

**El Papel del Método Bootstrap en El Desarrollo del Razonamiento Inferencial
Informal Relacionado con los Intervalos de Confianza en Estudiantes de Primer Nivel
Universitario**

Jonatan López Cacia

Trabajo de Grado para optar el Título de Magister en Educación Matemática

Director

Gabriel Yáñez Canal

Doctor en Ciencias Especialidad Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2018

AGRADECIMIENTOS

A mi Dios, pues le debo todo.

A mis padres que a pesar de lo difícil de la vida siempre se han esforzado por mí.

Al profesor Gabriel Yáñez director de esta tesis, por su enorme paciencia, sus grandes aportes y su constante guía. Toda mi admiración y respeto para él.

A Diana Marcela por creer en mí, por su amor y por su apoyo incondicional.

A Giovanni por su sincera amistad y haber sido mi compañero de lucha en esta maestría.

A mis demás profesores de la maestría Sandra Evely Parada y Jorge Fiallo por su compromiso con nuestra formación.

A mis demás amigos de la maestría, Sully, Anita, Cristian y Edwing por haber sido el mejor equipo de trabajo.

A la escuela de matemáticas y a la Universidad Industrial de Santander, de las cuales me siento muy orgulloso de haber sido estudiante.

Jonatan López Cagua

ÍNDICE

Introducción.....	15
1. Antecedentes.....	19
1.1. Intervalos de Confianza.....	20
1.2. Razonamiento inferencial informal (RII)	30
1.3. A manera de conclusiones	39
2.- Referentes matemáticos.....	41
2.1. Intervalos de Confianza.....	41
2.2. El método del Bootstrap	43
2.2.1. Estimador de la varianza Bootstrap	44
2.2.2. Intervalo de confianza Bootstrap	45
2.2.3. Demostración del teorema Bootstrap	49
3.- Marco teórico	53
3.1. Razonamiento inferencial informal	53
3.2. La Aproximación Instrumental.....	55
4.- Metodología	62
4.1. Primera fase: Diseño de instrumentos	64
4.1.1. Prueba inicial	64
4.1.2. Las Actividades	68
4.1.3. Prueba final.....	70
4.2. Segunda fase: Experimentación.....	76
4.1. Tercera fase: Análisis de resultados	76
5.- Análisis de resultados.....	78
5.1. Análisis de la prueba inicial.....	78

5.1.1. Situación 1	78
5.1.2. Situación 2	90
5.2. Actividad 1	116
5.2.1. Análisis de la actividad	122
5.2.2. Discusión de la actividad.....	150
5.2.3. Conclusión de la actividad	155
5.3. Actividad 2	155
5.3.1. Análisis de la actividad	161
5.3.2. Discusión de la actividad.....	190
5.3.3. Conclusión de la actividad	192
5.4. Actividad 3	193
5.4.1. Análisis de la actividad	195
5.4.2. Discusión de la actividad.....	225
5.4.3. Conclusión de la actividad	227
5.5. Actividad 4.	228
5.5.1. Análisis de la actividad	231
5.5.2. Discusión de la actividad.....	256
5.5.3. Conclusión de la actividad	258
5.6. Actividad 5	259
5.6.1. Análisis de la actividad	260
5.6.2. Conclusiones de la actividad	312
5.7. Análisis de la Prueba Final.....	313
5.7.1. Conclusiones de la prueba final	347
6.- Conclusiones finales	353
6.1. En cuanto a los estudiantes.....	353
6.2. Limitaciones de la investigación y sugerencias para futuras investigaciones.....	357
7.- Anexos	367
7.1. Prueba Inicial.....	367

7.2. Actividad 1	369
7.3. Actividad 2	374
7.4. Actividad 3	378
7.5. Actividad 4	380
7.6. Actividad 5	382
7.7. Prueba Final	383
Referencias bibliográficas	388

Lista de Figuras

Figura 1. Banda de variación para la media muestral y efecto del tamaño de la muestra.	
Fuente: Pfankuch, Wild y Parsonage, (2012).....	27
Figura 2. Intervalo de confianza Bootstrap y cobertura del intervalo de confianza Bootstrap en el programa VIT. Fuente: Cumming, Miller y Pfankuch (2014)	29
Figura 3. Cambiando el valor de la proporción. Fuente: Rossman (2008)	33
Figura 4. Variabilidad de muestreo para muestras de tamaño $n=30$. Fuente: Pfankuch, Wild y Parsonage (2012)	35
Figura 5. Visualización dinámica de la variabilidad del muestreo extrayendo múltiples muestras de una población.	35
Figura 6. Re-muestreo aleatorio con reposición a partir de la muestra disponible. Fuente: Wild (2013)	51
Figura 7. Intervalo de confianza Bootstrap con el 95% de confianza. Fuente: Wild (2013)	52
Figura 8. Marco para comprender los Intervalos de Confianza como un proceso estocástico. Fuente: Pfankuch, Wild y Parsonage (2012).....	54
Figura 9. Idea de praxeología en la Teoría Antropológica de lo Didáctico.	56
Figura 10. Proceso de génesis instrumental.	58

Lista de Tablas

Tabla 1. Diferentes definiciones del razonamiento inferencial informal, tomado de Sánchez y Ruiz (2017)	38
Tabla 2. Ideas desarrolladas en Néstor durante la investigación	363
Tabla 3. Ideas desarrolladas en Luz durante La investigación	364
Tabla 4. Ideas desarrolladas en Sergio durante la investigación	365
Tabla 5. Ideas desarrolladas en Humberto durante la investigación	366

Lista de Ilustraciones

Ilustración 1. Distribución de las proporciones según Néstor, Actividad 1, previo al trabajo en Fathom.....	124
Ilustración 2. Resultado de 6000 repeticiones según Néstor, luego de trabajar en Fathom....	127
Ilustración 3. Distribución de las frecuencias de 1000 muestra tomada de la pantalla del computador de Néstor	129
Ilustración 4. Distribución de las proporciones muestrales según Sergio, antes de trabajar con Fathom.....	132
Ilustración 5. Distribución de las proporciones según Sergio en una muestra de 6000 repeticiones.....	134
Ilustración 6. Distribución de 1000 frecuencias absolutas en Fathom, tomada de la pantalla de Sergio.	137
Ilustración 7. Distribución de las frecuencias según Luz, antes de trabajar con Fathom.....	140
Ilustración 8. Distribución de las frecuencias de 4 muestras de tamaño 6000, según Luz, luego de trabajar con Fathom.....	143
Ilustración 9. Distribución de la distribución muestral según Humberto antes del trabajo con Fathom.....	146

Ilustración 10. Proporciones de una muestra de tamaño 6000 según Humberto, después de trabajar con Fathom	149
Ilustración 11. Histograma mostrado por Sergio en la discusión de la actividad 1.....	153
Ilustración 12. 1000 muestras de tamaño 10, gráfica tomada de la pantalla del computador de Sergio. Actividad 2.3.b.	182
Ilustración 13. Histograma construido por Oscar para la discusión de la actividad 2.....	191
Ilustración 14. Histograma presentado por Daniel en la discusión de la actividad 3	226
Ilustración 15. Aproximación de la Distribución muestral de la media (Izquierda) y Distribución Bootstrap de Néstor. Actividad 4.2	237
Ilustración 16. Histograma de las medias muestrales generado por Luz en la actividad 4	242
Ilustración 17. Distribución muestral de la media vs Distribución Bootstrap según Luz. Actividad 4.	243
Ilustración 18. Distribución muestral de la media vs Distribución Bootstrap según Sergio. Actividad 4.	250
Ilustración 19. Distribución muestral de la media vs Distribución Bootstrap según Humberto. Actividad 4.	254
Ilustración 20. Distribución Bootstrap (Histograma promedio2) a la izquierda y Distribución muestral de la media (Histograma promedio1) a la derecha tomada de la pantalla de Nicolás. Discusión actividad 4	256

Ilustración 21. Distribución de las frecuencias de 1000 re-muestras construidas por Néstor en la actividad 5.1.	267
Ilustración 22. Distribución de 1000 re-muestras construida por Néstor en la actividad 5.2.	274
Ilustración 23. Distribución de 1000 re-muestras construida por Luz en la actividad 5.1.	282
Ilustración 24. Distribución de frecuencias de 100 re-muestras construida por Luz para la actividad 5.2.	287
Ilustración 25. Distribución de las frecuencias de 1000 re-muestras construido por Sergio para la actividad 5.1.	295
Ilustración 26. Distribución de re-muestreo construida por Sergio para la actividad 5.2.	301
Ilustración 27. Resultados obtenidos por Humberto en su primer intento por simular la toma de re-muestras en la actividad 5.1.	307

RESUMEN

EL PAPEL DEL MÉTODO BOOTSTRAP EN EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL RELACIONADO CON LOS INTERVALOS DE CONFIANZA EN ESTUDIANTES DE PRIMER NIVEL UNIVERSITARIO¹

AUTOR: JONATAN LÓPEZ CACUA²

PALABRAS CLAVES: EDUCACIÓN ESTADÍSTICA, RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL, INTERVALOS DE CONFIANZA, BOOTSTRAP.

DESCRIPCIÓN:

Comúnmente los estudiantes consideran que el establecimiento de inferencias por medio de intervalos de confianza, se reduce a la aplicación de un algoritmo donde no es necesario comprender la gran cantidad de conceptos que componen el método. En consecuencia se ha encontrado una serie de concepciones erróneas comunes sobre los intervalos de confianza que revelan la necesidad de una forma de enseñanza diferente.

En este trabajo tomamos las sugerencias de la comunidad internacional, al considerar que una posible salida a esta problemática consiste en la implementación de un enfoque de enseñanza que prioriza el desarrollo del Razonamiento Inferencial Informal y se apoya en las simulaciones computacionales, específicamente en el método del Bootstrap.

Con la intención de describir el papel de las simulaciones computacionales en el desarrollo del razonamiento inferencial informal asociado a intervalos de confianza, hemos diseñado una serie de actividades para trabajar con Fathom mediante un tratamiento informal y apuntando hacia el método Bootstrap. Estas actividades fueron aplicadas a un grupo de estudiantes de primer nivel de Ingeniería Civil de la Universidad Industrial de Santander quienes no habían visto ningún curso de estadística.

Para el análisis de los resultados nos apoyamos en el marco de la Aproximación Instrumental y adicionalmente hemos diseñado y aplicado una prueba final para observar la presencia de concepciones erróneas. De esta forma encontramos que nuestro trabajo tiene el potencial de reducir la aparición de las concepciones erróneas más comunes y desarrollar los Razonamientos Inferenciales Informales de los estudiantes. A su vez encontramos que Fathom propició un ambiente de aprendizaje donde el estudiante utilizó explícitamente sus conocimientos de variabilidad, distribución muestral y de relación entre la distribución Bootstrap y el parámetro poblacional.

¹ Trabajo de grado

² Facultad de Ciencias Básicas y Humanas. Escuela de Matemáticas. Director: Gabriel Yáñez Canal, Doctor en Ciencias de Especialidad en Matemáticas.

ABSTRACT

THE ROLE OF THE BOOTSTRAP METHOD IN THE DEVELOPMENT OF INFORMAL INFERENTIAL REASONING RELATED TO CONFIDENCE INTERVALS IN FIRST LEVEL UNIVERSITY STUDENTS³

AUTHOR: JONATAN LÓPEZ CACUA⁴

KEY WORDS: STATISTICAL EDUCATION, INFORMAL INFERENTIAL REASONING, CONFIDENCE INTERVALS, BOOTSTRAP.

DESCRIPTION:

Commonly students consider that the establishment of inferences using confidence intervals means applying an algorithm where it is not necessary to understand the large number of concepts that are part of the method. Consequently, a series of common misconceptions have been found about confidence intervals that reveal the need for a different form of teaching.

In this research we take the suggestions of the international community, considering that a possible solution to this problem consists in the implementation of a teaching approach that prioritizes the development of Informal Inferential Reasoning and it is supported by computer simulations, specifically in the method of Bootstrap.

With the intention of describing the role of computational simulations in the development of informal inferential reasoning associated with confidence intervals, we have designed a series of activities to work with Fathom using an informal approach and pointing towards the Bootstrap method. The activities were applied to a group of students of first level of Civil Engineering of the Industrial University of Santander who had not been in courses of statistics.

To analyze the results we have relied on the framework of the Instrumental Approach and additionally we have designed and applied a final test to observe the presence of misconceptions. In this way we find that our work has the potential to reduce the appearance of the most common misconceptions and to develop the Informal Inferential Reasoning of the students. In turn, we found that Fathom provided a learning environment where the student explicitly used his knowledge of variability, sample distribution and relationship between the Bootstrap distribution and the population parameter.

³ Bachelor Thesis

⁴ Facultad de Ciencias Básicas y Humanas. Escuela de Matemáticas. Director: Gabriel Yáñez Canal, Doctor en Ciencias de Especialidad en Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

La inferencia estadística es un elemento fundamental del pensamiento estadístico. Sin embargo, las investigaciones en educación matemática han encontrado que los estudiantes de todos los niveles tienen grandes dificultades para comprender los métodos de inferencia estadística y han aportado un listado de las ideas erróneas más comunes.

Generalmente la instrucción formal se enfoca en el aprendizaje de los procedimientos estadísticos y no en la comprensión conceptual de la inferencia. Este tipo de enseñanza ha provocado que los procedimientos de inferencia, en particular el proceso de estimación por Intervalos de Confianza, no sean bien comprendidos por los estudiantes.

No es difícil encontrar en la literatura trabajos que describen las ideas erróneas más comunes de los estudiantes sobre los Intervalos de Confianza, las cuales, se explican, según los mismos investigadores, por el enfoque formal que ha adoptado la instrucción en estadística y por la gran cantidad de conceptos básicos implicados en su construcción.

Un enfoque diferente sobre la formación estadística propone la enseñanza de estos temas desde los primeros años escolares sin recurrir a cálculos formales, donde lo primordial es que el estudiante utilice su experiencia con la variabilidad, su razonamiento lógico, su intuición y el sentido común para enfrentar situaciones estocásticas, construyendo por sí mismo las ideas que le permitirán más adelante alcanzar una verdadera comprensión de los métodos formales (Zieffler y Garfield, 2007; Rossman 2007; Chance y McGaughey, 2014) A este enfoque se le conoce como el Razonamiento Inferencial Informal (RII).

En ese sentido, algunos trabajos sugieren que las simulaciones computacionales tienen el potencial para apoyar las inferencias de los estudiantes y posibilitan la generación de imágenes mentales que llevan a la comprensión de aquellos conceptos subyacentes en los Intervalos de Confianza que difícilmente pueden ser abordados por medio de lápiz y papel. Un método que, según varios autores, es una buena alternativa para la enseñanza de los Intervalos de Confianza, es el método Bootstrap.

En consecuencia realizamos esta investigación para analizar los conocimientos estadísticos que desarrollan y movilizan los estudiantes que, sin haber tenido contacto con el método formal de Intervalos de Confianza, utilizan las simulaciones computacionales como herramienta principal de apoyo en el establecimiento de inferencias. De manera que la pregunta que orientó la realización de este trabajo fue: ¿Cómo influyen las simulaciones computacionales diseñadas para resolver problemas asociados con Intervalos de Confianza en el razonamiento inferencial informal asociado a los procesos de estimación en estudiantes de primer nivel universitario?

Para responder tal cuestión, trabajamos con estudiantes de ingeniería civil que cursaban primer nivel en la Universidad Industrial de Santander y que hasta ese momento no habían visto cursos formales de estadística. Por consiguiente, se diseñaron y aplicaron dos pruebas (inicial y final) y 5 talleres para ser abordadas con el programa Fathom (Finzer, 2005).

En el análisis de los resultados hemos implementado el marco de la Aproximación instrumental de Artigue que, además de estar estructurado sobre las ideas de la teoría antropológica de lo didáctico, permite analizar en detalle la forma en que el estudiante usa las simulaciones para establecer sus inferencias. En las pruebas y actividades participaron 20

estudiantes de los cuales fueron elegidos 4 para ser analizados a profundidad, por su actitud participativa y el interés mostrado en las primeras sesiones.

Este documento presenta en su primer capítulo los resultados de algunas investigaciones que de una u otra forma aportaron en la construcción de este trabajo. Las mencionadas investigaciones guardan relación con la comprensión de los Intervalos de Confianza, y con el desarrollo del razonamiento inferencial informal.

En el segundo capítulo se exponen formalmente los conceptos matemáticos que serán el objeto de estudio en esta investigación, estos son los Intervalos de Confianza y el método del Bootstrap.

En el tercer capítulo se encuentran detallados los componentes teóricos que hemos tenido en cuenta para el diseño, aplicación y análisis tanto de las actividades como de las pruebas: la Aproximación Instrumental de Artigue (2002) y los referentes teóricos Pfanchkuch, Wild y Parsonage (2012) y Zieffler et al. (2008) sobre el Razonamiento Inferencial Informal.

En el cuarto capítulo se expone de manera general la estructura de esta investigación y los instrumentos utilizados. Tanto la prueba inicial o diagnóstica, como la prueba final se presentan en este apartado de forma detallada, igualmente las actividades realizadas durante los talleres.

En el quinto capítulo están consignadas las respuestas de los estudiantes-caso con su respectivo análisis. Adicionalmente se presentan algunos momentos interesantes que se vivieron en las discusiones grupales de las actividades que consideramos pudieron generar cambios en los razonamientos.

Finalmente, en el sexto capítulo presentamos las conclusiones que se desprenden de los resultados obtenidos. Primero nos enfocamos en el recorrido de cada estudiante por esta investigación y exponemos la evolución de sus razonamientos, así como las características generales que podrían describir el estado y desarrollo del razonamiento inferencial informal observado en los estudiantes que participaron de la investigación. Añadido a esto, confrontamos nuestros resultados con los obtenidos por otros estudios realizados en esta misma dirección.

A su vez, describimos el potencial que se observó en cada una de las actividades así como sugerencias para su mejoría y una mejor aplicación. Finalmente, se incluyen algunas sugerencias para la realización de trabajos futuros alrededor del Razonamiento Inferencial Informal asociado a la estimación por Intervalos de Confianza.

1. ANTECEDENTES

El aprendizaje de los métodos de inferencia despierta enorme interés en diferentes partes del mundo. Revisando la literatura se pueden encontrar trabajos que reportan problemas en la comprensión de los métodos de Intervalos de Confianza y de prueba de hipótesis en países de Europa, Oceanía y América. Algunas de esas investigaciones se dieron a la tarea de establecer aquellas concepciones erróneas comunes que poseen los estudiantes sobre el método formal de Intervalos de Confianza, las cuales detallaremos más adelante en esta sección.

En particular, el panorama de la comprensión de los Intervalos de Confianza no ha sido alentador, los investigadores han estado planteando posibles caminos que contribuyan a mitigar tal problemática, sugiriendo como uno de ellos la reducción del formalismo y el aumento en importancia del uso de la lógica, la experiencia y el sentido común. Un enfoque encontrado en varias investigaciones sugiere el desarrollo de los razonamientos inferenciales informales con la ayuda de herramientas tecnológicas como programas computacionales capaces de simular la variabilidad de un experimento aleatorio. A continuación presentamos un recorrido por algunas investigaciones que de una u otra forma han sido consideradas en el planteamiento y desarrollo de esta investigación.

1.1. INTERVALOS DE CONFIANZA

Hace relativamente pocos años, la enseñanza formal de la inferencia estadística apuntaba hacia las pruebas de hipótesis como el método de respaldo en la toma de decisiones dejando de lado los Intervalos de Confianza (IC). Esta actitud ha cambiado radicalmente ya que la comunidad científica ha reconocido la importancia y utilidad de los Intervalos de Confianza (Bland, 2011), debido a que las investigaciones científicas además de estar interesadas en averiguar qué tratamiento es más eficaz, también necesitan una medida de cuán diferentes son, cuestiones que los Intervalos de Confianza pueden responder (Pfankuch, Wild y Parsonage, 2012).

La investigación didáctica realizada sobre los Intervalos de Confianza (Behar, 2001; Garfield et al. 1999; Yáñez y Behar, 2009) coincide en la identificación de las concepciones erróneas más comunes de los estudiantes. Estas son creer que un intervalo con el 95% de confianza contiene los posibles valores de la media muestral, que el tamaño de la muestra no afecta el tamaño del intervalo y que aumentar el nivel de confianza disminuye el tamaño del intervalo. Por otra parte, en el trabajo de Pfankuch, Wild y Parsonage (2012) se citan otras concepciones erróneas adicionales a las ya mencionadas, como la subestimación de la variabilidad de la media muestral en la replicación al considerar que una confianza del 95% en un intervalo se traduce en que el 95% de las medias de futuras replicaciones serán capturadas por el intervalo original (Cumming, Williams y Fidler, 2004).

Trabajos como el de Liu y Thompsons (2007) evidencian que las personas tienen dificultades para comprender los conceptos básicos asociados a los Intervalos de Confianza. A partir de un seminario de 8 días, con el nombre de “Una oportunidad para aprender sobre aspectos de la

enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad y la estadística con una profunda comprensión” estos autores recogieron las impresiones de 8 profesores de secundaria en ejercicio, encontrando que incluso profesores de estadística, tienen una concepción no estocástica de la probabilidad, es decir, sus concepciones de probabilidad no incluyen una idea de proceso repetitivo ni de una distribución de los resultados. En igual forma, los profesores tienen problemas para identificar el tipo de problemas o situaciones que se pueden afrontar por medio de la estadística. Esto se constituye en una situación preocupante pues si quienes están a cargo de la enseñanza de la estadística tiene estos problemas en la comprensión de los conceptos básicos que conforman el método de los Intervalos de Confianza, es de esperarse que los estudiantes estén en una situación similar.

A su vez Yáñez y Behar (2009) con la intención de explicar las razones de las concepciones erróneas, realizan un análisis epistemológico de la construcción de intervalos y detallan los aspectos teóricos que pueden inducir a concepciones erradas. Los autores sugieren introducir la probabilidad frecuencial mucho antes de abordar los Intervalos de Confianza, asumiéndola no como el valor exacto de la concepción clásica si no como el resultado de un proceso de estimación apoyado en la Ley de los Grandes Números

También establecen que las dificultades conceptuales de los Intervalos de Confianza son producto de la gran cantidad de conceptos básicos que el estudiante debe integrar: población, parámetro, muestra, media, valor esperado, estimador, estadístico, variable aleatoria, distribución de probabilidad, distribución muestral, desviación estándar y error típico de estimación, distribución normal, distribución normal estándar, z-valores, probabilidad y probabilidad frecuencial, nivel de confianza y precisión de una estimación. Sin bien cada uno

de estos conceptos tiene su propia complejidad, el tener que integrarlos y relacionarlos exige un esfuerzo mayor.

Finalmente Yáñez y Behar (2009), basados en las entrevistas hechas en su investigación, afirman que es necesario discutir con los estudiantes detalladamente cada paso que conforma la construcción de un intervalo de confianza, evitando así que cada estudiante llene sus vacíos conceptuales con sus propias creencias, terminando en concepciones erróneas.

Salcedo et al. (2011) se reportan algunas interpretaciones de docentes en formación sobre los Intervalos de Confianza, para tal fin, utilizaron un cuestionario con 14 ítems cerrados de falso y verdadero, 7 falsos y 7 verdaderos. Los 102 participantes fueron seleccionados de un grupo de docentes en formación que cursaban la asignatura Estadística Aplicada a la Educación, quienes ya habían recibido instrucción formal sobre distribución muestral e Intervalos de Confianza.

De tal manera que Salcedo et al. (2011) encontraron que los docentes en formación de su estudio interpretan erróneamente los Intervalos de Confianza, al no comprender que los límites del intervalo son valores aleatorios, por lo que no se puede asegurar que contengan al parámetro poblacional. “La mayoría de los encuestados sólo es capaz de reconocer el efecto de la reducción del nivel de confianza en la amplitud del intervalo” (Salcedo et al., 2011, p.227) así como dificultades para percibir las relaciones existentes del ancho del intervalo con el tamaño muestral el nivel de confianza y la desviación estándar. Según ellos el problema radica en el poco conocimiento que se tiene sobre la distribución muestral, el teorema central del límite y la relación que tienen estos con el intervalo de confianza. Para mitigar las situación descrita en su trabajo, ellos sugieren el trabajo con simulaciones en programas como Fathom (Finzer, 2005)

donde el estudiante puede interactuar directamente con la construcción de la distribución muestral o con la comprobación del teorema central del límite.

Recientemente Rangel (2014), en su estudio sobre las estructuras y mecanismos mentales asociados a los Intervalos de Confianza, aplica un cuestionario a estudiantes de licenciatura en matemáticas (profesores en formación) tiempo después de haber visto el curso de estadística con el propósito de identificar los tipos de concepciones y dificultades que tienen los estudiantes que participaron en el estudio sobre los Intervalos de Confianza. Además del cuestionario, Rangel (2014) diseña y aplica una entrevista fundamentada en su propia descomposición genética preliminar que permitirá establecer si los estudiantes han alcanzado las estructuras y mecanismos allí planteados. Con respecto a esto logra determinar a la luz de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), que los estudiantes conciben como objetos a la media muestral, la desviación estándar, la distribución normal y el nivel de confianza, y como procesos a la probabilidad, la muestra aleatoria, la distribución normal, la función de densidad de probabilidad y el teorema central del límite.

Rangel (2014) también encontró que los estudiantes logran utilizar los Intervalos de Confianza pero siguen existiendo vacíos de comprensión de algunas ideas implícitas y presencia de concepciones erróneas, como creer que el aumento del nivel de confianza disminuye el ancho del intervalo o que si aumenta el tamaño de la muestra también aumenta el tamaño del intervalo o que hay una relación entre el tamaño muestral y el nivel de confianza. Adicional a esto, los estudiantes ponen en evidencia una confusión que se genera sobre los Intervalos de Confianza con respecto a la precisión del intervalo, pues si el nivel de confianza es interpretado como la probabilidad de que el intervalo construido contenga la media poblacional entonces ganará precisión al aumentar esta probabilidad, porque estaría más seguro que la media poblacional

estará contenida allí, lo que los lleva a asumir que la precisión crece cuando el nivel de confianza aumenta.

Lo que un estudiante debe comprender es que un intervalo de confianza es una estimación, basada en una muestra, de un parámetro poblacional desconocido; es todo un conjunto de posibles valores donde el nivel de confianza indica la probabilidad de que el método produzca un intervalo que contenga al parámetro poblacional (Rangel, 2014). Por último en su investigación Rangel (2014) sugiere que en vista de que es bajo el enfoque formal con el que se ha trabajado los Intervalos de Confianza, es necesario buscar formas de enseñanza menos formales y más cercanas a la intuición.

Reaburn (2014) presenta los resultados de su trabajo de investigación doctoral realizado en el 2011, donde buscaba establecer las creencias y dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de los Intervalos de Confianza, para ello analizó estudiantes durante cuatro semestres diferentes que pasaban por un curso introductorio de estadística en una institución de educación superior.

A medida que iban pasando los semestres se fueron agregando actividades complementarias para mejorar la comprensión de los estudiantes sobre algunos temas, por ejemplo en el segundo semestre se implementaron simulaciones donde el estudiante construía la distribución muestral de la media y podía comprobar que ésta no necesariamente se comporta igual a la población de donde proviene. En el tercer semestre se proporcionó una población de 100 personas a los estudiantes y se les pidió tomar varias muestras de tamaño 10 calculando la media en cada una y registrando los valores en una recta numérica, de tal forma que el estudiante perciba la variabilidad muestral y que esos valores serán cercanos a la media poblacional; en ambos

semestres se introdujeron las actividades antes de presentar formalmente el teorema central del límite. Finalmente, se hizo una consulta a los estudiantes sobre sus interpretaciones de un intervalo de confianza, para tratar de llenar las brechas conceptuales con ayuda del profesor.

Para indagar por las ideas de los estudiantes al final de cada semestre se utilizó la siguiente pregunta:

El intervalo del 95% de confianza para la cantidad esperada de visitas al médico de los Tasmanos en 1998 es de 7 a 11.

- a) Sin usar lenguaje técnico, explique qué significa esta afirmación.
- b) ¿A qué se refiere el 95%?

Reaburn (2014) encontró a partir de las respuestas de los estudiantes a esta pregunta que aunque se notaban mejoras en los razonamientos, seguían apareciendo problemas de comprensión ya que dentro de las respuestas más comunes estuvo que el 95% de la población visita al médico entre 7 y 11 veces. Otras respuestas aunque no del todo incorrectas, no mostraban una verdadera comprensión del intervalo, por ejemplo decir que el 95% de los datos están dentro de dos desviaciones estándar de la media, e incluso un estudiante afirmó que entre 7 y 11 personas visitan al doctor en un año.

Cumming (2007) propone la enseñanza de los Intervalos de Confianza por medio de un programa que simula de manera animada el significado del nivel de confianza donde el estudiante puede ver gráficamente la generación de una gran cantidad de intervalos con el 95% de confianza, al mismo tiempo que contabiliza cuántos contienen la media de la población y

cuántos no. Este programa permite al estudiante observar que el método funciona bien cuando se conoce la desviación estándar de la población, como cuando se estima.

Cumming (2007) también propone actividades con simulaciones para que el estudiante comprenda e interiorice el “celular de la normal” (123-6895997) con la intención de que pueda ser utilizado naturalmente en la práctica para la construcción de los intervalos. Sin embargo en el trabajo de Cumming (2007) no se hace ninguna aplicación de las actividades propuestas, para observar que genera esto en el estudiante.

Pfankuch (2008) recoge varias ideas y resultados de la investigación de Liu y Thompson (2007) considerando así que es importante que estudiantes y profesores comprendan la idea de variabilidad que subyace en el intervalo de confianza ya que está construido a partir de una sola muestra. Sin embargo aclaran que esta idea de variabilidad se sustenta en varios conceptos que por su nivel de abstracción complican la comprensión, conceptos tales como: la repetición en la toma de muestras, la distribución muestral, la idea fundamental de que el intervalo de confianza construido no es una respuesta determinista ya que muestras distintas producen intervalos distintos y, por último, ver la probabilidad (nivel de confianza) desde lo que ellos llaman una perspectiva empírica, que no es otra cosa que el enfoque frecuencial de la probabilidad.

Considerando estas ideas, Pfankuch, Wild y Parsonage (2012) construyen un marco sobre la comprensión de los Intervalos de Confianza como un proceso estocástico para el cual se debe cumplir con tres componentes principales: primero, para la comprensión de la probabilidad es necesario que el estudiante tenga presente una imagen de proceso repetitivo, en segundo lugar, una imagen de la distribución de los resultados y por ultimo una interpretación de la probabilidad

desde una perspectiva empírica, “la idea de imagen se refiere a algo que los estudiantes pueden evocar en sus mentes, o en otras palabras, imaginar” (Pfankuch, Wild y Parsonage, 2012, p.903).

En este marco se hacen explícitas las ideas de Liu y Thompson (2007) pero añaden la importancia de que el estudiante comprenda la relación entre la muestra y la población. Para tal fin Pfankuch, Wild y Parsonage, (2012) proponen algunas actividades que podrían funcionar, por ejemplo: para permitir que los estudiantes vean la relación entre la distribución de la muestra y la distribución de la población se propone la experimentación física con un número considerable de datos contenidos en una urna, de donde los estudiantes deben tomar pequeñas muestras con la intención de que cada uno estudie una muestra diferente. De esta manera al comparar con los compañeros, el estudiante notará que todos tienen estadísticos diferentes. Para la parte de la franja de muestreo-variación, proceso repetitivo e intervalo intuitivo proponen simulaciones computacionales donde un programa permite tomar una gran cantidad de muestras de una misma población y ver la variabilidad del estadístico de manera gráfica usando para ello diagramas de caja superpuestos, al tiempo el estudiante puede ir notando el efecto de aumentar el tamaño de la muestra, tal como se ve en la Figura 1.

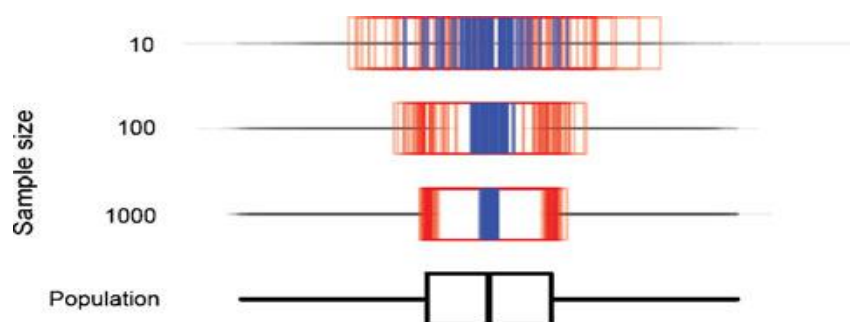


Figura 1. Banda de variación para la media muestral y efecto del tamaño de la muestra. Fuente: Pfankuch, Wild y Parsonage, (2012).

Cumming, Miller y Pfannkuch (2014) presentaron la idea de intervalo de confianza por medio del método del Bootstrap a estudiantes que ya conocían el método formal. Para ello utilizaron algunas visualizaciones dinámicas construidas en el programa VIT (*Visual Inference Tools*). Según ellos el bootstrap permite hacer de lo abstracto algo concreto o tangible, proporcionando alternativas visuales a los procedimientos clásicos vistos comúnmente como una receta.

Tal investigación se llevó acabo con estudiantes de 14 años quienes en una sesión observaron animaciones que simulaban la toma de 1000 re-muestras del mismo tamaño de una pequeña muestra de los pesos de 30 estudiantes universitarios. Se mostraba gráficamente el resultado de la media en cada re-muestra y una representación de la distribución Bootstrap con los percentiles 2,5 y 97,5 límites resaltados los cuales fueron tomados como los límites del intervalo de confianza del 95%, todo esto de forma simultánea (Figura 2).

En una segunda sesión, con otra animación, los estudiantes podían observar en su pantalla la construcción de varios intervalos Bootstrap del 95% de confianza y ver que en algunas ocasiones la estimación capturaba el verdadero parámetro poblacional, al tiempo que el programa iba mostrando el porcentaje de intervalos que sí contenían al parámetro (Figura 2). Para conocer el nivel de comprensión de los estudiantes producto de esta estrategia didáctica, los estudiantes fueron sometidos a una prueba final en la cual se indagaba sobre su interpretación de un intervalo Bootstrap, encontrando que los estudiantes creen que el intervalo proporciona los posibles valores que toma la media muestral y no ven que se trata de una estimación para el valor de un

parámetro poblacional, tampoco creen que en una muestra se puedan ver reflejadas las características desconocidas de la población de donde proviene.

De cualquier modo, Cumming, Miller y Pfannkuch (2014) aseguran que sus animaciones permiten ver algunas ideas importantes que por lo general se quedan implícitas en la estimación por intervalos y que las experiencias de aprendizaje deben enfocarse en superar la renuencia de los estudiantes al establecimiento de inferencias basados en una sola muestra.

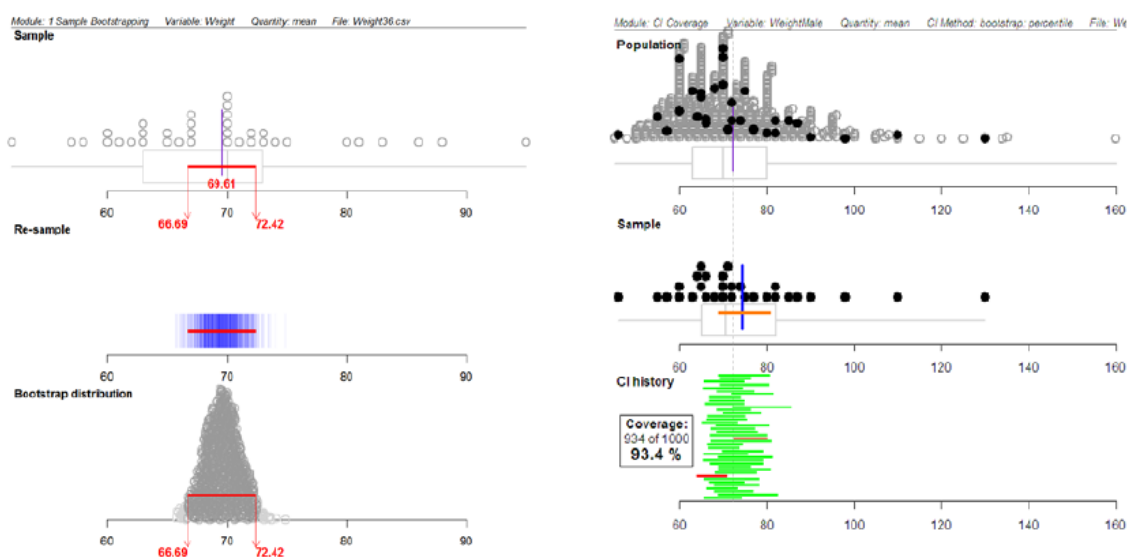


Figura 2. Intervalo de confianza Bootstrap y cobertura del intervalo de confianza Bootstrap en el programa VIT. Fuente: Cumming, Miller y Pfankuch (2014)

Lock et al. (2014), sugieren que no es necesario dejar la enseñanza de los métodos de inferencia para el final de los cursos de estadística como se hace tradicionalmente, sino que gracias a la tecnología y a métodos como el Bootstrap es posible trabajar estas temáticas con estudiantes principiantes, sin importar que el estudiante no posea los conceptos formales de distribución muestral, fórmulas para el error estándar, teorema central del límite, ni sepa

fórmulas para estandarizar valores. En su artículo, ellos se enfocan en responder a la pregunta ¿Cómo se debe modificar un curso para incorporar estas ideas?

Ellos afirman que el método de intervalos Bootstrap, por medio de animaciones, genera en los estudiantes imágenes poderosas sobre distribuciones muestrales que refuerzan la comprensión al tiempo que es fácilmente aplicable en diferentes situaciones de estimación. De esta manera “estos métodos hacen que sea más fácil para los estudiantes ver las conexiones con los conceptos subyacentes, mientras que los métodos tradicionales basados en fórmulas a menudo ofuscan esas conexiones” (Lock et al., 2014, p.3). Aunque en su artículo no se muestra una aplicación directa de sus ideas, ellos afirman que los métodos intensivos de simulación son una muy buena alternativa para introducir las ideas importantes de los métodos de inferencia.

1.2. RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL (RII)

Las investigaciones han sugerido que las dificultades se presentan debido a que los estudiantes alcanzan una comprensión incompleta de los conceptos fundamentales (Behar (2000), Yáñez y Behar (2009), Olivo (2008) y Rangel (2014). Una posible solución a esta problemática podría ser proporcionada por un tipo de enseñanza diferente en la cual se dé menos importancia a la teoría y a los cálculos y se propicie el uso de la lógica, el sentido común y la experiencia (Zieffler y Garfield, 2007).

Por tal razón, en años recientes, han sido presentados y publicados varios trabajos que describen la inferencia estadística informal y el razonamiento inferencial informal. Sin embargo, aún no está claro exactamente lo que significan estos dos términos, aun así, destacamos el

acercamiento de Zieffler et al. (2008), quienes presentan el razonamiento inferencial informal como “la forma en que los estudiantes utilizan su conocimiento informal de estadística para dar argumentos en apoyo a las inferencias sobre poblaciones desconocidas, a partir de muestras observadas (p.44)”. Es decir, el interés no es que los estudiantes recurran a cálculos o mecanicen procesos, sino que utilicen lo que podríamos llamar el sentido común basado en sus intuiciones primarias sobre el tema y en lo que están observando.

Según Zieffler et al. (2008), coexisten dos enfoques adoptados por los investigadores para estudiar el razonamiento inferencial informal. Un primer enfoque se centra en la naturaleza de este razonamiento, donde el objetivo es examinar la forma como los estudiantes razonan o hacen inferencias sobre un problema particular sin conocer los métodos formales de inferencia estadística. Un segundo enfoque consiste en desarrollar el RII en los estudiantes. Ambos enfoques necesitan tareas diseñadas cuidadosamente, de manera que permitan a los investigadores estudiar y evaluar el razonamiento inferencial informal de los estudiantes.

Un buen ejemplo de investigación con el RII es el trabajo de Makar y Rubin (2009) en el cual se analizan algunos episodios en el aula de clases de una escuela primaria de Australia en el que se evidencia el razonamiento informal que utilizan los estudiantes de tercer y cuarto grado al intentar establecer inferencias, estos episodios que están asociados cada uno a una actividad diferente, se analizan por medio de un marco propuesto por los mismos autores donde se tienen en cuenta tres aspectos:

- 1) Las generalizaciones: se refiere a la capacidad de los estudiantes de ir más allá de la descripción de la muestra y empezar a realizar afirmaciones de lo que puede suceder en la población, basados en los datos que se tienen.

2) Datos como evidencia: Las hipótesis sobre la población deberían estar basadas en los datos disponibles, el estudiante debe comprender que sin datos no se puede hacer estadística.

3) Lenguaje probabilístico: Los estudiantes deben comprender que las inferencias realizadas sobre la población no son resultados determinísticos, de tal manera que en sus conclusiones articulan un lenguaje que tenga en cuenta la variabilidad.

En las mencionadas actividades los estudiantes se encargan del diseño de la encuesta y la recolección de los datos, para luego discutir los resultados con la profesora quien guía a los estudiantes al establecimiento de inferencias a partir de intervalos intuitivos.

En el trabajo de Makar y Rubin (2009) se destaca el tercer episodio donde los estudiantes deben establecer cuanto mide la palma de la mano más grande de su salón, la más pequeña y la más común. Para solucionar la situación se permite a cada estudiante la recolección y organización de las medidas de las palmas de las manos de todo el salón. Después de halladas las medidas, la profesora cuestiona a los estudiantes sobre las similitudes que tendría la misma investigación en el salón de tercero que está al lado. En un principio los estudiantes consideran que las cosas en dicho salón serán idénticas (medida más pequeña, más grande y más común) así que la profesora decide ir al salón vecino con sus estudiantes y realizar el mismo estudio.

De esta forma los estudiantes lograron entender la variabilidad presentada entre muestra y muestra al descubrir que había medidas más pequeñas en ese salón, sin embargo después de esto, ellos comenzaron a creer que no era posible establecer inferencias y que siempre deberían hacer la toma de datos, situación que se pudo resolver con la intervención del investigador, quien forzó a los estudiantes a predecir lo que sucedería en otro salón de tercero sin haber tomado

datos, a lo cual los estudiantes respondieron basándose en los datos que ya tenían y en sus predicciones usaron un lenguaje donde se evidenciaba variabilidad pues no daban estimaciones puntuales sino intervalos, y mostrando cierta evolución en su razonamiento.

Por otra parte tenemos el trabajo de Rossman (2008) quien propone situaciones o tareas en las cuales los estudiantes pueden hacer inferencias sin necesidad de recurrir a cálculos formales. Una primera actividad para tal fin consiste en utilizar dos dados cargados, que solo arrojan, si se suman las caras superiores de los dados, siete y once. De esta manera se pide a los estudiantes establecer si los dados son justos. Para resolver esta cuestión el estudiante se ve obligado a lanzar los dados; en sus primeros lanzamientos no podrá establecer que algo extraño sucede pero con un número considerable de lanzamientos terminará notando la tendencia de los resultados, lo cual se asemeja con una comparación de distribuciones de manera intuitiva.

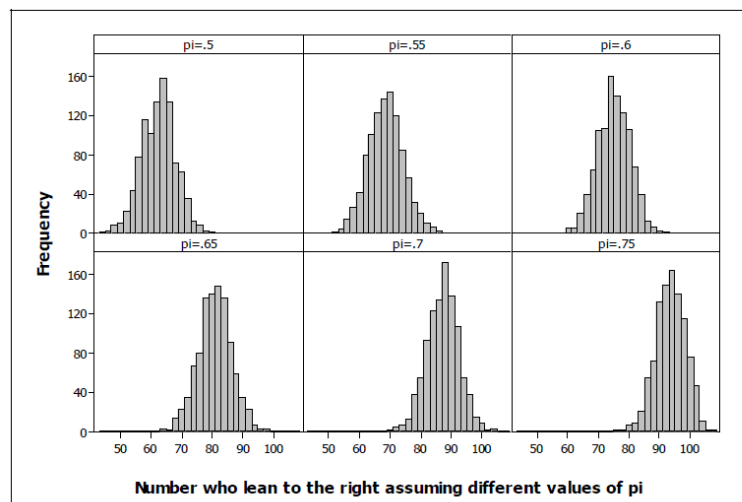


Figura 3. Cambiando el valor de la proporción. Fuente: Rossman (2008)

Rossman (2008) también propone actividades en las cuales se pueden implementar las simulaciones computacionales, por ejemplo, se pide a los estudiantes decidir si los resultados

de un estudio con niños de 10 meses permiten establecer que los niños se basan en las acciones de un personaje que les presentan para elegir entre dos juguetes, cuando se conoce que hay una preferencia de 13 bebés de un total de 16, con respecto a uno de los juguetes. Para responder esta situación los estudiantes pueden simular la situación en un programa asumiendo el modelo de la moneda y simulando 1000 muestras de tamaño 16, y así establecer qué tan probable es obtener 13 éxitos en una muestra. Las últimas dos actividades mencionadas requieren del cálculo del p-valor para su solución, ya sea netamente intuitivo o respaldado por una simulación. Además, Rossman (2008) plantea una actividad en la cual hay un acercamiento informal a los Intervalos de Confianza al mostrar los resultados de un estudio sobre la tendencia de los seres humanos de girar la cabeza hacia la derecha cuando se besa, en el cual de 124 parejas estudiadas 80 tendían a girar la cabeza hacia la derecha cuando se estaban besando. Se cuestiona a los estudiantes si a la luz de estos resultados se puede establecer qué proporción de la población tiende a girar su cabeza hacia la derecha cuando se da un beso.

Para lograr dar respuesta a la situación, el estudiante puede modelar la toma de 1000 muestras de tamaño 124 asumiendo el modelo en la moneda en una simulación computacional y determinar si 80 es un resultado extraño en esta distribución, acto seguido podrá variar la media de la distribución muestral para establecer para cuales distribuciones muestrales 80 no es un resultado extraño como se muestra en la Figura 3, de tal manera que su estimación estará dada por un intervalo intuitivo, en este caso y observando la Figura 3, el estudiante podría establecer un intervalo entre 0,55 y 0,7.

Pfankuch, Wild y Parsonage (2012) proponen ejemplos de tareas que pueden ayudar a los estudiantes a comprender las ideas consignadas en el marco de Pfankuch (2008), descrito en párrafos anteriores. Por ejemplo se sugiere construir una urna con 600 tarjetas con datos de

estudiantes, hombres y mujeres, de un colegio de Nueva Zelanda: cada tarjeta tiene la información de la altura de un estudiante y su sexo. Los datos hacen parte de un censo real de más de 30.000 estudiantes, y se pide a los estudiantes tomar muestras de 30 para analizarlas y responder a la pregunta ¿Cuál es la altura típica de los estudiantes de Nueva Zelanda?

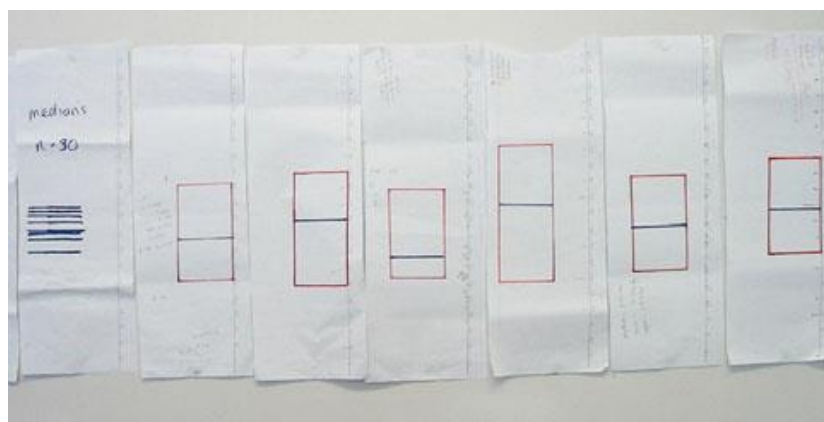


Figura 4. Variabilidad de muestreo para muestras de tamaño $n=30$.

Fuente: Pfankuch, Wild y Parsonage (2012)

Con esta actividad los estudiantes pueden desarrollar la idea de variabilidad entre muestras cuando empiecen a comparar sus resultados con los de sus compañeros y vean las diferencias entre los resultados (Figura 4), también esta extracción física les permitirá ver la relación entre la muestra y la población aunque no les permitirá hacerse una imagen de la distribución de la muestra ni de la población ya que para esto se estima que son necesarias muchas más repeticiones.

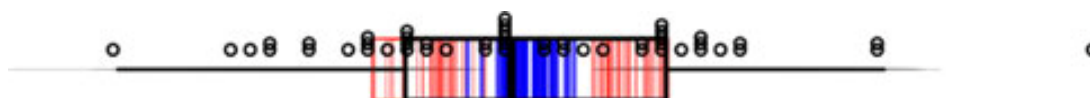


Figura 5. Visualización dinámica de la variabilidad del muestreo extrayendo múltiples muestras de una población.

Seguido a esto, el programa VIT (*Visuals Inference Tools*) creado por Wild maneja la base de datos que contiene los utilizados en la primera actividad y permite al estudiante generar una simulación dinámica de una gran cantidad de muestras de un mismo tamaño y observar por medio de una rastro azul los valores que toma la media muestral como se observa en la Figura 5.

La diferencia que presenta la mencionada investigación es la implementación de un método aprobado por la comunidad estadística para la construcción de Intervalos de Confianza que no requiere de la implementación de cálculos y es conocido como Bootstrap, en el cual la simulación juega un papel principal en la construcción del intervalo a partir de una muestra.

Makar y Rubin (2014) presentan una síntesis de las ideas principales de algunas investigaciones sobre el razonamiento inferencial informal que han aparecido desde que presentaron su trabajo del 2009, el cual también ha sido referenciado en este documento. Ellos afirman que es factible hacer investigación sobre inferencia informal con niños de primaria, pero que el grueso de los trabajos en este tema está dirigido a estudiantes de secundaria con la ayuda de la tecnología. Según ellos la tendencia es permitir a los estudiantes utilizar apoyos visuales para establecer inferencias a partir de muestras y aseguran que se necesitan más trabajos donde el estudiante deba tomar decisiones a partir de una sola muestra.

En el nivel universitario según Makar y Rubin (2014), las investigaciones sobre inferencia estadística informal han ido aumentando, allí predomina un enfoque de resolución de problemas como paso previo a la instrucción formal, en el cual se le permite al estudiante establecer sus propias inferencias sin utilizar procesos formales y se resalta la importancia del contexto.

Lee et al. (2016) buscan determinar el papel de la probabilidad bajo un enfoque de muestreo repetitivo para el establecimiento de inferencias. El interés de este trabajo es observar cómo los

profesores pueden desarrollar en los estudiantes un modelo que les permita resolver cierto conjunto de situaciones por medio de inferencias construidas a partir del muestreo repetitivo, esta idea de modelo es la misma que la idea de esquema en el marco de la aproximación instrumental.

Para lograr sus objetivos aplicaron una serie de actividades adaptadas de trabajos anteriores sobre la inferencia informal y el muestreo, (Ben-Zvi (2006), Pfannkuch (2006), Rossman (2008), Zieffler et al. (2008), entre otros), con la intención de desarrollar modelos o esquemas en 27 profesores estudiantes de posgrado, de los cuales 11 además eran profesores en servicio.

Después de la aplicación de las actividades, donde se enfocaron en el desarrollo de ideas como muestreo repetitivo e inferencias a partir de este, la variabilidad en el muestreo y modelos para representar una situación con su respectiva simulación, Lee et al. (2016) aseguran que fue conveniente haber introducido procesos de muestreo ya que son más explícitos para el estudiante. Según ellos es importante enfatizar el papel de la probabilidad a la hora de establecer inferencias por medio de los valores de una variable aleatoria conseguidos en la simulación del muestreo repetitivo. Del mismo modo sugieren hacer un énfasis especial en la construcción de la distribución muestral, concibiéndola como una distribución de probabilidad, usándola para hacer afirmaciones sobre el estadístico y sobre la probabilidad de lo observado.

De cualquier modo las actividades utilizadas en Lee et al. (2016) fueron dirigidas por el instructor y los modelos o esquemas resultantes no fueron un producto propio de los estudiantes sino que de alguna forma fueron impuestos, por tal motivo ellos sugieren encaminar las investigaciones hacia la observación de los esquemas personales que pueda construir cada estudiante lo cual afirman, puede generar mejores resultados.

Por su parte Sánchez y Ruiz (2017) construyen una propuesta dirigida a los profesores de educación primaria para la enseñanza de la estadística desde un enfoque informal. Ellos presentan una clasificación de las definiciones que los diferentes autores han dado al razonamiento inferencial informal en sus trabajos (Tabla 1).

Tabla 1. Diferentes definiciones del razonamiento inferencial informal, tomado de Sánchez y Ruiz (2017)

Ben-Zvi (2006)	Pfannkuch (2006)	Rossmann (2008)	Zieffler et al. (2008)	Makar y Rubin (2009)
Son tipos de argumentaciones que los estudiantes realizan al tratar de elaborar conclusiones tomadas de los datos de una muestra hacia una población.	Permite elaborar conclusiones a partir de los datos al observar, comparar y razonar a partir de las distribuciones de los datos.	Es un elemento fundamental de la inferencia que permite ir más allá de los datos al basarse en un modelo probabilístico.	Es la manera en que los estudiantes usan su conocimiento informal para hacer argumentos que soporten sus inferencias acerca de poblaciones desconocidas observando muestras.	Considera la inferencia informal como proceso para aprender estadística. Incluye la generalización y/o predicción, el uso de datos y un lenguaje probabilístico.

Básicamente se trata de un estado del arte sobre el razonamiento inferencial informal y la sugerencia de la implementación de la teoría estudio de clases de Lewis y Tsuchida, (1998) (como se cita en Sánchez y Ruiz, 2017) que permite el perfeccionamiento de la labor docente a través del diseño y análisis de las clases por parte de un grupo de docentes, ya que uno de ellos implementa una clase, previamente diseñada por el grupo de docentes, mientras los demás observan con la intención de analizar y posteriormente discutir las posibles mejoras.

Según Sánchez y Ruiz (2017), el conocimiento y la implementación de las dos teorías descritas en su trabajo, permitiría a los profesores comprender que la enseñanza de la estadística debe ser abordada de manera diferente, percibiendo la variabilidad de las situaciones y la importancia del contexto, concibiendo las situaciones como estocásticas, donde entra en juego la variabilidad, el tamaño de la muestra y las diferentes representaciones de manera conjunta.

1.3. A MANERA DE CONCLUSIONES

Para el diseño de las actividades hemos considerado el Razonamiento Inferencial Informal desde el punto de vista de Zieffler et al (2008) “Es la manera en que los estudiantes usan su conocimiento informal para hacer argumentos que soporten sus inferencias acerca de poblaciones desconocidas observando muestras” y hemos intentado que los estudiantes generen desarrollos que respondan a lo planteado por Makar y Rubin (2009), el establecimiento de generalizaciones, consideración de los datos como evidencia y el uso de un lenguaje probabilístico.

En el mismo sentido las ideas planteadas por Pfankuch, Wild y Parsonage (2012) sobre las imágenes mentales que debería poseer un estudiante para comprender una situación como estocástica han guiado el diseño de nuestras actividades. También observamos las actividades propuestas en los trabajos de Rossman (2012) y Pfankuch, Wild y Parsonage (2012) quienes nos dieron algunas luces de cómo podríamos hacer para que el estudiante utilizara la simulación computacional para respaldar sus inferencias en lugar de cálculos formales.

Para el diseño de las pruebas inicial y final, hemos considerado las concepciones erróneas más comunes reportadas en trabajos como el de Liu y Thomson (2007) y Yáñez y Behar (2009) quienes encontraron que las personas tienen problemas para comprender los conceptos básicos

asociados a los Intervalos de Confianza y trabajos como los de Salcedo et al. (2011) y Rangel (2014) quienes reportan concepciones erróneas sobre la interpretación de la confianza asociada al intervalo y sobre las relaciones entre el tamaño de la muestra, el ancho del intervalo, la precisión y el nivel de confianza.

2.- REFERENTES MATEMÁTICOS

2.1. INTERVALOS DE CONFIANZA

Inferir en estadística hace referencia al establecimiento de conclusiones sobre una población basadas en la información que proporcionan las muestras, por esto la inferencia estadística utilizada correctamente es una de las herramientas más importantes en las investigaciones científicas. Los Intervalos de Confianza junto con las pruebas de hipótesis son los métodos más conocidos y utilizados en la estadística formal para el establecimiento de inferencias.

Un intervalo de confianza es una estimación de un parámetro poblacional por medio de un conjunto de valores que se establecen a partir de la información proporcionada por una muestra. No siempre el intervalo captura el verdadero valor del parámetro, por eso es necesario considerar un nivel de confianza C .

Moore (2005) define el intervalo de confianza así: “un intervalo de confianza de nivel C para un parámetro poblacional es un intervalo calculado a partir de los datos de una muestra por un método que tiene una probabilidad C de producir un intervalo que contenga el verdadero valor del parámetro” (p.338). En otras palabras, si se tienen 100 muestras cada una arroja un estadístico (valor calculado a partir de la muestra) diferente y por ende (aunque se usa el mismo método) un intervalo diferente, si la confianza es del 95% lograríamos capturar el verdadero valor del parámetro en promedio aproximadamente en 95 de ellos.

También es muy común que el nivel de confianza **C** se denote como $1 - \alpha$ donde α recibe el nombre de significancia. Un intervalo de confianza para estimar la media de la población con un nivel de confianza $1 - \alpha$, asumiendo la desviación estándar σ poblacional conocida y utilizando el teorema central del límite, se calcula con la expresión:

$$\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Aquí n es el tamaño de la muestra, $\bar{x}$ es la media de la muestra y $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el percentil asociado a la distribución normal estándar tal que la probabilidad entre $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ y $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es $1 - \alpha$. Por otra parte $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ recibe el nombre de error estándar y $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es el error de la estimación.

Generalmente, en la práctica no se conoce la desviación estándar de la población por eso es necesario estimar el error estándar de la media muestral utilizando la desviación de la muestra que se tiene, el intervalo de confianza se construye en este caso de la siguiente manera:

$$\bar{x} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

Ahora $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el percentil asociado a una distribución t-student con $n-1$ grados de libertad y s_x la desviación estándar calculada de la muestra.

Por otra parte, si lo que se busca es inferir una proporción poblacional el intervalo de confianza tendrá la forma:

$$\hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Nuevamente, aquí $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el percentil asociado a la distribución normal estándar pero $\hat{p}$ es la proporción de interés calculada en la muestra.

2.2. EL MÉTODO DEL BOOTSTRAP

El método de Bootstrap fue introducido por Efron en 1979, y básicamente consiste en la aplicación de un proceso de re-muestreo para estimar la distribución muestral de un estimador basándose tan solo en una muestra disponible. Se ha demostrado que el método funciona bien en muchas situaciones y ha sido aceptado por la comunidad estadística, incluso se considera que, en algunos casos, es mejor que la tradicional aproximación normal.

El Bootstrap ha sido bastante utilizado para estimar varianzas, corregir sesgos y construir Intervalos de Confianza, sobre todo cuando se trata de pequeñas muestras. A continuación presentamos una descripción de los pilares teóricos de este método fundamentada por varios artículos formales encontrados en la literatura, para esto se introducen algunas definiciones y notaciones que se van a ir utilizando a medida que se avanza en la mencionada exposición del Bootstrap.

Interpretaremos $X_1, X_2, \dots, X_n$ como los valores que puede tomar una variable aleatoria con distribución P .

Consideraremos a $\theta = T(P)$ como un estadístico. Por ejemplo, la media de P , en tal caso se tiene que $\theta = E(X_i) = \int x dP(x)$.

Definamos P_n como la función, que asigna una probabilidad de $\frac{1}{n}$ a cada X_i , en otras palabras, P_n es una distribución discreta que asigna a cada valor, la misma probabilidad. De esta forma, un estimador de θ está dado por $\hat{\theta}_n = T(P_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, es decir, la media muestral.

Las muestras de tamaño n tomadas con reemplazamiento de P_n se conocen como muestras Bootstrap. $X_1^*, \dots, X_n^* \sim P_n$.

Como se pretende construir Intervalos de Confianza para el parámetro a estimar utilizando las muestras bootstrap, es necesario obtener una estimación de la varianza del estimador de la media, aspecto que se desarrolla en el próximo apartado.

2.2.1. Estimador de la varianza Bootstrap

Sea $\hat{\theta}_n = g(X_1, \dots, X_n)$ un estimador, entonces:

1. Se toma una muestra Bootstrap de tamaño n , $X_1^*, \dots, X_n^* \sim P_n$ y se calcula para ella el estimador $\hat{\theta}_n^* = g(X_1^*, \dots, X_n^*)$
2. Se repite este paso B veces, obteniendo en cada muestra un estimador: $\hat{\theta}_{n,1}^*, \hat{\theta}_{n,2}^*, \dots, \hat{\theta}_{n,B}^*$
3. Se calcula $\hat{s}^2 = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B (\hat{\theta}_{n,j}^* - \bar{\theta})^2$ donde $\bar{\theta} = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B \hat{\theta}_{n,j}^*$

Bajo las condiciones apropiadas se tiene que $\frac{\hat{S}^2}{\text{Var}(\hat{\theta}_n)} \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$, en otras palabras,

la varianza de distribución muestral y la varianza Bootstrap tienden al mismo valor cuando la muestra tiene un gran tamaño (Wasserman, 2014).

2.2.2. Intervalo de confianza Bootstrap

1. Se toma una muestra Bootstrap de tamaño n , $X_1^*, \dots, X_n^* \sim P_n$ y se calcula para ella el estimador $\hat{\theta}_n^* = g(X_1^*, \dots, X_n^*)$

2. Se repite el paso anterior B veces, obteniendo encada re-muestra un estimador: $\hat{\theta}_{n,1}^*, \hat{\theta}_{n,2}^*, \dots, \hat{\theta}_{n,B}^*$, todas las re-muestras tienen el mismo tamaño.

3. Se establece la función de distribución empírica que asigna una probabilidad empírica acumulada hasta un valor t en la distribución de los B estimadores independientes Bootstrap obtenidos en el paso 2, denotada como

$$\hat{F}(t) = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B I(\sqrt{n}(\hat{\theta}_{n,j}^* - \hat{\theta}_n) \leq t). \text{ Aquí } I \text{ se conoce como la función indicatriz del suceso,}$$

en otras palabras

$$\hat{F}(t) = \frac{\text{Número de elementos } \sqrt{n}(\hat{\theta}_{n,j}^* - \hat{\theta}_n) \leq t}{B} \quad (\text{Marín, 2015})$$

$$4. \text{ Se construye el intervalo } C_n = \left[\hat{\theta}_n - \frac{t_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_n - \frac{t_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right]$$

$$\text{Donde } t_{\alpha/2} = \hat{F}^{-1}(\alpha/2) \text{ y } t_{1-\alpha/2} = \hat{F}^{-1}(1 - \alpha/2).$$

Bajo las condiciones apropiadas, la probabilidad de que el intervalo capture el valor del parámetro θ sería: $P(\theta \in C_n) = 1 - \alpha - O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donde O es un pequeño error, por lo tanto entre más grande sea la muestra $O(1/\sqrt{n})$ será un valor más pequeño (DasGupta, S.f.).

A continuación se exponen aquellas ideas que fundamentan el funcionamiento del método del bootstrap para la construcción de buenas estimaciones por medio de Intervalos de Confianza.

Se define F_n , la función que asigna una probabilidad acumulada hasta un valor t en la distribución muestral, como $F_n(t) = P(\sqrt{n}(\hat{\theta}^* - \hat{\theta}_n) \leq t)$, allí n es el tamaño muestral, $\hat{\theta}^*$ el valor del estadístico de cada muestra y $\hat{\theta}_n$ el valor esperado del estadístico, es decir la media de la distribución muestral. Se establece entonces $\hat{F}_n(t) = P(\sqrt{n}(\hat{\theta}^* - \hat{\theta}_n) \leq t | X_1, \dots, X_n)$ la aproximación Bootstrap de F_n , que asigna probabilidad acumulada a la distribución de los valores del estimador $\hat{\theta}^*$ calculados a partir de re-muestras de tamaño n tomadas con reposición de una muestra $X_1, X_2, \dots, X_n$ con n datos.

En realidad F_n en la práctica no se conoce, pero $\hat{F}_n$ depende solo de los datos de la muestra que tenemos a nuestra disposición. De cualquier modo se podrá extraer una cantidad finita de muestras o re-muestras según sea el caso, por esto tendremos que decir que F_n cuando es construida extrayendo diferentes muestras de la población termina siendo también una aproximación que va a estar muy cerca de alguna función límite L . Similarmente $\hat{F}_n$ construida mediante re-muestras de una sola muestra va a estar cerca de una función límite $\hat{L}$. Lo más probable es que L y $\hat{L}$ estarán cerca entre sí, lo cual implica que F_n y $\hat{F}_n$ también lo están. En la práctica usualmente se aproxima $\hat{F}_n$ por su versión Montecarlo $\bar{F}$, que consiste en extraer

muestras del mismo tamaño con reposición, calculando para cada una el estadístico de interés, siempre que se disponga de toda la población.

$$\bar{F}(t) = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B I(\sqrt{n}(\hat{\theta}_j^* - \hat{\theta}_j) \leq t) \text{ donde } \hat{\theta}_j = \frac{1}{B} \sum \hat{\theta}_j^*$$

Por tanto $\bar{F}$ y $\hat{F}_n$ serán muy cercanas siempre que B sea lo suficientemente grande.

Por ejemplo, supongamos que los valores de una variable aleatoria $X_1, \dots, X_n$ tienen una media μ y varianza σ^2 . Supongamos también que queremos construir un intervalo de confianza para μ , donde $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

$$\text{Definimos } F_n(t) = P(\sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu) \leq t)$$

Como ya se ha dicho, comúnmente no conocemos la distribución de probabilidad acumulada F , Pero por un momento, vamos a suponer que sí se conoce. Así, para algún $0 < \beta < 1$, sería posible calcular $z_\beta = F^{-1}(\beta)$ y por lo tanto se podría construir el intervalo

$$A_n = \left[\hat{\mu}_n - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \hat{\mu}_n - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right]$$

Donde A_n viene siendo un intervalo con una confianza de $1-\alpha$. Para ver esto notemos que la probabilidad de que A_n capture el valor de μ es

$$\begin{aligned} P(\mu \in A_n) &= P\left(\hat{\mu}_n - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \hat{\mu}_n - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) \\ &= P(z_{\alpha/2} \leq \sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu) \leq z_{1-\alpha/2}) \\ &= F_n(z_{1-\alpha/2}) - F_n(z_{\alpha/2}) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha \end{aligned}$$

De cualquier modo aunque no se conozca F , la podemos estimar por medio del Bootstrap, a partir de una muestra conocida: $\hat{F}_n(t) = P(\sqrt{n}(\hat{\mu}_n^* - \hat{\mu}_n) \leq t | X_1, \dots, X_n)$.

Donde $\hat{\mu}_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^*$, $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ y $X_1^*, \dots, X_n^* \sim P_n$. Nuevamente, los datos $X_1, \dots, X_n$ son fijos durante el bootstrap, además de ser los únicos datos conocidos de la población, por eso se escribe $\hat{F}_n$ como una distribución condicional.

Es importante notar que cuando nosotros hacemos el algoritmo del Bootstrap, estamos aproximándonos a $\hat{F}_n(t)$ por $\bar{F}(t) = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B I(\sqrt{n}(\hat{\mu}_{n,j}^* - \hat{\mu}_n) \leq t)$ pero se tiene que $\sup_t |\bar{F}(t) - \hat{F}_n(t)| \rightarrow 0$ allí es posible tomar una gran cantidad B de re-muestras, para nada complicado en los programas computacionales, de esta forma se puede ignorar el error de aproximación y así asumir $\hat{F}_n(t)$ como conocida.

Definiendo que para algún $0 < \beta < 1$, se tienen que $t_\beta = \hat{F}^{-1}(\beta)$, el intervalo de confianza Bootstrap vendría siendo:

$$C_n = \left[\hat{\mu}_n - \frac{t_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \hat{\mu}_n - \frac{t_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right]$$

Este es el mismo intervalo que aquel que se supuso conocido inicialmente, excepto que se han utilizado $t_{\alpha/2}$ y $t_{1-\alpha/2}$ en lugar de $z_{\alpha/2}$ y $z_{1-\alpha/2}$. Para mostrar que $t_{\alpha/2} \approx z_{\alpha/2}$ y $t_{1-\alpha/2} \approx z_{1-\alpha/2}$

El siguiente se conoce como el Teorema Bootstrap y garantiza la proximidad entre $\hat{F}_n(t)$ y $F_n(t)$:

Suponga que $\mu_3 = \mathbb{E}|X_i|^3 < \infty$ entonces $\sup_t |\hat{F}_n(t) - F_n(t)| = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Para la prueba del teorema Bootstrap se hace uso del teorema de Berry-Esseen que establece:

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ los valores de una variable aleatoria, independientes e idénticamente distribuidos con media μ y varianza σ^2 . Sea $\mu_3 = \mathbb{E}(|X_i - \mu|^3) < \infty$ el tercer momento un valor finito, $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ la media muestral, Φ la función que asigna la probabilidad acumulada de una variable aleatoria con distribución $N(0,1)$, y sea también $Z_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}$, entonces:

$$\sup_z |P(Z_n \leq z) - \Phi(z)| \leq \frac{33}{4} \frac{\mu_3}{\sqrt{n}}$$

2.2.3. Demostración del teorema Bootstrap

En este apartado describimos la prueba encontrada en el documento de Wasserman (2014).

