la LBE como el criterio físico para resolverla, lo que culmina en el Corolario de Selección y en la nueva interpretación física de los parámetros equivalentes. El Capítulo 2 ofrece una revisión crítica de los enfoques de medición actuales, evidenciando sus limitaciones. A continuación, el Capítulo 3 detalla el desarrollo del nuevo método propuesto, su fundamentación teórica y su validación experimental. Finalmente, el Capítulo 4 sintetiza las principales contribuciones y conclusiones de este trabajo.

Capítulo 1

Fundamentos

1.1. La polarización de la luz

La descripción fundamental del comportamiento de la luz como una onda electromagnética se basa en las ecuaciones de Maxwell. Para un medio sin cargas ni corrientes libres, estas se escriben como ([Hecht, 2017](#))

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.4)$$

Donde \mathbf{E} es el campo eléctrico, \mathbf{D} es el desplazamiento eléctrico, \mathbf{H} es el campo magnético y \mathbf{B} es la inducción magnética.

A partir de estas leyes fundamentales, y bajo la consideración de un medio homogéneo, isótropo, no conductor, no magnético y en un régimen estacionario, se puede derivar la ecuación que gobierna la propagación de los campos en dicho medio. Esta es la ecuación de onda, que para el campo eléctrico toma la forma de

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.5)$$

Una solución particular a la ecuación anterior es la onda plana monocromática,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x e^{i\phi_x} \\ \mathcal{E}_y e^{i\phi_y} \\ \mathcal{E}_z e^{i\phi_z} \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.6)$$

donde \mathcal{E}_j y ϕ_j son, respectivamente, la amplitud real y la fase inicial de la componente j -ésima del campo eléctrico. La cantidad vectorial \mathbf{E}_0 contiene toda la información sobre las amplitudes y fases relativas de las componentes del campo y, a su vez, es el lugar geométrico que describe el campo eléctrico en un punto \mathbf{r} en el instante de tiempo t ; por este motivo se conoce con el nombre de *polarización*. No obstante, y sin pérdida de generalidad, es posible escoger a \mathbf{k} como la dirección de propagación, con lo cual la Ec. (1.6) se puede escribir como

$$\mathbf{E}(z, t) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x e^{i\phi_x} \\ \mathcal{E}_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (1.7)$$

Esta última es la ecuación paramétrica de una hiperelipse en el hiperplano complejo de \mathbb{C}^2 al que pertenece el campo eléctrico. Tomando $E_x = \mathcal{E}_x \cos \omega t$ y $E_y = \mathcal{E}_y \cos(\omega t + \Delta\phi)$, y teniendo en cuenta la identidad trigonométrica $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$, por medio de manipulación algebraica se puede deducir la ecuación de la elipse

$$\frac{E_x^2}{\mathcal{E}_x^2} + \frac{E_y^2}{\mathcal{E}_y^2} - 2 \frac{E_x E_y}{\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y} \cos \Delta\phi = \sin^2 \Delta\phi. \quad (1.8)$$

De esta manera, es claro que la forma en la que oscila el campo eléctrico está descrito por elipses, en donde la polarización lineal y circular son solo casos particulares. No obstante, en lugar de trabajar con la ecuación anterior, es más conveniente describir el estado de polarización directamente a través de los parámetros geométricos de dicha elipse: su ángulo de orientación α y su ángulo de elipticidad χ , como se muestra en la Fig. (1a). El formalismo del *vector de Jones* sintetiza esta descripción geométrica en un vector complejo y normalizado $\hat{\mathbf{J}}$ tal que (Chekhova y Banzer, 2021)

$$\hat{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \chi - i \sin \alpha \sin \chi \\ \sin \alpha \cos \chi + i \cos \alpha \sin \chi \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Por otra parte, existen otros formalismos matemáticos que permiten representar los estados de polarización. Tal es el caso del llamado *vector de Stokes*, que — tal como lo señalan Chekhova y Banzer (2021) — tiene una correspondencia uno a uno con el vector de Jones:

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ I \cos 2\alpha \cos 2\chi \\ I \sin 2\alpha \cos 2\chi \\ I \sin 2\chi \end{bmatrix}, \quad (1.10)$$

donde los S_i se denominan *parámetros de Stokes* y $S_0 = I$ representa la irradiancia total del haz de luz. En el presente estudio se considerará exclusivamente luz totalmente polarizada y monocromática, con énfasis en la transformación del estado de polarización más que en la

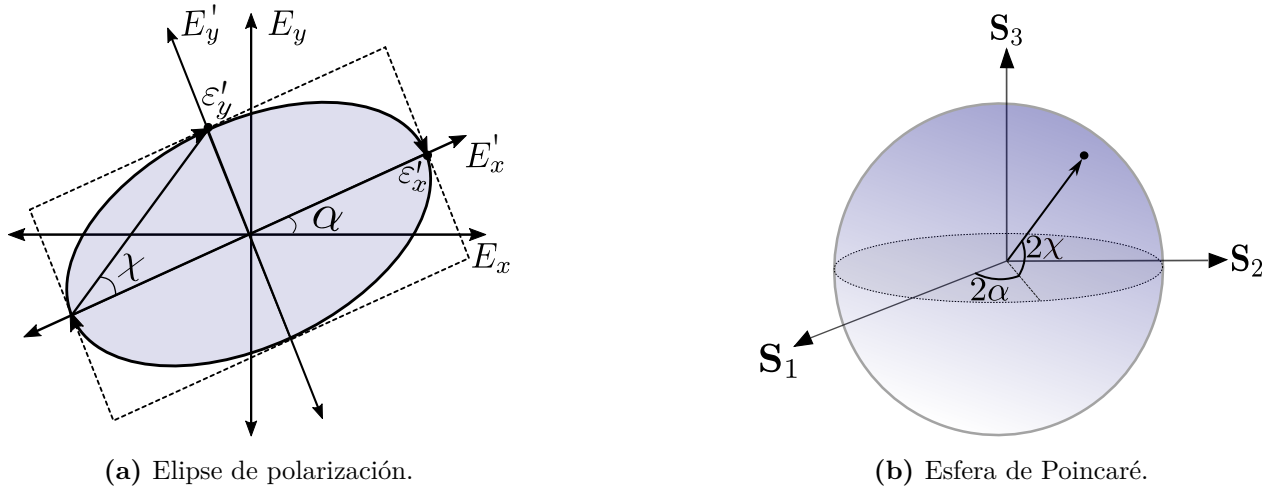


Figura 1: Representación visual de la elipse de polarización y la esfera de Poincaré.

intensidad absoluta del haz. En la práctica, un medio birrefringente siempre presenta dicroísmo; no obstante, esta contribución se omitirá para simplificar el tratamiento del problema. Bajo estas consideraciones, resulta conveniente trabajar con el vector de Stokes normalizado, de modo que $S_0 = 1$; es decir,

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \cos 2\chi \\ \sin 2\alpha \cos 2\chi \\ \sin 2\chi \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Por otro lado, existe un formalismo alternativo para describir la polarización basado en el uso de cuaterniones que, según lo propuesto por Pellat-Finet (1984), resulta equivalente al formalismo de Stokes. A partir de aquí se adoptará dicho enfoque. En este marco, el estado de polarización se define como

$$\mathbf{S} = S_0 \hat{\mathbf{n}}_0 + S_1 \hat{\mathbf{n}}_1 + S_2 \hat{\mathbf{n}}_2 + S_3 \hat{\mathbf{n}}_3. \quad (1.12)$$

donde los $\hat{\mathbf{n}}_i$ son la base de los cuaterniones $\{\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\} = \{1, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$. Para estados completamente polarizados se cumple que

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad \rightarrow \quad 1 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (1.13)$$

Esta última ecuación representa una esfera unitaria centrada en el origen. Este resultado permite la representación de los estados de polarización mediante la parte vectorial de los cuaterniones sobre un espacio de configuración conocido como la Esfera de Poincaré. En este espacio cualquier estado completamente polarizado queda descrito como un punto sobre la superficie de dicha esfera, tal como se muestra en la Fig. (1b).

1.2. Los medios birrefringentes

1.2.1. Características físicas

Según indica [Hecht \(2017\)](#), cuando la luz se propaga a través de una sustancia transparente, excita los átomos dentro del medio; de manera que los electrones son impulsados por el campo eléctrico \mathbf{E} de la onda incidente y, como resultado, reemiten radiación. Estas ondas secundarias se recombinan para formar la onda refractada resultante que avanza a través del medio. Es aquí donde la estructura molecular juega un papel fundamental. Si se da el caso en que dicha estructura es anisótropa la fuerza que une a los electrones será diferente según la dirección en la que estos se desplacen. Esto provoca que la reemisión de la ondas sea diferente en función de la dirección en la que se propague el campo eléctrico, lo que se traduce, en muchos casos, en una diferencia en el índice de refracción. A continuación se desarrollará esta idea formalmente.

En primer lugar, el vector desplazamiento eléctrico \mathbf{D} está definido como

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}, \quad (1.14)$$

donde ϵ es la permitividad eléctrica relativa. Considere ahora el caso en que existe una anisotropía en el material, representada matemáticamente como un cambio en el tratamiento de la permitividad eléctrica, que dejará de ser un escalar para ser un tensor simétrico, tal como lo señalan [Born y Wolf \(2019\)](#) y [Chekhova y Banzer \(2021\)](#).

Por otro lado, en una onda electromagnética monocromática plana, todos los campos tienen una dependencia espacial y temporal armónica que puede escribirse de la siguiente manera para las partes con frecuencia positiva:

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) \propto e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (1.15)$$

y de manera similar para $D^{(+)}(\mathbf{r}, t)$, $H^{(+)}(\mathbf{r}, t)$, $B^{(+)}(\mathbf{r}, t)$. Aquí, ω es la frecuencia y \mathbf{k} es el vector de onda. Teniendo en cuenta esto, las ecuaciones de Maxwell (1.3) y (1.4) pueden escribirse como

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}, \quad (1.16)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D}. \quad (1.17)$$

Para el caso de medios no magnéticos ($\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$), de la Ec. (1.16) se deduce que

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega \mu_0} \mathbf{k} \times \mathbf{E}. \quad (1.18)$$

Reemplazando en la Ec. (1.17), se encuentra

$$\frac{1}{\omega^2} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c^2} \epsilon \mathbf{E}, \quad (1.19)$$

donde $1/c^2 = \mu_0 \epsilon_0$. Usando la propiedad del álgebra vectorial $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ se obtiene

$$\frac{c^2}{\omega^2} [\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E}] = -\epsilon \mathbf{E}. \quad (1.20)$$

Por otro lado, según lo indican [Chekhova y Banzer \(2021\)](#), existe un marco de referencia en el que el tensor ϵ es diagonal; como consecuencia, para cada componente en este marco de referencia se cumple que

$$\frac{c^2}{\omega^2} \left[E_i k^2 - k_i \sum_{j=1}^3 k_j E_j \right] = \epsilon_i E_i. \quad (1.21)$$

Al despejar E_i , multiplicar a ambos lados de la ecuación anterior por k_i y sumar sobre i , se obtiene

$$\sum_{i=1}^3 k_i E_i = \sum_{j=1}^3 k_j E_j \sum_{i=1}^3 \frac{k_i^2}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_i}. \quad (1.22)$$

Ya que $\sum_{i=1}^3 k_i E_i = \sum_{j=1}^3 k_j E_j = \mathbf{E} \cdot \mathbf{k}$, se cancela en ambos lados, de allí se deduce que

$$\frac{k_x^2}{1 - \frac{\epsilon_x}{n^2}} + \frac{k_y^2}{1 - \frac{\epsilon_y}{n^2}} + \frac{k_z^2}{1 - \frac{\epsilon_z}{n^2}} = k^2, \quad (1.23)$$

donde el índice de refracción es $n = ck/\omega$. Restando a ambos lados $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

$$\frac{k_x^2}{\frac{1}{\epsilon_x} - \frac{1}{n^2}} + \frac{k_y^2}{\frac{1}{\epsilon_y} - \frac{1}{n^2}} + \frac{k_z^2}{\frac{1}{\epsilon_z} - \frac{1}{n^2}} = 0. \quad (1.24)$$

Esto se puede reescribir como

$$k_x^2 \left(\frac{1}{\epsilon_y} - \frac{1}{n^2} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_z} - \frac{1}{n^2} \right) + k_y^2 \left(\frac{1}{\epsilon_x} - \frac{1}{n^2} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_z} - \frac{1}{n^2} \right) + k_z^2 \left(\frac{1}{\epsilon_x} - \frac{1}{n^2} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_y} - \frac{1}{n^2} \right) = 0. \quad (1.25)$$

De este modo, para cualquier dirección de \mathbf{k} la ecuación se convierte en una cuadrática para n^{-2} , lo que implica dos valores posibles de índice de refracción. Por ejemplo, como lo mencionan [Chekhova y Banzer \(2021\)](#), si \mathbf{k} apunta a lo largo del eje x , se obtiene $n = \sqrt{\epsilon_y}$ o $n = \sqrt{\epsilon_z}$; lo que es equivalente a velocidades de fase $v = c/\sqrt{\epsilon_y}$ o $v = c/\sqrt{\epsilon_z}$. En consecuencia, la velocidad de fase ya no es constante, sino que depende de la dirección de propagación y de la

polarización de la luz. Este fenómeno, donde el índice de refracción varía con la polarización, se conoce como anisotropía óptica, característica esencial de los materiales birrefringentes.

