EXISTENCIA Y CARACTERIZACIÓN DE TOPOLOGÍAS MAXIMALES.

JAVIER JOSÉ MURGAS IBARRA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTDAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2016

EXISTENCIA Y CARACTERIZACIÓN DE TOPOLOGÍAS MAXIMALES.

JAVIER JOSÉ MURGAS IBARRA

Trabajo de grado como requisito para optar al título de:

Matemático

Director:

CARLOS ENRIQUE UZCÁTEGUI AYLWIN
Ph.D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTDAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2016

"Yo, dedicado esencialmente a la docencia, con muchas inquietudes, siempre vivas aunque a veces dormidas, por la investigación-creación, nunca he dejado de ser un estudiante de las matemáticas, y sé muy bien que la vida no me alcanzará para retribuirle a las matemáticas, todo lo que ellas me han dado. Toda la vida."

Rafael Isaacs

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a mis padres, Marlenis y Javier, por toda la ayuda que me han brindado a lo largo de estos años, por todo el esfuerzo que han tenido que hacer para que yo pueda seguir estudiando.

A mi director de tesis Carlos Enrique Uzcátegui por su ameno trato y su importante ayuda en la elaboración de este trabajo.

A los profesores Javier Camargo y Yeinzon Rodriguez por todo lo que contribuyeron en mi formación y lo buenos que han sido conmigo.

Al profesor Rafael Isaacs por su ayuda incondicional y por arrastrarme a este mundo fascinante y extraño que es el mundo de la matemática.

A la profesora Graciela por haberme recibido en su casa por tantos años y haberme tratado como parte de su familia hasta el día de su muerte.

Y por último agradecer por la compañía a todos los amigos que he tenido a lo largo de estos años.

Contenido

Pág

INTRODUCCIÓN **11**

1 PRELIMINARES **1**

1.1 ESPACIOS TOPOLÓGICOS 1

1.2 AXIOMAS DE SEPARACIÓN Y OTRAS NOCIONES TOPOLÓGICAS 2

1.3 EL AXIOMA DE ELECCIÓN 4

1.4 FILTROS E IDEALES 5

2 TOPOLOGÍAS MAXIMALES **8**

2.1 ESPACIOS ULTRADISCONEXOS Y EXTREMADAMENTE DISCONEXOS 11

2.2 ESPACIOS MAXIMAL REGULARES 16

2.3 ESPACIOS IRRESOLUBLES 20

2.4 ESPACIOS NODEC 22

2.5 ESPACIOS PERFECTAMENTE DISCONEXOS 25

2.6 CARACTERIZACIÓN DE LAS TOPOLOGÍAS MAXIMALES 26

2.7 UN ESPACIO REGULAR Y MAXIMAL 28

3 COMPLEJIDAD DE TOPOLOGÍAS NUMERABLES MAXIMALES **33**

3.1 ELEMENTOS DE TEORÍA DESCRIPTIVA DE CONJUNTOS . . . 33

3.2 COMPLEJIDAD DE TOPOLOGÍAS IRRESOLUBLES 36

3.3 COMPLEJIDAD DE TOPOLOGÍAS EXTREMADAMENTE DISCONEXAS 38

3.4 COMPLEJIDAD DE TOPOLOGÍAS NODEC 39

4 CONCLUSIONES **42**

ÍNDICE **43**

REFERENCIAS 44

BIBLIOGRAFÍA 46

RESUMEN

TÍTULO: EXISTENCIA Y CARACTERIZACIÓN DE TOPOLOGÍAS MAXIMALES[1].

AUTOR: JAVIER JOSÉ MURGAS IBARRA.[2]

PALABRAS CLAVES: TOPOLOGÍAS MAXIMALES, ESPACIOS IRRESOLUBLES, ESPACIOS NODEC, ESPACIOS ULTRADISCONEXOS.