Sea $\Phi_\sigma(t)$ la función que asigna una probabilidad acumulada en una Normal con media 0 y varianza σ^2 . Sea $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu}_n)^2$, así, por la desigualdad triangular se puede escribir que:

$$\sup_t |\hat{F}_n(t) - F_n(t)| \leq \sup_t |F_n(t) - \Phi_\sigma(t)| + \sup_t |\Phi_\sigma(t) - \Phi_{\hat{\sigma}}(t)| + \sup_t |\hat{F}_n(t) - \Phi_{\hat{\sigma}}(t)| = I + II + III$$

Sea $Z \sim N(0,1)$ entonces, $\sigma Z \sim N(0, \sigma^2)$ y del teorema de Berry-Esseen,

$$\begin{aligned}
I &= \sup_t |F_n - \Phi_\sigma(t)| = \sup_t \left| P(\sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu) \leq t) - P(\sigma Z \leq t) \right| \\
&= \sup_t \left| P\left(\frac{\sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu)}{\sigma} \leq \frac{t}{\sigma} \right) - P\left(Z \leq \frac{t}{\sigma} \right) \right| \leq \frac{33}{4} \frac{\mu_3}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Procediendo similarmente con el tercer término de la suma tendremos que:

$$III = \sup_t |\hat{F}_n(t) - \Phi_{\hat{\sigma}}(t)| \leq \frac{33}{4} \frac{\hat{\mu}_3}{\sqrt{n}}$$

Donde $\hat{\mu}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \hat{\mu}_n|^3$ es el tercer momento empírico. Por la ley de los grandes números $\hat{\mu}_3$ converge a μ_3 , entonces es casi seguro que para un valor de n lo suficientemente

grande se tiene que $\hat{\mu}_3 \leq 2\mu_3$ y que $III \leq \frac{33}{4} \frac{\hat{\mu}_3}{\sqrt{n}}$. El hecho de que $\hat{\sigma} - \sigma = O_p\left(\sqrt{1/n}\right)$ permite

asegurar que $II = \sup_t |\Phi_\sigma(t) - \Phi_{\hat{\sigma}}(t)| \leq O_p\left(\sqrt{1/n}\right)$ y queda demostrado que:

$$\sup_t |\hat{F}_n(t) - F_n(t)| = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Es por esto que la distribución Bootstrap es una buena aproximación de la distribución muestral. Naturalmente lo más probable es que no se encuentre centrada en la media poblacional, pero sí en un valor cercano, y como su varianza realmente es similar a la varianza muestral, es posible construir el intervalo de confianza para el parámetro poblacional, sin necesidad de suponer ninguna distribución teórica, como comúnmente se hace con la normal y la distribución muestral.

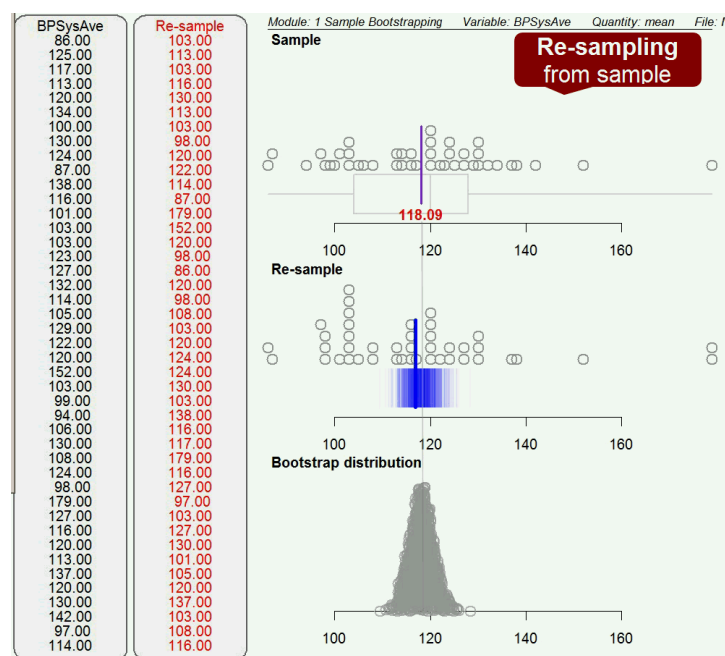


Figura 6. Re-muestreo aleatorio con reposición a partir de la muestra disponible.

Fuente: Wild (2013)

El Bootstrap es un método autosuficiente de estimación debido a que en la práctica no recurre a cálculos o supuestos teóricos para el establecimiento de inferencias si no que utiliza la información en los datos de la muestra y procede de una manera relativamente fácil de entender como lo asegura Ledesma (2008) “hay acuerdo en señalar que el Bootstrap es más general en su formulación, resulta más accesible y simple de comprender, y requiere menos supuestos que los métodos clásicos (p.3)”.

El único supuesto en el que se basa el método del Bootstrap es que la muestra es un buen representante de la población, sin embargo este supuesto no es exclusivo del Bootstrap también es necesario en los métodos clásicos para confiar en los resultados de la inferencia (Ledesma, 2008).

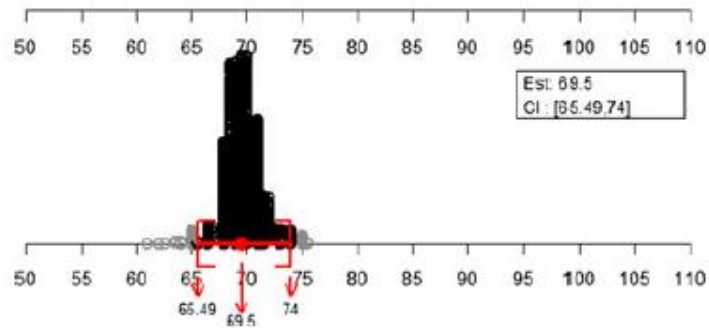


Figura 7. Intervalo de confianza Bootstrap con el 95% de confianza. Fuente: Wild (2013)

Construir un intervalo por este método requiere de un programa con buena capacidad para la simulación.-A partir de una muestra el programa genera una gran cantidad de re-muestras, es decir, de la muestra original, como si se tratara de una urna, se extraen datos de manera aleatoria y con devolución para construir nuevas muestras. Para cada una de esas re-muestras se calcula el estadístico en cuestión y se construye su distribución como se observa en la Figura 6 construida por Wild en su programa VIT.

Si lo que se quiere es un intervalo de confianza del 95% se deben calcular los percentiles 2,5 y 97,5 en la distribución ya mencionada, estos serán los límites del intervalo de confianza, tal como se aprecia en el ejemplo de la figura 7.

3.- MARCO TEÓRICO

3.1. RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL

Este trabajo comparte la idea de que una posible solución a la problemática del aprendizaje de los Intervalos de Confianza puede estar dada por un enfoque informal, donde se promueva el uso del sentido común y la verdadera comprensión de las ideas asociadas a los Intervalos de Confianza bajo un uso mínimo de cálculos formales.

De tal manera que las actividades deben promover el uso y el desarrollo de Razonamiento Inferencial Informal que no es otra cosa que la forma en que los estudiantes utilizan y articulan su conocimiento informal de estadística para dar argumentos en apoyo a las inferencias sobre poblaciones desconocidas, a partir de muestras observadas (Zieffler et al, 2008).

Para el planteamiento de las tareas, hemos tenido en cuenta el marco de Zieffler et al, (2008) el cual exige especial cuidado en que las situaciones propuestas desafíen al estudiante a:

1. Hacer afirmaciones o predicciones sobre la población basadas en la muestra, pero sin hacer uso de procedimientos o métodos formales.
2. Emplear e integrar sus conocimientos previos (formales e informales) en la medida en que estos conocimientos estén disponibles.
3. Articular argumentos basados en la evidencia para establecer juicios, afirmaciones y predicciones sobre las poblaciones a partir de muestras.

A su vez las tareas están enfocadas en lograr una comprensión de los Intervalos de Confianza como proceso estocástico, para lo cual tomamos como referencia el marco propuesto por Pfankuch, Wild y Parsonage (2012) donde establecen que los estudiantes deben desarrollar, lo que ellos llaman, imágenes mentales que les van a permitir comprender más adelante el concepto formal de intervalo de confianza.

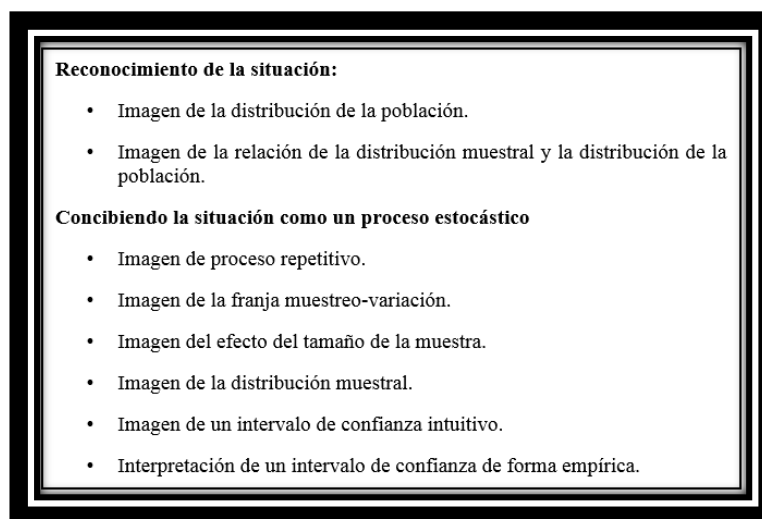


Figura 8. Marco para comprender los intervalos de confianza como un proceso estocástico.

Fuente: Pfankuch, Wild y Parsonage (2012)

La primera parte del marco (Figura 8) hace referencia a la necesidad de que el estudiante reconozca que la situación requiere una forma estocástica de pensar, en otras palabras, el estudiante es capaz de identificar si la situación requiere del establecimiento de inferencias y se da cuenta de la variabilidad presente en el muestreo ya que cualquier conclusión que pueda establecer está lejos de ser una respuesta determinista y la segunda, como lo indica el marco, son las ideas que los estudiantes deben desarrollar e interconectar para lograr concebir la situación como estocástica, por medio de las experiencias que tiene el estudiante con las

simulaciones podrá ir interiorizando algunas imágenes que evocará en su mente cuando llegue a trabajar de manera formal comprendiendo así ideas fundamentales y abstractas del método formal como la variación, la distribución muestral y la interpretación de la confianza del intervalo. Para lograrlo el estudiante debe entender primero que el método está considerando la toma de muestras de igual tamaño de manera aleatoria una gran cantidad de veces, el marco hace referencia a esto como proceso repetitivo. En consecuencia de la idea anterior el estadístico tendrá un valor diferente en cada muestra, sin embargo esta variación no es cualquier cosa, presenta una tendencia, cierto comportamiento, a esto se refiere el marco cuando habla de la franja de muestreo-variación, la cual se hace menos variable si se aumenta el tamaño de la muestra cómo se observó en la Figura 8. La secuencia de tareas que se implementan en esta investigación busca la interiorización de las ideas expresadas en el marco.

3.2. LA APROXIMACIÓN INSTRUMENTAL

Para el análisis del rol que desempeñan las simulaciones computacionales en Fathom utilizaremos la teoría de la Aproximación Instrumental (AI) de Artigue (2007) centrando nuestra atención en los esquemas que desarrolla y pone en juego el estudiante en el proceso de génesis instrumental. La AI se encuentra estructurada sobre dos teorías más, la teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard, 1999) y la ergonomía cognitiva (Rabadel, 1995), que son “de gran utilidad cuando lo que se quiere analizar de la escena escolar es la situación de uso de la herramienta de TDi (tecnologías digitales) por parte de un sujeto” (Pérez, 2014, p.136).

Para la teoría de la Aproximación Instrumental, “la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) proporciona un marco teórico centrado en la noción de institución, sensible a las normas y valores institucionales y a la manera en la que éstas influyen los procesos de enseñanza y

La razón para que la AI haya utilizado la TAD es que la considera sensible a la influencia de las herramientas de las prácticas sobre los saberes que emergen de éstas, de la misma forma que implementa una visión positiva de las técnicas, reconociendo a través de la noción fundamental de praxeología, el rol clave que las técnicas juegan en las construcciones conceptuales y teóricas (Pérez, 2014).

Praxeología

Figura 9. Idea de praxeología en la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Figura 9 la tecnología y la teoría conforman el Logos. Por lo tanto las dimensiones técnica (praxis) y conceptual (logos) son indisociables y mutuamente constitutivas.

Según la TAD resolver una tarea matemática requiere de la implementación de una técnica, que es una manera de hacer no necesariamente algorítmica, donde se ponen en juego todo un conjunto de razonamientos y de tareas rutinarias (Artigue, 2007). De esta manera las técnicas no solo tienen un valor pragmático (permiten producir resultados) sino que hacen parte de la comprensión de los objetos e incluso son fuente de nuevos cuestionamientos, lo que les da también un valor epistémico (Artigue, 2002). Con la aparición de las tecnologías digitales la necesidad de que el estudiante rutinice algunas técnicas se reduce, este cambio modifica los valores pragmático y epistémico de cada técnica (Artigue, 2002).

De todos modos Artigue considera que la TAD presenta limitaciones ya que cuando se construyó solo tenía en cuenta la enseñanza por medio de lápiz y papel, con respecto a esto afirma: “Construido con referencia a los ambientes tradicionales de enseñanza, el enfoque antropológico en didáctica, sin embargo, no ha desarrollado hasta ahora herramientas suficientemente eficientes para reflexionar acerca de los procesos de la instrumentación” (Artigue, 2002, p.249).

Este problema lo resuelve la ergonomía cognitiva cuyo objetivo es describir la relación entre el ser humano y todos los elementos del sistema de trabajo, en lo que hace referencia a cómo una persona conoce y actúa (Perez, 2014). La aproximación instrumental toma la idea de la ergonomía cognitiva de analizar ese proceso por el cual un sujeto toma un artefacto, lo hace propio y lo utiliza eficientemente para dar solución a una situación, proceso que recibe el nombre de génesis instrumental.

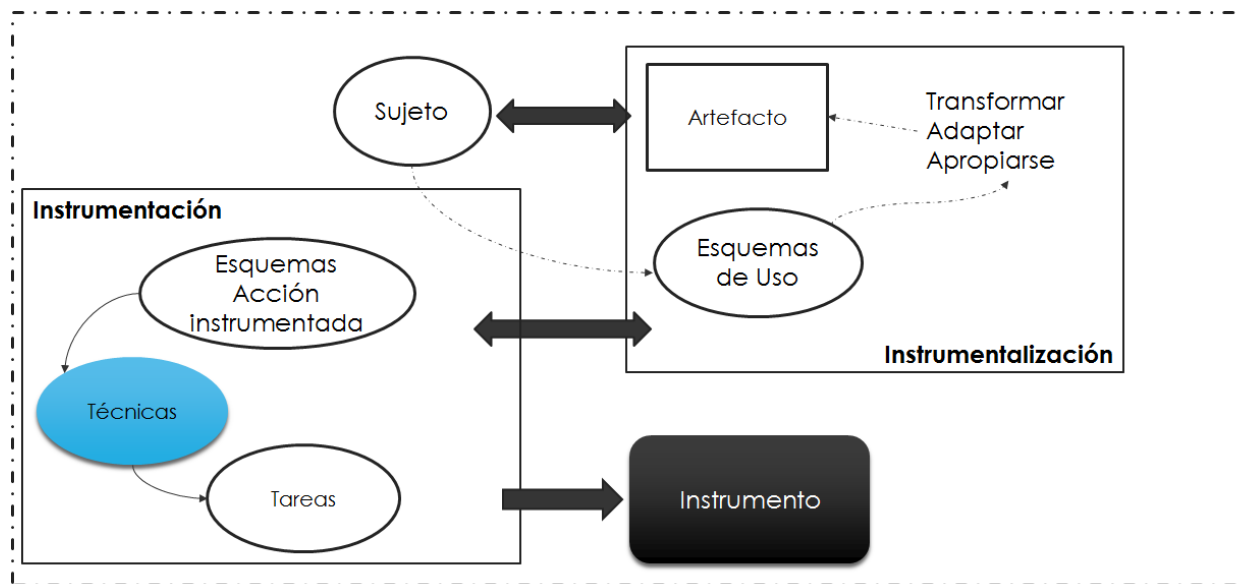


Figura 10. Proceso de génesis instrumental.

Como se observa en la figura 10, el artefacto en principio no representa ningún valor instrumental para el sujeto, requiere que el sujeto ponga en juego esquemas que ha construido de manera personal o que ha logrado apropiarse de esquemas sociales preexistentes. Para lograr esa transformación de artefacto a instrumento se evidencian dos fases, la primera llamada instrumentalización requiere que el sujeto haga uso de sus conocimientos para descubrir progresivamente las potencialidades del artefacto y adecuarlo para su uso, y la segunda conocida como la instrumentación, el sujeto se apropia o desarrolla esquemas producto del uso que le ha dado al artefacto, los cuales se traducen en técnicas que permitan resolver eficientemente la tarea, de esta forma el sujeto logra convertir un artefacto en instrumento (Artigue, 2002).

Para ilustrar a grandes rasgos este marco tomamos como ejemplo una de las situaciones propuestas en Rossman (2008):

“La mayoría de las personas son diestras, e incluso el ojo derecho es dominante en la mayoría de la gente. Los biólogos moleculares han sugerido que en la última etapa de gestación los embriones humanos tienden a girar la cabeza hacia la derecha. El bio-sicólogo Alemán Onur Gunturkun (2003) conjeturó que esta tendencia a girar a la derecha se manifiesta de otras maneras, por lo que estudió parejas besándose para ver si tendían a inclinar la cabeza hacia la derecha mientras se besan. Él y sus investigadores observaron parejas en lugares públicos como aeropuertos, estaciones de tren, playas y parques. Fueron cuidadosos de no incluir a las parejas que se encontraban sosteniendo objetos como equipaje que podría haber afectado en qué dirección se giraban.

De las 124 parejas observadas, 80 se inclinaron hacia la derecha. A la luz de los datos de la muestra, ¿qué proporción de la población tiende a inclinar su cabeza hacia la derecha? (p.16)”

Para dar solución a esta situación el estudiante tiene a su disposición el artefacto Fathom (Finzer, 2005) el cual está compuesto por un gran conjunto de funciones (collection, table, graph, entre otros). En un principio el estudiante se debe familiarizar con el artefacto, construyendo en su mente los usos que le podría dar a cada función en aras de resolver la situación, o dado el caso descartando algunas funciones, es decir evalúa las potencialidades y limitaciones, al tiempo que genera algunos esquemas de cómo puede ser usado y esquemas compuestos por varios esquemas de uso, llamados esquemas de acción instrumentada. Para solucionar la situación el estudiante podría seguir los siguientes pasos:

- 1) El estudiante genera una nueva colección y una tabla, en la cual simula la toma de una muestra aleatoria de tamaño 124 asumiendo en un principio que la proporción de personas que giran su cabeza a la derecha es 0.5, para tal fin recurre a la función

(Random) que le genera números aleatorios de 0 a 1, asociada con un deslizador que representa la proporción de la población.

Para lograr este primer paso el estudiante debe instrumentalizar el programa, recurriendo específicamente a funciones como las colecciones, las tablas, el editor de fórmulas y las funciones de aleatorización que va a utilizar; en este paso está haciendo una adecuación de Fathom para usarlo como herramienta, producto de la construcción de algunos esquemas de uso para los cuales ha tenido que movilizar y relacionar conocimientos sobre muestreo aleatorio, variabilidad, distribución de la población, probabilidad, proporción y frecuencia absoluta.

2) Ahora deberá simular la toma de una gran cantidad de muestras (por ejemplo 1000) del mismo tamaño para ver la distribución de la cantidad de parejas que giran su cabeza a la derecha en cada muestra, como resultado podrá observar que 80 o más constituyen un resultado poco probable en una población donde la proporción es 0,5.

En este segundo paso el estudiante necesitó adecuar funciones de Fathom como las medidas de la colección y el recolector de medidas, para luego obtener la distribución muestral. Para lograr esto, el estudiante pone en juego la noción de proceso repetitivo, sus conocimientos de variabilidad entre muestras, la relación entre la distribución muestral y la distribución poblacional (Teorema Central del Límite) y un cálculo intuitivo del p-valor.

3) Ayudados por el deslizador pueden empezar a aumentar el valor de la proporción, tomar 1000 muestras en cada caso y observar si 80 o más, sigue siendo un resultado poco probable. De esta forma podrá hacer una estimación de la proporción poblacional, en este caso, aproximadamente entre 0,58 y 0,7.

Finalmente el estudiante ha transformado Fathom en un instrumento y ahora puede dar una solución a la situación de manera informal, allí entran en juego conocimientos como distribución muestral, enfoque frecuencial de la probabilidad, franja de variación del muestreo, relación entre la distribución muestral y la distribución poblacional e intervalo intuitivo. Esta instrumentación puede generar nuevos interrogantes con respecto a la confianza de la estimación.

4.- METODOLOGÍA

Esta investigación fue diseñada para analizar el rol que juegan las simulaciones computacionales en el desarrollo del razonamiento inferencial informal asociado a los Intervalos de Confianza. Por lo cual fue necesario estudiar de cerca aspectos como el uso que el estudiante da a dichas simulaciones a través de las técnicas que utiliza, y por supuesto también, de cómo las respalda o justifica. Por estas razones se trata de una investigación con enfoque cualitativo y ha sido aplicada a estudiantes de ingeniería civil que cursaban su primer semestre en la Universidad Industrial de Santander.

Se trabajó con estudiantes de primer nivel porque nuestra investigación apuntó al uso y al desarrollo del razonamiento inferencial informal en estudiantes que no habían recibido ninguna instrucción formal sobre el tema. Esta investigación se trata de un estudio de casos, por esto aunque se contó con la participación de 20 estudiantes, se eligieron 4 para ser analizados por su actitud participativa y el interés mostrado en las primeras actividades.

Se aplicó una prueba inicial con la intención de hacer un diagnóstico del razonamiento inferencial informal de los estudiantes y el estado de sus conocimientos sobre conceptos asociados a los Intervalos de Confianza como, la variabilidad, enfoque frecuencial de la probabilidad, ley de los grandes números e influencia del tamaño muestral.

Se diseñaron y aplicaron 5 actividades para ser trabajadas con Fathom, cada estudiante dispuso de su computador y su guía de trabajo en cada sesión, comúnmente al finalizar cada

actividad se hacía una discusión grupal donde podían participar todos los presentes. La actividad 1 buscaba estudiar el comportamiento de la proporción muestral, extrayendo muestras con reposición de una urna con composición conocida. La actividad 2 tuvo un sentido contrario a la primera actividad, en esta ocasión los estudiantes debían estimar la proporción de bolas de un color contenidas en una urna, extrayendo muestras del mismo tamaño (cada extracción con reposición). En la actividad 3 el estudiante debía determinar por su propia cuenta, la media de una población a partir de muestras aleatorias del mismo tamaño. En la actividad 4 se hizo una comparación entre la distribución muestral de la media y la distribución Bootstrap. Finalmente, en la actividad 5 el estudiante debía enfrentar dos situaciones que requerían de la inferencia a partir de una sola muestra.

La información de las actividades fue recogida de 3 formas:

1. Escrita: cada estudiante debía consignar detalladamente sus respuestas y razonamientos en su hoja de trabajo.
2. Oral: durante el desarrollo de las actividades el investigador pasaba por el puesto de los estudiantes grabando audios donde él intentaba ahondar un poco más en las respuestas y razonamientos.
3. Video: Todos los estudiantes tenían instalado en sus computadores un programa que grabó la pantalla durante todas las actividades.

En cuanto al análisis de los resultados hicimos uso del marco de la Aproximación Instrumental propuesto por Artigue (2002).

La prueba final, tuvo como objetivo observar cuales de las concepciones erróneas, sobre Intervalos de Confianza, que han sido reportadas como producto del enfoque formal, aparecían también en los estudiantes que hicieron parte de nuestra investigación.

4.1. PRIMERA FASE: DISEÑO DE INSTRUMENTOS

Esta fase comprende la selección o diseño de las situaciones para favorecer el razonamiento inferencial informal, en este sentido se buscó que el estudiante se vea en la necesidad de hacer inferencias por medio de intervalos basado en las muestras disponibles llevándolo a hacer uso tanto de sus conocimientos previos como de su sentido común. La idea en las actividades fue que el estudiante estableciera estimaciones primero sin las simulaciones y luego acudiera a ellas como una forma de apoyar o evaluar a sus afirmaciones.

4.1.1. Prueba inicial

Se diseñó una prueba inicial a partir de varios pilotajes, para la cual se tuvieron en cuenta situaciones que involucran tanto variables aleatorias continuas como discretas, con el propósito de observar el estado de los razonamientos de los estudiantes con respecto a la variabilidad, relación entre muestra y población, enfoque frecuencial de la probabilidad (ley de los grandes números) e inferencias. A continuación mostramos las situaciones junto con algunos comentarios sobre la intención de cada numeral.

Situación 1

Una fundación quiere conocer la estatura promedio de los jóvenes varones menores de 19 años de Medellín. Como el número de estos jóvenes es muy grande, la fundación

opta por seleccionar al azar un grupo de 20 jóvenes menores de 19 años. Hecha la selección de jóvenes, les midieron su estatura y calcularon el promedio de ellas obteniendo el valor de 1,75 m.

Se trata de un problema que involucra una variable aleatoria continua en el cual el estudiante debía hacer inferencia a partir de una pequeña muestra sobre la población, utilizando su propia experiencia y su sentido común.

A) ¿Si seleccionara otro grupo de 20 estudiantes, el promedio de sus estaturas también sería 1,75 m? Justifique su respuesta.

La intención de esta pregunta fue observar el estado de la noción de variabilidad del estudiante o si por otro lado el estudiante concebía este tipo de situaciones desde un pensamiento determinista.

B) ¿Cuál cree que sea la estatura promedio de todos los jóvenes varones menores de 19 años de Medellín? Justifique su respuesta.

El propósito ahora fue determinar si el estudiante consideraba posible establecer conclusiones sobre la población a partir de la información proporcionada por una muestra y si ese era el caso, observar si le era natural una estimación por intervalo o si consideraba conveniente una estimación puntual.

C) Si en lugar de 20 jóvenes el grupo estuviera conformado por 100 jóvenes y se obtuviera el mismo promedio (1,75 m.), ¿cambiaría la respuesta dada en B)? Explique su respuesta.

El objetivo con esta situación fue observar las ideas del estudiante sobre la influencia del tamaño muestral en la precisión de la estimación.

D) A su juicio, ¿qué implicaciones tiene sobre la estimación del promedio de la estatura el hecho de aumentar el tamaño del grupo seleccionado?

Esta pregunta tenía propósitos similares al numeral anterior, pero esta pregunta es un poco más abierta para ver que otras nociones aparecían sobre la influencia del tamaño muestral en la estimación.

Situación 2

Suponga que una urna contiene un cierto número de bolas blancas y negras que nadie conoce. Usted fue contratado para estimar las proporciones de bolas blancas y negras que hay en la urna. Lo único que puede hacer es realizar extracciones de bolas de la urna con reposición (es decir, saca la bola, anota el color y la devuelve a la urna antes de realizar otra extracción).

Esta situación, en principio, involucra variables aleatorias discretas, tenía como objetivo observar las nociones que poseía el estudiante sobre el muestreo, variabilidad del muestreo, distribución muestral y teorema central del límite.

A) Suponga que realizó 100 extracciones y obtuvo 70 bolas blancas (y 30 bolas negras), es decir, 70% de los resultados fueron bolas blancas. ¿Qué conclusión sacaría respecto a la proporción de bolas blancas en la urna? Explique su respuesta.

Con esta pregunta quisimos observar las ideas del estudiante sobre estimaciones, puntualmente si creía posible hacer afirmaciones sobre la población a partir de lo que observaba en una muestra. Para este caso se utilizaron muestras de un tamaño considerable, y así observar si en este caso cambiaban algunas apreciaciones de los estudiantes.

B) No se conoce el número de bolas de cada color en la urna, pero se sospecha que son iguales. Si al realizar 100 extracciones se obtienen 60 bolas blancas y 40 negras, ¿se podría seguir pensando que la urna contiene igual cantidad de bolas blancas que de bolas negras? Justifique su respuesta.

En este numeral le dimos al estudiante una distribución de la urna con la cual contrastar los resultados de una muestra, con la intención de observar sus nociones de variabilidad muestral y de distribución muestral de la proporción.

C) Si la urna contiene igual número de bolas blancas que negras y se realizan 100 extracciones con devolución, ¿Cuáles serían los resultados más probables en cuanto a bolas de cada color? Seleccione los posibles resultados en las siguientes tablas justificando muy bien su elección.

Blanc as	Negr as	Blanc as	Negr as	Blanc as	Negr as	Blanc as	Negr as	Blanc as	Negr as
1	99	11	89	21	79	31	69	41	59
2	98	12	88	22	78	32	68	42	58
3	97	13	87	23	77	33	67	43	57
4	96	14	86	24	76	34	66	44	56
5	95	15	85	25	75	35	65	45	55
6	94	16	84	26	74	36	64	46	54
7	93	17	83	27	73	37	63	47	53
8	92	18	82	28	72	38	62	48	52
9	91	19	81	29	71	39	61	49	51
10	90	20	80	30	70	40	60	50	50

Negr as	Blanc as	Negr as	Blanc as	Negr as	Blanc as	Negr as	Blanc as	Negr as	Blanc as
1	99	11	89	21	79	31	69	41	59
2	98	12	88	22	78	32	68	42	58
3	97	13	87	23	77	33	67	43	57
4	96	14	86	24	76	34	66	44	56
5	95	15	85	25	75	35	65	45	55
6	94	16	84	26	74	36	64	46	54
7	93	17	83	27	73	37	63	47	53
8	92	18	82	28	72	38	62	48	52
9	91	19	81	29	71	39	61	49	51
10	90	20	80	30	70	40	60	50	50

En esta pregunta le dimos vuelta a la situación, se estableció conocida la composición de la urna y le preguntamos al estudiante por los resultados que se obtendría en muestras del mismo

tamaño, con ello esperábamos observar las ideas que poseían sobre la variabilidad de la distribución muestral de la proporción.

D) ¿Cuáles serían las cantidades de bolas blancas más probables de obtener si se hicieran 1000 extracciones?

En este caso pretendíamos observar las ideas de los estudiantes sobre la influencia del tamaño muestral en la variabilidad de la distribución muestral de la proporción.

4.1.2. Las Actividades

Para el desarrollo de las sesiones se diseñaron 5 actividades para ser abordadas con la ayuda del programa Fathom. A su vez en la construcción de las actividades se tuvieron en cuenta las ideas sobre la importancia del desarrollo de imágenes mentales de los estudiantes, planteadas en el marco de Pfankuch, Wild y Parsonage (2012), para la búsqueda de buena comprensión de los conceptos asociados a los Intervalos de Confianza y por ende del método mismo.

Se adoptó como metodología de las actividades, una primera parte en la cual el estudiante debía responder sin ayuda del programa, esto con la intención de recoger sus ideas iniciales y una segunda parte con preguntas similares sobre la misma situación luego de haber observado lo que sucedía en Fathom, con lo cual buscamos observar los cambios en los razonamientos a medida que iban pasando las sesiones.

La actividad 1 fue planteada con un doble propósito, primero instruir al estudiante sobre algunas funciones del programa Fathom y segundo enfrentarlos a situaciones que podrían desarrollar sus concepciones sobre variabilidad, relación modelo muestra, enfoque frecuencial de la probabilidad, y distribución muestral. Básicamente la idea fue observar el comportamiento de la proporción muestral por medio de la extracción de muestras del mismo tamaño de una

urna con composición conocida y observar algunas relaciones entre la distribución muestral de la proporción y la proporción de la urna.

Para la actividad número 2 se planteó el trabajo en un sentido contrario al de la primera actividad, en esta ocasión hemos diseñado un archivo en Fathom de tal forma que el estudiante puede simular extracciones de muestras de cualquier tamaño con reposición de una urna cuya composición permanece oculta durante toda la actividad. Con esto esperamos que el estudiante ponga en juego sus propios razonamientos junto con las nociones generadas en la primera actividad para empezar a hacer inferencias sobre la composición esta urna.

Otro de los conceptos que consideramos importante de abordar en la actividad 2 fue la influencia que tiene el tamaño de la muestra sobre la variabilidad de la distribución muestral de la proporción.

En la actividad 3 se planteó una situación bajo un contexto que involucra variables aleatorias continuas, se trata de una población que se mantiene oculta y se le pide al estudiante estimar su media sabiendo que es posible tomar pequeñas muestras del mismo tamaño con reposición. Para esta actividad se proporcionó la situación junto con algunas preguntas y el estudiante tenía la libertad de utilizar el programa como lo considerara conveniente. Con esta actividad esperábamos analizar las técnicas utilizadas desglosando los conocimientos movilizados por los estudiantes para dar solución a la situación.

La actividad 4 consistió en la presentación del método del Bootstrap. La idea fue que el estudiante pudiera comparar la distribución muestral de la media con la distribución Bootstrap y desarrollara por sí mismo concepciones sobre la utilidad de este método en el momento de plantear estimaciones a partir de una muestra. Para esto el estudiante fue inducido al proceso para la construcción de las distribuciones mencionadas, partiendo de una situación

contextualizada cuya población ha sido simulada previamente y se mantiene oculta durante la actividad, allí se involucran variables aleatorias continuas y se pide al estudiante estimar la media poblacional.

Para la actividad 5 se diseñaron dos situaciones donde se contaba con una sola muestra y se debían hacer inferencias sobre la población. La primera involucraba una variable aleatoria discreta donde la muestra tan solo se describía en el texto, mientras en la segunda que involucraba variable continua, se proporcionó un archivo en Fathom que contenía los datos de una sola muestra. Para ambos casos el estudiante estuvo en libertad de utilizar el programa a conveniencia. El propósito de esta actividad fue analizar las técnicas seguidas por los estudiantes para hacer inferencia a partir de una sola muestra.

4.1.3. Prueba final

Se diseñó una prueba final para contrastar las ideas finales de los estudiantes que hicieron parte de nuestra investigación, con las concepciones erróneas más comunes reportadas en las investigaciones que hemos referenciado en la sección de antecedentes en este documento.

En el planteamiento de esta prueba se consideraron concepciones sobre variabilidad, determinismo, relación entre el tamaño muestral y la precisión, relación entre el ancho del intervalo y la precisión, relación entre el nivel de confianza y el ancho del intervalo y la relación entre el nivel de confianza y la precisión. A continuación presentamos las situaciones de prueba final y algunos comentarios. Cabe aclarar que cada respuesta debía ser justificada por el estudiante.

1. En una fábrica embotelladora de gaseosa se quiere determinar si la máquina que se utiliza para el llenado de las botellas está funcionando correctamente. Aunque a simple

vista las botellas parecen contener una buena cantidad del líquido, es necesario determinar si el promedio del líquido vertido en un lote de 1500 botellas es 350 ml.

1.1. Con la intención de estimar la cantidad de líquido promedio que hay en las 1500 botellas de gaseosa, el jefe de control de calidad solo pudo tomar una muestra aleatoria de 40 botellas, en las cuales halló un promedio de líquido de 344 ml. ¿Cuáles conclusiones considera correctas?

Esta pregunta tuvo como objetivo principal observar las ideas de variabilidad del estudiante así como sus nociones de estimación, en este sentido podremos ver si él se inclinaba por estimaciones puntuales o estimaciones por intervalos. A su vez, sería posible hacernos una idea del estado de las nociones de relación entre el comportamiento de la muestra y la población, dependiendo de las respuestas seleccionadas.

a) El promedio de las 1500 botellas de la producción es menor a 350 ml.

Decidimos proponer esta opción dentro de las posibles respuestas ya que fue una de las ideas más comunes de los estudiantes encontrada en la prueba inicial, en caso de elegir esta opción podríamos afirmar que el estudiante posee pocas nociones de variabilidad

b) No hay razón para asegurar que el promedio de las 1500 botellas de la producción sea menor a 350 ml.

Por otra parte, elegir esta opción es evidencia de poseer algunas nociones de variabilidad.

c) Lo más probable es que el promedio de las 1500 botellas esté entre 336 y 352 mililitros.

En el caso de que el estudiante seleccionara la opción c), indicaría que posee buenas nociones de variabilidad y por supuesto de estimación por medio de intervalos.

- d) El promedio del líquido de las 1500 botellas es de 350 ml.
- e) El promedio del líquido en las 1500 botellas es de 344 ml.

Si el estudiante se inclinaba por cualquiera de estas dos opciones estaríamos frente a un posible caso de concepción determinista de la situación.

- f) Con tan solo 40 botellas, no se puede decir nada sobre las 1500 botellas.

Por otra parte si elegía la opción f) sería muy probable que el estudiante no percibiera relación entre la muestra y la población, es decir no consideraba posible hacer afirmaciones sobre la población a partir de una muestra.

1.2. Mediante un proceso de muestreo con 40 botellas, que en promedio tienen 356 ml, se construyó un histograma (Figura 1). Es este, se establece que el promedio de las 1500 botellas probablemente esté entre 349,5 y 362,5 mililitros. No obstante, el jefe de control de calidad decide, arbitrariamente, reportar que la estimación para la cantidad promedio vertida en las 1500 botellas está entre 353,5 y 357,5 mililitros.

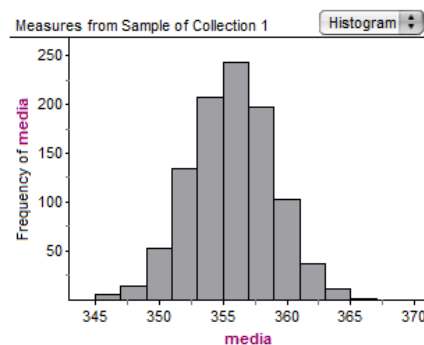


Figura 1.

Con esta situación pretendíamos observar las ideas del estudiante con respecto a la relación entre el ancho del intervalo y el nivel de confianza a partir de un problema en un contexto familiar.

¿Cuál afirmación sobre las dos estimaciones considera correcta?

- a) La probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas es IGUAL en la estimación entre 353,5 y 357,5 mililitros y la estimación entre 349,5 y 362,5 mililitros.
- b) La estimación entre 353,5 y 357,5 mililitros tiene MAYOR probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas, que la estimación entre 349,5 y 362,5 mililitros.
- c) La estimación entre 353,5 y 357,5 mililitros tiene MENOR probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas que la estimación entre 349,5 y 362,5 mililitros.
- d) Ninguna.

A diferencia de la pregunta 1.1, en este caso el estudiante debía elegir una sola de las posibles opciones, la opción c) nos indicaba que el estudiante posee ciertas nociones de la relación entre el nivel de confianza y el ancho del intervalo, en caso de elegir alguna de las demás opciones consideraríamos que es muy probable que el estudiante no posea claridad sobre este aspecto.

1.3. Basado en lo anterior, si el jefe de control de calidad decidiera tomar una nueva muestra aleatoria de 40 botellas y repitiera el proceso de simulación ¿Cuál estimación considera que es la más probable de obtener?

Con esta pregunta nos proponíamos observar, si el estudiantes era consiente que un intervalo no es una respuesta única y que por lo tanto, a partir de muestras diferentes se establecerán intervalos diferentes pero válidos.

- a) Entre 349,5 y 362,5

Es muy poco probable que una nueva muestra aleatoria arroje un intervalo de confianza idéntico al de una muestra tomada con anterioridad. El intervalo de esta opción es el mismo intervalo enunciado en la pregunta 1.2., en este orden de ideas elegir esta opción constituía evidencia para sospechar de la presencia de un pensamiento determinista en el estudiante.

b) Entre 365 y 371

Esta opción se constituye en un intervalo, cuyo centro estaría muy alejado de la estimación hecha en el numeral 1.2., al tiempo que no se solapa con la misma lo cual podría ser indicio de que es el menos probable de obtener.

c) Entre 346 y 358

El estudiante sería consciente que obtendrá un intervalo diferente, sin embargo lo más probable es que se trate de una estimación similar.

d) Cualquiera de las anteriores.

Durante la prueba inicial notamos algunas ideas que sugerían que varios estudiantes poseían ideas de la existencia de una variabilidad exagerada en las situaciones que involucran el azar, de tal forma que elegir esta opción iría en la misma dirección de este tipo de razonamientos.

1.4. Suponga que la muestra con la que se realizó la estimación del punto 1.2 era de tamaño 100 y no de tamaño 40. Si se construye el histograma del re-muestreo y se establece una estimación utilizando el mismo criterio de probabilidad ¿Cómo cree que será esta estimación comparada con la del punto 1.2?

El propósito en este numeral fue observar el estado de las nociones que poseía el estudiante sobre la influencia del tamaño muestral en el ancho del intervalo cuando se trabaja bajo una situación con un contexto familiar.

a) Se obtiene el mismo intervalo que con la muestra de 40.

- b) Se obtiene un intervalo más ancho.

Si el estudiante elegía la opción b) es muy probable que comprenda que el aumento del tamaño muestral se traduce en una ganancia de precisión que produce una disminución en el ancho del intervalo. La elección de alguna de las demás opciones nos llevaría a considerar la presencia de concepciones erróneas.

- c) Se obtiene un intervalo menos ancho.

1.5. Ordene las siguientes estimaciones de mayor a menor de acuerdo a su probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas:

- a) Entre 345 y 365,5 mililitros.
- b) Entre 352,5 y 357,5 mililitros.
- c) Entre 349,5 y 362,5 mililitros.
- d) 356 mililitros.

El propósito de esta pregunta fue indagar en las ideas del estudiante, específicamente sobre la relación entre el ancho del intervalo y el nivel de confianza. Si el estudiante ordenaba los intervalos del más ancho al más angosto, entonces es muy probable que no haya desarrollado nociones erróneas sobre la relación mencionada.

1.6. Relacione cada estimación con el tamaño de la muestra con la que usted considera fue construida, bajo el supuesto que en cada caso se obtuvo la misma media.

- | | |
|--------------------|------------|
| 1. Entre 347 y 365 | a) $n=100$ |
| 2. Entre 350 y 362 | b) $n=20$ |
| 3. Entre 352 y 360 | c) $n=200$ |
| 4. Entre 353 y 359 | d) $n=50$ |

Con el planteamiento de esta pregunta quisimos indagar específicamente sobre las ideas del estudiante acerca de la relación entre el tamaño de la muestra y el ancho del intervalo, de tal forma que relacionar correctamente cada estimación con su tamaño correspondiente demostraría la ausencia de concepciones erróneas relacionadas a este aspecto.

2. Para las siguientes afirmaciones sobre estimaciones por intervalos, señale con una X, si falso (F) o verdadero (V) según considere.

Las preguntas que aparecen a continuación pretendían indagar directamente por las concepciones de los estudiantes sin considerar ningún contexto, en otras palabras, son de corte teórico o conceptual.

2.1. Si aumenta el tamaño muestral, aumenta la precisión de la estimación de la media poblacional. F__ V__

Esta pregunta fue tomada textualmente del cuestionario utilizado en la investigación de Rangel (2014), con la cual ella encontró nociones erróneas sobre la relación entre el ancho del intervalo y la precisión, que hasta ese momento no habían sido reportadas en investigaciones precedentes.

2.2. Si aumenta la probabilidad de acierto del intervalo, aumenta la precisión de la estimación del promedio poblacional. F__ V__

Igual que en el caso anterior, esta pregunta también fue tomada de Rangel (2014) pero se han cambiado las palabras *nivel de confianza* por *probabilidad de acierto*, esto debido a que durante la aplicación de las actividades no se hizo mención de esa terminología. El objetivo en este caso fue determinar si el estudiante posee concepciones erróneas sobre la existencia de una relación entre el nivel de confianza y la precisión de la estimación.

2.3. Si aumenta el ancho del intervalo, aumenta la precisión de la estimación del promedio poblacional. F__ V__

Era posible que el estudiante no lograra relacionar el ancho del intervalo con la probabilidad de acierto y por este motivo no pudiera contestar a la pregunta 2.2, en tal caso adaptamos la pregunta de Rangel (2014) para ver si el estudiante poseía concepciones erróneas de la relación entre el ancho del intervalo y la precisión

4.2. SEGUNDA FASE: EXPERIMENTACIÓN

En esta investigación participaron 20 estudiantes de primer nivel universitario que no habían recibido instrucción formal de estadística, de los cuales 4 serían elegidos para el análisis por su disposición y participación en las primeras sesiones.

Para el desarrollo de las sesiones cada estudiante contó con su propio computador y sus propias hojas de trabajo donde se encontraban planteadas las situaciones y donde les era posible plasmar sus respuestas de forma escrita. Cada computador contaba con el programa Fathom y con un programa para grabar su pantalla, adicionalmente las aulas estaban equipadas con un proyector para que los estudiantes pudieran exponer sus ideas ante los demás compañeros al tiempo que mostraban lo que sucedía en la pantalla de su computador. Durante el desarrollo de las actividades el profesor pasaba por los puestos de los estudiantes grabando audios con las respuestas y las correspondientes justificaciones de ellos a manera de entrevista, esto como un medio para ganar claridad en las ideas que querían plasmar. La aplicación de las actividades requirió de 10 sesiones de 2 horas cada una, lo cual nos tomó alrededor de 5 semanas.

4.1. TERCERA FASE: ANÁLISIS DE RESULTADOS

En esta fase se realizó un análisis de las evidencias recogidas en la fase anterior. Este análisis comprende dos aspectos distintos y complementarios: desde el punto de vista del desarrollo de

su razonamiento inferencial y desde el punto de vista de la apropiación del instrumento utilizado, tanto del paquete Fathom como de la estrategia de simulación.

Para el primer aspecto recurrimos a los conceptos propios de los Intervalos de Confianza para poder evaluar hasta qué punto fueron captados por los estudiantes. Para el segundo análisis, recurrimos (no lo olvide la investigación ya se acabó, no utilice más el futuro, eso es para el proyecto o plan de trabajo) a la teoría de la Aproximación Instrumental de Artigue (2002) la cual proporciona un marco para analizar tanto los conocimientos que el estudiante pone en juego como los que emergen en el proceso por el cual transforma un artefacto en instrumento por medio del planteamiento y validación de técnicas. Para el análisis se tuvieron en cuenta las respuestas escritas de los estudiantes, plasmadas en la guía de trabajo que fue entregada en cada actividad, adicionalmente y a manera de entrevista, en cada pregunta se grabaron audios con las aclaraciones de los estudiantes sobre sus ideas y se tomaron videos de la pantalla para observar el uso dado al programa. Por último, a partir de la prueba final buscamos determinar las concepciones erróneas que podrían ser superadas bajo esta metodología y las que todavía permanecen.

5.- ANÁLISIS DE RESULTADOS

5.1. ANÁLISIS DE LA PRUEBA INICIAL

Esta prueba fue aplicada a 20 estudiantes de ingeniería civil de primer semestre de la Universidad Industrial de Santander. Para efectos del análisis se han seleccionado algunas respuestas representativas por ser comunes en varios estudiantes, o porque se destacan por su originalidad, coherencia o lógica.

La prueba inicial buscaba observar la forma de los razonamientos inferenciales informales de los estudiantes y la presencia de concepciones acertadas y erróneas.

A continuación presentamos el análisis de las dos situaciones a las que se vieron enfrentados los estudiantes, quienes aún no han tomado cursos de estadística en la universidad.

5.1.1. Situación 1

Una fundación quiere conocer la estatura promedio de los jóvenes varones menores de 19 años de Medellín. Como el número de estos jóvenes es muy grande, la fundación opta por seleccionar al azar un grupo de 20 jóvenes menores de 19 años. Hecha la selección de

jóvenes, les midieron su estatura y calcularon el promedio de ellas obteniendo el valor de 1,75 m.

A) ¿Si seleccionara otro grupo de 20 estudiantes, el promedio de sus estaturas también sería 1,75 m? Justifique su respuesta.

B) ¿Cuál cree que sea la estatura promedio de todos los jóvenes varones menores de 19 años de Medellín? Justifique su respuesta.

C) Si en lugar de 20 jóvenes el grupo estuviera conformado por 100 jóvenes y se obtuviera el mismo promedio (1,75 m.), ¿cambiaría la respuesta dada en B)? Explique su respuesta.

D) A su juicio, ¿qué implicaciones tiene sobre la estimación del promedio de la estatura el hecho de aumentar el tamaño del grupo seleccionado?

Camilo contestó:

A) ¿Si seleccionara otro grupo de 20 estudiantes, el promedio de sus estaturas también sería 1,75 m? Justifique su respuesta.

“No, ya que el promedio podría variar, porque no todas las personas tienen la misma altura”

En su respuesta, Camilo aprecia la variabilidad del estimador muestral a través de la variabilidad presente en la selección muestral producto de la variabilidad existente en la población.

B) ¿Cuál cree que sea la estatura promedio de todos los jóvenes varones menores de 19 años de Medellín? Justifique su respuesta.

“No se puede saber con certeza ya que el promedio que nos da la situación es de 1,75 en un pequeño grupo de solo 20 hombres, por tanto no se puede saber con exactitud el promedio de todos los jóvenes varones menores a 19 años”.

En consecuencia con la variabilidad muestral Camilo entiende que no se puede garantizar una respuesta cierta, esto es, “no se puede saber con exactitud”.

C) Si en lugar de 20 jóvenes el grupo estuviera conformado por 100 jóvenes y se obtuviera el mismo promedio (1,75 m.), ¿cambiaría la respuesta dada en B)? Explique su respuesta.

“Si cambiaría mi respuesta en B ya que un estudio en 100 personas es más exacto que uno de 20, por tanto se podría asegurar con mayor confianza que el promedio de 1,75 toma mayor parte de la población”.

Al aumentar el tamaño de la muestra se cobijan más individuos de la población lo que hace que los promedios de la muestra y de la población estén más cercanos, pareciera ser el argumento de Camilo. Adicionalmente dice que “con mayor confianza” el promedio muestral será más cercano al poblacional, dando a entender una medida de probabilidad. El uso del término confianza se justifica por la diferencia entre el valor muestral y el poblacional, esto es, entre la estimación puntual dada por la muestra y el valor promedio de la población más asociado a la precisión del estimador que a su condición aleatoria. Claramente Camilo no asume su muestra como una más entre todas las posibles del mismo tamaño, el error que se produce en la estimación, si bien es producto de la variabilidad innata en la población, se genera al tomar un subconjunto propio de la población.

D) A su juicio, ¿qué implicaciones tiene sobre la estimación del promedio de la estatura el hecho de aumentar el tamaño del grupo seleccionado?

“Implicaciones de aumentar el tamaño del grupo seleccionado:

- Se obtiene un promedio más real.
- Abarcaría la mayor parte de la población.
- Aumenta las posibilidades de tener un promedio correcto”.

Camilo reitera lo dicho previamente: al aumentar el tamaño de la muestra se “abarcaría mayor parte de la población” lo que permite que el promedio muestral “sea más real”, es decir, se parece más al de la población lo que hace que la “probabilidad (usa posibilidades) de tener un promedio correcto” sea mayor. Ahora usa el término “posibilidades” en lugar del término “confianza” utilizado previamente que bien podría interpretarse en términos probabilísticos.

Sergio respondió:

A) ¿Si seleccionara otro grupo de 20 estudiantes, el promedio de sus estaturas también sería 1,75 m? Justifique su respuesta.

“El valor sería aproximadamente 1,75 con un margen de error de ± 5 porque al ser personas de prueba al azar se obtiene un promedio aproximado de cualquier grupo con las mismas condiciones”.

Sergio evidencia no solo nociones de variabilidad, sino que aprecia el efecto que puede tener sobre la estimación realizada. Llamativo que hable de “un margen de error” dando a entender que posee una intuición natural sobre la estimación por intervalos. Se le preguntó a Sergio el motivo por el cual él habla de ± 5 , a lo cual respondió que era lo que creía pero que no sabía cómo justificarlo.

Sergio, además, hace mención a la selección al azar y afirma que por esta razón los diferentes valores que se podrían obtener con otras muestras van a caer en este mismo

intervalo. Este pensamiento puede estar reflejando una concepción sobre la distribución del promedio muestral y su rango de variabilidad, ¿será que está pensando en términos del nivel de confianza?

B) ¿Cuál cree que sea la estatura promedio de todos los jóvenes varones menores de 19 años de Medellín? Justifique su respuesta.

“Aunque la muestra de 20 personas es pequeña se podría afirmar que el valor promedio es un aproximado al valor de todos los posibles jóvenes”.

En esta respuesta Sergio percibe una relación entre el comportamiento de la muestra y la población al decir que el promedio poblacional debe ser muy cercano al promedio de la muestra (1,75 m) sin embargo no es claro en su estimación y en qué tan cercanos son estos valores. Sergio da muestras del uso de la heurística de representatividad (Kahneman y Tversky) al asumir que la muestra, así sea pequeña, debe parecerse a la población de la cual se obtiene.

C) Si en lugar de 20 jóvenes el grupo estuviera conformado por 100 jóvenes y se obtuviera el mismo promedio (1,75 m.), ¿cambiaría la respuesta dada en B)? Explique su respuesta.

“No la cambiaría, esto confirmaría que el valor promedio de 1,75 con muestra de 20 personas es un valor aproximado cercano al promedio de la población total, ya que al aumentar la muestra a 100 personas se mantiene el valor”.

El hecho de que con 100 personas también se obtuviera 1,75 hace que Sergio se sienta más seguro con su respuesta anterior. Es como si asumiera que definitivamente el promedio poblacional es 1,75 y, por lo tanto, cualquier muestra debe tener este promedio.

La respuesta de Sergio confirma el uso de la heurística de la representatividad expresada en un uso de la ley de los pequeños números: sin importar el tamaño muestral, la muestra refleja las características de la población.

D) A su juicio, ¿qué implicaciones tiene sobre la estimación del promedio de la estatura el hecho de aumentar el tamaño del grupo seleccionado?

“Al aumentar la muestra la cantidad de variables se hace más cercana a la población total y por lo tanto el valor promedio es más exacto y confiable”.

Con esta respuesta Sergio contradice su respuesta anterior; ahora sí el tamaño muestral tiene su efecto sobre la calidad de la estimación: al aumentar el tamaño muestral “el valor promedio es más exacto y confiable”. Nuevamente el argumento es de tamaño: si la muestra crece siendo la población finita, la diferencia entre el tamaño muestral y poblacional es menor, por lo tanto sus promedios deben ser más parecidos.

Sandra:

A) ¿Si seleccionara otro grupo de 20 estudiantes, el promedio de sus estaturas también sería 1,75 m? Justifique su respuesta.

“Si los nuevos jóvenes que se tomen para realizar la muestra son de Medellín, y son menores de 19 años, yo diría que el promedio de las estaturas sería un poco diferente ya que los jóvenes van a ser una pequeña muestra que podría o no representar verídicamente la diversidad de datos de las estaturas”.

Sandra, muestra que tiene una idea sobre la variabilidad del muestreo, sin embargo, deja en claro que “sería un poco diferente” dada la “pequeña muestra”. En esta respuesta se

vislumbran varias intuiciones: la variabilidad muestral, la heurística de la representatividad y el efecto del tamaño muestral.

B) ¿Cuál cree que sea la estatura promedio de todos los jóvenes varones menores de 19 años de Medellín? Justifique su respuesta.

“1,77 yo diría que si se tomara a toda la población los datos variarían porque habría diversidad de datos”.

Sandra hace una estimación puntual del promedio poblacional alejándose un poco del promedio muestral, no admite la posibilidad de que sean iguales, seguramente por el argumento de que la muestra es un subconjunto propio de la población.

C) Si en lugar de 20 jóvenes el grupo estuviera conformado por 100 jóvenes y se obtuviera el mismo promedio (1,75 m.), ¿cambiaría la respuesta dada en B)? Explique su respuesta.

“Si cambiaría mi respuesta, porque eso significa que el grupo de 20 jóvenes tomado inicialmente si representaba adecuadamente a la población de jóvenes de Medellín, en cuanto a las características físicas de estatura”.

La respuesta es contradictoria: “Si cambiaría mi respuesta, porque eso significa que el grupo de 20 jóvenes tomado inicialmente si representaba adecuadamente a la población de jóvenes...”

D) A su juicio, ¿qué implicaciones tiene sobre la estimación del promedio de la estatura el hecho de aumentar el tamaño del grupo seleccionado?

“Al aumentar la muestra se da certeza y más seguridad a los datos obtenidos por que habrá más diversidad”.

En Sandra también se observa la idea intuitiva de que en la medida en que el tamaño muestra aumenta, la muestra se acerca a la población y, por consiguiente, los promedios serán más cercanos.

Oscar:

A) ¿Si seleccionara otro grupo de 20 estudiantes, el promedio de sus estaturas también sería 1,75 m? Justifique su respuesta.

“No porque en la estadística todo depende de la muestra y si la muestra cambia posiblemente los resultados también cambiarán”.

Oscar hace una afirmación que sería interesante averiguar qué significado tiene para él mismo: “...en la estadística todo depende de la muestra” con lo cual “si la muestra cambia posiblemente los resultados también cambiarán. No sugiere ningún patrón para ese cambio, no evidencia poseer la idea de que el estimador muestral se pueda comportar de acuerdo a una distribución que se caracteriza con base en los parámetros poblacionales. Esta es, precisamente, la parte válida de la heurística de la representatividad: la forma de la distribución muestral del estimador se determina con base en los parámetros poblacionales.

Oscar evidencia lo visto en la mayoría estudiantes analizados, y es la percepción de variabilidad muestral, ya que asegura que el promedio va a ser diferente si se toma otra muestra de la misma población.

B) ¿Cuál cree que sea la estatura promedio de todos los jóvenes varones menores de 19 años de Medellín? Justifique su respuesta.

“La verdad creo que no hay una verdad absoluta, porque si hablamos de todos los varones menores de 19 años, tenemos que medir la estatura de todos, lo cual sería una tarea imposible”.

Oscar es radical: si quiere conocer el promedio del grupo, mídalos a todos. No admite estimaciones porque éstas encierran error. Es necesario que Oscar interactúe con situaciones donde sea establecer una estimación y se dé cuenta que un intervalo puede ser de gran practicidad e importancia

C) Si en lugar de 20 jóvenes el grupo estuviera conformado por 100 jóvenes y se obtuviera el mismo promedio (1,75 m.), ¿cambiaría la respuesta dada en B)? Explique su respuesta.

“No cambiaría la respuesta, porque 100 jóvenes es una muestra más grande pero igual no son todos”.

En consecuencia a su creencia determinista y a su falta de experiencia con las inferencias muestrales, Oscar no considera que el tamaño muestral influya en el comportamiento de la variabilidad. La idea sigue siendo que como el promedio poblacional es único, la respuesta debe ser exacta, y como tiene claro que hay variabilidad en el muestreo, considera que la única forma para solucionar esta situación debe ser estudiar toda la población.

D) A su juicio, ¿qué implicaciones tiene sobre la estimación del promedio de la estatura el hecho de aumentar el tamaño del grupo seleccionado?

“Tendrá mucha importancia, pues al aumentar los datos, los resultados serán un poco más exactos a la realidad, pero no habrá una verdad absoluta”.

Oscar reitera lo dicho por otros estudiantes: al aumentar la muestra se obtendrá un promedio más cercano sencillamente porque se quedan menos individuos sin medir, pero, y

lo repite: “no habrá una verdad absoluta”, reflejando una clara intuición de la variabilidad muestral.

Humberto contestó:

A) ¿Si seleccionara otro grupo de 20 estudiantes, el promedio de sus estaturas también sería 1,75 m? Justifique su respuesta.

“No necesariamente se tendría el mismo promedio ya que un grupo de 20 estudiantes es una muestra pequeña respecto al total de jóvenes menores de 19 que viven en Medellín”.

Con esta respuesta de Humberto evidencia que posee una idea de la variabilidad del muestreo que justifica por el pequeño tamaño muestral.

B) ¿Cuál cree que sea la estatura promedio de todos los jóvenes varones menores de 19 años de Medellín? Justifique su respuesta.

“Debe estar entre 1,72 y 1,78”.

Humberto dio una estimación por intervalos, centrado en 1,75 que es el promedio de la muestra. Se le preguntó personalmente a Humberto por su respuesta y dice que no sabría cómo justificarlo que el solo cree que debe ser así, es una idea intuitiva de simetría, dado que no existen razón alguna para creer que el valor deba ser menor que el estimado.

C) Si en lugar de 20 jóvenes el grupo estuviera conformado por 100 jóvenes y se obtuviera el mismo promedio (1,75 m.), ¿cambiaría la respuesta dada en B)? Explique su respuesta.

“No, ya que el grupo seguiría siendo muy pequeño respecto a la población total”.

Humberto, no se inmuta con el cambio grande en el tamaño muestral, lo que le interesa no es la relación de los dos tamaños muestrales sino la comparación con el total poblacional que, en sus palabras “el grupo seguiría siendo muy pequeño respecto a la población total”.

D) A su juicio, ¿qué implicaciones tiene sobre la estimación del promedio de la estatura el hecho de aumentar el tamaño del grupo seleccionado?

“Es de gran importancia ya que al aumentar el tamaño del grupo obtenemos una aproximación más exacta de la estatura promedio”.

En un giro inesperado, afirma ahora que el tamaño muestral sí tiene importancia porque se obtiene “una aproximación más exacta”. Aunque no lo explicita, muy seguramente su argumentación es semejante a la de otros compañeros: se acerca la muestra a la población.

Nicolás

A) ¿Si seleccionara otro grupo de 20 estudiantes, el promedio de sus estaturas también sería 1,75 m? Justifique su respuesta.

“No, ya que 20 jóvenes es una muestra muy pequeña comparada con el total de jóvenes por lo cual no es seguro que (1,75) sea la altura promedio”.

Aunque ninguno de los estudiantes hasta el momento ha justificado explícitamente que es debido a la variabilidad, lo más probable es que se refieran a ella cuando responden negativamente y hacen referencia a que el tamaño de la muestra debe ser muy pequeño con respecto al de la población.

Nicolás, al igual que sus compañeros, se limita a afirmar que “no es seguro” que el promedio muestral sea igual al poblacional, por la razón acostumbrada: “la muestra es muy pequeña comparada con el total de jóvenes”.

B) ¿Cuál cree que sea la estatura promedio de todos los jóvenes varones menores de 19 años de Medellín? Justifique su respuesta.

“Había que coger mínimo el 51% de los jóvenes menores de 19 años y sacar la estatura promedio”.

Para Nicolás no se podría hacer una estimación del promedio de la población con la muestra que se tiene, por lo visto piensa que para que él pueda hablar de una estimación necesita una muestra con un poco más de la mitad de los datos de la población. Es un argumento curioso de la mayoría: el promedio de la mayoría de los estudiantes es una estimación más segura, parece que es su razonamiento.

C) Si en lugar de 20 jóvenes el grupo estuviera conformado por 100 jóvenes y se obtuviera el mismo promedio (1,75 m.), ¿cambiaría la respuesta dada en B)? Explique su respuesta.

“No, seguiría siendo insignificante la muestra con respecto a la población total”.

En consecuencia con lo respondido en la anterior pregunta, para Nicolás una muestra de tamaño 100 sigue siendo una cantidad insignificante, lo cual es una idea similar a la de Humberto.

D) A su juicio, ¿qué implicaciones tiene sobre la estimación del promedio de la estatura el hecho de aumentar el tamaño del grupo seleccionado?

“Pues entre mayor sea el grupo seleccionado más cierta va a ser la estatura promedio de los jóvenes”.

La respuesta de Nicolás va dirigida en el mismo sentido que la de sus compañeros: entre más cercana la muestra a la población, más acertada la estimación.

Juan:

A) ¿Si seleccionara otro grupo de 20 estudiantes, el promedio de sus estaturas también sería 1,75 m? Justifique su respuesta.

“Su promedio sería diferente de 1,75 debido a que la muestra de jóvenes menores de 19 años fue muy pequeña”.

C) “Para sacar la estatura promedio de los jóvenes en Medellín se debe sumar todas las medidas de los jóvenes y dividirla por el número de jóvenes”.

D) “No debido a que sigue siendo una muestra muy pequeña a la comparación de todos los menores de 19 años en Medellín”.

E) “Al aumentar el número de personas en la muestra este sería más preciso debido a que su muestra será más cercana al tener más participantes”.

En las respuestas de Juan no se evidencia nada diferente a lo encontrado en las respuestas de los demás estudiantes. Juan no cree que se puedan hacer buenas estimaciones a partir de muestras y no tiene idea de la influencia del tamaño muestral en la variabilidad.

5.1.2. Situación 2

Suponga que una urna contiene un cierto número de bolas blancas y negras que nadie conoce. Usted fue contratado para estimar las proporciones de bolas blancas y negras que hay en la urna. Lo único que puede hacer es realizar extracciones de bolas de la urna con reposición (es decir, saca la bola, anota el color y la devuelve a la urna antes de realizar otra extracción).

A) Suponga que realizó 100 extracciones y obtuvo 70 bolas blancas (y 30 bolas negras), es decir, 70% de los resultados fueron bolas blancas. ¿Qué conclusión

sacaría respecto a la proporción de bolas blancas en la urna? Explique su respuesta.

B) No se conoce el número de bolas de cada color en la urna, pero se sospecha que son iguales. Si al realizar 100 extracciones se obtienen 60 bolas blancas y 40 negras, ¿se podría seguir pensando que la urna contiene igual cantidad de bolas blancas que de bolas negras? Justifique su respuesta.

C) Si la urna contiene igual número de bolas blancas que negras y se realizan 100 extracciones con devolución, ¿Cuáles serían los resultados más probables en cuanto a bolas de cada color? Seleccione los posibles resultados en las siguientes tablas justificando muy bien su elección.

Negras	Blancas	Negras	Blancas	Negras	Blancas	Negras	Blancas	Negras	Blancas
1	99	11	89	21	79	31	69	41	59
2	98	12	88	22	78	32	68	42	58
3	97	13	87	23	77	33	67	43	57
4	96	14	86	24	76	34	66	44	56
5	95	15	85	25	75	35	65	45	55
6	94	16	84	26	74	36	64	46	54
7	93	17	83	27	73	37	63	47	53
8	92	18	82	28	72	38	62	48	52
9	91	19	81	29	71	39	61	49	51
10	90	20	80	30	70	40	60	50	50
Blancas	Negras	Blancas	Negras	Blancas	Negras	Blancas	Negras	Blancas	Negras
1	99	11	89	21	79	31	69	41	59
2	98	12	88	22	78	32	68	42	58
3	97	13	87	23	77	33	67	43	57
4	96	14	86	24	76	34	66	44	56
5	95	15	85	25	75	35	65	45	55
6	94	16	84	26	74	36	64	46	54
7	93	17	83	27	73	37	63	47	53
8	92	18	82	28	72	38	62	48	52
9	91	19	81	29	71	39	61	49	51
10	90	20	80	30	70	40	60	50	50

D) ¿Cuáles serían las cantidades de bolas de blancas más probables de obtener si se hicieran 1000 extracciones?

Camilo:

A) Suponga que realizó 100 extracciones y obtuvo 70 bolas blancas (y 30 bolas negras), es decir, 70% de los resultados fueron bolas blancas. ¿Qué conclusión sacaría respecto a la proporción de bolas blancas en la urna? Explique su respuesta.

“Mi conclusión sería que hay mayor número de bolas blancas que de bolas negras ya que se presentó una mayor tendencia a sacar bolas blancas, por lo tanto si la probabilidad es alta se podría decir (aunque no con seguridad) que la cantidad de balotas blancas es mayor”.

Esta respuesta de Camilo se puede parafrasear diciendo: “Si los resultados dicen que salieron más blancas es porque hay más blancas en la urna”. Esta es una intuición de máxima verosimilitud, los resultados responden a los valores más probables que los generan. Desde otro punto de vista es como si vislumbrara la ley de los grandes números propia del enfoque frecuencial de la probabilidad.

B) No se conoce el número de bolas de cada color en la urna, pero se sospecha que son iguales. Si al realizar 100 extracciones se obtienen 60 bolas blancas y 40 negras, ¿se podría seguir pensando que la urna contiene igual cantidad de bolas blancas que de bolas negras? Justifique su respuesta.

“No, no se podría seguir pensando que están en igual cantidad, ya que hubo un mayor número de extracciones blancas (60%) que en las negras (40%), por lo tanto si hay un mayor número de extracciones de blancas, se podría decir que hay mayor cantidad de balota blancas que de negras”.

Las ideas de Camilo reflejan un pensamiento determinista, no admite variabilidad alguna. Su argumento es que si hay un mayor número de extracciones de bolas blancas, sea el que sea, la conclusión es que en la urna también ocurre lo mismo.

C) Si la urna contiene igual número de bolas blancas que negras y se realizan 100 extracciones con devolución, ¿Cuáles serían los resultados más probables en cuanto a bolas de cada color? Seleccione los posibles resultados en las siguientes tablas justificando muy bien su elección.

“Según plantea el ejercicio hay igual número de balotas blancas y negras, diría que la probabilidad de sacar una balota blanca respecto a una negra sería $\frac{1}{2}$, pero si esto se realiza en 100 extracciones diría que la cantidad de balotas sería 50-50 para que se cumpla esta probabilidad”.

En efecto Camilo razona estas situaciones de manera determinista, en la tabla ha señalado únicamente el resultado 50-50, esto no significa que Camilo no conozca, o no haya tenido experiencias con la variabilidad, si no que puede ser producto de la forma en que ha tenido que asumir los problemas de matemáticas en su vida escolar, ya que Camilo conoce el algoritmo para calcular una probabilidad clásica, pero para él no significa más que un número, una proporción.