Finalmente, es crucial señalar que las propiedades ópticas que definen la birrefringencia, como los índices de refracción, son dependientes de la longitud de onda de la luz incidente; un fenómeno conocido como *dispersión*. Por consiguiente, los parámetros que cuantifican la birrefringencia —y que serán explicados más adelante— son también funciones de la longitud de onda. No obstante, para los fines de este trabajo, el análisis se enfocará exclusivamente en el comportamiento del medio para una única longitud de onda. Esta aproximación permite tratar los parámetros de los birrefringentes como constantes, sentando así una base sólida y bien definida para el tratamiento matemático que se desarrollará a continuación.

1.2.2. Tratamiento matemático

Es conocido que el efecto de un birrefringente sobre un estado polarizado puede visualizarse en la esfera de Poincaré como una rotación en 3D, tal como es señalado por [Chekhova y Banzer \(2021\)](#). El eje de esta rotación está determinado por los modos propios del birrefringente, los cuales son, por definición, los estados de polarización que permanecen invariantes al atravesar el medio. El ángulo de rotación, por su parte, está dado por el retardo elíptico efectivo γ experimentado por las componentes perpendiculares del campo eléctrico.

Cuando un estado de polarización \mathbf{S}^i incide sobre un medio birrefringente, el formalismo de los cuaterniones permite expresar el estado emergente como [Pabón, Hernandez, y Torres \(2023\)](#) lo enuncian:

$$\mathbf{S}^e = e^{\hat{\mathbf{n}}\frac{\gamma}{2}} \mathbf{S}^i e^{-\hat{\mathbf{n}}\frac{\gamma}{2}}, \quad (1.26)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ representa el eje de rotación asociado a los modos propios del medio y γ corresponde al retardo elíptico efectivo. Explícitamente, $\hat{\mathbf{n}}$ se escribe como

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_1 \cos 2\chi_p \cos 2\alpha_p + \hat{\mathbf{n}}_2 \cos 2\chi_p \sin 2\alpha_p + \hat{\mathbf{n}}_3 \sin 2\chi_p. \quad (1.27)$$

Aquí, α_p y χ_p corresponden a los ángulos de acimut y elipticidad de los modos propios de polarización del birrefringente.

1.2.3. Tipos de birrefringentes

Por otro lado, es posible distinguir tres tipos de birrefringentes según la naturaleza de sus modos propios. En primer lugar, los *birrefringentes lineales*, cuyo modo propio $\hat{\mathbf{n}}_l$ se ubica en algún punto en el ecuador de la esfera de Poincaré y se expresa como

$$\hat{\mathbf{n}}_l = \hat{\mathbf{n}}_1 \cos 2\alpha_p + \hat{\mathbf{n}}_2 \sin 2\alpha_p, \quad (1.28)$$

En segundo lugar, los *birrefringentes circulares*, también conocidos como elementos con *actividad óptica*. En este caso, el modo propio $\hat{\mathbf{n}}_c$ se localiza en los polos de la esfera de Poincaré, de modo que

$$\hat{\mathbf{n}}_c = \hat{\mathbf{n}}_3. \quad (1.29)$$

Finalmente, se encuentran los *birrefringentes con modos propios elípticos*, en los cuales $\hat{\mathbf{n}}$ se sitúa en una posición intermedia entre el ecuador y los polos de la esfera de Poincaré, y queda descrito por la Ec. 1.27.

Por simplicidad en la notación, y en lugar de emplear constantemente los nombres técnicos, en lo que sigue se utilizarán las siglas presentadas en la Tabla 1 para referirse a cada tipo de birrefringente.

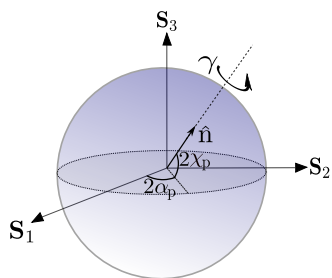
Tabla 1: Siglas para hacer referencia a los distintos tipos de birrefringentes.

Nombre	Sigla
Birrefringente lineal	BL
Birrefringente circular	BC
Birrefringente elíptico	BE

1.3. El Primer Teorema de Equivalencia de Jones

Por otra parte, en este trabajo resulta fundamental el *Primer Teorema de Equivalencia de Jones* (también denominado *Teorema I de Jones y Hurwitz (1941)*). Este establece que un **BE** —que puede entenderse como un sistema formado por un número arbitrario de placas retardadoras y rotadoras— es ópticamente equivalente a la composición de un **BC** y un **BL**.

Parámetros Intrínsecos



Parámetros Equivalentes

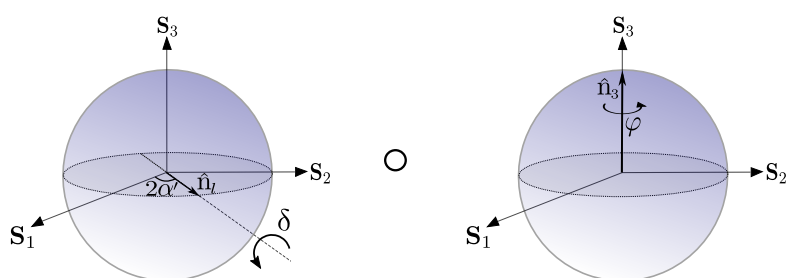


Figura 2: Representación visual del Primer Teorema de Equivalencia de Jones: la descomposición del **BE** en términos del **BC** y **BL** equivalentes.

1.3.1. Los parámetros de los birrefringentes

Tabla 2: Notación para los parámetros intrínsecos y equivalentes utilizados para describir los medios birrefringentes.

Parámetros intrínsecos		Parámetros equivalentes	
α_p	Acimut modo propio	α'	Acimut modo propio BL equivalente
χ_p	Elipticidad modo propio	δ	Retardo lineal equivalente
γ	Retardo elíptico	φ	Actividad óptica equivalente

Una de sus consecuencias más importantes es que el comportamiento de un birrefringente puede describirse mediante dos conjuntos de parámetros distintos, pero que representan (al menos en principio) el mismo efecto físico del medio, como lo ha mencionado [Pellat-Finet \(1984\)](#). Por un lado, los *parámetros intrínsecos* —ya introducidos en secciones anteriores—, que incluyen el retardo elíptico γ y los modos propios elípticos, caracterizados por el acimut α_p y la elipticidad χ_p . Por otro lado, los *parámetros equivalentes*, deducidos directamente del Primer Teorema de Equivalencia de Jones, permiten describir un **BE** en términos de un **BL** equivalente —caracterizado por un retardo lineal δ y un acimut α' — junto con una actividad óptica φ asociada al **BC** equivalente, tal como se representa en la Fig. (2). La Tabla 2 resume todos estos parámetros y los símbolos correspondientes que se emplearán en el resto del texto.

Tradicionalmente, la caracterización de los medios birrefringentes se ha centrado en sus parámetros intrínsecos, por lo cual muchos investigadores como [Yu y Chou \(2011\)](#) asumen que estos definen por completo sus propiedades ópticas. En este contexto, como lo afirman [Pellat-Finet y Lebreton \(1982\)](#), los parámetros equivalentes no se consideran propiedades físicas reales del material, sino una construcción matemática: si bien describen el efecto global del medio, no representan de forma directa ni el poder rotatorio ni la birrefringencia lineal, fenómenos que tienen lugar de manera simultánea y distribuida a lo largo del material. En otras palabras, se apunta a que esta descomposición debería entenderse como un modelo secuencial que facilita el cálculo y la interpretación del proceso.

1.3.2. Relaciones entre parámetros intrínsecos y equivalentes

Las relaciones entre los parámetros intrínsecos y equivalentes pueden deducirse mediante diversos formalismos matemáticos. Estas son fundamentales para la caracterización de la birrefringencia, ya que en muchos montajes experimentales es más práctico medir los parámetros equivalentes para luego calcular los intrínsecos. En el Capítulo 2 se describirán los métodos basados en este enfoque.

En el formalismo de cuaterniones presentado por [Pellat-Finet \(1984\)](#), esta deducción parte del Teorema I de Jones, que permite descomponer el operador de un BE como

$$\exp\left(\hat{\mathbf{n}}\frac{\gamma}{2}\right) = \exp\left(\hat{\mathbf{n}}_l\frac{\delta}{2}\right)\exp\left(\hat{\mathbf{n}}_c\frac{\varphi}{2}\right), \quad (1.30)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el modo propio del **BE**; mientras que $\hat{\mathbf{n}}_l$ y $\hat{\mathbf{n}}_c$ son, respectivamente, los modos propios del **BL** y del **BC**.

Aunque [Pellat-Finet \(1984\)](#) presenta con detalle la deducción de estas expresiones a partir de las reglas de operación de los cuaterniones, aquí solo se enuncian los resultados finales. Dichos resultados establecen las siguientes relaciones entre ambos conjuntos de parámetros:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\delta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}, \quad (1.31)$$

$$\tan 2\chi_p = \cot\frac{\delta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}, \quad (1.32)$$

$$\tan 2\alpha_p = \tan(2\alpha' - \varphi/2). \quad (1.33)$$

Sin embargo, estas ecuaciones no definen una correspondencia biyectiva desde los parámetros intrínsecos hacia los equivalentes. A continuación, se analizarán las dos fuentes principales de esta ambigüedad: la periodicidad y la paridad de las funciones trigonométricas.

1.3.2.1. Problemas de periodicidad

La primera fuente de ambigüedad proviene de la naturaleza periódica de las funciones trigonométricas. Como consecuencia, múltiples conjuntos de parámetros equivalentes, $E_j = (\alpha'_j, \delta_j, \varphi_j)$, pueden asociarse a un mismo conjunto de parámetros intrínsecos, $I = (\alpha_p, \chi_p, \gamma)$.

Esta multiplicidad se hace evidente en la Ec. (1.33). Como la función tangente tiene un período de π , la igualdad $\tan(2\alpha_p) = \tan(2\alpha' - \varphi/2)$ no establece una única relación entre sus argumentos, sino una familia de soluciones:

$$2\alpha_p = 2\alpha' - \frac{\varphi}{2} \pm n\pi, \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}. \quad (1.34)$$

Esta relación evidencia que, para un único valor del acimut intrínseco α_p , existen infinitas soluciones posibles para el acimut equivalente α' , separadas por múltiplos de $\pm\pi/2$. Incluso al restringir α' a su dominio principal $[0, \pi)$, persisten varias soluciones. En consecuencia, la periodicidad constituye una causa fundamental de la no biyectividad entre ambos conjuntos de parámetros.

Despejando α' de la Ec. 1.34, se obtiene

$$\alpha' = \alpha_p + \frac{\varphi}{4} \mp n\frac{\pi}{2}. \quad (1.35)$$

A partir de esta expresión, las dos soluciones que se encuentran en el intervalo $[0, \pi)$ son, por ejemplo, las correspondientes a $n = 0$ y $n = \pm 1$ (ajustadas mediante módulo π para permanecer en el dominio):

$$\alpha'_1 = \alpha_p + \frac{\varphi}{4} \quad (\text{mód } \pi), \quad (1.36)$$

$$\alpha'_2 = \alpha_p + \frac{\varphi}{4} \mp \frac{\pi}{2} \quad (\text{mód } \pi). \quad (1.37)$$

En consecuencia, la periodicidad constituye una causa fundamental de la falta de biyectividad entre ambos conjuntos de parámetros.

1.3.2.2. Problemas de paridad

Asimismo, la simetría de paridad de las funciones trigonométricas introduce otra ambigüedad. Bajo la transformación $(\delta, \varphi) \rightarrow (-\delta, -\varphi)$, el valor de γ en la Ec. (1.31) se preserva, ya que el coseno es una función par. De manera similar, el valor de χ_p en la Ec. (1.32) permanece constante, pues el término $\cot(\delta/2) \sin(\varphi/2)$ es el producto de dos funciones impares, lo que resulta en una función par.

