

ESTUDIO DE UN SISTEMA DIFERENCIAL HÍBRIDO MODELANDO LA
DINÁMICA TERRITORIAL ENTRE BANDAS RIVALES

SERGIO ANDRÉS BOHÓRQUEZ CUADROS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2026

ESTUDIO DE UN SISTEMA DIFERENCIAL HÍBRIDO MODELANDO LA
DINÁMICA TERRITORIAL ENTRE BANDAS RIVALES

SERGIO ANDRÉS BOHÓRQUEZ CUADROS

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director

Diego Armando Rueda Gómez
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2026

DEDICATORIA

A mi madre, por tu amor incondicional, tu esfuerzo silencioso y tu fe en mí incluso cuando yo dudaba. Gracias por ser mi impulso diario, mi ejemplo de fortaleza y la razón por la que nunca me rendí. Sin ti, nada de esto sería posible. Este logro también es tuyo.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradezco a Dios, por su guía, por darme salud, paciencia y la fuerza necesaria para culminar esta etapa.

A mis padres, por los valores que me inculcaron, por su apoyo constante y por cada consejo que me sostuvo a lo largo de la carrera. Gracias por acompañarme en los días buenos y en los difíciles, y por creer siempre en mí.

A mi amor, por tu amor, tu paciencia y tu comprensión durante este proceso. Gracias por apoyarme en cada paso, por motivarme cuando me sentía cansado y por ser mi tranquilidad en medio de las exigencias. Este logro también lleva tu nombre.

A mis hermanos, por estar presentes, por su ánimo y por ser parte fundamental de mi vida. Su compañía y apoyo fueron un impulso importante para seguir adelante.

Agradezco a mis profesores, por su dedicación y por cada enseñanza que aportó a mi formación. En especial, agradezco a los profesores Diego y Elder, porque gracias a su manera de enseñar, su paciencia y su exigencia, despertaron en mí un mayor interés y amor por esta matemática, motivándome a aprender cada día más.

Finalmente, agradezco a todas las personas que, de una u otra forma, aportaron a mi formación y a la culminación de este trabajo.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	8
1 PRELIMINARES	13
1.1 NOTACIÓN	13
1.2 ESPACIOS DE FUNCIONES	14
1.3 DEFINICIONES Y RESULTADOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL	16
1.4 RESULTADOS RELATIVOS AL ANÁLISIS NUMÉRICO	17
2 ESTUDIO TEÓRICO	20
2.1 PRINCIPIO DEL MÍNIMO (NO-NEGATIVIDAD)	20
2.2 ESTIMACIONES EN L^∞ (AUSENCIA DE <i>BLOW-UP</i>)	22
3 ESTUDIO NUMÉRICO	31
3.1 ESQUEMA NUMÉRICO	31
3.2 ESTIMACIONES PUNTUALES	33
3.3 EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN	37
4 SIMULACIONES NUMÉRICAS	41
4.1 SEGREGACIÓN NULA	41
4.2 SEGREGACIÓN PARCIAL	44
4.3 SEGREGACIÓN COMPLETA	50
BIBLIOGRAFÍA	53

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO DE UN SISTEMA DIFERENCIAL HÍBRIDO MODELANDO LA DINÁMICA TERRITORIAL ENTRE BANDAS RIVALES ¹

AUTOR: SERGIO ANDRÉS BOHÓRQUEZ CUADROS ²

PALABRAS CLAVE: SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES MIXTO, DINÁMICA POBLACIONAL, GRAFFITOTAXIS, DIFERENCIAS FINITAS, ELEMENTOS FINITOS, ESTIMACIONES UNIFORMES.

DESCRIPCIÓN:

Esta tesis presenta el estudio de un sistema diferencial híbrido que describe la dinámica territorial entre bandas rivales. El modelo original, fundamentado en la teoría sociológica de marcación territorial, rige el movimiento de las poblaciones mediante procesos de difusión y un término de advección impulsado por el miedo a las marcas territoriales (graffitotaxis). Desde el punto de vista teórico, se prueban algunas propiedades fundamentales que poseen las soluciones de este sistema. Por su parte, en el ámbito numérico, se emplean los métodos de Diferencias Finitas y Elementos Finitos para diseñar esquemas de aproximación robustos, demostrando rigurosamente propiedades cualitativas como el buen planteamiento de los esquemas y la preservación de estimaciones uniformes. Finalmente, se muestran los resultados de algunas simulaciones que reproducen las dinámicas predichas, evidenciando tres escenarios territoriales distintos: desde una convivencia inicial donde las poblaciones comparten el territorio (mezcla total), pasando por una segregación parcial caracterizada por la formación de patrones anulares, hasta llegar a un estado de separación territorial absoluta. Estos resultados validan la robustez teórica y numérica de los esquemas propuestos.

¹ Trabajo de grado.

² Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Diego Armando Rueda Gómez, Doctor en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: STUDY OF A HYBRID DIFFERENTIAL SYSTEM MODELING TERRITORIAL DYNAMICS BETWEEN RIVAL GANGS ³

AUTHOR: SERGIO ANDRÉS BOHÓRQUEZ CUADROS ⁴

KEYWORDS: MIXED DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEM, POPULATION DYNAMICS, GRAFFITOTAXIS, FINITE DIFFERENCES, FINITE ELEMENTS, UNIFORM ESTIMATES.

ABSTRACT:

This thesis presents the study of a hybrid differential system describing the territorial dynamics between rival gangs. The original model, grounded in the sociological theory of territorial marking, governs population movement through diffusion processes and an advection term driven by the fear of territorial marks (graffito-taxis). From a theoretical standpoint, fundamental properties concerning the existence and behavior of the solutions to this system are proven. In the numerical realm, Finite Difference and Finite Element methods are employed to design robust approximation schemes, rigorously demonstrating qualitative properties such as the well-posedness of the schemes and the preservation of uniform estimates. Finally, computational simulations that faithfully reproduce the predicted dynamics are presented, evidencing three distinct territorial scenarios: an initial coexistence where populations share the territory (total mixing), a partial segregation characterized by the formation of annular patterns, and an asymptotic state of absolute territorial separation. These results validate the theoretical and numerical robustness of the proposed schemes.

³ Bachelor Thesis.

⁴ Faculty of Sciences. School of Mathematics. Supervisor: Diego Armando Rueda Gómez, Ph.D. in Mathematics.

INTRODUCCIÓN

El *graffiti*, entendido como la escritura o dibujo mural realizado en espacios públicos, ha sido históricamente una forma de expresión cultural, artística y política. Estos pueden abarcar, desde mensajes de protesta, hasta firmas estilizadas (tags) que buscan reconocimiento dentro de comunidades urbanas; así mismo, se han constituido como una herramienta de visibilización, apropiación del espacio y creación de identidad. No obstante, esta práctica trasciende su apariencia visual cuando es empleado por pandillas urbanas, dado que cada grupo emplea firmas e íconos distintivos en lugares estratégicos, a menudo en zonas de alto riesgo, para reafirmar la presencia de sus miembros y el control sobre el espacio ⁵.

A diferencia de otras formas de graffiti como el tagging artístico o el mensaje político, el *graffiti pandilleril* opera bajo códigos específicos que combinan lenguaje escrito, símbolos numéricos, abreviaturas y referencias culturales para transmitir mensajes cifrados, dirigidos tanto a miembros de la propia pandilla como a grupos rivales ⁶. Su función no se limita a la comunicación interna; actúa también como mecanismo de identidad colectiva y delimitación territorial.

Ahora bien, estas marcas cargadas de significación simbólica, refuerzan la cohesión grupal mientras desafían a las pandillas contrarias, convirtiendo el entorno urbano en un campo de batalla semiótico. En este sentido, el graffiti se convierte en un acto performativo de poder: una intervención sobre el espacio que busca generar reconocimiento, imponer respeto y establecer fronteras.

En países como Estados Unidos, donde se estima la existencia de 1.4 millones de pandilleros, estos grupos son responsables del 48 % de la violencia en la mayoría de las jurisdicciones, llegando incluso al 90 % en ciertas zonas ⁷. Este contexto de conflicto explica la urgencia con la que las pandillas emplean el graffiti como herramienta de control territorial y comunicación estratégica.

⁵ W. K. Brown. "Graffiti, Identity and the Delinquent Gang". En: *International Journal of Offender and Comparative Criminology* 22.1 (1978), págs. 46-48

⁶ A. Alsenafi y A. B. Barbaro. "A convection-diffusion model for gang territoriality". En: *Phys. Stat. Mech. Its Appl.* 510 (2018), págs. 765-786

⁷ K. Adams y A. Winter. "Gang graffiti as a discourse genre". En: *Journal of Sociolinguistics* 1.3 (1997), págs. 337-360

Algunas investigaciones pioneras como la de Ley y Cybriwsky (ver ⁸), han mostrado cómo el graffiti pandilleril permite trazar mapas topográficos precisos de los dominios de cada grupo, aportando una apariencia de orden en entornos urbanos caóticos. Este tipo de marcaje no solo representa el territorio; lo produce, lo defiende y lo transforma.

En respuesta a este fenómeno, diversos investigadores han propuesto modelos matemáticos para entender y predecir la dinámica territorial de las pandillas, donde dos bandas rivales compiten por el espacio mediante el marcaje graffitero. Entre estos enfoques, se destacan los sistemas de ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias (EDO) como parciales (EDP), y modelos híbridos que involucran, entre otros fenómenos, la difusión cruzada, permitiendo describir el movimiento dirigido de los pandilleros hacia o lejos de determinadas zonas (ver, por ejemplo, ^{9,10,11,12}). Así mismo, varios trabajos como ^{13,14,15,16,17} han estudiado la dinámica territorial de especies o grupos de organismos, y la influencia que tienen las marcas territoriales en su comportamiento.

-
- ⁸ D. Ley y R. Cybriwsky. "Urban graffiti as territorial markers". En: *Annals of the Association of American Geographers* 64.4 (1974), págs. 491-505
- ⁹ Alsenafi y Barbaro, "A convection-diffusion model for gang territoriality", ver n. 6
- ¹⁰ A. Alsenafi y A. B. Barbaro. "A multispecies cross-diffusion model for territorial development". En: *Mathematics* 9.12 (2021), pág. 1428
- ¹¹ A. B. Barbaro et al. "Analysis of a cross-diffusion model for rival gangs interaction in a city". En: *Commun. Math. Sci.* 19.8 (2021), págs. 2139-2175
- ¹² M. Fuest y S. Heydari. "A cross-diffusion system modeling rivaling gangs: global existence of bounded solutions and FCT stabilization for numerical simulation". En: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 34.9 (2024), págs. 1739-1779
- ¹³ A. B. T. Barbaro, L. Chayes y M. R. D'Orsogna. "Territorial developments based on graffiti: A statistical mechanics approach". En: *Physica A* 392.1 (2013), págs. 252-270
- ¹⁴ R. A. Hegemann et al. "Geographical influences of an emerging network of gang rivalries". En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 390.21 (2011), págs. 3894-3914
- ¹⁵ M. A. Lewis, K. A. White y J. D. Murray. "Analysis of a model for wolf territories". En: *Journal of Mathematical Biology* 35 (1997), págs. 749-774
- ¹⁶ H. J. Schenk, R. M. Callaway y B. E. Mahall. "Spatial root segregation: are plants territorial?" En: *Advances in ecological research* 28 (1999), págs. 145-180
- ¹⁷ J. I. Tello y D. Wrzosek. "Inter-species competition and chemorepulsion". En: *J. Math. Anal. Appl.* 459 (2018), págs. 1233-1250

En el presente trabajo se toma como punto de partida la referencia ¹⁸. Allí, se propone el siguiente sistema acoplado de ecuaciones diferenciales híbrido que combina EDP y EDO para modelar la interacción entre distintos grupos en conflicto por el control de territorios mediante graffitis:

$$\begin{cases} u_t = D_u \Delta u + \chi_u \nabla \cdot (u \nabla w) & \text{en } Q_T, \\ v_t = D_v \Delta v + \chi_v \nabla \cdot (v \nabla z) & \text{en } Q_T, \\ w_t = -w + f(v) & \text{en } Q_T, \\ z_t = -z + g(u) & \text{en } Q_T, \end{cases} \quad (1)$$

donde $Q_T := \Omega \times (0, T)$, siendo $\Omega \subset R^d$ ($d = 2, 3$) un dominio acotado; con condiciones sobre la frontera $\partial\Omega$, y condiciones iniciales:

$$\begin{cases} D_u \frac{\partial u}{\partial n} + \chi_u u \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ D_v \frac{\partial v}{\partial n} + \chi_v v \frac{\partial z}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ (u, v, w, z)(\cdot, 0) = (u_0, v_0, w_0, z_0) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

con $u_0(x), v_0(x), z_0(x), w_0(x) \geq 0$. En (1)-(2), las variables $u(x, t) \geq 0$ y $v(x, t) \geq 0$ representan las densidades de las pandillas rivales, mientras que $w(x, t) \geq 0$ y $z(x, t) \geq 0$ denotan las densidades de los graffitis asociados a cada pandilla. Las funciones de pintado

$$f(v) = \frac{v}{1+v}, \quad g(u) = \frac{u}{1+u}, \quad f, g \in C^1([0, \infty)) \cap L^\infty((0, \infty)), \quad f, g \geq 0, \quad (3)$$

modelan la tasa a la que cada pandilla genera un nuevo graffiti en función de su propia densidad. Aquí es importante mencionar que los resultados, tanto teóricos como numéricos, presentados en este trabajo son válidos para cualesquiera $f, g \in C^1([0, \infty)) \cap L^\infty((0, \infty))$, $f, g \geq 0$, pero los resultados del último capítulo correspondientes a las simulaciones numéricas han sido computados usando las expresiones explícitas dadas en (3). Las constantes D_u y D_v representan los coeficientes de autodifusión de las densidades u y v , que modelan el movimiento aleatorio de cada grupo. Por otro lado, las constantes χ_u y χ_v son coeficientes de taxis, los cuales miden la sensibilidad de cada pandilla con respecto al graffiti rival.

En ¹⁹, se abordó el estudio teórico del modelo (1)-(2); específicamente, se probó que para datos iniciales $u_0, v_0, w_0, z_0 \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ (para algún $\alpha \in (0, 1)$), existe una única solución clásica $[u, v, w, z]$ satisfaciendo,

¹⁸ Fuest y Heydari, ver n. 12

¹⁹ Fuest y Heydari, ver n. 12

entre otras propiedades relevantes desde el punto de vista físico:

■ **(No negatividad)**

$$u(x, t) \geq 0, \quad v(x, t) \geq 0, \quad w(x, t) \geq 0 \quad \text{y} \quad z(x, t) \geq 0. \quad (4)$$

■ **(Estimación en L^∞)** Para todo $t \geq 0$:

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C. \quad (5)$$

El presente trabajo se centra en el estudio numérico del sistema (1)-(2), y los siguientes tres aspectos constituyen los principales aportes de este proyecto:

- En primer lugar, desde el punto de vista teórico, se realiza una revisión de resultados probados en ²⁰, en lo que respecta a las propiedades (4)-(5). Este aspecto resulta clave para el desarrollo del posterior estudio numérico.
- En segundo lugar, desde el punto de vista numérico, se propone un esquema numérico para aproximar la solución de (1)-(2) (tomando como base el método de los Elementos Finitos), el cual está bien planteado y verifica, a nivel discreto, propiedades análogas a (4)-(5), las cuales son fundamentales teniendo en cuenta el sentido físico de las variables discretas.
- Finalmente, se implementa el esquema de aproximación mediante software especializado, y se presentan simulaciones numéricas que ilustran su buen comportamiento describiendo la dinámica territorial de pandillas rivales que usan marcas para el control territorial.

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera: En el Capítulo 1, se presentan los conceptos preliminares y los resultados fundamentales que se utilizarán a lo largo de este trabajo. En particular, se revisan nociones de espacios funcionales, desigualdades clásicas y teoremas del Análisis Funcional, así como herramientas necesarias para el posterior análisis numérico.

En el Capítulo 2, se estudian algunas propiedades cualitativas del modelo (1)-(2), las cuales resultan relevantes teniendo en cuenta la dinámica física que se está modelando. Entre ellas se incluyen estimaciones puntuales, como la positividad y cotas uniformes en $L^\infty(\Omega)$, estas últimas obtenidas mediante estimaciones en $L^p(\Omega)$ y un argumento iterativo del tipo Alikakos.