D) ¿Cuáles serían las cantidades de bolas de blancas más probables de obtener si se hicieran 1000 extracciones?

“Respondería lo mismo, no importa el número de extracciones, las bolas tiene que permanecer en la misma cantidad para que se cumpla la probabilidad $\frac{1}{2}$, por lo tanto las balotas estarían en un 50-50”.

De esta manera se ratifica una vez más lo que hemos notado acerca del razonamiento determinista de Camilo.

Uno de los casos de determinismo es Camilo quien aunque ciertamente consideró la variabilidad para una que otra respuesta, su utilidad radicó en que por esa razón no es posible hacer estimaciones. Más adelante cuando se pretendía apreciar específicamente la idea de Camilo con respecto a la relación entre el comportamiento de la muestra y la composición de la urna, su respuesta fue que en todas las muestras se tendría exactamente la misma proporción de la urna dejando de lado la variabilidad del muestreo. Por su puesto Camilo no considera que el tamaño muestral influya en su estimación ya que se trata de un valor puntual y aunque en la primera situación haya hecho referencia a lo que interpretamos como un aumento en la confianza de su estimación, en la segunda situación no hizo referencia a la idea en mención.

Elías:

A) Suponga que realizó 100 extracciones y obtuvo 70 bolas blancas (y 30 bolas negras), es decir, 70% de los resultados fueron bolas blancas. ¿Qué conclusión sacaría respecto a la proporción de bolas blancas en la urna? Explique su respuesta.

“Mi conclusión es que lo más probable es que la proporción de bolas blancas sea mucho mayor a la de bolas negras, es decir existe un mayor número de bolas blancas que negras, aunque a pesar de los resultados aún es probable, que el número de bolas negras sea igual a las blancas o incluso mayor, pero ésta es una situación muy remota y muy poco probable”.

Aunque Elías considera que cualquier cosa puede suceder, es claro en afirmar que “lo más probable es que la proporción de bolas blancas sea mucho mayor a la de bolas negras” y que el evento de igual cantidad de bolas blancas y negras, o que el número de negras sea superior es una posibilidad “muy remota y muy poco probable”. Es decir, Elías no posee el sesgo de equiprobabilidad que mucha gente le asocia a la naturaleza aleatoria: cualquier cosa puede suceder y todas con igual probabilidad. Sin embargo, Elías no se casa con una estimación más precisa de la proporción de bolas en la urna, se limita a resaltar que la urna debe tener mayor cantidad de blancas, evidenciando cierta idea del nivel de confianza ya que le asigna una probabilidad, que podríamos caracterizar como cualitativa, a esta afirmación: “lo más probable”. La ausencia de un valor concreto para la composición de la urna puede estar manifestando la conciencia de que la distribución de probabilidad no se refleja exactamente en la distribución muestral, dando lugar a variabilidad de los resultados aleatorios y, por ende, a la imposibilidad de dar resultados exactos.

Sería bien interesante indagar para qué resultados en las extracciones los estudiantes siguen considerando que es más mucho más probable que la urna contenga más bolas blancas que negras.

B) No se conoce el número de bolas de cada color en la urna, pero se sospecha que son iguales. Si al realizar 100 extracciones se obtienen 60 bolas blancas y 40 negras, ¿se podría seguir pensando que la urna contiene igual cantidad de bolas blancas que de bolas negras? Justifique su respuesta.

“Si, se podría seguir pensando que la cantidad de bolas es igual en ambos colores aunque es muy difícil y poco probable que suceda, esto puede ocurrir ya que hay una posibilidad de sacar bolas negras sin importar cuantas blancas hay, además de que el total de bolas no varía”.

Según Elías la variabilidad se comporta de manera descontrolada por eso su respuesta fue que la urna sí podría tener igual cantidad de bolas negras y blancas; al parecer el razonamiento de Elías, evidente en otros estudiantes, es que si algo es posible, entonces sucederá.

A pesar del razonamiento observado en Elías con respecto a la variabilidad exagerada, alcanza a percibir la influencia que tiene el aumento del tamaño muestral en la variabilidad, pues se da cuenta que ahora obtener solo bolas de un solo color será más que difícil, aun así, sigue diciendo que “sigue existiendo la posibilidad por muy pequeña que sea” y tiene razón. Da muestras de una intuición de la ley de los grandes números: entre mayor la muestra, más cercana la proporción de bolas blancas obtenidas a la proporción en la urna.

C) Si la urna contiene igual número de bolas blancas que negras y se realizan 100 extracciones con devolución, ¿Cuáles serían los resultados más probables en cuanto a bolas de cada color? Seleccione los posibles resultados en las siguientes tablas justificando muy bien su elección.

“Ninguna de las opciones, ya que todas pueden suceder, porque existe la misma probabilidad de sacar tanto bolas negras como blancas y son extracciones aleatorias, es decir puede salir cualquiera de los dos colores con cada extracción, sigue existiendo la posibilidad de sacar 1 de un color y 99 del otro”.

Elías, da muestras de una desconexión entre la medida de probabilidad y los resultados experimentales: “todas pueden suceder”. Sin embargo hay que concederle que tiene cierta razón ya que la pregunta no hace referencia a las situaciones más probables, solo pregunta sobre los resultados posibles. Vale la pena indagar sobre la idea de independencia que deja translucir cuando dice: “porque existe la misma probabilidad de sacar tanto bolas negras

como blancas y son extracciones aleatorias, es decir, puede salir cualquiera de los dos colores con cada extracción.”

D) ¿Cuáles serían las cantidades de bolas de blancas más probables de obtener si se hicieran 1000 extracciones?

“Sería casi igual, solo que esta vez la probabilidad de sacar pelotas de un solo color disminuye, pero sigue existiendo la posibilidad por muy pequeña que sea”.

Elías percibe la influencia que tiene el aumento del tamaño muestral en la variabilidad, pues se da cuenta que ahora obtener solo bolas de un solo color será más que difícil, aun así, sigue diciendo que “sigue existiendo la posibilidad por muy pequeña que sea”. Y aunque en principio es cierto, hay que tener en cuenta que es muy poco probable. Da muestras de una intuición de la ley de los grandes números: entre mayor la muestra, más cercana la proporción de bolas blancas obtenidas a la proporción en la urna.

Un caso que podríamos ubicar en el extremo contrario al pensamiento de Camilo es Elías, quien mostró evidencias de que considera que la composición de la urna no se ve reflejada en el comportamiento de la muestra debido a inmensa variabilidad que hay en su mente, ya que Elías cree que todos los posibles casos en una muestra son igualmente probables, por ejemplo cuando se le preguntó que cuantas veces saldrían bolas de color blanco si se hacían 100 extracciones con devolución de una urna con mitad de bolas blancas y la otra mitad negras, respondió que al ser con devolución podría suceder cualquier cosa, incluso que una bola blanca salga en 99 ocasiones o que salga una sola vez, lo cual es posible pero muy poco probable.

Luz:

A) Suponga que realizó 100 extracciones y obtuvo 70 bolas blancas (y 30 bolas negras), es decir, 70% de los resultados fueron bolas blancas. ¿Qué conclusión sacaría respecto a la proporción de bolas blancas en la urna? Explique su respuesta.

“Respecto a la proporción de bolas blancas de la urna podría suponer que existe una mayor proporción de bolas blancas, es decir, estas las puedo tener en mayor cantidad, quizá no 70-30 ya que al hacer 100 extracciones con devolución existiría un margen de error que en este caso sería el de repetición de la bola, afectando en si drásticamente el comportamiento de la extracción, según mi pensar entre mayor sea la cantidad de extracciones mayor va a ser el margen de error. En este caso, si planteamos la idea de que sean 10 extracciones el margen de error será aproximadamente entre 1 o 2, ya si la cantidad aumenta a 100 mi margen de error oscilaría entre 10 a 20 y así sucesivamente”.

Aunque reconoce que los resultados apuntan a que la urna tenga más bolas blancas, no se casa con la proporción 70-30 porque se pueden acumular muchos errores que, en su razonamiento, asocia con el hecho de extraer la misma bola varias veces. Por consiguiente, entre más bolas se extraigan, más error se puede cometer. Luz no muestra interés en relacionar las frecuencias relativas de los resultados obtenidos con las frecuencias relativas de bolas en la urna, solo quiere poder identificar la cantidad de bolas distintas, enfoque que, por supuesto, no le permite emitir con seguridad una respuesta. Esta manera de razonar la lleva a pensar que el aumento del tamaño muestral lo único que hace es aumentar el error.

B) No se conoce el número de bolas de cada color en la urna, pero se sospecha que son iguales. Si al realizar 100 extracciones se obtienen 60 bolas blancas y 40

negras, ¿se podría seguir pensando que la urna contiene igual cantidad de bolas blancas que de bolas negras? Justifique su respuesta.

“Si se podría seguir pensando que esta cantidad es igual, puesto que el margen de diferencia no es muy amplio para suponer que alguna se encuentra en mayor medida. Si la diferencia fuese mayor a 15 o 20 si podría comenzar a suponer que alguna posee mayor cantidad”.

Luz llama margen de diferencia al resultado de restar la cantidad de bolas blancas (60) con el valor esperado (50), de esta manera tendría un margen de diferencia, como ella lo llama, de 10. Por lo tanto para ella, la obtención de este resultado no es algo extraño si la proporción de bolas blancas en la urna es 50%. Aun así, Luz intuye cierto comportamiento de la proporción muestral ya que si llega a obtener una diferencia mayor a 15 (65 veces la bola blanca) descartaría la proporción del 50% en la urna. Luz podría estar pensando en el intervalo para la proporción de la urna de (0,45-0,75), como también podría estar haciendo referencia a la variabilidad y a la forma en que se refleja la composición de la urna en la muestra, estimando así que podría obtener entre 35 y 65 bolas de un color en una muestra de 100 extraída de una urna con la mitad de bolas blancas y la mitad negras.

C) Si la urna contiene igual número de bolas blancas que negras y se realizan 100 extracciones con devolución, ¿Cuáles serían los resultados más probables en cuanto a bolas de cada color? Seleccione los posibles resultados en las siguientes tablas justificando muy bien su elección.

“Para mí sería una proporción 56-44 aproximadamente, si se encuentran en igual medida su diferencia no debe ser mayor a 10, es decir, el margen que establezco para que esta cantidad se asuma a cantidades iguales es que una se encuentre entre 50 y

60, y la otra en proporción 40-50, asignándole a una el sobrante de la otra. No especifico colores ya que eso no es lo que se está analizando, cualquiera puede aparecer en mayor medida si se encuentran en igual cantidad”.

Se corrobora que Luz sabe que la proporción de la muestra puede variar pero que de todos modos sigue cierta tendencia y aunque en la pregunta anterior hablaba de una variabilidad de 15 y hasta 20 con respecto al valor esperado de 50 bolas blancas en 100 intentos, en esta pregunta habla explícitamente de una variabilidad de hasta 10 con respecto al valor esperado de 50, contemplando un comportamiento simétrico con respecto a ese valor.

Luz da muestras de una intuición de la ley de los grandes números o del enfoque frecuencial de la probabilidad, que le podría permitir, con un argumento en dirección contraria, asumir la estimación por intervalos que no explicitó en la primera pregunta de esta situación.

D) ¿Cuáles serían las cantidades de bolas de blancas más probables de obtener si se hicieran 1000 extracciones?

“Podemos obtener proporciones entre 52-56 teniendo en cuenta que se encuentran en iguales proporciones y si margen de error ya no será tan grande, dará un promedio más preciso y cercano al porcentaje inicial es decir 50/50”.

Se observa que Luz tiene idea de la influencia del tamaño muestral y a diferencia de varios de sus compañeros no considera que la estimación de la cantidad de veces que puede salir bolas de un color en una muestra tenga un comportamiento directamente proporcional, en la anterior pregunta había establecido que podría obtener entre 50 y 60 veces bolas de un color si se hacían 100 extracciones, mientras que en este caso ella habla de obtener bolas de un

mismo color entre un 52% y un 56% de los intentos. Sin embargo no es clara la razón por la que Luz no considera en la mencionada estimación valores menores al 52%.

En el caso de Luz se observan algunas ideas sobre la variabilidad del muestreo y buenas intuiciones sobre la relación que existe entre el comportamiento de las muestras y la composición de la urna. Ella no deja a un lado la variabilidad ya que recurre a los intervalos cuando tiene que hacer sus estimaciones. Sin embargo Luz aún tiene algunos conflictos con la influencia del tamaño muestral o no está claro a que se refiere cuando utiliza el término margen de error.

En la primera pregunta de la segunda situación, la cual no estaba enfocada a observar ideas sobre la influencia del tamaño muestral, Luz asegura que si se aumenta la cantidad de intentos el margen de error también aumenta sin embargo en la última pregunta en la cual se aumentaba el tamaño de la muestra, Luz redujo el intervalo de su estimación. A pesar que en la pregunta C) había centrado el intervalo con el que estimaba la variabilidad muestral en el 50%, que era la proporción de la Urna, cuando se aumentó el tamaño muestral su nueva estimación fue entre 52% y 56% tal vez creyendo que bajo estas nuevas condiciones será más difícil obtener una muestra con la mitad de extracciones de un color.

Oscar:

A) Suponga que realizó 100 extracciones y obtuvo 70 bolas blancas (y 30 bolas negras), es decir, 70% de los resultados fueron bolas blancas. ¿Qué conclusión sacaría respecto a la proporción de bolas blancas en la urna? Explique su respuesta.

“Con base en los resultados creería que:

- i) La cantidad de bolas blancas es mayor que la cantidad de bolas negras.
- ii) La proporción de bolas blancas sería 70% o valores cercanos a él (69%, 71%, etc.), puesto que se realizaron 100 extracciones, lo cual nos permite tener más certeza acerca de la proporción exacta, pero no es una verdad absoluta”.

Oscar considera que la urna contiene una mayor cantidad de bolas blancas que negras y es consciente que no será exactamente la proporción observada en la muestra, por esto trata de establecer una estimación con lo que parece ser un intervalo (69%, 71%, etc.).

Oscar percibe relación entre el modelo de la urna y el comportamiento de las frecuencias relativas obtenidas en la muestra, a su vez evidencia que posee buenas nociones de la ley de los grandes números al decir “puesto que se realizaron 100 extracciones, lo cual nos permite tener más certeza acerca de la proporción exacta”. En la respuesta de Oscar también aparecen algunas nociones del efecto que tiene el tamaño de la muestra sobre la variabilidad muestral.

B) No se conoce el número de bolas de cada color en la urna, pero se sospecha que son iguales. Si al realizar 100 extracciones se obtienen 60 bolas blancas y 40 negras, ¿se podría seguir pensando que la urna contiene igual cantidad de bolas blancas que de bolas negras? Justifique su respuesta.

“Claro que se podría seguir pensando eso, pues en dichas extracciones todo depende del azar, ya que podríamos sacar en estas 100 extracciones más bolas blancas que negras, pero no quiere decir que haya mayor cantidad de blancas”.

Oscar es consciente de que existe variabilidad en este experimento sin embargo en esta pregunta no la delimita. Por lo que se puede observar, Oscar cree que si las proporciones son 50-50 el resultado propuesto 60-40 no tiene nada de extraño, idea que podemos ver si ratifica en la siguiente pregunta.

C) Si la urna contiene igual número de bolas blancas que negras y se realizan 100 extracciones con devolución, ¿Cuáles serían los resultados más probables en cuanto a bolas de cada color? Seleccione los posibles resultados en las siguientes tablas justificando muy bien su elección.

“En el caso hipotético de que hubiera igual cantidad de bolas negras y blancas, creo que lo más probable sería que en 100 extracciones, la menor cantidad de bolas de cierto color tiene que ser mayor de 30. Esto lo creo porque no encuentro lógico pensar que si hay igual cantidad de bolas, haya proporciones como 80-20 o 90-10”.

En esta respuesta, Oscar limita las cantidades mínimas posibles de bolas a 30, es decir acepta valores que no se alejen demasiado de la relación 50-50 que posee la urna. Queda la inquietud de saber si esa falta de lógica se traduce en probabilidad baja para proporciones extremas o en su definitiva imposibilidad. Nuevamente su respuesta es evidencia que él posee algunas nociones de relación modelo-muestra.

D) ¿Cuáles serían las cantidades de bolas de blancas más probables de obtener si se hicieran 1000 extracciones?

“Respondería lo mismo, aunque quizás los valores varíen, serán valores cercanos a los de las 100 extracciones y creo que las respuestas serían más cercanas a la realidad pues se aumenta la muestra, lo cual disminuye el margen de error”.

Oscar se está refiriendo a las situaciones seleccionadas en el punto anterior e intuye que al aumentar el tamaño de la muestra se tendrá un comportamiento casi proporcional, suponemos que cuando él dice que los valores serán más cercanos a la realidad está teniendo en cuenta su noción de ley de los grandes números, lo que se traduce para él en mayor

confianza en la estimación. Posiblemente con su idea de disminución del margen de error haya puesto en juego nociones asociadas a una disminución de la variabilidad.

Curiosamente los razonamientos de Oscar cuando la situación va del modelo a la experimentación permite mayor variabilidad en los resultados que cuando se hace en sentido contrario, es decir, cuando se realiza inferencia de la población a partir de los resultados experimentales, esto se observa al comparar sus respuestas a las preguntas A), C) y D).

Néstor:

A) Suponga que realizó 100 extracciones y obtuvo 70 bolas blancas (y 30 bolas negras), es decir, 70% de los resultados fueron bolas blancas. ¿Qué conclusión sacaría respecto a la proporción de bolas blancas en la urna? Explique su respuesta.

“Debido a que las repeticiones hechas son medianamente grandes, es decir 100 veces es un numero cercanamente confiable para dar una estimación, puedo decir que al haber sacado el 70% de color blanco este color es el que predomina en dicha bolsa ya que como de las 100 veces de la repetición 70 fueron blancas se intuye que es este el color predominante. No obstante debo de tener en cuenta que habiendo una probabilidad desconocida, este caso pudo haber sido uno inusual o sea que aun habiendo menos bolas blancas pudo haberse dado la posibilidades que este color este en menor proporción y probabilidad baja o alta siempre va existir la posibilidad en que todas salgan de un mismo color ya que existen los dos colores y hay una probabilidad siempre para hacer esta extracción. Para confirmar dicho dato yo haría más repeticiones de la misma cantidad (100 veces) y el promedio me daría algo más cercano a la realidad ”.

Néstor considera que el color predominante es el blanco ya que se obtuvo el 70% de las extracciones de ese color, mostrando así que posee algunas nociones de relación entre modelo y urna. Aun así no se siente seguro de su respuesta, ya que al no conocer la probabilidad de obtener una bola blanca, haber obtenido 70 veces el mismo color pudo ser un resultado inusual, por lo tanto, dice él, aún es probable que en la urna haya mayor cantidad de bolas negras. Aunque no podemos asegurar que Néstor posea una concepción de equiprobabilidad con los posibles resultados, él sí considera que a pesar de la poca probabilidad, los hechos raros son posibles.

Para resolver este problema y aumentar su nivel de confianza respecto a la afirmación de que son más las bolas blancas, Néstor dice: “yo haría más repeticiones de la misma cantidad (100 veces) y el promedio me daría algo más cercano a la realidad” dando a entender que una forma de controlar la variabilidad de los resultados es repitiendo varias veces el experimento completo de 100 extracciones. Ahora bien, estas repeticiones no son para observar la distribución de los resultados sino para estimar mejor la proporción de blancas, estimación que realiza tomando la media de las proporciones obtenidas. Esta estrategia, que no es otra cosa que la de estimar el valor esperado de las proporciones muestrales la considera como “más cercana a la realidad”. La estrategia de Néstor de recurrir a otras muestras abre la puerta a métodos como el Bootstrap para obtener más muestras a partir de la muestra dada y así tener una mejor idea de lo que ocurre con el estimador proporción.

En resumen, se puede pensar que Néstor posee una intuición de variabilidad muestral y, adicionalmente, una intuición de que el asunto se trata de una estimación del valor esperado del estimador proporción.

B) No se conoce el número de bolas de cada color en la urna, pero se sospecha que son iguales. Si al realizar 100 extracciones se obtienen 60 bolas blancas y 40 negras, ¿se podría seguir pensando que la urna contiene igual cantidad de bolas blancas que de bolas negras? Justifique su respuesta.

“Hay un 10% de rango entre la mitad de las repeticiones o séase 10% por abajo y 10% por arriba (40-60) ya que ciertamente es un valor muy cercano a la mitad (50) y solo teniendo este dato que es insuficiente debo dar una estimación de acuerdo a lo obtenido y es que posiblemente sea exacta o solo haya un poco más de una que de la otra (en caso de que sean varios) Ejemplo: si son 10 negras puede haber 11-12 blancas en caso de que sean pocas si diría que son exactos los números ya que a menor cantidad si me es significativo la cantidad predominante, debido a que si son 1 negra y 2 blancas ya hay el doble de una que de la otra, y el doble es aumentar significativamente la probabilidad de sacar el color que predomina, en este caso particular la blanca. Como conclusión diría que depende de muchos factores y el problema solo plantea uno excluyendo los demás y es crítico el tratar de dar una respuesta contundente, sin embargo diría yo que al ser 60% blancas posiblemente hayan unas más de este color y no sean exactamente iguales”.

Néstor tiene en mente la variabilidad del muestreo que es lo que le lleva a decir que no puede determinar un valor exacto, es decir que la proporción de bolas no necesariamente debe ser 50% y 50% para obtener ciertos resultados en 100 extracciones, exteriorizando sus ideas de variabilidad y relación entre el comportamiento de la muestra y la composición de la urna. En últimas, Néstor asume que la diferencia de 10 bolas es demasiado grande para aceptar la hipótesis de igualdad en el número de bolas blancas y negras.

C) Si la urna contiene igual número de bolas blancas que negras y se realizan 100 extracciones con devolución, ¿Cuáles serían los resultados más probables en cuanto a bolas de cada color? Seleccione los posibles resultados en las siguientes tablas justificando muy bien su elección.

“Si realizo varias repeticiones de 100 extracciones obtendré a mi juicio más veces en el intervalo grande que escogí, es decir 40-60 o 60-40 de blancas y negras respectivamente para los dos casos, ya que son el mismo número de blancas y negras y esperaré resultados cercanos a la mitad. Aunque por otro lado no puedo descartar la posibilidad de que hayan otros valores diferentes, en mi caso escojo este de 20-80 y 80-20 de blancas-negras respectivamente por que hay la posibilidad de al realizar la extracción sacar en mucha más proporción el uno que el otro ya que la probabilidad está en un 50% y cabe el caso de sacar repetidamente un mismo color varias veces”.

Néstor muestra explícitamente su idea de cómo se refleja la composición de la urna en el muestreo, él afirma “ya que son el mismo número de blancas y negras yo esperaré resultados cercanos a la mitad”. Lo interesante de los razonamientos de Néstor es que sus ideas parecen considerar la distribución muestral de la proporción, lo cual no es tan explícito en los demás estudiantes del grupo. Sin embargo, ejemplifica una situación extraña evidenciando esa idea de que así algo sea poco probable es posible, sin considerar una relación más cercana, lo más probable es lo más frecuente.

D) ¿Cuáles serían las cantidades de bolas de blancas más probables de obtener si se hicieran 1000 extracciones?

“Al ser muchas más repeticiones y al hacer nuevamente más repeticiones en este caso de 1000 diría que podré obtener casi la mayoría de los casos de la tabla aunque

excluiría los que están cercanos a 1 tanto por derecha como izquierda, por tanto y dicho esto los valores posibles estarán en su totalidad en su intervalo de 25-75 y 75-25 en bolas blancas y negras respectivamente para los dos colores”.

Néstor aprecia la influencia del tamaño muestral y ahora la mínima proporción que admite es 25-75 o viceversa.

Aunque Néstor enuncia una de las principales razones por las cuales una estimación por intervalos sería una respuesta más sensata, se evidencia que en el momento de las estimaciones se enfoca en obtener un valor puntual y finalmente, hace uso de buenas intuiciones sobre el comportamiento muestral cuando propone repetir el muestreo una gran cantidad de veces y calcular el promedio de las proporciones de las muestras.

Sergio:

A) Suponga que realizó 100 extracciones y obtuvo 70 bolas blancas (y 30 bolas negras), es decir, 70% de los resultados fueron bolas blancas. ¿Qué conclusión sacaría respecto a la proporción de bolas blancas en la urna? Explique su respuesta.

“Que hay mayor cantidad de bolas blancas en la urna debido que al realizar la muestra se obtuvo una diferencia considerable entre blancas y negras, y el porcentaje de blancas es mayor”.

Sergio manifiesta ideas de relación entre el comportamiento de la muestra y la composición de la urna y demuestra ciertas nociones de probabilidad frecuencial, al referirse a “una diferencia considerable entre blancas y negras”.

B) No se conoce el número de bolas de cada color en la urna, pero se sospecha que son iguales. Si al realizar 100 extracciones se obtienen 60 bolas blancas y 40

negras, ¿se podría seguir pensando que la urna contiene igual cantidad de bolas blancas que de bolas negras? Justifique su respuesta.

“No, porque si la cantidad de esferas blancas y negras fueran iguales, la diferencia de los porcentajes sería aproximadamente 50 con un margen de error pequeño debido a que la cantidad de muestras es considerable”.

Al parecer Sergio una vez más hace uso de su idea de probabilidad frecuencial y la relación entre muestra y urna, ya que asegura que si la cantidad de bolas blancas y negras en la urna es la misma entonces en la muestra de tamaño 100 se espera obtener un número cercano al 50 con un margen de error pequeño, aunque en esta pregunta no especifica a que se refiere con “pequeño” al parecer está pensando en un intervalo. Sergio manifiesta cierta noción de ley de los grandes números y de la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad pues asocia el poco margen de error con el tamaño de la muestra.

C) Si la urna contiene igual número de bolas blancas que negras y se realizan 100 extracciones con devolución, ¿Cuáles serían los resultados más probables en cuanto a bolas de cada color? Seleccione los posibles resultados en las siguientes tablas justificando muy bien su elección.

“De 45-55 blancas y de 55-45 negras, por que como la cantidad de esferas es igual a la cantidad de bolas que se obtendrían aproximadamente 50 con un margen de error pequeño debido a que la cantidad de muestras es considerable”.

Consiente de la variabilidad de la proporción muestral, Sergio establece un intervalo en el cual tiene en cuenta los resultados naturales de este experimento, por lo visto hasta el momento es común que utilice el ± 5 para delimitar la variabilidad sin importar las condiciones del experimento.

D) ¿Cuáles serían las cantidades de bolas de blancas más probables de obtener si se hicieran 1000 extracciones?

“De 47-52 blancas y 52-47, porque al aumentarse la muestra anterior (punto C) de 100 a 1000 extracciones, ósea se duplica la muestra, y por ende el margen de error se reduce a la mitad, ya que la cantidad de muestras es inversamente proporcional al margen de error”.

Contrario a lo mostrado hasta ahora con respecto a la variabilidad y también percibiendo la influencia del aumento en el tamaño muestral, Sergio reduce el intervalo con el cual describe la variabilidad de la distribución muestral de la proporción e incluso tiene la idea de establecer una relación general entre el tamaño de la muestra y el margen de error.

A continuación mostramos otras respuestas interesantes son las dadas por Humberto y Juan a la primera pregunta.

Humberto:

A) Suponga que realizó 100 extracciones y obtuvo 70 bolas blancas (y 30 bolas negras), es decir, 70% de los resultados fueron bolas blancas. ¿Qué conclusión sacaría respecto a la proporción de bolas blancas en la urna? Explique su respuesta.

“Se podría decir que la proporción es de 7-3 pero no sería correcto afirmar al 100% que esta es la proporción ya que afirmaríamos que la probabilidad es 100% exacta (no estoy seguro al 100% tal vez a un 70%)”.

Humberto utiliza una medida de confianza para su estimación, a pesar de que su estimación es un valor puntual. Esta probabilidad es asumida por él en términos de seguridad subjetiva sin ninguna connotación frecuencial. Como Humberto es consciente de la variabilidad de los resultados, su nivel de confianza lo asume como 70%;

desafortunadamente no exhibe razón alguna para elegir este valor y al parecer es un impulso intuitivo que transluce su nivel de seguridad respecto a la respuesta dada.

Juan:

A) Suponga que realizó 100 extracciones y obtuvo 70 bolas blancas (y 30 bolas negras), es decir, 70% de los resultados fueron bolas blancas. ¿Qué conclusión sacaría respecto a la proporción de bolas blancas en la urna? Explique su respuesta.

“Diría que existe una probabilidad mayor de que exista una mayor cantidad de bolas blancas que de bolas negras debido a que los porcentajes indicaron que, de haber cierto margen de error habría cierta diferencia del 5% o 10% de los porcentajes entregados, es decir los datos variarían entre (60-80)% para las blancas y (20-40)% para las negras luego, entenderíamos que para muestras de 10 bolas en total o menos debemos mantener ese rango de porcentajes estable. Un ejemplo de esto es que si existieran 8 bolas, la cantidad de esferas blancas iría de 5 a 6 bolas (2-3 Negras)”.

Juan reconoce que el comportamiento de la muestra se relaciona con lo que sucede en la urna y enfrenta la situación con argumentos muy cercanos a un enfoque frecuencial de la probabilidad al decir “existe una probabilidad mayor de que exista una mayor cantidad de bolas blancas que de bolas negras”. Sin embargo sus ideas de variabilidad no le permiten asegurar que la proporción de bolas blancas sea exactamente el 70% y establece una estimación por intervalo con una variabilidad del 10% que no es justificada. Llama la atención que cuando se usa el método formal para estimar esta proporción con una confianza del 95% se obtiene (0,61-0,79) muy similar a la estimación de Juan.

Ideas evidenciadas en cada estudiante

A continuación presentamos de manera sintética las principales ideas mostradas por cada estudiante con respecto a los Intervalos de Confianza:

Camilo concibe la variabilidad de una manera diferente cuando piensa en una situación que involucra una variable aleatoria discreta que cuando involucra una variable aleatoria continua. Cuando se trata de una variable discreta percibe una relación entre la composición de la urna y las muestras que se extraen de ella, solo que no considera variabilidad alguna asegurando que la muestra responde exactamente al modelo sin importar su tamaño, ideas que rayan en el determinismo.

Por otro lado, cuando se trata de una variable discreta, Camilo sí considera que existe variabilidad en el muestreo que atribuye a la variabilidad de la población misma, incluso considera que aumentar el tamaño muestral aumenta su confianza refiriéndose a una mayor probabilidad de acertar por medio del estimador puntual de la muestra, ya que entre más grande es la muestra deberá parecerse más a la población.

Luz considera la variabilidad en ambos tipos de situaciones (variables discretas y continuas) pero se le facilitó más pensar en intervalos como una posible estimación cuando la variable era discreta sin embargo para ambos casos mostró ideas de la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad. Para ella, si la variable es discreta y se aumenta el tamaño de la muestra, en consecuencia se reduce la variabilidad de la distribución muestral de la proporción; Si se trata de variable continua la influencia del tamaño muestral hace que la muestra se parezca más a la población y por ende el valor del estadístico sea más similar al parámetro.

Por otra parte, Humberto evidencia Ideas de variabilidad en el muestreo para ambos casos, y hace uso de ellas para establecer estimaciones. Con variable continua hace su estimación por medio de un intervalo centrado en el promedio de la muestra con un margen de error intuitivo de ± 3 . En el caso de la variable discreta su estimación es puntual pero le asigna de manera subjetiva una medida de 70% especificando que se trata de su grado de seguridad la cual no deja de ser subjetiva.

En cuanto a la influencia del tamaño muestral manifiesta las mismas ideas de camilo y Luz si se trata de variable continua y considera que el tamaño de la muestra influye de manera directamente proporcional en la variabilidad de la distribución muestral de la proporción.

Varios razonamientos de Néstor son similares a los de luz pero queda claro que aún le hace falta refinar más sus ideas de variabilidad porque considera que aumentar el tamaño de la muestra se traduce en una reducción no muy significativa de la variabilidad, esto se evidenció cuando se le pidió estimar la variabilidad muestral tomando muestras de mayor tamaño y su intervalo se redujo muy poco.

Néstor evidencia en ambos casos nociones de la variabilidad presente en el muestreo. Cuando se trató de variable continua, sus estimaciones estaban permeadas por la idea de intervalo, pero con variable discreta planteó la idea de tomar muestras del mismo tamaño y calcular la proporción en cada una, esto como una forma de controlar la variabilidad, su estimación terminaría siendo el promedio de las proporciones es decir una estimación del valor esperado de la proporción.

Néstor consideró en ambas situaciones que aumentar el tamaño muestral tiene efectos sobre las estimaciones y la variabilidad de la distribución muestral. En el caso de la variable

continua con un tamaño inicial su estimación fue “alrededor de 1,65” pero cuando se aumentó el tamaño muestral entonces escribió explícitamente un intervalo; mientras que en el caso de la variable discreta manifiesta que hay una reducción en la variabilidad de la distribución muestral.

En el caso de Oscar se observa que para ambas situaciones manifestó nociones de variabilidad en el muestreo, sin embargo si se trata de variable continua su idea de variabilidad no es tan clara y se abstiene de hacer una estimación pues el único camino que considera es medir todos los elementos de la población, en este sentido aumentar el tamaño muestral, para Oscar, hace que la muestra se parezca más a la población y se obtenga un valor cercano al parámetro.

Por otra parte, cuando la variable es discreta se evidencia en Oscar nociones de enfoque frecuencial de la probabilidad y de estimación por intervalos al decir “70% o valores cercanos a él (69%,71%, etc)”. Considera mayor variabilidad cuando se tiene el modelo y se pasa a la experimentación que en el caso contrario.

Las ideas de Elías evidenciadas en el caso de la variable continua son muy similares a las de Oscar, Noción de variabilidad muestral, no establece estimaciones ya que el promedio de la población solo se puede determinar midiendo toda la población y a mayor tamaño la muestra será más parecida a la población.

En cuanto a la variable discreta vemos que Elías considera una gran variabilidad pero sin sesgo de equiprobabilidad. Asocia mayor probabilidad al hecho de tener más bolas de cierto color lo cual se traduce en una noción de nivel de confianza. Manifiesta intuición de la ley

de los grandes números y noción de la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad de la distribución muestral.

Sergio posee ideas de la variabilidad en la distribución muestral y curiosamente recurre a su medida intuitiva de ± 5 sin importar que se trate de una variable discreta o continua. Para ambas situaciones mostro ideas claras de la relación entre el comportamiento de la muestra y el modelo o la población. Posee ideas intuitivas del comportamiento de la distribución muestral y algunas nociones sobre estimación por intervalos. Para ambos casos Sergio considera la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad de la distribución muestral.

Ideas tales como las expuestas por Néstor con respecto a que varios valores cercanos podrían terminar siendo el parámetro poblacional o la idea de Humberto de asignar una medida del nivel de seguridad a su estimación, o las ideas de Juan de hacer inferencias por intervalos y las ideas de varios estudiantes sobre la relación entre muestra y modelo, son indicios de que una estimación por medio de un intervalo asociado a una medida de confianza puede surgir de manera intuitiva e informal.

Visión general de la prueba.

En el transcurso de esta prueba hemos encontrado que los estudiantes poseen buenas ideas e intuiciones que, aunque necesitan ser ajustadas, les van a permitir comprender realmente las estimaciones por medio de Intervalos de Confianza.

En la mayoría de los casos notamos que los estudiantes sí perciben variabilidad en las situaciones aleatorias y poseen ideas de su comportamiento. Tienen en cuenta sus ideas de variabilidad tanto al momento de hacer estimaciones como cuando se refieren a la variabilidad del muestreo, sin embargo necesitan ganar un poco más de experiencias con

situaciones estocásticas que involucren variables aleatorias y continuas, apuntando al refinamiento de sus estimaciones.

Con la primera situación hemos podido establecer que, en general, experiencias e ideas de variabilidad están presentes en el razonamiento de los estudiantes pero con ideas extremas sobre comportamiento en la variabilidad, para algunos, nula y para otros, exagerada, lo cual no les permite hacer inferencias más sensatas sobre parámetros poblacionales. Se observaron desde estimaciones puntuales cercanas o iguales al valor obtenido en la muestra hasta la consideración de que es imposible establecer una estimación razonable.

La mayoría de los estudiantes resaltan lo poco conveniente que puede ser hacer estimaciones por medio de valores puntuales pero no saben cómo establecer una buena estimación. Fue predominante la idea de la influencia del tamaño muestral sobre el comportamiento de la muestra ya que se asemeja más a la población, esta termina siendo una primera idea de la cual partir para estudiar el comportamiento de la distribución muestral.

Debido a lo encontrado es importante que las actividades permitan a los estudiantes ganar experiencia con situaciones estocásticas, observar el comportamiento de las distribuciones muestrales, dentro de lo cual se encuentra la variabilidad del estadístico y encontrar utilidad en ello para el momento de establecer estimaciones, sobre todo cuando solo se tiene una muestra a la mano.

5.2. ACTIVIDAD 1

El objetivo de esta primera actividad fue instruir un poco más a los estudiantes en el manejo de Fathom, con el fin proporcionarles herramientas que les permitan realizar

simulaciones, gráficas y cálculos para que puedan probar o refutar sus concepciones sobre variabilidad, estimación e incluso probabilidad.

En la sección 1.1 de la actividad el estudiante debe exponer las ideas y razonamientos con los que llega a la clase, por este motivo tuvo que responder sin hacer uso del programa. Después de esto, se hizo una pequeña socialización con la intención de ahondar un poco más en los razonamientos de los estudiantes y verificar su nivel de comprensión.

Con las demás secciones de la actividad buscamos desarrollar las ideas de la relación modelo-muestra, variabilidad y enfoque frecuencial de la probabilidad a partir de las ideas que poseen los estudiantes, y al tiempo proporcionarles una primera experiencia directamente con la distribución muestral de la proporción.

Se han seleccionado 4 casos de un grupo de 20 estudiantes, el motivo de su selección fue la participación y el interés mostrado durante las sesiones, Sin embargo, muchos apartes de las discusiones colectivas serán analizados por la influencia que pueden tener sobre el desarrollo del razonamiento en los estudiantes analizados.

Actividad 1

1.1. Modelo de urna.

1. Una urna contiene 4 bolas azules y 2 amarillas, de ella se extrae una bola repetidas veces con devolución (se saca la bola, se mira su color y se regresa a la urna).

a) ¿Cuántas bolas de cada color espera que salgan si hace 10 extracciones con devolución? ¿Y si son 100 extracciones? ¿Y si son 1000 extracciones?

b) Si se toman 1000 muestras de tamaño 60 y en cada una se calcula la proporción de bolas azules ¿Cómo quedaría la gráfica de las proporciones? (bosquéjela)

1.2 Discusión.

1.3. Construcción de la urna en fathom

1. Abrir el programa Fathom

2. Dar click sostenido en el icono “**Collection**” ubicado en la parte superior izquierda de su pantalla (figura 1) y arrástrelo hasta la hoja en blanco

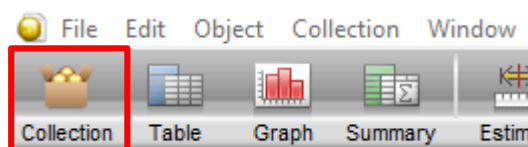
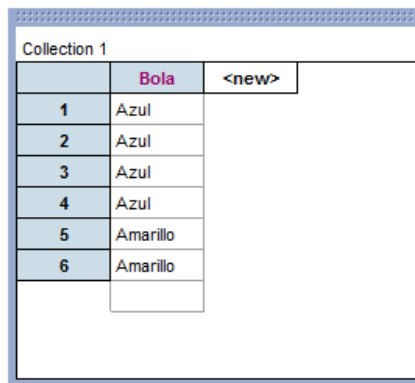


Figura 1

3. Dar clic sostenido en el icono **Table** ubicado en la parte superior izquierda de su pantalla justamente al lado del icono **Collection** (Figura 1) y arrástrelo hasta la hoja en blanco.

4. Dé clic en la casilla de la tabla que dice “new”, escriba el título de la columna “**Bola**” y oprima Enter. Escriba los colores de las bolas en las casillas de la misma columna de manera similar a como aparece en la figura 2.



	Bola	<new>
1	Azul	
2	Azul	
3	Azul	
4	Azul	
5	Amarillo	
6	Amarillo	

Figura 2

5. Clic derecho sobre el icono “collection 1” y elija la opción “sample cases”, aparecerá un nuevo icono, selecciónelo y arrastre una tabla desde la parte superior de la ventana hasta la hoja en blanco.

a) ¿Cómo interpreta los datos proporcionados por esta nueva tabla?

b) ¿Quisiera que la tabla tuviese más resultados? Yo no sabría qué responder. .

6. Dé doble clic en el icono “Sample of collection 1”, aparecerá una nueva ventana la cual debe llenar como en la figura 3 y dar clic en “sample more cases”; revise nuevamente la tabla.

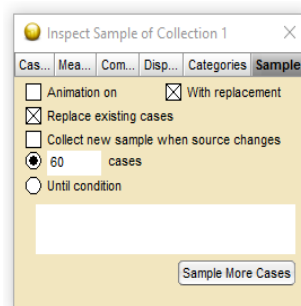


Figura 3

7. De clic sostenido en el icono **Graph** ubicado en la parte superior izquierda de su pantalla cerca del icono **Collection** (figura 1) y arrástrelo hasta la hoja en blanco. Luego de clic sostenido en la casilla “Bola” de la tabla “Sample of collection 1” arrástrelo hasta el “eje x” del plano cartesiano aparece en la pantalla y seleccione la opción.

c) ¿Qué sucede cada vez que da clic en el botón “Sample More Cases” de la ventana del punto 6?

d) Aumente el tamaño muestral siguiendo lo hecho en el paso 6 y describa en su hoja de trabajo lo observado en la gráfica.

e) En su hoja de trabajo bosqueje un histograma de los resultados de la urna si se hicieran 6.000 repeticiones, sin necesidad de hacerlo en fathom.

1.4 discusión

1.5 .Creando una medida.

1. Dé doble clic sobre el icono llamado “Sample of collection 1” (creado en el paso 5) y en la ventana emergente seleccione la pestaña “Measures”, aparecerá una ventana como la de la figura 4, en la columna “Measure” donde dice <new> escriba **azul** y dé doble clic en la columna “**Formula**”, luego dé doble clic en “Functions” → “Estatisticas” → “One Attribute” → “Count”; escriba dentro del paréntesis “**Azul**” y de clic en “OK” (figura 5).

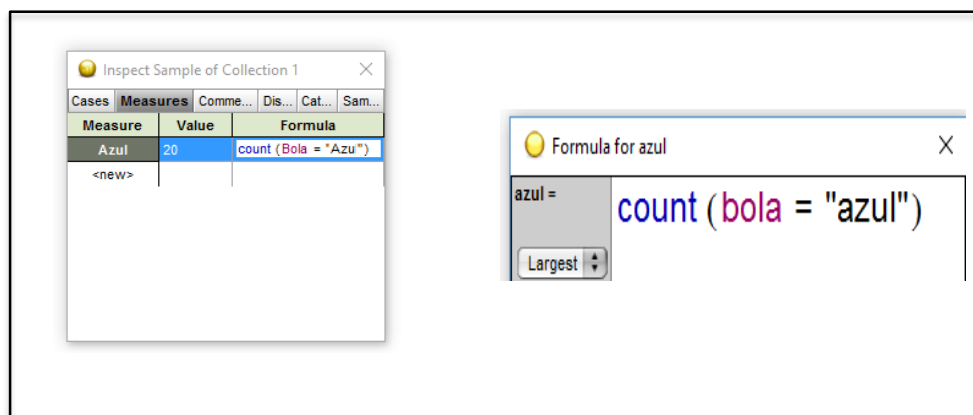


Figura 5

2. Cierre el inspector, dé clic derecho sobre el icono “Sample of collection 1” y elija la opción “Collect measures”, aparecerá un nuevo icono en su pantalla.
3. Seleccione el nuevo icono llamado “measures from simple of collection 1” y cree una tabla arrastrando el icono “Table” de la parte superior de la pantalla.
 - a) ¿Cómo interpreta los resultados registrados en esta nueva tabla?
 - b) ¿Es suficiente con la cantidad de datos que tiene o cuantos le gustaría que tuviera la tabla?
4. Para aumentar la cantidad de datos en la más reciente tabla dé doble clic en el icono “measures from simple of collection 1”, elija las opciones en la tabla como aparece en la figura 6 y de clic en el boto “collect more measures”.
5. Realice un gráfico con los datos de la nueva tabla
 - c) ¿Cómo interpreta este grafico?

d) ¿Puede modelar cualquier urna con cualquier distribución utilizando Fathom? ¿Como? Cree una nueva Urna y repita todo el proceso.

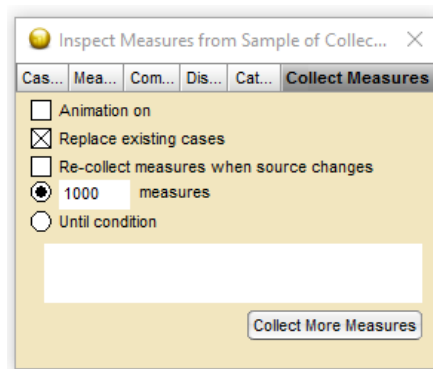


Figura 6

5.2.1. Análisis de la actividad

A continuación se muestran las respuestas de los estudiantes a cada pregunta junto con su respectivo análisis; para ello se cuenta con evidencia escrita, entrevistas (audios) y videos de lo realizado en la pantalla.

Néstor:

1.1. Modelo de urna

1. Una urna contiene 4 bolas azules y 2 amarillas, de ella se hacen extracciones de una bola con devolución (se saca la bola, se mira su color y se regresa a la urna).

a) ¿Cuántas espera que salgan de cada color si hace 10 extracciones con devolución?

¿Y si son 100 extracciones? ¿Y si son 1000 extracciones?

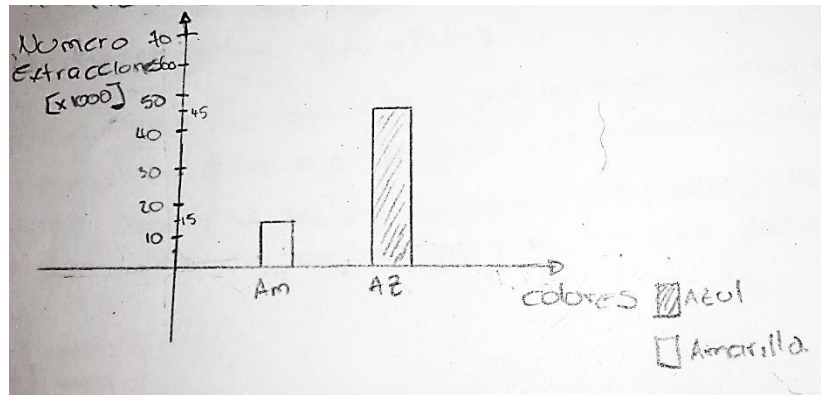
“En total hay un doble de bolas azules que de amarillas , ó sea que por cada amarilla hay dos azules por tanto en probabilidad siempre va a haber un 50% de más en posibilidad de sacar (+ un 25%) si hago 10 extracciones por lo menos 5 extracciones serán azules pero más la probabilidad diría que espero sacarla 6 a 8, de forma análoga en 100 espero sacar entre 70-80 bolas de color azul y en 1000 extracciones espero 725-775 extracciones, lo más posible es que siempre estén cerca al 75% (7,5; 75; 750)”.

Observando las nociones primarias de Néstor con respecto a esta situación hemos notado que aunque el cálculo de la probabilidad que ha hecho no es el correcto, él tiene en cuenta en su respuesta algunas ideas de la relación entre el modelo y el comportamiento de la muestra. Al tiempo muestra Ideas de variabilidad de la distribución muestral y de la influencia que tiene el tamaño muestral sobre dicha variabilidad, esto porque Néstor espera valores cercanos al 75% y por los intervalos que enuncia, cada vez menos anchos, se puede notar que se está acercando cada vez más a ese valor esperado de la proporción cada vez que aumenta el tamaño de la muestra; para 10 extracciones espera sacar entre el 60% y 80%, para 100 espera sacar entre 70% y 80%, y para 1000 entre 72% y 77%.

b) Si se toman 1000 muestras de tamaño 60 y en cada una se calcula la proporción de bolas azules ¿Cómo quedaría la gráfica de las proporciones? (bosquéjela)

“La probabilidad en 60 extracciones teniendo la misma proporción 1:2 en la misma que se viene trabajando en el numeral a) ya que la cantidad de bolas y su color no cambian, ahora en 60 extracciones por lo menos 30 van a ser azules, por ser la mitad pero como siempre van a ser el doble de azules que de amarillas y la probabilidad es el doble ó sea un 25% de más, por tanto esperare entre 40-50 bolas de

color azul, alrededor de 75% ahora pensando en 1000 veces esto, cogeré el promedio o exactamente el 75% del total de 60 extracciones, o sea 45 azules y esto por 1000 y esto por 1000 veces va a ser 45000 azules y las restantes amarillas o sea 15000”.



**Ilustración 1. Distribución de las proporciones según Néstor,
Actividad 1, previo al trabajo en Fathom**

Al parecer Néstor no comprendió muy bien la situación planteada, pero basados en sus respuestas y en la gráfica que realizó (Ilustración 1) se puede ver una idea intuitiva de la ley de los grandes números y aunque en la prueba inicial Néstor mostró ideas que lo acercaban a la distribución muestral, se evidencia que en este caso no consideró ideas de variación ni de distribución.

1.3. Construcción de la urna

5. Clic derecho sobre el icono “collection 1” y elija la opción “sample cases”, aparecerá un nuevo icono, selecciónelo y arrastre una tabla desde la parte superior de la ventana hasta la hoja en blanco.

a) ¿Cómo interpreta los datos proporcionados por esta nueva tabla?

“En este caso noto que el programa me ha mostrado una posible solución de una extracción de 10, mostrándome que no siempre va a haber mayoría de azules como se podría pensar ya que existen más de ellas en la urna inicial y aunque baja existe la probabilidad de sacar la amarilla. En este caso el programa me ha mostrado que en esta extracción de 10 pudo obtener 5 y 5 extracciones de cada color sin dejar de tener en cuenta que esta es solo una de muchas otras posibilidades”.

Néstor interpreta correctamente lo mostrado por el programa e incluso empieza a exteriorizar cambios en sus razonamientos mostrando algunas nociones de gran variabilidad existente en pocas extracciones.

b) ¿Quisiera que la tabla tuviese más resultados? Justifique su respuesta.

“Depende de lo que necesite ya que en 10 extracciones para un total de 6 bolas (4az y 2 am) el resultado arrojado es un poco inexacto a un promedio, y al repetir la operación con las mismas características, posiblemente si me salgan más azules que amarillas o de nuevo iguales pero muy poco probable más amarillas que azules, así que si necesito mayor cantidad de resultados para de esta forma ampliar el rango y me muestre más posibilidades y poder notar claramente la tendencia de esta urna y sus características”.

Néstor empieza a aclarar sus ideas sobre la variabilidad y la ley de los grandes números, ahora habla de observar una tendencia lo cual se traduce en buenas nociones de enfoque frecuencial.

c) ¿Qué sucede cada vez que da clic en el botón “Sample More Cases” de la ventana del punto 6?

“Me empieza a variar la cantidad de bolas amarillas y azules y noto que al aumentar el rango me muestra muchas más posibilidades y en una de ellas de muchas repeticiones salió más amarillas que azules, así que creo que al haber más repeticiones esta probabilidad aumenta aun así, existiendo menos amarillas que azules”.

Cuando Néstor habla de aumentar el rango se refiere al tamaño de la muestra ya que ahora no son 10 repeticiones sino 60, en este caso cuando se oprime el botón “Sample more cases” el programa toma una nueva muestra del mismo tamaño con devolución, por lo visto en una de esas nuevas muestras aparecieron más extracciones de bolas amarillas que azules (la urna contiene 4 azules y 2 amarillas), lo cual desafortunadamente terminó favoreciendo la idea de que será más común obtener resultados como estos a medida que se aumente el tamaño muestral, esperamos que Néstor pueda descartar esta idea a medida que repita el experimento con muestras de mayor tamaño.

d) Aumente el tamaño muestral siguiendo lo hecho en el paso 6 y describa en su hoja de trabajo lo observado en la gráfica.

“Con esto me doy cuenta que lo dicho anterior no es cierto ya que 60 era un número relativamente pequeño y al aumentar a uno más grande en mi caso quise 500 y al hacer muchas repeticiones las amarillas oscilan entre 100-200 y no salen de ese rango y va a ser poco probable que lo hagan”.

Néstor empieza a aclarar sus ideas sobre variabilidad e influencia del tamaño muestral, ha comprendido que con muestras muy pequeñas la variabilidad es mucho mayor, ha descubierto que al aumentar el tamaño muestral y tomar varias muestras diferentes no sucede lo que había descrito en la pregunta c). Néstor ha podido establecer una primera idea de la variabilidad de la distribución muestral pues lo ha repetido muchas veces y ha notado que en ningún caso ha obtenido una cantidad fuera de 100-200 lo cual también termina dándole ideas de enfoque frecuencial de la probabilidad y de la relación entre modelo y muestra.

e) En su hoja de trabajo bosqueje un histograma de los resultados de la urna si se hicieran 6.000 repeticiones, sin necesidad de hacerlo en Fathom.

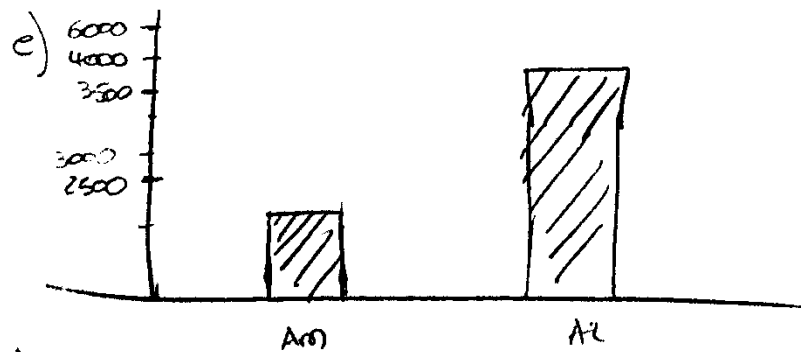


Ilustración 2. Resultado de 6000 repeticiones según Néstor, luego de trabajar en Fathom

“Teniendo en cuenta lo anterior y de lo que me he dado cuenta, noto que un posible resultado es de 2000 y 4000 bolas amarillas y azules respectivamente ya que al aumentar la muestra mucho más los casos empiezan a tender a un mismo valor y muy cercano a este. Así que diría que el rango oscilaría entre 2000-2500 y 3000-3500 de bolas amarillas y azules respectivamente”.

Ahora Néstor manifiesta poseer nociones de la relación entre muestra y modelo, considerando también la variabilidad en el muestreo ya que habla de una tendencia al valor esperado de la proporción y da un rango de posibles resultados, manifiesta algunas nociones de enfoque frecuencial de la probabilidad y a su vez cierta idea de ley de los grandes números.

1.4. Creando una medida

Seleccione el nuevo icono llamado “measures from simple of collection 1” y cree una tabla arrastrando el icono “Table” de la parte superior de la pantalla.

a) ¿Cómo interpreta los resultados registrados en esta nueva tabla?

“Lo que me entrega la tabla son 5 veces o repeticiones de 60 extracciones de la urna, o sea que el rápidamente me seleccionará los resultados de estas 5 repeticiones y mostrándome en la tabla los resultados de cada una de ellas. Solo me muestra el color azul ya que solo hemos seleccionado el “count” para este color pero se sobreentiende que el resto es de color amarillo”.

Néstor interpreta correctamente lo arrojado por la tabla. El objetivo de esta pregunta es que los estudiantes se familiaricen con algunas funciones del programa y empiecen a desarrollar esquemas de uso tanto para para el “Count” como para las medidas.

b) ¿Es suficiente con la cantidad de datos que tiene o cuantos le gustaría que tuviera la tabla?

“No, posiblemente suministrándome más datos ó sea repeticiones podré notar muchas opciones al ver más repeticiones de 60 podre ver cómo se comporta los resultados

teniendo el tamaño de 60. Análogamente podré cambiar el tamaño a uno más grande u otro más pequeño y notar sus cambios”.

Néstor posee buenas nociones de la ley de los grandes números al considerar que requiere la toma de muchas más muestras del mismo tamaño para poder observar el comportamiento de la proporción muestral y sugiere por sí mismo empezar a variar el tamaño muestral para observar el comportamiento de la distribución muestral.

c) Se simula la toma de la frecuencia absoluta en 1000 muestras del mismo tamaño y se realiza un histograma. ¿Cómo interpreta este grafico?

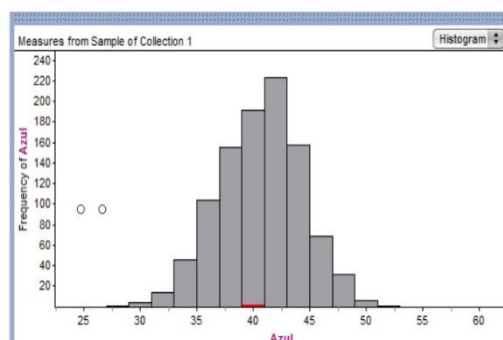


Ilustración 3. Distribución de las frecuencias de 1000 muestras tomada de la pantalla del computador de Néstor

“En el tamaño de 1000 la gráfica me muestra cada una de las extracciones y la cantidad que se repite en las mil veces que lo realizó el programa en mi caso el valor fue de 42 y aproximadamente unas 230 veces de las mil hechas, ósea que 230 veces el resultado fue 42 azules y 18 amarillos. Curiosamente al aumentar el tamaño a mil sería otra forma de observar el comportamiento teniendo un tamaño de 60, o sea que a diferencia de los puntos anteriores que lo que hicimos fue aumentar el número de extracciones ósea de 60 a más y en este caso lo dejamos en 60 pero lo hicimos 1000

veces y se nota que al igual que lo anterior con este modo de hacerlo mil veces se nota a lo que se tiende y que va a ser en su mayoría de veces más azules que amarillas”.

Néstor observa la distribución muestral de la cantidad de veces que aparece una bola azul en muestras de tamaño 60 y resalta que hay una tendencia a sacar más bolas azules que amarillas lo cual termina reforzando el pensamiento de Néstor en que hay una relación entre el comportamiento de la muestra y el modelo.

En resumen Néstor:

Observamos que Néstor experimentó cambios en sus razonamientos, en especial en aquellos que tienen que ver con la variabilidad muestral. Iniciando la actividad el estudiante consideraba que las pequeñas muestras responderían sin mucha variabilidad a la composición de la urna y que a medida que aumentaba el tamaño muestral ocasionaba un aumento en la variabilidad de las proporciones muestrales. Con el pasar de la técnica utilizada, logró observar por sí mismo que sus afirmaciones no se estaban cumpliendo, las muestras pequeñas presentaron una gran variabilidad y al aumentar el tamaño muestral notó que era mucho más difícil encontrar muestras con la misma cantidad de extracciones azules que amarillas. Al mismo tiempo presentó reajustes en sus nociones de enfoque frecuencial y de la relación modelo-muestra.

En cuanto a la distribución muestral, que por algún motivo no surgió naturalmente en la parte inicial de la actividad, esperamos que Néstor ahora tenga una mejor noción de ella aunque es claro que hasta ahora ha sido muy poco el trabajo con esta cuestión, pero será uno de los principales ejes de las siguientes actividades.

Sergio:

1.1. Modelo de urna

Una urna contiene 4 bolas azules y 2 amarillas, de ella se hacen extracciones de una bola con devolución (se saca la bola, se mira su color y se regresa a la urna).

a) ¿Cuántas espera que salgan de cada color si hace 10 extracciones con devolución? ¿Y si son 100 extracciones? ¿Y si son 1000 extracciones?

“Se esperan que salgan aproximadamente 7 bolas azules porque si la cantidad de pelotas es 6, 4 equivalen al 67% y como se realizan 10 extracciones, entonces el 66,67% de 10 es 6,667 y como balamos de pelotas que son valores enteros se aproxima a 7. Si son 100 el 66,67% de 100 es 66,67 ósea 67 pelotas azules.

Y si son 1000 basándonos en lo anterior serian 667 pelotas azules”.

Una vez más Sergio da muestras del uso de la heurística de representatividad (Kahneman y Tversky, 1974) al asegurar que sin importar el tamaño de la muestra se comporta igual a la población de la cual ha sido extraída, tal como lo había hecho en la prueba inicial. De cualquier modo hay en Sergio cierta intuición de una relación entre el comportamiento de la muestra y la composición de la urna.

b) Si se toman 1000 muestras de tamaño 60 y en cada una se calcula la proporción de bolas azules ¿Cómo quedaría la gráfica de las proporciones? (bosquéjela)

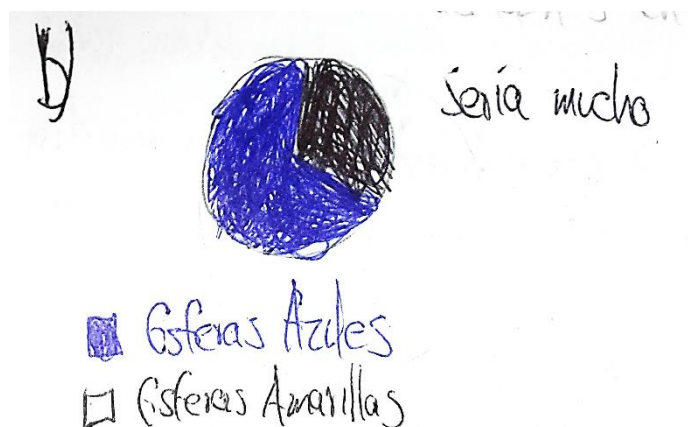


Ilustración 4. Distribución de las proporciones muestrales según Sergio, antes de trabajar con Fathom

Sergio no acude en esta ocasión a la variabilidad en el muestreo y no le es natural pensar en una gráfica que le permita mostrar realmente los resultados de un experimento como el que se le está planteando, para Sergio no surge en esta ocasión una imagen de distribución muestral y sigue manifestando que en la muestra se manifiesta fielmente la composición de la urna.

1.3. Construcción de la urna

5. Clic derecho sobre el icono “collection 1” y elija la opción “sample cases”, aparecerá un nuevo icono, selecciónelo y arrastre una tabla desde la parte superior de la ventana hasta la hoja en blanco.

a) ¿Cómo interpreta los datos proporcionados por esta nueva tabla?

“Que una probabilidad de obtener esferas azules es del 70% y por ende nos muestra que hay mayor cantidad de esferas azules y coincide con la tabla”.

Cuando Sergio toma por medio del programa una muestra de la urna de tamaño 10, que además es la primera que sale por defecto, casualmente obtiene en ella la proporción que esperaba desde el principio, 7 azules y 3 amarillas, lo cual quedó registrado en video, esto lo lleva a pensar que tal como él lo había descrito anteriormente, en la muestra se reflejará fielmente la proporción de la urna.

b) ¿Quisiera que la tabla tuviese más resultados? Justifique su respuesta.

“Si, por que al aumentar la muestra, los datos de la probabilidad se hacen mucho más exactos”.

Sergio muestra tener nociones de la ley de los grandes números y de enfoque frecuencial de la probabilidad, muy seguramente su idea coincida con la manifestada en su prueba inicial y es que al tener una muestra de mayor tamaño, esta se termina pareciendo más a la población y por ende los resultados de la proporción serán más cercanos.

c) ¿Qué sucede cada vez que da clic en el botón “Sample More Cases” de la ventana del punto 6?

“Cambia las probabilidades de la muestra, aumentando o disminuyendo las proporciones de cada una; pero siempre manteniendo mayoría en las bolas azules”.

Sergio observa la variabilidad del muestreo, utiliza la palabra “probabilidades” para hacer referencia a las proporciones, notando que no siempre aparece una proporción del 70% como él creía, de cualquier forma sigue notando que en las muestras se traduce de alguna forma la composición de la urna resaltando el hecho de que hay una tendencia de las muestras a que salgan más veces las bolas azules.

d) Aumente el tamaño muestral siguiendo lo hecho en el paso 6 y describa en su hoja de trabajo lo observado en la gráfica.

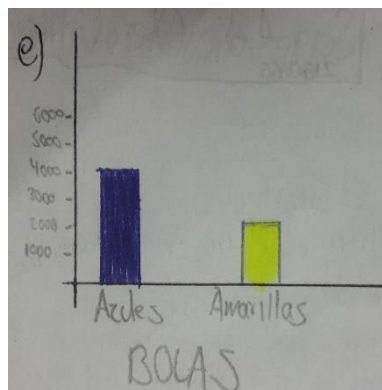


Ilustración 5. Distribución de las proporciones según Sergio en una muestra de 6000 repeticiones

“A medida que se aumenta la muestra, las probabilidades bajan su margen de error con respecto a las proporciones de las esferas iniciales, por lo tanto si tenemos 100 muestras los datos de esferas azules oscilan entre 55-75, si tenemos 1000 que las esferas azules oscilan entre 684-649, los cuales son cercanos a 66.67% de la muestra que sean azules; y a medida que aumenta la muestra, disminuye el margen de error”.

En el video observamos que Sergio deja en pantalla la gráfica construida a partir de la muestra de tamaño 60 y utiliza un muestreo adicional (una nueva “Sample of collection”) para allí variar los tamaños muestrales, comparando a cada momento con las muestras de tamaño 60, esto es evidencia de los esquemas de uso que Sergio empieza a desarrollar para el programa y de algunos esquemas de acción instrumentada que podríamos llamar primarios. De esta forma Sergio ha cambiado sus ideas de variabilidad nula en el muestreo y ha notado

que a medida que se aumenta el tamaño muestral la variabilidad con respecto a la proporción disminuye ya que está comparando sus resultados con el 66,67% y enuncia disminución en el margen de error.

Del mismo modo Sergio comprueba y refina su idea de la relación entre el comportamiento muestral y el modelo del cual proviene, ya que ahora si admite la variabilidad.

e) En su hoja de trabajo bosqueje un histograma de los resultados de la urna si se hicieran 6.000 repeticiones, sin necesidad de hacerlo en Fathom.

“Calculé el 66,67% de 6000, y me dio 4000 azules y 2000 amarillas; para probar mi resultado use la aplicación para ver resultados estadísticos concretos y observé que el margen de error para la muestra de 6000 era casi nulo”(Ilustración 5).

La idea de Sergio sobre la ley de los grandes números y el enfoque frecuencial de la probabilidad ha tomado mas forma, a partir de lo hecho ahora, incluso con un tamaño de 6000 tuvo cuidado de no asegurar desde el principio que 4000 sería la cantidad exacta que iba a obtener, prefirió observar en el programa lo que sucedía con muestras de ese tamaño y encontró que aunque hay variabilidad, si se piensa en proporciones, esta será poca.

1.5. Creando una medida

Seleccione el nuevo icono llamado “measures from simple of collection 1” y cree una tabla arrastrando el icono “Table” de la parte superior de la pantalla.

a) ¿Cómo interpreta los resultados registrados en esta nueva tabla?

“Deduzco que los resultados corresponden a 5 posibilidades de cantidad de bolas azules, cuando la muestra es de 60, son resultados aleatorios y todos son medianamente cercanos a la proporción real de bolas”.

Sergio notó correctamente lo que hace el programa con las funciones “measure” y “collect measure”, utiliza la palabra posibilidades para referirse a las muestras comprendiendo que son tomadas de manera aleatoria e inmediatamente enfoca su atención en la variabilidad del muestreo.

b) ¿Es suficiente con la cantidad de datos que tiene o cuantos le gustaría que tuviera la tabla?

“Creo que sería necesario una cantidad mayor de datos posibles, para que la estimación sea más acertada, creería que con 100 posibilidades sería una buena cantidad”.

Sergio está pensando en un intervalo, ahora considera la variabilidad, es más, posiblemente esté solo preocupado por observar dicha variabilidad a partir de esas 100 posibilidades o muestras que él considera suficientes.

c) Se simula la toma de 1000 frecuencias absolutas de muestras del mismo tamaño y se realiza el histograma. ¿Cómo interpreta este grafico?

“La grafica (Ilustración 5) nos muestra la cantidad de pelotas azules que se dan en 1000 posibilidades del experimento con muestra de 60”.

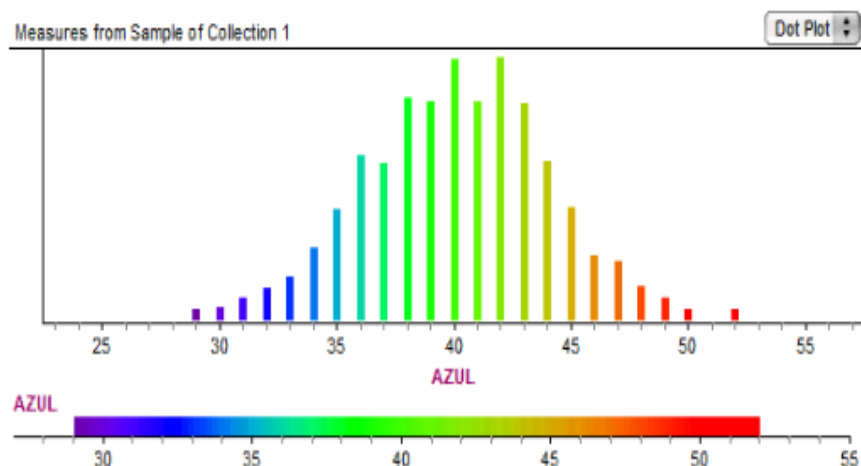


Ilustración 6. Distribución de 1000 frecuencias absolutas en Fathom, tomada de la pantalla de Sergio.