En contraste, para preservar el valor de α_p se debe imponer una condición sobre el acimut equivalente α' . Definiendo dos conjuntos de parámetros $E_1 = (\alpha'_1, \delta, \varphi)$ y $E_2 = (\alpha'_2, -\delta, -\varphi)$, la condición de que ambos generen el mismo α_p en la Ec. (1.33) requiere que:

$$\tan(2\alpha'_1 - \varphi/2) = \tan(2\alpha'_2 - (-\varphi/2)).$$

De esta igualdad se deduce que $\alpha'_2 = \alpha'_1 - \varphi/2$. Esto demuestra que al menos dos conjuntos de parámetros equivalentes distintos, $E_1 = (\alpha'_1, \delta, \varphi)$ y $E_2 = (\alpha'_1 - \varphi/2, -\delta, -\varphi)$, se mapean al mismo conjunto de parámetros intrínsecos $I = (\alpha_p, \chi_p, \gamma)$, lo que confirma la ambigüedad por paridad.

1.3.2.3. Corolario de No Unicidad Paramétrica

Debido tanto a la periodicidad como a la simetría de signo, el mapeo entre los parámetros intrínsecos y los parámetros equivalentes definidos por las Ecs. (1.31)–(1.33) es fundamentalmente no biyectivo. Esta no biyectividad implica que, para un conjunto dado de parámetros intrínsecos (α, χ, γ) , la combinación equivalente correspondiente $(\alpha', \delta, \varphi)$ derivada matemáticamente no es única. Por este motivo, es pertinente definir el siguiente Corolario.

Corolario de No Unicidad Paramétrica. *El conjunto de parámetros intrínsecos $(\alpha_p, \chi_p, \gamma)$, que caracteriza a un birrefringente elíptico, no determina unívocamente el conjunto de parámetros equivalentes $(\alpha', \delta, \varphi)$, ya que es consistente con múltiples soluciones matemáticas.*

Aunque esta no biyectividad podría parecer una mera formalidad, adquirirá una relevancia determinante. Como se verá más adelante, los parámetros equivalentes están íntimamente ligados a propiedades físicas observables de los **BEs**. Por lo tanto, la existencia de múltiples conjuntos de parámetros matemáticamente válidos plantea un problema de selección física que será abordado en las secciones posteriores.

1.4. Las Leyes de los Birrefringentes

Para el desarrollo de este trabajo resulta fundamental presentar ciertas leyes que rigen el comportamiento de los birrefringentes, formuladas recientemente por [Salazar-Ariza y Torres \(2017\)](#) y posteriormente generalizadas por [Pabón y cols. \(2023\)](#). Este marco se fundamenta en un principio físico clave: dado que la birrefringencia es un operador lineal, la rotación de un medio **BE** para un estado de polarización incidente fijo genera una única y observable trayectoria de estados emergentes, **C**, sobre la esfera de Poincaré. Esta curva es, por tanto, una propiedad específica de cada medio.

Como paso previo para describir la ley en su forma general, es necesario primero explicar un caso más simple: la Ley de los Birrefringentes Lineales (LBL).

1.4.1. Ley de los Birrefringentes Lineales

Esta ley establece que la trayectoria generada por un haz polarizado al atravesar un **BL** en rotación se caracteriza por la curva de intersección entre la esfera de Poincaré y un cono [Salazar-Ariza y Torres \(2017\)](#). La geometría de este cono queda unívocamente determinada por el estado de polarización incidente y por las propiedades del medio. Su construcción geométrica parte del estado incidente $\mathbf{S}^i(2\alpha^i, 2\chi^i)$ y se establece siguiendo los siguientes pasos:

1. El vértice del cono se ubica en el estado *enantiógiro* $\mathbf{S}^\circ(2\alpha^i, -2\chi^i)$, que corresponde al punto simétrico de \mathbf{S}^i con respecto al plano ecuatorial de la esfera.
2. El ángulo de apertura del cono es igual al retardo lineal, δ , del medio birrefringente.
3. El eje de simetría del cono está definido por la línea que conecta el estado de polarización de entrada con su estado enantiógiro

De este modo, y tal como se representa en la Fig. 3a, los parámetros del **BL** definen por completo la trayectoria de los estados emergentes.

1.4.2. Ley de los Birrefringentes Elípticos

La Ley de los Birrefringentes Elípticos (LBE) generaliza el concepto anterior para un **BE** de manera simple y elegante. La ley sigue siendo la misma —la trayectoria es la intersección

de la esfera con un cono orientado— pero con una única modificación. Haciendo uso del Teorema I de Jones, la LBE postula que la acción de un **BE** es equivalente a la de un **BL**, precedido por un **BC** (Pabón y cols., 2023). Geométricamente, esto se traduce en una simple adición a las reglas de la LBL:

1. Se determina el estado de referencia *enantiógiro* $\mathbf{S}^\circ(2\alpha^i, -2\chi^i)$.
2. A continuación, dicho estado se rota un ángulo φ (la actividad óptica equivalente) alrededor del eje polar ($\hat{\mathbf{S}}_3$). El estado resultante,

$$\mathbf{S}^\times = \mathbf{S}^\times(2\alpha^i + \varphi, -2\chi^i). \quad (1.38)$$

es la posición del vértice del cono.

3. El ángulo de apertura del cono corresponde al retardo lineal equivalente δ .
4. El eje de simetría del cono para un BE es la línea que conecta el vértice del cono, \mathbf{S}^\times , con el estado de entrada rotado por la actividad óptica, $\mathbf{S}(2\alpha^i + \varphi, 2\chi^i)$.

Como se muestra en la Fig. 3b, una vez que el vértice \mathbf{S}^\times , la apertura δ y la orientación quedan establecidos, la curva de estados emergentes **C** está unívocamente determinada por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^e = & \hat{\mathbf{n}}_0 + \hat{\mathbf{n}}_1 \left(\cos 2\chi^i \cos 2\alpha^e + [\cos 2\chi^i \sin(2\alpha^e - 2\theta)(1 - \cos \delta) \pm \sin 2\chi^i \sin \delta] \sin 2\theta \right) \\ & + \hat{\mathbf{n}}_2 \left(\cos 2\chi^i \sin 2\alpha^e - [\cos 2\chi^i \sin(2\alpha^e - 2\theta)(1 - \cos \delta) \pm \sin 2\chi^i \sin \delta] \cos 2\theta \right) \\ & + \hat{\mathbf{n}}_3 \left(\pm \sin \delta \cos 2\chi^i \sin(2\alpha^e - 2\theta) + \sin 2\chi^i \cos \delta \right) \end{aligned} \quad (1.39)$$

donde \mathbf{S}^e corresponde a cada estado de salida, (α^i, χ^i) definen el estado de polarización incidente, α^e el acimut emergente y θ es el ángulo del eje rápido del **BE** con respecto a la horizontal. Además, se cumple que $2\alpha^e = 2\alpha^i + \varphi$.

La ecuación paramétrica del cono es

$$\begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\chi^i \cos(2\alpha^i + \varphi) + \left(\frac{1 - \cos \delta}{\sin \delta} \right) (z + \sin 2\chi^i) \sin 2t \\ \cos 2\chi^i \sin(2\alpha^i + \varphi) - \left(\frac{1 - \cos \delta}{\sin \delta} \right) (z + \sin 2\chi^i) \cos 2t \\ z \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

donde (S_1, S_2, S_3) es el estado emergente, y los parámetros independientes z y t generan la superficie del cono.

Finalmente, como lo demuestran Pabón y cols. (2023), vale la pena mencionar que aunque los modos propios del **BE** cambien en la medida en que este se rota en el espacio, su retardo elíptico γ permanece constante. Por lo tanto, la descomposición de este retardo por medio del retado lineal equivalente δ y la actividad óptica φ permanecen invariantes ante dicha rotación.

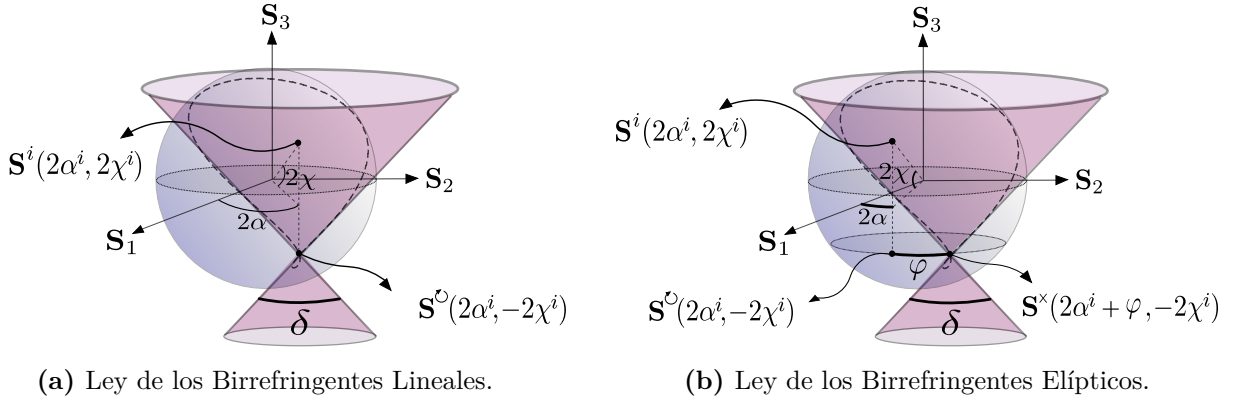


Figura 3: Representación visual de las Leyes de los Birrefringentes. En la LBE, para un estado incidente arbitrario $\mathbf{S}^i(2\alpha^i, 2\chi^i)$, el vértice del cono se encuentra en el estado enantiógiro $\mathbf{S}^o(2\alpha^i, -2\chi^i)$. Por otro lado, en la LBE, para un estado incidente arbitrario $\mathbf{S}^i(2\alpha^i, 2\chi^i)$, el vértice del cono se encuentra en el estado $\mathbf{S}^x(2\alpha^i + \varphi, -2\chi^i)$.

1.4.3. La LBE como Criterio de Selección

La importancia de la formulación de la LBE resalta por varias razones. En primer lugar, dota de un significado físico directo a un conjunto privilegiado de los parámetros equivalentes. La actividad óptica φ es el desplazamiento acimutal del vértice del cono, mientras que el retardo lineal δ es su ángulo de apertura. Además, es precisamente este significado físico lo que resuelve la ambigüedad de la relación entre los parámetros intrínsecos y equivalentes expresada en el Corolario de No Unicidad Paramétrica tal como se verá a continuación.

Corolario de Selección. *Dado un birrefringente elíptico arbitrario, se define a \mathbf{C} como la trayectoria única de todos los posibles estados emergentes generados por él en la esfera de Poincaré. Ya que \mathbf{C} obedece a la Ley de los Birrefringentes Elípticos, selecciona de manera única el conjunto de parámetros equivalentes del Teorema I de Jones que es físicamente válido.*

Demostración. Como lo establece el Corolario de No Unicidad, para un conjunto dado de parámetros intrínsecos que definen un **BE**, existen múltiples conjuntos de parámetros equivalentes $P_j = (\alpha'_j, \delta_j, \varphi_j)$ matemáticamente válidos. Sin embargo, según la LBE, cada conjunto P_j definiría una curva teórica \mathbf{C}_j generada por un cono con vértice en $\mathbf{S}_j^x(2\alpha^i + \varphi_j, -2\chi^i)$ y apertura δ_j . Para que cualquiera de estas curvas teóricas sea idéntica a la trayectoria física observada \mathbf{C} , es necesario que los conos que las generan sean idénticos. Esta identidad geométrica impone la igualdad de los vértices ($\mathbf{S}_j^x = \mathbf{S}^x$) y de las aperturas ($\delta_j = \delta$). Estas condiciones implican $\varphi_j = \varphi$ y $\delta_j = \delta$; lo que fuerza inmediatamente la coincidencia del tercer parámetro, $\alpha'_j = \alpha'$, pues estos tres están ligados. Por lo tanto, solo un único conjunto de parámetros equivalentes puede describir la trayectoria física, demostrando que la unicidad de \mathbf{C} actúa como un criterio de selección inequívoco. \square

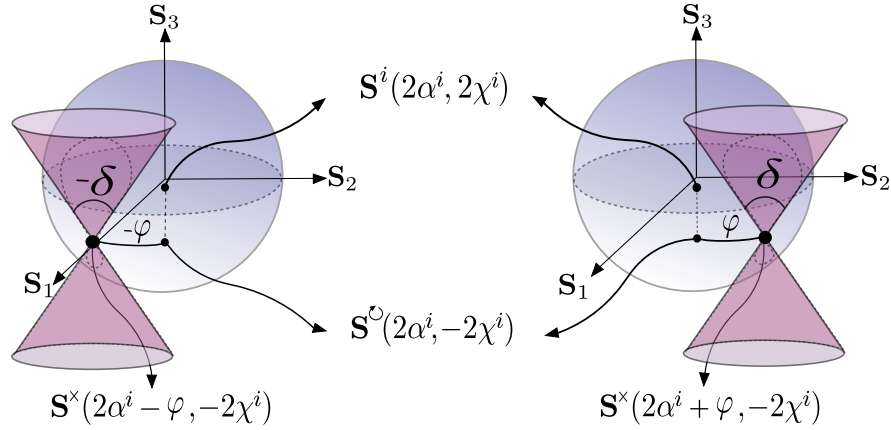


Figura 4: Representación visual del Corolario de No Unicidad Paramétrica para el caso de la ambigüedad de paridad. Dados unos parámetros intrínsecos y un estado de polarización incidente $\mathbf{S}^i(2\alpha^i, 2\chi^i)$, existen dos soluciones matemáticas para los parámetros equivalentes: (δ, φ) y $(-\delta, -\varphi)$. Por las propiedades de la Ec. 1.40, ambos conjuntos de parámetros generan el mismo cono; sin embargo, la curva de estados emergentes es diferente en cada caso, pues los vértices de los conos están ubicados en estados distintos.