²⁰ Fuest y Heydari, ver n. 12

En el Capítulo 3, se desarrolla un esquema numérico mixto para aproximar la solución del sistema (1)-(2), que combina los métodos de Diferencias Finitas para la discretización temporal y Elementos Finitos para la discretización espacial. Así mismo, se analizan propiedades cualitativas fundamentales del esquema, tales como su buen planteamiento y la obtención de estimaciones puntuales para las soluciones discretas, de manera comparable con las propiedades establecidas para la solución exacta. Para la construcción del esquema numérico se usa un sistema equivalente a (1)-(2), el cual es obtenido en el Capítulo 2 introduciendo dos variables auxiliares.

En el Capítulo 4, se presentan los resultados de diversos experimentos numéricos cuyo objetivo es describir el comportamiento dinámico del sistema y, en particular, identificar regímenes de homogeneización, formación de patrones estacionarios no homogéneos y segregación (parcial o completa) entre las pandillas.

1. PRELIMINARES

En este capítulo se presenta una revisión de los conceptos y resultados fundamentales necesarios para el desarrollo del trabajo. En primer lugar, se abordarán de manera breve algunos operadores diferenciales clásicos de uso frecuente. A continuación, se introducirán diversos espacios de funciones, con especial énfasis en los espacios de Lebesgue, Sobolev y Bochner. Posteriormente, se revisarán conceptos y definiciones del Análisis Funcional que resultarán esenciales para las demostraciones de los capítulos siguientes. Finalmente, se expondrán algunas definiciones y teoremas requeridos para el estudio numérico.

1.1. NOTACIÓN

En el desarrollo de este trabajo, Ω denotará un dominio acotado de \mathbb{R}^d (para $d = 2, 3$), esto es, un conjunto no vacío, abierto y conexo cuya frontera será denotada por $\partial\Omega$. Un punto de \mathbb{R}^d se escribe como $x = (x_1, \dots, x_d)$ y su norma euclidiana es $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^d x_i^2\right)^{1/2}$. El producto interno de $x, y \in \mathbb{R}^d$ es $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$.

Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ está conformado por enteros no negativos α_i , se dice que α es un multiíndice de longitud $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$. Para $x \in \mathbb{R}^d$ y un multiíndice, se define x^α como $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d}$. Similarmente, si $D_j = \partial/\partial x_j$, entonces D^α definido como

$$D^\alpha := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_d^{\alpha_d} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}, \quad (1.1)$$

denota el operador diferencial de orden $|\alpha|$. Note que $D^{(0, \dots, 0)}u = u$.

El símbolo ∇ representará el operador gradiente, que es definido como:

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d} \right).$$

Así, para una función escalar f , ∇f representa el vector con i -ésima componente $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. De la misma forma, Δ representará el operador Laplaciano, que es definido como:

$$\Delta := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

esto es, si f es una función escalar, entonces $\Delta f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. Para $1 \leq p \leq \infty$, p' denotará su exponente

conjugado; en el caso $1 < p < \infty$, p' viene dado por la relación

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

y si $p = 1$ entonces $p' = \infty$, o si $p = \infty$ entonces $p' = 1$.

En general, para un espacio normado X se denota su norma como $\|\cdot\|_X$. Si X es un espacio de Hilbert, denotaremos su producto interno como $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ (salvo en el caso de $L^2(\Omega)$, donde usaremos la notación (\cdot, \cdot)), y para el producto dual entre X' (dual de X) y X , se usará $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$.

1.2. ESPACIOS DE FUNCIONES

En primer lugar, se comenzará definiendo los espacios de Lebesgue. Para $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, el espacio de Banach $L^p(\Omega)$ se define como

$$L^p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es medible y } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\},$$

con norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ definida por

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

En el caso $p = 2$, el espacio $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u, v) := (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx,$$

con norma definida por $\|u\|_{L^2(\Omega)} = (u, u)^{1/2}$. Se muestra fácilmente que si $p \geq q$, el espacio $L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$. Así mismo, el espacio $L^\infty(\Omega)$ es definido como

$$L^\infty(\Omega) := \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es medible y } |u(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega \},$$

con norma definida por

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |u(x)|.$$

Los espacios $C_0^\infty(\Omega)$ y $L_{loc}^1(\Omega)$ se definen respectivamente como:

$$C_0^\infty(\Omega) := \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \in C^\infty(\Omega) \text{ con soporte compacto en } \Omega \},$$

y

$$L^1_{loc}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \int_K |f| < +\infty, \forall K \subset \Omega, K \text{ compacto} \right\}.$$

Ahora, con el objetivo de definir los espacios de Sobolev, se recordará el concepto de derivada débil.

Definición 1.2.1. (Derivada débil) Suponga que $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ y α es un multi-índice. Diremos que v es la α -ésima derivada débil de u , lo cual será denotado por $D^\alpha u = v$, si

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi \, dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Para $k \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$, los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ son definidos por

$$W^{k,p}(\Omega) := \{v \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha v \in L^p(\Omega) \text{ para todo } 0 \leq |\alpha| \leq k\},$$

donde D^α es el operador definido en (1.1). El espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad p < \infty,$$

$$\|v\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \left(\sup_{x \in \Omega} \text{ess } |D^\alpha v(x)| \right), \quad p = \infty.$$

En el caso $p = 2$, se denotará $W^{k,2}(\Omega) := H^k(\Omega)$, el cual es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) \, dx,$$

y cuya norma es definida por $\|u\|_{H^m(\Omega)} = (u, u)_{H^m(\Omega)}^{1/2}$. En particular, el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ es definido por

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tal que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i \in \{1, \dots, d\} \right\},$$

donde $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ es la derivada débil de u .

Para terminar esta sección, se presenta la definición de los espacios de Bochner.

Definición 1.2.2. (Espacios de Bochner) Sea X un espacio de Banach y a, b tales que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Para $1 \leq \alpha < +\infty$, diremos que $f \in L^\alpha(a, b; X)$ si: f es medible, y

$$\|f\|_{L^\alpha(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^\alpha \, dt \right)^{1/\alpha} < +\infty.$$

En el caso $\alpha = +\infty$, se define

$$\|f\|_{L^\infty(a,b;X)} = \sup_{t \in (a,b)} \text{ess } \|f(t)\|_X.$$

1.3. DEFINICIONES Y RESULTADOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL

En esta sección, se citarán algunas definiciones y resultados del área de Análisis Funcional que serán utilizados en el desarrollo de los capítulos posteriores. Se comenzará enunciando la siguiente desigualdad, cuya demostración se encuentra en ¹.

Teorema 1.3.1. (Desigualdad de Hölder Generalizada) Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^d y las funciones $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ para $i = 1, 2, \dots, k$, con $p_i \geq 1$ y satisfaciendo $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k}$. Entonces, para $f = f_1 f_2 \dots f_k \in L^p(\Omega)$ se tiene

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

En el estudio realizado en el Capítulo 2, se empleará la siguiente desigualdad de interpolación conocida como la desigualdad de Ehrling (ver ²).

Lema 1.3.2. (Desigualdad de Ehrling) Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}$, y, $0 < s < r < \frac{2d}{(d-2)_+}$, entonces existe $a \in (0, 1)$ y $C > 0$, tal que para todo $\epsilon > 0$, se tiene

$$\|\varphi\|_{L^r(\Omega)} \leq \epsilon \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} + C \min\{1, \epsilon\}^{-\frac{a}{1-a}} \|\varphi\|_{L^s(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

Ahora se presentan algunos resultados que serán utilizados para obtener las formulaciones débiles y algunas estimaciones asociadas a los sistemas (1)-(2) y (2.12).

Teorema 1.3.3. (Fórmula de Green) Sea Ω un conjunto abierto de clase C^1 . Sea $w \in C^1(\bar{\Omega})$ con soporte acotado en la clausura $\bar{\Omega}$. Entonces, para todo $i \in \{1, \dots, d\}$, se satisface la fórmula de Green

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} w(x) n_i(x) ds, \quad (1.2)$$

donde n_i es el i -ésimo componente del vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$.

¹ H. Brezis. "Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations". En: Springer (2011)

² M. Fuest. "Blow-up profiles in quasilinear fully parabolic Keller-Segel systems". En: Nonlinearity 33.5 (2020), págs. 2306-2334

Corolario 1.3.4. (Integración por partes) Sea Ω un conjunto abierto de clase C^1 . Sean u y v dos funciones $C^1(\bar{\Omega})$ con soporte acotado en $\bar{\Omega}$. Entonces, para todo $i \in \{1, \dots, d\}$, se satisface la fórmula de integración por partes

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i(x) ds. \quad (1.3)$$

Demostración. Es suficiente tomar $w = uv$ en el Teorema 1.3.3. □

Corolario 1.3.5. Sean Ω un conjunto abierto de clase C^1 , $u \in C^2(\bar{\Omega})$ y $v \in C^1(\bar{\Omega})$, ambas con soporte acotado en $\bar{\Omega}$. Entonces se satisface la fórmula de integración por partes

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) ds, \quad (1.4)$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$.

Por otra parte, el siguiente teorema será utilizado para estudiar el buen planteamiento del esquema numérico en el Capítulo 3.

Teorema 1.3.6. (Teorema de Lax-Milgram) Sea H un espacio de Hilbert y $\mathcal{A} : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ un operador bilineal continuo y coercivo, esto es, existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$|\mathcal{A}(u, v)| \leq \alpha \|u\|_H \|v\|_H, \quad \text{para todo } u, v \in H,$$

y

$$\mathcal{A}(u, u) \geq \beta \|u\|_H^2, \quad \text{para todo } u \in H.$$

Entonces, para cada $\ell \in H'$ existe un único elemento $u \in H$ tales que

$$\mathcal{A}(u, v) = \langle \ell, v \rangle, \quad \text{para todo } v \in H.$$

1.4. RESULTADOS RELATIVOS AL ANÁLISIS NUMÉRICO

Para las definiciones y los resultados que se enunciarán en esta sección, se asumirá una familia de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ de Ω formadas por símlices \mathcal{K} no-obtusos (triángulos en 2D y tetraedros en 3D con todos los ángulos interiores menores o iguales que $\pi/2$), tales que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \mathcal{K},$$

donde $h = \max_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} h_{\mathcal{K}}$, con $h_{\mathcal{K}}$ siendo el diámetro de \mathcal{K} . Se denota también por $\mathcal{M}_h = \{s_i\}_{i \in I}$ al conjunto de todos los nodos de \mathcal{T}_h , y se considera el espacio de elementos finitos lineales a trozos asociados a \mathcal{T}_h :

$$N_h = \{n_h \in C^0(\bar{\Omega}) : n_h|_{\mathcal{K}} \in \mathbb{P}_1(\mathcal{K}), \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h\},$$

denotando su base de Lagrange por $\{\varphi_s\}_{s \in \mathcal{M}_h}$.

Definición 1.4.1 (S.C. Brenner y L.R. Scott. “The mathematical theory of finite element methods”. En: Springer (2011)). **(Mallado regular)** Se dice que una familia de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ es regular, si existe $C > 0$ tal que para todo $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, se tiene

$$\rho(\mathcal{K}) \geq C \text{diam}(\mathcal{K}),$$

donde $\rho(\mathcal{K})$ es el diámetro del mayor círculo inscrito en \mathcal{K} y $\text{diam}(\mathcal{K})$ es el diámetro del menor círculo que contiene a \mathcal{K} (ver Figura 1.1).

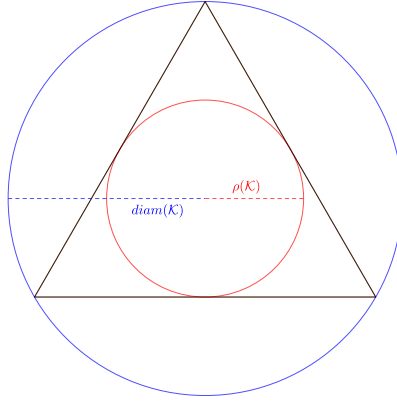


Figura 1.1: $\text{diam}(\mathcal{K})$ y $\rho(\mathcal{K})$ para un triángulo \mathcal{K} en \mathbb{R}^2 .

Además, se considera el operador de interpolación nodal $r_h : C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow N_h$ definido por

$$r_h[n] = \sum_{s \in \mathcal{M}_h} n(s) \varphi_s, \quad \forall n \in C^0(\bar{\Omega}),$$

a partir del cual se define el siguiente producto interno discreto (conocido en la literatura como *Mass-Lumping*):

$$(n_h, \bar{n}_h)_h = \int_{\Omega} r_h[n_h \cdot \bar{n}_h] dx = \sum_{s \in \mathcal{M}_h} n_h(s) \bar{n}_h(s) \int_{\Omega} \varphi_s dx, \quad \forall n_h, \bar{n}_h \in N_h, \quad (1.5)$$

el cual induce la norma $\|n_h\|_h = \sqrt{(n_h, n_h)_h}$ definida sobre N_h .

El siguiente resultado, tomado de ³, establece que en N_h , la norma definida anteriormente es equivalente con la norma del espacio $L^2(\Omega)$.

Lema 1.4.2. *En N_h , las normas $\|\cdot\|_h$ y $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ son equivalentes, es decir, existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que*

$$C_1\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_h \leq C_2\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Finalmente, la siguiente proposición, tomada de ⁴, será usada para probar algunas estimaciones puntuales para la solución del esquema numérico propuesto en el Capítulo 3.

Proposición 1.4.3. *Sean $s, \bar{s} \in \mathcal{M}_h$. Si $s \neq \bar{s}$, entonces la siguiente estimación para las funciones base asociadas a s y \bar{s} se tiene*

$$\nabla\varphi_s \cdot \nabla\varphi_{\bar{s}} \leq 0 \quad \text{c.t.p. en } \Omega. \tag{1.6}$$

³ S.C. Brenner y L.R. Scott. “The mathematical theory of finite element methods”. En: *Springer* (2011)

⁴ F. Guillén-González y J. V. Gutiérrez-Santacreu. “From a cell model with active motion to a Hele-Shaw-like system: a numerical approach”. En: *Numer. Math.* 143.1 (2019), págs. 107-137

2. ESTUDIO TEÓRICO

En este capítulo se analizan, desde una perspectiva teórica, algunas propiedades del sistema (1)-(2). Es importante destacar que el objetivo de este trabajo no es establecer resultados de existencia de soluciones, sino obtener ciertas estimaciones para las posibles soluciones del sistema, las cuales se emplearán posteriormente en el estudio numérico. Para el lector interesado en un resultado de existencia y unicidad de solución clásica de (1)-(2), se sugiere revisar la referencia ¹.

2.1. PRINCIPIO DEL MÍNIMO (NO-NEGATIVIDAD)

El objetivo principal de esta sección consiste en demostrar la no negatividad de las soluciones clásicas del sistema (1)-(2). Con este fin, se introduce el siguiente problema truncado:

$$\begin{cases} u_t = D_u \Delta u + \chi_u \nabla \cdot (u_+ \nabla w), \\ v_t = D_v \Delta v + \chi_v \nabla \cdot (v_+ \nabla z), \\ w_t = -w + f(v), \\ z_t = -z + g(u), \end{cases} \quad (2.1)$$

con las condiciones de frontera y las condiciones iniciales (2); donde, para una variable general a , se ha usado la notación $a_+ = \max\{0, a\}$. Así, lo primero que se hará será probar la positividad de cualquier solución suficientemente regular del sistema (2.1); luego, teniendo en cuenta que cualquier solución suficientemente regular de (2.1) es también solución de (1) (ya que $u_+ = u$ y $v_+ = v$), se concluiría que la solución clásica de (1)-(2) es positiva.

Teorema 2.1.1. *Cualquier solución suficientemente regular $[u, v, w, z]$ del problema truncado (2.1) satisface las siguientes estimaciones puntuales*

$$w, z, u, v \geq 0 \quad \text{c.t.p en } Q_T.$$

Demostración. Sea $[u, v, w, z]$ una solución suficientemente regular de (2.1); entonces, multiplicando la

¹ Fuest y Heydari, ver n. 12

primera ecuación de (2.1) por $u_- = \min\{0, u\}$ e integrando en Ω , se tiene

$$\int_{\Omega} u_t u_- dx = D_u \int_{\Omega} \Delta u u_- dx + \chi_u \int_{\Omega} \nabla \cdot (u_+ \nabla w) u_- dx,$$

de lo cual, usando integración por partes, el hecho de que $u_- u_+ = 0$, $u = (u_+ + u_-)$, $u_+ \nabla u_- = 0$ y las condiciones de frontera (2), se llega a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u_-)^2 dx + D_u \int_{\Omega} |\nabla u_-|^2 dx = 0. \quad (2.2)$$

Integrando (2.2) en $(0, t)$ para $0 < t < T$, se obtiene

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_-(t))^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_-(0))^2 dx + D_u \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u_-|^2 dx ds = 0,$$

de lo cual, teniendo en cuenta que $u_-(0, x) = 0$ (por la no negatividad de los datos iniciales), se deduce que $\|u_-(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$, es decir, $u_-(x, t) = 0$ c.t.p $(x, t) \in Q_T$, lo que implica que $u(t, x) \geq 0$ c.t.p $(x, t) \in Q_T$. El mismo razonamiento aplicado a la segunda ecuación de (2.1), permite concluir que $v(x, t) \geq 0$ c.t.p $(x, t) \in Q_T$.