“Hice 3 pruebas y de entre todas las 3000 posibilidades experimento no hay datos menores a 25 ni mayores a 55; entre 25 a 35 y de 45 a 55 la cantidad de datos son pequeños y poco representativas; entre 35 y 45 está la mayoría de datos teniendo los más grandes picos entre 39 y 42. Esto representa que la posibilidad de que la cantidad de pelotas sea menor a 25 y mayores a 55 es nula, que entre 25-35 y de 45-55 es posible, pero poco probable, entre 35 y 45 hay una gran posibilidad sean estos la cantidad de pelotas azules en un experimento aleatorio de 60 extracciones, y la posibilidad de resultado más grande esta entre 39 y 42 pelotas azules”.

Sergio describe lo que observa en su grafico (Ilustración 5) de la distribución muestral de la frecuencia absoluta de extracciones azules en muestras de tamaño 60, procedimiento que decidió repetir 3 veces; esto sumado a su noción de enfoque frecuencial le ha permitido

establecer conclusiones con gran seguridad, ganado experiencia con respecto a la variabilidad y a la distribución muestral.

En resumen Sergio:

Presenta pequeñas variaciones a la técnica planteada originalmente, por cuenta propia decidió adicionar algunas acciones, con esto podemos afirmar con mayor seguridad que Sergio está construyendo sus esquemas de uso y sus esquemas de accione instrumentada.

Inicialmente, Sergio consideraba que si en la urna existía una proporción del 66% de bolas de un color, entonces al extraer una muestra de cualquier tamaño de esta urna se obtendría que un 66% de las extracciones serían de ese color. Con estos razonamientos Sergio mostraba ideas de la relación entre modelo y muestra pero sin tener en cuenta variabilidad alguna. Con el pasar de esta actividad Sergio tuvo que ir modificando sus ideas. Por casualidad la primera muestra que simuló el programa le daba la razón, pero al repetir el muestreo y cambiar los tamaños muestrales pudo finalmente observar la variabilidad del muestreo sin dejar de lado su idea de una relación entre el comportamiento de la muestra y el modelo.

Se evidencia desarrollo en sus ideas de enfoque frecuencial de la probabilidad al destacar en la distribución muestral los resultados con muy poca probabilidad de ocurrir y percibe en Sergio una mejor noción de distribución muestral.

Luz:

1.1. Modelo de Urna.

1. Una urna contiene 4 bolas azules y 2 amarillas, de ella se hacen extracciones de una bola con devolución (se saca la bola, se mira su color y se regresa a la urna).

a) ¿Cuántas espera que salgan de cada color si hace 10 extracciones con devolución? ¿Y si son 100 extracciones? ¿Y si son 1000 extracciones?

“En primer lugar hay que plantear la idea de que existe mayor probabilidad de sacar una bola azul o una amarilla cuando se hace una extracción, es decir existe el doble de probabilidad de sacar una azul que una amarilla. También existe la idea (que considero es muy poco probable) de que al hacer extracciones continuas sea posible sacar reiteradamente una bola amarilla, repetir la misma bola varias veces haciendo pensar que se encuentran en igual proporción es posible.

Siendo 6 bolas el correspondiente al 100% en cuanto a cantidad sabemos que:

En la urna existe un porcentaje mayor de bolas azules, mientras el de amarillas se ve en menor medida.

$$6 \rightarrow 100\%$$

$$4 \rightarrow x = \frac{400}{6} = 66,6\% \text{ porcentaje de bolas azules}$$

Si realizamos 10 extracciones esperamos encontrar mayor cantidad de bolas azules, quizá un 6/4 siendo 4 la cantidad de bolas amarillas.

Si son 100 extracciones podría plantearse 2 posibilidades, la primera es que efectivamente se saquen proporcionalmente y primen las que se encuentran en mayor cantidad. La segunda es que exista una repetición de aquellas que se encuentran en menor medida y sin conocer cuántas bolas se encuentran en la urna de cada color se nos dé a pensar que las que más encontramos son las que están en mayor medida.

Si son 1000 extracciones para mi podría ser muy parejo el nivel de extracciones, ya que existe posibilidad de repetición de color, que se saque constantemente la misma pelota, que la que están en mayor medida no se saquen, etc”.

Luz posee algunas nociones de variabilidad en el muestreo y cierta idea de la relación entre el comportamiento de la muestra y el modelo. Luz manifiesta nuevamente una de las ideas observadas en su prueba inicial y es creer que al aumentar el tamaño de la muestra se aumenta el error, es decir, manifiesta que sería más factible sacar mayor cantidad de veces las bolas del color que está en menor cantidad en la urna.

b) Si se toman 1000 muestras de tamaño 60 y en cada una se calcula la proporción de bolas azules ¿Cómo quedaría la gráfica de las proporciones? (bosquéjela)

“1000 muestras de tamaño 60 podríamos tener una idea más clara de la proporción, ya que se podrá sacar un promedio total. Para mí sería mejor utilizar un diagrama de punto, podríamos graficar las 1000 muestras y así hallar un promedio total”.

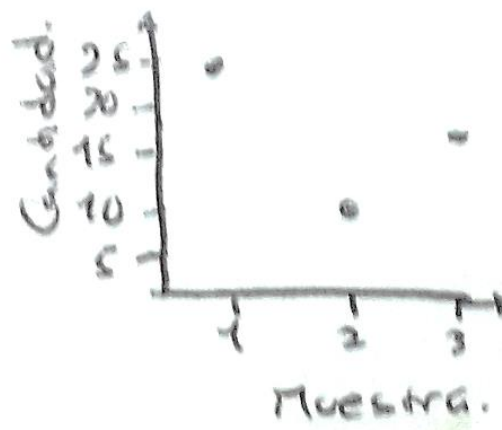


Ilustración 7. Distribución de las frecuencias según Luz, antes de trabajar con Fathom

En este caso Luz ha tenido la idea de encontrar el valor esperado de la frecuencia absoluta, aunque no es claro el objeto de esto, la gráfica que propone es un diagrama de puntos con la cual podría hacerse una idea de la variación. El diagrama utilizado por Luz podría brindar algunas nociones de la distribución muestral, sobre todo aquellas que tienen que ver con su variabilidad, sin embargo este diagrama es limitado cuando se tiene una gran cantidad de muestras.

1.2. Construcción de la urna.

5. Clic derecho sobre el icono “collection 1” y elija la opción “sample cases”, aparecerá un nuevo icono, selecciónelo y arrastre una tabla desde la parte superior de la ventana hasta la hoja en blanco.

a) ¿Cómo interpreta los datos proporcionados por esta nueva tabla?

“Es posible interpretar esta nueva tabla como una muestra hecha al azar de tamaño 10 en la que existió una inclinación a favor de las bolas azules, en un porcentaje de 90% y 10% para amarillas, todo esto puede variar conforme cada muestra, ya que las extracciones se hacen con devolución siendo así más probable el margen de error”.

Luz interpreta correctamente lo que arroja el programa y muestra a su vez nociones de variabilidad en el muestreo como se había visto en la prueba inicial y en las anteriores preguntas.

b) ¿quisiera que la tabla tuviese más resultados? Justifique su respuesta.

“Quisiera que tuviese más resultados para evaluar mejor el comportamiento y sacar un porcentaje más aproximado en cuanto a la muestra”.

Podemos ver en Luz nociones de ley de los grandes números y de variabilidad en la distribución muestral de la proporción ya que hace referencia a un porcentaje en cada muestra.

c) ¿Qué sucede cada vez que da clic en el botón “Sample More Cases” de la ventana del punto 6?

“Cada vez que le doy clic a “simple more cases” se observa una variación en la gráfica, esta significa el cambio según cada muestra, esta vez de tamaño 60, su cambio de proporción es mayor”.

Luz está observando directamente la variabilidad muestral de la cantidad de bolas azules para muestras de tamaño 60, manifiesta nuevamente la idea de que al aumentar el tamaño de la muestra la variabilidad también aumenta, idea que ya habíamos visto en Luz en la prueba inicial.

d) Aumente el tamaño muestral siguiendo lo hecho en el paso 6 y describa en su hoja de trabajo lo observado en la gráfica.

“Cuando aumenté el tamaño muestral, en este caso a 100 puedo observar que su proporción se hace cada vez más cercana, es decir en la mayoría de las muestras se mantendrá una proporción de azules entre 60-70 y de amarillas 40-30”.

Contrario a lo expresado por Luz en la pregunta anterior, ahora ella observa mayor estabilidad en los valores de las proporciones de las muestras, incluso empieza a limitar la variación por medio de intervalos, por lo tanto Luz empieza a percibir la influencia que tiene el tamaño muestral sobre la variabilidad.

e) En su hoja de trabajo bosqueje un histograma de los resultados de la urna si se hicieran 6.000 repeticiones, sin necesidad de hacerlo en Fathom.

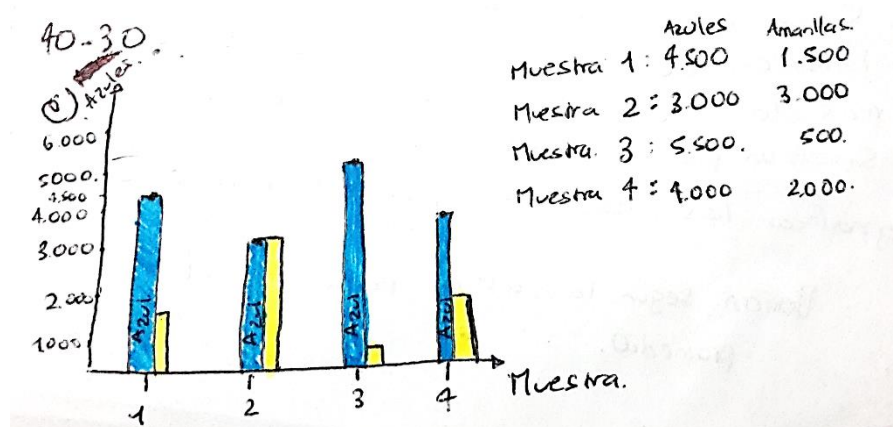


Ilustración 8. Distribución de las frecuencias de 4 muestras de tamaño 6000, según Luz, luego de trabajar con Fathom

Luz ratifica tener nociones de relación entre muestra y modelo, ya que en su gráfico en el cual considera varias muestras de tamaño 6000 siempre predomina el color azul, pero de manera inesperada sigue admitiendo gran variabilidad en el muestreo, lo cual se puede observar en la muestra 2 de su gráfico que tiene la misma cantidad de extracciones azules y amarillas.

1.5. Creando una medida

Seleccione el nuevo icono llamado “measures from simple of collection 1” y cree una tabla arrastrando el icono “Table” de la parte superior de la pantalla.

a) ¿Cómo interpreta los resultados registrados en esta nueva tabla?

“Son 5 muestras de tamaño 60 en la que evidenciamos que la proporción de bolas azules esta en mayor cantidad pero principalmente entre un rango de 35-45, es decir

corresponde a 58,3% a 75%, el porcentaje inicial que correspondía al 66,6% es decir, sí va a ser más cercana a lo estimado inicialmente lo que nos ayudará a concluir que entre más datos será más cercana la información a la cantidad estimada”.

Luz se encuentra confrontando sus ideas, sobre todo aquellas que tienen que ver con la influencia del tamaño muestral y la variabilidad. Ha establecido intervalos para el valor esperado de la proporción muestral basada solo en las 5 muestras de tamaño 60 disponibles en la tabla, cuyo mayor valor fue 42 y el menor 36, lo que muestra que Luz posee buenas nociones de variabilidad.

Luz termina mostrando nociones de la distribución muestral de la proporción e influencia del tamaño muestral al asegurar que se obtienen valores cercanos al valor esperado 66,6% y que entre más datos se tengan los valores serán aún más cercanos al esperado.

b) ¿Es suficiente con la cantidad de datos que tiene o cuantos le gustaría que tuviera la tabla?

“Pues entre más sean mejor, si la cantidad es mayor a 5 podría determinar más exactamente el rango en el que se encuentra la probabilidad de resultados, entre mayor sean los datos de información más precisa va a ser. Y se podrá analizar con mayor claridad datos como el margen de error, desviaciones, etc”.

Luz concluye su actividad con buenas nociones de ley de los grandes números, variabilidad muestral y posiblemente nuevas imágenes en su mente sobre la distribución muestral de la proporción. Aunque en su hoja de trabajo no se encuentran impresiones sobre

la parte final de la actividad donde es construida la distribución muestral, en el video quedó registrado que sí alcanzó a completar esta sección.

Ella termina percibiendo una relación entre el comportamiento de la muestra y el modelo de donde proviene, pero sin importar que la muestra sea de gran tamaño, Luz admite una gran variabilidad.

En resumen Luz:

Luz ha estado afinando sus ideas de la influencia del tamaño muestral y la variabilidad. En el transcurso de la prueba, en varias ocasiones cuando parecía superar la idea de mayor variabilidad si se aumenta el tamaño muestral, más adelante la retomaba. Sin embargo parece que finalmente Luz se ha inclinado por reducción en la variabilidad debido a lo observado en el programa a medida que aumentaba el tamaño de la muestra.

Luz ha mostrado que en ella surge de manera natural el uso de intervalos para hacer referencia a la variabilidad del muestreo, al igual que el cálculo del valor esperado.

Humberto:

1.1. Modelo de Urna.

1. Una urna contiene 4 bolas azules y 2 amarillas, de ella se hacen extracciones de una bola con devolución (se saca la bola, se mira su color y se regresa a la urna).

a) ¿Cuántas espera que salgan de cada color si hace 10 extracciones con devolución? ¿Y si son 100 extracciones? ¿Y si son 1000 extracciones?

“Bolas azules 67%, bolas amarillas 33% >probabilidad de que me salga una bola de ese color en un intento

10 extracciones: una proporción de 7/3 en las bolas azules y amarillas.

100 extracciones: una proporción de 67/33 en las bolas azules y amarillas

1000 extracciones: una proporción de 667/333 en las bolas azules y amarillas

*Cada vez que aumentan las extracciones la proporción tiende a ser de 2/1 (aproximadamente) 2 bolas azules y 1 bolas amarillas”.

Humberto posee nociones sobre probabilidad clásica y aunque en principio no considera variabilidad alguna ni influencia del tamaño muestral, en sus renglones finales deja ver que sí posee estas nociones pues aclara que las extracciones tienden a estar en razón de 2 a 1 y que esto sucede cada vez que se aumenta el tamaño muestral.

b) Si se toman 1000 muestras de tamaño 60 y en cada una se calcula la proporción de bolas azules ¿Cómo quedaría la gráfica de las proporciones? (bosquéjela)

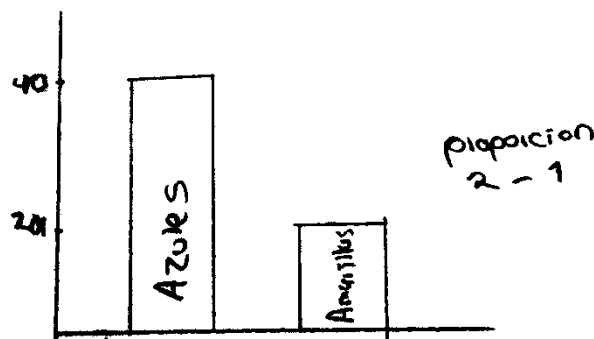


Ilustración 9. Distribución de la distribución muestral según Humberto antes del trabajo con Fathom

Con la gráfica de Humberto se observa que no logra imaginar el comportamiento muestral junto con la variabilidad, parece creer que todas las muestras se deberían comportar igual.

1.3. Construcción de la urna

5. Clic derecho sobre el icono “collection 1” y elija la opción “sample cases”, aparecerá un nuevo icono, selecciónelo y arrastre una tabla desde la parte superior de la ventana hasta la hoja en blanco.

a) ¿Cómo interpreta los datos proporcionados por esta nueva tabla?

“Como 10 muestras que se tomaron respecto a la primera tabla es decir en el primer intento salió azul porque tenía más probabilidad pero el resto de intentos sale también amarillo”.

Humberto interpreta correctamente lo mostrado por la tabla pero no utiliza un lenguaje que le proporcione más comodidad para expresar sus ideas, utiliza las palabras intento y muestra, para referirse a una extracción.

b) ¿quisiera que la tabla tuviese más resultados? Justifique su respuesta.

“No, pero si esperaba diferentes resultados ya que salieron 5 azules y 5 blancas, esperaba más bolas azules en los intentos”.

Sus ideas de relación modelo-muestra y su noción de variabilidad hacen que Humberto se sienta extrañado con el resultado obtenido, aun así no cree importante aumentar el tamaño muestral.

c) ¿Qué sucede cada vez que da clic en el botón “Sample More Cases” de la ventana del punto 6?

“Varía la frecuencia de las bolas amarillas y azules”.

Humberto puede observar cómo varia la cantidad de extracciones azules y amarillas en cada muestra, lo cual puede estar cambiando las ideas expuestas en la primera parte de esta actividad donde parecía pensar que las muestras no variaban mucho sin importar el tamaño que tuvieran.

d) Aumente el tamaño muestral siguiendo lo hecho en el paso 6 y describa en su hoja de trabajo lo observado en la gráfica.

“Sigue variando la frecuencia, solo cambia el número de bolas en la urna”.

Para esta parte Humberto aumentó el tamaño muestral a 1000 por lo tanto observa que esto si concuerda con lo que había intuido “*la proporción se mantiene*” pero comprende que no obtiene exactamente la cantidad esperada. Sin embargo no es claro a que se refiere con que cambia el número de bolas en la urna, posiblemente se está refiriendo a la muestra.

e) En su hoja de trabajo bosqueje un histograma de los resultados de la urna si se hicieran 6.000 repeticiones, sin necesidad de hacerlo en Fathom.

De manera correcta Humberto imagina el comportamiento de una muestra de tamaño 6000 y considera valores muy cercanos a 4000 extracciones azules mostrando buenas nociones de ley de los grandes números. De todos modos Humberto aún no tiene claro lo que sucede con la variabilidad cuando se tienen muestras pequeñas pero se espera que a medida que transcurren las sesiones se logre generar cambios en estas ideas.

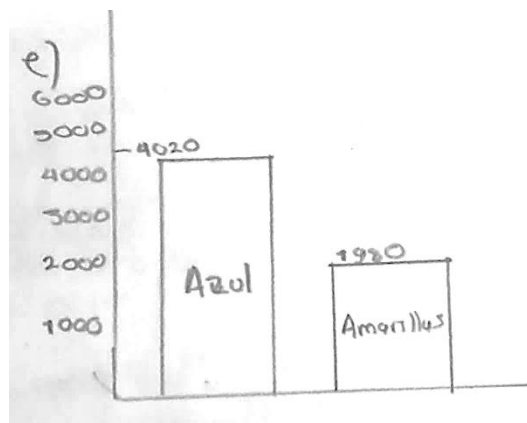


Ilustración 10. Proporciones de una muestra de tamaño 6000 según Humberto, después de trabajar con Fathom

1.5. Creando una medida

3. Seleccione el nuevo icono llamado “measures from simple of collection 1” y cree una tabla arrastrando el icono “Table” de la parte superior de la pantalla.

a) ¿Cómo interpreta los resultados registrados en esta nueva tabla?

“Interpreto los resultados como el número de bolas que salen del color azul (se hacen 60 extracciones con devolución de las cuales 41 son azules)”.

Humberto comprende correctamente lo arrojado por el programa en la tabla se espera que esto se convierta en un esquema de acción instrumentada y que el estudiante desarrolle esquemas de uso.

b) ¿Es suficiente con la cantidad de datos que tiene o cuantos le gustaría que tuviera la tabla?

“Si es suficiente, tal vez me gustaría que tuviera más intentos ya que solo tiene 5”.

Con respecto a esta pregunta, en la entrevista Humberto dice: “entre más extracciones, creo yo, puedo estar más seguro de que ese va a ser el promedio de bolas que van a salir” cuando habla del promedio está haciendo referencia al valor esperado de la media. Debido a esto se puede asegurar que Humberto posee algunas nociones de ley de los grandes números.

En resumen Humberto:

Humberto inicia la actividad mostrando que conoce el cálculo de la probabilidad clásica, pero no es claro si puede darle una interpretación al número conseguido. Aunque él enuncia correctamente como regla general, la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad, él no hace uso de ella para dar solución a las preguntas. En esta actividad Humberto sufre un choque con su idea de que las proporciones de la urna se ven reflejadas fielmente en la muestra sin importar su tamaño.

Al aumentar el tamaño de las muestras observa que en ellas el estadístico toma valores cada vez más cercanos a su valor esperado lo que hace que Humberto avance en sus nociones de influencia del tamaño muestral. También se evidencia un avance en sus nociones de variabilidad, debido a que comienza a utilizar intervalos para tratar de describirla.

5.2.2. Discusión de la actividad.

A continuación presentamos algunos episodios de la discusión de esta actividad donde los estudiantes muestran desarrollos de ideas o nociones que se consideran importantes para la comprensión del método de Intervalos de Confianza. Como se podrá notar, el profesor solo

interviene para hacer preguntas y guiar la discusión hasta que el momento en que las ideas no avanzan más.

1.5. Creando una medida

3. Seleccione el nuevo icono llamado “measures from simple of collection 1” y cree una tabla arrastrando el icono “Table” de la parte superior de la pantalla.

a) ¿Cómo interpreta los resultados registrados en esta nueva tabla?

Después de escuchar las respuestas de algunos compañeros, el grupo decidió quedarse con la respuesta de Angie: “Creo que son las posibilidades de extracciones de bolas azules en 5 intentos de 60 extracciones cada uno con devolución”; en este caso la palabra “intento”, es utilizada por los estudiantes para referirse a una muestra, y se aclara explícitamente que las extracciones se deben estar haciendo con devolución.

b) ¿Es suficiente con la cantidad de datos que tiene o cuantos le gustaría que tuviera la tabla?

El grupo estuvo de acuerdo con la respuesta de Jonathan: “A mi parecer necesitaría más cantidad de datos porque entre más muestras tenga me acerco más a un valor más estimado de la realidad, de lo que se espera salga, porque con menos muestras tiende a tener mayor margen de error y se pueden ver cosas muy extrañas ya que como son solo 5 muestras pueden salir dos parecidas pero si son más se vuelve más difícil que se parezcan”.

En esta respuesta se observan ideas de la ley de los grandes números, ya que los estudiantes comprenden que para poder establecer un comportamiento de las muestras

necesitan tomar una gran cantidad. Aparecen las primeras correctas de variabilidad muestral y de la influencia del tamaño muestral sobre esta variabilidad.

El profesor pregunta: “¿Encontraron muestras en las que aparezcan más extracciones amarillas que azules?”

Luz: “3 muestras ”

Humberto: “3 o 4”.

Profesor: “¿Por qué sucede esto?”

Daniel: “Porque tienen menos probabilidad de salir”.

Jonathan: “Por la cantidad de muestras...toma más muestras de pronto le salen repetidas”.

Profesor: “¿Es posible obtener 59 amarillas y 1 azul?”

Néstor: “Si es posible pero muy poco probable”.

Profesor: “¿Cuál es la muestra con más extracciones azules que encontraron?”

-Humberto: “51”

-Daniel: “52”

-Andrés: “53”

“¿Sera que pueden obtener 59?”

Daniel: “muy poco posible”.

Tal como sucedió en la prueba inicial, en esta ocasión encontramos estudiantes que consideraban que debido a que el muestreo se hacía con devolución era muy probable obtener muestras con resultados extremos, ejemplo 59 azules y 1 amarilla o viceversa. Ahora, se les dio la posibilidad de observar la simulación con muestras de tamaño 60; después de esto todos se adhieren a la respuesta de Daniel.

Al considerar algunos resultados como muy poco probables los estudiantes están desarrollando ideas sobre la variabilidad del muestreo y sobre la distribución muestral.

Logramos observar también evolución en los conceptos de la relación entre modelo y muestra, ya que Daniel dice que el hecho de que sea difícil obtener una muestra con 59 extracciones azules y una amarilla, es debido a la poca probabilidad, refiriéndose a la composición de la urna. Por otro lado Jonathan considera muy extraño que en una muestra aparezcan más amarillas que azules pero lo atribuye al hecho de hacer muchas repeticiones con devolución, lo cual es una idea que ya habíamos visto en la prueba inicial.

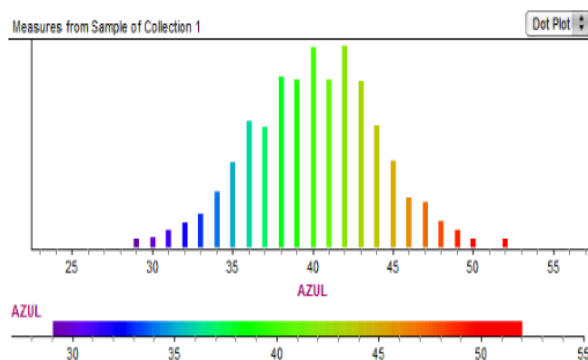


Ilustración 11. Histograma mostrado por Sergio en la discusión de la actividad 1.

Se procede a mostrar el gráfico hecho por Sergio a todo el grupo.

Profesor: ¿Qué cosas se pueden observar en la gráfica de Sergio?

Sergio: “Que la proporción de pelotas que tenemos es de 4 de cada 6 pelotas azules y en la gráfica nos sale que la mayoría de datos están entre 39 y 41 pelotas azules ya que estamos trabajando con 60, entonces donde hay más posibilidad de resultado en el experimento esta entre 39 y 41 que es también la proporción real que tenemos en la urna”.

Sergio ha notado que en la distribución muestral los resultados más frecuentes son aquellos que están cerca al valor esperado de la proporción, y aunque en el grafico se trabajó con frecuencias absolutas Sergio claramente está pensando en la proporción. Esta idea fue aceptada por el grupo, lo cual Néstor complementó de la siguiente manera:

Néstor: “Si por que tiene que ver con lo que yo pienso, en el anterior ejercicio movimos la muestra, cogimos una pequeña, luego de 60 y luego la aumentamos a 600 y a 1000, y de esta forma notamos que con la probabilidad nos daba en 66% de sacar la azul y que al aumentar la muestra la gráfica se nos estabilizaba y nos daba esa proporción, que al tener poquita muestra no, lo mismo hicimos con esto pero dejando la muestra quieta y aumentamos los intentos, 1000 intentos de 60, y notamos que las tendencias nos coinciden, siempre vamos a tener más azules que amarillas”.

Néstor hace una asociación de los dos caminos tomados en esta actividad, por decirlo de alguna manera, resalta el hecho de que en ambas ocasiones haya existido una tendencia que para él fue similar, aunque al final se le preguntó que si notaba algo adicional a que se iba a

tener más azules que amarillas, y respondió negativamente, pues al principio de su idea parece que iba hacia una comparación de las proporciones obtenidas en cada uno de los casos.

5.2.3. Conclusión de la actividad

En términos generales, con esta primera actividad los estudiantes han logrado avanzar en sus nociones del enfoque frecuencial de la probabilidad, ley de los grandes números y la variabilidad. Nuestros estudiantes han logrado superar esa idea de que no importa que se trate de una pequeña muestra, la proporción de extracciones de un color será exactamente la proporción de bolas que de dicho color hay en la urna, en otras palabras ellos creían que la proporción de la urna se manifestaba de manera exacta en cualquier muestra construida a partir de extracciones con reposición. De manera que han empezado a considerar la variabilidad en el muestreo sin abandonar la idea de que el comportamiento de la muestra y la composición de la urna guardan alguna relación.

Los estudiantes han podido observar la variabilidad de la distribución muestral de la proporción y han hecho un primer intento de limitarla estableciendo un intervalo, sin embargo aún no es clara la influencia del tamaño muestral sobre la proporción.

En estas primeras interacciones con la distribución muestral los estudiantes notaron coincidencias importantes, nos referimos al hecho de que sospechen que los valores más frecuentes de la distribución se asemejan a la proporción de la urna.

5.3. ACTIVIDAD 2

Esta actividad hace parte de las actividades de instrucción, donde los estudiantes se familiarizan con las funciones y herramientas del programa Fathom. Los esquemas de uso

pueden aparecer como un producto de la interacción social, el hecho de saber hacer trae ligado un conocimiento o discurso teórico que respalda la acción. Es así como esta actividad busca generar o afinar en el estudiante, algunos esquemas de uso que más adelante pueda organizar por sí mismo para dar solución a una situación donde se requiera el establecimiento de una estimación.

Básicamente, la actividad consiste en determinar la proporción de bolas que hay en una urna únicamente a partir de la toma de muestras. Para tal fin se modeló una urna en Fathom con 3 bolas blancas y 2 azules, la cual se mantiene oculta a los estudiantes durante toda la actividad. En un principio se proporcionan los resultados de una muestra aleatoria de 10 extracciones, como es aleatoria cada estudiante obtiene una muestra diferente. Seguido a esto se induce al estudiante a observar la distribución muestral de la proporción sin conocer la composición de la urna, con el propósito de que tome decisiones y establezca una estimación, poniendo en juego y relacionando sus propias ideas y nociones.

Una de las principales nociones en las que se espera generar y observar cambios o evoluciones es la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad de la distribución muestral, para ello se pretende encaminar al estudiante hacia el análisis de los comportamientos de la distribución muestral de la proporción a medida que se cambia el tamaño de la muestra. La actividad con su respectivo análisis por estudiante se muestra a continuación.

Actividad 2.

¿Cuántas bolas de cada color hay en la urna?

2.1. El contenido de la Urna 1

Conteste las siguientes preguntas en su hoja de trabajo

1. Se sabe que una urna contiene bolas de 2 colores diferentes, se le desafía a determinar la cantidad de bolas de cada color, para ello solo se le permite hacer extracciones de una sola bola, observar su color y devolverla a la urna. Puede hacer esto las veces que desee.

a) ¿Cree que sea posible establecer de esta forma la cantidad de bolas de cada color que hay en la urna? Justifique detalladamente su respuesta.

b) Si usted repitiera 10 veces el mismo proceso (sacar una balota, mirar su color y devolverla), ¿podría determinar la cantidad de bolas de cada color? Justifique su respuesta.

2. Abra el archivo **Urna 1**. Allí le aparece una pequeña tabla verde llamada “summary” la cual contiene la cantidad de veces que salió cada color en 10 extracciones con devolución. Registre en su hoja de trabajo la cantidad de veces que apareció cada color.

c) ¿Considera que hay la misma cantidad de bolas de cada color? Justifique su respuesta.

2.2. Discuta sus respuestas y conclusiones con sus compañeros, al tiempo que escribe detalladamente en su hoja de trabajo los cambios que la discusión produjo en sus ideas.

2.3. Interactuando con la urna.

1. En el archivo **Urna 1** presione **Ctrl+y** varias veces.

a) ¿Qué es lo que está sucediendo al presionar **Crtl+y**? ¿Cuántas bolas de cada color estima que hay en la urna? **Justifique su respuesta.**



Figura 1

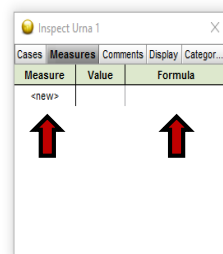


Figura2

1. Para simular la extracción de varias muestras del mismo tamaño (10) y conocer la cantidad de bolas azules en cada una, dé doble clic sobre el icono en forma de caja que aparece en la parte blanca de su pantalla llamada “Urna 1” (figura 1);, aparecerá la ventana “Inspect Urna 1” (Figura 2);, en la columna “Measure” donde dice <new> escriba **azul** y dé doble clic en la columna “**Formula**”, luego dé doble clic en “Functions” → “Estatísticas” → “One Attribute” → “Count”; escriba dentro del paréntesis, bola=“**Azul**” y de clic en “OK” (figura 3).

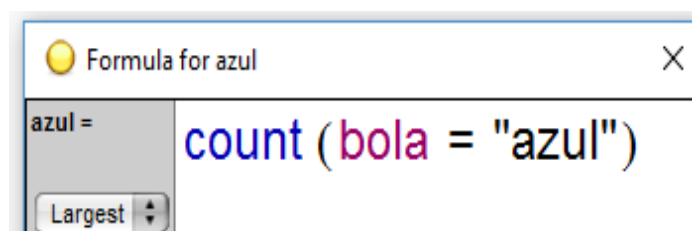


Figura 3

2. Cierre el inspector (Inspect Urna1), dé clic derecho en el icono de la figura 1 y elija la opción “collect measures” aparecerá un nuevo icono en su pantalla llamado “Measures from Urna1”(Figura 5).

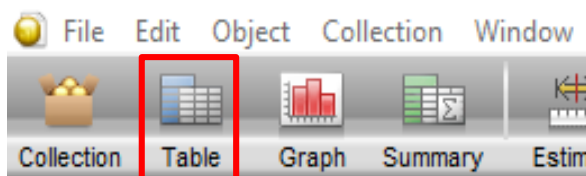


Figura 4



Figura 5

3. Dé clic **sostenido** en el icono Table ubicado en la parte superior de la pantalla (Figura 4) y arrástrelo hacia la hoja en blanco, luego dé doble clic en sobre la caja de icono “Measures form Urna 1” (Figura 5) y aparecerá una pequeña ventana (Figura 6) en la cual debe seleccionar solamente la opción “Replace existing cases”, escribir en el pequeño cuadro blanco el numero 1000 como aparece en la figura 6, dar clic en el botón “Collect More Measeres” y cerrar la ventana.

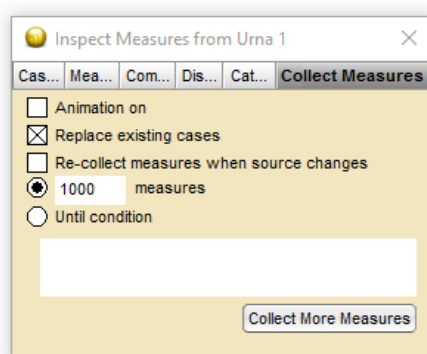


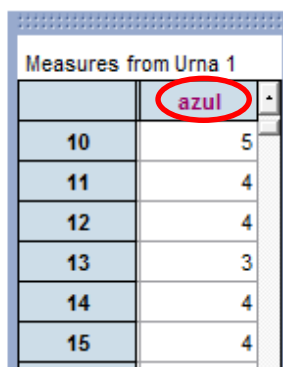
Figura 6

b) ¿Cómo interpreta los numeros que aparecen en la nueva tabla (Measures from Urna 1)?

4. Dé clic sostenido en el icono “Graph” ubicado en la parte superior de la pantalla (Figura 4) y construya la gráfica con la “Measures from Urna 1” (Figura 8).

c) ¿Cómo interpreta la gráfica en pantalla? ¿Cuántas balotas de cada color hay en la Urna?

2.4. Discuta sus respuestas y conclusiones con sus compañeros y el profesor, al tiempo que escribe detalladamente en su hoja de trabajo los cambios que la discusión produjo en sus ideas.



	azul
10	5
11	4
12	4
13	3
14	4
15	4

Figura 8

2.5. Aumentando el tamaño muestral

1. hasta el momento se ha trabajado con muestras de tamaño 10, pero se puede hacer la cantidad de extracciones que se desee.

a) ¿Qué cree que puede ocurrir si se aumenta el tamaño de la muestra a 50 extracciones y se repite el proceso anterior? ¿Y si se aumenta a 100? Justifique su respuesta.

2. Para aumentar el tamaño de la muestra seleccione el icono en forma de caja llamado Urna 1, luego baje una tabla del icono ubicado en la parte superior de la pantalla.

3. Dé clic derecho sobre la nueva tabla, luego de clic en “New Cases” y escriba en el recuadro que apareció en pantalla 40 para obtener un total de 50 extracciones.

4. Repita el procedimiento de la sección 1.3 con muestras de tamaño 50 y luego con tamaño 100 y responda:

b) ¿Observa alguna diferencia al haber aumentado el tamaño de la muestra?

c) ¿Cuántas bolas de cada color hay en la Urna?

5.3.1. Análisis de la actividad

Néstor:

2.1. El contenido de la Urna 1

1. Se sabe que una urna contiene bolas de 2 colores diferentes, se le desafía a determinar la cantidad de bolas de cada color, para ello solo se le permite hacer

extracciones de una sola bola, observar su color y devolverla a la urna, puede hacer esto las veces que desee.

a) ¿Cree que sea posible establecer de esta forma la cantidad de bolas de cada color que hay en la urna? Justifique detalladamente su respuesta.

“Se podría llegar a un número aproximado del número de bolas existentes ya que con lo aprendido en las clases pasadas al hacer suficientes (o muchas) extracciones con su debida devolución podremos notar un porcentaje el cual hay o existe dentro de la urna. Es decir si nuestra aproximación da un 50% (solo como ejemplo) sabría que pueden haber la misma cantidad o cercana de color de bolas y de acuerdo con lo que veamos y sintamos al extraer y ver la urna podría dar una estimación del número de bolas de cada color”.

Podemos observar que la técnica que Néstor utilizaría para solucionar esta tarea va encaminada a la realización de una gran cantidad de extracciones, es decir que Néstor iría haciendo repeticiones al tiempo que observa el comportamiento de la frecuencia relativa, con el objetivo de observar su tendencia, esta forma de solucionar la situación está respaldada por su conocimiento práctico de la ley de los grandes números realizado en la primera actividad.

Néstor es consciente de la relación existente entre modelo y práctica, es decir, entre la composición de la urna y los resultados de las extracciones. Ahora bien, su experiencia era en sentido contrario, el modelo determinando la distribución de los resultados, ahora asume que también se debe tener el resultado contrario: los resultados dan información sobre el modelo. Néstor Al decir “sintamos al extraer” Néstor está pensando en el problema práctico

de determinar el número de bolas de cada color en la urna: asume que si tuviera ante sí la bolsa no solamente haría un análisis de los resultados de las extracciones, sino que aprovecharía la extracción para tener una información táctil de la composición de la urna que le permitiera estimar el número total de bolas.

b) Si usted repitiera 10 veces el mismo proceso (sacar una balota, mirar su color y devolverla), ¿podría determinar la cantidad de bolas de cada color? Justifique su respuesta.

“Me podría dar una idea pero muy pequeña y bastante desconfiable ya que no tendría el comportamiento de porcentajes de la urna y no tendría idea de qué podría sacar. Como por ejemplo pueda que saque todas o casi todas de un mismo color pero puede haber un 50% y 50% (en caso de que fueran de la misma cantidad) de extracción y al sacar un solo color solo sería una posible opción de las muchas que hay y sacar algo incorrecto a la tendencia que la urna me presenta”.

Hay una evolución con respecto a las ideas de variabilidad y la relación modelo-muestra, Néstor ya no considera que la muestra se comporte fielmente al modelo sin importar su tamaño, como lo había manifestado en la anterior actividad, es consciente de la gran variabilidad que se presenta en pocas extracciones y que hace factible obtener resultados en las muestras que no coincidan con la proporción real de la urna; por esto y por lo respondido en el anterior punto se puede decir que Néstor empieza a mostrar también una evolución en sus nociones de la influencia del tamaño muestral.

2. Abra el archivo Urna 1. Allí le aparece una pequeña tabla verde llamada “summary” la cual contiene la cantidad de veces que salió cada color en 10

extracciones con devolución. Registre en su hoja de trabajo la cantidad de veces que apareció cada color.

c) ¿Considera que hay la misma cantidad de bolas de cada color en la urna? Justifique su respuesta.

“De acuerdo a lo obtenido (4 azules y 6 blancas) y al poco número de intentos no podría determinar si hay la misma cantidad o no, tendría que realizar muchas más repeticiones ya que como lo visto en anteriores clases hasta empezar las 100 veces podríamos empezar a notar como es la tendencia así que con 300 o más sabríamos más o menos si hay o no igual número de bolas o saber cuántos más o menos hay de cada color”.

Una vez más Néstor muestra que tiene clara la variabilidad en muestras pequeñas al asegurar que con tan pocas extracciones no podría determinar si existe la misma cantidad de bolas; además asegura que para notar una tendencia necesita una muestra mayor a 100.

Néstor1.3. Interactuando con la urna.

1. En el archivo Urna 1 presione Ctrl+y varias veces.

a) ¿Qué es lo que está sucediendo al presionar Ctrl+y? ¿Cuántas bolas de cada color estima que hay en la urna? Justifique su respuesta.

“Me itera la urna de 10 extracciones y al hacer muchas iteraciones noto que los valores siguen siendo muy variables e inexactos. Por tanto para obtener un resultado cercano al correcto en proporción a bolas de cada color no debo hacer más

repeticiones solamente, noto que es necesario aumentar el grupo de extracción ya que con 10 me va a arrojar valores de todo tipo al ser un grupo pequeño”.

Néstor comprende que al presionar Ctrl+y el programa simula la toma de una nueva muestra del mismo tamaño, de tal forma que al repetir el muestreo en varias ocasiones no logra ver la tendencia que él había mencionado en las anteriores preguntas, sin embargo, al hacer esto comprueba su idea de la gran variabilidad en las muestras de este tamaño.

b) ¿Cómo interpreta los números que aparecen en la nueva tabla (Measures from Urna 1)? Justifique su respuesta.

“El programa me ha hecho 1000 veces los resultados del grupo de 10 extracciones mostrándome el resultado de bolas azules en cada uno de ellos”.

Néstor comprende el proceso que está simulando el programa de manera correcta, sin embargo aún no utiliza la palabra muestra como parte de su explicación a pesar que ya ha sido utilizada en anteriores actividades.

5. Dé clic sostenido en el icono “Graph” ubicado en la parte superior de la pantalla (figura 4) y construya la gráfica con la “Measures from Urna 1” (figura 8).

c) ¿Cómo interpreta la gráfica en pantalla? ¿Cuántas balotas de cada color hay en la Urna?

“La gráfica me arroja la cantidad de veces en las 1000 repeticiones del grupo de 10 extracciones que me arroja el color azul. Para mi caso cercana a 250 veces de las 1000 hubo 4 bolas azules y 6 blancas del grupo de 10 extracciones.

Sigo pensando que por ser un grupo tan pequeño no podría decir si la proporción es la real o sea si sean un 40% azules y un 60% blancas, no puedo decir cuantas de cada color hay ya que como pueden haber 4 azules y 6 blancas, pueden haber 40 azules y 60 blancas y tendría la misma proporción y ni idea del número exacto de bolas ni cual de cada color.

Noto que al hacer otro grupo de 1000 repeticiones de 10 extracciones este me arroja que 3 azules y 7 blancas es el valor más alto y cercano también a las 250 veces de las mil, por tanto si hubo esta posibilidad de salir este dato a un número tan alto de repeticiones no podría confiar en este valor, ya que para confiar en un dato la tendencia siempre debe ser la misma y no variarme”.

Néstor se fija en los valores con mayor frecuencia absoluta del histograma el cual ha sido construido de la manera que él ha explicado, aunque es consciente que convendría más trabajar con proporciones sigue trabajando en su histograma con frecuencias absolutas y hace sus cálculos de proporciones por su cuenta.

De esta manera adopta 40% para las bolas azules ya que en su grafica es el valor con mayor frecuencia, pero como ya no se fía del todo de los valores puntuales cuando tiene muestras tan pequeñas producto de sus nociones de variabilidad, decide repetir la simulación de las 1000 muestras observando ahora que la mayor frecuencia se presenta para 3 azules (30%) resultado que lo cohibe de dar una respuesta y no surge la idea de un intervalo, o por lo menos no de forma explícita. El hecho de que Néstor decidiera por su cuenta repetir todo el proceso es evidencia de un desarrollo de un esquema de uso que está soportado o es

producto de sus nociones de variabilidad y relación modelo-muestra; sin embargo parece que Néstor está pensando en obtener un valor puntual para su estimación.

2.5. Aumentando el tamaño muestral

1. Hasta el momento se ha trabajado con muestras de tamaño 10, pero se puede hacer la cantidad de extracciones que se desee.

a) ¿Qué cree que puede ocurrir si se aumenta el tamaño de la muestra a 50 extracciones y se repite el proceso anterior? ¿Y si se aumenta a 100? Justifique su respuesta.

“En lo anterior he tenido la idea de que la muestra al ser tan pequeña los valores son muy variables ya que entre más pequeña la muestra y de acuerdo a la probabilidad de la urna hay cierta cantidad de distintas extracciones posibles, es decir la relación entre azules y blancas en cada extracción puede variar y haber un x número de distintas posibilidades, por tanto al aumentar la muestra van a haber muchas más extracciones distintas, pero esto unido a la probabilidad existente en la urna, al hacer más extracciones voy a sacar mayor vez el número cercano a esta probabilidad, por tanto el error va a ser cada vez más pequeño al aumentar el tamaño de la muestra”.

Néstor manifiesta buenas nociones sobre la influencia del tamaño de la muestra en la variabilidad de la proporción muestral: afirma que, no obstante a que el número de resultados posibles crece, aumentar el tamaño muestral se hace más pequeño el error, justifica su afirmación haciendo una asociación con su noción de enfoque frecuencial, su idea es que cuando tiene muestras más grandes va obtener valores más cercanos a la verdadera

proporción. Néstor, tiene una noción bastante clara del espacio muestral del experimento aleatorio de la realización de cierta cantidad de extracciones.

4. Repita el procedimiento de la sección 1.3 con muestras de tamaño 50 y luego con tamaño 100 y responda:

b) ¿Observa alguna diferencia al haber aumentado el tamaño de la muestra?

“Al aumentar la muestra a 50 como lo dicho en lo anterior se aumenta la posibilidad de más resultados diferentes, por esto se ve que en 1000 intentos el valor pico en que se repite es aproximadamente 120-1000 y en lo hecho anterior era alrededor de las 300-1000 pero los resultados en los picos es bastante diferente, a veces son 20, o 22, o 23 pero siempre en el rango entre 18-23, por tanto al aumentar la muestra voy a acercarme más a la probabilidad que contiene la urna y se reducirá el margen de error que al comenzar con 10 es más grande que con 50 y que con 50 es más grande que con 100”.

Néstor ha adoptado lo que podía ser su propia técnica para hacer una estimación, su idea es repetir el proceso de tomar 1000 muestras de tamaño 50 en varias ocasiones y al igual que en el punto anterior observar si hay una tendencia, para esto se fija para cada repetición sobre qué valor se ubica la mayor frecuencia absoluta, así establece un rango para los valores con la característica mencionada entre 18-23, aunque no lo hace explícito aquí, en las preguntas anteriores siempre ha estado pensando en proporciones, para este caso tendría (0,36-0,46). La estimación con la técnica de Néstor es bastante cercana a un intervalo del 68% de confianza centrado en 0,41, el cual vendría siendo (0,35-0,47).

c) ¿Cuántas bolas de cada color hay en la Urna?

“No puedo decir con lo que tengo cuantas bolas de cada color hay ya que puedo tener 3 azul-10 amarillas como 30 azul y 100 amarillas y la probabilidad en ambos casos es la misma así que no puedo decir cuántas bolas hay ni que color.

Puedo concluir que con lo hecho anteriormente puedo sacar la probabilidad de sacar un color del otro mas no la cantidad de bolas existentes por tanto para una muestra de 100 los valores picos están cercanos al 30 por arriba y por abajo es cercano a un 30% y diría que entonces la urna tiene entre un 37% y 43% de obtener azul y un 63% y 57% de obtener blanca”.

En la primera parte de su respuesta, Néstor se da cuenta que el problema tiene infinitas soluciones: para una misma proporción de bolas azules existen infinitas composiciones posibles. Acto seguido procede a dar una estimación para esa proporción que, en esta ocasión, es un intervalo de valores.

Las afirmaciones donde Néstor hace referencia a valores cercanos al 30% están fundamentadas en los gráficos de las primeras simulaciones cuando tenía un tamaño muestral de 10, allí encontró razones, basado en sus propios métodos, para pensar que la proporción de la urna es un valor cercano al 30%. Por otra parte observando los videos, cuando Néstor trabajó con muestras de tamaño 100, él repitió la simulación de las 1000 muestras con su respectivo histograma más de 5 veces, obteniendo valores entre 39 y 42 ya que eran los resultados con mayor frecuencia. Puede ser que lo observado al principio con cercanía al 30% lo haya llevado a considerar más variabilidad y a estimar por encima para ganar más confianza quedándose con el intervalo (0,37-0,43). Se observa que Néstor ya no está tan

preocupado por responder a la cuestión con un valor puntual si no que considera más conveniente establecer un intervalo.

En resumen Néstor:

Ha ganado confianza con respecto a Fathom y empieza a ver potencialidades para utilizarlo como una herramienta que le ayude a resolver problemas de estimación. Para lograrlo, ha construido sus primeros esquemas de uso ya que por la evidencia fílmica y escrita logramos ver que la técnica de Néstor consistió en simular la toma de 1000 muestras del mismo tamaño teniendo en cuenta la cantidad de veces que se extrae el color azul en cada una, construir el histograma con los resultados y observar el valor con la mayor frecuencia, luego repetía el proceso anterior y observaba que el valor del histograma con la mayor frecuencia no era el mismo que el anterior pero sí muy cercano, entonces repitió todo el proceso varias veces y fue observando los valores con las mayores frecuencias, basado en el menor y en el mayor valor observado con la técnica descrita estableció un intervalo ligeramente más ancho. Esta forma de proceder es propia de Néstor, es la técnica que ha decidido adoptar.

En esta actividad Néstor evidenció una evolución en sus nociones de variabilidad muestral sobre todo cuando se trata de pequeñas muestras, ya no considera que la composición de la urna se refleje fielmente en una muestra de tamaño 10. Manifiesta que en una muestra se obtiene una proporción más cercana a la verdadera proporción a medida que se hace más grande, lo cual es prueba de buenas nociones de enfoque frecuencial y del efecto del tamaño sobre la variabilidad muestral

Al considerar que haciendo extracciones de la urna se puede hacer una estimación cercana al verdadero valor de la proporción está manifestando buenas nociones de la relación entre modelo y muestra. Evidencia avances en su noción de la variabilidad, ahora no se muestra tranquilo con establecer estimaciones puntuales de la proporción sino que considera más conveniente hablar de un intervalo construido a partir de lo observado en el programa.

Luz:

2.1. El contenido de la Urna 1

1. Se sabe que una urna contiene bolas de 2 colores diferentes, se le desafía a determinar la cantidad de bolas de cada color, para ello solo se le permite hacer extracciones de una sola bola, observar su color y devolverla a la urna, puede hacer esto las veces que desee.

a) ¿Cree que sea posible establecer de esta forma la cantidad de bolas de cada color que hay en la urna? Justifique detalladamente su respuesta.

“Considero que es posible si hace una cantidad superior a las 100 muestras con el fin de sacar una conclusión más precisa y certera, es decir, entre más extracciones va a ser posible determinar un promedio de aparición y de esta forma poder establecer una conclusión basados en esto”.

En su respuesta escrita no es muy clara la técnica que tiene en mente Luz para hacer su estimación, sin embargo en la entrevista ella aclara que lo que haría es tomar varias muestras del mismo tamaño, siempre y cuando estas sean de tamaño mayor a 100, para cada muestra

obtiene la frecuencia absoluta, calcula el promedio de las frecuencias absolutas encontradas y tiene un valor aproximado para estimar la proporción de la urna.

Se observa mayor claridad en su noción de influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad de la proporción ya que en la anterior actividad en algunas preguntas mostró creencias de aumento de la variabilidad y en otras de disminución. A su vez Luz tiene nociones de relación entre el modelo y la distribución muestral ya que ve en el promedio de los resultados de la muestras una buena aproximación a la verdadera proporción de la urna.

Con su solución Luz está buscando una estimación por medio de un valor puntual, lo cual es contrario a lo que se había observado en su prueba inicial donde mostró nociones de estimación por intervalos cuando se trataba de situaciones con variable discreta.

b) Si usted repitiera 10 veces el mismo proceso (sacar una balota, mirar su color y devolverla), ¿podría determinar la cantidad de bolas de cada color? Justifique su respuesta.

“No es posible determinar la cantidad de bolas de cada color según este procedimiento puesto que podría darnos un resultado que varía mucho en cuanto a cada muestra, con esto quiero decir que existe la posibilidad de hallar más bolas de un color que de otro y no por esto deducir que estas son las que se encuentran en mayor proporción”.

Luz muestra claridad en su noción de la gran variabilidad presente en pequeñas muestras y cierta evolución en su idea de la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad.

2. Abra el archivo Urna 1. Allí le aparece una pequeña tabla verde llamada “summary” la cual contiene la cantidad de veces que salió cada color en 10 extracciones con devolución. Registre en su hoja de trabajo la cantidad de veces que apareció cada color.

c) ¿Considera que hay la misma cantidad de bolas de cada color? Justifique su respuesta.

“Para mí con esta información (4 azules y 6 blancas) no es posible determinar una cantidad promedio de cada color, ya que así como salió este resultado pudo haber salido 2-8, 6-4, 7-3 de azules y blancas respectivamente y no por esto nos da una posibilidad clara de sus proporciones”.

Una vez más Luz ratifica que ha ganado claridad en sus ideas de variabilidad para pequeñas muestras e incluso se empiezan a evidenciar buenas nociones sobre la relación modelo-muestra.

2.3. Interactuando con la urna.

1. En el archivo Urna 1 presione Ctrl+y varias veces.

a) ¿Qué es lo que está sucediendo al presionar Ctrl+y? ¿Cuántas bolas de cada color estima que hay en la urna? Justifique su respuesta.

“Al presionar Ctrl+y (otra muestra de tamaño 10) varias veces pude observar una variación en la proporción de la urna, en la que es posible deducir que se encuentra en mayor proporción las bolas blancas ya que conforme avanza cada muestra sus proporciones son diferentes, para dar una idea más clara de esto, de las muestras analicé lo siguiente:

Por 20 muestras al azar pude encontrar los siguientes valores: veces que aparecen mayor cantidad, Blancas=12, Azules=2, en igual=6.

Conforme estos datos puedo suponer que no se encuentran en la misma cantidad pero que de igual forma no son cantidades muy lejanas entre ellas, considero que si hay una mayor cantidad pero esta cantidad no es muy lejana ”.

Contrario a la idea que había planteado Luz en sus primeras respuestas no tuvo en cuenta el promedio de las frecuencias absolutas de la muestra como una posible aproximación al valor de la proporción, decidió enfocarse en contar la cantidad de muestras en las que aparecían más extracciones de cada color, esto se puede ver como un intento de hacerse una idea de la distribución muestral. Luz decide que en la urna deben haber más bolas blancas (lo cual es correcto) observando solo 20 muestras. Allí aparecen nociones de relación entre muestra y modelo pero vuelven a haber dudas sobre la claridad de Luz en las nociones de ley de los grandes números.

b) ¿Cómo interpreta los números que aparecen en la nueva tabla (Measures from Urna 1)? Justifique su respuesta.

“Los datos de la nueva tabla pertenecen a 1000 muestras de tamaño 10 en las que podemos ver cuántas veces son extraídas las bolas azules por cada muestra, esta información si es similar a lo que había planteado anteriormente puesto que entre mi idea base se encontraba que las cantidades eran cercanas entre sí”.

Luz está comprendiendo correctamente lo que está simulando el programa, en la entrevista hace notar que incluso se tomó la tarea de observar la tabla y asegura que encontró pocas

muestras con resultados muy diferentes (extremos) como 2 azules y 8 blancas por eso dice que está sucediendo lo que había destacado ella antes, las proporciones son valores cercanos.

5. Dé clic sostenido en el icono “Graph” ubicado en la parte superior de la pantalla (figura 4) y construya la gráfica con la “Measures from Urna 1” (figura 8).

c) ¿Cómo interpreta la gráfica en pantalla? ¿Cuántas balotas de cada color hay en la Urna?

“Para mí en la urna es posible encontrar 6 bolas blancas y 4 azules puesto que el pico más alto en el que se ha encontrado las bolas azules es 4, es decir que el 6 sobrante corresponde a las blancas. Esta información sería en caso de ser 10 balotas, pero sin importar su cantidad existente sus porcentajes van a ser 60-40”.

Luz se queda con una estimación puntual 40% azules y 60% blancas debido a que en el histograma construido con las 1000 muestras de tamaño 10, la mayor frecuencia absoluta ha sido 4 extracciones azules, lo cual para este caso es una respuesta correcta, pero con una urna de una composición diferente, si Luz sigue esta misma técnica, lo más probables es que se va a equivocar. Luz ha dejado por un momento de lado su noción de la variabilidad y por ende sus nociones de intervalos.

2.5. Aumentando el tamaño muestral

1. Hasta el momento se ha trabajado con muestras de tamaño 10, pero se puede hacer la cantidad de extracciones que se desee.

a) ¿Qué cree que puede ocurrir si se aumenta el tamaño de la muestra a 50 extracciones y se repite el proceso anterior? ¿Y si se aumenta a 100? Justifique su respuesta.

“Si se aumenta el tamaño muestral podríamos encontrar una exactitud mayor, es decir se podría encontrar mayor cercanía al dato exacto de proporción.

Entre más aumenten mayor cercanía existirá ya que una muestra es mucho más exacta conforme más tamaño tenga.

Su respuesta seguirá siendo la misma que planteé inicialmente, es decir estará en una proporción aproximada de 60%-40%”.

Luz manifiesta nociones de influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad, al parecer atribuyéndola a su noción de enfoque frecuencial, “*una muestra es mucho más exacta conforme más tamaño tenga*”, su idea puede estar relacionada con lo que manifestó en la prueba inicial, entre más grande la muestra se parecerá más a la población, pero como ha estado considerando estimaciones puntuales no tiene manera de plasmar esas ideas en su respuesta.

4. Repita el procedimiento de la sección 1.3 con muestras de tamaño 50 y luego con tamaño 100 y responda:

b) ¿Observa alguna diferencia al haber aumentado el tamaño de la muestra?

“Considero que es lo mismo que había planteado anteriormente, se encuentra la información en la proporciones que yo le había asignado, es decir 40-60 apareciendo siempre en mayor proporción las blancas”.

Luz sigue el mismo proceso descrito anteriormente pero ahora con muestras de tamaño 50, en el video de su pantalla se observa que en este caso cuando obtiene el histograma de las 1000 muestras, el valor con mayor frecuencia es 19 extracciones azules lo que se traduce en una proporción de 0,38. Aunque Luz parece afirmar que con muestras de mayor tamaño los resultados serán más fiables, no es consecuente con esto ni con la forma que había planteado para resolverlo; se sigue quedando con una estimación de 0,4.

c) ¿Cuántas bolas de cada color hay en la Urna?

“No es posible determinar la cantidad de bolas en la urna, si se podría hablar de que siendo el 100% el total de las bolas en la urna, 60% de estas serán blancas y 40% azules”.

Claramente Luz comprende que si se quiere estimar la cantidad de bolas el problema tendría infinitas soluciones, sin embargo lo que si puede determinar es la proporción y como lo ha mostrado en las anteriores preguntas ha tomado la decisión de quedarse con el 40% de bolas azules.

En resumen Luz:

En principio piensa en estimar la proporción de la urna por medio de un valor puntual que resultaría de sacar el promedio de la cantidad de extracciones de un color en muestras del mismo tamaño. Al ir al programa aplicó su idea, ya que en la primera parte de la actividad pudo haberlo hecho.

La técnica de Luz para establecer su estimación fue tomar el valor con mayor frecuencia en el histograma construido con los resultados de extracciones azules de 1000 muestras del

mismo tamaño, repitió el procedimiento solo una vez para muestras de tamaño 10 y una para tamaño 50. En el primer caso obtuvo la mayor frecuencia para el valor 0,4 y en el segundo para el valor 0,38. Aunque observa esta variabilidad decide quedarse con una estimación puntual 0,4.

Evidencia una mayor claridad en sus nociones de gran variabilidad muestral cuando se tienen muestras pequeñas, a su vez parece tener algunas nociones de la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad de la proporción. Contrario a lo mostrado en la prueba inicial, donde Luz manifestaba nociones de estimación por intervalos en situaciones que involucran variables continuas, constantemente se inclinó por establecer estimaciones puntuales.

Sergio:

2.1. El contenido de la Urna 1

1. Se sabe que una urna contiene bolas de 2 colores diferentes, se le desafía a determinar la cantidad de bolas de cada color, para ello solo se le permite hacer extracciones de una sola bola, observar su color y devolverla a la urna, puede hacer esto las veces que desee.

a) ¿Cree que sea posible establecer de esta forma la cantidad de bolas de cada color que hay en la urna? Justifique detalladamente su respuesta.

“Creo que no es posible determinar la cantidad de pelotas pero si podríamos determinar las proporciones que hay en la urna de cada color, porque cuando miramos la proporción mirando por ejemplo 2 esferas azules de 6 es la misma que si decimos que hay 4 en una muestra de 12. Sabemos que podemos encontrar la proporción pero

para encontrar una proporción exacta es necesario hacer muchas repeticiones porque seguiríamos manteniendo un margen de error alto con pocas repeticiones”.

Sergio comprende que la situación admite una cantidad infinita de soluciones por esto asegura que no puede determinar la cantidad de bolas de cada color pero sí la proporción. La técnica que utilizaría Sergio es hacer una gran cantidad de extracciones y observar la proporción de extracciones de cada color. De esta manera Sergio manifiesta buenas nociones de enfoque frecuencial y por supuesto posee buenas nociones sobre la gran variabilidad al asegurar “es necesario hacer muchas repeticiones porque seguiríamos manteniendo un margen de error alto con pocas repeticiones”. Da la impresión que Sergio está pensando en una estimación puntual.

b) Si usted repitiera 10 veces el mismo proceso (sacar una balota, mirar su color y devolverla), ¿podría determinar la cantidad de bolas de cada color? Justifique su respuesta.

“No se puede conocer la cantidad de pelotas pero con una muestra tan pequeña de 10 extracciones no podemos conocer la proporción exacta de pelotas, es necesario hacer demasiadas repeticiones del experimento para poder dar un valor de proporción exacto y que sea realmente valido”.

Sergio pone en juego sus nociones de ley de los grandes números al afirmar que necesita una gran cantidad de repeticiones y una vez más ratifica que está en busca de una estimación puntual.

2. Abra el archivo Urna 1. Allí le aparece una pequeña tabla verde llamada “summary” la cual contiene la cantidad de veces que salió cada color en 10 extracciones con devolución. Registre en su hoja de trabajo la cantidad de veces que apareció cada color.

c) ¿Considera que hay la misma cantidad de bolas de cada color? Justifique su respuesta.

“La urna que me salió a mí me salieron 4 azules y 6 blancas, yo consideraría que es posible que la cantidad de pelotas fuera igual porque el resultado es cercano a la proporción que es $5/10$, es bastante cercana pero como la muestra es muy pequeña no afirmaré del todo eso, y ya en el momento en el que tuviera muchas más repeticiones del mismo experimento podría realizar una afirmación más exacta por que el margen de error al ser tan poquita la muestra es demasiado alto”.

Sergio una vez más ratifica buenas nociones de la gran variabilidad presente cuando se trabaja con pequeñas muestras, evidencia cierta noción de la relación entre modelo-muestra y nociones de ley de los grandes números al considerar que con más repeticiones puede obtener una mejor estimación.

2.3. Interactuando con la urna.

1. En el archivo Urna 1 presione Ctrl+y varias veces.

a) ¿Qué es lo que está sucediendo al presionar Ctrl+y? ¿Cuántas bolas de cada color estima que hay en la urna? Justifique su respuesta.

Lo que sucede es que nos van dando posibles resultados para la muestra que tenemos en la urna, es como si se hiciera otro experimento (extracción con

devolución), 10 extracciones con devolución, cada uno de los resultados que van dando son muestras de 10 y yo creería que hay 6 blancas y 4 azules porque son los datos que más se repiten, no sabría cuál es la cantidad pero estoy trabajando más que todo con la proporción.

Sergio interpreta correctamente el proceso que está simulando el programa, en video queda registrado que Sergio utilizó el Ctrl+y aproximadamente unas 55 veces obteniendo 4 extracciones azules aproximadamente en 15 muestras; al observar esto Sergio asegura que ha sido el resultado que más ha aparecido y que por lo tanto debe ser la proporción que hay en la urna, evidenciando que posee nociones de la relación entre el comportamiento de las muestras y la composición de la urna. Nuevamente Sergio se siente conforme con su estimación puntual.

b) ¿Cómo interpreta los números que aparecen en la nueva tabla (Measures from Urna 1)? Justifique su respuesta.

“Expresa la cantidad de pelotas azules que hay luego de que se hacen mil muestras de extracción con devolución, es muy probable que la cantidad de pelotas azules esté entre 3 y 5 por que es donde hay los más grandes picos en la gráfica, el mayor pico esta en 4 y es muy poco probable que esté entre 0 y 2, y entre 6 y 8”.

Observando la gráfica en el video de Sergio (Ilustración 10) efectivamente los valores con mayor frecuencia en el histograma son 3, 4 y 5 ya que la medida con la que se simuló la toma de 1000 muestras del mismo tamaño tenía en cuenta la cantidad de extracciones azules, vístalos rectángulos de los valores mencionados tienen alturas que a simple vista son muy

similares, por esto Sergio ya no está usando una estimación puntual sino que parece estar considerando un intervalo.

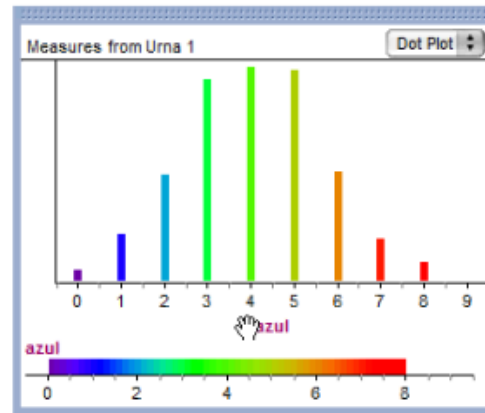


Ilustración 12. 1000 muestras de tamaño 10, gráfica tomada de la pantalla del computador de Sergio. Actividad 2.3.b.

5. Dé clic sostenido en el icono “Graph” ubicado en la parte superior de la pantalla (figura 4) y construya la gráfica con la “Measures from Urna 1” (figura 8).

c) ¿Cómo interpreta la gráfica en pantalla? ¿Cuántas balotas de cada color hay en la Urna?

“Aumenté la muestra de 1000 a 20000 y yo diría que la proporción es más o menos aproximadamente 0,4 por que es donde está el más grande pico de entre todos los datos”.

Sergio decide tomar una cantidad mayor de muestras para observar el comportamiento del histograma, primero aumenta la cantidad a 10000 muestras y observa en el histograma que la mayor frecuencia se ubica en 0,4; luego aumenta la cantidad a 20000 muestras y obtiene

nuevamente que la mayor frecuencia es 0,4. Todo esto concuerda con las anteriores ideas de Sergio por lo tanto se vuelve a inclinar por esta proporción sin dejar de lado sus nociones de variabilidad al resaltar que es más o menos ese valor. De esta manera Sergio tiene una idea clara entre la relación que existe entre la distribución muestral y el modelo.

2.5. Aumentando el tamaño muestral

1. hasta el momento se ha trabajado con muestras de tamaño 10, pero se puede hacer la cantidad de extracciones que se desee.

a) ¿Qué cree que puede ocurrir si se aumenta el tamaño de la muestra a 50 extracciones y se repite el proceso anterior? ¿Y si se aumenta a 100? Justifique su respuesta.

“Se supone que uno al aumentar a 50 extracciones aumentan los datos de extracción entonces se reduce el margen de error de la proporción que obtenemos según la muestra con respecto a la proporción real que tenemos en la urna”.

4. Repita el procedimiento de la sección 1.3 con muestras de tamaño 50 y luego con tamaño 100 y responda:

b) ¿Observa alguna diferencia al haber aumentado el tamaño de la muestra?

“Sin importar el tamaño la tendencia siempre es el 40%, siempre iba a ser el pico más grande y el margen de error se reducía a medida que aumentábamos el tamaño, ya que en la anterior grafica el pico estaba más abajo, más cercano a los demás pero al momento de hacer esta muestra el pico es mucho más alto, y para 100 ocurre lo mismo pero se hace un poco más evidente”.

c) ¿Cuántas bolas de cada color hay en la Urna?

“Según lo que vi y los experimentos que hice, llevando las muestras a tamaños más altos que los propone el ejercicio, deduzco que la cantidad de pelotas es 2 de cada 5 en la proporción de bolas azules en la urna que sería el 40% de bolas azules, el margen de error ya no aplicaría a usarlo porque nos pide un dato exacto”.

Sergio analiza los histogramas que ha construido y los compara a medida que aumenta el tamaño muestral notando una reducción en la variabilidad de la proporción muestral, esto le proporciona una mejor noción de la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad, su estimación del 40% no cambia ya que Sergio ha resuelto aplicar siempre la misma acción, tomar el pico más alto del histograma como su estimación puntual.

En resumen Sergio:

Plantea en un principio que la técnica para determinar la proporción de la urna es hacer una gran cantidad de extracciones y luego observar la proporción de extracciones obtenidas de un color y otro, al parecer en busca de un valor puntual. Más adelante en la actividad, Sergio resuelve que la mejor estimación va estar dada por el valor que más frecuencia presente en el histograma construido con los resultados de un gran número de muestras. Para ello, Sergio exageró un poco la cantidad de muestras hasta llegar a las 20000, de esta manera ganó confianza en su estimación puntual.

Es evidente que Sergio ha visto potencialidades instrumentales en Fathom y ha logrado desarrollar esquemas de uso que le van a permitir utilizar el programa para dar solución a situaciones que requieran el establecimiento de una estimación.