1.4.4. El poder predictivo de los parámetros equivalentes

Además, aunque la LBE tiende un puente entre la descomposición matemática del Teorema I de Jones y la realidad física observable, su verdadera importancia reside en el poder predictivo que confiere a los parámetros equivalentes.

Si bien los parámetros intrínsecos describen propiedades fundamentales del medio, son los equivalentes los que determinan la geometría de su comportamiento observable: la trayectoria de los estados emergentes. Al aplicar el Corolario de Selección —fundamentado en la LBE— para identificar el único conjunto físicamente válido, se resuelve la ambigüedad sobre esta trayectoria (un problema ilustrado en la Fig. 4). Esto permite definir con total precisión el lugar geométrico sobre el cual se encuentran todos los posibles estados de salida.

Este poder predictivo se extiende aún más. Dado que las propias reglas de la LBE establecen cómo la geometría de la trayectoria depende del estado de entrada, es posible anticipar la trayectoria de estados emergentes del **BE** para cualquier estado de polarización incidente arbitrario. Esta es una capacidad que los parámetros intrínsecos, por sí solos, no pueden ofrecer.

1.4.5. Notas preliminares para medir los parámetros equivalentes

La conexión entre el Teorema I de Jones y la trayectoria de los estados emergentes se manifiesta de forma explícita al analizar los puntos de máxima y mínima elipticidad, $\hat{\mathbf{S}}_+$ y

\hat{S}_- , que se encuentran sobre dicha trayectoria. Según lo establecen [Pabón, Salazar, y Torres \(2021\)](#), la LBE predice que el retardo lineal equivalente, δ , gobierna directamente los valores de la elipticidad para dichos estados de la siguiente manera:

$$2\chi_{\pm} = 2\chi^i \pm \delta, \quad (1.41)$$

donde $2\chi^i$ es la elipticidad del estado incidente y $2\chi^{\pm}$ son las elipticidades de los estados \hat{S}_{\pm} .

La Ec. (1.41) será relevante más adelante, pues proporcionará un método experimental directo para determinar correctamente el valor de δ . Al medir la elipticidad del estado de entrada y las elipticidades extremas de la trayectoria de salida, el retardo lineal equivalente quedará unívocamente determinado. Una vez conocido δ , la actividad óptica equivalente φ puede obtenerse a partir de la posición del vértice del cono, completando la caracterización.

En pocas palabras, la LBE traduce la descomposición del Teorema I de Jones a un lenguaje geométrico, elevando así a los parámetros equivalentes de una mera conveniencia matemática a propiedades físicamente verificables.

1.5. Contribuciones

Las contribuciones originales desarrolladas en este capítulo se centran en presentar y resolver una ambigüedad fundamental en la teoría de la birrefringencia. En primer lugar, se demuestra formalmente la no biyectividad de las ecuaciones que conectan los parámetros intrínsecos con los equivalentes, identificando la periodicidad y paridad de las funciones trigonométricas como sus causas. Este hallazgo se sintetiza en el Corolario de No Unicidad Paramétrica, el cual evidencia la necesidad de un criterio adicional para una caracterización inequívoca del medio.

Como solución a esta ambigüedad, se postula que la Ley de los Birrefringentes Elípticos sirve como dicho criterio. Se argumenta que la unicidad de la trayectoria de los estados emergentes en la esfera de Poincaré implica la existencia de un único cono geométrico cuya intersección con la esfera reproduce exactamente dicha trayectoria. Esto permite identificar de manera inequívoca el conjunto de parámetros equivalentes físicamente válido, lo que se establece formalmente en el Corolario de Selección.

Este nuevo marco teórico hace posible dotar de un robusto significado físico a los parámetros equivalentes. Se propone una interpretación en la que el retardo lineal, δ , y la actividad óptica, φ , dejan de ser meras construcciones matemáticas para corresponder directamente con propiedades geométricas observables. Esta conexión, a su vez, dota a la caracterización de un poder predictivo global: al definir la trayectoria completa, se hace posible anticipar todos los posibles estados emergentes para cualquier estado incidente, una capacidad que va más allá de lo que los parámetros intrínsecos pueden ofrecer. Finalmente, como consecuencia

directa de estos hallazgos, se esbozan algunos aspectos importantes para un novedoso método de medición fundamentado en la Ley de los Birrefringentes Elípticos, que será desarrollado formalmente en el Capítulo 3.

Capítulo 2

Enfoques actuales en la medición

En este capítulo se presenta una revisión de los métodos de medición de la birrefringencia. El interés no se centra en describir los detalles técnicos de cada implementación, sino en identificar los parámetros que cada técnica permite medir y calcular, así como aquellos parámetros que son omitidos.

A partir del marco teórico establecido en el primer capítulo, puede definirse el objetivo ideal de la metrología de la birrefringencia: un método que, por un lado, determine de forma simultánea e independiente los dos conjuntos de parámetros que describen al birrefringente y, por otro, esté fundamentado en leyes físicas. Cada uno de estos criterios es indispensable, como se justifica a continuación:

- **Significado físico:** Es esencial para resolver la ambigüedad planteada por el Corolario de No Unicidad Paramétrica. Garantiza que, de los múltiples conjuntos de parámetros equivalentes matemáticamente posibles, se identifique el único que corresponde a la realidad física observable que define la curva de estados emergentes.
- **Independencia:** Es necesaria para evitar las ambigüedades derivadas de las relaciones matemáticas que vinculan ambos conjuntos de parámetros, es decir, la falta de biyectividad.
- **Simultaneidad:** Constituye un requisito de eficiencia, pues evita la complejidad y las posibles dificultades de emplear dos montajes experimentales distintos para caracterizar un único medio birrefringente.

Una medición con estas características proporcionaría una descripción completa y libre de ambigüedades del sistema. Sin embargo, el análisis del estado del arte que se presentará a continuación pondrá de manifiesto que ningún método actual satisface estas tres condiciones. En cambio, los métodos existentes pueden clasificarse en tres categorías:

1. Aquellos que miden un conjunto de parámetros para luego calcular el otro.
2. Aquellos que se limitan a medir únicamente los parámetros intrínsecos.
3. Aquellos que realizan una caracterización parcial, midiendo solo un subconjunto de alguno de los dos conjuntos de parámetros.

Esta revisión evidencia una brecha en las técnicas actuales, justificando así el desarrollo del método que se presenta en el Capítulo III.

2.1. Medición de parámetros intrínsecos

2.1.1. Método de medición de Tres Intensidades

A través de un montaje polarimétrico que requiere únicamente tres mediciones de intensidad para dos estados de polarización incidentes, el método propuesto por el equipo de [Lin, Han, y Chao \(2008\)](#) mide los tres parámetros intrínsecos del **BE**: el acimut α_p y la elipticidad χ_p de los modos propios, así como el retardo elíptico γ . El trabajo se centra en la determinación directa y exclusiva de este conjunto de parámetros.

La principal fortaleza de este trabajo es su simplicidad experimental y eficiencia. Al basarse en solo tres mediciones de intensidad, el método es rápido y, además, no requiere de componentes ópticos complejos.

2.1.2. Método de análisis de Fourier

En el método propuesto por [Kurzynowski, Drobczyński, y Woźniak \(2009\)](#), se determinan de forma indirecta y simultánea los tres parámetros intrínsecos del **BE**. La técnica se basa en un polariscopio elíptico espacial modificado que emplea un conjunto de compensadores, tanto lineales como circulares, para codificar la información de polarización en un patrón de franjas espaciales. La medición directa es una única imagen de la distribución de intensidad de la luz capturada a la salida del sistema. Posteriormente, mediante un análisis de Fourier de esta imagen de intensidad, se extraen coeficientes de Fourier específicos que permiten calcular algebraicamente y de forma explícita los mencionados parámetros de dicho medio.

La principal fortaleza de este trabajo es su capacidad para realizar una caracterización completa de los parámetros intrínsecos a partir de una única captura de intensidad. Esta característica lo hace muy rápido y apto para mediciones en tiempo real de fenómenos dinámicos.

2.1.3. Debilidades de este enfoque

Desde la perspectiva de la discusión desarrollada en el primer capítulo, la debilidad fundamental del enfoque que comparten estos dos métodos es que la caracterización del medio es incompleta. Al limitarse a los parámetros intrínsecos, no se explora la descripción complementaria que ofrecen los parámetros equivalentes, lo que resulta en una visión parcial de la birrefringencia.

2.2. Medición de parámetros equivalentes

2.2.1. Elipsómetro heterodino de doble frecuencia

El artículo de [Yu y cols. \(2009\)](#) presenta un método que mide tres parámetros equivalentes para un **BE** utilizando un elipsómetro heterodino de doble frecuencia. A partir de este conjunto de parámetros medidos se calculan los tres parámetros intrínsecos, los cuales no son medidos directamente, sino derivados matemáticamente mediante las Ecs.1.31, 1.32.

La fortaleza principal de este trabajo radica en la alta precisión y sensibilidad inherentes a la técnica de detección heterodina, la cual es conocida por su excelente relación señal/ruido. Más aún, este método — y, en general, este enfoque experimental— resulta especialmente notable porque permite la caracterización más completa del medio, al obtener los seis parámetros que lo definen.

2.2.2. Debilidades de este enfoque

Este método, al igual que cualquier otro que intente medir parámetros equivalentes sin apoyarse en el criterio físico proporcionado por la LBE, presenta una debilidad crucial: los parámetros son tratados como meramente matemáticos, sin vincularse a una realidad física observable, como la trayectoria de los estados emergentes en la esfera de Poincaré.

Esta interpretación inadecuada genera incertidumbre sobre el significado físico de los parámetros medidos. Como lo establece el Corolario de No Unicidad Paramétrica, para cualquier **BE** existen múltiples conjuntos de parámetros equivalentes $\{\alpha'_j, \delta_j, \varphi_j\}$ que describen matemáticamente la misma transformación. El método mide uno de estos conjuntos, pero al no apoyarse en las propiedades geométricas de la LBE, no ofrece un criterio que garantice que los valores obtenidos correspondan al conjunto físicamente correcto. En consecuencia, no se puede asegurar que la curva de estados emergentes predicha coincida con la trayectoria única y observable generada por el medio real.

No obstante, es justo reconocer que este enfoque ofrece una posible vía de validación. Si los parámetros intrínsecos calculados a partir de los equivalentes medidos fueran contrastados

y coincidieran con los valores obtenidos mediante un método independiente —particularmente aquellos diseñados para medir directamente los parámetros intrínsecos— se dispondría de una fuerte evidencia de que el conjunto de parámetros equivalentes medido era, en efecto, el físicamente significativo. Sin embargo, esta misma posibilidad expone la debilidad final del método: dejaría de constituir una técnica de caracterización completa y autosuficiente, pues requeriría un segundo experimento, con un montaje y una metodología distintos, únicamente para validar sus propios resultados. En consecuencia, la confianza en el método no provendría de un criterio físico interno, sino de su corroboración externa.