DESCRIPCIÓN:

Es posible dotar de varias topologías a un conjunto. La colección de todas las topologías (sin puntos aislados) sobre un conjunto dado forma conjunto ordenado parcialmente por inclusión. Una topología maximal es un elemento maximal de esta colección. Este trabajo consiste principalmente en hacer un estudio de las topologías maximales. También se estudian algunos resultados sobre la complejidad de estas topologías. En el primer capítulo se hace un breve repaso sobre algunos conceptos relacionados con los espacios topológicos, filtros e ideales.

En el segundo capítulo se da una caracterización de las topologías maximales, se prueba que un espacio sin puntos aislados es maximal si y sólo si es extremadamente disconexo, nodec y tal que todo subespacio abierto es irresoluble (se precisarán estos términos más adelante), entre otras equivalencias. Se muestra que una topología con la propiedad de ser maximal en la propiedad de regularidad no necesariamente es maximal. Por último se prueba la existencia de un espacio con topología maximal con la propiedad de regularidad.

En el tercer capítulo presentamos un estudio de la complejidad de las topologías maximales sobre conjuntos numerables y otras topologías relacionadas. Se prueba que las topologías maximales no son analíticas, que los espacios extremadamente disconexos Hausdorff no son analíticos y que los espacios irresolubles T_1 tampoco son analíticos. Por último, se muestra un ejemplo de un espacio nodec boreliano (y por tanto analítico).

[1]Trabajo de grado

[2]Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

ABSTRACT

TITLE: EXISTENCE AND CARACTERIZATION OF MAXIMAL TOPOLOGIES. [3]

AUTOR: JAVIER JOSÉ MURGAS IBARRA. [4]

KEY WORDS: MAXIMAL TOPOLOGIES, IRRESOLVABLE SPACES, NODEC SPACES, ULTRADISCONNECTED SPACES.

DESCRIPTION:

It's possible to provide a set with various topologies. The collection of all topologies (without isolated points) on a given set forms a partially ordered set by inclusion. A maximal topology is a maximal element of this collection. This dissertation consists mainly of a study of the maximal topologies. Some results on the complexity of these topologies are also studied. In the first chapter, we present a brief overview of some concepts related to topological spaces, filters and ideals.

In the second chapter a characterization of the maximal topologies is given, it is proved that a space without isolated points is maximal if and only if it is extremely disconnected, nodec and such that every open subspace is irresolvable (these terms will be specified later), among other equivalences. It is shown that a topology with the property of being maximal in the collection of regular topologies is not necessarily maximal. Finally, we prove the existence of a space regular and maximal.

In the third chapter we present a study of the complexity of the maximal topologies on countable sets and other related topologies. It is proved that the maximal topologies are not analytic, that extremaly disconnected Hausdorff spaces are not analytic and irresolvable spaces T_1 are not analytic. Finally, an example of a Borel (and therefore analytic) nodec space is shown.

[3]Grade work.

[4]School of Mathematics. Faculty of Sciences. Universidad Industrial de Santander. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

INTRODUCCIÓN

Dado un conjunto X y una propiedad R, es posible dotar a X de varias topologías que cumplan la propiedad R. La colección de tales topologías forma un orden parcial dado por la relación de inclusión. Es interesante estudiar los elementos maximales de tales colecciones. Un espacio (X, τ) se dice que es *maximal* si τ es maximal en la colección de topologías sin puntos aislados sobre X. Eric van Douwen [3] mostró que existen topologías maximales y regulares y además mostró que las topologías maximales poseen propiedades topológicas inusuales.

Van Douwen en su caracterización relacionó la maximalidad de las topologías con la conexidad del espacio. Él probó que un espacio es maximal si y sólo si es perfectamente disconexo. Un espacio *perfectamente disconexo* es un espacio en el que ningún punto del espacio es un punto límite de dos conjuntos disjuntos. Equivalentemente, un espacio es maximal si y sólo si los subconjuntos abiertos del espacio son exactamente los conjuntos que no tienen puntos aislados. Asimismo, él probó que X es maximal si y sólo si es *extremadamente disconexo*, *nodec* y todos sus subconjuntos abiertos son *irresolubles* (daremos estas definiciones más adelante). Probar la existencia de espacios maximales con la propiedad de ser T_2 es relativamente sencillo, sin embargo, saber si la propiedad de maximalidad y de regularidad son compatibles es un asunto más delicado. Van Douwen mostró que, en efecto, existen espacios regulares que son maximales .