Sin embargo, durante la actividad Sergio se estuvo debatiendo entre dos ideas, estimación por intervalo o estimación puntual, claramente para la situación de esta actividad su forma de establecer una estimación se podría decir que dio buenos resultados pero a medida que gane experiencia con situaciones estocásticas va ir cambiando sus nociones con respecto a las inferencias. Sergio ha ganado claridad en sus nociones de variabilidad en pequeñas muestras, enfoque frecuencial y la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad.

Humberto:

2.1. El contenido de la Urna 1

1. Se sabe que una urna contiene bolas de 2 colores diferentes, se le desafía a determinar la cantidad de bolas de cada color, para ello solo se le permite hacer extracciones de una sola bola, observar su color y devolverla a la urna, puede hacer esto las veces que desee.

a) ¿Cree que sea posible establecer de esta forma la cantidad de bolas de cada color que hay en la urna? Justifique detalladamente su respuesta.

“Sería posible hacer una aproximación de la cantidad de bolas de cada color si tomamos el promedio que resulte de los intentos (como en el ejercicio anterior en el que se hizo 1000 intentos cada uno de 60 extracciones y al graficar esto nos da un promedio de 4 bolas azules y 2 amarillas, valor que era igual al de la proporción inicial)”.

Humberto recurre a su noción de la relación entre el comportamiento de la distribución muestral y el modelo, que como dice, desarrolló en la actividad anterior. Para dar solución al

problema Humberto tomaría una gran cantidad de muestras del mismo tamaño registrando en cada una la frecuencia absoluta de extracciones de un color, construye con esto un histograma y, teniendo la idea de que el promedio de esta distribución coincide con la marca de clase del intervalo de mayor frecuencia, toma el valor de mayor frecuencia. Sin embargo, aunque Huberto no aclara que se trate de un problema con infinitas soluciones al final de su respuesta deja ver que puede estar pensando en determinar una proporción.

Humberto evidencia nociones de variabilidad al comprender que lo que puede calcular con su técnica es una aproximación pero posiblemente no lo refleje en su estimación ya está pensando en un valor puntual.

b) Si usted repitiera 10 veces el mismo proceso (sacar una balota, mirar su color y devolverla), ¿podría determinar la cantidad de bolas de cada color? Justifique su respuesta.

“No podría determinar la cantidad de bolas ya que son muy pocos intentos para asegurar que la relación sale de solo 10 intentos”.

Humberto manifiesta nociones de ley de los grandes números, de la gran variabilidad en pequeñas muestras y de la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad.

2. Abra el archivo Urna 1. Allí le aparece una pequeña tabla verde llamada “summary” la cual contiene la cantidad de veces que salió cada color en 10 extracciones con devolución. Registre en su hoja de trabajo la cantidad de veces que apareció cada color.

c) ¿Considera que hay la misma cantidad de bolas de cada color? Justifique su respuesta.

“5 azules y 5 blancas, no por lo mismo del punto anterior son muy pocas extracciones para aseverar que ese es el número de bolas en la urna”.

Humberto ratifica mayor claridad en sus nociones de la gran variabilidad que se tiene con pequeñas muestras y de la relación modelo-muestra asociada a la ley de los grandes números.

1.3. Interactuando con la urna.

1. En el archivo Urna 1 presione Ctrl+y varias veces.

a) ¿Qué es lo que está sucediendo al presionar Ctrl+y? ¿Cuántas bolas de cada color estima que hay en la urna? Justifique su respuesta.

“Al presionar Ctrl+y varían los valores de las bolas azules y amarillas, aun no se puede saber el número de bolas presentes en la urna ya que son muy pocas extracciones”.

Humberto observa correctamente lo que realiza el programa al utilizar el Ctrl+y y corrobora su idea sobre la variabilidad, debido a esto y a las nociones manifestadas en las anteriores respuestas se abstiene de establecer una estimación.

b) ¿Cómo interpreta los números que aparecen en la nueva tabla (Measures from Urna 1)? Justifique su respuesta.

“Los interpreto como 1000 intentos cada uno con 10 extracciones y solo tengo el resultado de las azules (aunque puedo obtener las amarillas haciendo la diferencia)”.

Humberto comprende perfectamente el experimento que el programa está simulando.

5. Dé clic sostenido en el icono “Graph” ubicado en la parte superior de la pantalla (figura 4) y construya la gráfica con la “Measures from Urna 1” (figura 8).

c) ¿Cómo interpreta la gráfica en pantalla? ¿Cuántas balotas de cada color hay en la Urna?

“El punto más alto de la gráfica muestra el número de bolas azules de las 10 extracciones que más se repitió (4 bolas azules), solo podría aproximar la proporción de bolas en la urna que sería de 2-3, 2 para las azules y 3 para las blancas”.

Humberto establece una estimación puntual de la proporción, 40% para las bolas azules, para ello observó el resultado con mayor frecuencia en el histograma. Sin embargo para referirse a la proporción está utilizando un caso particular.

1.5. Aumentando el tamaño muestral

1. hasta el momento se ha trabajado con muestras de tamaño 10, pero se puede hacer la cantidad de extracciones que se desee.

a) ¿Qué cree que puede ocurrir si se aumenta el tamaño de la muestra a 50 extracciones y se repite el proceso anterior? ¿Y si se aumenta a 100? Justifique su respuesta.

“Creo que si se mantiene la proporción que obtuve en los anteriores ejercicios (2-3) podría estar más seguro de que esa es la proporción de las bolas en la urna que sería de 2-3, 2 para las azules y 3 para las blancas”.

Humberto muestra claridad en su noción de la influencia del tamaño muestral ya que el hecho de seguir obteniendo el mismo valor le brindaría mayor seguridad a su estimación. En la entrevista Humberto dice que él cree que va seguir obteniendo el mismo valor de la proporción, cuando se aumenta el tamaño de la muestra, siguiendo el procedimiento que ha descrito, idea que podrá ratificar o descartar más adelante.

4. Repita el procedimiento de la sección 1.3 con muestras de tamaño 50 y luego con tamaño 100 y responda:

b) ¿Observa alguna diferencia al haber aumentado el tamaño de la muestra?

“Para 50, 100 y 200 intentos (es decir sacar una bola y devolverla 40, 50, 100 veces) veo que: En 50 intentos me sale un promedio de 22 bolas azules de un total de 50 intentos, 44%. En 100 intentos me sale un promedio de 41 bolas azules de un total de 100 intentos, 41%. En 200 intentos me sale un promedio de 83 bolas azules de un total de 200, 41%.”

Humberto realiza el procedimiento que ha adoptado en toda la actividad variando el tamaño muestral (10, 50, 100 y 200), de esta manera observa un comportamiento contrario al que él estaba esperando y obtiene en cada caso proporciones de 40%, 44% y 41%. Observar esto debe haber generado en Humberto evolución en sus nociones de la variabilidad y se puede convertir en una experiencia que potencie la necesidad de establecer estimaciones por medio de intervalos. Sin embargo Humberto no plasma ninguna conclusión en este taller con respecto a lo observado ni muestra cambios en su estimación.

En resumen Humberto:

La técnica planteada por un Humberto consistía en tomar una gran cantidad de muestras del mismo tamaño teniendo en cuenta para cada muestra la frecuencia de extracciones de un color y así quedarse con el promedio de estas frecuencias como estimador puntual.

Cuando estuvo interactuando con las simulaciones siguió su misma idea pero no hizo cálculos del promedio si no que construyó un histograma con los resultados de 1000 muestras y tomó la marca de clase del intervalo con mayor frecuencia como su estimación.

Inicialmente Humberto estaba pensando en establecer estimaciones con valores puntuales pero al repetir el proceso, de la forma en que él lo planteó, obtuvo resultados diferentes, como no registró una apreciación sobre esto, se espera que haya generado cambios en su forma de hacer una estimación y genere la necesidad de establecer un intervalo.

Humberto muestra avances en sus nociones de la gran variabilidad en muestras pequeñas, mejores nociones de la relación modelo-muestra e incluso nociones de la relación modelo-distribución muestral con implicaciones de ganancia de claridad en sus nociones de enfoque frecuencial y ley de los grandes números.

5.3.2. Discusión de la actividad

A continuación presentamos algunos episodios de la discusión de esta actividad donde los estudiantes muestran desarrollos de sus ideas o nociones que consideramos importantes para la comprensión del método de Intervalos de Confianza. Como se podrá notar, el profesor solo interviene para hacer preguntas y guiar la discusión.

Para la discusión final, Oscar pasó al tablero a proyectar la pantalla de su computador, mostrando a los compañeros el procedimiento para construir con Fathom, un histograma de las proporciones calculadas a partir de 1000 muestras de tamaño 50.

Se le preguntó a Welfer, según lo que observa en la gráfica ¿Cuál es la proporción de bolas azules que hay en la urna?

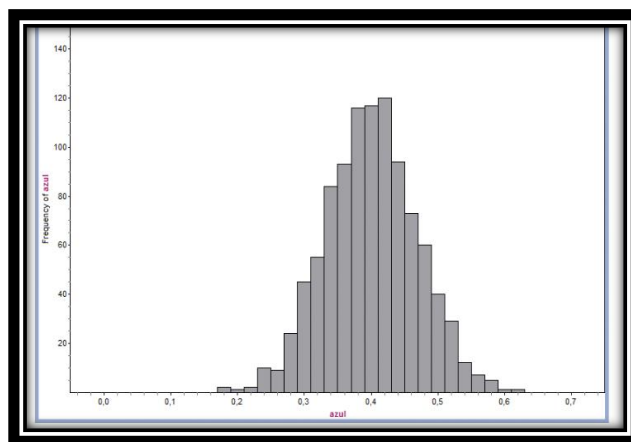


Ilustración 13. Histograma construido por Oscar para la discusión de la actividad 2

Welfer: cercano a 0,4.

Profesor: ¿Qué tan cercano?

Welfer: De 0,3 a 0,5 ya que son los picos más altos.

Néstor: Yo diría que entre 0,38 a 0,42

Profesor: ¿alguien piensa que la proporción es exactamente 0,4?

En este momento Sergio expone lo que hizo asegurándole a los compañeros que siempre observó que el mayor pico para los diferentes casos que hizo, se ubicó en 0,4. Esto llevó a

que Oscar tuviera que construir en pantalla 3 histogramas cada uno con 1000 muestras, el primero con muestras de tamaño 50, el segundo de tamaño 100 y el tercero de tamaño 200. Entre todos los estudiantes empiezan a hacer comparaciones, Welfer hace ver a los compañeros que a medida que se aumenta el tamaño de la muestra el rango de variación se hace más pequeño.

Welfer: en el primero es de 0,25 hasta 0,58 y en el segundo es de 0,27 hasta 0,52.

Profesor: ¿Cuál sería entonces una conclusión?

Daniel: Que entre más tamaño de muestra se va reduciendo los intervalos de las proporciones porque al hacer más repeticiones en las muestras se tiene un valor más acertado.

Camilo: Que a mayor tamaño de muestra se va acercando a un intervalo más exacto entre 0,4 y 0,41

Néstor: Que la proporción de la urna se encuentra entre 0,39 y 0,41

Sergio: yo diría que la proporción está entre 0,4 y 0,41 por que en las gráficas que hemos observado estos dos valores tienden a ser similares.

5.3.3. Conclusión de la actividad

Con esta actividad los estudiantes han podido desarrollar dos nociones importantes para la comprensión del método de Intervalos de Confianza: la primera es que debido a la presencia de la variabilidad es más conveniente establecer una estimación por medio de un intervalo que de un valor puntual; la segunda es que a medida que se aumenta el tamaño de

la muestra la variabilidad de la proporción muestral se reduce, lo cual se traduce en una ganancia de precisión.

Los estudiantes empiezan a ver potencialidades instrumentales en el programa Fathom para dar solución a situaciones que requieran del establecimiento de estimaciones, prueba de ello son los esquemas de uso que se han visto desarrollados por ellos y que más adelante podrán relacionar convirtiéndolos en esquemas de acción instrumentada.

5.4. ACTIVIDAD 3

Hasta ahora se ha venido trabajando con situaciones que involucran muestreo y variables aleatorias discretas valiéndonos de modelos de urna que dan la sensación de un proceso de muestreo sobre una pequeña población. Esta actividad pretende observar tanto el uso que los estudiantes dan al programa como las nociones que ponen en juego, ahora con una situación de variable aleatoria continua, donde se quiere estimar la media poblacional. La cuestión es ¿será que ideas ganadas en las anteriores actividades como la variabilidad, la relación entre muestra y modelo, la idea de distribución muestral, enfoque frecuencial, entre otras, siguen apareciendo y son utilizadas para establecer una estimación de la media poblacional?

En esta actividad se ha simulado previamente en Fathom la toma de 2677 datos aleatorios de una distribución normal con media 195 y desviación estándar 12,25 que hará las veces de población y que, durante toda la actividad, se encuentra oculta. La media de esta gran muestra es 194,79 y su desviación estándar es 13,28.

Se entrega un archivo en Fathom al estudiante, allí aparece una tabla con 50 datos aleatorios de la población descrita en el párrafo anterior y una hoja con la situación a

solucionar. El estudiantes tiene libertad de utilizar el programa como lo crea conveniente. La situación se muestra a continuación.

Actividad 3

3.1. Cargamento de Peras

Un almacén que comercializa frutas quiere determinar el peso promedio de más de 2000 peras de un cargamento que se encuentra almacenado en un cuarto de refrigeración. Se presentaron ciertos inconvenientes y se perdieron los registros de este cargamento, por lo tanto se desconoce el peso exacto del cargamento y la cantidad exacta de peras.



a) Suponga que usted solo puede abrir la puerta del cuarto de refrigeración por unos segundos para no afectar la temperatura y dañar el proceso de conservación de la fruta, ¿Cómo podría entonces ayudar a esta empresa a determinar el peso promedio de todas las peras? Justifique su respuesta.

b) En el tiempo que puede durar abierta la puerta del cuarto de refrigeración se alcanzan a extraer 50 peras, pesarlas y devolverlas rápidamente al cuarto de refrigeración. ¿Cómo podría determinar bajo estas condiciones el peso promedio de todas las Peras? Describa detalladamente su idea.

3.2. Discusión.

3.3. Estimando el peso promedio.

Abra el archivo **Peras** en Fathom. Aparecerá una tabla con 50 datos llamada “Sample of peras”.

- a) Escriba su interpretación de esta tabla, ¿que representa cada dato y cuál es su relación con la situación descrita en el numeral 3.1? Justifique su respuesta.
- b) ¿Cuántas muestras de 50 peras podría extraer y cuantas considera suficientes para determinar el peso promedio del cargamento de peras? Justifique su respuesta.
- c) Estime el peso promedio del cargamento de peras describiendo y justificando detalladamente sus ideas y su procedimiento.

5.4.1. Análisis de la actividad

Néstor:

3.1. Cargamento de Peras

- a) Suponga que usted solo puede abrir la puerta del cuarto de refrigeración por unos segundos para no afectar la temperatura y dañar el proceso de conservación de la fruta, ¿Cómo podría entonces ayudar a esta empresa a determinar el peso promedio de todas las peras? Justifique su respuesta.

“Se estima que hay un aproximado a 2000 peras aunque no se conoce con exactitud esta cantidad. Lo que yo haría es abrir, sacar las peras que mis manos puedan y pesarlas teniendo en cuenta la cantidad que saqué, por ejemplo 5 peras, y teniendo el peso justo al lado del cuarto (para no demorarme en devolverme) las peso y saco el peso promedio a la misma vez pesaría solo una y las devolvería lo más atrás posible del refrigerador para minimizar la posibilidad de volver a sacar la misma pera y tomar muestras diferentes.

Luego repetiría el proceso y sumaría los promedios de los pesos de muchas repeticiones y los vuelvo a promediar y este peso sería el valor aproximado del promedio de todas las peras”.

Néstor manifiesta buenas nociones de relación entre población y muestra al considerar que sí es posible determinar el valor promedio de la población a partir de un proceso de muestreo. La primer idea de Néstor va encaminada hacia una aproximación del valor esperado de la media, es decir, lo que haría para determinar el peso promedio de las peras consiste en tomar muestras del mismo tamaño, en cada muestra calcular el promedio, luego el valor estimado vendría siendo el obtenido de calcular el promedio de los promedios. Con este procedimiento Néstor considera realizar una estimación puntual lo cual es contrario a las intuiciones que había mostrado en su prueba inicial, donde para una situación con variable continua consideró estimaciones más cercanas a un intervalo.

Al preguntarle la razón de hacerlo así, responde que piensa en el sacar promedios porque obtiene valores intermedios, estos van a ser más cercanos al valor promedio de todo el grupo, lo cual evidencia una noción de distribución muestral de la media, concibiendo en los promedios una variabilidad menor a la de la población y una relación con el valor real de la media. En otras palabras, Néstor evidencia poseer nociones de la relación existente entre la distribución muestral de la media muestral y la población.

b) En el tiempo que puede durar abierta la puerta del cuarto de refrigeración se alcanzan a extraer 50 peras, pesarlas y devolverlas rápidamente al cuarto de refrigeración. ¿Cómo podría determinar bajo estas condiciones el peso promedio de todas las Peras?

“Con mi idea anterior y análogamente haría lo mismo, pesar y promediar, cogería los valores que pesan las 50 peras y los divido en 50 para aproximar o promediar el valor del peso de cada pera, haría muchas repeticiones y al devolverlas hacerlo lo más atrás posible para minimizar la posibilidad de sacar alguna pera repetida y sacar muestras diferentes. Luego sumaría los promedios y vuelvo a promediarlos para tener un valor cercano y más confiable y este me daría el peso promedio de cada pera en el lote”.

Néstor, con base en las actividades anteriores, asume que para poder estimar el valor de una media poblacional es necesario obtener varias muestras para poder mirar el comportamiento de sus medias, es decir, requiere el conocimiento de la distribución de la media muestral. Esta idea no deja de ser un obstáculo para poder realizar inferencias a partir de una sola muestra, ya veremos cómo se comporta cuando haya trabajado con el método bootstrap para generar muestras a partir de una sola y cómo se puede desprender de este proceso de simulación para realizar inferencias partiendo exclusivamente de la muestra obtenida.

3.3. Estimando el peso promedio.

Abra el archivo **Peras** en Fathom. Aparecerá una tabla con 50 datos llamada “Sample of peras”.

a) Escriba su interpretación de esta tabla, ¿que representa cada dato y cuál es su relación con la situación descrita en el numeral 3.1? Justifique su respuesta.

“Lo observado en la tabla es que poseo una muestra de 50 peras los cuales sus pesos están entre un intervalo de 180,408 g y 231,437 g. cada pera tiene un peso diferente y por muy parecidos nunca pesan lo mismo. La relación con el 3.1 es que esto es una posible

muestra obtenida de un intento y como en la pregunta b) este mismo nos dice que se pudieron sacar 50 peras y esta tabla es un intento de esta muestra”.

Néstor hace una interpretación correcta de la tabla presentada por el programa y la relaciona con la situación planteada. Además Néstor, antes que nada, hace una exploración de los datos enfocándose en observar tendencia y variabilidad, como vemos establece un rango de variación de los datos y resalta que son valores muy parecidos. Cabe resaltar que empezar a enfrentar un problema con una exploración previa de los datos disponibles en estudiantes de este nivel, es una actitud difícil de lograr en los estudiantes bajo el enfoque formal.

b) ¿Cuántas muestras de 50 podría extraer del lote y cuántas considera suficientes para determinar el peso promedio de las peras? Justifique su respuesta.

“No tendría un límite, podría sacar tantas muestras quiera desde 1 hasta miles y miles. Considero que la cantidad de veces debe ser entre 500-1000 ya que en estos valores es donde hemos visto en clases anteriores que son suficientes para determinar un valor estimado, en este caso un promedio, pienso que funciona de igual forma”.

Néstor considera que sus ideas de distribución muestral para proporciones deben ser útiles también en una situación como esta donde se trabaja con una variable continua y se busca estimar la media poblacional, por lo tanto tiene nociones de relación entre la distribución muestral de la media y la población.

c) Estime el peso promedio de las peras describiendo y justificando detalladamente sus ideas y su procedimiento.

“De la muestra dada de 50 peras diferentes con sus respectivos gramos, observo que al tomar 1000 muestras del mismo tamaño inicial que es 50 obtengo un promedio de 195,198 g lo que hice fue en la tabla de sample of peras buscar una “mean”, esta función me promedia los valores de mi variable peso. Al sacar esta mean prosigo a sacar una medida trabajando con el measure, el cual me toma el promedio de cada muestra de tamaño 50 y me va guardando los datos, esto lo repito 1000 veces y lo grafico y observo que la tendencia en la gráfica es 195,198 g y este es su promedio.

Al hacer más intentos observo que cada 1000 veces en la medida hecha de las muestras tomadas de tamaño 50 el promedio me varía un poco los valores y siguen estando cercanos a 195,198 g, en el segundo fue 194,38 y en el tercero 194,97 g por tanto puedo decir que cuando es con decimales estos me varían un poco y la medida debería darla en un intervalo corto entre 194 y 196.

Al aumentar la medida a 10.000 observo que el promedio me sigue dando en 195,34 por tanto se me sigue conservando el intervalo”.

Néstor intuye, una vez más, la relación existente entre la distribución muestral de la media y la media poblacional, cuando menciona una coincidencia entre la marca de clase asociada al rectángulo de mayor altura en el histograma, y el promedio de la población. Pone en juego su noción de variabilidad y decide repetir su simulación dos veces más. De esta forma, observa que los valores más frecuentes en el respectivo histograma son un poco diferentes, lo que lo conduce a proponer que el verdadero valor de la media se encuentra entre 194 y 196, lo cual termina siendo una estimación acertada ya que el verdadero valor de la media es 194,79. Si calculamos bajo el método formal un intervalo del 68% de confianza

conociendo la desviación de la población tendremos (193,17-196,83) mientras que el intervalo de Néstor tendría una confianza del 41%.

La técnica de Néstor:

Observando el video tomado de la pantalla del computador de Néstor, desglosamos a continuación la técnica que utilizó para dar solución a la situación planteada junto con las componentes de su génesis instrumental en cada paso.

1. Inspecciona los valores de la tabla enfocándose en el valor máximo y mínimo.

Esquemas de uso:

Mover el cursor en la tabla permite ver todos los resultados.

Las columnas de la tabla contienen resultados de una variable aleatoria.

Esquema de acción instrumentada:

Mueve el cursor lentamente en la tabla para observar detalladamente los resultados, al dar clic en un dato, este se ilumina. De esta manera determina el menor y el mayor valor.

Nociones: Al observar los valores máximo y mínimo Néstor no solamente concibe que hay variabilidad en la muestra si no que los utiliza para hacerse una primera idea de los valores que puede tomar el promedio, mostrando así una idea de relación entre la muestra y la población de donde proviene.

2. Crea una medida para el promedio.

Esquemas de uso:

Dar doble clic en la colección desplegar la ventana del inspector.

En la pestaña “measures” se introducen o se seleccionan fórmulas para hacer cálculos tediosos rápidamente.

Con la fórmula “mean()” se calcula rápidamente el promedio de un conjunto de datos

Esquema de acción instrumentada:

En el inspector de la colección selecciona la pestaña “measures”, le da un nombre a la medida escribiendo en la primera casilla, luego en la tercera casilla introduce la formula “mean(Peso_g)” y da clic en ok. De esta manera obtiene el promedio de la muestra que se le ha dado.

Nociones:

Al crear una medida Néstor debe estar recurriendo a su Idea de variabilidad muestral y tiene en mente la distribución muestral de la media.

3. Simula la toma de nuevas muestras del mismo tamaño.

Esquemas de uso:

Con “collect measures” se simula la toma de diferentes muestras aleatorias bajo las mismas condiciones.

Esquema de acción instrumentada:

Por medio de la opción “collect measures” simula la toma de nuevas muestras de tamaño 50 calculando para cada una el promedio.

Nociones:

Néstor manifiesta nociones claras de variabilidad muestral y distribución muestral de la media.

4. Simula la toma de 1000 muestras del mismo tamaño ($n=50$) calculando el promedio en cada una.

Esquemas de uso:

En el inspector de la colección se modifica la cantidad de medidas que se quiere tomar.

Esquema de acción instrumentada:

Da doble clic en el nuevo inspector de las medidas, introduce el valor 1000 en la pestaña de “collect measures” y oprime el botón “collect more measures”.

Nociones:

Buenas nociones de ley de los grandes números debido a que simula la toma de una gran cantidad de muestras, buenas nociones de variabilidad muestral y distribución muestral de la proporción.

5. Muestra los resultados de la simulación en una tabla.

Esquemas de uso:

En las tablas de datos se registran los valores de una variable aleatoria.

Esquema de acción instrumentada:

Selecciona el icono “measures from simple of peras” y arrastra una tabla desde la parte superior de la pantalla.

Nociones:

Buenas nociones de variabilidad de la media muestral.

6. Construye un histograma con las 1000 medias de las muestras aleatorias de tamaño 50

Esquemas de uso:

Para realizar un gráfico se arrastra el icono “Graph” de la parte superior de la pantalla, luego se toman los datos de una tabla y se llevan hasta el cuadro del gráfico.

En la parte superior del cuadro del gráfico se selecciona el tipo de gráfico que convenga.

Esquema de acción instrumentada:

Arrastra una gráfica desde la parte superior de la pantalla a la hoja en blanco. Toma las 1000 medidas de la tabla dando clic sostenido sobre el nombre de la columna y las lleva hasta el eje “x” de la gráfica, finalmente elije la opción de histograma.

Nociones:

Néstor posee nociones de distribución muestral de la media y una idea de relación entre la distribución muestral y la población.

7. Señala los siguientes tres rectángulos de mayor altura y observa el valor que se encuentra iluminado en la tabla.

Esquemas de uso:

Al dar clic sobre un rectángulo en la gráfica, se iluminan en la tabla los valores con los que se relaciona.

Esquemas de acción instrumentada:

Da clic en los en los 3 rectángulos de mayor altura en el histograma y observa los valores que se iluminan en la tabla.

Nociones:

Clara noción de relación entre el comportamiento de la distribución y la población, al señalar los tres rectángulos de mayor altura evidencia buenas nociones de variabilidad muestral y enfoque frecuencial.

8. Repite la simulación en dos ocasiones más y tiene en cuenta el valor de la tabla que se ilumina al dar clic en el rectángulo de mayor frecuencia en el histograma de cada simulación.

Esquemas de uso:

Con el botón “Collect more measures” del inspector de la colección de medidas se repite la toma aleatoria de la cantidad de medidas que se elija.

Esquemas de acción instrumentada:

Da doble clic sobre el icono “measures from peras” y luego da clic en el botón “Collect more measures”.

Nociones:

Néstor repite el proceso debido a su idea de variabilidad, no cree conveniente quedarse con una estimación puntual. Buenas nociones sobre la relación entre el los valores con mayor frecuencia en el histograma, el cual es una aproximación de la distribución muestral de la media, y el valor real del promedio.

9. Establece el intervalo tomando el anterior entero al menor de los valores obtenido en el paso 11 y el mayor entero siguiente a mayor de los valores obtenidos, como los límites del intervalo.

En resumen Néstor:

Ha visto a Fathom como un instrumento que le ayuda a hacer estimaciones de proporciones y medias poblacionales por medio de un proceso de muestreo. Para ello, Néstor pone en juego nociones de los conceptos necesarios para realizar estimaciones por medio de Intervalos de Confianza.

Por lo visto durante el análisis de su técnica y sus justificaciones, podemos decir que Néstor en esta actividad evidencia muy buenas nociones de distribución muestral, de la relación entre la distribución muestral de la media y la población, ley de los grandes números y estimación por intervalos.

En esta actividad Néstor decidió hacer un análisis preliminar de los datos para sacar sus primeras conclusiones de variabilidad, lo cual es una actitud difícil de lograr bajo un enfoque formal donde la mayoría de los estudiantes tan solo están preocupados por aplicar correctamente un método.

Luz:

3.1. Cargamento de Peras

a) Suponga que usted solo puede abrir la puerta del cuarto de refrigeración por unos segundos para no afectar la temperatura y dañar el proceso de conservación de la fruta, ¿Cómo podría entonces ayudar a esta empresa a determinar el peso promedio de todas las peras? Justifique su respuesta.

“Para determinar el peso promedio de todas las peras sin llegar a afectar la concentración de estas se podría tomar durante esos segundos una muestra del tamaño correspondiente a la cantidad que pueda sacarse en ese momento, es decir, si es posible sacar 50 para la muestra, o 20, etc. El procedimiento a ejecutar será, sacar la muestra de tamaño X , pesar cada una, sumar todos sus pesos y dividirlos nuevamente entre el tamaño X , destacando que entre más peras pueda tomar por muestra voy a tener un dato más aproximado a la realidad”.

Luz está pensando en hacer una estimación a partir de una sola muestra, considera que la muestra debe ser lo más grande posible para que se parezca más a la población y sus promedios sean valores más próximos. En esta respuesta podemos ver que Luz tiene nociones de ley de los grandes números, de una relación muestra-población y de variabilidad. La estimación hacia la que apunta Luz es un valor puntual.

b) En el tiempo que puede durar abierta la puerta del cuarto de refrigeración se alcanzan a extraer 50 peras, pesarlas y devolverlos rápidamente al cuarto de refrigeración. ¿Cómo podría determinar bajo estas condiciones el peso promedio de todas las Peras? Describa de talladamente su idea.

“Es necesario inicialmente sacar el peso promedio de esta cantidad, que lo tomaremos como el aproximado a la realidad, entonces conforme a esto lo multiplicaremos por la cantidad total de peras que son 2000 y lo dividimos entre 50, todo esto nos dará una idea aproximada, que quizá puede ser exacta de la cantidad total, solo sabremos si lo anteriormente es correcto al pesar la cantidad total”.

Luz concibe el problema como una situación estocástica, sabe que siguiendo su idea obtiene una buena estimación puntual de la verdadera media poblacional, esto debido a sus

nociones de relación muestra-población. Sin embargo, Luz no tiene total claridad sobre algunas ideas asociadas a un valor promedio.

3.3. Estimando el peso promedio.

Abra el archivo **Peras** en Fathom. Aparecerá una tabla con 50 datos llamada “Sample of peras”.

a) Escriba su interpretación de esta tabla, ¿que representa cada dato y cuál es su relación con la situación descrita en el numeral 3.1? Justifique su respuesta.

“La tabla corresponde a la muestra de tamaño 50 de la que hablamos en el numeral 3.1.b, cada dato es el peso de cada pera de las 50 peras pesadas”.

Luz interpreta y relaciona correctamente la tabla proporcionada con la situación de las peras.

b) ¿Cuántas muestras de 50 podría extraer y cuántas considera suficientes para determinar el peso promedio de las peras? Justifique su respuesta.

“Puedo sacar infinitas muestras, ya que puedo variar, repetir, etc las peras, considero que entre más muestras tomemos nos dará una cifra más aproximada a la realidad”.

Luz ratifica que posee buenas nociones de ley de los grandes números. Por su respuesta y en relación con lo expuesto en las anteriores preguntas, podría estar pensando en ir aumentando su muestra a medida que hace extracciones y de esta manera espera obtener un valor más cercano al de la población ya que ella ha estado considerando una estimación puntual.

c) Estime el peso promedio de las peras describiendo y justificando detalladamente sus ideas y su procedimiento.

“Para determinar el peso promedio de las peras saqué una muestra, la que fui variando su tamaño entre 50, 100, 1000 y 2000 de todas estas muestras puedo notar la variación de esta forma. Al tener una muestra tamaño 50 (que es muy mínima) sus picos van a variar con mayor frecuencia, es decir, al repetir el procedimiento sus picos vana a ser muy diferentes a la muestra anterior, mientras si amplió la muestra a tamaño 1000 y repito varias veces este procedimiento su pico más alto se mantendrá en la mayoría de las muestras entre 194 y 200. Aun así para ambos experimentos, sin importar su tamaño, al calcular la media (que en este caso se refiere a el promedio posible a asignar basado en el intervalo con mayor repetición) se encontrará entre 194 y 197.

Luz tiene nociones claras de variabilidad muestral, lo cual es claro cuando decide tomar diferentes muestras del mismo tamaño, y de ley de los grandes números porque decide ir aumentando el tamaño muestral, puede ser la única forma que se le ocurre, aunque se sale de lo que plantea la situación.

Se observa que Luz decide tomar una muestra, hacer su histograma y tomar el valor asignado al rectángulo de mayor área, toma una nueva muestra del mismo tamaño y se vuelve a quedar con el valor del histograma con mayor frecuencia, de esta manera se hace una idea de la variabilidad. Luego empieza a aumentar el tamaño muestral y observa lo que sucede al repetir el proceso descrito. Cuando llega a muestras de tamaño 1000 decide establecer el intervalo (194-197), el cual contiene al verdadero valor de la población.

Lo anterior funciona porque la población es casi normal, donde media, mediana y moda prácticamente coinciden, y cuando Luz aumenta la muestra se termina pareciendo mucho más a la población.

La técnica de Luz:

1. Construye un histograma con la muestra de tamaño 50 y observa el valor asociado al rectángulo de mayor frecuencia.

Esquemas de uso:

El icono Graph se utiliza para realizar histogramas.

Esquemas de acción instrumentada:

Clic en el icono Graph de la parte superior de la pantalla y lo lleva hasta la hoja en blanco, da clic sostenido sobre el nombre de la columna de la tabla donde están los datos de los pesos de 50 peras y los arrastra hasta el eje “x” del gráfico.

Nociones:

Luz posee nociones de relación entre el comportamiento de la muestra y su población.

2. Toma otra muestra de tamaño 50 y observa el valor del rectángulo con mayor altura en el histograma. Repite este paso varias veces.

Esquemas de uso:

Con el inspector de la muestra se puede cambiar la muestra por otra del mismo tamaño tomada aleatoriamente de la misma población.

Esquemas de acción instrumentada:

Da doble clic sobre el icono “simple of peras” y cliquea en el botón “simple more cases”.

Nociones:

Noción de variabilidad en el muestreo.

3. Aumenta el tamaño muestral a 100 y repite el proceso del paso 2.

Esquemas de uso:

En el inspector de la colección se puede cambiar el tamaño de la muestra.

Esquemas de acción instrumentada:

Da doble clic sobre el icono “simple of peras”, en el inspector señala la pestaña “sample”, introduce el número 100 y da clic en el botón “simple more cases”.

Nociones:

Luz pone en juego sus nociones de ley de los grandes números, variabilidad en el muestreo e Influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad.

4. Aumenta la muestra a tamaño 1000, repite el proceso del paso 2 ahora con muestras de tamaño 1000 y establece su estimación tomando los dos valores enteros entre los que oscilan los valores de mayor frecuencia en los histogramas.

Esquemas de uso:

En el inspector de la colección se puede cambiar el tamaño de la muestra.

Esquemas de acción instrumentada:

Da doble clic sobre el icono “simple of peras”, en el inspector señala la pestaña “sample”, introduce el número 1000 y da clic en el botón “simple more cases”.

Nociones:

Luz ratifica que posee buenas nociones de ley de los grandes números, variabilidad en el muestreo e Influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad. Adicional a esto Luz utiliza algunas nociones de relación muestra-población y estimación por intervalos.

En resumen Luz:

Ha desarrollado buenas nociones de variabilidad, ley de los grandes números y relación muestra-población. Sigue teniendo conflictos para identificar desde el principio que lo menos conveniente es una estimación puntual, de todos modos su estimación final sí fue un intervalo.

Empieza a desarrollar esquemas de uso para Fathom y a ver algunas potencialidades para resolver situaciones de estimación, sin embargo aún posee algunas limitaciones debido a que se salió de los parámetros de la actividad para establecer su solución.

Sergio:

Actividad 3

3.1. Cargamento de Peras

a) Suponga que usted solo puede abrir la puerta del cuarto de refrigeración por unos segundos para no afectar la temperatura y dañar el proceso de conservación de la fruta, ¿Cómo podría entonces ayudar a esta empresa a determinar el peso promedio de todas las peras? Justifique su respuesta.

“Sacar 100 peras, pesarlas y regresarlas, luego de eso el resultado dividirlo entre 100 que es la cantidad de peras que sacamos para conocer un promedio del peso de cada pera, posteriormente multiplicamos el valor promedio de cada pera y la multiplicamos por

2000, que es la cantidad total de peras del cargamento, y el resultado sería el peso promedio de toda la carga.

Entre mayor cantidad de peras puedan ser extraídas, más exacto será el peso promedio de la carga ya que los valores serán más cercanos a el peso de las 2000 peras, pero no podemos saber el valor exacto ya que trabajamos con una proporción de las peras y no con la totalidad de peras de la carga”.

Sergio evidencia nociones de la existencia de una relación población-muestra ya que su método establece una estimación a partir de una sola muestra. Al proponer la toma de una muestra de buen tamaño y al aclarar al final de su explicación que entre más grande sea la muestra ganará mayor exactitud, da evidencias de buenas nociones de la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad.

Sergio piensa en establecer una estimación puntual, la cual se trata del promedio obtenido de una sola muestra, multiplicando ese promedio por 2000 estimaría el peso total del cargamento, al parecer utiliza la expresión “peso promedio de toda la carga” para referirse a un peso aproximado, lo cual es indicio de nociones de variabilidad.

b) En el tiempo que puede durar abierta la puerta del cuarto de refrigeración se alcanzan a extraer 50 peras, pesarlas y devolverlos rápidamente al cuarto de refrigeración. ¿Cómo podría determinar bajo estas condiciones el peso promedio de todas las Peras? Describa de talladamente su idea.

“Sería repetir mi propuesta anterior pero cambiando el peso de 100 peras por 50 y la división entre 100 por 50. El peso promedio de la carga de peras obtenido es muy inexacto ya que 50 peras representan solo el 2,5% de la carga total”.

Una vez más Sergio ratifica sus nociones de la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad asegurando que el valor obtenido de la media de una muestra de tamaño 50, que es más pequeña que la que consideró en la anterior pregunta, le arrojaría un valor menos exacto, tal vez queriendo decir menos confiable, lo cual es producto de una noción de variabilidad. Sergio posee nociones de una relación muestra-población al considerar que se puede establecer una estimación a partir de una pequeña muestra.

3.2. Discusión.

3.3. Estimando el peso promedio.

Abra el archivo **Peras** en Fathom. Aparecerá una tabla con 50 datos llamada “Sample of peras”.

a) Escriba su interpretación de esta tabla, ¿que representa cada dato y cuál es su relación con la situación descrita en el numeral 3.1? Justifique su respuesta.

“En la tabla vemos el peso de 50 peras diferentes que se extrajeron del cargamento, cada dato es el peso de una pera y la relación que tiene con la 3.1 es con la b) que nos dice que podemos sacar muestras de 50 peras, en la tabla vemos una de esas muestras”.

Sergio relaciona correctamente lo presentado por la tabla con la situación planteada inicialmente.

b) ¿Cuántas muestras de 50 podría extraer y cuántas considera suficientes para determinar el peso promedio de las peras? Justifique su respuesta.

“Para mí, 1000 muestras sería representativa ya que en las 3 muestras que realicé me dieron valores similares: 194,85; 194,88 y 194,92”.

Antes de responder a la pregunta, Sergio simuló el experimento en Fathom, repitió la toma aleatoria de 1000 muestras calculando en cada una el promedio, y luego calculó el promedio de esos 1000 promedios. Este proceso lo repitió 3 veces y obtuvo los valores que registró en su respuesta.

Se observa que Sergio tiene nociones de relación entre la distribución muestral de la media y la población. También es evidente que Sergio posee buenas nociones de ley de los grandes números y de variabilidad.

c) Estime el peso promedio de las peras describiendo y justificando detalladamente sus ideas y su procedimiento.

“El peso promedio está entre aproximadamente 194-195. El proceso que realicé fue, a los datos de las 50 peras, les saqué el promedio y fue ese promedio al que repetí 10.000 veces para obtener datos entre 194 y 195 pero en ninguno de los casos se salió de ese intervalo. Por ende es de 194g a 195g el peso promedio de una pera”.

Sergio dice en su entrevista que lo primero que hizo fue calcular el promedio en diferentes muestras de tamaño 50 y observar como variaban estos promedios, de esta manera obtuvo valores entre 193 y 198, lo cual es un primer intento por familiarizarse con la variabilidad de la distribución muestral de la media, pero al hacerlo de esta forma obtuvo muy pocos resultados por esto decidió simular el experimento 10.000 veces.

Para ganar seguridad en su estimación repitió la toma de los 10.000 promedios tres veces, observando en cada una el valor promedio (promedio de los promedios de muestras de tamaño 50) y obtuvo valores entre 194,81 y 194,63. Al repetir el muestreo un numero exagerado de veces y encontrar valores distintos, decide establecer una estimación por medio

de un intervalo (194-195) el cual captura la verdadera media de la población y de haber sido calculado por el método formal, estaría asociado a una confianza del 20%.

Podemos ver que Sergio manifiesta buenas nociones de distribución muestral de la media y de la relación que tiene con la población, nociones claras de ley de los grandes números y noción de estimación por intervalos.

La técnica de Sergio:

1. Calcula el promedio de la muestra de tamaño 50.

Esquemas de uso:

El “Summary” permite calcular el promedio de un conjunto de datos.

Esquemas de acción instrumentada:

Hace clic en el icono “Summary” en la parte superior de la pantalla y lo lleva hasta la hoja en blanco. Hace clic sostenido sobre la columna que contiene los valores de los pesos de las peras y las arrastra hasta el cuadro del “Summary”, de esta manera obtiene el promedio de la muestra.

Nociones:

Noción de relación entre la muestra y su población.

2. Simula la toma de unas pocas nuevas muestras y calcula el promedio en cada una.

Esquemas de uso:

En el icono de la colección se puede repetir rápidamente el muestreo, es decir se cambia la muestra por una nueva tomada aleatoriamente.

El Summary calcula automáticamente el promedio de una nueva muestra.

Esquemas de acción instrumentada:

Hace clic derecho sobre el icono de la colección “sample of peras” y selecciona la opción “sample more cases”, observa el nuevo promedio en el “Summary”.

Nociones:

Noción de variabilidad de la media muestral.

3. Simula la toma de 1.000 muestras de tamaño 50 calculando en cada una el promedio.

Esquemas de uso:

En la pestaña “measure” del inspector de la colección puede crear una medida.

Puede simular la toma de 5 medidas bajo las mismas condiciones recolectando las medidas haciendo clic derecho sobre el icono de la colección.

En la pestaña “sample” del inspector de las medidas de la colección puede elegir la cantidad de medidas que desea tomar.

La fórmula `mean()` permite calcular el promedio de un conjunto de datos.

Esquemas de acción instrumentada:

Hace doble clic en la colección “sample of peras”, selecciona la pestaña “measures” y crea la medida usando la fórmula “`mean()`”. Hace clic derecho sobre la colección y selecciona la opción “collect measures”. Hace doble clic sobre el icono “measure from sample of peras” introduce el número 1.000 y hace clic en el botón “collect more measures”.

Nociones:

Noción de distribución muestral de la media y ley de los grandes números.

4. Calcula el promedio de los 1.000 promedios simulados en el paso anterior.

Esquemas de uso:

En el “Summary” se puede calcular la media de un conjunto de datos.

En una tabla se registran todos los datos de una colección.

Esquemas de acción instrumentada:

Hace clic sostenido sobre el icono de “Summary” en la parte superior de la pantalla y lo arrastra hasta la hoja en blanco, luego selecciona el icono “measures form sample of peras” y da clic sostenido en el icono “Table” arrastrándolo hasta la hoja en blanco.

Hace clic en el icono “Summary” y lo arrastra hasta la hoja en blanco, hace clic sostenido en la columna de la nueva tabla y la arrastra hasta el rectángulo del “Summary”.

Nociones:

Noción de relación entre la distribución muestral de la media y la población.

5. Simula la toma de 10.000 muestras de tamaño 50 calculando para cada una el promedio.

Esquemas de uso:

En el inspector de las medidas se puede aumentar el número de medidas.

Esquemas de acción instrumentada:

Hace doble clic sobre el icono “measures from simple of peras”, en la casilla de las medidas introduce el valor 10.000 y hace clic en el botón “collect more measures”.

Nociones:

Noción de ley de los grandes números.

6. Calcula el promedio de los 10.000 promedios simulados en el paso 6.

Esquemas de uso:

Al modificar los datos de la columna de una tabla, los valores calculados en el “Summary” cambian automáticamente.

Esquemas de acción instrumentada:

Automáticamente el valor del promedio en el “Summary” cambia mostrando el nuevo promedio de los 10.000 promedios.

Nociones:

Noción de ley de los grandes números.

7. Repite los pasos 6 y 7 en tres ocasiones y establece su estimación.

Esquemas de uso:**Esquemas de acción instrumentada:**

Hace doble clic en la colección “measures from sample of peras” selecciona la opción solo la opción “replace existing cases” y hace clic en el botón “collect more measures”. Observa el valor promedio arrojado por el “Summary” en cada caso y establece su estimación por medio de un intervalo que contenga estos valores, su estimación es (194-195).

Nociones:

Noción de relación entre la distribución muestral de la proporción y la población.

Noción de variabilidad muestral y de estimación por intervalos.

En resumen Sergio:

Manifiesta nociones de relación muestra-población ya que su primera idea fue establecer una estimación a partir de una sola muestra, aclarando que debía ser de buen tamaño para obtener resultados confiables, lo cual es evidencia de poseer buenas nociones de ley de los grandes números, o incluso Sergio puede estar pensando en la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad.

Sergio también posee buenas nociones de la relación entre la distribución muestral de la media y la población, ya que siempre consideró que la media de la distribución muestral para establecer su estimación de la media poblacional. Durante esta actividad Sergio evidenció nociones claras de ley de los grandes números.

Humberto:**3.1. Cargamento de Peras**

Un almacén que comercializa frutas quiere determinar el peso promedio de más de 2000 peras de un cargamento que se encuentra almacenado en un cuarto de refrigeración. Se presentaron ciertos inconvenientes y se perdieron los registros de este cargamento, por lo tanto se desconoce el peso exacto del cargamento y la cantidad exacta de peras.

- a) Suponga que usted solo puede abrir la puerta del cuarto de refrigeración por unos segundos para no afectar la temperatura y dañar el proceso de conservación de

la fruta, ¿Cómo podría entonces ayudar a esta empresa a determinar el peso promedio de todas las peras? Justifique su respuesta.

“Tomando un numero de peras, ponerlas en un contenedor, pesarlas y sacar el peso promedio de esas peras, hacer el mismo procedimiento bastantes veces, luego tomar el peso promedio de todos los intentos, y yo creo que ese peso será una aproximación muy cercana al promedio de todo”.

Humberto ha pensado en hacer una aproximación al valor esperado de la media muestral, ya que el proceso que plantea consiste en tomar varias muestras del mismo tamaño y de cada una obtener el promedio para luego calcular el promedio de esos promedios.

Humberto está considerando una estimación puntual pero es consciente que de esta manera no estará obteniendo el verdadero valor del parámetro poblacional, mostrando así buenas nociones de variabilidad muestral, incluso se podría decir que para plantear este procedimiento, él pone en juego algunas ideas de distribución muestral.

b) En el tiempo que puede durar abierta la puerta del cuarto de refrigeración se alcanzan a extraer 50 peras, pesarlas y devolverlos rápidamente al cuarto de refrigeración. ¿Cómo podría determinar bajo estas condiciones el peso promedio de todas las Peras? Describa de talladamente su idea.

“Haría lo mismo que en el punto anterior: tomo las 50 peras, las peso, saco el promedio y las devuelvo, hago este mismo procedimiento unas 100 veces y al final tomo el promedio obtenido de todos los intentos”.

Se trata del mismo procedimiento sugerido en la pregunta anterior pero esta vez queda claro que Humberto considera el procedimiento para muestras del mismo tamaño. Nuevamente su estimación se trata de un valor puntual.

3.3. Estimando el peso promedio.

Abra el archivo **Peras** en Fathom. Aparecerá una tabla con 50 datos llamada “Sample of peras”.

a) Escriba su interpretación de esta tabla, ¿que representa cada dato y cuál es su relación con la situación descrita en el numeral 3.1? Justifique su respuesta.

“Cada dato representa el peso de cada una de las 50 peras escogidas al azar.

Humberto interpreta correctamente los datos proporcionados por la tabla, comprendiendo que se trata de una muestra aleatoria que seguramente asocia con la situación propuesta para la actividad”.

b) ¿Cuántas muestras de 50 podría extraer y cuántas considera suficientes para determinar el peso promedio de las peras? Justifique su respuesta.

“Se podría extraer en el programa las que quiera y considero suficiente para estimar el peso promedio de las peras unos 100 intentos de 50 extracciones cada uno”.

Posiblemente Humberto aún está pensando en el método que propuso en las primeras preguntas de esta actividad, con el cual se obtiene una estimación puntual. Por lo visto en su respuesta, él posee algunas nociones de ley de los grandes números y cree suficiente para la estimación, la toma de 100 muestras.

c) Estime el peso promedio de las peras describiendo y justificando detalladamente sus ideas y su procedimiento.

“El peso promedio de las peras ronda por los 190 gramos y el proceso que usé fue hacer más intentos de extracciones, cada uno de 50 peras”.

Como se observa, Humberto no expresa estimación por medio de un intervalo explícito, sin embargo con su respuesta deja ver que está en camino de abandonar las estimaciones puntuales, ya que él afirma que el promedio de las peras está alrededor de los 190 gramos. Con esto vemos en Humberto ahora posee algunas nociones de variabilidad muestral y empieza desarrollar nociones de estimación por intervalos.

La técnica de Humberto:

1. Calcula el promedio de la muestra de tamaño 50.

Esquemas de uso:

El “Summary” permite calcular el promedio de un conjunto de datos.

Esquemas de acción instrumentada:

Hace clic en el icono “Summary” en la parte superior de la pantalla y lo lleva hasta la hoja en blanco. Hace clic sostenido sobre la columna que contiene los valores de los pesos de las peras y las arrastra hasta el cuadro del “Summary”, de esta manera obtiene el promedio de la muestra.

Nociones:

Noción de relación entre la muestra y su población.

2. Crea una medida para calcular el promedio.

Esquemas de uso:

En el inspector de la colección se puede introducir una fórmula que calcula automáticamente un estadístico de una muestra.

La fórmula “mean()” permite calcular el promedio de un conjunto de datos

Esquemas de acción instrumentada:

Hace clic derecho sobre el icono de la colección “sample of peras” y selecciona la opción “sample more cases”, obteniendo una nueva muestra de la muestra disponible, una re-muestra, sin embargo esta no era la intención de Humberto. Luego hace doble clic sobre la nueva colección “sample o sample of peras”, crea la medida usando la expresión “mean(peso_gr)”.

Nociones:

Noción de variabilidad de la media muestral.

3. Simula la toma de 10 re-muestras y calcula el promedio en cada una.

Esquemas de uso:

En el inspector de la colección se puede simular la toma de nuevas muestras del mismo tamaño, calculando en cada una su promedio.

En el inspector de la colección de medidas se puede elegir la cantidad de muestras y medidas que se quiere tomar.

Esquemas de acción instrumentada:

Hace clic derecho sobre la colección “sample of sample of peras” y selecciona la opción “collect measures”. En la nueva colección de las medidas colecta 10 de ellas.

Nociones:

Noción de distribución de la media muestral.

4. Simula la toma de 1.000 re-muestras de tamaño 50 calculando en cada una el promedio.

Esquemas de uso:

Puede simular la toma de 1.000 medidas bajo las mismas condiciones en el inspector de las medidas.

En la pestaña “sample” del inspector de las medidas de la colección puede elegir la cantidad de medidas que desea tomar.

Esquemas de acción instrumentada:

Hace doble clic en la colección “measures from sample of sample of peras”, e introduce el número 1.000 y hace clic en el botón “collect more meassures”.

Nociones:

Noción de distribución muestral de la media y ley de los grandes números.

5. Construye el histograma de los 1000 promedios arrojados por el programa.

Esquemas de uso:

El icono Graph permite construir el histograma de un conjunto de datos

Esquemas de acción instrumentada:

Hace clic sostenido sobre el icono de “Graph” en la parte superior de la pantalla y lo arrastra hasta la hoja en blanco, luego lleva los datos de la tabla con las medidas del paso anterior hasta el cuadro del gráfico y elige la opción “Histogram”

Hace clic en el icono “Summary” y lo arrastra hasta la hoja en blanco, hace clic sostenido en la columna de la nueva tabla y la arrastra hasta el rectángulo del “Summary”.

Nociones:

Noción de relación entre la distribución muestral de la media y la población.

Noción de distribución muestral de la media.

Noción de ley de los grandes números.

6. Toma como principal referencia de su estimación, el valor con mayor frecuencia en el histograma.

En resumen Humberto:

Manifiesta buenas nociones de relación entre el valor esperado de la media muestral y la media poblacional ya que su primera idea fue establecer una estimación a partir de una aproximación ese valor esperado de la media muestral.

Humberto también evidenció buenas nociones de la relación entre la distribución muestral de la media y la población, ya que siempre consideró que la media de la distribución muestral para establecer su estimación de la media poblacional. Durante esta actividad Humberto mostró nociones claras de ley de los grandes números y algunas ideas de la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad muestral.

Aunque las acciones de Humberto en el programa, en esta ocasión no respondieron a la técnica que él tenía en mente, es muy probable que haya desarrollado esquemas de acción instrumentada que en el futuro si sean útiles para sus propósitos.

5.4.2. Discusión de la actividad

Se realizó una discusión sobre el proceso que siguió Welfer, el cual es muy similar a lo que hizo Humberto, ya que ellos tomaron re-muestras de diferentes tamaños sobre la muestra disponible. Welfer utilizó “sample more cases” para tomar una re-muestra de tamaño 1000,

en este momento Leidy interviene y explica al grupo que con este proceder Welfer estaría tomando 1000 datos aleatoriamente con devolución de una muestra de 50 datos, el grupo decide descartar tal proceder.

Luego Daniel explica su procedimiento, el cual consistió en simular la toma de 1500 medias de muestras de tamaño 50, construir su histograma de estas medidas y tomar las marcas de clase asociadas a los 3 rectángulos más altos en el histograma. Luego de la participación de algunos estudiantes con opiniones del proceso expuesto por Daniel, la mayoría del salón se mostró de acuerdo con la estimación planteada (194 -196), este intervalo captura el verdadero valor de la media poblacional (194,6).

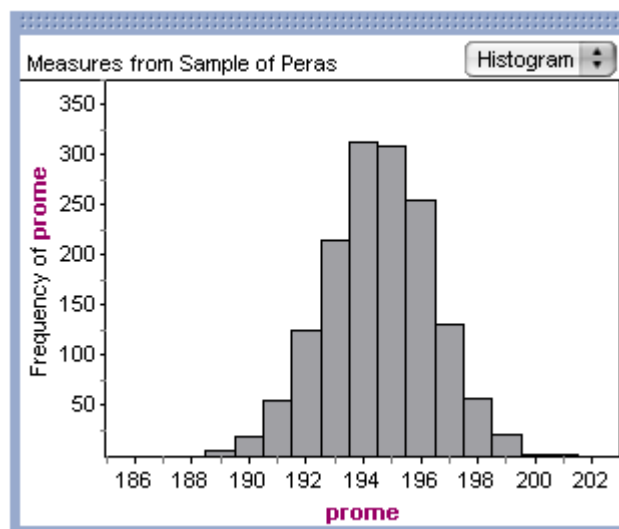


Ilustración 14. Histograma presentado por Daniel en la discusión de la actividad 3

Profesor: ¿Por qué esos valores? ¿Y 197 o 193 por qué no?

Néstor: 197 no por que la diferencia entre los picos es muy marcada, el pico más alto tiene como 350 muestras mientras que el de 197 tiene como 120, ¡menos de la mitad!

Durante la discusión no fue posible hacer que los estudiantes tomaran la decisión por sí mismos de ampliar el ancho del intervalo, a pesar que se le dieron varias vueltas al asunto.

5.4.3. Conclusión de la actividad

En esta actividad se ha logrado desarrollar en los estudiantes nociones de la relación entre la distribución de la media muestral y la media poblacional. A su vez, la mayoría de los estudiantes al hacer y observar lo que arrojaban las simulaciones, han generado buenas nociones sobre la variabilidad de la media muestral y han pasado de considerar estimaciones puntuales a establecer estimaciones por intervalos. Por otra parte, al simular la toma de grandes cantidades de muestras, ellos han desarrollado buenas nociones de ley de los grandes números.

Por lo visto, los estudiantes empiezan a ver con mayor claridad que se enfrentan a situaciones estocásticas, ya que vimos en ellos comportamientos tales como tratar de encontrar tendencias en una muestra, usar el Ctrl+y para observar variación muestral y la repetición de todo el proceso de construcción de la distribución muestral para ver los valores que tomaba su media.

Ya sea por haberse equivocado o por haberlo hecho correctamente, creemos que los estudiantes han podido refinar sus esquemas de uso y de acción instrumentada gracias a esta actividad. Han empezado a ver en la simulación y en Fathom herramientas útiles para el establecimiento de estimaciones.

Consideramos que los estudiantes han tenido la oportunidad observar y generar buenas nociones sobre elementos conceptuales que en el método formal se encuentran implícitos y que en la instrucción tradicional son muy complicados abordar.

5.5. ACTIVIDAD 4.

La siguiente actividad tiene como propósito presentar el método del Bootstrap a los estudiantes. La actividad está concebida en dos partes: en la primera parte se busca indagar sobre las ideas que posee el estudiante y las decisiones que estaría dispuesto a tomar cuando tiene a su disposición una muestra pequeña en comparación a la población; con esto se espera observar la existencia de nociones que se asemejen a las ideas que conforman el método del Bootstrap.

En la segunda parte se proporciona un archivo en Fathom donde aparecen dos tablas con los valores de dos muestras aleatorias tomadas de una misma población $N(125,27;15,14)$, cabe aclarar que esta ha sido previamente generada en Fathom con 5000 datos y se mantiene oculta durante toda la actividad.

Para cada una de las muestras proporcionadas se sugiere un proceso diferente, a partir la primera (muestra1) se construye la distribución muestral de la media simulando la extracción aleatoria de nuevas muestras, cuya intención también es dar al estudiante una idea del verdadero valor de la media poblacional. con la segunda (muestra2) se guía al estudiante hacia la construcción de la distribución Bootstrap para luego hacer una comparación de los métodos y las distribuciones para que los estudiantes decidan si es conveniente utilizar el Bootstrap para establecer estimaciones a partir de una muestra.

A continuación se presenta la actividad 4:

4.1. Una fábrica de enjuague bucal desea establecer la cantidad promedio de líquido que la máquina dispensadora automática ha vertido en las botellas de una producción de más de 5000 unidades.

- a) ¿Cómo podría establecer dicho promedio? Justifique su respuesta.
- b) Suponga que por cuestiones de tiempo solo tiene a su disposición una muestra aleatoria de 40 botellas ¿Cómo podría determinar la cantidad de líquido promedio vertida en todas las botellas? Justifique su respuesta.

4.2. **Discusión.**

4.3. Simulación en Fathom.

- 1. Abra el archivo **ACT4**, aparecerán en su ventana dos muestras diferentes de una misma población cada una con su respectiva tabla.

Para la **muestra 1** Simulemos la situación suponiendo que podemos extraer muestras del mismo tamaño con reposición:

- 2. Cree la medida (**measure**) para la colección muestra1.
- 3. Colecte las medidas y simule la toma para la cantidad de muestras que desee.
- 4. Realice el histograma
 - a) ¿Qué interpretación le da al gráfico y a los valores calculados?
 - b) ¿Cuál es la cantidad promedio de líquido que hay en las botellas de esta producción?

Para la **muestra 2** vamos a suponer que disponemos tan sólo de una muestra y sigamos un proceso diferente:

5. Haga clic derecho sobre el icono muestra 2 y seleccione la opción “sample cases”, aparecerá un nuevo icono en su ventana.

6. Haga doble clic en este nuevo icono y en la ventana que aparece seleccione las opciones “Replace existing cases” y “with replacement”, cambie el “10” por un el número “40” y dé clic en el botón “sample more cases”.

7. Con el icono “sample of muestra 2” iluminado arrastre una tabla desde la parte superior de la pantalla.

8. Cree la medida promedio2 en la colección “sample of muestra 2”.

9. Colecte las medidas de la colección “sample of muestra 2” y cree la tabla.

10. En el inspector de la colección “Measures from sample of muestra 2” seleccione únicamente “Replace existing cases”, elija la misma cantidad de muestras que tomo en el paso 3 para la muestra 1 y recolecte las medidas.

11. Realice el histograma con los datos de la tabla “Measures from sample of muestra 2”

a) ¿Cómo interpreta este gráfico? Justifique su respuesta

b) Según lo realizado para la muestra 2 ¿Cuál estima que es el valor promedio de líquido vertido en las botellas?

c) ¿Qué diferencias y similitudes hay entre este gráfico y el construido para la muestra1?

d) ¿Cómo es la variabilidad de este gráfico con respecto al construido para la muestra1?

e) ¿Qué podría hacer para mejorar la estimación con la muestra 2?

5.5.1. Análisis de la actividad

Antes de empezar a desarrollar la actividad se realizó una pequeña discusión sobre el contexto de la situación planteada, allí se hicieron aclaraciones que permitieran a los estudiantes comprender mejor de qué se trataba el problema. Básicamente se hizo un símil con los procesos de control de calidad, en los cuales se intenta determinar si una máquina está funcionando correctamente a partir de la toma de muestras, teniendo en cuenta naturalmente su variabilidad.

Néstor:

4.1. Una fábrica de enjuague bucal desea establecer la cantidad promedio de líquido que la máquina dispensadora automática ha vertido en las botellas de una producción de más de 5000 unidades.

a) ¿Cómo podría establecer dicho promedio? Justifique su respuesta.

“Tomaría una muestra aleatoria de las 5000 botellas, por decir cada 30 botellas tomo una y la peso, tabulo estos datos hasta llegar a las 5000. Teniendo el peso obtengo la masa y de acá el volumen, y con esta cantidad ya sabemos el volumen. Luego al sumar estos volúmenes y promediarlos obtendré un volumen promedio y este lo comparo con el volumen de las botellas individualmente, si encuentro que son similares sabré que la máquina está calibrada y me vierte la cantidad adecuada”.

Néstor evidencia buenas nociones de variabilidad y de relación entre muestra-población, de entrada plantea determinar el promedio de todas las botellas a partir de una muestra,

considera que para lograr que ésta tenga un comportamiento similar al de la población y se aprecie su variabilidad, debe hacer un muestreo sistemático. Aborda el problema de la calibración de la máquina en términos de la variabilidad de las medidas cuando dice: “obtendré un volumen promedio y este lo comparo con el volumen de las botellas individualmente, si encuentro que son similares sabré que la máquina está calibrada y me vierte la cantidad adecuada”. Es decir, Néstor trasciende el valor promedio, asume el problema interesante que es la calibración de la máquina. Esto quiere decir que Néstor realmente cree que se pueden hacer estimaciones a partir de una sola muestra.

b) Suponga que por cuestiones de tiempo solo tiene a su disposición una muestra aleatoria de 40 botellas ¿Cómo podría determinar la cantidad de líquido promedio vertida en todas botellas? Justifique su respuesta.

“De la misma manera que en el anterior punto, teniendo en cuenta que la muestra no la tomare en las primeras 40 botellas del lote si no, a través de ella, ósea $5000/40$, y esto me da 125 botellas, tomo una la peso, saco la masa y hallo su volumen, los promedio y este V_{prom} me servirá para compararlo con el lote completo de 5000”.

Néstor pone en juego sus nociones de la variabilidad y de relación muestra-población, lo cual manifiesta en la forma en que planteó la toma de la muestra, busca que la muestra evidencie un comportamiento similar al de la población por medio de un muestreo sistemático. Por otro lado en principio Néstor no había comprendido completamente la situación ya que seguía asegurando que podía comparar lo obtenido en la muestra con el total de las botellas, entonces se le hizo notar que con lo único que contaba era con una muestra de 40 botellas, a lo cual responde: “Yo creo que al estar las 40 botellas dentro de las 5000 y al ser un lote intercalado yo confiaría en que su promedio es el mismo de las 5000”. Por lo

tanto Néstor se termina quedando con una estimación puntual a partir de la muestra, confirmando así sus nociones de relación muestra-población y mostrando que sí cree poder hacer estimaciones sobre una población basado en una sola muestra resaltando el hecho de que si la muestra recorre toda la población, la estimación es más acertada, notable intuición muestral..

4.3. Simulación en Fathom.

1. Abra el archivo **ACT4**, aparecerán en su ventana dos muestras diferentes de una misma población cada una con su respectiva tabla.

Para la **muestra 1** simulemos la situación suponiendo que podemos extraer muestras del mismo tamaño con reposición:

2. Cree la medida (**measure**) para la colección muestra1.
3. Colecte las medidas y simule la toma para la cantidad de muestras que desee.
4. Realice el histograma.

- a) ¿Qué interpretación le da al gráfico y a los valores calculados?

“Que el promedio en ml está cercano a 125 ml ya que he repetido 1000 veces la muestra de sus promedios de tamaño 40 inicial y con este dato podré decir que el promedio de toda la muestra es este y para ser un poco más críticos con el error porcentual diré que es un intervalo 124,5-126,5”.

Néstor ratifica las buenas nociones que ha venido manifestando en las anteriores actividades, relación entre la distribución muestral de la media y la población, ley de los grandes números, estimación por intervalos y algunas nociones del Teorema Central del

Límite. Su intervalo contiene el verdadero valor del promedio poblacional, y si se calculara con el método formal tendría asociada una confianza del 32%.

b) ¿Cuál es la cantidad promedio de líquido que hay en las botellas de esta producción?

“La cantidad promedio será un valor fijo que al multiplicarlo por 40 que es la muestra inicial me dará el total de todo el líquido o de la suma de los mL individuales de cada botella por tanto la cantidad promedio es de 125,35”.

Al preguntarle a Néstor si con su respuesta solo se está refiriendo al promedio de 40 botellas, contesta que lo que escribió en los primeros renglones de esta respuesta, es solo una aclaración de cómo funciona el promedio. Entonces se le cuestiona la razón por la cual decidió escoger este valor, a lo cual responde que inicialmente consideró un intervalo pero cree que lo que debe encontrar es el promedio exacto así que tomó el valor en el histograma de los promedios que presentaba el pico más alto. Néstor no termina de aceptar como respuesta a un intervalo de valores, pensando en términos prácticos insiste en hallar el valor exacto. Esta confrontación entre la estimación puntual y la estimación por intervalos que si bien se resuelve teóricamente por la estimación por intervalos cuando se reconoce la existencia de la variabilidad, se complica un poco en términos prácticos cuando es necesario asumir un solo valor. Pensamos que este proceso de estimación por intervalos se comprende mejor en un contexto de pruebas de hipótesis cuando la confrontación se realiza sobre la viabilidad de asumir un cierto valor para el parámetro en estudio. De cualquier forma Néstor ha logrado estimaciones bastante buenas del verdadero promedio poblacional (125,27 mL) y ha observado algunas características de la distribución muestral de la media que podrá utilizar como referencia para comparar más adelante con la distribución Bootstrap.

Para la **muestra 2** vamos a suponer que disponemos tan sólo de una muestra sigamos un proceso diferente:

En esta parte simula la toma una gran cantidad de re-muestras de la muestra 2 del mismo tamaño 40 calculando el promedio en cada una de las re-muestras y se construye el histograma de dichos promedios:

a) ¿Cómo interpreta este gráfico? Justifique su respuesta.

“El histograma me muestra el promedio de la muestra de tamaño 40, repetido 1000 veces, o sea tomamos el promedio de cada muestra lo tomamos y lo repetimos 1000 veces, en mi caso el promedio está entre 126,4 y 128,5”.

En la respuesta escrita de Néstor no es claro si está comprendiendo el proceso simulado, sin embargo en su entrevista describe ideas más cercanas, dice: “En la muestra hay valores repetidos, entonces es como si hubiéramos sacado una muestra y volver a sacar pero sacamos en la misma muestra de 40, eso nos reduce la exactitud porque lo que se busca es sacar la mayor cantidad de diferentes muestras”.

Néstor manifiesta buenas nociones sobre la variabilidad en el re-muestreo, al considerar que debe existir menos exactitud en este proceso por causa de los valores repetidos, asume que la estimación es mejor si los valores no se repiten, Sin embargo, da una estimación por intervalo basado en la distribución de las medias bootstrap.

El intervalo que Néstor plantea en esta respuesta no contiene al verdadero valor de la media poblacional y teóricamente tendría una confianza del 33%. Al parecer no ha sido

natural para Néstor relacionar lo encontrado en esta simulación de re-muestreo con los resultados en el tratamiento que se le dio a la muestra 1.

b) Según lo realizado para la muestra 2 ¿Cuál estimaría que es el valor promedio de líquido vertido en las botellas?

“Este promedio está cercano a 127 mL por tanto diré que el promedio es 127 mL porque me están pidiendo el promedio de todas las botellas”.

Néstor ratifica que posee algunas nociones de la existencia de una relación entre la distribución Bootstrap y la población, ya que, aunque se queda con un valor puntual, lo ha seleccionado por ser el valor del histograma construido con los promedios de 1000 re-muestras, que presentaba la mayor frecuencia.

c) ¿Qué diferencias y similitudes hay entre este gráfico y el construido para la muestra1?