2.3. Medición de subconjuntos de parámetros

2.3.1. Polarimetría espectroscópica de matrices de Mueller

El método presentado por [Gu y cols. \(2018\)](#) es exhaustivo en medir los parámetros equivalentes de láminas de onda compuestas, incluyendo los efectos del diacromatismo. Mediante polarimetría de matriz de Mueller espectroscópica, el método mide experimentalmente la matriz de Mueller completa del sistema. A partir de sus elementos, se extraen directamente los tres parámetros equivalentes y , a partir de estos, se procede a calcular dos de los tres parámetros intrínsecos usando las Ecs.1.31, 1.32. Sin embargo, el acimut de los modos propios, α_p , no se calcula ni se reporta en ningún momento; el artículo solo proporciona ecuaciones para derivar los otros dos parámetros intrínsecos (χ_p, γ) a partir de los equivalentes medidos. Por lo tanto, no se logra una medición independiente de ambos conjuntos, ni tampoco se alcanza una caracterización completa en el marco de los parámetros intrínsecos.

La fortaleza más significativa de este trabajo es su rigurosidad y su alcance. El uso de la polarimetría de matriz de Mueller espectroscópica permite una caracterización robusta en un amplio rango de longitudes de onda. Además, la capacidad del método para, a partir de los espectros de los parámetros equivalentes, reconstruir la estructura física interna de la lámina de onda compuesta (espesores y errores de alineación) es una herramienta de metrología muy poderosa.

2.3.2. Método de Sénarmont Generalizado

El artículo de [Kurzynowski \(2001\)](#) presenta un método para medir dos de los tres parámetros intrínsecos de un **BE**. Específicamente, el procedimiento es una modificación en dos pasos del compensador de Sénarmont clásico. El acimut de los modos propios, α_p , no se mide, sino que se asume como conocido. El artículo no aborda la medición de los parámetros equivalentes. El formalismo se centra exclusivamente en propiedades de la matriz de Mueller del medio, sin conectar estas propiedades con la representación equivalente del Teorema I

de Jones. Por lo tanto, no se obtiene una caracterización completa del medio, ya que solo se determinan dos de los seis parámetros que lo definen.

La fortaleza principal del artículo reside en su notable simplicidad y en la adaptación de una técnica clásica y ampliamente accesible. El montaje experimental es sencillo, basándose únicamente en la rotación de un analizador para encontrar mínimos de intensidad.

2.3.3. Debilidades de este enfoque

La principal debilidad de cualquier enfoque que mida solo una parte de cada conjunto de parámetros es que ofrece una caracterización incompleta del medio birrefringente, lo que lo convierte en el menos robusto de todos. Dependiendo de qué conjunto se mida y cuál se omita, este enfoque presenta dos dificultades.

En primer lugar, los métodos que se limitan a medir un subconjunto de los parámetros equivalentes no solo proporcionan información insuficiente, sino que además transmiten al cálculo de los parámetros intrínsecos la incertidumbre derivada del Corolario de No Unicidad. De este modo, además de carecer de un criterio físico de selección, terminan por ofrecer una descripción incompleta en ambos marcos de representación.

En segundo lugar, los métodos basados en subconjuntos de parámetros intrínsecos son aún más restrictivos: omiten por completo los parámetros equivalentes y pierden la conexión con la LBE. Además, su dependencia de información previa —como el acimut α_p en el caso de [Kurzynowski \(2001\)](#)— limita su aplicabilidad.

En conclusión, aunque estos métodos pueden ser útiles en aplicaciones específicas donde una caracterización parcial resulta suficiente, su incompletitud implica una pérdida fundamental de la visión dual del fenómeno, del poder predictivo y de la certeza física.

2.4. Conclusiones

La revisión de la literatura revela una brecha importante en la metrología actual de la birrefringencia. La conclusión principal es que ninguno de los métodos analizados satisface los tres criterios ideales propuestos al inicio de este capítulo: la determinación independiente, simultánea y físicamente significativa de todos los parámetros que definen al birrefringente.

El aspecto más crítico, sin embargo, no es solo la incompletitud, sino la ausencia de un fundamento físico que guíe la medición. Como se estableció en el Capítulo I, la relación entre los parámetros intrínsecos y equivalentes es ambigua. Ninguno de los enfoques revisados se fundamenta en un principio físico como la LBE para resolver la ambigüedad descrita en el Corolario de No Unicidad Paramétrica. En consecuencia, aunque un método mida un conjunto de parámetros equivalentes, no puede garantizar que sea el conjunto físicamente correcto; es decir, aquel que se corresponde con la geometría observable de la trayectoria de

estados emergentes, tal como lo exige el Corolario de Selección. A modo de resumen, en la Tabla 3 se presenta un análisis comparativo de los métodos de medición, donde se ponen de manifiesto las principales falencias de los enfoques actuales. Esto subraya la necesidad de desarrollar una nueva metodología fundamentada en los principios físicos establecidos en el Capítulo I. Dicha metodología se propondrá y desarrollará en el siguiente capítulo.

Tabla 3: Análisis comparativo de los métodos de medición de birrefringencia.

Referencia	Mide Intrínsecos	Mide Equivalentes	Resuelve Ambigüedad	Limitaciones Principales
Lin y cols. (2008)	Sí	No	No	Omite los parámetros equivalentes.
Kurzynowski y cols. (2009)	Calculados	No	No	Omite los parámetros equivalentes.
Yu y cols. (2009)	Calculados	Sí	No	No da interpretación física a los parámetros equivalentes. Está expuesto a ambigüedades por falta de biyectividad.
Gu y cols. (2018)	Parcial (calcula 2 de 3)	Sí	No	Caracterización incompleta. No da interpretación física a los parámetros equivalentes.
Kurzynowski (2001)	Parcial (mide 2 de 3)	No	No	Caracterización incompleta. Omite los parámetros equivalentes.

Capítulo 3

Nuevo método de medición

El análisis realizado en el Capítulo 2 concluyó con la identificación de una brecha en el estado del arte: la ausencia de una metodología que satisfaga criterios ideales de medición propuestos para la determinación inequívoca de todos los parámetros de los birrefringentes. Se demostró que los enfoques actuales, al carecer de una relación directa con la LBE, no logran resolver la incertidumbre descrita en el Corolario de No Unicidad Paramétrica.

En respuesta directa a este vacío, este capítulo presenta un nuevo método de medición que se fundamenta precisamente en el marco teórico desarrollado en el Capítulo 1. Se proponen ecuaciones explícitas, derivadas directamente de la LBE, que permiten determinar de manera inequívoca el único conjunto de parámetros equivalentes que es físicamente significativo, cumpliendo así con el Corolario de Selección.

La clave de este enfoque reside en el uso estratégico de solo dos estados de polarización incidentes —uno lineal y uno circular— y sus correspondientes estados emergentes. Esta elección no es arbitraria; está específicamente diseñada para satisfacer los criterios de metrología ideal presentados en el Capítulo 2. Como se demostrará, la transformación del estado lineal permite obtener la actividad óptica (φ) y el acimut del eje del **BL** (α'), mientras que la transformación del estado circular determina directamente el valor del retardo lineal (δ). A su vez, el análisis geométrico de estas transformaciones en la esfera de Poincaré conduce a una determinación unívoca de los parámetros intrínsecos. De esta forma, la metodología no solo cumple con los criterios previamente establecidos, sino que también destaca por su simplicidad experimental.

3.1. Teorema de Monerie-Jeunhomme

Antes de deducir las nuevas ecuaciones de los parámetros, es fundamental establecer que, para cualquier **BE**, siempre existe un estado lineal emergente correspondiente a un estado lineal incidente específico. Esta propiedad fue formulada inicialmente por [Monerie y](#)

Jeunhomme (1980) en el contexto de fibras ópticas y más tarde verificada experimentalmente en dichos medios, de forma rigurosa, por VanWiggeren y Roy (1999). Posteriormente, Chartier, Hideur, Özkul, Sanchez, y Stéphan (2001) la extendieron a **BEs** arbitrarios. Dada su relevancia, en este trabajo la propiedad se enuncia por primera vez como un teorema —que en honor a quienes la descubrieron por primera vez se denominará Teorema de Monerie-Jeunhomme— y se demuestra dentro del marco de los cuaterniones. Esta demostración no solo facilita la interpretación del fenómeno, sino que conduce a una nueva relación matemática que servirá como base para la medición de los parámetros equivalentes.

Teorema de Monerie-Jeunhomme. *Existen dos estados de polarización lineal ortogonales que, cuando inciden sobre un birrefringente elíptico arbitrario, también emergen como estados lineales.*

Demostración. Sea un estado lineal $\mathbf{S}_L^i(2\alpha_L^i, 0)$ incidente sobre un **BE** arbitrario cuyo operador está dado por

$$e^{\hat{\mathbf{n}}\frac{\gamma}{2}} = \cos \frac{\gamma}{2} + \hat{\mathbf{n}} \sin \frac{\gamma}{2}, \quad (3.1)$$

con modo propio descrito por la Ec. 1.27. Como se ha dicho en la Ec. 1.26 la transformación del estado incidente se expresa como

$$\mathbf{S}^e = e^{\hat{\mathbf{n}}\frac{\gamma}{2}} \mathbf{S}_L^i(2\alpha_L^i, 0) e^{-\hat{\mathbf{n}}\frac{\gamma}{2}}, \quad (3.2)$$

donde \mathbf{S}^e es el estado emergente. De acuerdo con el Teorema I de Jones, el operador del **BE** puede escribirse como la Ec. 1.30. Es decir, el estado que emerge al pasar por el **BE** será igual a

$$\mathbf{S}^e = e^{\hat{\mathbf{n}}_l\frac{\delta}{2}} e^{\hat{\mathbf{n}}_3\frac{\varphi}{2}} \mathbf{S}_L^i(2\alpha_L^i, 0) e^{-\hat{\mathbf{n}}_3\frac{\varphi}{2}} e^{-\hat{\mathbf{n}}_l\frac{\delta}{2}}. \quad (3.3)$$

Por otro lado, Pabón y cols. (2023) han demostrado que al aplicar solo el **BC** equivalente sobre el estado de polarización incidente $\hat{\mathbf{S}}^i$ se cumple que

$$\mathbf{S}^e = e^{\hat{\mathbf{n}}_l\frac{\delta}{2}} \underbrace{e^{\hat{\mathbf{n}}_3\frac{\varphi}{2}} \mathbf{S}_L^i(2\alpha_L^i, 0) e^{-\hat{\mathbf{n}}_3\frac{\varphi}{2}}}_{\mathbf{S}_L^i(2\alpha_L^i + \varphi, 0)} e^{-\hat{\mathbf{n}}_l\frac{\delta}{2}}. \quad (3.4)$$

Por lo tanto, esto permite escribir la Ec. 3.3 como

$$\mathbf{S}^e = e^{\hat{\mathbf{n}}_l\frac{\delta}{2}} \mathbf{S}_L^i(2\alpha_L^i + \varphi, 0) e^{-\hat{\mathbf{n}}_l\frac{\delta}{2}}. \quad (3.5)$$

Como se puede observar, el estado $\mathbf{S}_L^i(2\alpha_L^i + \varphi, 0)$ continúa siendo lineal. Para encontrar el estado emergente \mathbf{S}^e sólo haría falta aplicar la componente lineal del **BE** según el Teorema I de Jones. O, en otras palabras, solo haría falta aplicar el **BL** equivalente, cuyo operador es

$$e^{\hat{\mathbf{n}}_l\frac{\delta}{2}} = \cos \frac{\delta}{2} + \hat{\mathbf{n}}_l \sin \frac{\delta}{2}, \quad (3.6)$$

y cuyo modo propio, según la Ec. 1.28, está dado por

$$\hat{\mathbf{n}}_l = \hat{\mathbf{n}}_1 \cos 2\alpha' + \hat{\mathbf{n}}_2 \sin 2\alpha'. \quad (3.7)$$

Sin embargo, siempre existe un caso particular. Si el estado $\mathbf{S}_L^i(2\alpha_L^i + \varphi, 0)$ tiene un acimut que coincide con el acimut de los modos propios del **BL** equivalente ($2\alpha'$), entonces dicho estado se encontrará en el eje de rotación del operador de dicho **BL** y, por lo tanto, permanecerá invariante. De esta manera, el estado emergente \mathbf{S}^e será lineal y tendrá un acimut emergente $2\alpha_L^e$, dado por

$$2\alpha_L^e = 2\alpha_L^i + \varphi = 2\alpha'. \quad (3.8)$$

Por consiguiente, se demuestra que existe un estado linealmente polarizado que, cuando incide sobre un **BE**, también emerge como un estado linealmente polarizado, con su plano de polarización rotado debido al poder rotatorio equivalente del **BE**. El segundo estado lineal invariante corresponde al de polarización ortogonal al incidente \mathbf{S}_L^i , analizado aquí, y constituye el otro modo propio del **BL** definido en la Ec. 3.7. \square

Una vez demostrada la validez del Teorema de Monerie-Jeunhomme, este proporciona la base directa para caracterizar los parámetros equivalentes del **BE**. Para avanzar en este propósito, es necesario definir con claridad los estados de polarización que se emplearán en el método.