Dado que estos espacios tienen propiedades bastante inusuales, es interesante preguntarse por la complejidad de estos. En [11], S. Todorčević y C. Uzcátegui estudian la complejidad de estas topologías sobre conjuntos numerables. Para estudiar la complejidad de una topología ellos identifican la topología como un subconjunto del espacio de Cantor 2^ω y así es posible hablar de su complejidad como subconjunto de Cantor (esto se explicará en el capítulo 3). Ellos encuentran que ningún espacio irresoluble es analítico, de modo que los espacios maximales no son analíticos, y construyen un espacio nodec, numerable, regular y analítico.

En este trabajo estudiaremos las topologías maximales. Siguiendo a van Douwen caracterizaremos los espacios maximales demostrando que un espacio sin puntos aislados es maximal si y sólo si es un espacio extremadamente disconexo, nodec, y tal que todo subconjunto abierto es irresoluble. También que estos espacios son exactamente los espacios perfectamente disconexos sin puntos aislados, entre otras equivalencias. Con ayuda de esta caracterización se construirá un espacio regular, numerable y maximal. Observemos que una topología que sea maximal entre la colección de las topologias regulares, no es necesariamente maximal en la colección de todas las topologías.

Posteriormente se estudiará la complejidad de estas topologías en el contexto de la teoría descriptiva de conjuntos. Se enunciarán resultados acerca de la complejidad de las topologías maximales. Se estudiará el estatus de los conceptos nodec, irresoluble y extremadamente disconexo en el caso de espacios métricos.

Capítulo

1

PRELIMINARES

En este capítulo revisaremos algunas conceptos y proposiciones básicas sobre espacios topológicos, filtros, ideales y el axioma de elección. Estos resultados son necesarios para la comprensión del trabajo pero no son exhaustivos. Para una exposición más completa, veáse [7, 9, 14].

1.1 ESPACIOS TOPOLÓGICOS

En esta sección damos unas definiciones muy básicas sobre espacios topológicos.

Definición 1.1. *Sea X un conjunto. Una familia $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una topología en X si satisface las siguientes propiedades:*

1. *$\emptyset$ y X están en τ.*
2. *La unión de cualquier familia de elementos en τ, está en τ.*
3. *la intersección finita de elementos en τ, está en τ.*

El par (X, τ) es llamado un **espacio topológico**. Los elementos de τ son llamados **abiertos** en X, y los subconjuntos de X cuyo complemento está en τ son llamados **cerrados** en X.

Sea A un subconjunto de X. El **interior** de un conjunto A, denotado porA° o $int_X(A)$, está definido por:

$$int_X(A) = \bigcup\{U \subseteq X : U \textit{ es abierto de } X \textit{ y } U \subseteq A\}.$$

Decimos que x es punto interior de A si $x \in A^\circ$.

Se define la **adherencia** de A, denotada por $\overline{A}$ o $adh_X(A)$, de la siguiente manera:

$$adh_X(A) = \bigcap\{F \subseteq X : F \textit{ es cerrado de } X \textit{ y } A \subseteq F\}.$$

Decimos que x es punto adherente de A si $x \in \overline{A}$.

Decimos que $x \in X$ es un punto **límite** (o de **acumulación**) de A, si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Un elemento $x \in A$ es llamado un punto **aislado** de A, si no es un punto de acumulación de A.

Definición 1.2. *Un conjunto es llamado* ***nunca denso*** *si su adherencia tiene interior vacío.*

1.2 AXIOMAS DE SEPARACIÓN Y OTRAS NOCIONES TOPOLÓGICAS

Daremos una serie de definiciones y resultados referentes a los espacios topológicos.