“Al tomar más casos, noto que hay más casos de lo mismo, o sea que se repiten las muestras iniciales en la nueva muestra de 40 por tanto esta variabilidad me desplaza hacia la derecha el promedio y me da aproximadamente 2mL de diferencia entre una gráfica y la otra. Lo similar es que la forma y picos se me mantiene en tanto a la forma de la gráfica”.

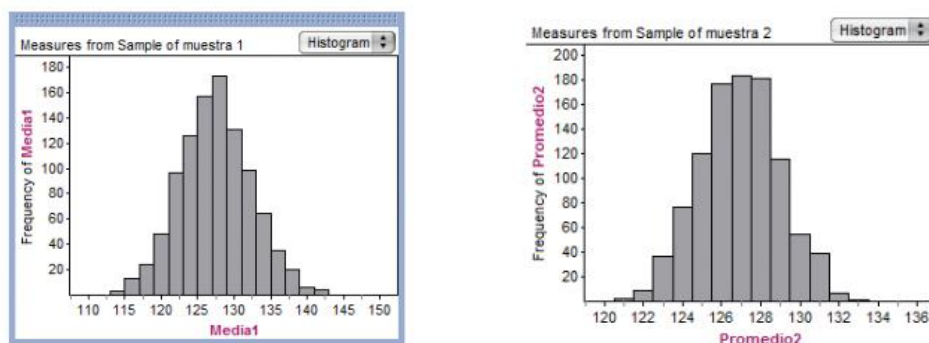


Ilustración 15. Aproximación de la Distribución muestral de la media (Izquierda) y Distribución Bootstrap de Néstor. Actividad 4.2

Al comparar la distribución muestral de la media y la distribución Bootstrap, Néstor observa comportamientos similares en cuanto a su forma, en la entrevista él las describe como pirámides, es decir, que está notando, que ambas son simétricas y parecen comportarse normalmente, al tiempo nota que la distribución Bootstrap se encuentra centrada en un valor diferente pero no muy lejano, lo cual podría servirle en un futuro para mejorar sus estimaciones por medio del re-muestreo y de la distribución Bootstrap.

d) ¿Cómo es la variabilidad en este gráfico con respecto al construido para la muestra1?

“La variabilidad es de 2mL aproximadamente desplazado hacia la derecha como anteriormente lo dije”.

Néstor se fija en la diferencia entre las medias de las dos distribuciones pero no se detiene a observar el rango de variación en cada caso. Se le preguntó la razón por la cual la distribución construida con el re-muestreo se encuentra desplazada y lo atribuye al hecho de sacar muestras de una misma muestra, porque se toman valores repetidos.

e) ¿Qué podría hacer para mejorar la estimación con la muestra 2?

“Quitar el paso de simple cases ya que hacer una re-muestra en esta misma me parece valores totalmente iguales en una misma tabla y se supone que la muestra son valores diferentes como en la muestra inicial”.

Néstor no se siente tranquilo con el re-muestreo y con la distribución del Bootstrap, asegura que proceder de esta manera favorece el error, ya que los valores que se extraen pueden ser el mismo. Esto hace que Néstor no confíe en la distribución Bootstrap como una ayuda para establecer su estimación, dudas que disiparía un poco en la discusión cuando se hizo la comparación de ambos histogramas.

En resumen, Néstor:

Posee buenas nociones sobre la relación entre muestra-población, Ideas claras sobre estimación por intervalos y algunas nociones sobre la relación entre la distribución del Bootstrap y la población.

Por lo que Néstor ha podido hacer y observar, no se muestra dispuesto a aceptar o creer que el método del re-muestreo puede ser una buena alternativa para el establecimiento de estimaciones, debido que se toman muestras de la misma muestra y con el mismo tamaño, lo que para Néstor produce menos exactitud, él no tiene en cuenta una de las primeras ideas que planteó en esta actividad, asumir que la muestra se comporta muy similar a la población. Del mismo modo a Néstor le preocupa tener que tomar intervalos más anchos a los que está acostumbrado, pues considera que está perdiendo precisión. Esta última postura de Néstor refleja el conflicto entre exactitud y grado de confianza, aspecto nada fácil de conciliar como aquí se evidencia y lo reporta Rangel (2014).

Otro de los objetivos de esta actividad fue afianzar y desarrollar esquemas de uso en el estudiante. Néstor ha reafirmado sus esquemas de uso para las tablas, el inspector de la colección, el icono “Graph”, la fórmula “mean” y las medidas, y habrá construido algunos nuevos esquemas de uso como los referentes a la toma de re-muestras.

Luz:

4.1. Una fábrica de enjuague bucal desea establecer la cantidad promedio de líquido que la máquina dispensadora automática ha vertido en las botellas de una producción de más de 5000 unidades.

a) ¿Cómo podría establecer dicho promedio? Justifique su respuesta.

“Considero que la forma correcta para establecer un promedio para la cantidad vertida en las botellas sería la de sacar una muestra de tamaño 40, verter el contenido de cada una de estas en un recipiente con la medida que se espera tenga, se hace este procedimiento con cada una y se saca el promedio de estas, de esta forma podíamos saber más o menos cuanta cantidad se vierte en cada botella”.

Por lo escrito en su respuesta, se podría pensar que Luz está considerando de entrada, sacar el promedio de una muestra y utilizarlo como estimación puntual del promedio de la población, por esto se le preguntó si con ese promedio de la muestra determinaría el de la población y respondió: “Para todas no, es una muestra muy imparcial porque es una muestra muy pequeña, lo ideal sería sacar más muestras, tomar unas 100 o 200 muestras y saber el promedio de cada una de ellas, de esas sacar un promedio y ese sería un promedio aproximado de las 5000 botellas”.

De cualquier modo, vemos que Luz considera posible establecer inferencias sobre una población a partir de una muestra, evidenciando nociones de relación muestra-población. Al ampliar su respuesta, deja ver que también considera una segunda opción, estimar el valor esperado de la media por medio de la toma de 200 muestras y desde luego utilizarlo como una estimación puntual.

Nuevamente Luz ratifica en esta pregunta sus nociones de ley de los grandes números, de relación de la distribución muestral de la media y la población, y de variabilidad.

b) Suponga que por cuestiones de tiempo solo tiene a su disposición una muestra aleatoria de 40 botellas ¿Cómo podría determinar la cantidad de líquido promedio vertida en todas las botellas? Justifique su respuesta.

“Sumaría las 40 botellas y las divido en 40 y eso me va a dar el promedio con menor exactitud, quizá puedo hallar el rango correcto, 5 mL de diferencia hacia arriba y 5 hacia abajo del promedio que hallaremos, no será exacto pero sí cercano al verdadero”.

Contrario a lo que se venía observando de Luz sobre las estimaciones puntuales, es más natural para ella considerar que la estimación debe ser un intervalo, esto debido a la variabilidad del muestreo y a que ahora se cuenta con una sola muestra. Sin embargo su intervalo estaría construido con una variación intuitiva de ± 5 ml a partir de la media obtenida en la muestra. Con esto, se puede decir que Luz posee buenas nociones de variabilidad muestral, relación entre muestra-población y estimación por intervalos.

4.3. Simulación en Fathom.

5. Abra el archivo **ACT4**, aparecerán en su ventana dos muestras diferentes de una misma población cada una con su respectiva tabla.

Para la **muestra 1** Simulemos la situación suponiendo que podemos extraer muestras del mismo tamaño con reposición:

6. Cree la medida (**measure**) para la colección muestra1.
7. Colecte las medidas y simule la toma para la cantidad de muestras que desee.
8. Realice el histograma.

a) ¿Qué interpretación le da al gráfico y a los valores calculados?

“Los valores calculados se refieren a el promedio de cada una de las muestras de tamaño 40”.

b) ¿Cuál es la cantidad promedio de líquido que hay en las botellas de esta producción?

“Según estos datos no le puedo asignar un promedio exacto puesto que se encuentra en constante variación, sí sería posible asignarle un rango a este promedio en el cual tiende a aparecer sus picos máximos que es de 124 a 127”.

Luz muestra avances en sus estimaciones por intervalos, decide establecer su intervalo tomando las marcas de clase de los rectángulos notablemente más altos del histograma, allí también se observan avances en sus nociones de variabilidad muestral y de relación entre la distribución muestral de la proporción y la población. Nuevamente ella ratifica que le es natural establecer una estimación por medio de intervalos. El intervalo propuesto por Luz

contiene el verdadero valor de la media de la población y se le podría asociar teóricamente una confianza del 45%.

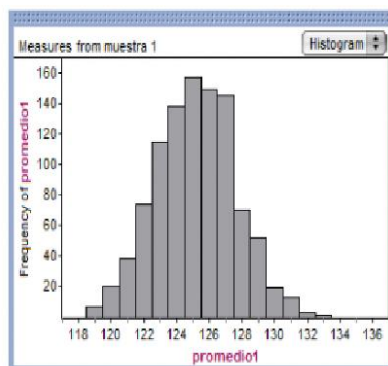


Ilustración 16. Histograma de las medias muestrales generado por Luz en la actividad 4

Para la **muestra 2** sigamos un proceso diferente:

Se simula la toma una gran cantidad de re-muestras de la muestra 2 del mismo tamaño 40 calculando el promedio en cada una de las re-muestras y se construye el histograma de dichos promedios:

a) ¿Cómo interpreta este gráfico? Justifique su respuesta.

“Este nuevo grafico es posible interpretarlo como los distintos promedios asignados a muestras de una muestra”.

b) Según lo realizado para la muestra 2 ¿Cuál estimaría que es el valor promedio de líquido vertido en las botellas?

“Para mí el promedio vertido en cada botella estaría entre 125 y 127 ml según los datos que me brinda la gráfica, le asigno rango porque según ésta no es posible asignarle un valor exacto”.

Nuevamente Luz establece un intervalo para su estimación, siguiendo la misma idea que utilizó en la simulación de la muestra1, tomar los valores asociados a los rectángulos de mayor altura. De esta forma Luz tiene nociones de relación entre la distribución Bootstrap y la población, su noción de variabilidad le hace afirmar en entrevista, que se debería tomar un intervalo y no un valor exacto ya que se cuenta con una sola muestra, evidenciando así buenas nociones de estimación por intervalos. La respuesta dada por Luz contiene el verdadero valor de la media poblacional.

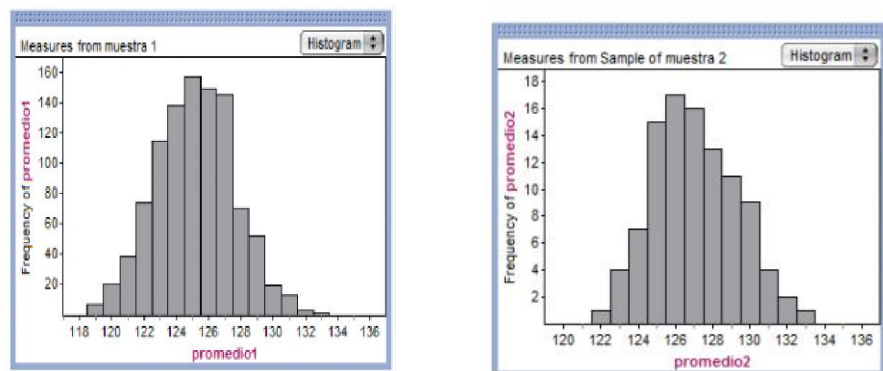


Ilustración 17. Distribución muestral de la media vs Distribución Bootstrap según Luz. Actividad 4.

c) ¿Qué diferencias y similitudes hay entre este gráfico y el construido para la muestra1?

“La diferencia más notoria es que su rango se hace más reducido y sus picos más altos los encontramos en mayor proporción. Al hacer más grande el intervalo va a existir menos error, el verdadero valor promedio vertido en la botellas está entre este promedio”.

Observando el video tomado de la pantalla de Luz se puede notar que para esta parte del proceso ella solo simuló la toma de 100 re-muestras, sin embargo, ella extrae del histograma buena información sobre la variabilidad y la forma de la distribución Bootstrap. Por lo visto cuando Luz asegura que existe menos error por aumentar el ancho del intervalo se está refiriendo a menos probabilidad de equivocarse.

d) ¿Cómo es la variabilidad en este gráfico con respecto al construido para la muestra1?

“la variabilidad se nota en que van a ser más reducidos”.

Luz no aclara muy bien a que está haciendo referencia con esta frase, pero lo que se puede entender es que en su procedimiento observó que el histograma hecho con la muestra2 (Bootstrap) presenta menor rango de variación que el de la muestra1 (distribución muestral de la media).

e) ¿Qué podría hacer para mejorar la estimación con la muestra 2?

“Podría tomar más promedios, es decir, yo tome 100 promedios pero podría tomar muchísimos más y así se me va a hacer más certero cual es la cantidad real”.

No es claro por qué Luz decidió simular la toma de solo 100 muestras, ella asegura que simplemente así lo consideró, pero es consiente que si tiene en cuenta una cantidad mayor podrá obtener mejores resultados, mostrando que sí posee nociones de ley de los grandes números aunque no las haya plasmado en su simulación.

En resumen, Luz:

Considera de manera más natural, cuando solo tiene a su disposición una muestra, que es necesario utilizar un intervalo para estimar un parámetro poblacional. Luz evidencia buenas nociones de relación entre el comportamiento de la muestra y la población, ya que consideró natural establecer inferencias basadas en tan solo una muestra. Al parecer ve en el re-muestreo una ayuda para determinar qué tan ancho hacer su intervalo, mostrando así buenas nociones de relación entre la distribución Bootstrap y la población. En ella tampoco aparecen de forma natural ideas similares al método del Bootstrap, pero finalmente termina viendo en él una opción para establecer una estimación cuando se tiene una sola muestra.

Luz posee buenos esquemas de uso para los iconos “Graph” y “Table”, así como para las “measures” y los inspectores de cada colección. Ha desarrollado nuevo esquemas de uso para la opción “sample more cases” y necesita perfeccionar aquellos esquemas que se relacionan con el uso del histograma y la cantidad de re-muestras a tomar.

Sergio:

4.1. Una fábrica de enjuague bucal desea establecer la cantidad promedio de líquido que la máquina dispensadora automática ha vertido en las botellas de una producción de más de 5000 unidades.

a) ¿Cómo se podría establecer dicho promedio? Justifique su respuesta.

“Podríamos tomar como muestra la población total (5000 unidades) y tomar la cantidad de líquido de cada envase, sumarlas y dividir las entre la cantidad total”.

La respuesta de Sergio es correcta, ésta sería la manera de obtener el promedio de toda la población, aunque se pretendía observar si el estudiante consideraba la toma de muestras para

establecer una estimación, la respuesta de Sergio era una posibilidad debido a que la pregunta es totalmente abierta. Dentro de sus ideas siempre ha estado que entre más grande sea la muestra, más se va a parecer a la población, por eso, sin nada que lo limite, lo más sensato para él es tomar toda la población.

b) Suponga que por cuestiones de tiempo solo tiene a su disposición una muestra aleatoria de 40 botellas ¿Cómo podría determinar la cantidad de líquido promedio vertida en todas botellas? Justifique su respuesta.

“Se toma la cantidad de las 40 botellas, se suman las 40 y al resultado lo divide entre 40, el resultado es el promedio de una botella, este resultado se multiplica por 5000 que es la población total. El resultado final es el promedio de las 5000 unidades”.

Aunque se observa cierta confusión en Sergio con respecto al promedio, vemos que su idea va en dirección a asumir el promedio de la muestra de 40 como el mismo promedio de la población, lo cual deja ver que Sergio concibe que la muestra debe reflejar el comportamiento de la población, es decir que posee buenas nociones de relación entre muestra-población.

4.3. Simulación en Fathom.

f) Abra el archivo **ACT4**, aparecerán en su ventana dos muestras diferentes de una misma población cada una con su respectiva tabla.

Para la **muestra 1** Simulemos la situación suponiendo que podemos extraer muestras del mismo tamaño con reposición:

- g) Cree la medida (**measure**) para la colección muestra1.
- h) Colecte las medidas y simule la toma para la cantidad de muestras que desee.
- i) Realice el histograma.

- a) ¿Qué interpretación le da al gráfico y a los valores calculados?

“Todos los valores van desde 117-134 ml, y todos los valores tienden a 125 ml teniendo los más altos picos entre 124-127, con muestras de 2500 promedios de muestra 40 de forma aleatoria”.

Sergio ha manifestado durante las últimas actividades tener buenas nociones de ley de los grandes números, ya que en varias ocasiones lo que le ha dado mayor seguridad en sus estimaciones es simular la toma de más de 2000 muestras, según lo explicado por Sergio, él fue aumentando la cantidad de muestras hasta que observó diferencias marcadas entre las alturas de los rectángulos del histograma. Además Sergio se fija en el rango de variación de la distribución lo cual es evidencia de que concibe la variabilidad de la distribución muestral de la media y al resaltar que nota una tendencia al valor 125, lo más seguro es que está pensando en la relación entre la media de la distribución muestral y la media de la población.

- a) ¿Cuál es la cantidad promedio de líquido que hay en las botellas de esta producción?

“Están en un intervalo entre 124 y 127 pero siendo muy cercano a 125, y no tomé un intervalo más grande porque los otros valores no son suficientemente representativos o sus picos no son tan altos”.

Sergio utiliza la misma idea que manifestó en la actividad 3, y es tomar los valores en el histograma de los promedio muestrales, asociados a los rectángulos notoriamente más altos y establecer un intervalo que contenga al verdadero valor de la media. De esta forma Sergio evidencia nociones estimación por medio de intervalos y por supuesto nociones de relación entre la distribución muestral de la media y la población.

Para la **muestra 2** sigamos un proceso diferente:

Se simula la toma una gran cantidad de muestras de la muestra 2 del mismo tamaño 40 calculando el promedio en cada una de las re-muestras y se construye el histograma de dichos promedios:

a) ¿Cómo interpreta este gráfico? Justifique su respuesta.

“A la muestra de 40 se le saca otra muestra de 40 y a la nueva muestra se le saca el promedio que se repite 2500 veces. La gráfica muestra grandes picos entre 126 y 127”

Aunque Sergio no menciona que el re-muestreo se hace con reposición, se podría decir que está entendiendo el proceso del Bootstrap, esto debido a que ha observado que la distribución construida bajo este método presenta variabilidad y ha simulado la toma de 2500 re-muestras, poniendo en juego sus nociones de ley de los grandes números, de distribución y de enfoque frecuencial.

b) Según lo realizado para la muestra 2 ¿Cuál estimaría que es el valor promedio de líquido vertido en las botellas?

“Podría ampliar el rango desde 125 a 128 por que también son picos bastante considerables, mirando las tendencias al hacer el experimento, el promedio ha estado entre 126 y 127”.

La idea de Sergio es tomar un intervalo más grande para su estimación que el tomado en el histograma construido con la muestra1, esto es debido a que en el nuevo histograma los rectángulos notablemente más altos se encuentran entre 125 y 128. En este intervalo se encuentra el verdadero valor de la media de la población y teóricamente tendría una confianza del 46,5% asumiendo la desviación de la población como conocida.

Sergio evidencia nociones de relación entre muestra-población, además, al utilizar la distribución Bootstrap para dar una estimación está poniendo en juego nociones de relación entre esta distribución y la población.

c) ¿Qué diferencias y similitudes hay entre este gráfico y el construido para la muestra1?

“El rango en el que oscilan los datos en la gráfica de la muestra 1 va de 117 hasta 134 y en la muestra 2 va de 120 a 134, se redujo un poco y los picos son más marcados”

Sergio observa que aunque el rango de variación de la distribución Bootstrap es un poco menor al de la distribución muestral de la media, esa diferencia no es tan grande, idea que puede darle validez no solo al uso del Bootstrap, sino también al método formal cuando se utiliza el error estándar $\left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ para construir el intervalo. Al decir que los picos son más

marcados se está refiriendo a que en el histograma que construyó para el Bootstrap hay 4 rectángulos notoriamente más altos que los demás.

d) ¿Cómo es la variabilidad de este gráfico con respecto al construido para la muestral?

“Marca la misma tendencia hacia 125 y 127 como promedio, el espacio en que oscilan los datos en la muestra 2 es más pequeño y los picos más marcados”.

Sergio ratifica que observa menor variabilidad en la distribución de Bootstrap, al tiempo que destaca la tendencia, el valor esperado de la media en cada distribución, ya que son valores cercanos. Estas ideas pueden ser indicios de que en Sergio se están moldeando nociones de relación entre la distribución muestral y la distribución Bootstrap, y por ende relación entre muestra y población.

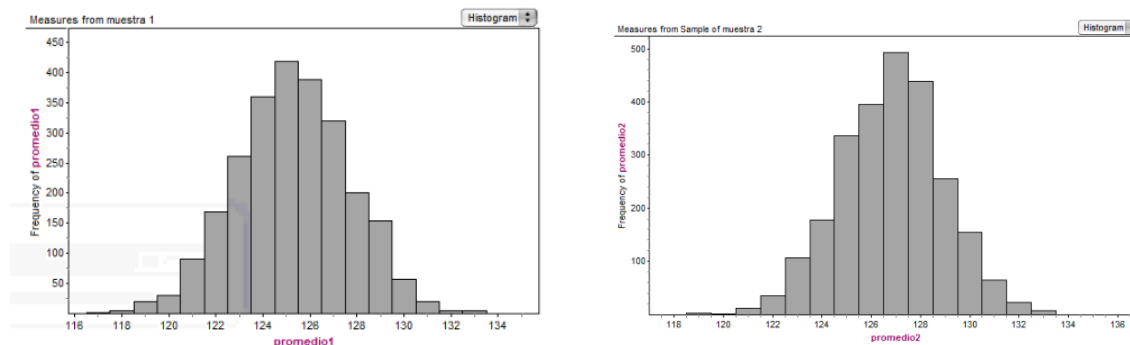


Ilustración 18. Distribución muestral de la media vs Distribución Bootstrap según Sergio.
Actividad 4.

e) ¿Qué podría hacer para mejorar la estimación con la muestra 2?

“Aumentar la cantidad de re-muestras que se le hace a la muestra principal”.

Sergio manifiesta con esta respuesta tener ideas claras sobre ley de los grandes números, así como nociones de relación entre la distribución Bootstrap y la población.

En resumen, Sergio:

Posee buenas nociones de relación entre la muestra y la población dado que considera que el comportamiento de la población se debe manifestar de algún modo en la muestra. La primera idea de Sergio al tener solo una muestra fue asumir el promedio de la muestra como estimación puntual del promedio de la población, idea que cambio des pues de las simulaciones.

Sergio manifiesta que aunque el rango de variación de la distribución Bootstrap es menor, termina siendo muy parecido al de la distribución muestral de la media, al tiempo que hay tendencias marcadas en ambas distribuciones hacia valores muy cercanos.

Él establece estimaciones por intervalos, y por lo que ha contestado ve en el Bootstrap un posible apoyo para determinar el ancho de dichas estimaciones.

Humberto:

4.1. Una fábrica de enjuague bucal desea establecer la cantidad promedio de líquido que la máquina dispensadora automática ha vertido en las botellas de una producción de más de 5000 unidades.

c) ¿Cómo se podría establecer dicho promedio? Justifique su respuesta.

“Si es por cuestiones de tiempo se podría tomar una muestra de las botellas, tomar la cantidad de líquido de cada una y luego sacar un rango en el cual podría estar la cantidad de líquido en las botellas”.

Humberto empieza a considerar que a partir de una muestra sí es posible establecer una buena estimación de un parámetro poblacional, lo cual se constituye en evidencia de que percibe relación entre el comportamiento de la muestra y la población. Además es consciente que lo más conveniente es el planteamiento de un intervalo ya que él menciona que se puede establecer un rango de valores. Estas ideas se constituyen en pilares para la comprensión tanto del método del Bootstrap como del método formal de Intervalos de Confianza.

d) Suponga que por cuestiones de tiempo solo tiene a su disposición una muestra aleatoria de 40 botellas ¿Cómo podría determinar la cantidad de líquido promedio vertida en todas botellas? Justifique su respuesta.

“Si solo tengo 40 y no puedo hacer más extracciones, yo tomaría ese promedio y luego de tenerlo daría un posible rango cercano”.

Tal como lo había descrito Humberto en su anterior respuesta, él piensa en extraer información a partir de una muestra sobre la población, él sabe que debe encontrar la forma de plantear un intervalo pero no plantea ningún procedimiento, lo que llevaría a pensar que hacer Bootstrap no es una idea que surja ni fácilmente ni naturalmente.

4.3. Simulación en Fathom.

1. Abra el archivo **ACT4**, aparecerán en su ventana dos muestras diferentes de una misma población cada una con su respectiva tabla.

Para la **muestra 1** Simulemos la situación suponiendo que podemos extraer muestras del mismo tamaño con reposición:

2. Cree la medida (**measure**) para la colección muestra1.

3. Colecte las medidas y simule la toma para la cantidad de muestras que desee.

4. Realice el histograma.

a) ¿Qué interpretación le da al gráfico y a los valores calculados?

“Entiendo que al cambiarle el valor en measures obtengo el promedio de 40 botellas, así que en la gráfica el pico más alto será el valor que más se repitió en los promedios”.

Lo descrito por Humberto es una buena interpretación del gráfico y en su descripción se perciben algunas nociones de distribución muestral.

b) ¿Cuál es la cantidad promedio de líquido que hay en las botellas de esta producción?

“Creo que la respuesta es un intervalo de 124-126”.

Nuevamente Humberto evidencia buenas nociones de estimación por intervalos y ha dejado de lado las estimaciones puntuales. Él ha elegido este intervalo porque son los valores del histograma asociados a los 3 rectángulos de mayor altura, tal como lo hicieron sus compañeros en la discusión de la pasada actividad.

El verdadero valor de la media poblacional está dentro de este intervalo y curiosamente Humberto ha construido el histograma simulando la toma de 500 muestras.

Para la **muestra 2** sigamos un proceso diferente:

Se simula la toma una gran cantidad de muestras de la muestra 2 del mismo tamaño 40, calculando el promedio en cada una de las re-muestras y se construye el histograma de dichos promedios:

f) Según lo realizado para la muestra 2 ¿Cuál estimaría que es el valor promedio de líquido vertido en las botellas?

“Según esta nueva muestra que el valor promedio de la muestra está por los 127”.

Es curioso que aunque Humberto tiene en su pantalla el histograma de las re-muestras, no ha planteado los límites del intervalo pero por su respuesta se puede asegurar que no tiene en mente una estimación puntual. Observando el video de la pantalla de Humberto, encontramos que nuevamente simula la toma de 500 re-muestras.

g) ¿Qué diferencias y similitudes hay entre este gráfico y el construido para la muestra1?

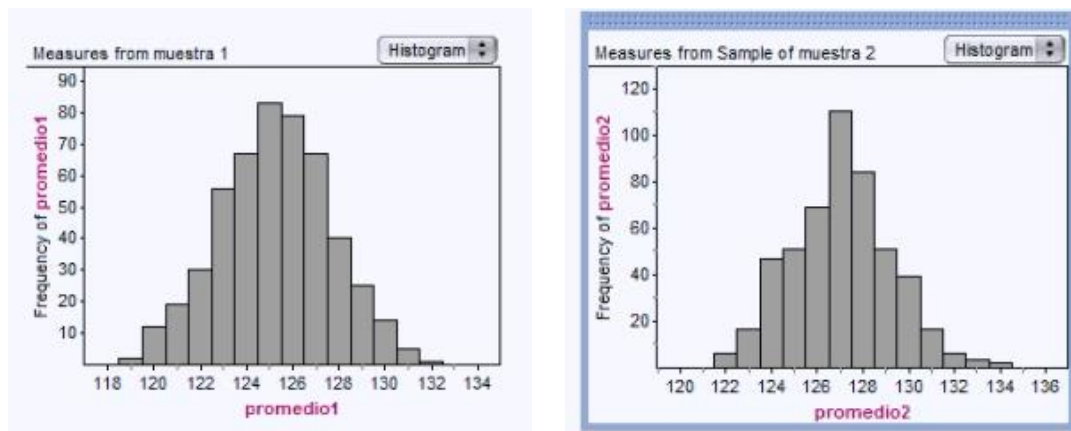


Ilustración 19. Distribución muestral de la media vs Distribución Bootstrap según Humberto. Actividad 4.

“Los picos en las gráficas son distintos, en la primera es 125 y en la segunda es 127”.

Humberto observa que las distribuciones están centradas en valores diferentes. Pero no expresa nada sobre la forma de la distribución o sobre la variabilidad.

h) ¿Cómo es la variabilidad de este gráfico con respecto al construido para la muestra1?

“El gráfico varía menos respecto al del ejercicio 1, los picos están juntos y cercanos a un valor (127 ml)”.

Humberto observa menor variabilidad en el histograma Bootstrap pero percibe relación con la aproximación de la distribución muestral de la media que él ha construido, al decir que los rectángulos de mayor altura de cada gráfico toman valores que considera cercanos.

En resumen Humberto:

Ha ampliado sus conocimientos sobre la distribución muestral de la media y evidencia algunas nociones de relación entre el comportamiento de la muestra y la población. Comienza a ver en la distribución bootstrap algunas relaciones con la distribución muestral de la media, que posiblemente pueda utilizar próximamente para establecer estimaciones por medio de una sola muestra.

Humberto ya no considera viable establecer estimaciones por medio de valores puntuales y demuestra buenas nociones sobre la relación entre la media muestral y la media poblacional.

Humberto ha afianzado algunos de sus esquemas de uso, sobre todo aquellos que tienen que ver con los iconos “Graph”, “Table” y aquellos que representan las colecciones. A su vez ha mejorado en sus esquemas de uso de las opciones “Sample cases” y “Sample more cases” con los cuales tuvo inconvenientes en la pasada actividad.

En cuanto a nuevos esquemas de uso, esperamos que haya desarrollado todos aquellos propuestos en la actividad que tienen que ver con el re-muestreo.

5.5.2. Discusión de la actividad.

Debido a los problemas individuales observados en varios estudiantes para hacer comparaciones entre los histogramas construidos a partir de las muestras 1 y 2, se organizó una discusión para tal fin, con la participación de todo el grupo, eligiendo un estudiante al azar para que proyectara la pantalla de su computador y colaborara en la discusión.

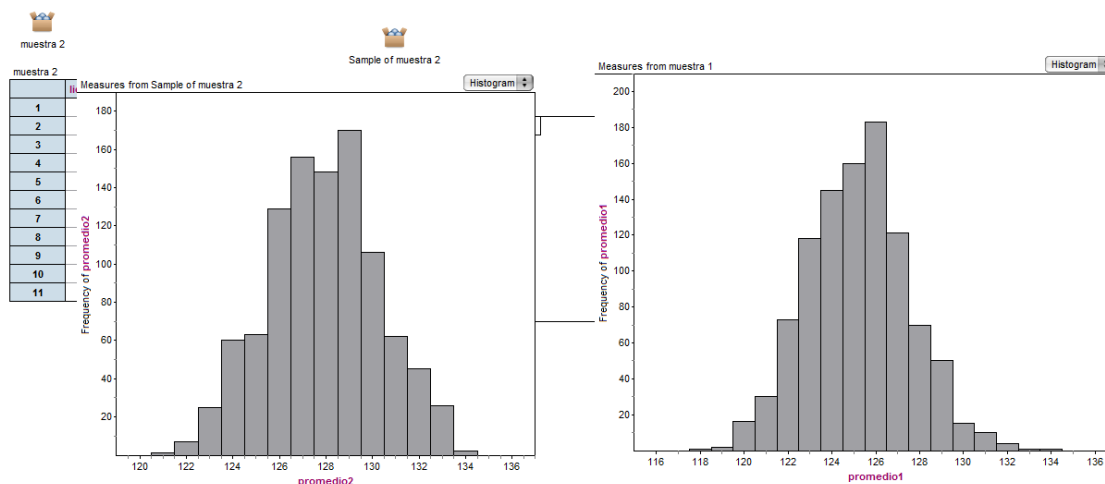


Ilustración 20. Distribución Bootstrap (Histograma promedio2) a la izquierda y Distribución muestral de la media (Histograma promedio1) a la derecha tomada de la pantalla de Nicolás.
Discusión actividad 4

A continuación se describen algunos momentos que se consideran importantes debido a que pueden generar cambios en los razonamientos de los estudiantes. Para esto se proyecta la pantalla del computador de Nicolás y allí se muestran los Histogramas uno al lado del otro.

Los estudiantes manifiestan que confían más en el procedimiento realizado para la muestra1, es decir en aquello que observan en el histograma llamado promedio1 (aproximación de la distribución muestral de la media) evidenciando seguridad al afirmar que el promedio debe estar entre 124 y 126 porque son los 3 picos más altos. El profesor sugiere que se ubiquen en la situación de tener que tomar una decisión a partir de una sola muestra, en este momento Néstor interviene y dice que lo que él sugiere en tal caso es quedarse solo con el promedio de la muestra, ya que hacer un re-muestreo (usa esta palabra ya que se aclaró que se podían referir a la muestra de una muestra como re-muestra) estaría favoreciendo el error.

Entonces el profesor pregunta: ¿en qué caso es más fácil equivocarse, cuando se hace una estimación puntual o por intervalo?, a lo cual los estudiantes responden correctamente, diciendo que con el valor puntual. Ahora se pide a los estudiantes que decidan cuál de los dos histogramas presenta una mayor variabilidad, a lo cual responden, utilizando rangos, que presenta mayor variabilidad el histograma promedio1 pero que la diferencia no es mucha y aclaran que las distribuciones no están centradas en el mismo valor.

Entonces el profesor pregunta; ¿sería posible utilizar de alguna forma la distribución del re-muestreo para establecer una estimación? Nicolás sugiere tomar un intervalo más grande a partir del histograma, entonces Néstor agrega que ya no se debería tomar los valores de los 3 picos más altos sino que sería más conveniente tomar los valores asociados a los 5 picos

más altos en busca de incluir los valores establecidos a partir del histograma promedio¹. La idea de Néstor es conveniente por que se traduce en una ganancia de nivel de confianza en la estimación Bootstrap, aunque por supuesto sería una estimación, que en este caso tiene una confianza cercana al 50%.

5.5.3. Conclusión de la actividad

En la parte individual de la actividad notamos que los estudiantes presentaron conflictos con el Bootstrap, primero no fue una idea que surgiera de forma natural y segundo, aunque se trate de un proceso sencillo de realizar, es difícil de aceptar, no creen que por medio del re-muestreo es posible establecer buenas estimaciones.

El hecho de tener que tomar decisiones a partir de una muestra ocasiona que los estudiantes consideren que definitivamente lo más conveniente es establecer un intervalo. Después de la discusión final, parece que los estudiantes empiezan a ver una posible ayuda en el método del Bootstrap para la construcción de sus estimaciones por intervalos, ya que la variabilidad de las distribuciones muestrales de la media y la media Bootstrap son muy similares.

En la discusión final se observa el desarrollo de nociones acerca de la existencia de una relación entre la distribución de Bootstrap y la distribución muestral de la media, y entre la distribución Bootstrap y la media poblacional.

Aunque el término *nivel de confianza* no ha sido utilizado en ninguna de las sesiones, sí se ha hecho referencia a la probabilidad de acertar de un intervalo, lo cual podría explicar el

hecho de que la propuesta de los estudiantes de aumentar el ancho del intervalo sea un indicio de un desarrollo con respecto a tal aspecto.

5.6. ACTIVIDAD 5

La siguiente actividad se compone de 2 situaciones en las que solo se cuenta con la información de una muestra. La primera situación involucra una variable discreta: la cantidad de individuos que presentan una característica mientras que en la segunda se proporciona una tabla en la cual están registrados 20 valores de una muestra aleatoria. Las situaciones son las siguientes:

1. El Observatorio de Salud Pública de Santander (OSPS) realizó en el 2015 un estudio con un grupo de 50 personas de Bucaramanga entre los 15 y los 64 años de edad encontrando que 11 personas de este grupo padecen de hipertensión arterial (altos niveles de tensión arterial).

Los altos niveles de la tensión arterial causan daño al corazón y a los vasos sanguíneos de órganos principales como el cerebro y los riñones. Esta enfermedad es como un “asesino silencioso”, ya que no existen síntomas que alerten sobre su presencia. ¿Qué proporción de la población bumanguesa padece esta enfermedad? Justifique su respuesta.

2. Una fundación quiere conocer la estatura promedio de los jóvenes varones menores de 20 años de la ciudad de Medellín. Como el número de estos jóvenes es muy grande, la fundación opta por seleccionar al azar un número de 20 jóvenes

menores de 20 años. Hecha la selección, procedieron a medir su estatura obteniendo la tabla que se encuentra en el archivo “**Estaturas**”.

¿Cuál es la estatura promedio de todos los jóvenes varones menores de 20 años de Medellín? Justifique su respuesta.

5.6.1. Análisis de la actividad

La técnica de Néstor en la situación 1:

Observando el video tomado de la pantalla del computador de Néstor, desglosamos a continuación la técnica que utilizó para dar solución a la situación planteada junto con las componentes de su génesis instrumental en cada paso.

1. Construye la muestra de la situación en Fathom teniendo en cuenta la proporción dada en el enunciado.

Esquemas de uso

Con el icono “collection” de la parte superior de la ventana se puede iniciar a trabajar con Fathom, arrastrándolo a la hoja en blanco.

A partir de una nueva colección se puede crear una tabla con el icono “Table” de la parte superior de la pantalla.

En las columnas de las tablas se puede introducir valores manualmente.

Esquemas de acción instrumentada

Arrastra el icono “collection” desde la parte superior de la pantalla a la hoja en blanco, luego hace lo mismo con el icono “Table”. En las casillas de la primera columna de la nueva tabla escribe 11 veces la palabra “Hiper” que representa 11 personas con hipertensión y 39 veces la palabra “Nohiper”.

Nociones

Al construir la muestra, con el objetivo de establecer estimaciones a partir de ella, Néstor pone en juego sus nociones de la existencia de una relación entre el comportamiento de la muestra y la población. El hecho de que haya construido la muestra de esta forma es evidencia de que Néstor ha ganado claridad sobre muestra, frecuencia absoluta e, incluso, podría estar pensando en la variabilidad del muestreo, lo cual se comprobará más adelante.

2. Toma una re-muestra con reposición de la muestra construida en el paso anterior.

Esquemas de uso

Con la opción “Sample cases” se toma muestras aleatorias de la muestra inicial.

En el inspector de “Sample of collection” se puede modificar el tamaño de las muestras extraídas de la muestra inicial (re-muestras), así como la modalidad de extracción, con reposición o sin reposición.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic derecho sobre el icono de la colección creada inicialmente y selecciona la opción “Sample cases” para tomar una re-muestra. Luego hace doble clic sobre la colección “Sample of collection” para que aparezca el inspector de la colección, selecciona las opciones: con reposición, reemplazar casos existentes y el mismo tamaño de la muestra original. Finalmente hace clic en el botón “Sample more cases” del inspector.

Nociones

Ratifica sus nociones de relación entre el comportamiento de la muestra y la población, Néstor evidencia buenas nociones de variabilidad en el muestreo al simular la toma de una re-muestra o muestra bootstrap. Al parecer está pesando en simular un proceso de muestreo, o mejor de re-muestreo ya que no cree conveniente establecer una estimación puntual basada solo en lo que observa en la muestra, ratificando una vez más sus buenas nociones de variabilidad y de distribución muestral.

3. Intenta crear una nueva medida que calcule directamente la proporción, sin embargo no consigue hacerla funcionar.

Esquemas de uso

En el inspector de la colección se puede crear una medida que posteriormente le permitirá simular la toma de la misma para una gran cantidad de muestras.

En la ventana de las fórmulas se pueden crear medidas, en este caso para calcular la proporción de un conjunto de datos.

La fórmula “proportion” permite calcular proporciones.

Esquemas de acción instrumentada

Hace doble clic en la colección “sample of collection”, selecciona la pestaña “measures”, hace doble clic en la casilla fórmula luego despliega las opciones de las funciones y selecciona “proportion” intenta completar la fórmula escribiendo “proportion(Hipertension)” lo cual es errado y no consigue hacer que funcione, a pesar que se hizo referencia a ella en las actividades 1 y 2, donde también se utilizó la formula “count” que funciona de forma similar.

Nociones

Aunque Néstor no logra utilizar correctamente la fórmula de proporción, su objetivo era simular el cálculo de la proporción en varias re-muestras lo cual es evidencia de buenas nociones de relación entre la distribución muestral y la población, pero para este caso como solo puede usar re-muestras se trata adicionalmente de una noción de relación entre la distribución Bootstrap y la distribución muestral.

4. Crea la medida “count” en el inspector Sample of collection”

Esquemas de uso

La fórmula “count()” permite calcular la cantidad de datos con cierta característica dentro de un conjunto de datos.

Esquemas de acción instrumentada

Hace doble clic en la colección “sample of collection”, selecciona la pestaña “measures”, hace doble clic en la casilla fórmula, luego despliega las opciones de las funciones y selecciona la función “count”, la completa escribiendo en el cuadro de fórmulas “count(hipertensión=hiper)” y hace clic en ok.

Nociones

Néstor ratifica las nociones que se describieron en el paso anterior, solo que ha tenido que utilizar la fórmula “count” que calcula la frecuencia absoluta en cada re-muestra. El enunciado de la situación puede llevarlo a calcular manualmente las proporciones, es decir estaría utilizando nociones de relación entre la distribución muestral y la población, noción de relación entre la distribución Bootstrap y la distribución muestral.

5. Simula la toma de 1000 re-muestras calculando en cada una la cantidad de veces que aparece el dato “Hiper”.

Esquemas de uso

En el icono de la colección “sample of collection” se puede simular la toma de varios valores de una medida seleccionando la opción “collect measures”

En el inspector de la colección de medidas se puede seleccionar la cantidad de valores de una medida que se quieren simular.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic derecho sobre la colección “sample of collection” y selecciona la opción “collect measures”.

Hace doble clic en el icono de la colección “measures from sample of collection”, introduce el número 1000 en el inspector y oprime el botón “collect more measures”

Nociones

Al decidir hacer re-muestras podría estar considerando la muestra como si fuese la población es decir que considera que el comportamiento de la población se debe reflejar en la muestra de alguna forma. Como Néstor simula la toma 1000 re-muestras, está evidenciando una buena noción de ley de los grandes números, variabilidad en el muestreo, noción de relación entre la distribución Bootstrap y la distribución muestral.

6. Construye el histograma con 1000 re-muestras y establece su estimación a partir de los valores asociados a los 3 rectángulos de mayor altura.

Esquemas de uso

Seleccionando la colección de las medidas se puede arrastrar una tabla desde la parte superior de la ventana que contiene cada uno de los valores simulados de la medida.

El icono “Graph” de la parte superior de la pantalla permite construir gráficas.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic sostenido en el icono “Graph” de la parte superior de la pantalla y lo lleva hasta la hoja en blanco. Luego hace clic sostenido en la casilla del nombre de la columna que contiene las medidas y la lleva hasta el eje “x” de la gráfica. Finalmente elige la opción histograma.

Nociones

Al construir la distribución Bootstrap por medio del histograma, Néstor demuestra que posee buenas nociones de variabilidad en el muestreo, ley de los grandes números, buenas nociones de distribución muestral de la proporción y de su relación con la distribución Bootstrap. Además en ningún momento ha pensado en estimaciones puntuales, lo que quiere decir que Néstor ha desarrollado buenas nociones sobre la variabilidad que lo llevan a plantear estimaciones por medio de intervalos.

Al tomar como referencia de su estimación los rectángulos del histograma que presentan mayor altura, Néstor está haciendo uso de sus nociones de enfoque frecuencial y de variabilidad.

Al utilizar la distribución Bootstrap como una aproximación de la distribución muestral, está evidenciando nociones de relación entre la distribución muestral de la proporción, la distribución Bootstrap y la población.

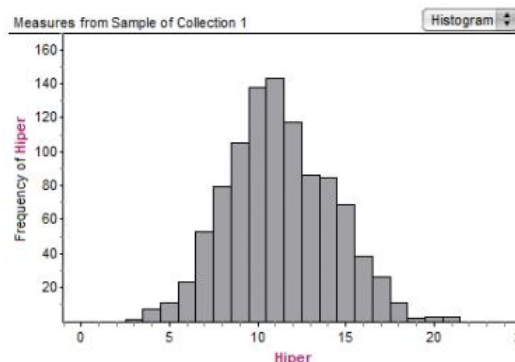
En palabras de Néstor:

Ilustración 21. Distribución de las frecuencias de 1000 re-muestras construidas por Néstor en la actividad 5.1.

“Hice un re-muestreo de igual tamaño a la muestra original, porque solo tengo esa muestra, para tomar muestras diferentes, entonces cree la medida y repetí 1000 veces, no fui capaz de que apareciera la proporción, entonces la hice a mano (Néstor utilizó “count” para crear la medida), en la gráfica se ve que 11 es el mayor número de veces que se presentan los casos de hipertensión en el grupo de 50 entonces, entonces debe ser como el 22% de las personas de Bucaramanga las que padecen hipertensión pero para ser más exacto entre el 20% y el 24% (toma los tres picos más altos en el histograma)”.

Como él mismo lo ha expuesto, decidió tomar para su estimación los valores asociados a los 3 intervalos de mayor altura. De esta manera Néstor ha construido una estimación por medio del intervalo (0,20 – 0,24) el cual de haber sido construido bajo el método formal tendría una confianza asociada del 30%.

2. Una fundación quiere conocer la estatura promedio de los jóvenes varones menores de 20 años de la ciudad de Medellín. Como el número de estos jóvenes es muy grande, la fundación opta por seleccionar al azar un número de 20 jóvenes

menores de 20 años. Hecha la selección, procedieron a medir su estatura obteniendo la tabla que se encuentra en el archivo “**Estaturas**”.

¿Cuál es la estatura promedio de todos los jóvenes varones menores de 20 años de Medellín? Justifique su respuesta.

La técnica de Néstor en la situación 2:

1. En el inspector de la muestra disponible crea la medida “mean” para calcular la media.

Esquemas de uso

En el inspector de la colección se puede crear una medida seleccionando la pestaña “measures” e introduciendo una fórmula en el cuadro de fórmulas.

Con la fórmula “mean” se puede calcular la media de un conjunto de datos.

Esquemas de acción instrumentada

Hace doble clic en el icono de la colección, cuando aparece la ventana del inspector selecciona la pestaña “measures”, en el cuadro de la fórmula introduce la expresión “mean(estatura_cm)”.

Nociones

Debido a la noción que tiene Néstor sobre la variabilidad en el muestreo, considera conveniente crear una medida, sin embargo al crearla como se describe en su esquema

de acción instrumentada, Néstor estaría no estaría trabajando con muestras o re-muestras diferentes, de tal manera que va a encontrar siempre el mismo resultado en esta medida, es decir no existiría variabilidad. Por lo tanto, si Néstor está seguro de sus ideas de variabilidad y muestreo se va dar cuenta de su equivocación, desde luego apoyado en lo que le permite observar Fathom.

2. En el inspector de las medidas, colecta 1000 medidas, de tal manera que obtiene 1000 veces el mismo valor, de lo cual se da cuenta Néstor al llevar los resultados a la gráfica.

Esquemas de uso

Con la opción “collect measures” se puede simular la toma de varias muestras y por ende posibles valores diferentes para la medida.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic derecho sobre la colección y selecciona la opción “collect measures”, hace doble clic en la nueva colección “measures from collection 1” y en la ventana de este inspector introduce el número 1000.

Nociones

Efectivamente Néstor posee buenas nociones sobre la variabilidad en el muestreo, al simular la toma de 1000 valores de la medida y observar la tabla, se da cuenta que todos los valores dan la misma cantidad, esto se debe a que solo se tiene una muestra y terminó haciendo el mismo calculo 1000 veces.

3. Intenta reescribir la fórmula para la media y repite los pasos anteriores obteniendo los mismos resultados.

Nociones:

Néstor decide buscar otro camino para poder establecer su estimación; esta situación seguramente ha generado en Néstor nuevos esquemas de uso y permitirá el afianzamiento de algunos esquemas de acción instrumentada, ya sea en esta situación o en situaciones futuras.

4. Toma una re-muestra con devolución del mismo tamaño que la muestra original.

Esquemas de uso

Con la opción “sample cases” se puede tomar muestras aleatorias con reemplazo de un conjunto de datos.

En el inspector de la colección “sample of collection” en la pestaña “cases” se puede seleccionar la cantidad de extracciones y las condiciones de cada extracción, es decir, con o sin reposición.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic derecho en el icono de la colección y selecciona la opción “sample cases”, luego hace doble clic sobre la colección que aparece “sample of collection” e

introduce el número 20, para tomar re-muestras del mismo tamaño que la muestra original.

Nociones

Néstor ésta en busca de simular el proceso de muestreo, pero debido a que solo posee una muestra, decide tomar re-muestras. Todo esto es producto de las buenas nociones que posee Néstor sobre la variabilidad en el muestreo.

5. Crea la medida “mean” en la colección “sample of collection”.

Esquemas de uso

En el inspector de la colección se puede crear una medida seleccionando la pestaña “measures” e introduciendo una fórmula en el cuadro de fórmulas.

Con la fórmula “mean” se puede calcular la media de un conjunto de datos.

Esquemas de acción instrumentada

Hace doble clic en el icono de la colección “sample of collection”, cuando aparece la ventana del inspector selecciona la pestaña “measures”, en el cuadro de la fórmula introduce la expresión “mean (estatura_cm)”.

Nociones

Además de sus nociones de variabilidad, Néstor ya tiene en mente que la media muestral debe tener un comportamiento, es decir que posee nociones sobre la distribución muestral de la media.

6. Colecta 1000 medidas y construye la tabla con los resultados.

Esquemas de uso

Con la opción “collect measure” se puede simular la toma aleatoria de nuevas re-muestras calculando automáticamente en cada una su media.

En el inspector de la colección “measures from sample of collection1” se puede aumentar la cantidad de re-muestras.

Con el icono de la colección seleccionada se puede arrastrar una tabla a la pantalla que contenga todos los valores simulados.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic derecho sobre la colección “sample of collection” y selecciona la opción “collect measures”, aparece una nueva colección. Hace doble clic sobre la nueva colección e introduce en el inspector el número 1000 y hace clic sobre el botón “collect more measures”.

Nociones

Al simular la toma de las medias de 1000 re-muestras, Néstor ratifica que posee buenas nociones de distribución muestral de la media y de variabilidad, solo que en este caso podría estar pensando en comportamientos similares entre la distribución Bootstrap y la distribución muestral.

7. Construye un histograma y toma para su estimación los valores asociados a los 5 rectángulos de mayor altura en el histograma.

Esquemas de uso

Seleccionando la colección de las medidas se puede arrastrar una tabla desde la parte superior de la ventana que contiene cada uno de los valores simulados de la medida.

El icono “Graph” de la parte superior de la pantalla permite construir gráficas.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic sostenido en el icono “Graph” de la parte superior de la pantalla y lo lleva hasta la hoja en blanco. Luego hace clic sostenido en la casilla del nombre de la columna que contiene los valores de la medida “media” y la lleva hasta el eje “x” de la gráfica. Finalmente elige la opción histograma.

Nociones

Al hacer el re-muestreo para construir la distribución Bootstrap, Néstor demuestra que posee buenas nociones de variabilidad en el muestreo. Al tomar 1000 re-muestras demuestra nociones de ley de los grandes números, buenas nociones de distribución muestral de la media, e ideas de que la distribución Bootstrap puede ser una buena aproximación de la distribución muestral de la media.

Al tomar como referencia de su estimación los 5 rectángulos del histograma que presentan mayor altura, Néstor está haciendo uso de sus nociones de enfoque

frecuencial. Al utilizar la distribución Bootstrap como una aproximación de la distribución muestral, está evidenciando nociones de relación entre la distribución muestral de la media y la población. Cuando Néstor plantea una estimación por medio de un intervalo muestra buenas nociones de variabilidad.

“Solo nos dan una muestra de 20 personas, entonces saco con re-muestreo otros 20 casos y hago la medida, dije que dejaba el mismo tamaño de la muestra para conservar lo mismo, porque si hago 100 se me empezarían a repetir más valores, entonces aumentaría el error, en cambio con 20 tengo la misma probabilidad de repetir valores pero no aumentar el error, e hice la medida y saqué el promedio, entonces como vimos en la clase anterior, cuando hace uno re-muestreo hay que ser más crítico con el rango que se va a dar entonces yo dije que el promedio estaba entre 173 y 177 ya que son los 5 picos más altos de la gráfica”.

Néstor considera que tomar muestras del mismo tamaño de la original será lo más conveniente porque estaría conservando las mismas condiciones, de lo contrario dice él, se podrían obtener resultados errados. El intervalo construido por Néstor (173-177) si se calcula por medio del método formal tendría una confianza asociada del 76%.

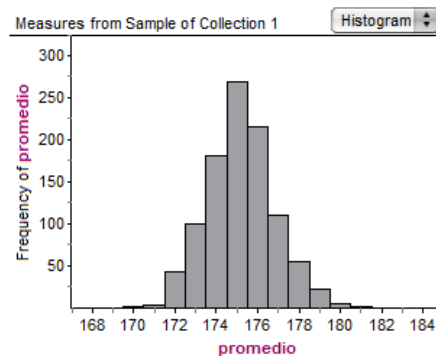


Ilustración 22. Distribución de 1000 re-muestras construida por Néstor en la actividad 5.2.

En resumen Néstor:

Demostró que posee buenas nociones de variabilidad, tanto en situaciones que involucran una variable discreta como aquellas que involucran variables continuas, en ningún momento se vio en Néstor intención de establecer estimaciones puntuales, aun cuando tuvo problemas para manipular el programa.

En la primera situación encontró la forma correcta de llevar la muestra a Fathom para poder trabajar con ella, y aunque en la actividad 4 cuando se introdujo el Bootstrap se utilizó una situación con variable continua, Néstor decidió que también podía utilizar Bootstrap para este caso y lo hizo correctamente.

Sin embargo, es curioso que en la primera situación Néstor haya tomado como referencia de su estimación los 3 rectángulos del histograma con mayor altura obteniendo un intervalo con una confianza del 30%, mientras que en la segunda situación que involucraba una variable continua, consideró los 5 rectángulos de mayor altura estableciendo un intervalo de confianza del 76%.

De cualquier modo Néstor manifestó en esta actividad nociones claras relación entre la muestra y la población de donde proviene, ideas de distribución muestral y de su relación con la población, noción de una relación entre el comportamiento de la distribución muestral y la distribución Bootstrap, y estimación por medio de intervalos.

La técnica de Luz:

1. El Observatorio de Salud Pública de Santander (OSPS) realizó en el 2015 un estudio con un grupo de 50 personas de Bucaramanga entre los 15 y los 64 años de

edad encontrando que 11 personas de este grupo padecen de hipertensión arterial (altos niveles de tensión arterial).

Los altos niveles de la tensión arterial causan daño al corazón y a los vasos sanguíneos de órganos principales como el cerebro y los riñones. Esta enfermedad es como un “asesino silencioso”, ya que no existen síntomas que alerten sobre su presencia. ¿Qué proporción de la población bumanguesa padece esta enfermedad? Justifique su respuesta.

1. Llena la primera columna de una tabla escribiendo 11 veces la palabra “padece” y 39 veces la palabra “no padece”.

Esquemas de uso

En la tabla se puede introducir los datos de una muestra o población de forma manual, llenando las celdas de una columna de la tabla.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic sostenido sobre el icono “collection” en la parte superior de la ventana y lo arrastra hasta la hoja en blanco. Luego hace clic sostenido en el icono “Table” y lo lleva hasta la hoja en blanco. Introduce la palabra “padecimiento” en la casilla del título de una de las columnas de la tabla y llena las celdas de esta columna con 11 veces la palabra “padece” y 39 veces la palabra “no padece” de forma intercalada sin guardar ningún orden.

Nociones

Luz halló la forma correcta de llevar la muestra descrita en el problema a Fathom para poder trabajar con ella. En un intento por emular la aleatoriedad de la muestra y producto de que concibe la situación como un proceso estocástico, consideró que podría ser conveniente no escribir primero los 11 “padece” y luego los demás “no padece”, sino que mejor los intercala tratando de recrear aleatoriedad según su experiencia.

2. Toma una muestra de tamaño 50 de la muestra de la muestra original y construye un “summary”. Al observar que obtuvo los mismos resultados que la muestra original, se da cuenta que debe especificar que las extracciones se hagan con reposición en el inspector de la colección, el cual saca haciendo clic derecho sobre la colección y seleccionando la opción “inspect collection”.

Esquemas de uso

Con la opción “sample cases” puede tomar muestras aleatorias de un conjunto de datos.

En el inspector de la colección “sample of collection” puede modificar el tamaño de la muestra tomada.

El “summary” permite realizar el cálculo de la frecuencia absoluta rápidamente.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic derecho sobre la colección y selecciona la opción “sample cases”, selecciona la nueva colección “sample of collection” y arrastra una nueva tabla desde la parte superior de la pantalla. Luego construye el “summary” con los datos

de la nueva tabla para observar cuantos datos de cada característica hay. Hace doble clic sobre la colección “sample of collection” e introduce en el inspector el número 50.

Nociones

Luz pone en juego sus nociones de variabilidad en el muestreo ya que lo que busca con su proceder es simular la toma aleatoria de nuevas muestras, para esto debe estar pensando en las re-muestras. Son las ideas sobre la variabilidad que tiene Luz las que le permitieron darse cuenta que era muy difícil que al tomar una re-muestra de la muestra original y obtener exactamente los mismos resultados: 11 “padece” y 39 “no padece”.

1. Toma una re-muestra de tamaño 100.

Esquemas de uso

En el inspector de la colección “sample of collection” se puede modificar la modalidad de cada extracción, es decir se puede elegir si la extracción es con reposición o sin reposición.

Esquemas de acción instrumentada

Hace doble clic sobre la colección “sample of collection”, selecciona la pestaña “sample”, señala la opción “with replacement” e introduce el número 100 en el cuadro “cases”.

Nociones

El hecho de que Luz haya decidido simular la toma de re-muestras, es evidencia de nociones claras de variabilidad, sin embargo es curioso que no tomó re-muestras del mismo tamaño que la muestra original, sino que prefirió re-muestras de tamaño 100, posiblemente sea producto de sus nociones de la influencia del tamaño muestral sobre la estimación, sin embargo para el caso del re-muestreo se traduce en una reducción de la variabilidad en la distribución bootstrap pero ésta ya no haría las veces de buena estimación de la distribución muestral de la proporción.

3. Simula la toma de 1000 re-muestras calculando en cada una la cantidad de veces que aparece la palabra “padece”

Esquemas de uso

En el inspector de la colección “sample of collection” en la pestaña measures se puede introducir una fórmula que permita hacer un cálculo rápido sobre un conjunto de datos.

La fórmula “count” permite calcular la cantidad de veces que aparece cierta característica en un conjunto de datos.

La opción “collect measures” permite simular la toma de varias re-muestras calculando en cada una la cantidad de veces que aparece la palabra “padece”.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic derecho en el inspector de la colección “sample of collection”, selecciona la opción “collect measures” y aparece una nueva colección llamada

“measures from sample of collection”. Luego hace doble clic en esta nueva colección e introduce el número 1000.

Nociones

Luz posee nociones de variabilidad en el muestreo y muy seguramente al simular la toma de las re-muestras está buscando hacerse a una idea de esa variabilidad para poder dar una estimación.

4. Construye el Histograma con los 1000 valores de las medidas

Esquemas de uso

El icono “graph” permite construir graficas con los datos de una columna de la tabla.

En la gráfica se puede elegir la opción “Histogram” para realizar el histograma.

Esquemas de acción instrumentada

Con el icono de la colección “measures from sample of collection” seleccionado arrastra una tabla desde la parte superior de la ventana, luego con clic sostenido en icono “Graph” arrastra el cuadro para la gráfica, hace clic sostenido sobre el título de la columna en la nueva tabla y lo lleva hasta el eje “x” del plano de la gráfica para finalmente seleccionar la opción “Histogram”.

Nociones

Luz manifiesta buenas nociones de distribución muestral y de la relación que ésta tiene con la población, sin embargo como en este caso solo posee una muestra decide hacer re-muestreo y construir la distribución bootstrap lo cual es evidencia de noción de relación entre el comportamiento de la distribución muestral de la proporción y la distribución Bootstrap.

En palabras de Luz:

“Considero que la proporción de personas que padece de hipertensión es aproximadamente 21,9 es decir cerca de 22, ya que estamos hablando de personas y no las podemos dar en decimales. Asigné a una muestra 11 valores con la palabra “padece” y el resto con “no padece”, entonces saqué un re-muestreo en el que analizaba 100 veces e iba variando para saber la probabilidad de padecer la enfermedad, de este re-muestreo saque una medida por medio de “Count”, el re-muestreo lo hice de 100 personas y encontré que aproximadamente 22 personas de cada 100 padecían esta enfermedad, tome 1000 medidas para que sea más certero, utilizando el summary el promedio me dio 21,9 pero yo sé que no es exacto 21,9 pero si es una cifra cercana, entre 19 y 23 por que en la gráfica son los puntos más altos de la gráfica (toma 2 rectángulos de mayor altura) no tomé 5 porque me parece un rango muy grande y no tan exacto, yo sé que entre más grande puedo tener menos equivocación pero no va a ser tan exacto y tan preciso, la idea es encontrar lo más reducido posible el dato que se encuentre entre esa información”.

Luz ratifica que concibe la situación como estocástica y además al decir que no puede dar respuestas en decimales por tratarse de personas, aunque no es del todo correcto, está mostrando una actitud difícil de lograr en los estudiantes que es tener presente el contexto de la situación. La estimación de Luz sería el intervalo (19-23) que si hubiese sido construido con el método formal tendría una confianza del 27%.

Con esto es claro que Luz tiene nociones de estimaciones por medio de intervalos, aunque para construir su intervalo solo consideró los dos rectángulos de mayor altura, a diferencia de Néstor, ella no toma la marca de clase sino los valores en el eje “x” que determinan el ancho de los dos rectángulos.

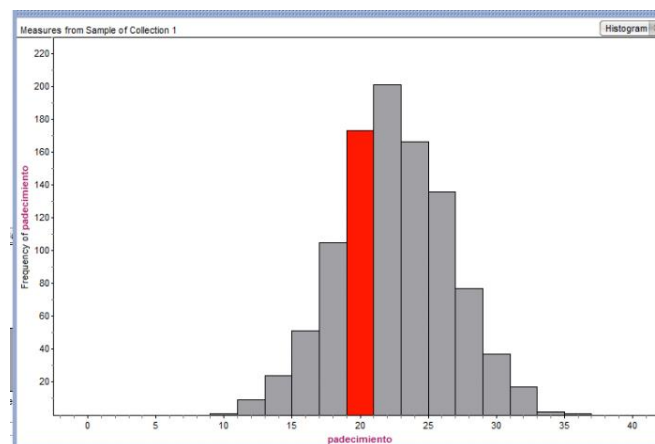


Ilustración 23. Distribución de 1000 re-muestras construida por Luz en la actividad 5.1.

2. Una fundación quiere conocer la estatura promedio de los jóvenes varones menores de 20 años de la ciudad de Medellín. Como el número de estos jóvenes es muy grande, la fundación opta por seleccionar al azar un número de 20 jóvenes

menores de 20 años. Hecha la selección, procedieron a medir su estatura obteniendo la tabla que se encuentra en el archivo “**Estaturas**”.

¿Cuál es la estatura promedio de todos los jóvenes varones menores de 20 años de Medellín? Justifique su respuesta.

La técnica de Luz:

1. Toma una re-muestra de la muestra original de tamaño 100.

Esquemas de uso

Los datos registrados en la columna de una tabla constituyen una muestra o una población.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic derecho sobre la colección y selecciona la opción “sample cases”. Hace doble clic sobre la nueva colección “sample of collection 1”, selecciona la pestaña “sample” e introduce el número 100.

Nociones

Variabilidad en el muestro, probablemente percibe relaciones entre el del re-muestreo y el proceso común de muestreo.

2. Construye un “summary” para verificar que el proceso puede estar bien.

Esquemas de uso

A partir de una colección “sample of collection” se puede observar la tabla que contiene cada uno de sus datos.

Por medio del “summary” se puede calcular rápidamente la media de un conjunto de datos.

Esquemas de acción instrumentada

Con la colección “sample of collection” seleccionada arrastra una tabla desde la parte superior de la pantalla. Luego arrastra un “summary” y lleva los datos de la nueva tabla hasta el “summary”.

Nociones

Al construir el summary, Luz está poniendo en juego sus nociones de variabilidad en el muestreo, aunque para este caso lo esté haciendo por medio del re-muestreo, ella quiere observar si obtiene un valor diferente de la media en su nueva re-muestra, al media de la muestra original. En caso de obtener el mismo valor, tendría sospechas de que algo estuvo mal en su proceder en Fathom.

3. Crea una medida para el promedio utilizando la fórmula “mean”.

Esquemas de uso

Con la fórmula “mean” se puede calcular el promedio de un conjunto de datos.

En la pestaña “measures” del inspector de la colección se puede establecer una función que haga el cálculo automático de la media de un conjunto de datos.

Esquemas de acción instrumentada

Hace doble clic sobre la colección “sample of collection” y selecciona la pestaña “measures”, introduce la fórmula “mean(estaturas)”.

Nociones

Luz comprende que la media es una variable aleatoria y por esto necesita determinar de alguna forma su distribución, este es el primer paso para poder simular la toma de varias re-muestras aleatorias, podríamos decir que nuevamente Luz tienen en mente la variabilidad en el muestreo.

4. Simula la toma de 100 re-muestras calculando en cada una su media.

Esquemas de uso

Con la opción “collect measures” se puede simular el cálculo de la media para 5 nuevas muestras aleatorias de un conjunto de datos.

En el inspector de la colección “measures from sample of collection”. Se puede elegir la cantidad de nuevas muestras que se desean tomar.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic derecho sobre la colección “sample of collection” y selecciona la opción “collect measures”. Hace doble clic sobre la nueva colección “measures from sample of collection” e introduce el número 100.

Nociones

Luz tiene ciertas nociones de distribución muestral, y de la relación entre ésta y la distribución bootstrap, en ese sentido, Luz solo está interesada en observar la variabilidad en el re-muestreo, asumiendo que es muy similar a la del muestreo considerando que solo necesita 100 re-muestras.

5. Crea un nuevo “summary” para observar la media de las 100 re-muestras.

Esquemas de uso

En el “summary” se puede calcular automáticamente la media de un conjunto de datos de cualquier tamaño.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic sostenido en el icono “summary” de la parte superior de la ventana y lo lleva hasta la hoja en blanco. Hace clic sobre la colección “measures from sample of collection” y arrastra una nueva tabla a la hoja en blanco, toma los datos de la nueva tabla y los lleva hasta el cuadro del “summary”.

Nociones

Probablemente Luz está recurriendo a sus nociones de relación entre la distribución Bootstrap y la población, es decir podría estar pensando que la verdadera media poblacional debe ser un valor cercano al hallado en este paso.

6. Construye el histograma con las 100 re-muestras.

Esquemas de uso

Con el icono “Graph” se puede construir un histograma fácilmente a partir de un conjunto grande de datos.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic sobre el icono “Graph” de la parte superior de la ventana y lo lleva hasta la hoja en blanco. Toma los datos de la nueva tabla y los lleva hasta el eje “x” del plano, finalmente elige la opción “Histograma”

Nociones

Luz construye el histograma con las medias de las 100 re-muestras que simuló para a partir de este establecer su estimación, lo cual apunta a que Luz posee nociones de relación entre el comportamiento de las re-muestras y la muestra.

También podemos notar que Luz posee buenas nociones de la variabilidad del muestreo y de la relación entre el comportamiento de la muestra y la población.

En palabras de Luz:

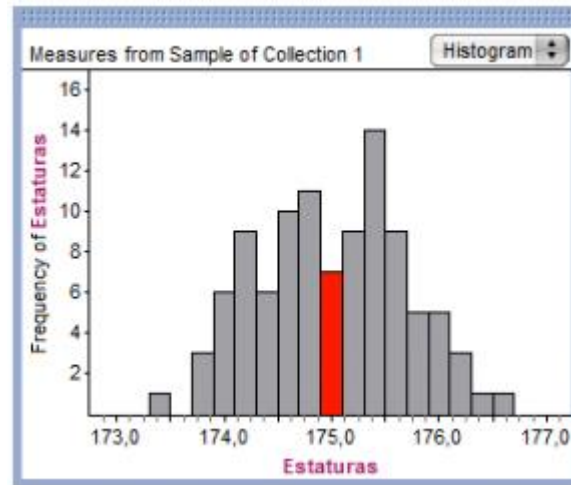


Ilustración 24. Distribución de frecuencias de 100 re-muestras construida por Luz para la actividad 5.2.

“Inicialmente me dan 20 estaturas, de eso tomé una nueva muestra de tamaño 100 porque considero posible que haya repetición o sea varios jóvenes de la misma estatura, y como son los únicos datos que tenemos, necesitamos basarnos en ellos, tomamos una muestra de la muestra de tamaño 100 con el fin de encontrar más o menos la variación y encontrar aproximadamente cuantas veces se pueden repetir, que promedio podemos encontrar para estabilizarnos en una cifra que en este caso

sería la media. Quiero analizar cada una de las nuevas muestras para ver el promedio de cada una, y con todos esos promedios encontrar el promedio total en sí, pienso que con re-muestras de 100 nos va a dar una cifra más cercana a lo que varía realmente, con 20 datos sería una cifra muy pequeña para analizar toda la población de Medellín, entre más grande tome la muestra voy a hallar un rango mucho más cercano al real. Según la gráfica no parece que sea el pico más alto pero si hacemos la suma de los promedios y lo dividimos en 100 nos daría 175,0 es decir que debe estar en un rango y por ser decimales lo voy a tomar más amplio desde 174,5 y 175,5 porque de toda la muestra estos son los picos más altos, ya que estamos hablando de estatura y las estaturas pueden variar bastante y no vamos a encontrar todas las personas con el mismo decimal”.