Por otro lado, para demostrar que $w \geq 0$ en Q_T , considere la siguiente EDO minorante: Sea $\rho_0 = \min_{x \in \bar{\Omega}} w_0(x) \geq 0$, y se define ρ (dependiendo solamente de t) como la solución de

$$\rho_t = -\rho. \quad (2.3)$$

Definiendo la variable $\alpha := w - \rho$, al derivar con respecto al tiempo se obtiene $\alpha_t = w_t - \rho_t$, lo cual implica que

$$\alpha_t = -w + f(v) + \rho. \quad (2.4)$$

Entonces, multiplicando (2.4) por $\alpha_- = \min\{0, \alpha\}$ e integrando en Ω , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\alpha_-|^2 dx &= \int_{\Omega} (-w + f(v) + \rho) \alpha_- dx \\ &= \int_{\Omega} -\alpha \alpha_- dx + \int_{\Omega} f(v) \alpha_- dx \\ &= \int_{\Omega} -|\alpha_-|^2 dx + \int_{\Omega} f(v) \alpha_- dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

De (3), se tiene que el segundo término del lado derecho de la ecuación (2.5) es menor o igual que cero, y en consecuencia

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\alpha_-|^2 dx \leq 0. \quad (2.6)$$

Integrando (2.6) en $(0, t)$ para $0 < t < T$, se llega a

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\alpha_-(t))^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\alpha_-(0))^2 dx,$$

y teniendo en cuenta que $\alpha_-(x, 0) = 0$, se deduce que $\alpha_-(x, t) = 0$ c.t.p $(x, t) \in Q_T$, lo cual implica que $\alpha(x, t) \geq 0$; así $w(x, t) \geq \rho(t)$ c.t.p $(x, t) \in Q_T$. Finalmente, multiplicando (2.3) por e^t , se obtiene

$$e^t \rho_t + e^t \rho = (e^t \rho)_t = 0. \quad (2.7)$$

Integrando (2.7) en $(0, t)$ para $0 < t < T$, se tiene

$$e^t \rho(t) - e^0 \rho(0) = 0,$$

es decir,

$$\rho(t) = e^{-t} \rho_0 \geq 0.$$

Por lo tanto, se concluye que $w(x, t) \geq \rho(t) \geq 0$ c.t.p $(x, t) \in Q_T$. Un razonamiento completamente análogo aplicado a la ecuación de z en (2.1) proporciona que $z(x, t) > 0$ c.t.p $(x, t) \in Q_T$. \square

Corolario 2.1.2. *Cualquier solución clásica $[u, v, w, z]$ de (1)-(2) satisface las estimaciones puntuales*

$$u, v, w, z \geq 0 \quad \text{c.t.p en } Q_T.$$

Observación 2.1.3. *Note que, si $w_0(x) > 0$, entonces $\rho_0 > 0$; y por tanto, de la demostración del Teorema 2.1.1, se deduce que $w(x, t) > 0$ c.t.p $(x, t) \in Q_T$. Procediendo análogamente se deduce que, si $z_0(x) > 0$, entonces $z(x, t) > 0$ c.t.p $(x, t) \in Q_T$.*

2.2. ESTIMACIONES EN L^∞ (AUSENCIA DE BLOW-UP)

La ausencia de difusión en w y z , junto con los términos de taxis (debido a los graffitis) $\nabla \cdot (u \nabla w)$ y $\nabla \cdot (v \nabla z)$, dificultan considerablemente la obtención de cotas uniformes para u y v . Para superar esta dificultad, se introducirán transformaciones que “absorben” los términos de graffito-taxis dentro de operadores en divergencia con coeficientes dependientes de w y z . En concreto, se definen

$$a := u e^{\xi_u w} \quad \text{y} \quad b := v e^{\xi_v z}, \quad \text{donde} \quad \xi_u := \frac{\chi_u}{D_u} \quad \text{y} \quad \xi_v := \frac{\chi_v}{D_v}. \quad (2.8)$$

Cambios de variable similares a estos han sido empleados previamente en el análisis de diversos sistemas de haptotaxis (véase, por ejemplo, ², ³). A partir de (2.8), se deduce que

$$\nabla a = e^{\xi_u w} \nabla u + u \nabla (e^{\xi_u w}) = e^{\xi_u w} \nabla u + u e^{\xi_u w} \xi_u \nabla w,$$

de lo cual, multiplicando por $e^{-\xi_u w}$, se obtiene

$$e^{-\xi_u w} \nabla a = \nabla u + \xi_u u \nabla w,$$

y, en consecuencia,

$$\nabla \cdot (e^{-\xi_u w} \nabla a) = \nabla \cdot (\nabla u + \xi_u u \nabla w). \quad (2.9)$$

Ahora, multiplicando (2.9) por D_u y recordando que $\xi_u = \frac{\chi_u}{D_u}$, (2.9) se reduce a

$$D_u \nabla \cdot (e^{-\xi_u w} \nabla a) = D_u \nabla \cdot (\nabla u + \xi_u u \nabla w) = u_t. \quad (2.10)$$

Por otro lado, de (2.8) también se tiene que

$$a_t = (u e^{\xi_u w})_t = e^{\xi_u w} (u_t + \xi_u u w_t),$$

lo cual, junto con la primera ecuación de (1) y usando (2.10), implican que

$$a_t = e^{\xi_u w} (D_u \nabla \cdot (\nabla u + \xi_u u \nabla w)) + \xi_u e^{\xi_u w} u w_t = D_u e^{\xi_u w} \nabla \cdot (e^{-\xi_u w} \nabla a) + \xi_u a w_t. \quad (2.11)$$

Entonces, multiplicando por $e^{-\xi_u w}$ y sustituyendo $w_t = -w + f(v)$ en (2.11), se sigue que

$$e^{-\xi_u w} a_t = D_u \nabla \cdot (e^{-\xi_u w} \nabla a) - \xi_u e^{-\xi_u w} a w + \xi_u e^{-\xi_u w} a f(v).$$

Un cálculo completamente análogo aplicado a b , permite llegar a que

$$e^{-\xi_v z} b_t = D_v \nabla \cdot (e^{-\xi_v z} \nabla b) - \xi_v e^{-\xi_v z} b z + \xi_v e^{-\xi_v z} b g(u).$$

² M. A. Fontelos, A. Friedman y B. Hu. "Mathematical Analysis of a Model for the Initiation of Angiogenesis". En: *SIAM J. Math. Anal.* 33.6 (2002), págs. 1330-1355

³ A. Friedman y J. Tellos. "Stability of solutions of chemotaxis equations in reinforced random walks". En: *J. Math. Anal. Appl.* 272.1 (2002), págs. 138-163

Por otro lado, las condiciones de frontera dadas en (2), se reescriben como

$$D_u \frac{\partial(ae^{-\xi_u w})}{\partial n} + \chi_u a e^{-\xi_u w} \frac{\partial w}{\partial n} = D_v \frac{\partial(be^{-\xi_v z})}{\partial n} + \chi_v b e^{-\xi_v z} \frac{\partial z}{\partial n} = 0,$$

y simplificando, se deduce que

$$\frac{\partial a}{\partial n} = \frac{\partial b}{\partial n} = 0.$$

Así, siempre que $[u, v, w, z]$ sea una solución global clásica de (1), el sistema (1) es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{ll} e^{-\xi_u w} a_t = D_u \nabla \cdot (e^{-\xi_u w} \nabla a) - \xi_u e^{-\xi_u w} a w + \xi_u e^{-\xi_u w} a f(be^{-\xi_v z}) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ e^{-\xi_v z} b_t = D_v \nabla \cdot (e^{-\xi_v z} \nabla b) - \xi_v e^{-\xi_v z} b z + \xi_v e^{-\xi_v z} b g(ae^{-\xi_u w}) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ w_t = -w + f(be^{-\xi_v z}) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ z_t = -z + g(ae^{-\xi_u w}) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial a}{\partial n} = \frac{\partial b}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ (a, b, w, z)(\cdot, 0) = (a_0, b_0, w_0, z_0) & \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.12)$$

donde $a_0 = u_0 e^{\xi_u w_0}$ y $b_0 = v_0 e^{\xi_v z_0}$.

Teniendo en cuenta lo anterior, en esta sección se establecerán estimaciones uniformes para el sistema transformado (2.12). En primer lugar, se obtendrán cotas en L^∞ para las variables w y z . En un segundo lugar, se establecerán cotas en L^1 para las variables transformadas a y b , las cuales serán usadas para deducir posteriormente una cota uniforme en L^∞ para a y b (y, por tanto, para u y v). El argumento combina estimaciones en L^p junto con un argumento iterativo del tipo Alikakos.

Teorema 2.2.1. *Sea $[a, b, w, z]$ una solución suficientemente regular del problema (2.12), entonces se satisface que*

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \quad \text{y} \quad \|z(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \quad \text{para todo } t \in (0, T). \quad (2.13)$$

Demostración. Sea $[a, b, w, z]$ una solución de (2.12). Para probar (2.13)₁, se introduce la siguiente EDO mayorante: sea $\varphi_0 = \max_{x \in \Omega} w_0(x)$, y se define φ (dependiendo solamente de t) como la solución de

$$\varphi_t = \|f\|_{L^\infty((0, \infty))},$$

cuya solución explícita está dada por

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \|f\|_{L^\infty((0, \infty))} t. \quad (2.14)$$

Definiendo la variable $\phi := w - \varphi$, al derivar con respecto al tiempo se obtiene que $\phi_t = w_t - \varphi_t$, lo cual implica que

$$\phi_t = -w + f(v) - \|f\|_{L^\infty((0,\infty))}. \quad (2.15)$$

Entonces, multiplicando (2.15) por $\phi_+ := \max\{0, \phi\}$ e integrando en Ω , se obtiene

$$\int_{\Omega} \phi_t \phi_+ dx = \int_{\Omega} (-w + f(v) - \|f\|_{L^\infty((0,\infty))}) \phi_+ dx,$$

o equivalentemente,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\phi_+)^2 dx = \int_{\Omega} (-w) \phi_+ dx + \int_{\Omega} (f(v) - \|f\|_{L^\infty((0,\infty))}) \phi_+ dx. \quad (2.16)$$

Así, teniendo en cuenta (3) y usando el hecho de que $w \geq 0$, se tiene que los términos del lado derecho de (2.16) son menores o iguales que cero, y en consecuencia,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\phi_+)^2 dx \leq 0, \quad (2.17)$$

de lo cual, integrando en $(0, t)$ para $0 < t < T$, se llega a

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\phi_+(t))^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\phi_+(0))^2 dx.$$

Por la definición de φ_0 , se tiene que $\phi(x, 0) \leq 0$, de modo que $\phi_+(x, 0) = 0$ y, por tanto, $\phi_+(x, t) = 0$ c.t.p $(x, t) \in Q_T$. Esto implica que $\phi(x, t) \leq 0$, es decir, $w(x, t) \leq \varphi(t)$ c.t.p $(x, t) \in Q_T$, y combinando esta desigualdad con (2.14), se obtiene

$$0 \leq w(x, t) \leq \varphi(t) = \varphi_0 + \|f\|_{L^\infty((0,\infty))}t \leq \varphi_0 + \|f\|_{L^\infty((0,\infty))}T.$$

Por consiguiente,

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varphi_0 + \|f\|_{L^\infty((0,\infty))}T, \quad \text{para todo } t \in (0, T). \quad (2.18)$$

Definiendo $C := \varphi_0 + \|f\|_{L^\infty((0,\infty))}T$, se concluye (2.13)₁. Un razonamiento completamente análogo, aplicado a la ecuación de z , permite concluir (2.13)₂. \square

Lema 2.2.2. *Sea $[a, b, w, z]$ una solución suficientemente regular del problema (2.12); entonces, existen $C_1, \tilde{C}_1 > 0$ tal que*

$$\|a(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)} \leq C_1 \quad \text{y} \quad \|b(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \tilde{C}_1 \quad \text{para todo } t \in (0, T). \quad (2.19)$$

Demostración. Sea $[a, b, w, z]$ una solución de (2.12). Integrando sobre Ω la primera ecuación del sistema original (1), aplicando el Teorema de divergencia y usando las condiciones de contorno de Neumann homogéneas en (2), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \, dx = 0,$$

esto es,

$$\int_{\Omega} u(\cdot, t) \, dx = \int_{\Omega} u_0 \, dx. \quad (2.20)$$

Ahora, usando la definición $a = ue^{\xi_u w}$, y teniendo en cuenta el Teorema 2.2.1, así como (2.20), se deduce

$$\int_{\Omega} a \, dx = \int_{\Omega} ue^{\xi_u w} \, dx \leq e^{\xi_u C} \int_{\Omega} u \, dx = e^{\xi_u C} \int_{\Omega} u_0 \, dx \leq C_0 e^{\xi_u C}, \quad (2.21)$$

lo cual implica (2.19)₁. El razonamiento aplicado a la segunda ecuación es completamente análogo, y proporciona la estimación para b . \square

Teorema 2.2.3. *Sea $[a, b, w, z]$ una solución suficientemente regular del problema (2.12). Entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\|a(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \quad \text{y} \quad \|b(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \quad \text{para todo } t \in (0, T). \quad (2.22)$$

Demostración. En primer lugar, note que

$$(e^{-\xi_u w} a)_t = e^{-\xi_u w} a_t - \xi_u e^{-\xi_u w} w_t a,$$

de lo cual, usando (2.12)₁ y (2.12)₃, se obtiene

$$(e^{-\xi_u w} a)_t = D_u \nabla \cdot (e^{-\xi_u w} \nabla a). \quad (2.23)$$

Multiplicando (2.23) por a^{p-1} (con $p \geq 2$), se tiene:

- Para el término de derivada en tiempo:

$$(e^{-\xi_u w} a)_t \cdot a^{p-1} = -\xi_u e^{-\xi_u w} w_t a^p + e^{-\xi_u w} (a^{p-1})_t a = -\xi_u e^{-\xi_u w} w_t a^p + \frac{1}{p} e^{-\xi_u w} (a^p)_t. \quad (2.24)$$

Note que

$$\frac{1}{p} e^{-\xi_u w} (a^p)_t = \frac{1}{p} (e^{-\xi_u w} a^p)_t + \frac{\xi_u}{p} e^{-\xi_u w} a^p w_t. \quad (2.25)$$

Entonces, sustituyendo (2.25) en (2.24) y simplificando se llega a

$$(e^{-\xi_u w} a)_t \cdot a^{p-1} = \frac{1}{p} (e^{-\xi_u w} a^p)_t - \frac{(p-1)}{p} \xi_u e^{-\xi_u w} w_t a^p. \quad (2.26)$$

■ Término de difusión:

$$\begin{aligned} D_u \nabla \cdot (e^{-\xi_u w} \nabla a) a^{p-1} &= D_u \nabla \cdot (e^{-\xi_u w} (\nabla a) a^{p-1}) - D_u e^{-\xi_u w} (p-1) a^{p-2} |\nabla a|^2 \\ &= D_u \nabla \cdot (e^{-\xi_u w} (\nabla a) a^{p-1}) - D_u e^{-\xi_u w} (p-1) \frac{4}{p^2} |\nabla (a^{\frac{p}{2}})|^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Así, usando (2.26)-(2.27) en (2.23), y multiplicando por p , se llega a

$$(e^{-\xi_u w} a^p)_t - \xi_u (p-1) e^{-\xi_u w} w_t a^p - D_u p \nabla \cdot (e^{-\xi_u w} (\nabla a) a^{p-1}) + D_u e^{-\xi_u w} (p-1) p \frac{4}{p^2} |\nabla (a^{\frac{p}{2}})|^2 = 0, \quad (2.28)$$

e integrando (2.28) sobre Ω , se deduce

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (e^{-\xi_u w} a^p) dx = \xi_u (p-1) \int_{\Omega} e^{-\xi_u w} (-w + f(b e^{-\xi_u z})) a^p dx - \frac{4 D_u (p-1) p}{p^2} \int_{\Omega} e^{-\xi_u w} |\nabla (a^{\frac{p}{2}})|^2 dx. \quad (2.29)$$