Definición 1.3. *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es T_0 si dados x y y en X con $x \neq y$, existe un conjunto abierto que tiene a un elemento y no al otro.*

Definición 1.4. *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es T_1 si dados x y y en X con $x \neq y$, existen conjuntos abiertos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$, $x \notin V$*

y $y \notin U$.

Teorema 1.5. *Sea X un espacio topológico. X es T_1 si, y sólo si, {x} es cerrado para cada $x \in X$.*

Definición 1.6. *Un espacio X es T_2 o **Hausdorff** si dados x y y con $x \neq y$, existen conjuntos abiertos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Definición 1.7. *Un espacio topológico X es llamado **regular**, si dados un cerrado A en X y un punto $b \notin A$, existen abiertos disjuntos U y V en X tales que $A \subseteq U$ y $b \in V$. Diremos que X es un espacio T_3 si X es regular y T_1.*

Teorema 1.8. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *X es regular*
2. *Dados U abierto y $x \in U$, existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Definición 1.9. *Sea X un espacio topológico no vacío. Diremos que $N \subseteq X$ es una **vecindad** de un punto $x \in X$ si $x \in N^{\circ}$. Se denota por $\mathcal{U}_x$ a la familia de todas las vecindades de x.*

Definición 1.10. *Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Una familia $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{U}_x$ es llamada **base de vecindades** de x si para cualquier $N \in \mathcal{U}_x$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subseteq N$.*

Definición 1.11. *Una familia $\mathcal{B} \subseteq \tau$ es llamada una **base** de τ, si dado $U \in \tau$, existe una subfamilia $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup\{B : B \in \mathcal{Z}\}$.*

Un espacio X se dice **1-numerable** si cada elemento en X admite una base de vecindades numerable. Asimismo, diremos que X es **2-numerable** si el espacio admite una base numerable.

Definición 1.12. *Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es llamada **base de topología** si satisface:*

1. $X = \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$

2. *Si B_1 y B_2 están en $\mathcal{B}$, y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$*

Teorema 1.13. *Sea X un conjunto y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una base de topología. Entonces la colección $\tau_{\mathcal{B}} = \{U \subseteq X :$ para cada $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U\}$ es una topología en X. Diremos que $\tau_{\mathcal{B}}$ es la **topología generada** por $\mathcal{B}$.*

Dado un subconjunto de un espacio topológico X, es posible dar estructura de espacio topológico a este subconjunto relacionada con la topología del espacio X.

Definición 1.14. *Sea $S \subseteq X$. El espacio (S, τ_S), donde $\tau_S = \{U \cap S : U \in \tau\}$, es llamado **subespacio** de X.*

El siguiente teorema muestra cómo se relacionan la adherencia de un conjunto relativa al subespacio y al espacio.

Teorema 1.15. *Sean X un espacio topológico y S un subespacio de X. Entonces, si $A \subseteq S$ se tiene que $cl_S(A) = S \cap cl_X(A)$.*

1.3 EL AXIOMA DE ELECCIÓN

En esta sección introduciremos un axioma de la teoría de conjuntos, conocido como el Axioma de Elección. Este axioma tiene importantes implicaciones en muchas ramas de la matemática. A continuación damos una versión de él.

Definición 1.16. *Sea A un conjunto. Una función de elección para A es una función $r : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ tal que:*

$$\forall B \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}, \quad r(B) \in B$$

Teorema 1.17 (El Axioma de Elección)**.** *Todo conjunto tiene una función de elección.*

Presentamos ahora un resultado equivalente al axioma de elección que es de suma importancia en este trabajo, y en general en muchas ramas de la matemática.