3.2. Definición de los estados incidentes y emergentes

Sean los estados incidentes el estado lineal \mathbf{S}_L^i y el estado circular \mathbf{S}_C^i de la forma

$$\mathbf{S}_L^i = \mathbf{S}_L^i(2\alpha_L^i, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{S}_C^i = \mathbf{S}_C^i(2\alpha_C^i, \pm\pi/2). \quad (3.9)$$

El estado lineal incidente es escogido de tal manera que cumpla con el Teorema de Monerie-Jeunhomme, de modo que su respectivo estado emergente es \mathbf{S}_L^e . Por otro lado, la transformación del estado circular dará lugar, en general, a un estado elíptico \mathbf{S}_E^e de modo que

$$\mathbf{S}_L^e = \mathbf{S}_L^e(2\alpha_L^e, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{S}_E^e = \mathbf{S}_E^e(2\alpha_E^e, 2\chi_E^e). \quad (3.10)$$

Estas transformaciones se muestran en la Fig. 5a en el espacio físico y en la Fig. 5b en la esfera de Poincaré, donde —como se mencionó en el Capítulo 1— el efecto de un **BE** en los estados de polarización se visualiza como una rotación en la superficie de dicha esfera. Utilizando estos cuatro estados específicos, ahora es posible la deducción explícita de las nuevas ecuaciones para determinar los parámetros intrínsecos y equivalentes.

Sin embargo, como lo han demostrado [Salazar-Ariza y Torres \(2017\)](#), al aplicar un **BL** sobre un estado circular, todos los posibles estados emergentes tienen la misma elipticidad; por lo tanto, cualquiera de ellos corresponde al estado de máxima o mínima elipticidad y se denota como \mathbf{S}_{\pm} . En consecuencia, para la elipticidad del estado \mathbf{S}_E^e se cumple la Ec. 1.41. En particular,

$$2\chi^e = 2\chi_{\pm} = 2\chi^i \pm \delta. \quad (3.16)$$

Al despejar, δ en términos de las elipticidades de los estados incidentes y emergentes se obtiene

$$\pm\delta = 2(\chi_{\pm}^e - \chi_C^i). \quad (3.17)$$

La ambigüedad en esta expresión se resuelve mediante el estado circular incidente utilizado en el experimento. El procedimiento es el siguiente. Si el estado incidente es circular derecho (polo norte de la esfera de Poincaré), el estado emergente corresponderá al de mínima elipticidad (χ_-^e). Para este caso, la relación se define seleccionando el signo negativo de la ecuación, lo que conduce a: $\delta = -2(\chi_-^e - \chi_C^i)$. Por otro lado, si se utiliza un estado incidente circular izquierdo (polo sur), el estado emergente será el de máxima elipticidad (χ_+^e). En esta situación, se debe seleccionar el signo positivo de la ecuación, definiendo la relación como: $\delta = +2(\chi_+^e - \chi_C^i)$.

De esta manera, por las propiedades de unicidad de la trayectoria de los estados emergentes de cada **BE** descrita por la LEB, queda demostrado que los estados incidentes y emergentes definidos por las Ecs. 3.9 y 3.10 son suficientes para determinar, de manera inequívoca, los parámetros equivalentes físicamente significativos.

3.4. Medición de los parámetros intrínsecos

3.4.1. Modos propios

Para la caracterización de los parámetros intrínsecos, se utilizan los mismos estados de polarización definidos en las Ecs. 3.9 y 3.10, representados como vectores de Stokes en la esfera de Poincaré. En el caso de la determinación de los modos propios, la Fig. 7 sintetiza el proceso que se describe a continuación.

En primer lugar, se definen los vectores diferencia entre cada estado incidente y su correspondiente estado emergente en la esfera de Poincaré de la siguiente manera

$$\Delta\vec{\mathbf{S}}_L = \vec{\mathbf{S}}_L^e - \vec{\mathbf{S}}_L^i \quad \text{y} \quad \Delta\vec{\mathbf{S}}_C = \vec{\mathbf{S}}_E^e - \vec{\mathbf{S}}_C^i. \quad (3.18)$$

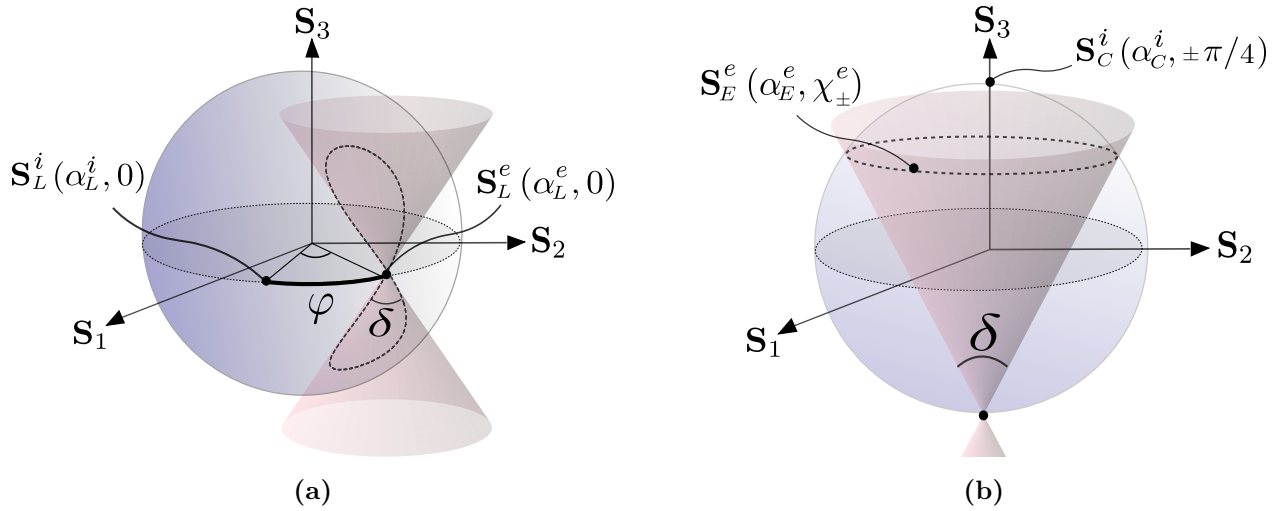


Figura 6: Curvas de los estados emergentes generadas por un **BE** para los estados \mathbf{S}_L^i y \mathbf{S}_C^i . El análisis de la transformación del estado lineal permite hallar φ y α' . Por otro lado, δ se encuentra a partir del estudio de la transformación del estado circular.

El producto cruz entre los vectores diferencia da como resultado un vector $\vec{\mathbf{n}}$ tal que es paralelo a los modos propios:

$$\Delta\vec{\mathbf{S}}_L \times \Delta\vec{\mathbf{S}}_C = \vec{\mathbf{n}}. \quad (3.19)$$

Por lo tanto, el vector normalizado $\hat{\mathbf{n}}$ corresponderá a los modos propios definidos por la Ec. 1.27. Con lo cual,

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{S}}_L \times \Delta\vec{\mathbf{S}}_C}{|\Delta\vec{\mathbf{S}}_L \times \Delta\vec{\mathbf{S}}_C|}. \quad (3.20)$$

Analizando las componentes de $\hat{\mathbf{n}}$ según la Ec. 1.27 es posible calcular α_p y χ_p de la siguiente forma. En primer lugar, la elipticidad χ_p se calcula directamente a partir de la tercera componente del vector $\hat{\mathbf{n}}$:

$$\chi_p = \frac{1}{2} \arcsin(n_3). \quad (3.21)$$

Mientras tanto, el acimut α_p se determina usando las dos primeras componentes de dicho vector (n_1 y n_2). Para asegurar que el ángulo se calcule sin ambigüedades, se utiliza la función arcotangente de dos argumentos (atan2):

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \text{atan2}(n_2, n_1). \quad (3.22)$$

De esta forma, con las Ecs. 3.21 y 3.22, se caracterizan los modos propios del medio.

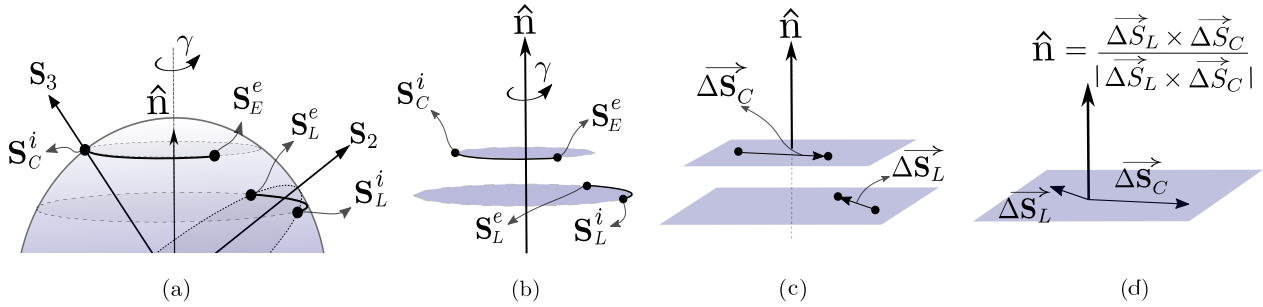


Figura 7: Esquema del proceso para hallar los modos propios $\hat{\mathbf{n}}$ del **BE**. La transformación de los estados \mathbf{S}_L^i y \mathbf{S}_C^i (Fig. (a)) sucede en planos paralelos (Fig. (b)); por lo tanto, es posible definir los vectores coplanares $\Delta\vec{\mathbf{S}}_L$ y $\Delta\vec{\mathbf{S}}_C$ (Fig. (c)), de modo que su producto cruz normalizado define $\hat{\mathbf{n}}$ (Fig. (d)).

3.4.2. Retardo elíptico

Finalmente, el siguiente paso es la determinación del retardo elíptico γ . Por las propiedades de los birrefringentes mencionadas en el primer capítulo, la transformación geométrica del estado de entrada $\vec{\mathbf{S}}^i$ en el estado de salida $\vec{\mathbf{S}}^e$ corresponde a una rotación de un ángulo γ alrededor del eje de rotación $\hat{\mathbf{n}}$ definido en la Ec. 3.20. Esta transformación se ilustra en la Fig. 8.

Debido a lo anterior, al realizar la proyección de los vectores $\vec{\mathbf{S}}^i$ y $\vec{\mathbf{S}}^e$ sobre el eje $\hat{\mathbf{n}}$, dicha proyección será la misma para ambos estados

$$\text{proy}_{\hat{\mathbf{n}}} \vec{\mathbf{S}}^i = \text{proy}_{\hat{\mathbf{n}}} \vec{\mathbf{S}}^e \quad (3.23)$$

Teniendo esto en cuenta, se pueden definir los vectores $\vec{\mathbf{R}}^i$ y $\vec{\mathbf{R}}^e$ como la extensión desde el eje $\hat{\mathbf{n}}$ hasta los puntos representados por $\vec{\mathbf{S}}^i$ y $\vec{\mathbf{S}}^e$, respectivamente, en una dirección perpendicular al eje, de la forma

$$\vec{\mathbf{R}}^i = \vec{\mathbf{S}}^i - \text{proy}_{\hat{\mathbf{n}}} \vec{\mathbf{S}}^i \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{R}}^e = \vec{\mathbf{S}}^e - \text{proy}_{\hat{\mathbf{n}}} \vec{\mathbf{S}}^e. \quad (3.24)$$

Como resultado, el producto punto $\vec{\mathbf{R}}^i \cdot \vec{\mathbf{R}}^e = |\vec{\mathbf{R}}^i| |\vec{\mathbf{R}}^e| \cos \gamma$ permite calcular el ángulo entre $\vec{\mathbf{S}}^i$ y $\vec{\mathbf{S}}^e$ como

$$\gamma = \pm \arccos \left(\frac{\vec{\mathbf{R}}^i \cdot \vec{\mathbf{R}}^e}{|\vec{\mathbf{R}}^i| |\vec{\mathbf{R}}^e|} \right). \quad (3.25)$$

La ambigüedad del signo en la Ec. 3.25, que corresponde al sentido de la rotación (horaria o antihoraria), se resuelve aplicando la convención de la regla de la mano derecha, formalizada mediante el cálculo del triple producto escalar de la siguiente manera:

$$(\vec{\mathbf{R}}^i \times \vec{\mathbf{R}}^e) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (3.26)$$

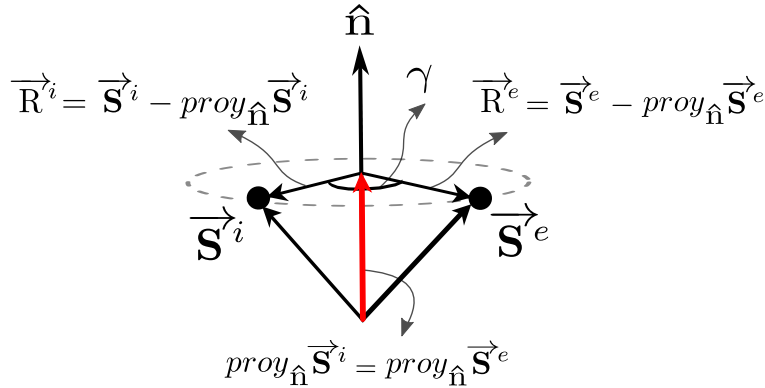


Figura 8: Representación de la transformación de dos estados de polarización. El análisis de dichos estados permite definir los vectores \vec{R}^i y \vec{R}^e , con los que se puede hallar el retardo elíptico γ .