Teniendo en cuenta que $w \geq 0$, $f \geq 0$ es acotada, y usando el Teorema 2.2.1, de (2.29) se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} e^{-\xi_u w} a^p dx \leq -\frac{4 D_u (p-1)}{p^2} e^{-\xi_u C} \int_{\Omega} |\nabla (a^{\frac{p}{2}})|^2 dx + \tilde{C} (p-1) \int_{\Omega} e^{-\xi_u w} a^p dx, \quad (2.30)$$

donde $\tilde{C} = \xi_u \|f\|_{L^\infty((0, \infty))} + 1$. Teniendo en cuenta que $\frac{p-1}{p} \geq \frac{1}{2}$ para $p \geq 2$, y el hecho de que $e^{-\xi_u w} \leq 1$, se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} e^{-\xi_u w} a^p dx \leq -\tilde{C} \int_{\Omega} e^{-\xi_u w} a^p dx - \frac{2 D_u e^{-\xi_u C}}{p} \int_{\Omega} |\nabla (a^{\frac{p}{2}})|^2 dx + \tilde{C} p \int_{\Omega} \left(a^{\frac{p}{2}}\right)^2 dx. \quad (2.31)$$

Ahora, usando el Lema de Ehrling (ver Lema 1.3.2), se tiene que existen constantes $\bar{C} > 0$ y $\mu > 0$ tales que, para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ y $p \geq 2$, la siguiente desigualdad es válida ⁴:

$$\tilde{C} p \int_{\Omega} \varphi^2 \leq \frac{2 D_u e^{-\xi_u C}}{p} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \bar{C} p^\mu \left(\int_{\Omega} |\varphi| \right)^2. \quad (2.32)$$

Por lo tanto, usando (2.32) en (2.31) (con $\varphi = a^{p/2}$), se llega a

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} e^{-\xi_u w} a^p dx \leq -\tilde{C} \int_{\Omega} e^{-\xi_u w} a^p dx + \bar{C} p^\mu \left(\int_{\Omega} a^{\frac{p}{2}} dx \right)^2. \quad (2.33)$$

Multiplicando (2.33) por $e^{\tilde{C}t}$, se obtiene

$$e^{\tilde{C}t} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} e^{-\xi_u w} a^p dx \leq -\tilde{C} e^{\tilde{C}t} \int_{\Omega} e^{-\xi_u w} a^p dx + \bar{C} p^\mu e^{\tilde{C}t} \left(\int_{\Omega} a^{\frac{p}{2}} dx \right)^2. \quad (2.34)$$

⁴ Fuest y Heydari, ver n. 12

Observe que

$$\left(e^{\tilde{C}t} \int_{\Omega} e^{-\xi_u w} a^p dx \right)_t = e^{\tilde{C}t} \left(\frac{d}{dt} \int_{\Omega} e^{-\xi_u w} a^p dx \right) + \tilde{C} e^{\tilde{C}t} \int_{\Omega} e^{-\xi_u w} a^p dx,$$

y usando esto en (2.34), resulta

$$\left(e^{\tilde{C}t} \int_{\Omega} e^{-\xi_u w} a^p dx \right)_t \leq \bar{C} p^\mu e^{\tilde{C}t} \left(\int_{\Omega} a^{\frac{p}{2}} dx \right)^2. \quad (2.35)$$

Integrando (2.35) en $(0, s)$ para $0 < s < T$, se obtiene

$$e^{\tilde{C}s} \int_{\Omega} (e^{-\xi_u w} a^p)(\cdot, s) dx - \int_{\Omega} e^{-\xi_u w_0} a_0^p dx \leq (e^{\tilde{C}s} - 1) \frac{\bar{C}}{C} p^\mu \sup_{t \in (0, T)} \left(\int_{\Omega} a^{\frac{p}{2}}(\cdot, t) dx \right)^2,$$

de lo cual, multiplicando por $e^{-\tilde{C}s}$, se sigue que

$$\int_{\Omega} (e^{-\xi_u w} a^p)(\cdot, s) dx \leq e^{-\tilde{C}s} \int_{\Omega} e^{-\xi_u w_0} a_0^p dx + (1 - e^{-\tilde{C}s}) \frac{\bar{C}}{C} p^\mu \sup_{t \in (0, T)} \left(\int_{\Omega} a^{\frac{p}{2}}(\cdot, t) dx \right)^2, \quad (2.36)$$

y como $0 < e^{-\tilde{C}s} \leq 1$, de (2.36), se concluye

$$\int_{\Omega} e^{-\xi_u w} a^p(\cdot, t) dx \leq C \max \left\{ \int_{\Omega} e^{-\xi_u w_0} a_0^p dx, \frac{\bar{C}}{C} p^\mu \sup_{s \in (0, T)} \left(\int_{\Omega} a^{\frac{p}{2}}(\cdot, s) dx \right)^2 \right\}, \quad (2.37)$$

para todo $t \in (0, T)$ y todo $p \geq 2$. Recordando que $e^{-\xi_u w} \geq e^{-\xi_u C}$ y $e^{-\xi_u w} \leq 1$, como consecuencia de (2.37), se tiene

$$\int_{\Omega} a^p(\cdot, t) dx \leq e^{\xi_u C} C \max \left\{ \int_{\Omega} a_0^p dx, p^\mu \sup_{s \in (0, T)} \left(\int_{\Omega} a^{\frac{p}{2}}(\cdot, s) dx \right)^2 \right\}, \quad (2.38)$$

para todo $t \in (0, T)$ y todo $p \geq 2$. Defina ahora $p_j := 2^j$ y

$$A_j := \sup_{s \in (0, T)} \|a(\cdot, s)\|_{L^{p_j}(\Omega)} \quad \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Tomando $p = p_j$ ($j \geq 1$) en (2.38) y observando que $\frac{p_j}{2} = p_{j-1}$, se concluye

$$\|a(\cdot, t)\|_{L^{p_j}(\Omega)}^{p_j} \leq C \max \left\{ \|a_0\|_{L^{p_j}(\Omega)}^{p_j}, p_j^\mu \sup_{s \in (0, T)} \left(\|a(\cdot, s)\|_{L^{p_{j-1}}(\Omega)}^{p_{j-1}} \right)^2 \right\}, \quad (2.39)$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} \|a(\cdot, t)\|_{L^{p_j}(\Omega)} &\leq \max \left\{ C \|a_0\|_{L^{p_j}(\Omega)}, (C p_j^\mu)^{1/p_j} \left(\sup_{s \in (0, T)} \|a(\cdot, s)\|_{L^{p_{j-1}}(\Omega)} \right) \right\} \\ &= \max \left\{ C \|a_0\|_{L^{p_j}(\Omega)}, (C p_j^\mu)^{1/p_j} A_{j-1} \right\}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Observe que

$$\|a_0\|_{L^{p_j}(\Omega)} \leq |\Omega|^{1/p_j} \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_0,$$

y usando este hecho en (2.40), se obtiene

$$\|a(\cdot, t)\|_{L^{p_j}(\Omega)} \leq \max\left\{CC_0, (Cp_j^\mu)^{1/p_j} A_{j-1}\right\}. \quad (2.41)$$

de lo cual, tomando el supremo en $t \in (0, T)$, se llega a

$$A_j \leq \max\left\{CC_0, (Cp_j^\mu)^{\frac{1}{p_j}} A_{j-1}\right\} \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Aquí tenemos 2 opciones:

1. En primer lugar, podría tenerse que existan infinitos índices $j \in \mathbb{N}$ tales que $A_j \leq CC_0$; en ese caso se tendría que

$$\|a\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} = \liminf_{j \rightarrow \infty} A_j \leq CC_0. \quad (2.42)$$

En efecto, recuerde que, por definición, se tiene que

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} A_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\inf_{j \geq k} A_j \right),$$

y si hay infinitos $j \in \mathbb{N}$ tales que $A_j \leq CC_0$, entonces para todo k se puede encontrar algún $j \geq k$ tal que $A_j \leq CC_0$, y por tanto,

$$\inf_{j \geq k} A_j \leq CC_0,$$

de lo cual, pasando el límite cuando $k \rightarrow \infty$, se concluye (2.42).

2. En caso contrario, existiría un $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $j > j_0$,

$$A_j \leq (Cp_j^\mu)^{\frac{1}{p_j}} A_{j-1}, \quad (2.43)$$

tomando j_0 minimal y teniendo en cuenta la estimación (2.19) (la cual implica que $A_0 = \sup_{s \in (0, T)} \|a(\cdot, s)\|_{L^1(\Omega)} \leq C_1$), se tiene que

$$A_{j_0} \leq \max\{C_1, CC_0\}. \quad (2.44)$$

Entonces, iterando la desigualdad (2.43) para todo $j > j_0$, se obtiene

$$\begin{aligned}
A_j &\leq (Cp_j^\mu)^{\frac{1}{p_j}} A_{j-1} \\
&\leq (Cp_j^\mu)^{\frac{1}{p_j}} (Cp_{j-1}^\mu)^{\frac{1}{p_{j-1}}} A_{j-2} \\
&\leq \vdots \\
&\leq \left(\prod_{k=j_0+1}^j (Cp_k^\mu)^{\frac{1}{p_k}} \right) A_{j_0} \\
&= \left(\prod_{k=j_0+1}^j C^{2^{-k}} \right) \cdot \left(\prod_{k=j_0+1}^j 2^{\mu k 2^{-k}} \right) A_{j_0}, \tag{2.45}
\end{aligned}$$

y por tanto, usando propiedades de la productoria, de (2.45), se deduce

$$A_j \leq C^{\sum_{k=j_0+1}^j 2^{-k}} \cdot 2^{\mu \sum_{k=j_0+1}^j k 2^{-k}} \cdot A_{j_0}, \quad \forall j > j_0. \tag{2.46}$$

Tomando el límite cuando $j \rightarrow \infty$ en ambos lados de (2.46), se verifica que

$$\|a\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} = \lim_{j \rightarrow \infty} A_j \leq C^{\sum_{k=j_0+1}^\infty 2^{-k}} \cdot 2^{\mu \sum_{k=j_0+1}^\infty k 2^{-k}} \cdot A_{j_0},$$

y usando el hecho de que las anteriores series convergen, así como la estimación (2.44), se llega a

$$\|a\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} \leq C^{\sum_{k=0}^\infty 2^{-k}} \cdot 2^{\mu \sum_{k=0}^\infty k 2^{-k}} \max\{C_1, CC_0\} \leq C. \tag{2.47}$$

Finalmente, a partir de (2.42) y (2.47), se concluye (2.22)₁. Un razonamiento completamente análogo, aplicado a la ecuación de b , permite demostrar (2.22)₂.

□

3. ESTUDIO NUMÉRICO

El objetivo de este capítulo es formular y estudiar un esquema numérico asociado a (1)-(2). Para ello, se adoptará como referencia la formulación equivalente del sistema transformado (2.12) propuesta en la Sección 2.2, lo cual permite definir un esquema completamente discreto que combina diferencias finitas y elementos finitos. Se demostrará que el esquema propuesto está bien planteado, y se probarán algunas estimaciones puntuales para las soluciones discretas, las cuales son indispensables desde el punto de vista físico del problema (en correspondencia con las propiedades demostradas previamente para el problema continuo en el Capítulo 2).

3.1. ESQUEMA NUMÉRICO

Con el objetivo de obtener el esquema de aproximación numérica asociado al sistema (2.12) (el cual es equivalente al modelo (1)-(2)), se realizan las siguientes consideraciones:

- (a) Se considera la partición uniforme en tiempo

$$(0, T] = \bigcup_{m=0}^{K-1} (t_m, t_{m+1}],$$

con $t_m = m\Delta t$, donde $K \in \mathbb{N}$ y $\Delta t = \frac{T}{K}$ es el paso en tiempo. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o \mathbb{R}^3 un dominio acotado con una frontera poligonal o poliédrica Lipschitz-continua.

- (b) Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangulaciones de Ω formadas por símplices \mathcal{K} no-obtusos (triángulos en 2D y tetraedros en 3D con todos los ángulos interiores menores o iguales que $\pi/2$), tales que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \mathcal{K},$$

donde, $h = \max_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} h_{\mathcal{K}}$, con $h_{\mathcal{K}}$ siendo el diámetro de \mathcal{K} . Se denota también por $\mathcal{M}_h = \{s_i\}_{i \in I}$ al conjunto de todos los nodos de \mathcal{T}_h .

- (c) Se considera el espacio de elementos finitos lineales a trozos asociado a \mathcal{T}_h :

$$N_h = \{n_h \in C(\bar{\Omega}) : n_h|_{\mathcal{K}} \in \mathcal{P}_1(\mathcal{K}), \quad \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h\},$$

y su base de Lagrange será denotada por $\{\varphi_s\}_{s \in \mathcal{M}_h}$.

Teniendo en cuenta esto, se plantea el siguiente esquema numérico de primer orden en tiempo, lineal, desacoplado, asociado al modelo de estudio (2.12) (denotando, en general, $\delta_t c^n = \frac{c^n - c^{n-1}}{\Delta t}$):

- **Inicialización:** Sean $u^0 = r_h(u_0) \in N_h$, $v^0 = r_h(v_0) \in N_h$, $a^0 = r_h(a_0) \in N_h$, $b^0 = r_h(b_0) \in N_h$, $w^0 = r_h(w_0) \in N_h$, y $z^0 = r_h(z_0) \in N_h$, donde se considera por simplicidad que $u_0, v_0, w_0, z_0 \in C(\bar{\Omega})$, $a_0 = u_0 e^{\xi_u w_0}$ y $b_0 = v_0 e^{\xi_v z_0}$.

- **[Paso 1]** Dado $[u^{n-1}, v^{n-1}, w^{n-1}, z^{n-1}] \in N_h \times N_h \times N_h \times N_h$, computar $[w^n, z^n] \in N_h \times N_h$ satisfaciendo

$$\delta_t w^n(s) = -w^n(s) + f(v^{n-1}(s)), \quad \forall s \in \mathcal{M}_h, \quad (3.1)$$

$$\delta_t z^n(s) = -z^n(s) + g(u^{n-1}(s)), \quad \forall s \in \mathcal{M}_h. \quad (3.2)$$

- **[Paso 2]** Dado $[u^{n-1}, v^{n-1}, a^{n-1}, b^{n-1}, w^n, z^n] \in N_h \times N_h \times N_h \times N_h \times N_h \times N_h$, computar $[a^n, b^n] \in N_h \times N_h$ tal que

$$(e^{-\xi_u w^n} \delta_t a^n, \bar{a})_h + D_u(e^{-\xi_u w^n} \nabla a^n, \nabla \bar{a}) = -\xi_u (e^{-\xi_u w^n} a^n w^n, \bar{a})_h + \xi_u (e^{-\xi_u w^n} a^{n-1} f(v^{n-1}), \bar{a})_h, \quad \forall \bar{a} \in N_h, \quad (3.3)$$

$$(e^{-\xi_v z^n} \delta_t b^n, \bar{b})_h + D_v(e^{-\xi_v z^n} \nabla b^n, \nabla \bar{b}) = -\xi_v (e^{-\xi_v z^n} b^n z^n, \bar{b})_h + \xi_v (e^{-\xi_v z^n} b^{n-1} g(u^{n-1}), \bar{b})_h, \quad \forall \bar{b} \in N_h, \quad (3.4)$$

siendo $(\cdot, \cdot)_h$ el operador definido en (1.5).

- **[Paso 3]** Dado $[a^n, b^n, w^n, z^n] \in N_h \times N_h \times N_h \times N_h$, computar $[u^n, v^n] \in N_h \times N_h$ verificando

$$u^n(s) = a^n(s) e^{-\xi_u w^n(s)}, \quad \forall s \in \mathcal{M}_h, \quad (3.5)$$

$$v^n(s) = b^n(s) e^{-\xi_v z^n(s)}, \quad \forall s \in \mathcal{M}_h. \quad (3.6)$$

Observación 3.1.1. Por propiedades del interpolador nodal r_h , es inmediato que si las condiciones iniciales del sistema (1)-(2) satisfacen que $u_0, v_0, w_0, z_0 \geq 0$ en Ω , entonces las condiciones iniciales para el esquema numérico (3.1)-(3.6) verifican que $u^0, a^0, v^0, b^0, w^0, z^0 \geq 0$ en Ω .