Teorema 1.18 (Lema de Zorn)**.** *Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado tal que todo subconjunto totalmente ordenado (o cadena) de A tiene una cota superior en A. Entonces A tiene al menos un elemento maximal, esto es, existe un $x \in A$ tal que para todo $y \in A$ se tiene $x \nless y$.*

Otra equivalencia muy importante del axioma de elección es la siguiente proposición:

Teorema 1.19 (Teorema del Buen Orden)**.** *Cualquier conjunto A puede ser bien ordenado, esto es, existe una relación de orden sobre A tal que todo subconjunto no vacío de A tiene un elemento mínimo.*

1.4 FILTROS E IDEALES

Estudiaremos ciertas colecciones especiales de conjuntos, a saber los filtros y los ideales. Los filtros y los ideales son una herramienta muy importante en teoría de conjuntos y topología, y serán de mucha utilidad a lo largo de este trabajo.

Definición 1.20. *Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es llamada **filtro**, si verifica las siguientes propiedades:*

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$
2. $\emptyset \notin \mathcal{F}$
3. *Si dados $A, B \in \mathcal{F}$, se tiene que $A \cap B \in \mathcal{F}$*
4. *Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.*

Diremos que $\mathcal{F}$ es un ***ultrafiltro*** *si es maximal en la colección de filtros sobre X ordenados por la relación de inclusión.*

Ejemplo 1.21. *Sea X un conjunto y $a \in X$. La colección $\{A : a \in A\}$ es un ultrafiltro.*

Se dice que un filtro es **no principal** si ningún conjunto finito pertenece a él.

Teorema 1.22. *Un filtro $\mathcal{F}$ sobre X es un ultrafiltro si, y sólo si, para todo $A \subseteq X$ se tiene que $A \in \mathcal{F}$ o $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

El siguiente teorema afirma que los ultrafiltros no principales existen. Este resultado requiere del lema de Zorn.

Teorema 1.23. *Existe un ultrafiltro no principal sobre ω, donde ω denota el conjunto de los números naturales.*

Definición 1.24. *Un* ***ideal*** *$\mathcal{I}$ sobre un conjunto X es una familia de subconjuntos de X, tal que:*

1. *$X \notin \mathcal{I}$.*
2. *Si dados $A, B \in \mathcal{I}$, se tiene que $A \cup B \in \mathcal{I}$.*
3. *Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$, se tiene que $B \in \mathcal{I}$.*

Si $\mathcal{I}$ es maximal en la colección de ideales sobre X ordenados por inclusión, entonces se dice que $\mathcal{I}$ es un ***ideal maximal****.*

Si cada subconjunto finito de X pertenece a $\mathcal{I}$ se dice que $\mathcal{I}$ es ***no principal****.*

Ejemplo 1.25. *Si X es un espacio topológico, el conjunto $\{A \subseteq X : A$ es nunca denso$\}$ es un ideal sobre X. Más aún, si X no tiene puntos aislados y es T_1, se tiene que tal ideal es no principal.*

Teorema 1.26. *Un ideal $\mathcal{I}$ sobre X es maximal si, y sólo si, para todo $A \subseteq X$ se tiene que $A \in \mathcal{I}$ o $X \setminus A \in \mathcal{I}$.*

Teorema 1.27. *Sea X un conjunto. $\mathcal{I}$ es un ideal maximal si, y sólo si, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{I}$ es un ultrafiltro.*

Este último resultado afirma básicamente que los ultrafiltros y los ideales maximales son objetos duales.

Capítulo

$\boxed{2}$

TOPOLOGÍAS MAXIMALES

Dado un conjunto, uno puede considerar la colección de topologías que cumplan cierta propiedad R sobre dicho conjunto. Resulta de mucho interés estudiar los elementos maximales de tales colecciones. En general este tema es muy amplio y se ha estudiado la maximalidad con respecto a muchas propiedades, por ejemplo, en [1]. En este trabajo se estudiarán las topologías que son maximales entre las topologías sin puntos aislados y que cumplan algún axioma de separación. Se debe aclarar que todas las topologías consideradas verifican el axioma de separación T_0. Todos los resultados presentados en este capítulo son del artículo de E.K van Douwen [3], a menos que se indique lo contrario. A continuación definiremos con mayor precisión los términos precedentes y garantizaremos la existencia de tales topologías.