Podemos notar que Luz ha puesto en juego sus nociones de la influencia del tamaño muestral para la reducción de la variabilidad, sin embargo para el caso del Bootstrap, estaría reduciendo la variabilidad pero con respecto a la media de la muestra disponible, lo cual no se traduciría en un aumento de la precisión, es más para aumentar la precisión de la estimación se debe aumentar el tamaño de la muestra original.

Aunque Luz no puede basar su elección del centro del intervalo en el gráfico, decide utilizar la media de las medias simuladas con las 100 re-muestras, este hecho es parte de una noción de relación entre la media de la distribución muestral y la media poblacional.

El intervalo propuesto por Luz, si hubiese sido calculado mediante el método formal tendría una confianza asociada del 24% mientras que con el método del bootstrap tendría una confianza del 27%.

En resumen Luz:

Concibe ambas situaciones como estocásticas, por lo tanto sus procedimientos buscan establecer estimación por medio de intervalos y no valores puntuales como intentó hacer en las primeras actividades.

En la primera situación realizó una simulación con 1000 re-muestras mostrando nociones de ley de los grandes números, mientras que curiosamente en la segunda situación, con variable continua, tan solo toma 100 re-muestras, ya que según ella solo estaba interesada en conocer la variabilidad, de todos modos Luz está evidenciando que concibe relaciones entre la variabilidad de la distribución muestral y la variabilidad de la distribución bootstrap.

Hace un intento por utilizar sus nociones de influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad y decide tomar re-muestras de mayor tamaño que la muestra original, lo cual para el caso del bootstrap no se traduce en un aumento de la precisión de la estimación.

Luz utiliza en ambos casos la distribución bootstrap para establecer su intervalo de confianza, evidenciando que posee nociones de relación entre la distribución bootstrap y la población, y debido a que la distribución bootstrap es una aproximación de la distribución muestral, se puede decir que posee nociones de relación entre la distribución muestral y la población, lo cual es una cuestión comúnmente difícil de lograr bajo la instrucción tradicional.

Sergio:

1. El Observatorio de Salud Pública de Santander (OSPS) realizó en el 2015 un estudio con un grupo de 50 personas de Bucaramanga entre los 15 y los 64 años de

edad encontrando que 11 personas de este grupo padecen de hipertensión arterial (altos niveles de tensión arterial).

Los altos niveles de la tensión arterial causan daño al corazón y a los vasos sanguíneos de órganos principales como el cerebro y los riñones. Esta enfermedad es como un “asesino silencioso”, ya que no existen síntomas que alerten sobre su presencia. ¿Qué proporción de la población bumanguesa padece esta enfermedad? Justifique su respuesta.

La técnica de Sergio:

1. Crea una nueva colección y una nueva tabla. Luego Llena manualmente la primera columna con 11 veces la palabra “Si” y 39 veces “No”.

Esquemas de uso

En las columnas de las tablas se registrar manualmente los datos de una muestra o una población.

En las celdas de una columna se pueden registrar los resultados de una variable cualitativa.

Esquemas de acción instrumentada

Hace doble clic sobre el icono “collection” en la parte superior de la pantalla y lo lleva hasta la hoja en blanco. Con el icono de la colección seleccionado arrastra una tabla desde la parte superior de la pantalla. Luego introduce manualmente en la primera columna, 11 veces la palabra “si” y 39 veces la palabra “no”.

Nociones

Sergio identifica que se trata de una muestra y encuentra la manera correcta de plasmarla en Fathom.

2. Toma una re-muestra de 1000 extracciones de la muestra generada en el anterior paso.

Esquemas de uso

Con la opción “sample cases” se pueden extraer muestras de los datos de una colección con reposición, es decir se pueden tomar re-muestras.

En el inspector de la colección “sample cases” se puede elegir la cantidad de extracciones deseadas para cada muestra.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic derecho sobre el icono de la colección y elige la opción “sample cases”.

Hace doble clic sobre la nueva colección “sample of collection” e introduce el número 1000 al tiempo que selecciona la opción “With replacement”.

Nociones

Sergio evidencia que posee nociones de la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad, ya que son esas ideas las que lo llevan a tomar re-muestras de tamaño 1000, sin embargo como está trabajando con re-muestreo, Sergio no va conseguir el efecto que él espera.

3. Construye un “summary” y un diagrama de barras para observar lo obtenido.

Esquemas de uso

Con el “summary” se puede calcular la cantidad de veces que aparece un resultado en una columna rápidamente y sin importar la cantidad de datos que ésta tenga.

Por medio del icono “Graph” se puede realizar rápidamente un diagrama de barras con los datos de una columna sin importar su tamaño.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic sostenido en el icono “Summary” de la parte superior de la pantalla y lo arrastra hasta la hoja en blanco. Luego hace clic sostenido sobre el título de la columna en la tabla “sample of collection” y lo arrastra hasta el cuadro del “summary”.

Hace clic sobre el icono “Graph” de la parte superior de la pantalla y lo lleva hasta la hoja en blanco. Luego lleva los datos de la misma columna mencionada en el párrafo anterior y los lleva hasta el eje “x” del gráfico.

Nociones

Podríamos decir que cuando Sergio decide observar lo que sucede en una remuestra de tamaño 1000, con cierta intención de ganar seguridad en los resultados que va a conseguir, es porque posee buenas nociones de la ley de los grandes números, pero como se aclaró anteriormente para el caso del bootstrap no se genera la ganancia en la precisión que Sergio espera.

4. Crea una medida en el inspector de la colección “sample of collection” por medio de la fórmula “count”.

Esquemas de uso

En el inspector de la colección “sample of collection” en la pestaña measures se puede introducir una fórmula que permita hacer un cálculo rápido sobre un conjunto de datos.

La fórmula “count” permite calcular la cantidad de veces que aparece cierta característica en un conjunto de datos.

Esquemas de acción instrumentada

Hace doble clic en el inspector de las medidas y selecciona la pestaña “measures”.

En el cuadro de la fórmula introduce la expresión “Count(enfermos= “si”)”.

Nociones

Sergio manifiesta nociones de variabilidad en el muestreo, es por esto que busca simular la toma nuevas muestras, lógicamente al disponer de tan solo 50 datos de la población debe utilizar re-muestreo.

5. En el inspector de las medidas toma 1000 muestras calculando en cada una la cantidad de veces que aparece la palabra “si”.

Esquemas de uso

La opción “collect measures” permite simular la toma de varias re-muestras calculando en cada una la cantidad de veces que aparece la palabra “si”.

En el inspector “measures from sample of collection”, en la pestaña “measures” se puede elegir la cantidad de medidas que se desean tomar.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic derecho sobre la colección “sample of collection” y elige la opción “collect measures”. Hace doble clic en el icono de la nueva colección “measures from sample of collection” e introduce el número 1000.

Nociones

Sergio pone en juego algunas nociones de distribución muestral y de ley de los grandes números, aunque en este caso está construyendo la distribución bootstrap.

6. Realiza el histograma.

Esquemas de uso

En cada colección se puede observar cada uno de sus datos por medio de una tabla.

Por medio del icono “Graph” se puede realizar un histograma.

Esquemas de acción instrumentada

Con la colección “measures from sample of collection” seleccionada arrastra una tabla de la parte superior de la pantalla. Toma los datos de esta tabla y los lleva hasta el eje “x” del cuadro del gráfico.

Nociones

Sergio posee nociones de distribución muestral y de la relación que esta tiene con la población, posee ideas de aproximación entre la distribución bootstrap y la distribución muestral; todo esto se observa cuando Sergio construye el histograma y lo utiliza para establecer su estimación.

En palabras de Sergio:

“Aproximadamente 11/50 (11 de cada 50) bumangueses padecen hipertensión o el 22% de la población oscilando entre 20,2% y el 23,8%, esto lo deduje con una muestra de 50 en la cual 11 estaban enfermos. Realicé un re-muestreo de 1000 y el re-muestreo lo repetí 1000 veces, porque lo que buscamos es que los datos sean lo más específicos posibles, igual se pueden tomar infinitas muestras, las que uno considere. Obtuve una gráfica en la cual hay una tendencia aproximadamente hasta 225 pero hay picos representativos desde 202 hasta 238 y como estamos trabajando con re-muestreo el intervalo debe ser un poco amplio para tener menos posibilidad de equivocarnos. A través de la gráfica deduje que el promedio de la población oscila entre el 20,2% y el 23,8%”.

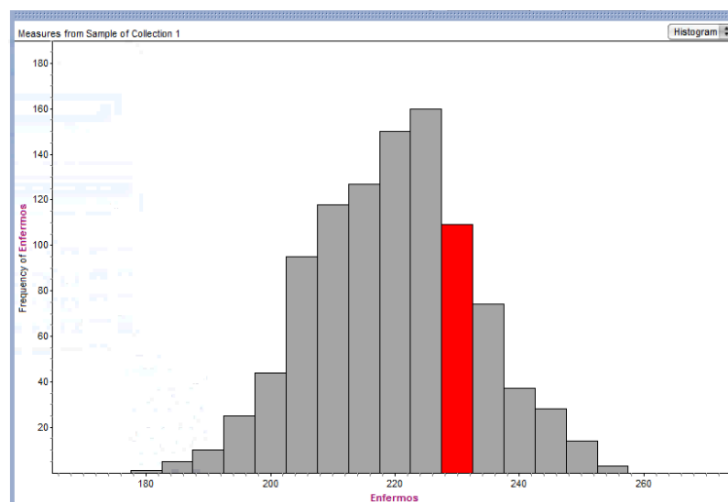


Ilustración 25. Distribución de las frecuencias de 1000 re-muestras construido por Sergio para la actividad 5.1.

Sergio posee nociones de estimación por intervalos, es consciente de la variabilidad existente en el muestreo y esto no le permite quedarse con la estimación puntual. De alguna forma busca simular la variabilidad de la población y en un intento por ser más preciso en su

estimación, y producto también de sus nociones de los grandes números, decide tomar re-muestras de tamaño 1000, lo cual para el bootstrap termina reduciendo la variabilidad pero entorno a la media de la muestra disponible, de cualquier modo, Sergio posee buenas nociones de distribución muestral al construir la distribución bootstrap para establecer su estimación. Sergio ha mostrado nociones de relación entre el comportamiento de la muestra y la población en cuanto a la variabilidad, relación entre la distribución muestral y la población, y nociones de aproximación a la distribución muestral por medio del bootstrap. El intervalo construido por Sergio, si hubiese sido construido por medio del método formal, tendría una confianza asociada del 23,5%.

2. Una fundación quiere conocer la estatura promedio de los jóvenes varones menores de 20 años de la ciudad de Medellín. Como el número de estos jóvenes es muy grande, la fundación opta por seleccionar al azar un número de 20 jóvenes menores de 20 años. Hecha la selección, procedieron a medir su estatura obteniendo la tabla que se encuentra en el archivo **“Estaturas”**.

¿Cuál es la estatura promedio de todos los jóvenes varones menores de 20 años de Medellín? Justifique su respuesta.

La técnica de Sergio:

1. Toma una re-muestra de tamaño 1000 de la muestra proporcionada.

Esquemas de uso

La opción “sample cases” permite tomar re-muestras de un conjunto de datos con reposición.

El inspector de la colección “sample cases” permite elegir la cantidad de re-muestras que se desean tomar.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic derecho sobre la colección y elige la opción “sample cases”, luego hace doble clic sobre la nueva colección “sample of collection” e introduce el número 1000.

Nociones

Nuevamente Sergio muestra que posee buenas nociones de variabilidad cuando considera la toma de re-muestras como una forma de simular un muestreo. Sigue ratificando que posee nociones de ley de los grandes números también para situaciones con variable continua, sin embargo como ya lo hemos aclarado tomar muestras de este tamaño no aumenta la precisión de la estimación.

2. Construye un diagrama de barras con los datos de la re-muestra.

Esquemas de uso

La tabla permite observar cada uno de los datos de una colección.

El icono “Graph” permite construir histogramas con los datos de una colección.

Esquemas de acción instrumentada

Con la colección “sample of collection” seleccionada arrastra una tabla desde la parte superior de la ventana.

Arrastra el icono “Graph” desde la parte superior de la ventana a la hoja en blanco, toma los datos de la nueva tabla y los lleva hasta el eje “x” de la gráfica.

Nociones

Nuevamente Sergio pone en juego sus nociones de ley de los grandes números y sus nociones de distribución al construir una gráfica para observar si encuentra algún comportamiento. Pero como lo que observa le parece extraño decide no utilizar esta gráfico.

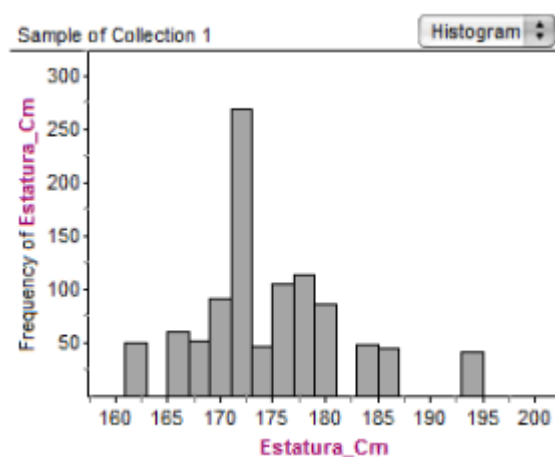


Ilustración 26. Resultados de una re-muestra de tamaño 1000 según Sergio

3. Crea un “summary” para calcular la media de la re-muestra de tamaño 1000.

Esquemas de uso

El icono “summary” permite calcular rápidamente la media de un conjunto de datos.

Esquemas de acción instrumentada

Arrastra un “summary” desde la parte superior de la ventana a la hoja en blanco, luego toma los datos de la tabla “sample of collection” y los lleva hasta el cuadro del “summary”, automáticamente calcula la media.

Nociones

Al utilizar el “summary” Sergio obtiene una muestra de 174,7 lo cual está algo alejado del valor que presenta mayor altura en el gráfico, es por esto que Sergio decide encaminar su proceso hacia la toma de varias re-muestras al considerar que la media de la muestra es un valor cercano a la media de la población.

4. Crea la medida “mean” en el inspector de la colección “sample of collection”.

Esquemas de uso

La fórmula “mean” permite calcular la media de un conjunto de datos sin importar el tamaño del conjunto.

En la pestaña “measures” se puede crear una fórmula que permita calcular la media en cada una de las re-muestras simuladas.

Esquemas de acción instrumentada

Hace doble clic sobre el inspector de la colección “sample of collection”, selecciona la pestaña “measures” e introduce la fórmula “mean(estatura_cm)”.

Nociones

Consiente de la variabilidad en el muestreo Sergio decide crear una medida para simular el proceso de muestreo por medio de re-muestras.

5. Simula la toma de 1000 muestras calculando la media en cada una.

Esquemas de uso

La opción “collect measures” permite simular la toma de varias re-muestras aleatorias calculando en cada una su media.

El inspector de la colección “measures from sample of collection” permite elegir la cantidad de re-muestras que se desea simular.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic derecho sobre la colección “sample of collection” y elige la opción “collect measures”.

Hace doble clic sobre la nueva colección “measures from sample of collection” e introduce el número 1000.

Nociones

Sergio está construyendo la distribución bootstrap para utilizarla como una aproximación de la distribución muestral, por lo tanto posee nociones de relación entre la distribución muestral y la población, además está movilizandando nociones de ley de los grandes números al tomar 1000 re-muestras.

6. Construye un histograma con las 1000 medidas.

Esquemas de uso

Con el icono “Graph” se puede construir un histograma.

Esquemas de acción instrumentada

Con la nueva colección seleccionada arrastra una tabla desde la parte superior de la ventana. Arrastra una nueva grafica desde la parte superior de la pantalla y lleva los datos de la tabla hasta el eje “x” de la nueva gráfica.

Nociones

Sergio evidencia nociones de distribución muestral y ratifica que ve la distribución bootstrap como una aproximación de la distribución muestral al tiempo que comprende que estas distribuciones tienen relación con la población

En palabras de Sergio:

“Usé el mismo método anterior, a la muestra original de 20, le saqué re-muestreo de 1000, mi idea es que la tendencia que hay en muestra de 20 se va a repetir más entonces será más marcada al graficarla y al re-muestreo lo repetí 1000 veces. Al mirar la gráfica me enfoqué en los picos que considero representativos, en este caso tomé las 8 más altas y deduje que la estatura promedio está entre 174,8 y 175,5 siendo muy cercano a 175,1”.

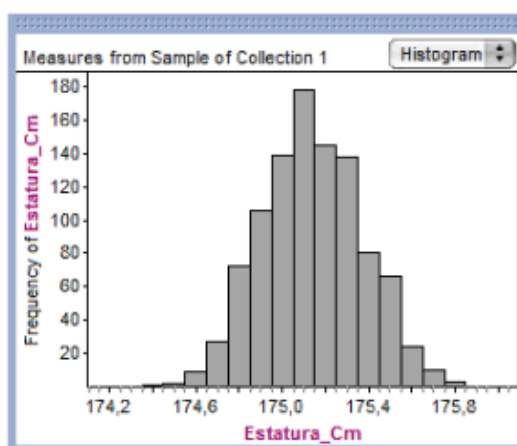


Ilustración 26. Distribución de re-muestreo construida por Sergio para la actividad 5.2.

Sergio ha evidenciado nociones de relación entre la población y la distribución muestral, asumiendo a la distribución bootstrap como una aproximación de la distribución muestral. Además posee algunas nociones de ley de los grandes y de la influencia del tamaño muestral sobre la estimación solo que para el bootstrap no se cumple exactamente lo que Sergio tiene en mente.

El intervalo de confianza calculado por Sergio, si hubiese sido calculado por el método formal tendría una confianza asociada del 17%.

En resumen Sergio:

No hay muchas diferencias en la técnica que utilizó Sergio para cada situación, considera que sin importar si se trata de una variable continua o discreta, lo más conveniente es establecer una estimación por medio de un intervalo y para ello es de gran utilidad la distribución muestral.

Sergio posee nociones de influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad que aplicadas de la forma en que lo hizo para el método del bootstrap no representan un aumento en la precisión. Además, Sergio posee buenas nociones de ley de los grandes números, lo cual fue común en él durante las últimas actividades.

Sergio logró desarrollar ideas sobre relación entre el comportamiento de la población y la distribución muestral, al tiempo que considera la distribución bootstrap una buena aproximación de la distribución muestral.

Humberto:

1. El Observatorio de Salud Pública de Santander (OSPS) realizó en el 2015 un estudio con un grupo de 50 personas de Bucaramanga entre los 15 y los 64 años de edad encontrando que 11 personas de este grupo padecen de hipertensión arterial (altos niveles de tensión arterial).

Los altos niveles de la tensión arterial causan daño al corazón y a los vasos sanguíneos de órganos principales como el cerebro y los riñones. Esta enfermedad es como un “asesino silencioso”, ya que no existen síntomas que alerten sobre su presencia. ¿Qué proporción de la población bumanguesa padece esta enfermedad? Justifique su respuesta.

La técnica de Humberto:

1. Crea una nueva colección y su respectiva tabla.

Esquemas de uso

El icono “table” permite construir tablas

En las tablas se pueden introducir datos manualmente

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic sobre el icono “collection” en la parte superior de la ventana y lo arrastra hasta la hoja en blanco. Luego hace clic sobre el icono “Table” y lo arrastra hasta la hoja en blanco.

Nociones

Humberto quiere construir la muestra descrita en el problema para ello necesita crear una tabla, podemos decir que pone en juego ciertas nociones de muestreo.

2. Construye en Fathom la muestra dada por el problema.

Esquemas de uso

La tabla con sus datos termina siendo la muestra misma.

Las celdas de una columna se pueden llenar manualmente.

Esquemas de acción instrumentada

En la primera columna de la nueva tabla introduce manualmente en 11 celdas la palabra “sí” y en 39 la palabra “no”

Nociones

Humberto posee buenas nociones de muestreo, y por lo visto representa la muestra en Fathom porque considera que ésta guarda alguna relación con la población.

3. Construye un gráfico de barras con los datos de la tabla creada.

Esquemas de uso

El icono “Graph” permite construir diagramas de barras.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic sobre el icono “Graph” en la parte superior de la ventana y lo lleva hasta la hoja en blanco. Luego arrastra los datos de la columna creada y los lleva hasta el eje “x” del cuadro del gráfico.

Nociones

Posiblemente Humberto buscaba comprobar con esto que la muestra que había construido realmente coincidía con lo descrito en el problema.

4. Toma una muestra de tamaño 10 con reposición de la colección creada.

Esquemas de uso

La opción “sample cases” permite tomar re-muestras de una colección.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic derecho sobre la colección y elige la opción “sample cases”.

Nociones

Humberto comprende que se trata de un proceso estocástico y que lo más probable es que la muestra disponible, aunque guarda relación con la población, no presenta la verdadera proporción poblacional. Son sus nociones de variabilidad en el muestreo las que lo llevan a tratar de simular ese proceso. Sin embargo Humberto toma re-muestras de tamaño 10, lo cual no generaría una distribución bootstrap con una variabilidad similar a la de la distribución muestral.

5. Crea una medida

Esquemas de uso

La pestaña “measures” del inspector permite crear una fórmula que calcule la frecuencia absoluta de cada una de las diferentes re-muestras.

Esquemas de acción instrumentada

Hace doble clic sobre la colección “sample cases” y selecciona la pestaña “measures”, allí introduce la fórmula “count(personas)”.

Nociones

Recurriendo a sus nociones de variabilidad en el muestreo Humberto intenta simular la toma de varias re-muestras, sin embargo no consigue escribir correctamente la expresión.

6. Colecta las medidas

Esquemas de uso

“collect measures” permite simular la toma de varias re-muestras calculando en cada una su frecuencia absoluta.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic derecho sobre la colección “sample cases” y elige la opción “collect measures”.

Nociones

Humberto tiene algunas nociones de distribución muestral y está buscando la forma de plasmarlas en Fathom, es por esto que ha utilizado re-muestras y ha simulado la toma de varias de ellas.

7. Crea la tabla de la nueva colección.

Esquemas de uso

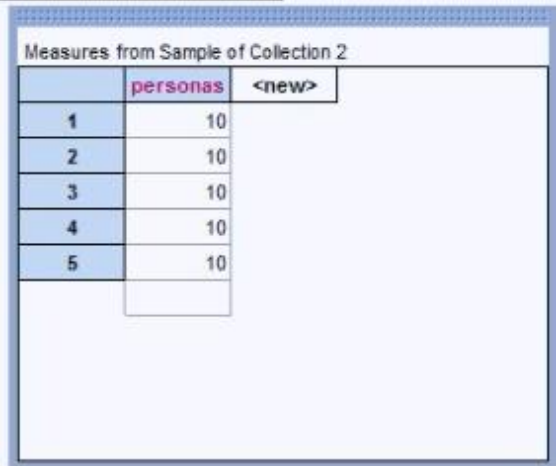
La tabla presenta todos los datos de una colección.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic sobre la nueva colección “measures from sample of collection” y arrastra una tabla desde a parte superior de la ventana.

Nociones

Al construir esta tabla Humberto observa que en todas las muestras obtuvo el mismo resultado, lo cual le parece muy poco probable, mostrando que posee nociones de variabilidad. Al ver estos resultados Humberto decide no utilizar lo hecho en Fathom para su estimación ya que es consiente que algo está mal en su procedimiento pero no logra identificar exactamente en qué parte.



	personas	<new>
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	

Ilustración 27. Resultados obtenidos por Humberto en su primer intento por simular la toma de re-muestras en la actividad 5.1.

En palabras de Humberto:

“Según el estudio 11 de cada 50 personas padecen de altos niveles de tensión arterial sin embargo, pienso que la muestra de las personas es muy baja respecto a la población total de Bucaramanga para hacer esta afirmación (11-50)→proporción, tal vez daría un intervalo, pero el problema es de donde sacar los datos, a lo mejor tomaría 2 hacia adelante y 2 hacia atrás”.

Humberto muestra que posee nociones sobre la variabilidad del muestreo y sobre la relación que existe entre la muestra y la población, por esto expresa que debe ser un número cercano a la proporción de la muestra pero debido a que no tiene más datos y a que no encontró la forma de proceder en Fathom tendría que establecer un intervalo completamente intuitivo.

2. Una fundación quiere conocer la estatura promedio de los jóvenes varones menores de 20 años de la ciudad de Medellín. Como el número de estos jóvenes es muy grande, la fundación opta por seleccionar al azar un número de 20 jóvenes menores de 20 años. Hecha la selección, procedieron a medir su estatura obteniendo la tabla que se encuentra en el archivo “**Estaturas**”.

¿Cuál es la estatura promedio de todos los jóvenes varones menores de 20 años de Medellín? Justifique su respuesta.

La técnica de Humberto:

1. Crea un “summary” con los datos de la muestra dada.

Esquemas de uso

El “summary” permite calcular rápidamente la media de un conjunto de datos.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic sostenido sobre el icono “Summary” en la parte superior de la ventana y lo lleva hasta la hoja en blanco, luego toma los datos de la tabla y los lleva hasta el cuadro del “Summary”.

Nociones

Humberto puede estar movilizando sus nociones de relación entre el comportamiento de la muestra y la población.

2. Toma una re-muestra de tamaño 10 de la muestra proporcionada.

Esquemas de uso

“Sample cases” permite tomar re-muestras de los datos de una colección.

Esquemas de acción instrumentada

Hace clic derecho sobre la colección y elige la opción “sample cases”

Nociones

Las nociones que tiene Humberto sobre la variabilidad son las que lo llevan a intentar un re-muestreo.

3. Construye 3 nuevas tablas.

Esquemas de uso

Las tablas permiten observar todos los datos de una colección.

Esquemas de acción instrumentada

Selecciona la colección “sample cases” y arrastra tres tablas desde la parte superior de la ventana.

Nociones

Humberto evidencia tener nociones sobre la variabilidad en el muestreo pero no recuerda como simular esto en Fathom por medio de las re-muestras ya que cree que al arrastrar una nueva tabla consigue una muestra diferente.

4. Crea 3 “summary”

Esquemas de uso

El “summary” permite calcular rápidamente la media de un conjunto de datos.

Esquemas de acción instrumentada

Arrastra 3 cuadros de “summary” desde la parte superior de la ventana y lleva los datos de cada tabla a cada “summary”.

Nociones

Noción de variabilidad muestral.

En palabras de Humberto:

“Según el estudio hecho por la fundación la estatura promedio sería 175,1299 cm este dato sale de sumar todas las estaturas y dividir las entre el número de personas,

pero al igual que en el ejercicio anterior la muestra es muy pequeña respecto a la población total por lo que sería erróneo asegurar al 100% que esta es la verdadera estatura de los jóvenes menores de 20 años en la ciudad de Medellín. A lo mejor tomaría un intervalo entre 170 cm y 180 cm, tomando una estimación que yo pienso, esto porque son muy pocas personas, si no fueran 20 personas sino 100 de pronto reducirían más el intervalo por ahí un centímetro, pero seguirían siendo muy pocas personas”.

Humberto presenta buenas nociones de la influencia del tamaño muestral sobre la estimación al considerar que son muy pocas personas y que si se aumentara el tamaño terminaría reduciendo el ancho del intervalo.

Nuevamente Humberto evidencia nociones de variabilidad muestral y algunas ideas de distribución muestral. Presentó problemas para manipular Fathom y por esta razón decidió no utilizarlo para establecer su estimación.

Termina haciendo una estimación por medio de un intervalo que podríamos llamar intuitivo.

En resumen Humberto:

Presentó problemas para manipular el programa Fathom ya que olvidó cómo utilizar algunas de sus funciones, pero por lo observado, Humberto posee buenas nociones de variabilidad en el muestreo, de relación entre la muestra y la población e incluso se podría decir que sí posee nociones de distribución muestral y de su relación con la distribución

bootstrap, sólo que no encontró la forma de utilizar Fathom para construir lo que tenía en mente.

5.6.2. Conclusiones de la actividad

Al observar las diferentes técnicas de los estudiantes junto con los desgloses que hemos logrado hacer en cuanto a esquemas y conocimientos movilizados para dar solución a una situación que requiere del establecimiento de inferencias, se ha encontrado que el trabajo con Fathom hace que ellos utilicen explícitamente sus nociones de variabilidad, ya que todos han concebido la situación como estocástica y han intentado plantear su estimación por medio de un intervalo, basados en lo que han logrado observar en el programa.

En la situación 1 solo se daban los resultados de una muestra, lo cual no representó un obstáculo para los estudiantes ya que los cuatro encontraron la forma de llevar la muestra a Fathom para trabajar con ella, mostrando así que poseen nociones de relación entre la muestra y la población.

3 de los 4 estudiantes mostraron que poseen nociones de distribución muestral y de su relación con la población. También vieron en la distribución bootstrap una buena aproximación a la distribución muestral. Cada uno utilizó re-muestras de tamaños diferentes, algunos usaron tamaños mayores al de la muestra original, buscando con ello aumentar la precisión del intervalo, Sin embargo, esto reduciría erróneamente el tamaño del intervalo, ya que si las re-muestras tienen mayor tamaño que la muestra original no se estaría construyendo la mejor aproximación a su distribución muestral; para lograr mayor precisión en el intervalo, se necesitaría aumentar el tamaño de la muestra original. Aun así, ellos manifiestan con esto,

buenas nociones de ley de los grandes números, algunas ideas de la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad y nociones de distribución muestral.

De cualquier modo, las nociones mencionadas en el párrafo anterior son difíciles de comprender y de observar cuando se está siendo instruido en el método de los Intervalos de Confianza bajo el enfoque formal, en especial la idea de distribución muestral, que por lo visto aquí, Fathom permite desarrollar sin muchas complicaciones.

5.7. ANÁLISIS DE LA PRUEBA FINAL

A continuación presentamos la prueba final aplicada a los estudiantes que participaron en esta investigación; se diseñó teniendo presente las concepciones erróneas de estudiantes que recibieron formación instruccional formal, y que ya habían sido reportadas por la literatura. En este sentido, esta prueba mostrará cuáles concepciones siguen evidenciándose para el caso de estudiantes que han recibido instrucción informal sobre estimación por intervalos, utilizando la simulación computacional y el método del Bootstrap.

Lo anterior, permitirá establecer las ventajas y desventajas que puede tener la metodología que se ha utilizado para el desarrollo del razonamiento inferencial informal.

A continuación se expondrán y analizarán las respuestas dadas en la prueba por los estudiantes.

Néstor:

En el presente ejercicio, usted debe leer la situación inicial, y sobre esta responder las preguntas del 1.1 hasta el 1.6:

1. En una fábrica embotelladora de gaseosa se quiere determinar si la máquina que se utiliza para el llenado de las botellas está funcionando correctamente. Aunque a simple vista las botellas parecen contener una buena cantidad del líquido, es necesario determinar si el promedio del líquido vertido en un lote de 1500 botellas es 350 ml.

1.1. Con la intención de estimar la cantidad de líquido promedio que hay en las 1500 botellas de gaseosa, el jefe de control de calidad solo pudo tomar una muestra aleatoria de 40 botellas, en las cuales halló un promedio de líquido de 344 ml. ¿Cuáles de las siguientes conclusiones considera correctas?

- a) El promedio de las 1500 botellas de la producción es menor a 350 ml.
- b) No hay razón para asegurar que el promedio de las 1500 botellas de la producción sea menor a 350 ml.
- c) Lo más probable es que el promedio de las 1500 botellas esté entre 336 y 352 mililitros.**
- d) El promedio del líquido de las 1500 botellas es de 350 ml.
- e) El promedio del líquido en las 1500 botellas es de 344 ml.
- f) Con tan solo 40 botellas, no se puede decir nada sobre las 1500 botellas.

¿Por qué?

“c) Lo más probable es que como estoy sacando un promedio de una muestra de 1500 botellas hayan diferentes tipos de muestra, ósea estas 1500 botellas la maquina exactamente no me va a llenar en exactamente 350 ml las botellas. Teniendo en cuenta lo anterior y tomando el margen de error sería ilógico que esta fuera solo por arriba de los 350 ml, o por lo contrario por debajo de los 350 ml y sí más bien entre una combinación de estos dos, habrá veces que me llene de más la botella o sea un poco menos como es el caso. Aunque yo diría que al ser una máquina de producción en masa no debe estar tan descalibrada, pero si este es el caso, para un promedio de 344ml este rango es el más acertado de las posibles opciones”.

Néstor manifiesta una buena noción de variabilidad, conocimiento que, en sus inicios formativos, no tenía muy claro; su respuesta se soporta desde el fundamento de que la máquina no siempre se va a llenar con la misma cantidad las botellas; al mismo tiempo, reconoce que debe existir una tendencia, pues considera que la máquina no debe estar tan descalibrada. Además de elegir una opción correcta, él en su justificación resalta la importancia del margen de error, lo que permite suponer que Néstor posee buenas nociones de estimación por medio de intervalos.

1.2. Mediante un proceso de muestreo con 40 botellas, que en promedio tienen 356 ml, se construyó un histograma (Figura 1). Es este, se establece que el promedio de las 1500 botellas probablemente esté entre 349,5 y 362,5 mililitros. No obstante, el jefe de control de calidad decide, arbitrariamente, reportar que la estimación para la cantidad promedio vertida en las 1500 botellas está entre 353,5 y 357,5 mililitros.

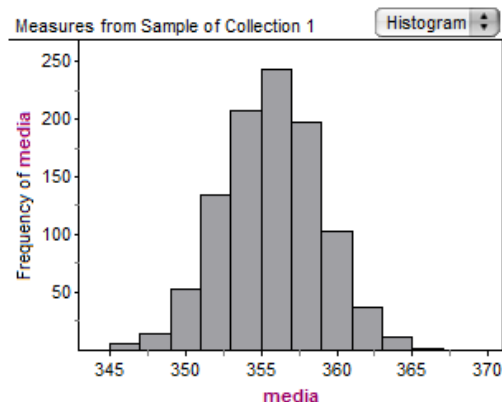


Figura 1.

¿Cuál afirmación sobre las dos estimaciones considera correcta?

- a) La probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas es IGUAL en la estimación entre 353,5 y 357,5 mililitros y la estimación entre 349,5 y 362,5 mililitros.
- b) La estimación entre 353,5 y 357,5 mililitros tiene MAYOR probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas, que la estimación entre 349,5 y 362,5 mililitros.
- c) La estimación entre 353,5 y 357,5 mililitros tiene MENOR probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas que la estimación entre 349,5 y 362,5 mililitros.
- d) Ninguna.

¿Por qué?

“b) Debido a que el rango escogido es el más pequeño y cercano al pico central de la gráfica, ya que con el re-muestreo me permite hacer esta estimación y sacar conclusiones lo más reales posibles y aunque la muestras de re-muestreo no son de la

muestra original sino con tendencia a ésta, al hacerlo muchas veces el error se vuelve tan mínimo que lo obtenido se vuelve el resultado real, en este caso el promedio de las botellas, por tanto disminuye el error al cerrar el rango, aumentando la probabilidad de acertar”.

En esta respuesta, es evidente que Néstor tiene conocimiento sobre la ley de los grandes números. Sin embargo, presenta confusión entre la distribución muestral (estudiada en las dos primeras actividades) y la distribución Bootstrap, ya que él considera conveniente establecer una estimación tomando pequeños intervalos cercanos al rectángulo de mayor altura en el histograma. De cualquier modo, el hecho de que Néstor haya elegido la opción b) podría implicar que ha desarrollado concepciones erróneas sobre la relación entre el nivel de confianza y el ancho del intervalo.

1.3. Basado en lo anterior, si el jefe de control de calidad decidiera tomar una nueva muestra aleatoria de 40 botellas y repitiera el proceso de simulación ¿Cuál estimación considera que es la más probable de obtener?

- e) **Entre 349,5 y 362,5**
- f) Entre 365 y 371
- g) Entre 346 y 358
- h) Cualquiera de las anteriores.

¿Por qué?

“Al hacer la misma simulación pienso que en el re-muestreo, así se tome diferentes muestras a la anterior, el promedio final obtenido debe ser muy parecido al que se obtuvo por primera vez, por tanto escojo la opción a), que es la que encuentro en rango más parecida con la anterior gráfica”.

En el primer argumento dado por Néstor se evidencian nociones de variabilidad muestral, pues hace referencia a promedios similares en distintas muestras. Por tanto, no podríamos asegurar que Néstor eligió la opción a) porque tenga un pensamiento determinista (en el sentido que considera al intervalo de confianza como una respuesta única). Según él, este intervalo presenta correspondencia con el gráfico presentado en la anterior pregunta, pero no notó que era exactamente el mismo intervalo presentado en la pregunta 1.2.

1.4. Suponga que la muestra con la que se realizó la estimación del punto 1.2 era de tamaño 100 y no de tamaño 40. Si se construye el histograma del re-muestreo y se establece una estimación utilizando el mismo criterio de probabilidad ¿Cómo cree que será esta estimación comparada con la del punto 1.2?

- a) Se obtiene el mismo intervalo que con la muestra de 40.
- b) Se obtiene un intervalo más ancho.
- c) Se obtiene un intervalo menos ancho.**

¿Por qué?

“c) se obtiene un intervalo menos ancho debido a que al aumentar la muestra por porcentaje en este caso es $1/15$ ($100/1500$) de la muestra total, mientras que en 40 es de $2/75$ ($40/1500$) de la muestra total, al tener más porcentaje doy cabida a más

opciones y se me traduce en probabilidad y exactitud, por tanto al tener una muestra más grande aumento la probabilidad de acertar más cercanamente al promedio, ya que si tuviera el caso ideal de poder obtener las 1500 muestras y sacarles el promedio obtendría el promedio exacto de las botellas”.

Néstor concibe una influencia del tamaño de la muestra sobre la estimación; incluso, se ha inclinado por la dirección correcta, respaldado por el conocido argumento que entre más grande sea la muestra, más se asemeja a la población. En este caso, para él aumenta la probabilidad de que el estimador tome un valor cercano al parámetro poblacional; demostrando nociones que se asemejan más al efecto que tiene el tamaño de la muestra sobre la variabilidad de su distribución.

El estudiante menciona que existe ganancia en la precisión de la estimación al aumentar el tamaño muestral; esto indica que él tiene idea sobre lo que significa ganar precisión en una estimación.

1.5. Ordene las siguientes estimaciones de mayor a menor de acuerdo a su probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas:

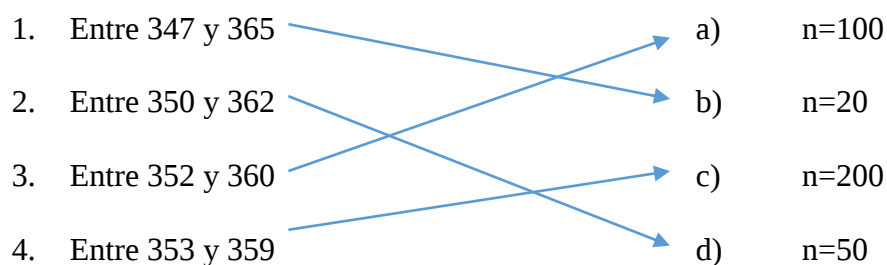
- a) Entre 345 y 365,5 mililitros.
- b) Entre 352,5 y 357,5 mililitros.
- c) Entre 349,5 y 362,5 mililitros.
- d) 356 mililitros.

¿Por qué?

“b>c>a>d pienso que al estar más cerca al pico de mayor altitud obtengo el promedio más cercano y como el b) es el más cercano, este es el promedio más cercano para esta gráfica. Ahora, pienso que estadísticamente está mal, dado el promedio exacto de 356, ya que no tengo garantía alguna de que exactamente me dé este número y aunque sé que muy probablemente esté cercano a este número, no tengo ninguna garantía que exactamente este sea”.

En esta respuesta se puede observar que Néstor posee nociones de estimación por medio de intervalos y concibe que una estimación puntual tiene una probabilidad nula de acertar. Con respecto a la probabilidad de acierto de la estimación, él ratifica las concepciones erróneas mostradas en las anteriores preguntas, pues plantea que se percibe un aumento en la probabilidad de acertar cuando se disminuye el ancho del intervalo.

1.6. Relacione cada estimación con el tamaño de la muestra con la que usted considera fue construida, bajo el supuesto que en cada caso se obtuvo la misma media.



¿Por qué?

“Siguiendo con la misma lógica de los puntos anteriores, sigo pensando que al aumentar el número de las muestras, el intervalo se vuelve mucho más pequeño, por

tanto he relacionado que el intervalo más corto corresponde a la de mayor número de muestras”.

Néstor asocia de manera correcta los intervalos con su respectivo tamaño; es claro que comprende la relación entre el ancho del intervalo y el tamaño muestral. Como él afirma, al aumentar el tamaño de la muestra, el intervalo se hace menos ancho.

2. Para las siguientes afirmaciones sobre estimaciones por intervalos, señale con una X, si falso (F) o verdadero (V) según considere.

2.1. Si aumenta el tamaño muestral, aumenta la precisión de la estimación de la media poblacional. F__ V X

¿Por qué?

“Al tomar más muestras, tengo en cuenta más opciones de las infinitas que pueden haber en una muestra si son finitas, ejemplo 100, si tomo 100/100 obtengo la media exacta, si tomo 50/100 obtengo el 50% de probabilidad de acertar al promedio de la media poblacional. Por tanto al aumentar la muestra es verdadero que aumenta la precisión en los datos”.

Néstor tiene claro que aumentar el tamaño de la muestra beneficia la estimación por intervalo. Dada su respuesta, parece que Néstor no relaciona ni la precisión, ni la probabilidad de acertar con el ancho del intervalo. En cambio, él considera que los datos son más precisos

porque al aumentar el tamaño de la muestra, el estimador puntual de esta será un valor más cercano al parámetro poblacional.

2.2. Si aumenta la probabilidad de acierto del intervalo, aumenta la precisión de la estimación del promedio poblacional. F X V ____

¿Por qué?

“No, porque pueden haber muchas muestras que estén cercanas al valor real del intervalo y pueden haber otras que estén por arriba o por debajo de esta media, por tanto como todas estas opciones tienen mayor o menor probabilidad, siempre existe la probabilidad de sacar las que están cercanas a la media real. Un ejemplo es una muestra de 50 pepas con un peso promedio de 35 gramos y hay 40 pepas que tienen un peso entre 33 y 47 gramos y el resto están por arriba y abajo en gramos de este intervalo. En este caso voy a tener más probabilidad de acertar en la probabilidad de sacar la muestra cercana al promedio y no las otras”.

Néstor elige correctamente que la afirmación es falsa. Sin embargo, como se resaltó en las respuestas anteriores, él no relaciona la precisión de la estimación con el ancho del intervalo. Al parecer, su interpretación es distinta en cuanto a la probabilidad asociada al intervalo, pues la asocia con la cercanía de los estimadores puntuales al parámetro poblacional. Esto genera que en su justificación se encuentren ideas confusas, pues hace creer una postura positiva sobre la afirmación y no en contra.

2.3. Si aumenta el ancho del intervalo, aumenta la precisión de la estimación del promedio poblacional. F_X V____

¿Por qué?

“Si aumento el intervalo disminuyo la precisión de mi estimación, ya que puede que no me vaya a equivocar dando un intervalo más grande, pero voy a tener más error en este, al tener más error voy a ser menos preciso dando mi estimación en la media poblacional”.

En esta ocasión, Néstor concibe mejor la relación entre el nivel de confianza y el ancho del intervalo, pues considera que el hacer más ancho al intervalo, no implica que sea menos probable equivocarse con esa estimación. En este orden de ideas, Néstor percibe que aumenta la probabilidad de acertar.

También, el estudiante afirma que al aumentar el ancho del intervalo, se estaría aumentando el error de la estimación, traduciéndose en una pérdida de precisión. Lo anterior evidencia un conocimiento sobre la relación entre el ancho del intervalo y la precisión de la estimación.

Es curioso que las ideas encontradas en la última respuesta no fueron manifestadas por Néstor en sus réplicas a las preguntas anteriores, ya que se percibían nociones que iban en la dirección contraria. Esta situación posiblemente haya sido consecuencia del lenguaje utilizado en los enunciados. No obstante, es importante resaltar que en esta respuesta demostró buenas nociones sobre las relaciones existentes entre el nivel de confianza, la precisión y el ancho del intervalo.

En resumen Néstor

El estudiante Néstor manifiesta buenas nociones de estimación por medio de intervalos; además, es consiente que las estimaciones a partir de valores puntuales tienen una probabilidad nula de acertar. Él tiene nociones claras sobre la existencia de una relación entre el tamaño de la muestra y el ancho del intervalo, la cual exterioriza correctamente en las últimas preguntas de la prueba.

En algunas justificaciones elaboradas, se encontró confusión con respecto a la relación entre el nivel de confianza y el ancho del intervalo, dado que Néstor aseguraba que entre más pequeño es el intervalo, mayor probabilidad de acertar. De igual forma, se percibió que no advertía ninguna relación entre el ancho del intervalo y la precisión, ni entre el ancho del intervalo y el nivel de confianza. A pesar de esto, en su respuesta final sí planteó ideas correctas sobre las relaciones nombradas; consideró la pérdida de precisión al aumentar el ancho del intervalo; y demostró que concibe mayor probabilidad de acierto en un intervalo más ancho.

Luz:

1. En una fábrica embotelladora de gaseosa se quiere determinar si la máquina que se utiliza para el llenado de las botellas está funcionando correctamente. Aunque a simple vista las botellas parecen contener una buena cantidad del líquido, es

necesario determinar si el promedio del líquido vertido en un lote de 1500 botellas es 350 ml.

1.1. Con la intención de estimar la cantidad de líquido promedio que hay en las 1500 botellas de gaseosa, el jefe de control de calidad sólo pudo tomar una muestra aleatoria de 40 botellas, en las cuales halló un promedio de líquido de 344 ml.

¿Cuáles de las siguientes conclusiones considera correctas?

- a) El promedio de las 1500 botellas de la producción es menor a 350 ml.
- b) No hay razón para asegurar que el promedio de las 1500 botellas de la producción sea menor a 350 ml.
- c) Lo más probable es que el promedio de las 1500 botellas esté entre 336 y 352 mililitros.
- d) El promedio de líquido de las 1500 botellas es 350 ml.
- e) El promedio del líquido en las 1500 botellas es 344 ml.
- f) **Con tan solo 40 botellas, no se puede decir nada sobre las 1500 botellas.**

¿Por qué?

“Considero que tan solo el promedio de las 40 muestras es insuficiente para asegurar que sea este el de toda la cantidad, quizá si sea una cifra cercana o hasta puede ser ésta la correcta pero solo con esta muestra de este tamaño es insuficiente y tendrá un margen de error muy grande”.

Observando la respuesta de Luz pareciera que no cree posible establecer una estimación a partir de una sola muestra, de cualquier modo ella posee nociones de variabilidad muestral ya que asegura que la media muestral puede ser una cantidad cercana al valor del parámetro. Es curioso que Luz haya escogido esta opción ya que durante toda la investigación evidenciamos en ella buenas nociones de estimación por intervalos, probablemente si haya considerado un intervalo pero no explícitamente, ya que al final de su respuesta menciona que la estimación tendría un margen de error muy grande.

1.2. Mediante un proceso de re-muestreo a partir de una nueva muestra de 40 botellas con promedio de 356 ml, se construyó el histograma (figura 1) que aparece a continuación, de allí se estableció que era muy probable que el promedio de las 1500 botellas esté entre 349,5 y 362,5 mililitros. A pesar de lo encontrado, el jefe de control calidad decide de manera arbitraria reportar que la estimación para la cantidad promedio vertida en las 1500 botellas está entre 353,5 y 357,5 mililitros.

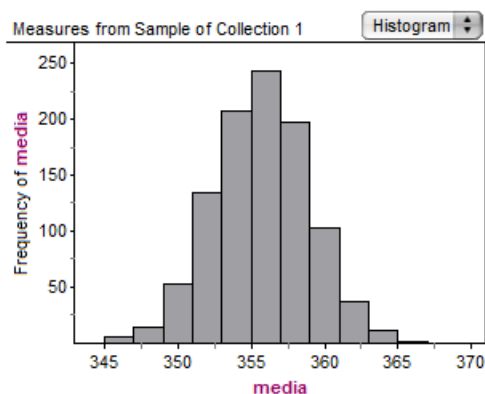


Figura 1.

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones sobre las dos estimaciones considera correctas?

- a) La estimación “entre 353,5 y 357,5 mililitros” tiene IGUAL probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas que la estimación “entre 349,5 y 362,5 mililitros”.
- b) La estimación “entre 353,5 y 357,5 mililitros” tiene MAYOR probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas que la estimación “entre 349,5 y 362,5 mililitros”.
- c) **La estimación “entre 353,5 y 357,5 mililitros” tiene MENOR probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas que la estimación “entre 349,5 y 362,5 mililitros”.**
- d) Ninguna.

¿Por qué?

“Tiene menor probabilidad de ser acertada puesto que acorta las posibles estimaciones del promedio. Es decir, al hacer más pequeño el margen entre el cual se encuentra la posible respuesta exacta existe la posibilidad de excluirla. Además que la cantidad promedio que tendrán que tener es 350 ml, lo normal sería que el promedio del líquido se encuentre cercano a esta cantidad”.

Luz concibe correctamente la relación entre el ancho del intervalo y la probabilidad de acertar, en su respuesta expresa que como el intervalo se hace menos ancho tiene menos probabilidad de acertar. Termina su justificación exteriorizando algunas nociones de

distribución muestral cuando considera que el promedio de la muestra debe tomar valores cercanos al promedio poblacional.

1.3. Basado en lo obtenido anteriormente, si el jefe de control de calidad decidiera tomar una nueva muestra aleatoria de 40 botellas, y repitiera el proceso de simulación. ¿Cuál de las siguientes estimaciones considera que es más probable de obtener?

- a) Entre 349,5 y 362,5
- b) Entre 365 y 371
- c) Entre 346 y 358**
- d) Cualquiera de las anteriores.

¿Por qué?

“Está claro que las muestras pueden variar, puesto que se podrá tomar algunas botellas con mucho más líquido y de esta forma el promedio se elevaría, pero considero que las cantidades promedio no deberían ser muy variantes respecto a su tamaño estimado, el que debería ser el habitual (350 ml)”.

Luz demuestra una vez más que posee buenas nociones sobre la variabilidad de la media muestral, a su vez su respuesta es un indicio de que es consciente que el intervalo de confianza no es una respuesta única, si no que depende de la muestra que se tiene a la mano, sin embargo como ella lo expresa, tampoco va a tomar cualquier valor, lo más probable es obtener un intervalo similar al establecido anteriormente.

1.4. Suponga que la muestra con la que se realizó la estimación del punto 1.2 era de tamaño 100 y no de tamaño 40. Si se construye el histograma del re-muestreo y se

establece una estimación utilizando el mismo criterio de probabilidad ¿Cómo cree que será esta estimación comparada con la del punto 1.2?

- a) Se obtiene el mismo intervalo que con la muestra de 40.
- b) Se obtiene un intervalo más ancho.
- c) **Se obtiene un intervalo menos ancho.**

¿Por qué?

“Al evaluar el histograma resultante de este nuevo re-muestreo considero que el margen en el cual se va a encontrar la respuesta va a tener un intervalo, más pequeño, es decir, nos va a acercar más a la respuesta correcta y va a achicar el margen de error”.

Luz pone en juego sus buenas nociones de variabilidad muestral y de distribución Bootstrap, ya que está imaginando el histograma producto del re-muestreo y considera que si está construido a partir de una muestra de mayor tamaño, será menos variable por lo tanto el intervalo obtenido será menos ancho.

1.5. Ordene las siguientes estimaciones de mayor a menor de acuerdo a su probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas:

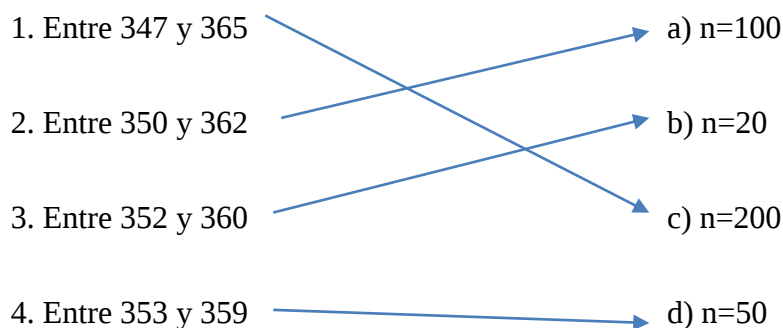
- a) entre 345 y 365,5 mililitros.
- b) entre 352,5 y 357,5 mililitros.
- c) entre 349,5 y 362,5 mililitros.
- d) 356 mililitros.

¿Por qué?

“ $a > c > b > d$, la respuesta más acertada a mi criterio es la a) pues nos ofrece un rango más cercano a lo que normalmente tendría que ser (350 ml), la menos correcta para mi es la respuesta d) pues al ser una respuesta exacta no nos da la posibilidad de evaluar un margen de error y se asume que todas tendrían una cantidad de 356 ml”.

Luz evidencia buenas nociones de la relación existente entre el nivel de confianza y el ancho del intervalo, observamos que ha ordenado correctamente los intervalos de mayor a menor probabilidad de acertar la estimación y resalta que la estimación puntual no sería conveniente ya que por la misma variabilidad su probabilidad deberá ser casi nula.

1.6. Relacione cada estimación con el tamaño de la muestra con la que usted considera que fue construida, bajo el supuesto que en cada caso se obtuvo la misma media.



¿Por qué?

“El tamaño de una muestra entre más grande nos puede dar una cifra más acertada, es decir, nos brinda un rango de valores entre los cuales se podrá encontrar la respuesta correcta, en la que además, a mi criterio, también se debe encontrar la cantidad estimada como la más común, es decir, 350 ml. Entre más pequeña la muestra va a existir más margen de error”.

En su justificación Luz muestra buenas nociones de la influencia del tamaño muestral sobre la estimación, ella tiene claro que el aumento de la muestra reduce la variabilidad muestral, lo que hace que se obtenga un intervalo menos ancho, esto se evidencia cuando ella dice que el margen de error es mayor a medida que se reduce el tamaño muestral, sin embargo es curioso que al relacionar cada intervalo con su tamaño muestral, no lo haya hecho correctamente.

2. Para las siguientes afirmaciones sobre estimaciones por intervalos, responda falso (F) o verdadero (V) según considere.

2.1. Si aumenta el tamaño muestral, aumenta la precisión de la estimación de la media poblacional. F__ V__ X

¿Por qué?

“Sí, pues se puede evaluar con mayor precisión a que cantidad tiende la muestra tomada”.

Luz elige correctamente la opción “verdadero”; aunque su justificación es algo corta podríamos afirmar, gracias a sus respuestas anteriores, que ella podría estar pensando en reducción de la variabilidad muestral y cuando habla de la tendencia de la muestra tomada está haciendo referencia a valores cercanos al parámetro poblacional. Sin embargo no es claro si ella visualiza la reducción del ancho del intervalo y por ende aumento en la precisión.

2.2. Si aumenta la probabilidad de acierto del intervalo, aumenta la precisión de la estimación del promedio poblacional. F__ V__ X

¿Por qué?

“Sí pues se reduce el tamaño estimado de margen de error, lo que indica que entre este intervalo va a ser más posible encontrar la respuesta y por ende el promedio de esta muestra”.

Es posible que Luz no haya entendido del todo la pregunta como también es posible que no tenga clara la relación entre el nivel de confianza y el ancho del intervalo. Por lo visto en esta respuesta, podríamos suponer que su idea es que al aumentar el tamaño muestral para reducir el ancho del intervalo se gana probabilidad de acertar con la estimación en cuestión.

2.3. Si aumenta el ancho del intervalo, aumenta la precisión de la estimación del promedio poblacional. F X V__

¿Por qué?

“No, si se aumenta el ancho del intervalo es posible obtener más valores entre los cuales es posible encontrar la respuesta exacta o cercana, al tener más valores no aumenta la precisión, en este caso se hace más pequeña la precisión pues se considera que el promedio es más preciso cuando se encuentra en un intervalo más cerrado dado por las muestras, donde exista un margen de error más pequeño”.

Por lo visto en esta respuesta, Luz tiene clara la relación que existe entre el ancho del intervalo y la precisión. A su vez se alcanza a percibir que Luz posee algunas nociones sobre la relación entre el ancho del intervalo y el nivel de confianza, al decir que si se hace más ancho el intervalo se obtienen más valores entre los que se encontraría el verdadero parámetro poblacional, en otras palabras aumenta la probabilidad de acertar.

En resumen Luz:

Presenta buenas ideas sobre la relación entre el nivel de confianza y el ancho del intervalo. Aún posee ideas confusas sobre el establecimiento de estimaciones a partir de pequeñas muestras por medio de intervalos, aunque en su mente si existen nociones de margen de error y variabilidad.

Evidencia buenas nociones de distribución muestral, al considerar que la media muestral debe tomar valores cercanos al verdadero valor del parámetro poblacional.

Concibe este tipo de situaciones como estocásticas y reconoce que el intervalo no es una respuesta única sino que depende de la muestra disponible.

Posee nociones claras sobre la influencia del tamaño muestral en el ancho del intervalo.

Evidencia buenas nociones de la relación entre el ancho del intervalo y la precisión.

Aunque se equivocó relacionado cada intervalo con el tamaño de la muestra, en su justificación manifiesta buenas ideas sobre la relación entre el tamaño muestral y la precisión de la estimación.

Sergio:

1. En una fábrica embotelladora de gaseosa se quiere determinar si la máquina que se utiliza para el llenado de las botellas está funcionando correctamente. Aunque a simple vista las botellas parecen contener una buena cantidad del líquido, es necesario determinar si el promedio del líquido vertido en un lote de 1500 botellas es 350 ml.

1.1. Con la intención de estimar la cantidad de líquido promedio que hay en las 1500 botellas de gaseosa, el jefe de control de calidad sólo pudo tomar una muestra aleatoria de 40 botellas, en las cuales halló un promedio de líquido de 344 ml.

¿Cuáles de las siguientes conclusiones considera correctas?

- a) El promedio de las 1500 botellas de la producción es menor a 350 ml.
- b) No hay razón para asegurar que el promedio de las 1500 botellas de la producción sea menor a 350 ml.**
- c) **Lo más probable es que el promedio de las 1500 botellas esté entre 336 y 352 mililitros.**
- d) El promedio de líquido de las 1500 botellas es 350 ml.
- e) El promedio del líquido en las 1500 botellas es 344 ml.
- f) Con tan solo 40 botellas, no se puede decir nada sobre las 1500 botellas.

¿Por qué?

“La muestra de 40 botellas no es suficientemente representativa sobre la población de 1500, por ello afirmo que hay la posibilidad que el promedio de las 1500 sea mayor o igual a 350 ml. Pero debido a que por el enunciado sabemos que la diferencia entre unas botellas y otras no es muy grande, para mí sería correcto que el promedio esté entre 336 y 352 ya que es un margen de error pequeño usando como base el promedio de la muestra de 40 botellas, 344”.

En la primera parte de la respuesta de Sergio se evidencia que posee buenas nociones de variabilidad muestral por eso ha elegido la opción b) y afirma que también se podía haber

conseguido un valor superior a 350 ml. Sergio concibe que a partir de una pequeña muestra es posible establecer una buena estimación utilizando un intervalo.

1.2. Mediante un proceso de re-muestreo a partir de una nueva muestra de 40 botellas con promedio de 356 ml, se construyó el histograma (figura 1) que aparece a continuación, de allí se estableció que era muy probable que el promedio de las 1500 botellas esté entre 349,5 y 362,5 mililitros. A pesar de lo encontrado, el jefe de control calidad decide de manera arbitraria reportar que la estimación para la cantidad promedio vertida en las 1500 botellas está entre 353,5 y 357,5 mililitros.

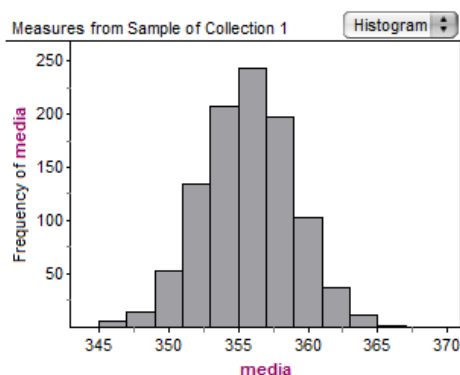


Figura 1.

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones sobre las dos estimaciones considera correctas?

- a) La estimación “entre 353,5 y 357,5 mililitros” tiene IGUAL probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas que la estimación “entre 349,5 y 362,5 mililitros”.

b) La estimación “entre 353,5 y 357,5 mililitros” tiene MAYOR probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas que la estimación “entre 349,5 y 362,5 mililitros”.

c) **La estimación “entre 353,5 y 357,5 mililitros” tiene MENOR probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas que la estimación “entre 349,5 y 362,5 mililitros”.**

d) Ninguna.

¿Por qué?

“Entre más grande el rango entre el mínimo y el mayor dato hay una posibilidad más alta de acertar el promedio de las 1500 botellas pues, hay más variables y más posibilidades; pero esto hace que el valor sea inexacto.

Así, usando un intervalo más grande le reduce el margen de error y guiándose por el histograma se puede elegir un intervalo grande que sea representativo para la investigación sin ser muy inexacto”.

En esta respuesta, Sergio manifiesta buenas nociones sobre la relación entre el ancho del intervalo y nivel de confianza. Al parecer erróneamente utiliza la palabra posibilidad como sinónimo de probabilidad y resalta que al ampliar el intervalo se pierde exactitud refiriéndose a una pérdida de precisión.

No es claro lo que Sergio entiende por margen de error ya que como cree que se reduce cuando amplía el intervalo, podría estar pensando en la significancia. Podemos observar

también, por la referencia que hace al histograma, que él ve en el bootstrap un buen método para el establecimiento de estimaciones.

1.3. Basado en lo obtenido anteriormente, si el jefe de control de calidad decidiera tomar una nueva muestra aleatoria de 40 botellas, y repitiera el proceso de simulación. ¿Cuál de las siguientes estimaciones considera que es más probable de obtener?

- a) **Entre 349,5 y 362,5**
- b) Entre 365 y 371
- c) Entre 346 y 358
- d) Cualquiera de las anteriores.

¿Por qué?

“Porque en este intervalo se ven picos representativos en la anterior figura, y contando con que la nueva muestra sea similar a la anterior, es muy probable que el intervalo del anterior sea muy similar o igual al anterior”.

Aunque Sergio haya elegido el mismo intervalo obtenido en una muestra anterior, no podemos asegurar que tenga un pensamiento determinista y que esté creyendo que el intervalo de confianza es una respuesta única, ya que en su justificación hay algunos elementos que nos indican concepciones de variabilidad.

1.4. Suponga que la muestra con la que se realizó la estimación del punto 1.2 era de tamaño 100 y no de tamaño 40. Si se construye el histograma del re-muestreo y se establece una estimación utilizando el mismo criterio de probabilidad ¿Cómo cree que será esta estimación comparada con la del punto 1.2?

- a) Se obtiene el mismo intervalo que con la muestra de 40.
- b) Se obtiene un intervalo más ancho.**
- c) Se obtiene un intervalo menos ancho.

¿Por qué?

“Porque habrán muchas más muestras, por ende hay más posibilidad que se encuentren datos menores o mayores a los de la anterior muestra, y también oscilarán más los datos en la tabla, variando, pero manteniendo la misma tendencia”.

Sergio no concibe correctamente la relación entre el ancho del intervalo y el tamaño muestral, ya que para él entre más datos tenga la muestra habrá mayor variabilidad en los valores, posiblemente no logra imaginar la distribución muestral.

1.5. Ordene las siguientes estimaciones de mayor a menor de acuerdo a su probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas:

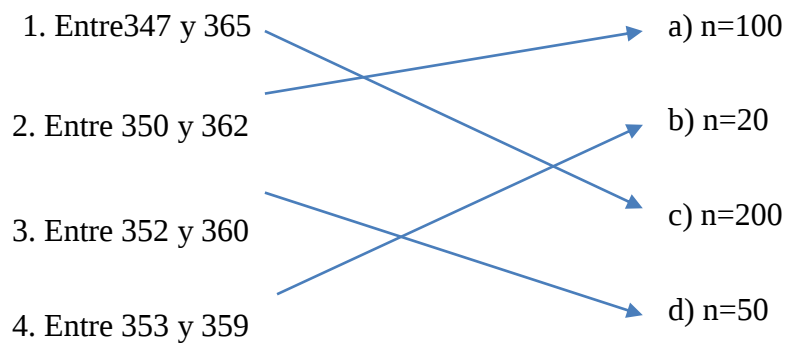
- a) entre 345 y 365,5 mililitros.
- b) entre 352,5 y 357,5 mililitros.
- c) entre 349,5 y 362,5 mililitros.
- d) 356 mililitros.

¿Por qué?

“ $a > c > b > d$ porque entre mayor sea el intervalo de la estimación será mayor la probabilidad de que el promedio de las 1500 botellas esté dentro de ese intervalo”.

Nuevamente Sergio ratifica que posee buenas nociones sobre la relación entre el nivel de confianza y el ancho del intervalo, ha organizado correctamente las opciones y ha justificado concisamente.

1.6. Relacione cada estimación con el tamaño de la muestra con la que usted considera que fue construida, bajo el supuesto que en cada caso se obtuvo la misma media.



¿Por qué?

“Porque entre mayor sea el número de la muestra, mayor será el espectro del intervalo de la estimación, por ende si la estimación es de intervalo pequeño el tamaño de la muestra también lo será, y viceversa”.

Sergio ratifica la confusión mostrada en el punto 1.4 con respecto a la influencia del tamaño muestral sobre el intervalo, su idea es totalmente contraria a lo que en realidad sucede con estimaciones a partir de muestras con los tamaños propuestos en el enunciado.

2. Para las siguientes afirmaciones sobre estimaciones por intervalos, responda falso (F) o verdadero (V) según considere.

2.1. Si aumenta el tamaño muestral, aumenta la precisión de la estimación de la media poblacional. F__ V_X

¿Por qué?

“Al aumentar el tamaño de la muestra lo que se logra es que sea cada vez más parecido a la población total, y por ende la media de la muestra cada vez que ésta aumenta se va haciendo más similar a la media poblacional”.

Sergio contesta correctamente la pregunta y su argumento es que entre más grande sea la muestra más parecida será a la población por tanto la media muestral tomará valores más parecidos al verdadero valor del parámetro. Lo que no queda claro es si Sergio considera que esa reducción de la variabilidad se refleja en la estimación reduciendo el ancho del intervalo.

2.2. Si aumenta la probabilidad de acierto del intervalo, aumenta la precisión de la estimación del promedio poblacional. F_X V__

¿Por qué?

“Porque la probabilidad de acierto se logra con intervalos grandes tomados de los resultados de la muestra, y la precisión del promedio debe realizarse con intervalos lo más pequeños posibles, y esto hace que sean términos contrarios”.

Los conceptos de precisión y nivel de confianza están bastante claros para Sergio, quien habla de probabilidad de acierto porque durante el desarrollo de las actividades jamás se mencionaron los términos “nivel de confianza”.

2.3. Si aumenta el ancho del intervalo, aumenta la precisión de la estimación del promedio poblacional. F_X V__

¿Por qué?

“La precisión se logra al tomar un intervalo pequeño lo más cercano posible a la población total, por ende si aumentamos el ancho del intervalo hacemos que la precisión en el resultado disminuya y por esto el enunciado anterior es falso”.

Sergio ratifica que comprende muy bien el concepto de precisión relacionándolo correctamente con el ancho del intervalo, lo cual no había dejado claro en su respuesta a la pregunta 2.1.

En resumen Sergio:

Evidencia buenas nociones de variabilidad muestral, de estimación por medio de intervalos y de la relación que existe entre el ancho del intervalo y el nivel de confianza.

Presenta una buena comprensión de los conceptos de precisión y nivel de confianza, y de la relación que cada uno de ellos tiene con el ancho del intervalo.

Presenta confusión con respecto a la relación entre el tamaño muestral, la variabilidad muestral y el ancho del intervalo, ya que considera que entre más grande la muestra mayor variabilidad.

Humberto:

1. En una fábrica embotelladora de gaseosa se quiere determinar si la máquina que se utiliza para el llenado de las botellas está funcionando correctamente. Aunque a simple vista las botellas parecen contener una buena cantidad del líquido, es necesario determinar si el promedio del líquido vertido en un lote de 1500 botellas es 350 ml.

1.1. Con la intención de estimar la cantidad de líquido promedio que hay en las 1500 botellas de gaseosa, el jefe de control de calidad sólo pudo tomar una muestra aleatoria de 40 botellas, en las cuales halló un promedio de líquido de 344 ml.

¿Cuáles de las siguientes conclusiones considera correctas?

- a) El promedio de las 1500 botellas de la producción es menor a 350 ml.
- b) No hay razón para asegurar que el promedio de las 1500 botellas de la producción sea menor a 350 ml.
- c) Lo más probable es que el promedio de las 1500 botellas esté entre 336 y 352 mililitros.
- d) El promedio de líquido de las 1500 botellas es 350 ml.
- e) El promedio del líquido en las 1500 botellas es 344 ml.
- f) **Con tan solo 40 botellas, no se puede decir nada sobre las 1500 botellas.**

¿Por qué?