En las secciones siguientes se abordará la demostración de algunas propiedades cualitativas de este esquema de aproximación numérica.

3.2. ESTIMACIONES PUNTUALES

Esta sección está dedicada a demostrar que cualquier solución del esquema numérico (3.1)-(3.6) verifica algunas estimaciones puntuales análogas a las que satisface la solución exacta de (1)-(2).

Teorema 3.2.1. (Positividad) *Sea $[a^n, b^n, w^n, z^n, u^n, v^n] \in N_h \times N_h \times N_h \times N_h \times N_h \times N_h$ cualquier solución del esquema numérico (3.1)-(3.6). Si $a^{n-1}, b^{n-1} \geq 0$ (en particular, $u^{n-1}, v^{n-1} \geq 0$) y $w^{n-1}, z^{n-1} \geq 0$ en Ω , entonces*

$$w^n, z^n \geq 0 \quad y \quad a^n, b^n \geq 0 \quad (\text{en particular, } u^n, v^n \geq 0) \quad \text{en } \Omega. \quad (3.7)$$

Demostración. En primer lugar, de (3.1), se tiene que

$$w^n(s) = \frac{1}{1 + \Delta t} (w^{n-1}(s) + \Delta t f(v^{n-1}(s))), \quad \forall s \in \mathcal{M}_h, \quad (3.8)$$

de lo cual, teniendo en cuenta que el término $f(v^{n-1}(s))$ es no negativo y $w^{n-1}(s) \geq 0$ en todo nodo s , se deduce que $w^n(s) \geq 0$ para todo $s \in \mathcal{M}_h$. Por otro lado, de (3.2), se tiene que

$$z^n(s) = \frac{1}{1 + \Delta t} (z^{n-1}(s) + \Delta t g(u^{n-1}(s))), \quad \forall s \in \mathcal{M}_h, \quad (3.9)$$

y usando el hecho de que $g(u^{n-1}(s)) \geq 0$ y $z^{n-1}(s) \geq 0$ para todo $s \in \mathcal{M}_h$, se deduce que $z^n \geq 0$ en Ω .

Ahora, se procede a demostrar que $a^n \geq 0$ (y, en consecuencia, $u^n \geq 0$). Para ello, se toma como función test $\bar{a} = r_h[a_-^n]$ en (3.3), donde $a_-^n := \min\{0, a^n\}$, de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} r_h \left[e^{-\xi_u w^n} \left(\frac{a^n - a^{n-1}}{\Delta t} \right) r_h[a_-^n] \right] dx + D_u \int_{\Omega} e^{-\xi_u w^n} \nabla a^n \cdot \nabla r_h[a_-^n] dx = \\ -\xi_u \int_{\Omega} r_h \left[e^{-\xi_u w^n} a^n w^n \cdot r_h[a_-^n] \right] dx + \xi_u \int_{\Omega} r_h \left[e^{-\xi_u w^n} a^{n-1} f(v^{n-1}) \cdot r_h[a_-^n] \right] dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Teniendo en cuenta que $r_h[u \cdot r_h[v]] = r_h[u \cdot v]$ (ya que $r_h[v]$ coincide con v en los nodos espaciales), y usando que $a^n = r_h[a^n] = r_h[a_+^n] + r_h[a_-^n]$ (gracias a la linealidad del interpolador nodal), la igualdad (3.10) se reescribe como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} r_h [e^{-\xi_u w^n} (a_-^n)^2] dx - \underbrace{\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} r_h [e^{-\xi_u w^n} a^{n-1} (a_-^n)] dx}_{I_1} + \underbrace{D_u \int_{\Omega} e^{-\xi_u w^n} \nabla r_h[a^n] \cdot \nabla r_h[a_-^n] dx}_{I_2} \\ = \underbrace{-\xi_u \int_{\Omega} r_h [e^{-\xi_u w^n} (a_-^n)^2 w^n] dx + \xi_u \int_{\Omega} r_h [e^{-\xi_u w^n} a^{n-1} f(v^{n-1}) \cdot r_h[a_-^n] dx}_{I_3}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Usando el hecho que r_h preserva el signo, se puede ver que $I_1 \geq 0$ y $I_3 \leq 0$, y utilizando la Proposición

1.4.3 en I_2 se verifica que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Omega} \nabla r_h[a_-^n] \cdot \nabla r_h[a_-^n] dx + \int_{\Omega} \nabla r_h[a_+^n] \cdot \nabla r_h[a_-^n] dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla r_h[a_-^n]|^2 dx + \sum_{s, \bar{s} \in \mathcal{N}_h} a_+^n(s) a_-^n(\bar{s}) \int_{\Omega} \nabla \varphi_s(x) \cdot \nabla \varphi_{\bar{s}}(x) dx \geq 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

lo cual, junto con (3.11), implican que

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} r_h[e^{-\xi_u w^n} (a_-^n)^2] dx \leq 0.$$

De esta manera, se concluye que $(a_-^n)(s) = 0$ para todo $s \in \mathcal{M}_h$, demostrando así que $a^n \geq 0$ en Ω . Esto, junto con (3.5), implican que $u^n \geq 0$. Por otro lado, la positividad de b^n y v^n se obtienen de manera análoga. \square

Observación 3.2.2. De (3.8)-(3.9) se deduce que, si $w^0, z^0 > 0$, entonces $w^n, z^n > 0$ para todo $n \geq 1$.

Teorema 3.2.3. (Estimaciones en L^∞) Sea $[w^n, z^n] \in N_h \times N_h$ cualquier solución de (3.1)-(3.2). Entonces se satisface que:

$$\|w^n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \quad \text{y} \quad \|z^n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \quad \forall n \geq 1, \quad (3.13)$$

donde $C > 0$ es una constante independiente de $[\Delta t, h, n]$.

Demostración. Con el objetivo de probar (3.13)₁, considere la siguiente EDO mayorante discreta (cuya solución es constante en espacio): Si $\varphi^0 = \max_{x \in \Omega} w^0(x)$, entonces, para cada $n \geq 1$, se define φ^n como la solución de

$$\delta_t \varphi^n(s) = \|f\|_{L^\infty((0, \infty))}, \quad \forall s \in \mathcal{M}_h. \quad (3.14)$$

Definiendo la variable $\alpha^n := w^n - \varphi^n$, se tiene que, en el caso $n = 1$, $\alpha^0 \leq 0$, y de (3.1) y (3.14), se obtiene

$$\alpha^1(s) = \underbrace{\frac{1}{1 + \Delta t} (w^0(s) - \varphi^0(s))}_{(i)} + \underbrace{\frac{\Delta t}{1 + \Delta t} f(v^0(s)) - \Delta t \|f\|_{L^\infty((0, \infty))}}_{(ii)}. \quad (3.15)$$

Note que los términos (i) y (ii) son menores o iguales que cero, de lo cual se concluye que $\alpha^1(s) \leq 0$ para todo $s \in \mathcal{M}_h$, lo que implica que $w^1 \leq \varphi^1$. Procediendo de manera inductiva y usando que $\alpha^{n-1} \leq 0$, se deduce que $w^n \leq \varphi^n$. Ahora, multiplicando (3.14) por Δt y sumando desde $n = 1$ hasta $n = m$, se obtiene que

$$\varphi^m - \varphi^0 = \Delta t \sum_{n=1}^m \|f\|_{L^\infty((0, \infty))} = t_m \|f\|_{L^\infty((0, \infty))} \leq T \|f\|_{L^\infty((0, \infty))}, \quad (3.16)$$

y así,

$$\varphi^m \leq \varphi^0 + T \|f\|_{L^\infty((0, \infty))}. \quad (3.17)$$

Por lo tanto, $w^n \leq \varphi^n \leq \varphi^0 + T\|f\|_{L^\infty((0,\infty))}$, lo cual garantiza que w^n está acotada en $L^\infty(\Omega)$ para todo $n \geq 1$. Por otro lado, la cota en $L^\infty(\Omega)$ para z^n (independiente de n) se obtiene de manera análoga. \square

Teorema 3.2.4. (Estimaciones en L^∞) Sea $[a^n, b^n] \in N_h \times N_h$ cualquier solución del esquema numérico (3.3)-(3.4). Entonces se satisface que

$$\|a^n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \quad \text{y} \quad \|b^n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \quad \forall n \geq 1, \quad (3.18)$$

donde $C > 0$ es una constante independiente de $[\Delta t, h, n]$. En particular, esto implica que

$$\|u^n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \quad \text{y} \quad \|v^n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \quad \forall n \geq 1, \quad (3.19)$$

con $C > 0$ independiente de $[\Delta t, h, n]$.

Demostración. Para probar (3.18)₁, considere la siguiente EDO mayorante discreta (cuya solución es constante en espacio): Si $\varphi^0 = \max_{x \in \Omega} a^0(x)$, para cada $n \geq 1$, encontrar φ^n tal que

$$\delta_t \varphi^n = \xi_u \varphi^{n-1} \|f\|_{L^\infty((0,\infty))}. \quad (3.20)$$

Como $\nabla \varphi^n = 0$, de (3.20) se tiene que, para todo $\bar{a} \in N_h$,

$$(e^{-\xi_u w^n} \delta_t \varphi^n, \bar{a})_h + D_u(e^{-\xi_u w^n} \nabla \varphi, \nabla \bar{a}) = \xi_u (e^{-\xi_u w^n} \varphi^{n-1} \|f\|_{L^\infty((0,\infty))}, \bar{a})_h. \quad (3.21)$$

Definiendo la variable $\alpha^n = a^n - \varphi^n$, y combinando (3.3) y (3.21), se obtiene

$$\begin{aligned} (e^{-\xi_u w^n} \delta_t \alpha^n, \bar{a})_h + D_u(e^{-\xi_u w^n} \nabla \alpha^n, \nabla \bar{a}) &= -\xi_u (e^{-\xi_u w^n} a^n w^n, \bar{a})_h \\ &+ \xi_u (e^{-\xi_u w^n} a^{n-1} f(v^{n-1}), \bar{a})_h - \xi_u (e^{-\xi_u w^n} \varphi^{n-1} \|f\|_{L^\infty((0,\infty))}, \bar{a})_h, \quad \forall \bar{a} \in N_h, \end{aligned}$$

de lo cual se llega a

$$\begin{aligned} (e^{-\xi_u w^n} \delta_t \alpha^n, \bar{a})_h + D_u(e^{-\xi_u w^n} \nabla \alpha^n, \nabla \bar{a}) &= -\xi_u (e^{-\xi_u w^n} a^n w^n, \bar{a})_h \\ &+ \xi_u (e^{-\xi_u w^n} a^{n-1} (f(v^{n-1}) - \|f\|_{L^\infty((0,\infty))}), \bar{a})_h + \xi_u (e^{-\xi_u w^n} \alpha^{n-1} \|f\|_{L^\infty((0,\infty))}, \bar{a})_h, \quad \forall \bar{a} \in N_h. \end{aligned}$$

Si se considera el caso $n = 1$, se tiene que $\alpha^0 \leq 0$, y tomando $\bar{a} = r_h[\alpha_+^1]$, se concluye

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} r_h [e^{-\xi_u w^1} (\alpha_+^1)^2] dx - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} r_h [e^{-\xi_u w^1} \alpha^0 \alpha_+^1] dx + D_u \int_{\Omega} e^{-\xi_u w^1} |\nabla r_h [\alpha_+^1]|^2 dx \\ & + D_u \int_{\Omega} e^{-\xi_u w^1} \nabla r_h [\alpha_-^1] \cdot \nabla r_h [\alpha_+^1] dx = -\xi_u \int_{\Omega} r_h [e^{-\xi_u w^1} a^1 w^1 \alpha_+^1] dx \\ & + \xi_u \int_{\Omega} r_h [e^{-\xi_u w^1} a^0 (f(v^0) - \|f\|_{L^\infty((0,\infty))}) r_h [\alpha_+^1]] dx + \xi_u \int_{\Omega} r_h [e^{-\xi_u w^1} \alpha^0 \|f\|_{L^\infty((0,\infty))} r_h [\alpha_+^1]] dx. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Observe que todos los términos del lado derecho de la igualdad (3.22) son menores o iguales que cero.

Además, procediendo como en (3.12), se tiene que

$$D_u \int_{\Omega} e^{-\xi_u w^1} \nabla r_h [\alpha_-^1] \cdot \nabla r_h [\alpha_+^1] dx \geq 0,$$

y por tanto,

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} r_h [e^{-\xi_u w^1} (\alpha_+^1)^2] dx - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} r_h [e^{-\xi_u w^1} \alpha^0 \alpha_+^1] dx \leq 0. \quad (3.23)$$

Teniendo en cuenta que el término $-\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} r_h [e^{-\xi_u w^1} \alpha^0 \alpha_+^1] dx$ es mayor o igual que cero, de (3.23) se concluye que

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} r_h [e^{-\xi_u w^1} (\alpha_+^1)^2] dx \leq 0, \quad (3.24)$$

y así, $\alpha_+^1(s) = 0$ para todo $s \in \mathcal{M}_h$. Como consecuencia, queda demostrado que $\alpha^1 \leq 0$, lo cual implica que $a^1 \leq \varphi^1$. Procediendo inductivamente y usando que $\alpha^{n-1} \leq 0$, se deduce que $a^n \leq \varphi^n$ en Ω . Finalmente, de (3.20) se tiene que

$$\varphi^n = (1 + \Delta t \xi_u \|f\|_{L^\infty((0,\infty))})^n \varphi^0.$$

Además, usando la desigualdad $1 + x \leq e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se deduce que

$$(1 + \Delta t \xi_u \|f\|_{L^\infty((0,\infty))}) \leq e^{\Delta t \xi_u \|f\|_{L^\infty((0,\infty))}},$$

por ende

$$a^n \leq \varphi^n \leq \varphi^0 e^{t_n \xi_u \|f\|_{L^\infty((0,\infty))}} \leq \varphi^0 e^{T \xi_u \|f\|_{L^\infty((0,\infty))}}, \quad \forall n \geq 1,$$

y por tanto, a^n (y en particular, u^n) está acotada en $L^\infty(\Omega)$, para todo $n \geq 1$. La prueba de (3.18)₂ (y por tanto, (3.19)₂) se obtiene de manera análoga. \square

3.3. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN

El objetivo de esta sección es establecer el buen planteamiento del esquema numérico (3.1)-(3.6); es decir, se mostrará que existe una única solución. Esto queda formalizado en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1. *Existe una única $[u^n, v^n, a^n, b^n, w^n, z^n] \in N_h \times N_h \times N_h \times N_h \times N_h \times N_h$ solución del esquema numérico (3.1)-(3.6).*

Demostración. La demostración está dividida en tres partes.

- **Parte 1:** En primer lugar, probaremos la existencia y unicidad de w^n y z^n resolviendo (3.1)-(3.2). En efecto, dado $[v^{n-1}, w^{n-1}] \in N_h \times N_h$, de (3.1)-(3.2) se tiene que, para cada nodo $s \in \mathcal{M}_h$,

$$\frac{w^n(s) - w^{n-1}(s)}{\Delta t} = -w^n(s) + f(v^{n-1}(s)),$$

de lo cual, despejando se llega a

$$w^n(s) = \frac{1}{1 + \Delta t} w^{n-1}(s) + \frac{\Delta t}{1 + \Delta t} f(v^{n-1}(s)), \quad \forall s \in \mathcal{M}_h, \quad (3.25)$$

y así, w^n se puede computar directamente de (3.25). Un razonamiento análogo aplicado a la ecuación discreta para z^n conduce a una fórmula explícita para z^n , que garantiza también su existencia y unicidad.

- **Parte 2:** En segundo lugar, dado $[v^{n-1}, a^{n-1}, u^{n-1}, b^{n-1}, z^n, w^n] \in N_h \times N_h \times N_h \times N_h \times N_h \times N_h$, se probará que existe una única solución $[a^n, b^n] \in N_h \times N_h$ de (3.3)-(3.4), haciendo uso del Teorema de Lax-Milgram (ver Teorema 1.3.6). Para ello, defina $\mathcal{A} : N_h \times N_h \rightarrow \mathbb{R}$ y $\ell : N_h \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{A}(a^n, \nu) = \left(e^{-\xi_u w^n} \frac{a^n}{\Delta t}, \nu \right)_h + D_u \left(e^{-\xi_u w^n} \nabla a^n, \nabla \nu \right) + \xi_u \left(e^{-\xi_u w^n} a^n w^n, \nu \right)_h, \quad (3.26)$$

y

$$\ell(\nu) = \left(e^{-\xi_u w^n} \frac{a^{n-1}}{\Delta t}, \nu \right)_h + \left(\xi_u e^{-\xi_u w^n} a^{n-1} f(v^{n-1}), \nu \right)_h. \quad (3.27)$$

Con el fin de verificar las hipótesis del Teorema 1.3.6, se procederá a demostrar que la forma \mathcal{A} , dada en (3.26), es bilineal, continua y coerciva, y que el funcional ℓ , definido en (3.27), es lineal y continuo.