El signo de este producto define directamente el signo del retardo elíptico, garantizando un resultado físicamente coherente.

Por lo tanto, las propiedades geométricas en la esfera de Poincaré permiten la determinación explícita de los parámetros del modo propio y el retardo elíptico a partir de las Ecs. 3.21, 3.22 y 3.25, respectivamente. Esta metodología integral, al evitar las ambigüedades inherentes a la deducción de parámetros intrínsecos a partir de los equivalentes, permite la determinación independiente y simultánea de ambos parámetros, intrínsecos y equivalentes, utilizando los mismos datos y la misma configuración experimental.

3.5. Experimentos y resultados

Para validar experimentalmente el método propuesto se utilizaron dos biplacas y una lámina retardadora, cuyas características se describirán más adelante. La elección de las biplacas se debe a que, como lo han mostrado varios autores como [Pabón y cols. \(2023\)](#), estos medios se comportan como birrefringentes con parámetros ajustables. En particular, los modos propios y el retardo elíptico de las biplacas pueden fijarse al controlar el ángulo relativo entre los ejes rápidos de las láminas de cuarto de onda (QWP) o de media onda (HWP) que la constituyen. Esto permite generar un sistema con propiedades de birrefringencia conocidas de manera teórica.

La confianza en la validez física de estos parámetros teóricos no se basa en una medición previa, sino en que se derivan de un modelo determinista. Las propiedades de la biplaca son una consecuencia directa y calculable de la configuración geométrica de sus componentes, cuyos efectos sobre la polarización son bien conocidos. Por lo tanto, el conjunto de parámetros teóricos resultante es la única consecuencia física de la configuración ensamblada y sirve como

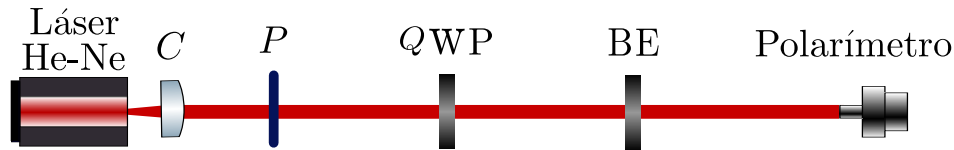


Figura 9: Representación de montaje experimental para el nuevo método de medición de birrefringencia. **C** es un colimador, **P** es un polarizador lineal, **QWP** es una lámina de cuarto de onda y **BE** es la muestra a analizar.

un medio para comprobar la validez del método de medición aquí propuesto.

Teniendo en cuenta lo anterior, se propuso el montaje mostrado en la Fig. 9 para llevar a cabo el nuevo método de medición. Se empleó un láser He-Ne ($\lambda = 632,8$ [nm]) filtrado espacialmente y colimado, un polarizador lineal y una QWP para generar los estados de polarización incidentes que se propagan a través del birrefringente. Los estados de polarización se midieron utilizando un polarímetro comercial de Thorlabs (PAN5710VIS, S/N: M00255491). Este dispositivo mide los ángulos de acimut y elipticidad con una incertidumbre experimental de $\pm 0,25^\circ$.

Para la muestra birrefringente, se seleccionó un conjunto de tres elementos con modos propios distintos. Sus características se describen a continuación:

1. **BE:** Una biplaca compuesta por dos QWPs, previamente caracterizada como un **BE** [Gottlieb y Arteaga \(2021\)](#), con retardo y modos propios ajustables [Pabón y cols. \(2021\)](#) en función del ángulo θ' entre los ejes rápidos de las QWPs y θ , la orientación de la biplaca con respecto a la horizontal.
2. **BC:** Una biplaca compuesta por dos HWPs, previamente caracterizada por [Dimova, Rangelov, y Kyoseva \(2015\)](#) como un rotador con poder rotatorio ajustable, descrito por $\varphi = \pm(4\theta' + 2\pi)$, donde θ' es el ángulo entre los ejes rápidos de las HWPs.
3. **BL:** Una QWP con su eje rápido orientado a $\theta = 28^\circ$.

Los medios se ajustaron para fijar sus valores. Para el **BE**, se utilizaron $\theta' = 69^\circ$ y $\theta = 69^\circ$. Para el **BC**, se estableció $\theta' = 40^\circ$, de modo que este medio tiene un poder rotatorio de $\varphi = \pm 160^\circ$. Los parámetros teóricos de estos medios, según las referencias previamente mencionadas, se registran en la tabla 4.

Una vez establecidas las diferentes muestras birrefringentes, se aplicó el método. Para este fin, se midieron los dos estados de polarización incidentes y sus correspondientes estados de salida. Para cada estado, se tomaron 100 mediciones que fueron promediadas, y los valores medios resultantes se reportan en la Tabla 5. Tanto los datos experimentales como el código usado para la implementación del método puede encontrarse en el siguiente enlace: <https://doi.org/10.5281/zenodo.17212152>.

Caso	Parámetros Intrínsecos			Parámetros Equivalentes		
	$\pm\alpha_p$	$\pm\chi_p$	γ	α'	δ	φ
BE	34,5°	21,5°	58,7°	-45°	42°	-42°
BC	N/A	45°	160°	N/A	0°	$\pm 160^\circ$
BL	28°	0°	90°	28°	90°	0°

Tabla 4: Valores teóricos de los parámetros intrínsecos y equivalentes para un conjunto de birrefringentes con diferentes modos propios. Se indica 'N/A' (No Aplica) para parámetros que, por su naturaleza física, carecen de un valor teórico definido.

Caso	$\mathbf{S}_L^i(\alpha_L^i, \chi_L^i)$	$\mathbf{S}_L^e(\alpha_L^e, \chi_L^e)$	$\mathbf{S}_C^i(\alpha_C^i, \chi_C^i)$	$\mathbf{S}_C^e(\alpha_C^e, \chi_C^e)$
BE	(-25,03, 0,05)	(-44,77, -0,04)	(74,07, 44,18)	(88,40, 22,75)
BC	(0,55, -0,08)	(-78,48, -0,13)	(-3,44, 44,6)	(72,48, 43,1)
BL	(28,34, -0,11)	(28,47, -0,03)	(63,07, 44,88)	(-16,5, 1,61)

Tabla 5: La tabla registra los valores medios medidos de acimut y elipticidad para los estados de polarización incidentes y emergentes en los medios birrefringentes.

Utilizando los datos de la Tabla 5, se caracterizaron las muestras aplicando la metodología presentada anteriormente. Los parámetros equivalentes se encontraron con la Ec. 3.11, 3.12 y 3.17; mientras que los parámetros intrínsecos se hallaron usando la Ecs. 3.21, 3.22 y 3.25. Los valores resultantes se resumen en la Tabla 6.

La incertidumbre asociada a los parámetros obtenidos se estimó mediante un procedimiento de propagación numérica del error instrumental del polarímetro. Dada la complejidad de las relaciones analíticas entre las variables de entrada y los parámetros finales, se empleó un esquema de diferencias finitas. Este método consiste en perturbar cada medición angular dentro de su incertidumbre para aproximar numéricamente las derivadas parciales requeridas por la fórmula general de propagación de errores. Las contribuciones resultantes se combinaron en cuadratura, obteniéndose así la incertidumbre estándar total de cada parámetro, cuyos valores se presentan en la Tabla 6.

Caso	Parámetros Intrínsecos			Parámetros Equivalentes		
	$\pm\alpha_p \pm 0,25^\circ$	$\pm\chi_p \pm 0,25^\circ$	$\gamma \pm 0,67^\circ$	$\alpha' \pm 0,25^\circ$	$\delta \pm 0,7^\circ$	$\varphi \pm 0,7^\circ$
BE	-34,78°	-21,03°	58,49°	-44,77°	44,86°	-39,48°
BC	-38,31°	-43,89°	158,09°	-78,48°	3,00°	-158,06°
BL	28,34°	-0,11°	87,00°	28,47°	86,54°	0,26°

Tabla 6: Valores de los parámetros intrínsecos y equivalentes medidos experimentalmente.

Caso	Parámetros Intrínsecos			Parámetros Equivalentes		
	α_p (%)	χ_p (%)	γ (%)	α' (%)	δ (%)	φ (%)
BE	0.81	2.19	0.36	0.51	6.81	6.00
BC	N/A	2.47	1.19	N/A	N/A	1.21
BL	1.21	N/A	3.33	1.68	3.84	N/A
$\bar{\epsilon}$	1.01 %	2.33 %	1.63 %	1.09 %	5.33 %	3.61 %

Tabla 7: Porcentaje de error calculado al comparar valores teóricos con experimentales. Para los parámetros cuyo valor teórico es cero, no se reporta porcentaje de error, ya que este resulta indefinido.

Con el fin de cuantificar la validez del método, se contrastaron los resultados experimentales de la Tabla 6 con los valores teóricos de referencia de la Tabla 4. La discrepancia entre ambos conjuntos de datos se evaluó mediante el cálculo del porcentaje de error para cada parámetro en los tres elementos analizados. La Tabla 7 presenta un resumen de estos errores.

3.5.1. Evaluación de las discrepancias teórico-experimentales

La concordancia entre los valores experimentales y los teóricos, evidenciada por los reducidos errores promedio en la Tabla 7, constituye una validación de la metodología propuesta. Este resultado confirma su capacidad para determinar ambos conjuntos de parámetros en diferentes medios birrefringentes. Sin embargo, el análisis de las pequeñas discrepancias observadas es fundamental para comprender las limitaciones del sistema.

Las fuentes de error sistemático residen en dos áreas principales: la idealización de los componentes y las simplificaciones del modelo. Por un lado, la calibración imperfecta de los elementos ópticos, como el polarizador y las placas de onda, constituye una causa principal de desviación. Por otro, el formalismo teórico omite efectos adicionales como el dicroísmo y la despolarización, los cuales, aunque menores, contribuyen de forma acumulativa a las diferencias observadas. Adicionalmente, el ajuste manual de los elementos rotatorios y posibles desalineaciones en la trayectoria del haz, así como la precisión instrumental limitada del polarímetro, también genera errores en la medición. La confluencia de estos factores explica la desviación de los resultados. La identificación de estas fuentes de error no demerita la validez del método; por el contrario, sienta las bases para futuras mejoras.

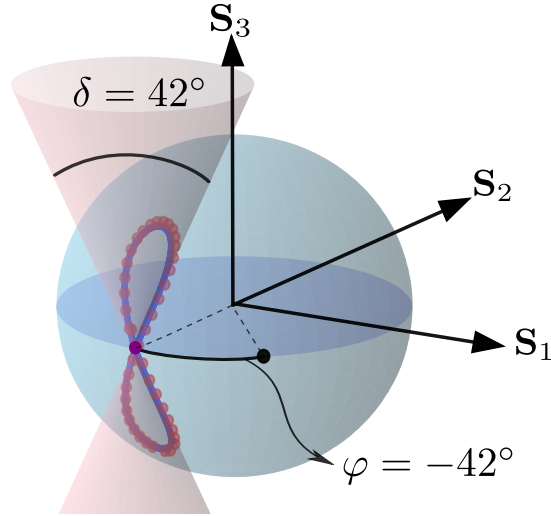


Figura 10: Gráfica de estados emergentes generados experimentalmente por el **BE** (Tabla 4) superpuesta con curva de estados emergentes predicha por la LBE a través de la Ec. 1.39. La correspondencia entre los datos experimentales y la curva teórica confirma la validez del Corolario de Selección.

3.5.2. Verificación del Corolario de Selección

Para la validación experimental del Corolario de Selección, se utilizó la configuración de **BE** descrito anteriormente. Dicho medio se rotó de 0° a 180° en pasos de 4° . Los 45 estados emergentes resultantes fueron medidos y registrados utilizando el mismo polarímetro Thorlabs.