“En la muestra de las 1500 botellas solo se tomaron 40, esto representa menos del 3% del porcentaje total de botellas, por esto considero erróneo hacer una afirmación sobre el promedio del líquido contenido en las botellas”.

Humberto no considera viable hacer una estimación a partir de una muestra, ni de manera puntal ni por medio de intervalos. Por lo visto la respuesta de Humberto es producto de sus nociones de variabilidad ya que si no fuese así habría elegido una respuesta más parecida a una estimación puntual.

1.2. Mediante un proceso de re-muestreo a partir de una nueva muestra de 40 botellas con promedio de 356 ml, se construyó el histograma (figura 1) que aparece a continuación, de allí se estableció que era muy probable que el promedio de las 1500 botellas esté entre 349,5 y 362,5 mililitros. A pesar de lo encontrado, el jefe de control calidad decide de manera arbitraria reportar que la estimación para la cantidad promedio vertida en las 1500 botellas está entre 353,5 y 357,5 mililitros.

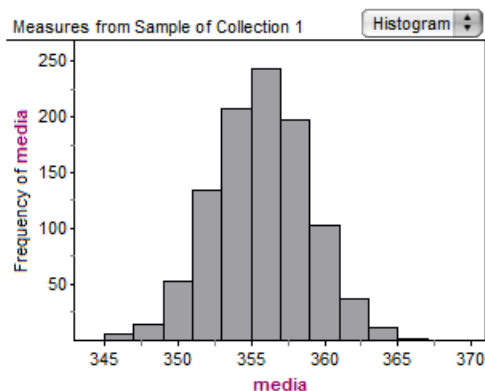


Figura 1.

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones sobre las dos estimaciones considera correctas?

- a) La estimación “entre 353,5 y 357,5 mililitros” tiene IGUAL probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas que la estimación “entre 349,5 y 362,5 mililitros”.
- b) La estimación “entre 353,5 y 357,5 mililitros” tiene MAYOR probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas que la estimación “entre 349,5 y 362,5 mililitros”.
- c) **La estimación “entre 353,5 y 357,5 mililitros” tiene MENOR probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas que la estimación “entre 349,5 y 362,5 mililitros”.**
- d) Ninguna.

¿Por qué?

“Porque la primera estimación (la de 349,5-362,5) se hizo empíricamente, es decir, se tiene un soporte que respalde dicha afirmación, en cambio la segunda estimación (353,5-357,5) se basa simplemente en la opinión personal de una persona y no tiene nada que lo respalde”.

Humberto ve en el método del Bootstrap una buena herramienta para el establecimiento de estimaciones, lo considera un proceso empírico que respalda al intervalo. Por otra parte, Humberto ha elegido la respuesta correcta pero en su justificación observamos que la relación que él percibe entre la probabilidad de acertar y el intervalo, depende la forma en cómo se construye el intervalo y no del ancho del intervalo.

1.3. Basado en lo obtenido anteriormente, si el jefe de control de calidad decidiera tomar una nueva muestra aleatoria de 40 botellas, y repitiera el proceso de simulación. ¿Cuál de las siguientes estimaciones considera que es más probable de obtener?

- a) **Entre 349,5 y 362,5**
- b) Entre 365 y 371
- c) Entre 346 y 358
- d) Cualquiera de las anteriores.

¿Por qué?

“Porque en el inciso anterior se realizaron ya 1000 intentos con devolución y se obtuvo ese intervalo (349,5-362,5) como el que más se repetía, por lo tanto es más probable que la nueva muestra se encuentre en este intervalo”.

Al parecer Humberto no está utilizando sus nociones de variabilidad en esta pregunta, por lo visto en su justificación, él se ha dado cuenta que la opción que eligió describe el mismo intervalo de la pregunta 1.2, por lo tanto considera que si se toma una muestra diferente se va obtener el mismo intervalo, en lo que se puede interpretar como un pensamiento determinista.

1.4. Suponga que la muestra con la que se realizó la estimación del punto 1.2 era de tamaño 100 y no de tamaño 40. Si se construye el histograma del re-muestreo y se establece una estimación utilizando el mismo criterio de probabilidad ¿Cómo cree que será esta estimación comparada con la del punto 1.2?

- a) Se obtiene el mismo intervalo que con la muestra de 40.
- b) Se obtiene un intervalo más ancho.

c) Se obtiene un intervalo menos ancho.

¿Por qué?

“Porque al aumentar el número de botellas a 100 y manteniendo el criterio de sacarlas y devolverlas, al ser un mayor número de botellas, creo que el intervalo tendería a reducirse”.

Humberto ha elegido la respuesta correcta y manifiesta buenas nociones sobre la influencia del tamaño muestral en el ancho del intervalo, en su justificación no ha sido claro, pues tan solo asegura que esta idea hace parte de sus creencias.

1.5. Ordene las siguientes estimaciones de mayor a menor de acuerdo a su probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas:

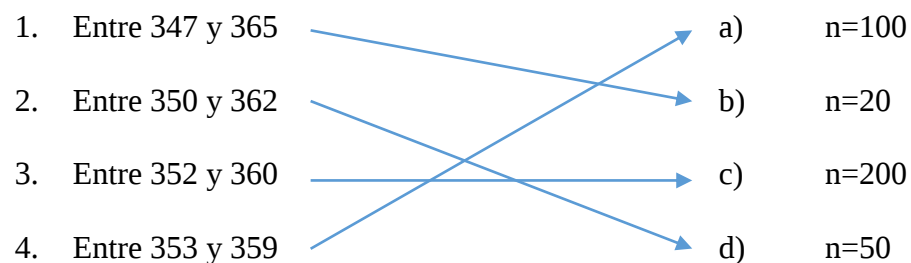
- a) entre 345 y 365,5 mililitros.
- b) entre 352,5 y 357,5 mililitros.
- c) entre 349,5 y 362,5 mililitros.
- d) 356 mililitros.

¿Por qué?

“ $a > c > b > d$ porque en la a) obtengo un intervalo muy grande que agrupa a la mayoría de las otras opciones, en la c) fue el resultado obtenido en el punto 1.2, b) ya que a diferencia de la d) es un intervalo y esto me garantiza haya probabilidad de acertar en el resultado que al tomar un número”.

Humberto manifiesta buenas nociones sobre la relación entre el ancho del intervalo y el nivel de confianza; por lo escrito en su justificación, podríamos pensar que su argumento es que entre más ancho es el intervalo mayor probabilidad de acertar y que es consciente que una estimación puntual tiene asociada una probabilidad nula.

1.6. Relacione cada estimación con el tamaño de la muestra con la que usted considera que fue construida, bajo el supuesto que en cada caso se obtuvo la misma media.



¿Por qué?

“La muestra de 50 la tomé ya que es muy similar al intervalo obtenido en las de 40 del inciso 1.2, la muestra de 20 la tomé basándome en que al ser menor la cantidad de botellas obtendré un intervalo más ancho, y caso similar las de 100 y 200, solo miré que el intervalo más ancho sería el de 100”.

En su justificación Humberto expone buenas nociones de la relación entre el ancho del intervalo y el tamaño muestral cuando asegura que al tener menor cantidad de botellas el intervalo es más ancho. Sin embargo, Humberto se confundió relacionando las opciones, aunque asegura que entre los tamaños 100 y 200 quien debe producir un intervalo más ancho sería la muestra de tamaño 100, su selección es contraria.

2. Para las siguientes afirmaciones sobre estimaciones por intervalos, responda falso (F) o verdadero (V) según considere.

2.1. Si aumenta el tamaño muestral, aumenta la precisión de la estimación de la media poblacional. F__ V X

¿Por qué?

“Verdadero ya que al tomar una mayor cantidad de botellas crece el porcentaje de estas respecto al total, y sabiendo que un promedio es sacarle la cantidad de líquido contenido en cada botella y luego dividirla entre la cantidad de botellas, entre más me acerque yo a este valor (1500) obtendré una mejor estimación del promedio del líquido en las botellas”.

Similar a la respuesta de Sergio, Humberto considera verdadera esta afirmación por que entre más grande sea la muestra más se parecerá a la población. Lo que no es claro es si Humberto percibe la relación entre el ancho del intervalo y la precisión.

2.2. Si aumenta la probabilidad de acierto del intervalo, aumenta la precisión de la estimación del promedio poblacional. F__ V X

¿Por qué?

“Aumentar la probabilidad de acierto implicaría que se toma una mayor cantidad de botellas o que el intervalo se hizo más ancho, por consecuencia es más probable que mi nuevo promedio sea más cercano al promedio real”.

Humberto posee buenas nociones de la relación entre el ancho del intervalo y el nivel de confianza pero su idea de que la precisión se relaciona tanto con la probabilidad como con el tamaño de la muestra es la razón por la cual ha elegido la opción incorrecta. Adicionalmente parece que Humberto concibe la probabilidad mencionada en el enunciado como la probabilidad de que el valor de la muestra sea cercano al parámetro poblacional.

2.3. Si aumenta el ancho del intervalo, aumenta la precisión de la estimación del promedio poblacional. F X V__

¿Por qué?

“Ya que al aumentar el ancho del intervalo lo único que garantizo es que sea más probable que el valor del promedio se encuentre ahí pero la precisión sería menor ya que tengo muchos valores a considerar”.

Humberto presenta buenas nociones de relación entre el ancho del intervalo y la precisión, y de la relación entre el ancho del intervalo y el nivel de confianza, lo cual no había sido tan claro en las anteriores preguntas, en esta ocasión contesta correctamente que la frase es falsa y lo justifica claramente.

En resumen Humberto:

Aunque evidencia algunas confusiones, posee nociones de la relación entre el nivel de confianza y el ancho del intervalo. A su vez es consciente que una estimación puntual tiene una probabilidad nula de acertar.

Concibe poca variabilidad en la situación propuesta del llenado de las botellas, lo que lo lleva a creer que es muy probable que dos muestras diferentes del mismo tamaño produzcan el mismo intervalo.

Evidencia buenas nociones de la relación entre el ancho del intervalo y el tamaño muestral, al tiempo que demuestra claridad en la relación ancho del intervalo-precisión.

Aún presenta concepciones erróneas con respecto al establecimiento de estimaciones con pequeñas muestras ya que para esta ocasión, en un principio no consideró viable una estimación por medio de un intervalo.

5.7.1. Conclusiones de la prueba final

Por medio de nuestra prueba final logramos observar que tres de los cuatro estudiantes poseen muy buenas nociones sobre la relación entre el tamaño de la muestra y el ancho del intervalo. Aunque Néstor mostró algunas confusiones podemos decir que en general los cuatro también evidenciaron en esta prueba buenas nociones sobre la relación del ancho del intervalo y la precisión de la estimación, y sobre la relación entre el nivel de confianza y el ancho del intervalo. Mientras que donde se observa aún presencia de confusiones es en la relación entre el tamaño muestral y la precisión, a este aspecto dos de los cuatro estudiantes contestaron y justificaron correctamente.

En igual medida, dos estudiantes consideraron que lo más factible es la inferencia por medio de intervalos y que un valor puntual prácticamente tendría una probabilidad nula de acertar, mientras que los otros dos estudiantes no consideraron viable la estimación por intervalos con pequeñas muestras, pero en sus justificaciones se evidenciaron buenas nociones de variabilidad.

Por medio de la prueba final hemos determinado que nuestros estudiantes poseen buenas ideas sobre las relaciones existentes entre varios conceptos que hacen parte de los Intervalos de Confianza, relaciones que bajo el método formal no son sencillas de interiorizar y las cuales varios trabajos han referenciado como concepciones erróneas comunes. En un balance general vemos que ninguna de las diferentes relaciones plasmadas en la prueba fue considerada de manera incorrecta por la totalidad de los estudiantes y las respuestas correctas de cada uno tuvieron una justificación coherente, de manera que los resultados obtenidos en esta prueba son prometedores e indican que este enfoque informal puede generar una amplia comprensión de las ideas asociadas a los Intervalos de Confianza

A continuación presentamos un resumen general del desarrollo observado en cada uno de los estudiantes durante toda la investigación, basándonos en el análisis de las respuestas y en el uso dado a Fathom por cada uno de ellos. Se elaboraron cuatro tablas que aparecen en la parte final de este documento, una para cada estudiante, con las ideas y nociones más relevantes desarrolladas en cada actividad.

En el caso de Néstor (Tabla 2) encontramos que inicialmente no consideraba la variabilidad y realizaba estimaciones puntuales. En su primera estimación tomó varias muestras del mismo tamaño, calculó la proporción en cada una de ellas y luego calculó el promedio de esas proporciones, es decir, estimó el valor esperado de la proporción. Lo anterior sucedió en con una situación que involucraba variables discretas, pero cuando se trataba de variable continua, Néstor evidenció razonamientos de estimación por intervalos, con afirmaciones del estilo de “alrededor de 1,62”.

Después de completar las tres primeras actividades, Néstor evidenció avances positivos en sus ideas de variabilidad, enfoque frecuencial de la probabilidad y ley de los grandes números. Además, Néstor mostró avances en sus ideas de distribución muestral, en la actividad 1 vimos que antes de trabajar con Fathom no tenía una imagen mental de esta distribución y durante las primeras actividades, incluso utilizó la distribución muestral para establecer inferencias.

Con las actividades 4 y 5, Néstor ratificó sus buenas nociones al comprender que se puede utilizar la distribución muestral para establecer inferencias sobre la población; dejó atrás las estimaciones puntuales comprendiendo la poca, realmente nula, probabilidad de acertar y encontró en el Bootstrap un apoyo para establecer estimaciones por intervalos.

Al final de la experiencia Néstor evidenció no tener del todo clara la relación entre el ancho del intervalo y el nivel de confianza; “entre más cerca estén los límites del intervalo a la media de la distribución muestral habrá mayor probabilidad de acertar”, es decir, si el nivel de confianza aumenta, disminuye el tamaño del intervalo. Adicionalmente en algunos de sus argumentos no asocia el ancho del intervalo y la precisión de la estimación. Como es natural en el proceso de consolidación de buenas intuiciones, Néstor mostró conocer las relaciones correctas que existen entre estos conceptos.

Luz por su parte (Tabla 3), inicia su recorrido con pocas ideas sobre la variabilidad, cuando se trató la situación que involucraba una variable discreta intentó plantear un intervalo de manera explícita e intuitiva, pero en el caso de variable continua menciona ideas en esta dirección más no establece su estimación. Luz también percibe cierta influencia del tamaño muestral en sobre la variabilidad muestral.

Durante las primeras 3 actividades, en las cuales Luz observó y simuló, muestreos y distribuciones muestrales, experimentó cambios positivos en sus nociones de variabilidad, ley de los grandes números, enfoque frecuencial, relación entre la muestra y la población, y empezó a adoptar ideas de estimación por intervalos dejando de lado las estimaciones puntuales. De ésta forma en la cuarta actividad Luz demostró buenas nociones sobre estimación por intervalos.

En la actividad 5 encontramos en Luz percepción de similitud entre la distribución muestral y la distribución Bootstrap, al utilizar re-muestras para construir una distribución que le permitiera determinar los límites de un intervalo. También Luz evidencia una mayor comprensión del efecto del tamaño muestral sobre la variabilidad.

En la prueba final se observa el desarrollo en los razonamientos de Luz sobre los siguientes conceptos: 1. la distribución muestral de la media, tales como considerar que este estadístico debe tomar valores cercanos a la verdadera media poblacional, como resultado de ser un estimador insesgado y de poseer una varianza que se hace menor al aumentar el tamaño muestral. 2. asume en forma clara la relación entre el ancho del intervalo y la precisión, y la relación entre el tamaño muestral y la precisión de la estimación.

Este trabajo estuvo dirigido a estudiantes con muy poca formación en estadística, y Aunque el concepto de probabilidad no fue estudiado directamente, los estudiantes si desarrollaron algunas ideas sobre el mismo, no como una medida numérica que podían explicitar, pero sí empíricamente lograron inferir que algunos eventos podrían suceder en más ocasiones que otros.

Sergio (Tabla 4) inicialmente demostró nociones de estimación por intervalos, ya que sin importar el tipo de situación, él tendía a limitar la variabilidad con una medida intuitiva de ± 5 .

Evidenció también, algunas ideas básicas sobre variabilidad y de la existencia de la relación entre el comportamiento de la muestra y la población, ya que asegura que el promedio de la muestra debe ser un valor muy cercano al verdadero valor del promedio poblacional.

Después de las primeras tres actividades, Sergio logró avances significativos en sus ideas de ley de los grandes números, variabilidad y relación distribución muestral-población. Al finalizar la cuarta y quinta actividad, Sergio demostró avances en sus nociones de estimación por intervalos, de la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad muestral y la relación entre la distribución Bootstrap y la distribución muestral.

Finalmente Sergio demostró que ha desarrollado muy buenas nociones sobre los conceptos de precisión y nivel de confianza, al tiempo que los relaciona correctamente con el ancho del intervalo.

En la prueba inicial de Humberto (Tabla 5) notamos que con situaciones que involucran variable continua utilizó estimaciones con intervalos de ± 3 creado de forma intuitiva, mientras que con variable discreta utilizaba estimaciones puntuales y les asociaba una medida intuitiva de confianza. Con el pasar de las primeras tres actividades, Humberto evidenció avances en sus nociones de relación entre la muestra y la población, así como en la relación modelo-distribución muestral.

Con las actividades cuatro y cinco, Humberto logró avances en su comprensión de la relación entre la distribución muestral y la distribución Bootstrap, al tiempo que dejó atrás las estimaciones puntuales. En la prueba final, Humberto presentó buenas ideas sobre la relación entre el nivel de confianza y el ancho del intervalo, también logramos ver que posee buenas

nociones sobre la relación tamaño muestra-ancho del intervalo y una gran claridad de la relación ancho del intervalo-precisión.

.

6.- CONCLUSIONES FINALES

Esta investigación es un ejemplo detallado de los resultados de aplicar un enfoque informal apoyado en simulaciones utilizando Fathom para el aprendizaje del método de estimación por Intervalos de Confianza.

En el transcurso de la aplicación y análisis de las actividades, hemos notado cambios importantes en los razonamientos informales de los estudiantes que participaron en esta investigación, cambios que van desde la concepción misma de la situación como estocástica hasta la concepción de cercanía entre el valor de la media de la distribución muestral y el valor del parámetro poblacional, para el establecimiento de inferencias por medio de intervalos. A continuación presentamos las conclusiones de nuestro trabajo, las cuales están divididas en dos partes, la primera enfocada en los estudiantes y la segunda enfocada al uso de las simulaciones en el salón de clases.

6.1. EN CUANTO A LOS ESTUDIANTES

Con el trabajo realizado durante esta investigación logramos guiar a los estudiantes para que por sí mismos descubrieran la conveniencia de las estimaciones por medio de intervalos, a medida que los procesos en Fathom propiciaban el desarrollo de buenas nociones sobre aquellos aspectos implícitos en el método formal. Encontramos que nuestro trabajo tiene potencial para reducir la aparición de las concepciones erróneas sobre los Intervalos de

Confianza que se encuentran reportadas en las investigaciones precedentes, varios de nuestros estudiantes lograron percibir que al aumentar el tamaño de la muestra se reduce el ancho del intervalo y se gana precisión en la estimación, a su vez varios son conscientes que cuando se aumenta el ancho del intervalo sin variar todo lo demás se aumenta la probabilidad de acertar.

Hemos observado cambios positivos en los razonamientos informales de los estudiantes, cambios que terminaron influyendo en sus conocimientos sobre el establecimiento de inferencias. Los estudiantes iniciaron utilizando estimaciones puntuales o planteando intervalos intuitivos sin ninguna justificación, una percepción básica de la variabilidad en el muestreo, poca o nula noción de distribución muestral y algunas ideas intuitivas sobre la influencia del tamaño muestral que necesitaban moldearse más.

Con nuestras actividades, los estudiantes lograron mejoras en sus Razonamientos Inferenciales Informales, evolucionando a estimaciones por medio de intervalos al tiempo que desarrollaron la noción de que la probabilidad de acertar con una estimación puntual es casi nula. También ampliaron sus nociones de variabilidad en pequeñas muestras, construyendo casi de cero sus ideas de distribución muestral y de cómo utilizar tal distribución para el establecimiento de inferencias sobre la población. Finalmente ellos terminan percibiendo correctamente la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad de la distribución muestral.

En contraste con el marco propuesto por Makar y Rubin (2009) para el análisis del Razonamiento Inferencia Informal, podemos decir que en general:

1. Generalizaciones: al terminar la aplicación de las actividades, encontramos que nuestros estudiantes no se limitan a la descripción de la muestra si no que consideran posible establecer buenas estimaciones sobre la población por medio de intervalos basándose en la distribución Bootstrap.

2. Datos como evidencia: las estimaciones mencionadas anteriormente, son construidas por nuestros estudiantes considerando la muestra y los resultados obtenidos al aplicar el método del Bootstrap, en las actividades finales ninguno utilizó intervalos intuitivos sin justificaciones.

3. Lenguaje probabilístico: Todos nuestros estudiantes dejaron de lado las estimaciones puntuales y terminaron utilizando intervalos. Durante varias actividades los estudiantes compararon sus intervalos con los compañeros y aceptaron el hecho de que se obtuvieran intervalos diferentes, con límites que consideraban cercanos e igualmente válidos.

Teniendo en cuenta el marco propuesto por Pfankuch, Wild y Parsonage (2012) para la comprensión de los Intervalos de Confianza como un proceso estocástico hemos logrado generar en los estudiantes:

- Imágenes sobre la relación entre la distribución muestral y la población, ya que durante las actividades en varias ocasiones por sí mismos simulaban la distribución muestral o la distribución Bootstrap según el caso, y las utilizaron para el establecimiento de sus inferencias.

- Imágenes que les permiten entender que el muestreo es un proceso repetitivo. Tanto en la construcción de la distribución Bootstrap como en la construcción de la

distribución muestral los estudiantes comprendían que estaban simulando la toma de muestras y re-muestras.

- Imagen de la franja de variabilidad en el muestreo. Inicialmente los estudiantes asociaban a la variabilidad muestral con un comportamiento descontrolado, pero a medida que iban transcurriendo las actividades empezaron a considerar que los valores de un estadístico, aunque son diferentes de una muestra a otra, presentan una tendencia en su comportamiento, es decir, responden a una distribución.

- Imagen del efecto del tamaño de la muestra. Los estudiantes desde la primera actividad pudieron notar que al aumentar el tamaño de la muestra, la variabilidad en la distribución muestral se reducía, esta idea se evidenció en ellos hasta las últimas actividades y la mayoría la utilizó para el establecimiento de sus intervalos.

- Imagen de intervalo de confianza intuitivo. Como se ha dicho anteriormente, los estudiantes iniciaron su recorrido con una tendencia al establecimiento de inferencias por medio de valores puntuales y podríamos decir que finalizaron asociando a este tipo de estimaciones una probabilidad nula de acertar, incluso les fue más natural el uso de intervalos para establecer estimaciones a partir de una sola muestra. Por lo visto durante esta investigación, ellos consideran que una estimación por intervalo es un conjunto de valores que incluye el valor desconocido del parámetro poblacional. En el trabajo con el Bootstrap manifestaron la preocupación de que su intervalo no atrapara el valor del parámetro y deciden aumentar su tamaño, teniendo cuidado de no aumentarlo mucho ya que consideraban que de esa manera perderían mucha precisión.

- Interpretación de un intervalo de confianza de forma empírica. Este apartado hace referencia a la interpretación frecuencial del nivel de confianza asociado al intervalo, lo cual no se profundizó durante nuestras actividades ya que hubiese requerido de un mayor tiempo, aunque sí en algunas discusiones se intentó guiar al estudiante hacia estas ideas, pero el término nivel de confianza no fue mencionado en ningún momento; sin embargo consideramos que es posible diseñar actividades que permitan el estudio de este aspecto de una manera más profunda sin necesidad de formalismos y por medio de simulaciones computacionales en Fathom.

6.2. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN Y SUGERENCIAS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

Actividades del estilo de nuestra primera actividad, donde el estudiante puede observar los diferentes valores que toma la proporción en diferentes muestras del mismo tamaño y compararlos con el valor real de la proporción en la urna, permiten que él refine primero sus ideas de variabilidad muestral, y segundo desarrolle buenas nociones sobre la relación entre el modelo de la urna y la proporción muestral, la cual es una de las ideas fundamentales que va a permitir al estudiante comprender y aceptar el establecimiento de inferencias a partir de una sola muestra a disposición.

Otras ideas básicas y no menos importantes en las cuales notamos evolución con este tipo de actividad fueron en el enfoque frecuencial de la probabilidad, la ley de los grandes números, y la influencia del tamaño de las muestras sobre la variabilidad muestral. Todo esto debido a que el estudiante observaba y construía directamente una simulación de la toma de una gran cantidad de muestras del mismo tamaño, de una urna de composición conocida,

notando el comportamiento de la proporción muestral, comparándolo constantemente con la media poblacional a medida que aumentaba el tamaño muestral.

Creemos que nuestra primera actividad puede ser reforzada para aplicarse en un curso de estadística añadiendo una segunda parte donde se siga un proceso similar, a partir de una situación con contexto, en la cual el estudiante tenga a su disposición la totalidad de los datos de una población, pueda calcular la media y la desviación estándar, para luego simular la toma de pequeñas muestras del mismo tamaño contrastando a fondo la media y la desviación estándar de la distribución muestral con las de la población, esto con el objetivo de establecer por sí mismos las relaciones existentes.

Con la segunda actividad, la cual va en dirección contraria a la primera, en el sentido de que ahora se desconoce la composición de la urna pero es posible tomar una gran cantidad de muestras del mismo tamaño con reposición, se consigue desarrollar en los estudiantes nociones de estimación por medio de intervalos producto de nuevas ideas de variabilidad, y nociones de la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad de la distribución muestral. Además, a partir de esta actividad hemos notado en los estudiantes el desarrollo de nuevos esquemas de uso para algunas funciones del programa Fathom.

La mayoría de los procesos realizados en Fathom por los estudiantes en estas dos primeras actividades fueron sugeridos en las guías de trabajo que les fueron entregadas, tuvimos que hacerlo de esta manera ya que el tiempo disponible con el grupo era limitado y los estudiantes aún no tenían mucha experiencia en el manejo del programa; pero consideramos que con un grupo de estudiantes con el cual se pueda trabajar durante un periodo de tiempo mayor, se

podría modificar la actividad para hacerla menos dirigida, más parecida a nuestra actividad 3.

Con la actividad 3, donde se debía estimar una media poblacional a partir de la toma de muestras del mismo tamaño, logramos generar evolución en la comprensión de la relación entre los parámetros de la distribución muestral de la media y la población, estimación por intervalos y ley de los grandes números. A su vez, con este tipo de actividades los estudiantes empiezan a concebir naturalmente que se encuentran frente a una situación estocástica y sienten la necesidad de mejorar su estimación con modificaciones en sus técnicas.

Al momento de establecer estimaciones por intervalos a partir de una aproximación Montecarlo de la distribución muestral construida y graficada en Fathom, es muy común que los estudiantes tomen como referencia los valores asociados a los tres rectángulos de mayor altura, lo cual fue suficiente para que en los diferentes intervalos siempre se capturara el verdadero valor del parámetro poblacional.

Finalizando la tercera actividad hemos visto los esquemas de uso y de acción instrumentada que han desarrollado los estudiantes y podemos inferir que empiezan a ver a Fathom como un instrumento que les permite establecer y respaldar sus estimaciones. Es posible que con un poco más de tiempo se pueda, a partir de una actividad como ésta, estudiar más a fondo aspectos relacionados con el nivel de confianza, generando discusiones ligadas a situaciones que permitan la reflexión en el estudiante sobre, por ejemplo, las implicaciones que acarrea tomar un intervalo más ancho a partir de una misma distribución muestral, aspecto que por cuestiones de tiempo no se profundizó con nuestro grupo.

En este sentido la actividad 3 podría ser complementada para la enseñanza en un curso de estadística permitiendo al estudiante profundizar en las cualidades de la distribución muestral, por ejemplo se podría pedir al estudiante que calcule la desviación estándar de la distribución muestral y contraste los percentiles de esta distribución con los valores de $\mu - \sigma_{\bar{x}}$, $\mu + \sigma_{\bar{x}}$, $\mu + 2\sigma_{\bar{x}}$, entre otros.

En el principio de esta investigación, se hizo una búsqueda de artículos teóricos sobre el Bootstrap y se encontraron descripciones del mismo, donde se afirmaba que este era un método sencillo de aplicar y de entender, sin embargo en nuestra actividad 4 observamos que el Bootstrap no fue una idea que surgió naturalmente en el estudiante, y que aunque no es muy complicado de recordar cómo proceso, comprenderlo y creer en que funciona requiere de mayor trabajo y dedicación de lo que se había considerado inicialmente. Aun así, el haber permitido al estudiante comparar la distribución muestral de la media y la distribución Bootstrap en Fathom, suscitó el desarrollo de algunas ideas sobre cómo usar la distribución Bootstrap para plantear buenas estimaciones de un parámetro poblacional a partir de una sola muestra.

Fue durante esta actividad 4 que surgió la idea en los estudiantes de tomar como referencia para la construcción del intervalo a los 5 rectángulos de mayor altura en la distribución Bootstrap. Esta situación podría ser complementada añadiendo una sección diseñada para que el estudiante observe la proporción de una buena cantidad de intervalos bootstrap contruidos mediante ese mismo proceso que logra capturar el verdadero valor del parámetro poblacional y que sea el mismo estudiante quien decida cuál es el nivel de confianza mínimo que está dispuesto a tolerar en su estimación.

En principio, era posible que el hecho de tener que llevar las muestras dadas por la actividad 5 a Fathom se convirtieran en un obstáculo para el estudiante, pero en este punto los esquemas desarrollados por ellos estuvieron a la altura del desafío y superaron este aspecto sin muchos inconvenientes.

A través del análisis hecho a las técnicas de los estudiantes en la actividad 5 utilizando el marco *aproximación instrumental* de Artigue (2002), hemos observado que Fathom propicia un ambiente de aprendizaje donde el estudiante utiliza explícitamente sus conocimientos de variabilidad, distribución muestral y de relación entre la distribución Bootstrap y la población.

Para complementar la actividad 5, teniendo en cuenta también las sugerencias que se han hecho en las demás actividades, se podría añadir una sección que busque que el estudiante establezca con la ayuda de Fathom, una relación entre los percentiles de la distribución Bootstrap y el nivel de confianza. La aplicación de los complementos que hemos sugerido para las cinco actividades buscan generar buenas ideas sobre la interpretación de la confianza asociada al intervalo y probablemente requerirían de una mayor inversión de tiempo.

Creemos que las nuevas investigaciones sobre Intervalos de Confianza podrían enfocarse en establecer la forma de adaptar el desarrollo del razonamiento inferencial a los currículos de la educación primaria, media y superior, ya que son necesarios los cambios institucionales y estructurales de la educación estadística. Esto implicaría la necesidad de docentes capacitados para generar desarrollos en los razonamientos inferenciales informales de los estudiantes, por lo tanto podría haber aspectos que estudiar en la formación de docentes de todos los niveles educativos.

Otra alternativa podría ser el diseño, aplicación y análisis de actividades con simulaciones computacionales que permitan al estudiante descubrir y manipular explícitamente las relaciones existentes entre algunos conceptos asociados a los intervalos como podría ser la relación entre nivel de confianza y la precisión de la estimación, la relación ancho del intervalo y la precisión e incluso la relación tamaño muestral y precisión.

También consideramos que las futuras investigaciones podrían centrarse en el planteamiento y análisis de secuencias de actividades que se constituyan en un puente entre los razonamientos inferenciales informales y el re-descubrimiento del método formal por parte del mismo estudiante.

Tabla 2. Ideas desarrolladas en Néstor durante la investigación

Néstor						
Prueba Inicial	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	Actividad 5	Prueba Final
Estimación a partir de un valor puntual, una aproximación del valor esperado. Algunas Ideas básicas de variabilidad en el muestreo. Algunas ideas sobre estimación por intervalo. Pequeñas ideas sobre la influencia del tamaño muestral en la variabilidad.	Avances en noción de variabilidad muestral. Reajustes de sus nociones de relación modelo-muestra. Avance en sus ideas de la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad muestral. Avance en nociones de enfoque frecuencial.	Evolución de su noción de variabilidad en muestras pequeñas e influencia del tamaño muestral. Buenas nociones de relación modelo muestra. Avances en sus nociones de estimación por medio de intervalos.	Nociones de distribución muestral de la media y de su relación con la población. Buenas nociones de ley de los grandes números y estimación por intervalos. Concepción estocástica de la situación.	Nociones de relación muestra-población. Avance en sus nociones de relación entre la distribución Bootstrap y la población. Algunas ideas de relación entre precisión y ancho del intervalo.	Buenas nociones de variabilidad. Buenas nociones de relación entre muestra y población. Buenas nociones de la relación entre la distribución muestral y la población. Buenas nociones de relación entre la distribución Bootstrap y la población.	Estimación por intervalos, valores puntuales probabilidad nula de acertar. Relación entre ancho del intervalo y tamaño muestral. Algunas ideas de la relación entre la precisión y el ancho del intervalo. Algunas ideas de relación entre el ancho del intervalo y el nivel de confianza.

Tabla 3. Ideas desarrolladas en Luz durante La investigación

Luz						
Prueba Inicial	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	Actividad 5	Prueba Final
Percepción de variabilidad en las situaciones propuestas. Algunas ideas rudimentarias de estimación por intervalos en situaciones con variable continua. Percepción de influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad.	Avances en sus ideas de variabilidad Evolución de sus ideas sobre la influencia del tamaño muestral en la variabilidad. Avance en sus ideas de estimación por medio de intervalos. Avances en nociones de enfoque frecuencial y ley de los grandes números	Evolución en sus nociones de variabilidad para muestras pequeñas. Avances en sus ideas de influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad de la proporción muestral. Avances en sus ideas de ley de los grandes números. Ideas confusas sobre establecer una estimación puntual o una estimación por intervalos.	Desarrollo de buenas nociones sobre la relación entre muestra y población. Pequeños avances hacia la estimación por intervalos. Buenas nociones de ley de los grandes números.	Buenas nociones de estimación por intervalo cuando se dispone de una sola muestra. Noción de relación entre la muestra y la población. Nociones de relación entre la distribución Bootstrap y la población. Idea de relación entre la distribución Bootstrap y la distribución muestral.	Concepción estocástica de las situaciones. Estimación por medio de intervalos Relación entre la variabilidad muestral y la variabilidad de la distribución Bootstrap. Algunas ideas de influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad.	Un intervalo no es una respuesta única. Buenas nociones sobre la influencia del tamaño muestral en el ancho del intervalo. Buenas nociones de la relación entre precisión y ancho del intervalo. Algunas ideas de la relación entre el tamaño muestral y el ancho del intervalo.

Tabla 4. Ideas desarrolladas en Sergio durante la investigación

Sergio						
Prueba Inicial	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	Actividad 5	Prueba Final
Algunas ideas de relación entre el comportamiento de la muestra y la población. Algunas ideas intuitivas de variabilidad muestral ± 5. Percepción de influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad. Algunas nociones de estimación por intervalos.	Avances en sus ideas de variabilidad. Noción de relación entre el comportamiento de la muestra y el modelo. Avance en sus ideas de distribución muestral. Avances en sus ideas de enfoque frecuencial y ley de los grandes números.	Se debate entre dos ideas, estimación por intervalos o estimación puntual. Avances en sus ideas de variabilidad en pequeñas muestras Avance en sus ideas de ley de los grandes números. Avance en sus ideas de la influencia del tamaño muestral en la variabilidad.	Desarrollo de buenas nociones sobre la relación entre muestra y población. Buenas nociones de la relación entre la distribución muestral de la media y la población. Buenas nociones de ley de los grandes números.	Buenas nociones de estimación por intervalo cuando se dispone de una sola muestra. Noción de relación entre la muestra y la población. Percepción de cercanía entre los comportamientos de la distribución Bootstrap y la distribución muestral.	Buenas nociones de variabilidad y de estimación por medio de intervalos. Buenas nociones de la influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad. Ideas de relación entre la distribución muestral y la población. Considera a la distribución Bootstrap una buena aproximación de la distribución muestral.	Buenas nociones de variabilidad muestral. Buenas nociones de estimación por medio de intervalos. Buenas nociones de la relación entre el ancho del intervalo y el nivel de confianza. Buena comprensión de los conceptos de precisión y nivel de confianza, y de la relación de estos con el ancho del intervalo.

Tabla 5. Ideas desarrolladas en Humberto durante la investigación

Humberto						
Prueba Inicial	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	Actividad 5	Prueba Final
Percepción de variabilidad en ambas situaciones : Para variable continua, estimación, media muestral ± 3. Para variable discreta, estimación puntual con un valor de confianza asociado. Percepción de influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad.	Avance en sus ideas de variabilidad muestral de la proporción. Avances en sus ideas de influencia del tamaño muestral sobre la variabilidad. Ideas de intervalos para delimitar la variabilidad muestral. Algunos avances en sus ideas de enfoque frecuencial.	Avances en sus ideas de variabilidad con pequeñas muestras. Noción de relación entre el comportamiento de la muestra y el modelo. Avance en sus ideas de relación entre el modelo y la distribución muestral. Avances en sus ideas de enfoque frecuencial y ley de los grandes números.	Relación entre el valor esperado de la media muestral y la media poblacional. Avance en sus ideas de ley de los grandes números. Avance en sus ideas de la influencia del tamaño muestral en la variabilidad. Avances en sus ideas de la variabilidad en pequeñas muestras.	Avances en sus ideas de distribución muestral y de su relación con la población. Percepción de relaciones entre la distribución Bootstrap y la distribución muestral. Deja atrás la estimación puntual y manifiesta buenas nociones de estimación por intervalos.	Buenas nociones de variabilidad muestral. Buenas nociones de relación entre el comportamiento de la muestra y la población. Algunas ideas de relación entre la distribución Bootstrap y la distribución muestral.	Estimaciones puntuales tienen una probabilidad nula de acertar. Buenas nociones de relación entre el ancho del intervalo y el tamaño muestral. Algunas ideas de la relación entre el ancho del intervalo y el nivel de confianza. Buenas nociones de la relación entre el ancho del intervalo y la precisión.

7.- ANEXOS

7.1. PRUEBA INICIAL

Situación 1

Una fundación quiere conocer la estatura promedio de los jóvenes varones menores de 19 años de Medellín. Como el número de estos jóvenes es muy grande, la fundación opta por seleccionar al azar un grupo de 20 jóvenes menores de 19 años. Hecha la selección de jóvenes, les midieron su estatura y calcularon el promedio de ellas obteniendo el valor de 1,75 m.

- E) ¿Si seleccionara otro grupo de 20 estudiantes, el promedio de sus estaturas también sería 1,75 m? Justifique su respuesta.
- F) ¿Cuál cree que sea la estatura promedio de todos los jóvenes varones menores de 19 años de Medellín? Justifique su respuesta.
- G) Si en lugar de 20 jóvenes el grupo estuviera conformado por 100 jóvenes y se obtuviera el mismo promedio (1,75 m.), ¿cambiaría la respuesta dada en B)? Explique su respuesta.
- H) A su juicio, ¿qué implicaciones tiene sobre la estimación del promedio de la estatura el hecho de aumentar el tamaño del grupo seleccionado?

Situación 2

Suponga que una urna contiene un cierto número de bolas blancas y negras que nadie conoce. Usted fue contratado para estimar las proporciones de bolas blancas y negras que hay en la urna. Lo único que puede hacer es realizar extracciones de bolas de la urna con reposición (es decir, saca la bola, anota el color y la devuelve a la urna antes de realizar otra extracción).

A) Suponga que realizó 100 extracciones y obtuvo 70 bolas blancas (y 30 bolas negras), es decir, 70% de los resultados fueron bolas blancas. ¿Qué conclusión sacaría respecto a la proporción de bolas blancas en la urna? Explique su respuesta.

B) No se conoce el número de bolas de cada color en la urna, pero se sospecha que son iguales. Si al realizar 100 extracciones se obtienen 60 bolas blancas y 40 negras, ¿se podría seguir pensando que la urna contiene igual cantidad de bolas blancas que de bolas negras? Justifique su respuesta.

C) Si la urna contiene igual número de bolas blancas que negras y se realizan 100 extracciones con devolución, ¿Cuáles serían los resultados más probables en cuanto a bolas de cada color? Seleccione los posibles resultados en las siguientes tablas justificando muy bien su elección.

Blancas	Negras	Blancas	Negras	Blancas	Negras	Blancas	Negras	Blancas	Negras
1	99	11	89	21	79	31	69	41	59
2	98	12	88	22	78	32	68	42	58
3	97	13	87	23	77	33	67	43	57
4	96	14	86	24	76	34	66	44	56
5	95	15	85	25	75	35	65	45	55
6	94	16	84	26	74	36	64	46	54
7	93	17	83	27	73	37	63	47	53
8	92	18	82	28	72	38	62	48	52
9	91	19	81	29	71	39	61	49	51
10	90	20	80	30	70	40	60	50	50

Negras	Blancas	Negras	Blancas	Negras	Blancas	Negras	Blancas	Negras	Blancas
1	99	11	89	21	79	31	69	41	59
2	98	12	88	22	78	32	68	42	58
3	97	13	87	23	77	33	67	43	57
4	96	14	86	24	76	34	66	44	56
5	95	15	85	25	75	35	65	45	55
6	94	16	84	26	74	36	64	46	54
7	93	17	83	27	73	37	63	47	53
8	92	18	82	28	72	38	62	48	52
9	91	19	81	29	71	39	61	49	51
10	90	20	80	30	70	40	60	50	50

D) ¿Cuáles serían las cantidades de bolas blancas más probables de obtener si se hicieran 1000 extracciones?

7.2. ACTIVIDAD 1

1.1. Modelo de urna.

1. Una urna contiene 4 bolas azules y 2 amarillas, de ella se extrae una bola repetidas veces con devolución (se saca la bola, se mira su color y se regresa a la urna).

a) ¿Cuántas bolas de cada color espera que salgan si hace 10 extracciones con devolución? ¿Y si son 100 extracciones? ¿Y si son 1000 extracciones?

b) Si se toman 1000 muestras de tamaño 60 y en cada una se calcula la proporción de bolas azules ¿Cómo quedaría la gráfica de las proporciones? (bosquéjela)

1.2 Discusión.

1.3. Construcción de la urna en fathom

1. Abrir el programa Fathom
2. Dar click sostenido en el icono “**Collection**” ubicado en la parte superior izquierda de su pantalla (figura 1) y arrástrelo hasta la hoja en blanco

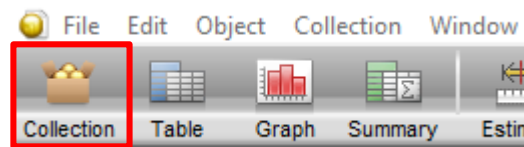


Figura 1

3. Dar clic sostenido en el icono **Table** ubicado en la parte superior izquierda de su pantalla justamente al lado del icono **Collection** (Figura 1) y arrástrelo hasta la hoja en blanco.

4. Dé clic en la casilla de la tabla que dice “new”, escriba el título de la columna “**Bola**” y oprima Enter. Escriba los colores de las bolas en las casillas de la misma columna de manera similar a como aparece en la figura 2.

Collection 1		
	Bola	<new>
1	Azul	
2	Azul	
3	Azul	
4	Azul	
5	Amarillo	
6	Amarillo	

Figura 2

5. Clic derecho sobre el icono “collection 1” y elija la opción “sample cases”, aparecerá un nuevo icono, selecciónelo y arrastre una tabla desde la parte superior de la ventana hasta la hoja en blanco.

a) ¿Cómo interpreta los datos proporcionados por esta nueva tabla?

b) ¿Quisiera que la tabla tuviese más resultados? Yo no sabría qué responder.

6. Dé doble clic en el icono “Sample of collection 1”, aparecerá una nueva ventana la cual debe llenar como en la figura 3 y dar clic en “sample more cases”; revise nuevamente la tabla.

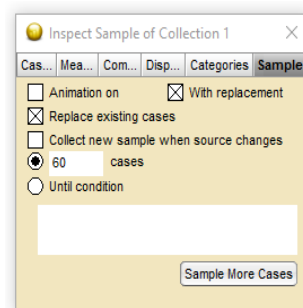


Figura 3

7. De clic sostenido en el icono **Graph** ubicado en la parte superior izquierda de su pantalla cerca del icono **Collection** (figura 1) y arrástrelo hasta la hoja en blanco. Luego de clic sostenido en la casilla “Bola” de la tabla “Sample of collection 1” arrástrelo hasta el “eje x” del plano cartesiano aparece en la pantalla y seleccione la opción.

c) ¿Qué sucede cada vez que da clic en el botón “Sample More Cases” de la ventana del punto 6?

d) Aumente el tamaño muestral siguiendo lo hecho en el paso 6 y describa en su hoja de trabajo lo observado en la gráfica.

e) En su hoja de trabajo bosqueje un histograma de los resultados de la urna si se hicieran 6.000 repeticiones, sin necesidad de hacerlo en fathom.

1.4 discusión

1.6 .Creando una medida.

6. Dé doble clic sobre el icono llamado “Sample of collection 1” (creado en el paso 5) y en la ventana emergente seleccione la pestaña “Measures”, aparecerá una ventana como la de la figura 4, en la columna “Measure” donde dice <new> escriba **azul** y dé doble clic en la columna “**Formula**”, luego dé doble clic en ”Functions” →”Estatisticlas” →”One Attribute” →”Count”; escriba dentro del paréntesis “**Azul**” y de clic en “OK” (figura 5).

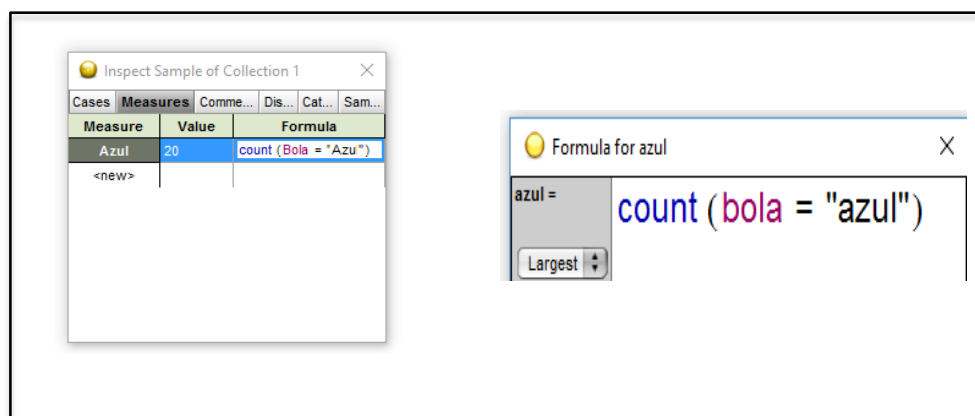


Figura 5

7. Cierre el inspector, dé clic derecho sobre el icono “Sample of collection 1” y elija la opción “Collect measures”, aparecerá un nuevo icono en su pantalla.
8. Seleccione el nuevo icono llamado “measures from simple of collection 1” y cree una tabla arrastrando el icono “Table” de la parte superior de la pantalla.
 - e) ¿Cómo interpreta los resultados registrados en esta nueva tabla?
 - f) ¿Es suficiente con la cantidad de datos que tiene o cuantos le gustaría que tuviera la tabla?
9. Para aumentar la cantidad de datos en la más reciente tabla dé doble clic en el icono “measures from simple of collection 1”, elija las opciones en la tabla como aparece en la figura 6 y de clic en el boto “collect more measures”.
10. Realice un gráfico con los datos de la nueva tabla
 - g) ¿Cómo interpreta este grafico?
 - h) ¿Puede modelar cualquier urna con cualquier distribución utilizando Fathom?
¿Como? Cree una nueva Urna y repita todo el proceso.

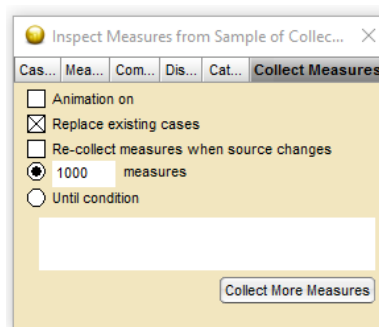


Figura 6

7.3. ACTIVIDAD 2

¿Cuántas bolas de cada color hay en la urna?

2.1. El contenido de la Urna 1

Conteste las siguientes preguntas en su hoja de trabajo

3. Se sabe que una urna contiene bolas de 2 colores diferentes, se le desafía a determinar la cantidad de bolas de cada color, para ello solo se le permite hacer extracciones de una sola bola, observar su color y devolverla a la urna. Puede hacer esto las veces que desee.
 - d) ¿Cree que sea posible establecer de esta forma la cantidad de bolas de cada color que hay en la urna? Justifique detalladamente su respuesta.
 - e) Si usted repitiera 10 veces el mismo proceso (sacar una balota, mirar su color y devolverla), ¿podría determinar la cantidad de bolas de cada color? Justifique su respuesta.
4. Abra el archivo **Urna 1**. Allí le aparece una pequeña tabla verde llamada “summary” la cual contiene la cantidad de veces que salió cada color en 10 extracciones con devolución. Registre en su hoja de trabajo la cantidad de veces que apareció cada color.
 - f) ¿Considera que hay la misma cantidad de bolas de cada color? Justifique su respuesta.

2.2. Discuta sus respuestas y conclusiones con sus compañeros, al tiempo que escribe detalladamente en su hoja de trabajo los cambios que la discusión produjo en sus ideas.

2.3. Interactuando con la urna.

1. En el archivo **Urna 1** presione **Ctrl+y** varias veces.

a) ¿Qué es lo que está sucediendo al presionar **Ctrl+y**? ¿Cuántas bolas de cada color estima que hay en la urna? **Justifique su respuesta.**



Figura 1

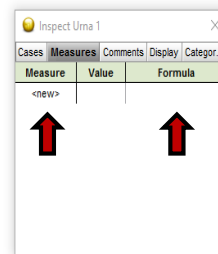


Figura2

2. Para simular la extracción de varias muestras del mismo tamaño (10) y conocer la cantidad de bolas azules en cada una, dé doble clic sobre el icono en forma de caja que aparece en la parte blanca de su pantalla llamada “Urna 1” (figura 1);, aparecerá la ventana “Inspect Urna 1” (Figura 2);, en la columna “Measure” donde dice <new> escriba **azul** y dé doble clic en la columna “**Formula**”, luego dé doble clic en “Functions” → “Estatísticas” → “One Attribute” → “Count”; escriba dentro del paréntesis, bola=“**Azul**” y de clic en “OK” (figura 3).

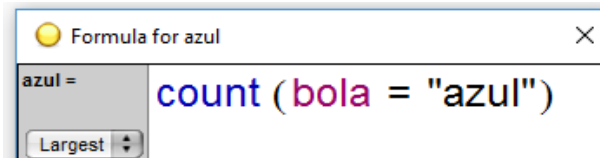


Figura 3

3. Cierre el inspector (Inspect Urna1), dé clic derecho en el icono de la figura 1 y elija la opción “collect measures” aparecerá un nuevo icono en su pantalla llamado “Measures from Urna1”(Figura 5).

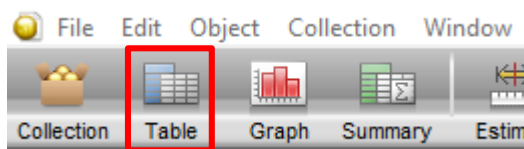


Figura 4



Figura 5

4. Dé clic **sostenido** en el icono Table ubicado en la parte superior de la pantalla (Figura 4) y arrástrelo hacia la hoja en blanco, luego dé doble clic en sobre la caja de icono “Measures form Urna 1” (Figura 5) y aparecerá una pequeña ventana (Figura 6) en la cual debe seleccionar solamente la opción “Replace existing cases”, escribir en el pequeño cuadro blanco el numero 1000 como aparece en la figura 6, dar clic en el botón “Collect More Measeres” y cerrar la ventana.

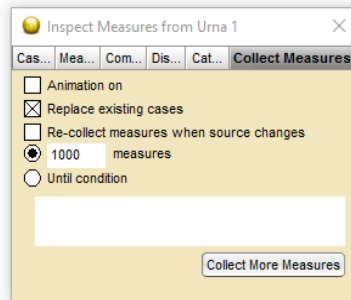


Figura 6

b) ¿Cómo interpreta los numeros que aparecen en la nueva tabla (Measures from Urna 1)?

5. Dé clic sostenido en el icono “Graph” ubicado en la parte superior de la pantalla (Figura 4) y construya la grafica con la “Measures from Urna 1” (Figura 8).

Measures from Urna 1		
	azul	5
10		5
11		4
12		4
13		3
14		4
15		4

Figura 8

c) ¿Cómo interpreta la gráfica en pantalla? ¿Cuántas balotas de cada color hay en la Urna?

2.4. Discuta sus respuestas y conclusiones con sus compañeros y el profesor, al tiempo que escribe detalladamente en su hoja de trabajo los cambios que la discusión produjo en sus ideas.

2.5. Aumentando el tamaño muestral

1. hasta el momento se ha trabajado con muestras de tamaño 10, pero se puede hacer la cantidad de extracciones que se desee.

a) ¿Qué cree que puede ocurrir si se aumenta el tamaño de la muestra a 50 extracciones y se repite el proceso anterior? ¿Y si se aumenta a 100? Justifique su respuesta.

2. Para aumentar el tamaño de la muestra seleccione el icono en forma de caja llamado Urna 1, luego baje una tabla del icono ubicado en la parte superior de la pantalla.

3. Dé clic derecho sobre la nueva tabla, luego de clic en “New Cases” y escriba en el recuadro que apareció en pantalla 40 para obtener un total de 50 extracciones.

4. Repita el procedimiento de la sección 1.3 con muestras de tamaño 50 y luego con tamaño 100 y responda:

b) ¿Observa alguna diferencia al haber aumentado el tamaño de la muestra?

c) ¿Cuántas bolas de cada color hay en la Urna?

7.4. ACTIVIDAD 3

3.1. Cargamento de Peras

Un almacén que comercializa frutas quiere determinar el peso promedio de más de 2000 peras de un cargamento que se encuentra almacenado en un cuarto de refrigeración. Se presentaron ciertos inconvenientes y se perdieron los registros de este cargamento, por lo tanto se desconoce el peso exacto del cargamento y la cantidad exacta de peras.



- c) Suponga que usted solo puede abrir la puerta del cuarto de refrigeración por unos segundos para no afectar la temperatura y dañar el proceso de conservación de la fruta, ¿Cómo podría entonces ayudar a esta empresa a determinar el peso promedio de todas las peras? Justifique su respuesta.
- d) En el tiempo que puede durar abierta la puerta del cuarto de refrigeración se alcanzan a extraer 50 peras, pesarlas y devolverlas rápidamente al cuarto de refrigeración. ¿Cómo podría determinar bajo estas condiciones el peso promedio de todas las Peras? Describa detalladamente su idea.

3.2. Discusión.

3.3. Estimando el peso promedio.

Abra el archivo **Peras** en Fathom. Aparecerá una tabla con 50 datos llamada “Sample of peras”.

- d) Escriba su interpretación de esta tabla, ¿que representa cada dato y cuál es su relación con la situación descrita en el numeral 3.1? Justifique su respuesta.
- e) ¿Cuántas muestras de 50 peras podría extraer y cuantas considera suficientes para determinar el peso promedio del cargamento de peras? Justifique su respuesta.
- f) Estime el peso promedio del cargamento de peras describiendo y justificando detalladamente sus ideas y su procedimiento.

7.5. ACTIVIDAD 4

4.1. Una fábrica de enjuague bucal desea establecer la cantidad promedio de líquido que la máquina dispensadora automática ha vertido en las botellas de una producción de más de 5000 unidades.

- a) ¿Cómo podría establecer dicho promedio? Justifique su respuesta.
- b) Suponga que por cuestiones de tiempo solo tiene a su disposición una muestra aleatoria de 40 botellas ¿Cómo podría determinar la cantidad de líquido promedio vertida en todas las botellas? Justifique su respuesta.

4.2. Discusión.

4.3. Simulación en Fathom.

1. Abra el archivo **ACT4**, aparecerán en su ventana dos muestras diferentes de una misma población cada una con su respectiva tabla.

Para la **muestra 1** Simulemos la situación suponiendo que podemos extraer muestras del mismo tamaño con reposición:

2. Cree la medida (**measure**) para la colección muestra1.
3. Colecte las medidas y simule la toma para la cantidad de muestras que desee.
4. Realice el histograma
 - c) ¿Qué interpretación le da al gráfico y a los valores calculados?
 - d) ¿Cuál es la cantidad promedio de líquido que hay en las botellas de esta producción?

Para la **muestra 2** vamos a suponer que disponemos tan sólo de una muestra y sigamos un proceso diferente:

5. Haga clic derecho sobre el icono muestra 2 y seleccione la opción “sample cases”, aparecerá un nuevo icono en su ventana.
6. Haga doble clic en este nuevo icono y en la ventana que aparece seleccione las opciones “Replace existing cases” y “with replacement”, cambie el “10” por un el número “40” y dé clic en el botón “sample more cases”.
7. Con el icono “sample of muestra 2” iluminado arrastre una tabla desde la parte superior de la pantalla.
8. Cree la medida promedio2 en la colección “sample of muestra 2”.
9. Colecte las medidas de la colección “sample of muestra 2” y cree la tabla.
10. En el inspector de la colección “Measures from sample of muestra 2” seleccione únicamente “Replace existing cases”, elija la misma cantidad de muestras que tomo en el paso 3 para la muestra 1 y recolecte las medidas.
11. Realice el histograma con los datos de la tabla “Measures from sample of muestra 2”

- e) ¿Cómo interpreta este gráfico? Justifique su respuesta
- f) Según lo realizado para la muestra 2 ¿Cuál estima que es el valor promedio de líquido vertido en las botellas?
- g) ¿Qué diferencias y similitudes hay entre este gráfico y el construido para la muestra1?
- h) ¿Cómo es la variabilidad de este gráfico con respecto al construido para la muestra1?
- i) ¿Qué podría hacer para mejorar la estimación con la muestra 2?

7.6. ACTIVIDAD 5

1. El Observatorio de Salud Pública de Santander (OSPS) realizó en el 2015 un estudio con un grupo de 50 personas de Bucaramanga entre los 15 y los 64 años de edad encontrando que 11 personas de este grupo padecen de hipertensión arterial (altos niveles de tensión arterial).

Los altos niveles de la tensión arterial causan daño al corazón y a los vasos sanguíneos de órganos principales como el cerebro y los riñones. Esta enfermedad es como un “asesino silencioso”, ya que no existen síntomas que alerten sobre su presencia. ¿Qué proporción de la población bumanguesa padece esta enfermedad? Justifique su respuesta.

2. Una fundación quiere conocer la estatura promedio de los jóvenes varones menores de 20 años de la ciudad de Medellín. Como el número de estos jóvenes es muy grande, la fundación opta por seleccionar al azar un número de 20 jóvenes menores de 20 años.

Hecha la selección, procedieron a medir su estatura obteniendo la tabla que se encuentra en el archivo “**Estaturas**”.

¿Cuál es la estatura promedio de todos los jóvenes varones menores de 20 años de Medellín? Justifique su respuesta.

7.7. PRUEBA FINAL

1. En una fábrica embotelladora de gaseosa se quiere determinar si la máquina que se utiliza para el llenado de las botellas está funcionando correctamente. Aunque a simple vista las botellas parecen contener una buena cantidad del líquido, es necesario determinar si el promedio del líquido vertido en un lote de 1500 botellas es 350 ml.

1.1. Con la intención de estimar la cantidad de líquido promedio que hay en las 1500 botellas de gaseosa, el jefe de control de calidad sólo pudo tomar una muestra aleatoria de 40 botellas, en las cuales halló un promedio de líquido de 344 ml.

¿Cuáles de las siguientes conclusiones considera correctas?

- a) El promedio de las 1500 botellas de la producción es menor a 350 ml.
- b) No hay razón para asegurar que el promedio de las 1500 botellas de la producción sea menor a 350 ml.

- c) Lo más probable es que el promedio de las 1500 botellas esté entre 336 y 352 mililitros.
- d) El promedio de líquido de las 1500 botellas es 350 ml.
- e) El promedio del líquido en las 1500 botellas es 344 ml.
- f) Con tan solo 40 botellas, no se puede decir nada sobre las 1500 botellas.

¿Por qué?

1.2. Mediante un proceso de re-muestreo a partir de una nueva muestra de 40 botellas con promedio de 356 ml, se construyó el histograma (figura 1) que aparece a continuación, de allí se estableció que era muy probable que el promedio de las 1500 botellas esté entre 349,5 y 362,5 mililitros. A pesar de lo encontrado, el jefe de control calidad decide de manera arbitraria reportar que la estimación para la cantidad promedio vertida en las 1500 botellas está entre 353,5 y 357,5 mililitros.

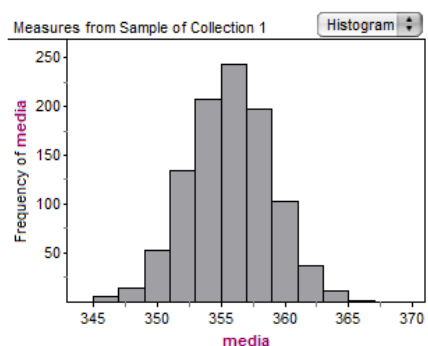


Figura 1.

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones sobre las dos estimaciones considera correctas?

- a) La estimación “entre 353,5 y 357,5 mililitros” tiene IGUAL probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas que la estimación “entre 349,5 y 362,5 mililitros”.
- b) La estimación “entre 353,5 y 357,5 mililitros” tiene MAYOR probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas que la estimación “entre 349,5 y 362,5 mililitros”.
- c) La estimación “entre 353,5 y 357,5 mililitros” tiene MENOR probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas que la estimación “entre 349,5 y 362,5 mililitros”.
- d) Ninguna.

¿Por qué?

1.3. Basado en lo obtenido anteriormente, si el jefe de control de calidad decidiera tomar una nueva muestra aleatoria de 40 botellas, y repitiera el proceso de simulación. ¿Cuál de las siguientes estimaciones considera que es más probable de obtener?

- a) Entre 349,5 y 362,5
- b) Entre 365 y 371
- c) Entre 346 y 358
- d) Cualquiera de las anteriores.

¿Por qué?

1.4. Suponga que la muestra con la que se realizó la estimación del punto 1.2 era de tamaño 100 y no de tamaño 40. Si se construye el histograma del re-muestreo y se establece una estimación utilizando el mismo criterio de probabilidad ¿Cómo cree que será esta estimación comparada con la del punto 1.2?

- a) Se obtiene el mismo intervalo que con la muestra de 40.
- b) Se obtiene un intervalo más ancho.
- c) Se obtiene un intervalo menos ancho.

¿Por qué?

1.5. Ordene las siguientes estimaciones de mayor a menor de acuerdo a su probabilidad de acertar el promedio de las 1500 botellas:

- a) entre 345 y 365,5 mililitros.
- b) entre 352,5 y 357,5 mililitros.
- c) entre 349,5 y 362,5 mililitros.
- d) 356 mililitros.

¿Por qué?

1.6. Relacione cada estimación con el tamaño de la muestra con la que usted considera que fue construida, bajo el supuesto que en cada caso se obtuvo la misma media.

1. Entre 347 y 365

2. Entre 350 y 362

3. Entre 352 y 360

b) $n=20$

5. Entre 353 y 359

c) $n=200$

a) $n=100$

d) $n=50$

¿Por qué?

2. Para las siguientes afirmaciones sobre estimaciones por intervalos, responda falso (F) o verdadero (V) según considere.

2.1. Si aumenta el tamaño muestral, aumenta la precisión de la estimación de la media poblacional. F__ V __

¿Por qué?

2.2. Si aumenta la probabilidad de acierto del intervalo, aumenta la precisión de la estimación del promedio poblacional. F__ V__

¿Por qué?

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.

Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. En E. Mancera, C. Pérez, Historia y Prospectiva de la Educación Matemática, *Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, 9-21. Recuperado el 6 de noviembre de 2015 en <http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/viewFile/6948/6634>

Behar, R. (2001). Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza aprendizaje de la estadística. Tesis doctoral no publicada, Universidad Politécnica de Catalunya,. España.

Briceño, E. (2008). El uso de la gráfica desde una perspectiva instrumental. Un estudio socioepistemológico. Tesis de Maestría no publicada, *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional*, D.F., México.

Chance, B., y McGaughey, K. (2014). Impact of a simulation/randomization based curriculum on student understanding of p-values and confidence intervals. In K. Makar, B. de Sousa, y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9)*, Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Cumming, G. (2007). Inference by eye: Pictures of confidence intervals and thinking about levels of confidence. *Teaching Statistics*, 29(3), 89-93.

Cumming, J., Miller, C., y Pfannkuch, M. (2014). Using bootstrap dynamic visualizations in teaching. In K. Makar, B. de Sousa, y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS9, July 2014) Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg: The Netherlands: International Statistical Institute

DasGupta, A. (Sin fecha). The Bootstrap. Recuperado el 20 de septiembre de 2017 de <http://www.stat.purdue.edu/~dasgupta/bootstrap.pdf>

Efron, B. (1979). The 1977 RIETZ lecture. *The Annals of Statistics*, 7(1), 1-26.

Efron, B. (2000). The bootstrap and modern statistics. *Journal of the American Statistical Association*, 95(452), 1293-1296.

Finzer, W. (2005). *Fathom Dynamic Data Software*. KCP technologies.

Friel, S., Curcio, F, y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education*, 124-158.

Kerner, G. (2015). *Análisis Estadístico con el Método del Bootstrap: Aplicaciones en problemas de Regresión*. Licenciatura. Universidad de Buenos Aires.

Ledesma, R. (2008). Introduccción al Bootstrap. Desarrollo de un ejemplo acompañado de software de aplicación. *Tutorials in Quantitative Methods for Psychology*, 4(2), 51-60.

Liu, Y., y Thompson, P. (2007). Teachers' understandings of probability. *Cognition and Instruction*, 25(2), 113–160.

Lock, R., Lock, P. F., Morgan, K. L., Lock, E., y Lock, D. (2014). Intuitive Introduction to the Important Ideas of Inference. *ICOTS 9 Proceedings*.

Makar, K., y Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82-105.

Makar, K., y Rubin, A. (2014). Informal statistical inference revisited. *ICOTS-9*.

Marín, J. (2015). Métodos de re-muestreo. Tema 2: Distribución empírica. Recuperado el 20 de Septiembre de 2017 de

<http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/jmmarin/esp/Boots/tema2BooPres.pdf>

Moore, D. S. (2005). *Estadística aplicada básica*. Antoni Bosch editor, España.

Olivo Suárez, E. (2008). *Significado de los Intervalos de Confianza para los estudiantes de ingeniería en México*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.

Pérez Medina, C. (2014). Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la Educación Matemática. *Perspectiva Educacional*, 53(2), 129-150.

Recuperado el 6 de noviembre de 2015 en

<http://www.perspectivaeducacional.cl/index.php/peducacional/article/viewFile/200/117>

Pfannkuch, M. (2008). Building sampling concepts for statistical inference: A case study. In 11th International Congress of Mathematics Education Proceedings, Monterrey, Mexico.

Pfannkuch, M., Wild, C. J., y Parsonage, R. (2012). A conceptual pathway to confidence intervals. *ZDM*, 44(7), 899-911.

Rangel, L. (2014) Estructuras y mecanismos mentales asociados a los Intervalos de Confianza: profesores de matemáticas en formación (Tesis de maestría). Universidad industrial de Santander. Colombia

Reaburn, R. (2014). Student's understanding of confidence intervals. In *The 9th International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1-4).

Rossmann, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 5-19.

Salcedo, A., Yáñez, G., González, J. y Lira, A. (2011). Interpretación de Intervalos de Confianza por docentes en formación. *Investigación Educativa: Venezuela en Latinoamérica siglo XXI*, 2(1), 209-229.

Sánchez, N. y Ruiz, B. (2017). La inferencia informal en la enseñanza de la estadística. Una propuesta por medio del estudio de clases. *Avances en matemática educativa: El profesor investigador*. 6th ed. Monterrey, Mexico: Alejandro Rosas, pp.117-133.

Lee, H., Doerr, H., Trang, D. y Lovett, J. (2016). The role of probability in developing learner's models of simulation approaches to inference. *Statistics Education Research Journal*, 15(2), 216-238.

Solanas, A., y Olivera, V. (1992). Bootstrap: fundamentos e introducción a sus aplicaciones. *Anuario de psicología/The UB Journal of psychology*, (55), 143-154.

Wasserman, L. (2014). The Bootstrap. Capitulo 11. Recuperado el 21 de junio de 2017 de <http://www.stat.cmu.edu/~larry/=sml/Boot.pdf>

Wild, C. (2013). *ISR15: Accessible Conceptions of Statistical Inference: Pulling ourselves up by the bootstrap*". Recuperado el 29 de diciembre de 2015 de <https://www.stat.auckland.ac.nz/~wild/ISR-15/#Fig1>.

Yáñez, G y Behar, R (2009). Interpretaciones erradas del nivel de confianza en los Intervalos de Confianza y algunas explicaciones plausibles. En M. J. González; M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM. Santander.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1975). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. In *Utility, probability, and human decision making* (pp. 141-162). Springer Netherlands.

Zieffler, A., y Garfield, J. (2007). Studying the role of simulation in developing students' statistical reasoning. *Bulletin of the International Statistical Institute 56th Session*, Lisbon.

Zieffler, A., Garfield, J., Delmas, R., y Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 40-58.