- **Propiedades del operador \mathcal{A} .**

1. Bilinealidad: Para probar la linealidad en la primera variable, se toma $a^n = \alpha a_1 + \beta a_2$ en (3.26), de esta manera se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha a_1 + \beta a_2, \nu) &= \left(e^{-\xi_u w^n} \frac{(\alpha a_1 + \beta a_2)}{\Delta t}, \nu \right)_h + D_u(e^{-\xi_u w^n} \nabla(\alpha a_1 + \beta a_2), \nabla \nu) \\ &\quad + \xi_u \left(e^{-\xi_u w^n} (\alpha a_1 + \beta a_2) w^n, \nu \right)_h. \end{aligned}$$

Así mismo, empleando la linealidad de la integral, del operador de interpolación y del gradiente, se deduce que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha a_1 + \beta a_2, \nu) &= \alpha \left(e^{-\xi_u w^n} \frac{a_1}{\Delta t}, \nu \right)_h + \beta \left(e^{-\xi_u w^n} \frac{a_2}{\Delta t}, \nu \right)_h \\ &\quad + D_u \alpha \left(e^{-\xi_u w^n} \nabla a_1, \nabla \nu \right) + D_u \beta \left(e^{-\xi_u w^n} \nabla a_2, \nabla \nu \right) \\ &\quad + \alpha \xi_u \left(e^{-\xi_u w^n} a_1 w^n, \nu \right) + \beta \xi_u \left(e^{-\xi_u w^n} a_2 w^n, \nu \right), \end{aligned}$$

de lo cual, reorganizando se llega a

$$\mathcal{A}(\alpha a_1 + \beta a_2, \nu) = \alpha \mathcal{A}(a_1, \nu) + \beta \mathcal{A}(a_2, \nu),$$

lo cual implica la linealidad en la primera variable. La linealidad en la segunda variable se prueba de manera análoga.

2. Continuidad: Para demostrar la continuidad, note que usando la desigualdad triangular se tiene

$$\left| \mathcal{A}(a^n, \nu) \right| = \left| \left(e^{-\xi_u w^n} \frac{a^n}{\Delta t}, \nu \right)_h \right| + \left| D_u(e^{-\xi_u w^n} \nabla a^n, \nabla \nu) \right| + \left| \xi_u \left(e^{-\xi_u w^n} a^n w^n, \nu \right)_h \right|,$$

de lo cual, usando la definición del producto interno *Mass-lumping* y el hecho de que $|r_h[a]| \leq r_h[|a|]$ para toda $a \in C(\bar{\Omega})$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{A}(a^n, \nu) \right| &\leq \int_{\Omega} r_h \left(\left| e^{-\xi_u w^n} \frac{a^n}{\Delta t} \cdot \nu \right| \right) dx + D_u \int_{\Omega} |e^{-\xi_u w^n} \nabla a^n \cdot \nabla \nu| dx \\ &\quad + \int_{\Omega} r_h \left(\left| e^{-\xi_u w^n} a^n w^n \cdot \nu \right| \right) dx. \end{aligned}$$

En vista de que $e^{-\xi_u w^n} \leq 1$ (ver Teorema 3.2.1), y $w \leq C$ (ver Teorema 3.2.4), se deduce

$$\left| \mathcal{A}(a^n, \nu) \right| \leq \underbrace{\left(\frac{1}{\Delta t} + C \right) \int_{\Omega} r_h[|a^n \cdot \nu|] dx}_{I_1} + \underbrace{D_u \int_{\Omega} |\nabla a^n \cdot \nabla \nu| dx}_{I_2}, \quad (3.28)$$

y aplicando la desigualdad de Hölder y el Lema 1.4.2 en (3.28), se obtiene

$$I_1 \leq \left(\frac{1}{\Delta t} + C_1 \right) \|a^n\|_{L^2(\Omega)} \|\nu\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|a^n\|_{H^1(\Omega)} \|\nu\|_{H^1(\Omega)}, \quad (3.29)$$

y

$$I_2 \leq D_u \|\nabla a^n\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \nu\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla a^n\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla \nu\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.30)$$

Así de (3.28)-(3.30), se llega a

$$|\mathcal{A}(a^n, \bar{v})| \leq C \|a^n\|_{H^1(\Omega)} \|\nu\|_{H^1(\Omega)},$$

lo que demuestra la continuidad del operador \mathcal{A} .

3. Coercividad: Para probar la coercividad, note que

$$\mathcal{A}(a^n, a^n) = \left(e^{-\xi_u w^n} \frac{a^n}{\Delta t}, a^n \right)_h + D_u \left(e^{-\xi_u w^n} \nabla a^n, \nabla a^n \right) + \xi_u \left(e^{-\xi_u w^n} a^n w^n, a^n \right)_h,$$

de lo cual se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(a^n, a^n) &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} r_h \left(e^{-\xi_u w^n} (a^n)^2 \right) dx + D_u \int_{\Omega} \left(e^{-\xi_u w^n} |\nabla a^n|^2 \right) dx \\ &\quad + \xi_u \int_{\Omega} r_h \left(e^{-\xi_u w^n} w^n (a^n)^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Como w^n esta acotada en $L^\infty(\Omega)$, es decir, $w^n \leq C$, entonces $e^{-\xi_u w^n} \geq e^{-\xi_u C}$, y en consecuencia

$$\mathcal{A}(a^n, a^n) \geq \frac{e^{-\xi_u C}}{\Delta t} \int_{\Omega} r_h [(a^n)^2] dx + \xi_u e^{-\xi_u C} \int_{\Omega} r_h [w^n (a^n)^2] dx + D_u e^{-\xi_u C} \int_{\Omega} |\nabla a^n|^2 dx,$$

de lo cual, utilizando el Lema 1.4.2 y definiendo $\beta := e^{-\xi_u C} \min\{\frac{1}{\Delta t}, D_u\}$, se llega a

$$\mathcal{A}(a^n, a^n) \geq \frac{e^{-\xi_u C}}{\Delta t} \|a^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + D_u e^{-\xi_u C} \|\nabla a^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \beta \|a^n\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

lo cual prueba la coercividad.

- **Propiedades del operador ℓ** : La linealidad y continuidad del operador ℓ se prueban de manera análoga a lo realizado para el operador \mathcal{A} ; y por lo tanto, se omitirá la demostración.

Así, aplicando el teorema de Lax-Milgram se concluye que existe una única solución $a^n \in N_h$ de (3.3). La demostración de la existencia y unicidad de $b^n \in N_h$ solución de (3.4) se sigue de manera similar usando el teorema de Lax-Milgram..

- Parte 3: Por último, la existencia y unicidad de $[u^n, v^n] \in N_h \times N_h$ solución de (3.5)-(3.6) es una consecuencia inmediata de la existencia y unicidad de $[a^n, w^n]$ y $[b^n, z^n]$.

□

4. SIMULACIONES NUMÉRICAS

En este capítulo, se presentan los resultados de algunas simulaciones numéricas realizadas con el objetivo de verificar el buen comportamiento del esquema propuesto en el Capítulo 3, para aproximar la dinámica territorial entre pandillas rivales descrita por el sistema (1)-(2). En particular, los experimentos se centran principalmente en capturar tres dinámicas territoriales fundamentales:

1. Segregación nula.
2. Segregación parcial.
3. Segregación completa.

Para las simulaciones se usa el esquema (3.1)-(3.6), implementado usando el software **FreeFEM++**. En todos los casos, se considera el dominio cuadrado $\Omega = (-6, 6)^2$ (discretizado uniformemente usando 60 nodos en cada dirección). En los experimentos numéricos se tomarán diferentes valores para los parámetros $[D_u, D_v]$ y $[\chi_u, \chi_v]$ (los cuales representan los coeficientes de difusión y taxis, respectivamente), con el objetivo de observar su influencia en las distintas dinámicas territoriales. En las representaciones gráficas se adopta la siguiente convención de colores: el rojo indica regiones donde la densidad de la pandilla u supera a la densidad de la pandilla v en al menos 10^{-6} , el azul oscuro corresponde a las zonas donde sucede lo contrario (esto es, v domina a u en al menos 10^{-6}), y el color blanco representa las regiones en las que la diferencia entre las densidades de u y v es menor que 10^{-6} . De forma análoga, para los graffitis z y w , se utiliza el color naranja cuando z domina, azul claro cuando domina w , y blanco cuando ambas densidades son aproximadamente iguales.

4.1. SEGREGACIÓN NULA

Para este primer test, se consideran las siguientes condiciones iniciales que corresponden a dos concentraciones localizadas de pandillas situadas en regiones opuestas del dominio, mientras se supone una ausencia total de graffitis al tiempo inicial:

$$u_0(x, y) = 0,1 + 0,9 \cdot e^{-(x-2)^2 - (y-2)^2}, \quad (4.1)$$

$$v_0(x, y) = 0,1 + 0,9 \cdot e^{-(x+2)^2 - (y+2)^2}, \quad (4.2)$$

$$w_0(x, y) = 0, \quad (4.3)$$

$$z_0(x, y) = 0. \quad (4.4)$$

Además, se usan los siguientes valores para los parámetros:

- Parámetros de difusión cruzada: $\chi_u = \chi_v = 0,25$.
- Parámetros de autodifusión: $D_u = D_v = 0,25$.
- Parámetro de discretización temporal: $\Delta t = 1$.

En la parte superior de la Figura 4.1, se muestra la dinámica de las densidades poblacionales de las bandas u y v ; mientras que, en la parte inferior, se presentan las respectivas densidades de graffitis z y w . Se observa que, a medida que comienza a avanzar el tiempo, las bandas se difunden dentro del dominio y marcan sus territorios pintando graffitis que los identifican. Para tiempos pequeños, por ejemplo $t = 5$, el triángulo superior del dominio está dominado por u , mientras que el triángulo inferior está dominado por v . Esta configuración se mantiene hasta tiempos intermedios (alrededor de $t \approx 600$); la región blanca, correspondiente a valores similares de ambas densidades, aparece inicialmente en la diagonal del dominio y se empieza a ensanchar progresivamente. Posteriormente, para tiempos más grandes, como $t = 900$, esta región se extiende cubriendo prácticamente todo el dominio, hasta llegar al punto en el que las densidades de ambas pandillas se han homogeneizado, dando lugar a una solución constante en toda la región de estudio. Un comportamiento análogo se observa en la fila inferior para los graffitis z y w , donde se considera que hay ausencia de graffitis en el tiempo inicial, pero las densidades comienzan a aumentar a medida que las pandillas marcan sus propios territorios. Al final, todo el dominio termina siendo marcado por la misma cantidad de graffitis de cada pandilla. Es evidente que el fenómeno de segregación no ocurre en este caso.

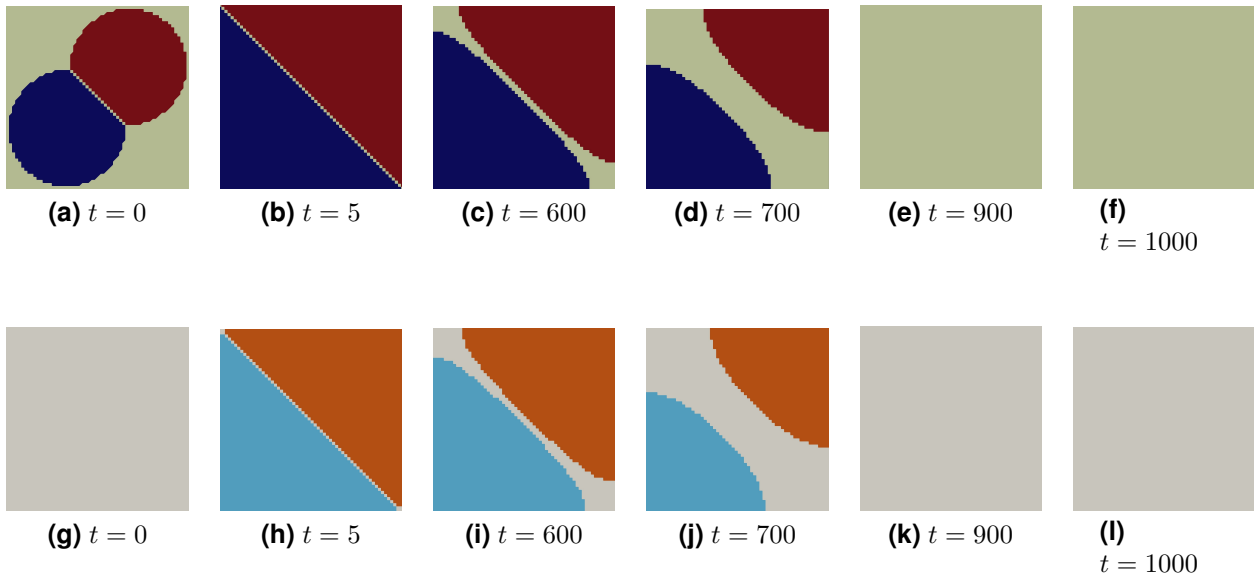


Figura 4.1: Evolución temporal de las densidades de pandillas en distintos instantes de tiempo para el caso: $D_u = D_v = \chi_u = \chi_v = 0,25$ y $\Delta t = 1$.

Para analizar este comportamiento con mayor detalle, en la Figura 4.2 se representan cortes de las soluciones a lo largo de la diagonal $y = x$. Inicialmente (en $t = 0$), los perfiles presentan dos máximos bien separados, correspondientes a las concentraciones iniciales de pandillas, mientras que los graffitis son nulos; luego, en $t = 5$, los máximos disminuyen y se ensanchan debido al efecto difusivo, pero aún se distinguen claramente las zonas donde domina cada pandilla. A medida que el tiempo avanza, las curvas se van aplanando hasta llegar a perfiles casi constantes (en $t = 900$ y $t = 1000$), lo que confirma la convergencia hacia un estado estacionario homogéneo.

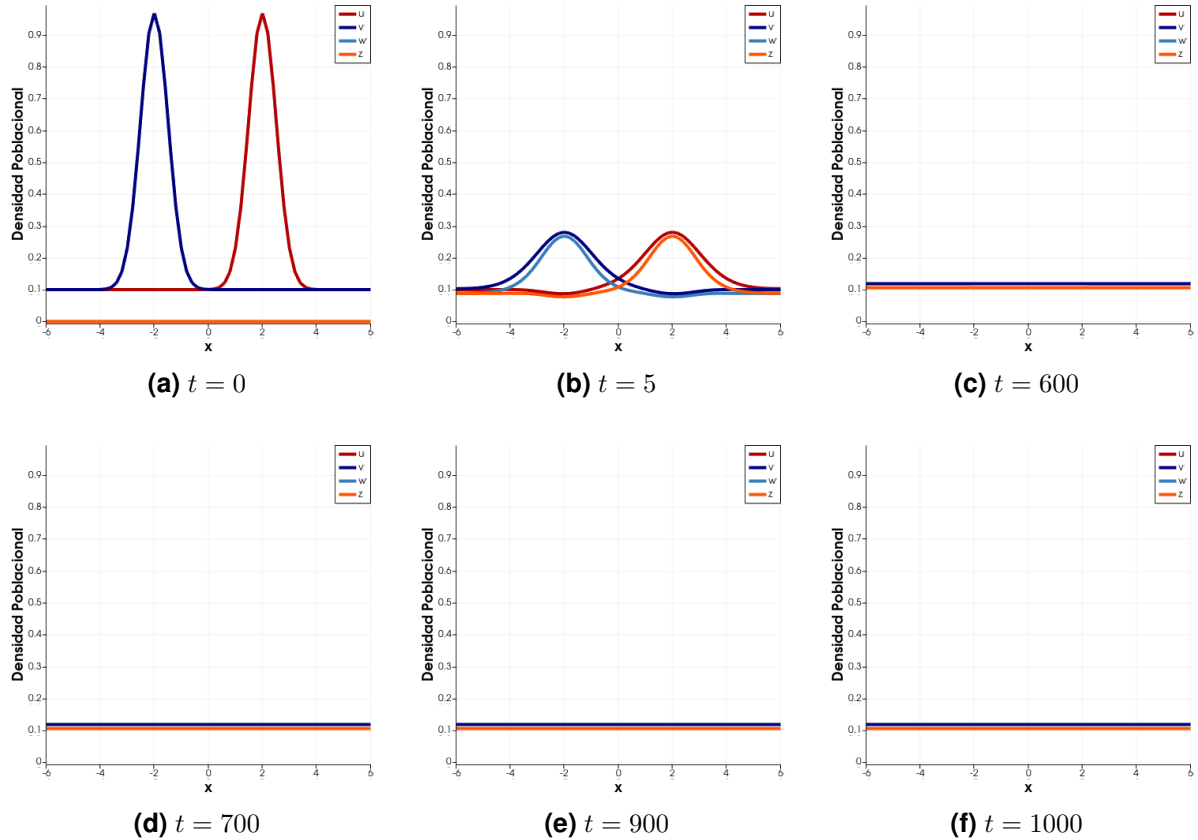


Figura 4.2: Tamaño de las poblaciones de pandillas u, v y la cantidad de sus correspondientes graffiti z y w , a lo largo de la línea $y = x$ en diferentes instantes de tiempo, para el caso: $D_u = D_v = \chi_u = \chi_v = 0,25$ y $\Delta t = 1$.