Definición 2.1. *Un espacio topológico (X, τ) se dice que es* ***maximal*** *si τ es maximal en la colección de topologías sin puntos aislados (con el orden dado por la inclusión) sobre X. Además, si $\mathcal{J}$ es un axioma de separación decimos que el espacio es* ***maximal*** *$\mathcal{J}$ si τ es maximal en la colección de topologías sobre X sin puntos aislados que verifiquen $\mathcal{J}$.*

Cabe notar que la condición de no tener puntos aislados es requerida ya que de omitirse se tendría que las topologías maximales son topologías discretas. Por lo pronto mostraremos que tales topologías existen y veremos algunas propiedades generales.

Teorema 2.2. *Las siguientes proposiciones son ciertas:*

a) Existe un espacio maximal regular numerable.

b) Existe un espacio maximal T_2*.*

c) Todo espacio maximal T_2 *es maximal.*

d) Un espacio es maximal si, y sólo si, es maximal T_1*.*

Demostración. a) Existe un espacio regular, T_0, sin puntos aislados y numerable ($\mathbb{Q}$, por ejemplo). Sea $\mathbf{P}$ el conjunto (ordenado por inclusión) de todas las topologías regulares, T_0 y sin puntos aislados sobre un conjunto numerable X. Sea $\mathbf{C}$ una cadena de $\mathbf{P}$. Nótese que $\bigcup \mathbf{C}$ es una base de topología, y la topología generada por ella, llamémosla $\mathcal{J}$, es una topología sin puntos aislados y T_0 (ya que contiene topologías T_0).

Veamos que $\mathcal{J}$ es regular: Sean $A \in \bigcup \mathbf{C}$ y $x \in A$. Existe $\rho \in \mathbf{C}$, tal que $A \in \rho$. Dado que ρ es regular, existe $U \in \rho$ tal que $x \in U \subseteq cl_\rho(U) \subseteq A$. Además, es claro que $cl_\mathcal{J}(U) \subseteq cl_\rho(U)$, por tanto $x \in U \subseteq cl_\mathcal{J}(U) \subseteq A$ y así $\mathcal{J}$ es regular.

Por tanto, por el lema de Zorn, existe un espacio maximal regular numerable. Además, dado que $\mathbb{Q}$ es también T_1, es fácil ver que existe un espacio maximal regular y T_1.

b) Existe un espacio X Hausdorff sin puntos aislados. Sea $\mathbf{P}$ el conjunto (ordenado por inclusión) de todas las topologías Hausdorff sin puntos aislados sobre el conjunto X. Sea $\mathbf{C}$ una cadena de $\mathbf{P}$. $\bigcup \mathbf{C}$ es una base de topología, y la topología generada por ella, llamemosla $\mathcal{J}$, es una topología sin puntos aislados. Dado que $\mathcal{J}$ contiene topologías Hausdorff, ella misma es Hausdorff. Por tanto, por el lema de Zorn, existe un espacio maximal Hausdorff.

c) Sea (X, τ) un espacio maximal T_2, y sea $\rho \supseteq \tau$ una topología sin puntos aislados sobre X. Claramente ρ es T_2, por tanto $\rho = \tau$. Luego, (X, τ) es maximal.

d) $(\Leftarrow)$ Sea (X, τ) un espacio maximal T_1, y sea $\rho \supseteq \tau$ una topología sin puntos aislados sobre X. Claramente ρ es T_1, por tanto $\rho = \tau$. Luego, (X, τ) es maximal.

$(\Rightarrow)$ Sea (X, τ) un espacio maximal. Considere la siguiente colección:

$$\mathcal{B} = \{U \setminus F : \ U \in \tau \text{ y } F \text{ es un subconjunto finito de } X\}. \tag{2.1}$$

Es claro que $\mathcal{B}$ es base de topología. La topología $\tau_{\mathcal{B}}$ generada por $\mathcal{B}$ es T_1 ya que claramente cada conjunto de un sólo elemento es cerrado. Veamos que $\tau_{\mathcal{B}}$ no tiene puntos aislados: Supongamos que a es un punto aislado de $(X, \tau_{\mathcal{B}})$, entonces existen $U \in \tau$ y $F \subseteq X$ finito, tal que $\{a\} = U \setminus F$. Por tanto, U es finito. Pero dado que τ es T_0 y U un abierto finito de τ, se tiene que τ tiene puntos aislados. Contradicción.