La Fig. 10 muestra los estados emergentes experimentales y teóricos graficados en la esfera de Poincaré. La curva teórica, obtenida mediante la Ec. 1.39, se representa como una línea azul, mientras que los datos experimentales se muestran como puntos rojos. El estado lineal de entrada \mathbf{S}_L^i para la configuración **BE**, detallado en la Tabla 5, se indica con un punto negro. La figura también incluye el cono predicho por la LBE de la Ec. 1.40, donde el vértice de este cono, graficado en púrpura, corresponde al estado \mathbf{S}^\times definido por la Ec. 1.38. Los parámetros δ y φ utilizados para el cálculo de la LBE corresponden a los valores teóricos predichos en la Tabla 4.

La superposición visual entre los puntos experimentales y la curva teórica confirma de manera directa la validez predictiva de la LBE. Este resultado confirma experimentalmente el Corolario de Selección, demostrando que la trayectoria física observada selecciona de forma inequívoca el único conjunto de parámetros equivalentes que es físicamente significativo.

3.6. Discusión sobre los hallazgos

En este capítulo se han realizado varias contribuciones y hallazgos clave. Primero, se formalizó y demostró el Teorema de Monerie-Jeunhomme a partir de los cuaterniones, lo que permitió deducir la relación de la Ec. 3.8, que sirvió como pilar para la medición de los parámetros equivalentes. Posteriormente, y a partir de este teorema, de la LBE y de las propiedades de las transformaciones de los estados sobre la esfera de Poincaré, se dedujeron ecuaciones explícitas para la determinación unívoca de todos los parámetros del **BE**. El método propuesto, que utiliza estratégicamente solo dos estados de polarización incidentes, no solo simplifica la configuración experimental, sino que también asegura el cumplimiento de los criterios esenciales de la metrología ideal propuesta en el Capítulo 2: al anclar físicamente los parámetros equivalentes mediante la LBE, y al permitir la obtención independiente y simultánea de ambos conjuntos de parámetros a partir de los mismos datos experimentales.

La concordancia entre los parámetros medidos y los valores teóricos, obtenidos para diversas configuraciones de biplacas, valida la eficacia del método propuesto. Es importante destacar que, si bien la verificación se realizó con biplacas, la fundamentación del método en la LBE y en las propiedades geométricas de la esfera de Poincaré asegura su aplicabilidad general para la caracterización de cualquier medio birrefringente, incluyendo cristales naturales, tejidos biológicos, polímeros bajo estrés y otras arquitecturas ópticas complejas.

Los bajos porcentajes de error promedio observados no solo confirman la efectividad del enfoque, sino que también resaltan su capacidad para superar las ambigüedades inherentes a metodologías previas. Las pequeñas discrepancias entre los valores experimentales y teóricos se atribuyen principalmente a la idealización de los componentes ópticos, a simplificaciones en el modelo teórico, limitaciones inherentes a la precisión instrumental y posibles imprecisiones de alineación en el montaje experimental. No obstante, estas desviaciones se encuentran dentro de los límites de confianza esperados y no menoscaban la validez del método.

La verificación experimental del Corolario de Selección, a través de la superposición visual de los estados emergentes medidos y de la curva teórica predicha por la LBE, provee una confirmación inequívoca de que la trayectoria física observada selecciona el único conjunto de parámetros equivalentes físicamente significativos. Esto subraya la capacidad del método para proporcionar una caracterización unívoca y anclada físicamente, sentando las bases para aplicaciones más avanzadas en la metrología de la polarización.

Finalmente, además de resolver el problema del Corolario de No Unicidad Paramétrica, la determinación de los parámetros equivalentes físicamente significativos confiere al método un considerable poder predictivo. Estos parámetros, al definir la trayectoria completa de los posibles estados emergentes del **BE**, permiten que, a partir de la medición de solo dos estados incidentes y emergentes, se pueda conocer y predecir con exactitud todos los posibles estados emergentes para cualquier estado incidente.

Capítulo 4

Contribuciones, conclusiones y perspectivas

Este trabajo abordó un desafío fundamental en la polarimetría: la caracterización de medios birrefringentes de una manera que sea a la vez completa, inequívoca y físicamente significativa. Los aportes de esta investigación se pueden agrupar en tres áreas clave: conceptuales, metodológicas y experimentales.

La primera contribución de naturaleza conceptual fue la resolución de una ambigüedad fundamental en la teoría de la birrefringencia. Se demostró formalmente la no biyectividad de las relaciones entre los parámetros intrínsecos y equivalentes, un problema que se sintetizó en el Corolario de No Unicidad Paramétrica. Como solución, se postuló que la LBE sirve como el criterio físico de selección necesario. Esto permitió establecer el Corolario de Selección, que garantiza la identificación del único conjunto de parámetros físicamente válidos a partir de la unicidad de la trayectoria de los estados emergentes.

Una segunda contribución teórica fue la redefinición del significado y el poder predictivo de los parámetros equivalentes. Se estableció una formalización que dota de un claro significado físico a estos parámetros, de modo que el retardo lineal (δ) y la actividad óptica (φ) dejan de ser meras construcciones matemáticas para corresponder directamente con propiedades geométricas observables. Esta conexión es de notoria importancia, pues al definir la trayectoria completa de los estados emergentes, se accede a un poder predictivo global: la capacidad de conocer y anticipar con exactitud todos los posibles estados de salida para cualquier estado incidente, un alcance que supera la predicción punto a punto de los parámetros intrínsecos.

En el ámbito metodológico, se desarrolló un nuevo método para la medición completa de la birrefringencia. Este método se fundamentó en la formalización, por primera vez, del Teorema de Monerie-Jeunhomme. Su demostración no solo facilitó la interpretación, sino que derivó en una relación matemática clave para el resto del trabajo. La metodología propuesta

cumple con los criterios ideales propuestos en este trabajo: al estar anclada en un principio físico (la LBE), permitir la determinación independiente y simultánea de ambos conjuntos de parámetros, y destacar por su simplicidad.

Finalmente, este trabajo aporta una validación experimental de todo el marco teórico y metodológico. Los resultados, obtenidos para diversos medios birrefringentes, mostraron una concordancia con los valores teóricos, confirmando la fiabilidad del método. Asimismo, se verificó experimentalmente el Corolario de Selección, donde la superposición entre la trayectoria de estados emergentes medidos y la curva teórica predicha por la LBE proporcionó la prueba clara de que dicha ley selecciona correctamente el único conjunto de parámetros físicamente significativos.

De este modo, se establece un puente inequívoco entre la descomposición matemática del Teorema de Equivalencia de Jones y la realidad física observable. El trabajo presenta una solución integral, no ambigua y físicamente fundamentada para la caracterización de medios birrefringentes elípticos. Al formular y resolver una ambigüedad teórica y, además, validarla con una metodología experimental robusta, esta investigación representa un avance significativo en los estándares para la caracterización de estos medios.

El marco teórico y la metodología aquí desarrollados abren nuevas y prometedoras líneas de investigación. En primer lugar, la aplicación del método para caracterizar materiales complejos como tejidos biológicos, polímeros bajo estrés, cristales líquidos y metamateriales. En segundo lugar, sería de gran interés extender el modelo para incluir efectos adicionales como el dicroísmo y la despolarización, fenómenos omitidos en el presente estudio pero relevantes en muchos materiales. Finalmente, la expansión de esta técnica puntual para generar imágenes polarimétricas en 2D permitiría mapear la distribución espacial de la birrefringencia en muestras no homogéneas, con potenciales aplicaciones en áreas como el diagnóstico médico.

Referencias

- Born, M., y Wolf, E. (2019). *Principles of optics* (Seventh Edition, 60th Anniversary Edition ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- Chartier, T., Hideur, A., Özkul, C., Sanchez, F., y Stéphan, G. M. (2001). Measurement of the elliptical birefringence of single-mode optical fibers. *Applied Optics*, *40*(30), 5343–5353.
- Chekhova, M., y Banzer, P. (2021). *Polarization of light: In classical, quantum, and nonlinear optics*. Berlin and Boston: Walter de Gruyter GmbH.
- Dimova, E., Rangelov, A., y Kyoseva, E. (2015). Tunable bandwidth optical rotator. *Photon. Res.*, *3*(4), 177-183.
- Gottlieb, D., y Arteaga, O. (2021). Optimal elliptical retarder in rotating compensator imaging polarimetry. *Optics Letters*, *46*(13), 3139-3142.
- Gu, H., Chen, X., Shi, Y., Jiang, H., Zhang, C., Gong, P., y Liu, S. (2018). Comprehensive characterization of a general composite waveplate by spectroscopic mueller matrix polarimetry. *Optics Express*, *26*(19), 25408–25414.
- Hecht, E. (2017). *Optics* (5th, Global Edition ed.). Harlow, Essex CM20 2JE, England: Pearson Education Limited.
- Hoà, L. T. M., Ouisse, T., Chaussende, D., Naamoun, M., Tallaire, A., y Achard, J. (2014). Birefringence microscopy of unit dislocations in diamond. *Crystal Growth and Design*, *14*(11), 5761-5766.
- Jones, R. C., y Hurwitz, J., H. (1941). A new calculus for the treatment of optical systems, ii. proof of three general equivalence theorems. *Journal of the Optical Society of America*, *31*(7), 493–499.

- Ke, Q., Li, K., Wu, W., Li, W., Chen, H., Cai, R., y Li, Z. (2023). Determination of birefringence of biological tissues using modified ps-oct based on the quaternion approach. *Frontiers in Physics*, *11*, 1175914.
- Kurzynowski, P. (2001). Senarmont compensator for elliptically birefringent media. *Opt. Commun.*, *197*(4-6), 235–238.
- Kurzynowski, P., Drobczyński, S., y Woźniak, W. A. (2009). Dynamic polarization states and birefringence distributions measurements in spatial elliptical polariscope using fourier analysis method. *Optics Express*, *17*(12), 10144–10154. doi: 10.1364/OE.17.010144
- Lin, P., Han, C., y Chao, Y. (2008). Three-intensity measurement technique and its measurement in elliptical retarder. *Optics Communications*, *281*(11), 3403–3406.
- Mignani, R. P., Testa, V., González Caniulef, D., Taverna, R., Turolla, R., Zane, S., y Wu, K. (2017). Evidence for vacuum birefringence from the first optical-polarimetry measurement of the isolated neutron star rx j1856. 5-3754. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *465*(1), 492–500.
- Monerie, M., y Jeunhomme, L. (1980). Polarization mode coupling in long single-mode fibres. *Optical and Quantum Electronics*, *12*(6), 449–461.
- Pabón, J., Hernandez, C., y Torres, R. (2023, Oct). Tunable birefringence and elliptical polarization eigenmodes in a biplate of two quarter-wave plates. *Journal of the Optical Society of America A*, *40*(10), 1959–1968.
- Pabón, J., Salazar, K., y Torres, R. (2021, May). Characterization method of the effective phase retardation in linear birefringent thin sheets. *Applied Optics*, *60*(14), 4251–4258.
- Pellat-Finet, P. (1984). Représentation des états et des opérateurs de polarisation de la lumière par des quaternions. *Optica Acta: International Journal of Optics*, *31*(4), 415–434. doi: 10.1080/713821517
- Pellat-Finet, P., y Lebreton, G. (1982). Elliptical birefringence: new interpretation and experiments on bso crystals. *Journal of Non-Crystalline Solids*, *47*(2), 291–294.
- Pierce, M. C., Strasswimmer, J., Park, B. H., Cense, B., y de Boer, J. F. (2004). Birefringence measurements in human skin using polarization-sensitive optical coherence tomography. *Journal of Biomedical Optics*, *9*(2), 287-291.

- Salazar-Ariza, K., y Torres, R. (2017, Dec). Trajectories on the poincaré sphere of polarization states of a beam passing through a rotating linear retarder. *Journal of the Optical Society of America A*, 35(1), 65–72.
- VanWiggeren, G. D., y Roy, R. (1999). Transmission of linearly polarized light through a single-mode fiber with random fluctuations of birefringence. *Applied Optics*, 38(18), 3888-3893.
- Yu, C.-J., y Chou, C. (2011). Characterization of a generalized elliptical phase retarder by using equivalent theorem of a linear phase retarder and a polarization rotator. En *Optical components and materials viii* (Vol. 7934, p. 79341F). SPIE.
- Yu, C.-J., Lin, C.-E., Li, Y.-C., Chou, L.-D., Wu, J.-S., Lee, C.-C., y Chou, C. (2009). Dual-frequency heterodyne ellipsometer for characterizing generalized elliptically birefringent media. *Optics Express*, 17(21), 19213–19224.