4.2. SEGREGACIÓN PARCIAL

En esta sección se muestran simulaciones en las que el sistema no converge hacia un estado homogéneo. En su lugar, aparecen estructuras espaciales y una tendencia a la separación entre las pandillas, aunque sin llegar a una segregación completa. En los experimentos que aquí se presentan, se consideran las mismas condiciones iniciales usadas en la subsección anterior (ver (4.1)-(4.4)), y el parámetro de discretización temporal $\Delta t = 0,01$.

En primer lugar, cuando se consideran los siguientes valores para los parámetros de autodifusión $D_u = D_v = 0,25$ y difusión cruzada $\chi_u = \chi_v = 5$, se observa que, después de la transición inicial, el sistema desarrolla un comportamiento no homogéneo con regiones dominadas alternativamente por u y v (ver Figura 4.3). En particular, en los tiempos intermedios aparecen estructuras tipo anillos, es decir, aparecen

zonas en las que una pandilla predomina formando franjas en formas de anillo que rodean regiones internas dominadas por la otra. Estas configuraciones no conducen a una separación total.

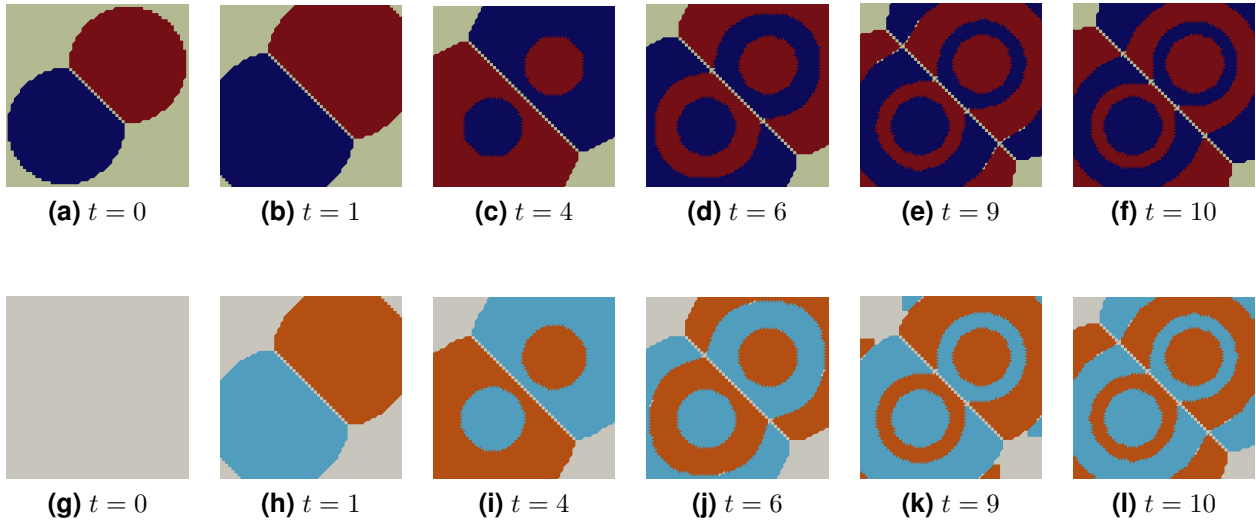


Figura 4.3: Evolución temporal de las densidades de pandillas en distintos instantes de tiempo para el caso: $D_u = D_v = 0,25$, $\chi_u = \chi_v = 5$ y $\Delta t = 0,01$.

La Figura 4.4 muestra los perfiles a lo largo de la recta $y = x$, lo que permite observar con mayor claridad la estructura de esta dinámica no homogénea. A diferencia del caso anterior, los perfiles no se aplanan completamente, sino que conservan regiones diferenciadas donde una pandilla domina sobre la otra, lo que indica la presencia de segregación parcial.

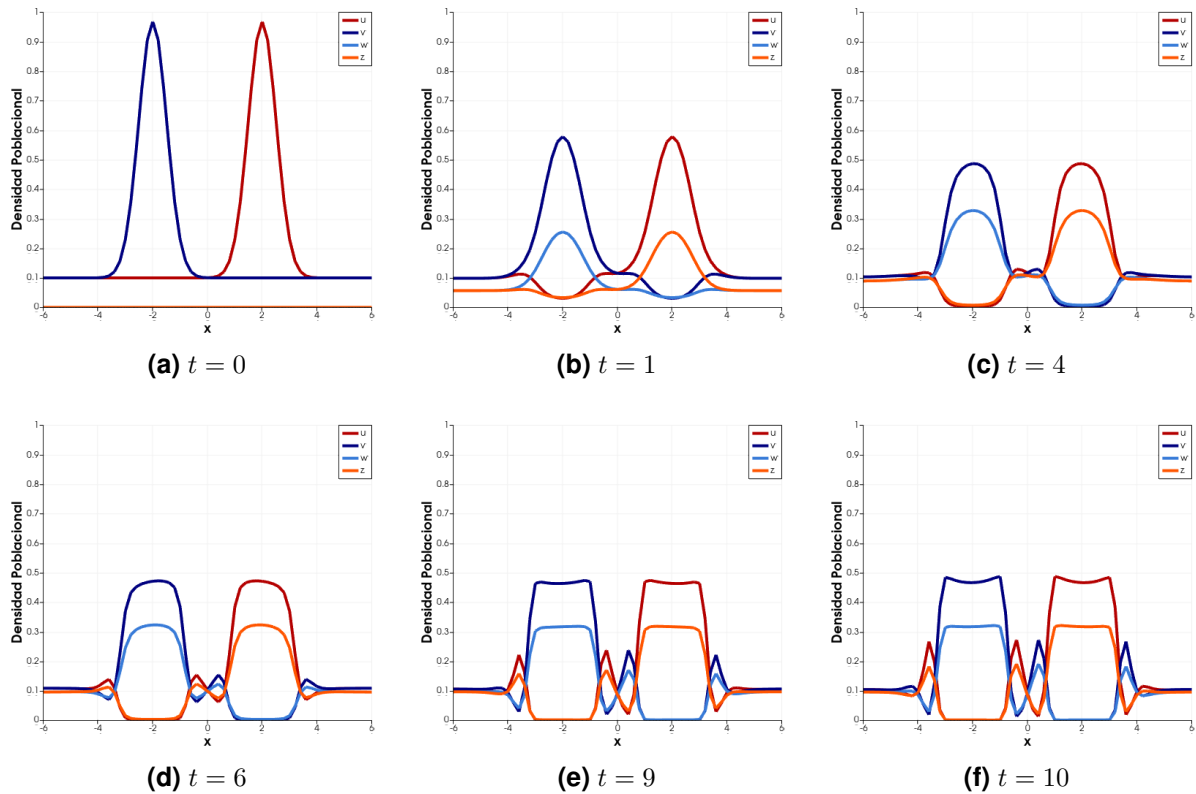


Figura 4.4: Tamaño de las poblaciones de pandillas u, v y la cantidad de sus graffitis correspondientes z y w , a lo largo de la línea $y = x$ en diferentes instantes de tiempo, para el caso: $D_u = D_v = 0,25$, $\chi_u = \chi_v = 5$ y $\Delta t = 0,01$.

En segundo lugar, si se mantienen los valores anteriores de los coeficientes de autodifusión, y se consideran taxis más intensas, por ejemplo tomando $\chi_u = \chi_v = 10$, se puede observar en la Figura 4.5 una dinámica con anillos más marcados y transiciones más estrechas comparadas con la Figura 4.3. En este caso, el aumento de la difusión cruzada produce un movimiento más direccional de las pandillas, generando regiones parcialmente separadas con interfaces más marcadas. En los tiempos intermedios se forman nuevamente estructuras tipo anillo en las que, cerca del centro del dominio, aparecen regiones casi circulares dominadas por una pandilla, rodeadas por bandas donde domina la otra, lo que genera patrones espacialmente más complejos que en el caso anterior.

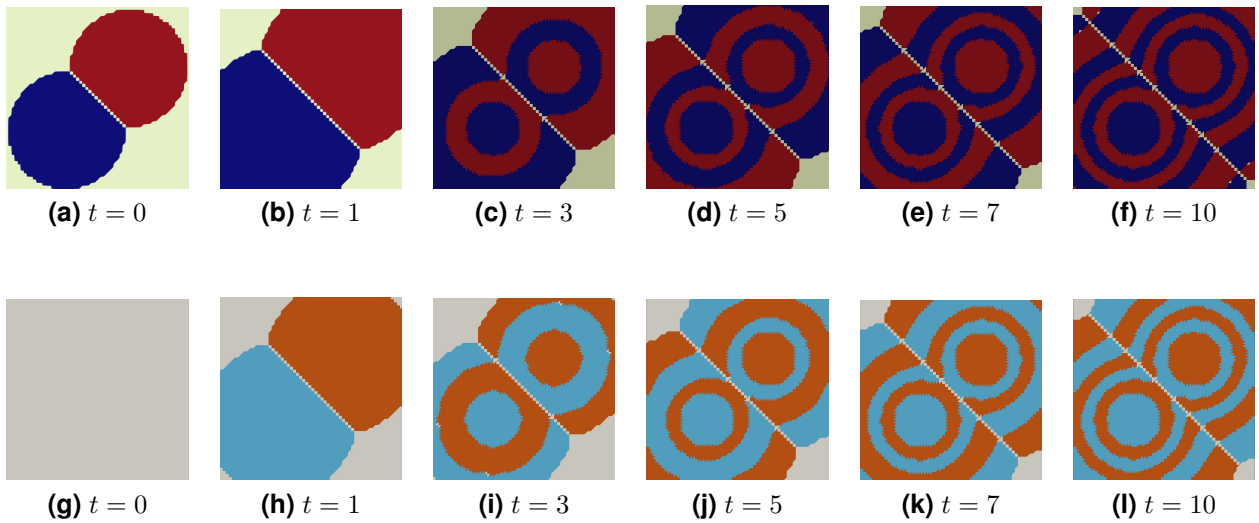


Figura 4.5: Evolución temporal de las densidades de pandillas en distintos instantes de tiempo para el caso: $D_u = D_v = 0,25$, $\chi_u = \chi_v = 10$ y $\Delta t = 0,01$.

En la Figura 4.6, los perfiles sobre la diagonal muestran claramente este efecto: los gráficos presentan picos más altos y más estrechos, separados por zonas donde una de las densidades es prácticamente nula. Aunque aún no se alcanza una segregación completa, la interacción entre la difusión y la taxis intensa da lugar a una marcada separación espacial entre los máximos de u y v , acompañada de una dinámica no homogénea.

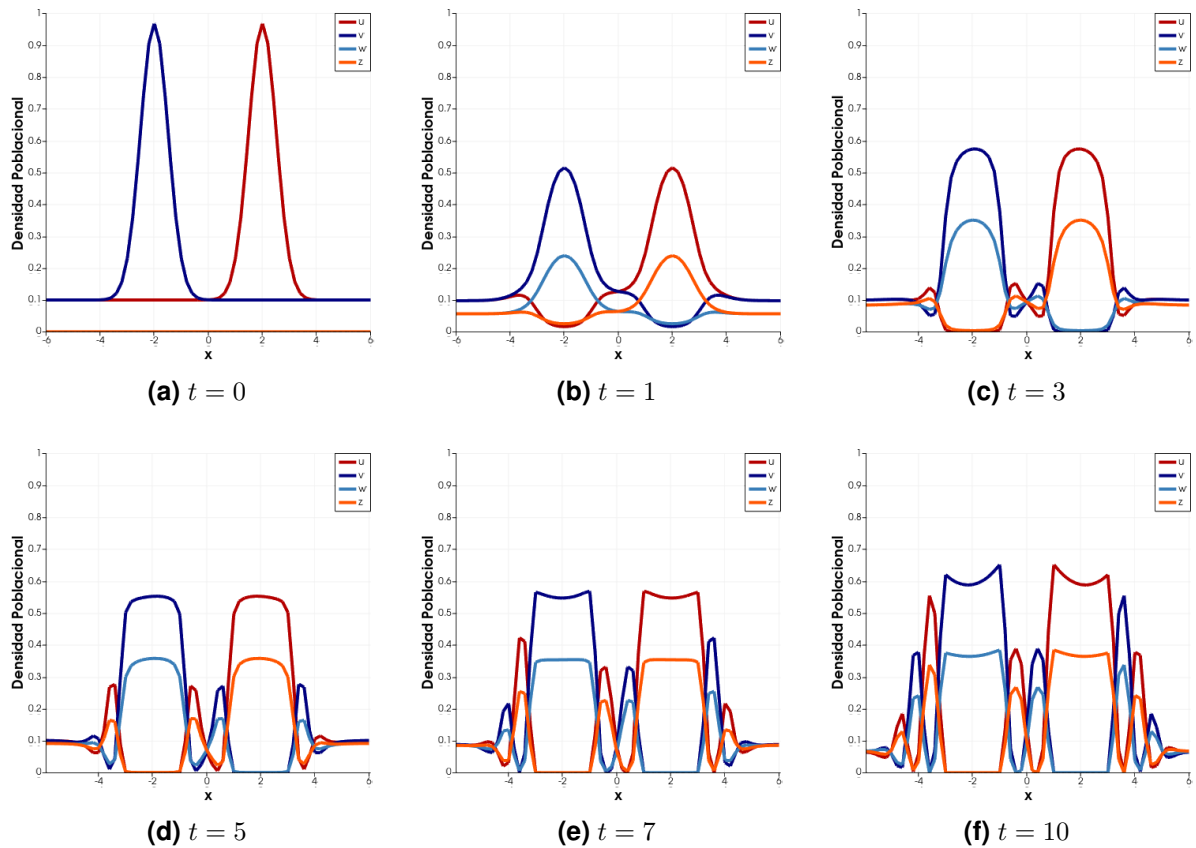


Figura 4.6: Tamaño de las poblaciones de pandillas u, v y la cantidad de sus graffitis correspondientes z y w , a lo largo de la línea $y = x$ en diferentes instantes de tiempo, para el caso: $D_u = D_v = 0,25$, $\chi_u = \chi_v = 10$ y $\Delta t = 0,01$.

Finalmente, si se consideran los parámetros de autodifusión $D_u = D_v = 0,3$ y de taxis $\chi_u = 4$ y $\chi_v = 8$, se obtiene un escenario asimétrico en la respuesta de las pandillas al graffiti (ver Figura 4.7): la pandilla asociada al mayor coeficiente de taxis reacciona más intensamente a la información del graffiti y, en consecuencia, tiende a concentrarse con mayor rapidez. La evolución muestra un patrón espacial desigual. En tiempos intermedios se observa que una de las pandillas forma cúmulos más compactos y localizados, mientras que la otra se distribuye en regiones más amplias del dominio, con estructuras menos concentradas.

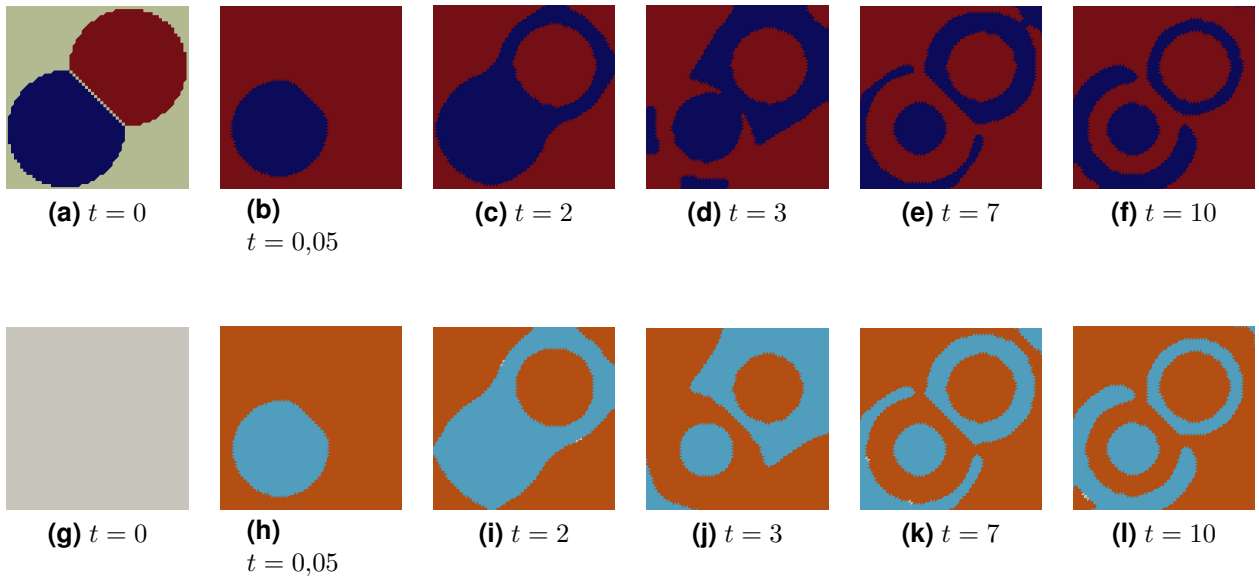


Figura 4.7: Evolución temporal de las densidades de pandillas en distintos instantes de tiempo para el caso: $D_u = D_v = 0,3$, $\chi_u = 4$, $\chi_v = 8$ y $\Delta t = 0,01$.

Este comportamiento se aprecia con mayor claridad al analizar los perfiles de las soluciones a lo largo de la diagonal $y = x$. Como se muestra en la Figura 4.8, los cortes diagonales revelan que la densidad correspondiente al mayor coeficiente de difusión cruzada presenta picos más pronunciados y localizados, mientras que la densidad de la otra pandilla exhibe perfiles más extendidos.

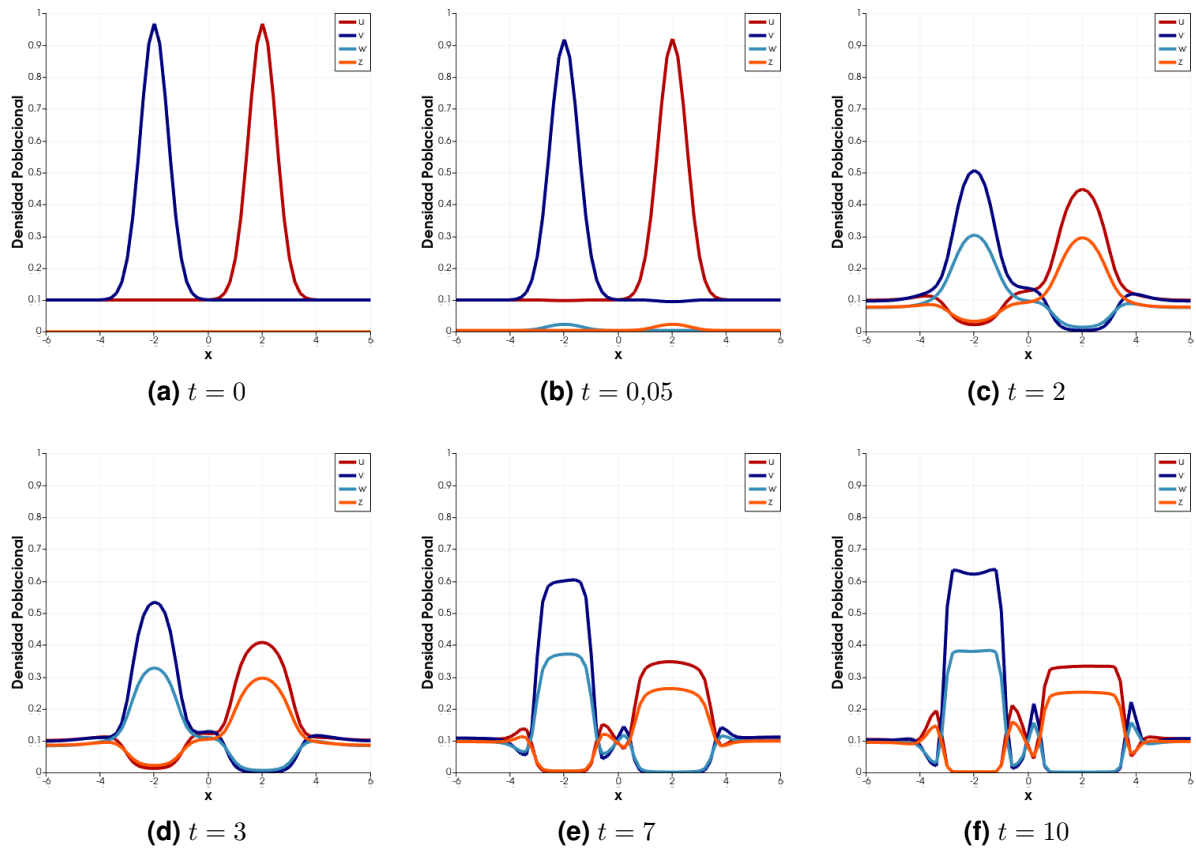


Figura 4.8: Tamaño de las poblaciones de pandillas u, v y la cantidad de sus graffitis correspondientes z y w , a lo largo de la línea $y = x$ en diferentes instantes de tiempo, para el caso: $D_u = D_v = 0,3$, $\chi_u = 4$, $\chi_v = 8$ y $\Delta t = 0,01$.

4.3. SEGREGACIÓN COMPLETA

En este último test, se consideran las condiciones iniciales

$$u^0(x, y) = e^{-(x-3)^2 - (y-3)^2}, \quad v^0(x, y) = e^{-(x+3)^2 - (y+3)^2}, \quad w^0(x, y) = 0, \quad z^0(x, y) = 0, \quad (4.5)$$

y los siguientes valores para los parámetros: $D_u = D_v = 0,03$, $\chi_u = \chi_v = 0,3$ y $\Delta t = 0,3$. En la parte superior de la Figura 4.9 se observa que, a lo largo de toda la evolución temporal, las regiones donde domina u y las regiones donde domina v permanecen claramente separadas por una interfaz bien definida. Un comportamiento análogo se aprecia en la fila inferior para los graffitis, que se concentran en zonas que reflejan la localización de las respectivas pandillas. Los cortes a lo largo de la diagonal $y = x$ mostrados en la Figura 4.10, confirman esta observación: en ningún instante aparece densidad de una pandilla en las regiones ocupadas por la otra. Este comportamiento constituye un ejemplo claro de segregación completa,

donde la interacción entre las pandillas es prácticamente inexistente desde el inicio hasta el tiempo final.

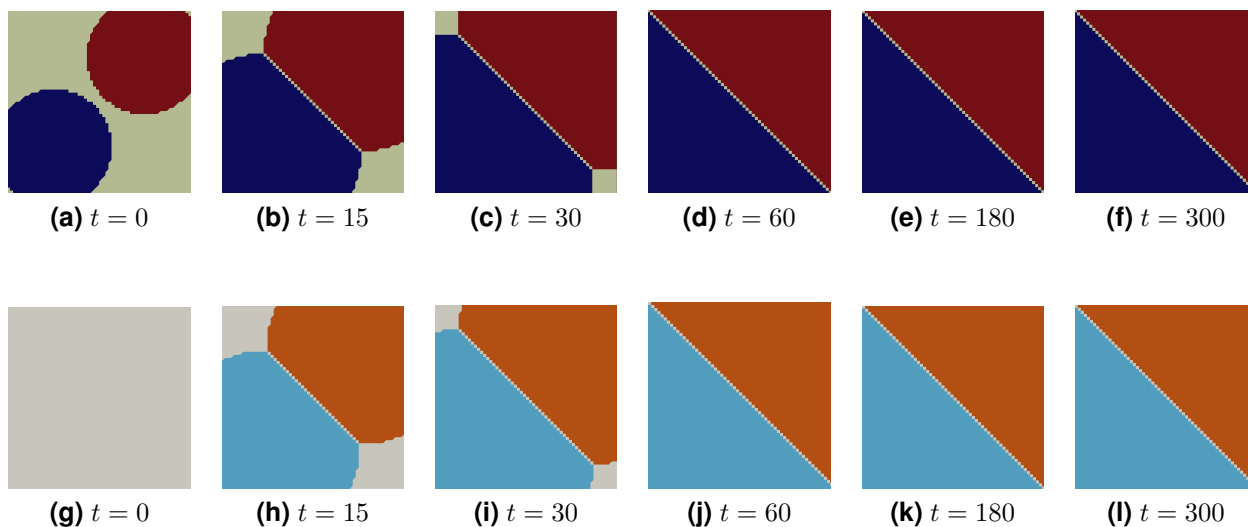


Figura 4.9: Evolución temporal de las densidades de pandillas en distintos instantes de tiempo para el caso: $D_u = D_v = 0,03$, $\chi_u = \chi_v = 0,3$ y $\Delta t = 0,3$.

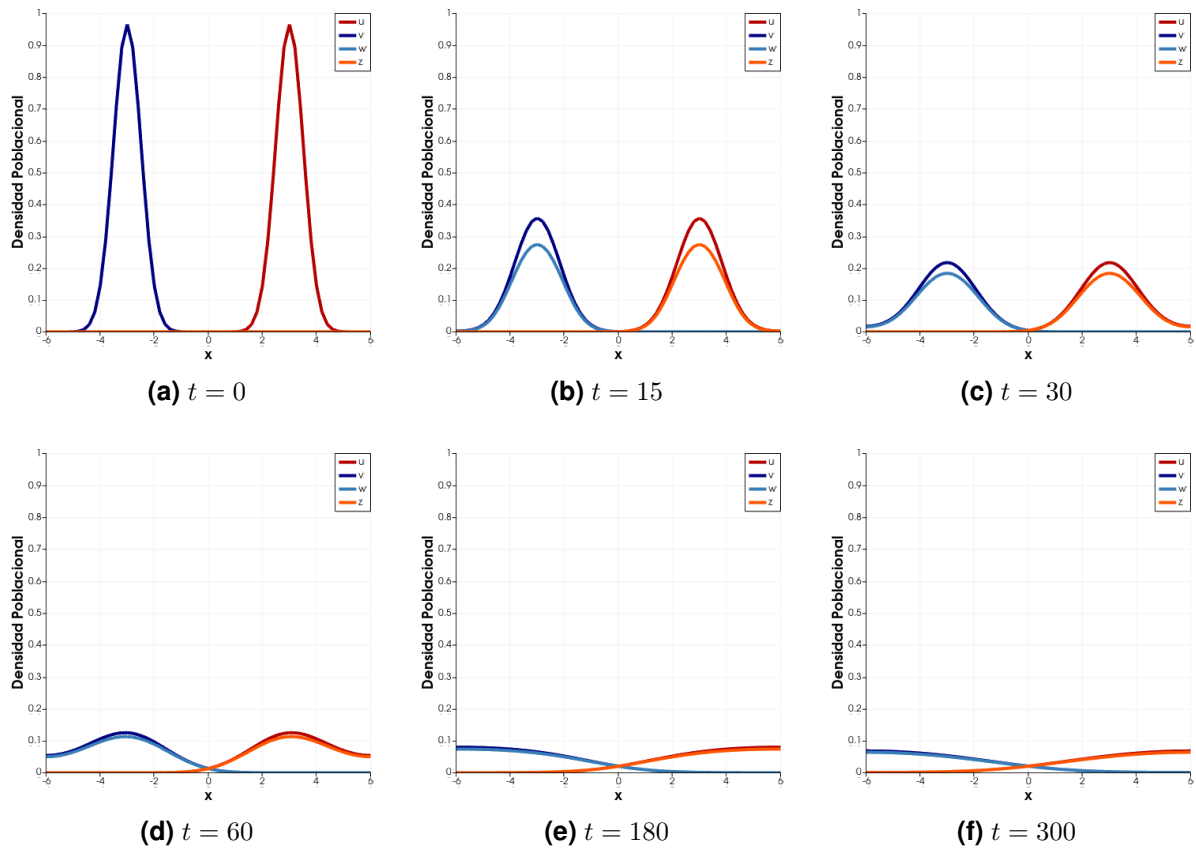


Figura 4.10: Tamaño de las poblaciones de pandillas u, v y la cantidad de sus graffitis correspondientes z y w , a lo largo de la línea $y = x$ en diferentes instantes de tiempo, para el caso: $D_u = D_v = 0,03$, $\chi_u = \chi_v = 0,3$ y $\Delta t = 0,3$.

BIBLIOGRAFÍA

Adams, K. y A. Winter. "Gang graffiti as a discourse genre". En: *Journal of Sociolinguistics* 1.3 (1997), págs. 337-360 (vid. pág. 8).

Alsenafi, A. y A. B. Barbaro. "A convection-diffusion model for gang territoriality". En: *Phys. Stat. Mech. Its Appl.* 510 (2018), págs. 765-786 (vid. págs. 8, 9).

— "A multispecies cross-diffusion model for territorial development". En: *Mathematics* 9.12 (2021), pág. 1428 (vid. pág. 9).

Barbaro, A. B. et al. "Analysis of a cross-diffusion model for rival gangs interaction in a city". En: *Commun. Math. Sci.* 19.8 (2021), págs. 2139-2175 (vid. pág. 9).

Barbaro, A. B. T., L. Chayes y M. R. D'Orsogna. "Territorial developments based on graffiti: A statistical mechanics approach". En: *Physica A* 392.1 (2013), págs. 252-270 (vid. pág. 9).

Brenner, S.C. y L.R. Scott. "The mathematical theory of finite element methods". En: *Springer* (2011) (vid. págs. 18, 19).

Brezis, H. "Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations". En: *Springer* (2011) (vid. pág. 16).

Brown, W. K. "Graffiti, Identity and the Delinquent Gang". En: *International Journal of Offender and Comparative Criminology* 22.1 (1978), págs. 46-48 (vid. pág. 8).

Fontelos, M. A., A. Friedman y B. Hu. "Mathematical Analysis of a Model for the Initiation of Angiogenesis". En: *SIAM J. Math. Anal.* 33.6 (2002), págs. 1330-1355 (vid. pág. 23).

Friedman, A. y J. Tellos. "Stability of solutions of chemotaxis equations in reinforced random walks". En: *J. Math. Anal. Appl.* 272.1 (2002), págs. 138-163 (vid. pág. 23).

Fuest, M. "Blow-up profiles in quasilinear fully parabolic Keller-Segel systems". En: *Nonlinearity* 33.5 (2020), págs. 2306-2334 (vid. pág. 16).

Fuest, M. y S. Heydari. "A cross-diffusion system modeling rivaling gangs: global existence of bounded solutions and FCT stabilization for numerical simulation". En: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 34.9 (2024), págs. 1739-1779 (vid. págs. 9-11, 20, 27).

Guillén-González, F. y J. V. Gutiérrez-Santacreu. "From a cell model with active motion to a Hele-Shaw-like system: a numerical approach". En: *Numer. Math.* 143.1 (2019), págs. 107-137 (vid. pág. 19).

Hegemann, R. A. et al. "Geographical influences of an emerging network of gang rivalries". En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 390.21 (2011), págs. 3894-3914 (vid. pág. 9).

Lewis, M. A., K. A. White y J. D. Murray. "Analysis of a model for wolf territories". En: *Journal of Mathematical Biology* 35 (1997), págs. 749-774 (vid. pág. 9).

Ley, D. y R. Cybriwsky. "Urban graffiti as territorial markers". En: *Annals of the Association of American Geographers* 64.4 (1974), págs. 491-505 (vid. pág. 9).

Schenk, H. J., R. M. Callaway y B. E. Mahall. "Spatial root segregation: are plants territorial?" En: *Advances in ecological research* 28 (1999), págs. 145-180 (vid. pág. 9).

Tello, J. I. y D. Wrzosek. "Inter-species competition and chemorepulsion". En: *J. Math. Anal. Appl.* 459 (2018), págs. 1233-1250 (vid. pág. 9).