Claramente $\tau \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$, por tanto $\tau = \tau_{\mathcal{B}}$, y así τ es T_1. $\square$

Tenemos de los incisos $b)$ y $c)$ del Teorema 2.2 que existe un espacio Hausdorff y maximal. El punto principal para conseguir este resultado fue que dada una topología Hausdorff y una topología más fina, siempre se obtiene que la topología más fina es también Hausdorff. Sin embargo, con el axioma de regularidad esta propiedad no se tiene, de modo que no se puede concluir tan fácilmente la existencia de un espacio regular y maximal. Veremos en el Teorema 2.33 que tales espacios sí existen, y a su vez veremos en el Teorema 2.16 que existen espacios maximal regulares que no son maximales.

Observación 1: En un espacio T_0 sin puntos aislados cada conjunto abierto no vacío tiene infinitos elementos [4, p. 314] . Por tanto, en este trabajo todos los espacios topológicos tienen cardinal infinito.

Observación 2: Si X es un conjunto de cardinal $\aleph_\alpha$ dotado con la topología discreta, se tiene que $X \times \mathbb{Q}$ es un espacio topológico T_2 sin puntos aislados y de cardinal $\aleph_\alpha$. Teniendo en cuenta esto, es posible usar la misma prueba del Teorema 2.2 b) para concluir la existencia de espacios maximales de cualquier cardinal infinito.

2.1 ESPACIOS ULTRADISCONEXOS Y EXTREMADAMENTE DISCONEXOS

En esta sección introduciremos ciertos espacios que serán útiles para caracterizar las topologías maximales. Estudiaremos los espacios ultradisconexos y en alguna medida los espacios extremadamente disconexos. Veremos en la próxima sección que los espacios ultradisconexos están muy relacionados con las topologías que son maximales en la propiedad de regularidad.

Definición 2.3. *Un espacio X es llamado* ***ultradisconexo*** *si no tiene puntos aislados y si para cualesquiera $A, B \subseteq X$ disjuntos sin puntos aislados, se tiene que $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son disjuntos.*

Antes de empezar a caracterizar a los espacios ultradisconexos, haremos notar los tres siguientes resultados elementales pero importantes acerca de los subespacios de espacios sin punto aislados:

Lema 2.4. *Sea X un espacio sin puntos aislados. Se tiene que:*

1. *Todo subconjunto abierto de X es denso en sí mismo, esto es, no tiene puntos aislados.*
2. *Si $A \subseteq X$ es denso en sí mismo, entonces $\overline{A}$ también lo es.*
3. *Si $A \subseteq X$ es denso en sí mismo y $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, entonces B es también denso en sí mismo.*

La prueba de estos resultados es trivial.

Teorema 2.5. *Sea X un espacio topológico sin puntos aislados. Son equivalentes:*

a) X *es ultradisconexo.*

b) *Un subconjunto A de X es abierto y cerrado si, y sólo si, A y A^c son densos en sí mismos.*

Demostración. $a) \Rightarrow b)$

$(\Rightarrow)$ Sea $A \subseteq X$ abierto y cerrado. Como A es abierto, A no tiene puntos aislados (Lema 2.4) ; y como A es cerrado, se da que A^c es abierto, de modo que A^c tampoco tiene puntos aislados. Nótese que sólo se usó el hecho de que X no tiene puntos aislados.

$(\Leftarrow)$ Sea $A \subseteq X$ tal que A y A^c son densos en sí mismos. Como $A \cap A^c = \emptyset$, por ser X ultradisconexo se tiene que $\overline{A} \cap \overline{A^c} = \emptyset$. De aquí es claro que $A = \overline{A}$ y $A^c = \overline{A^c}$. Luego, A es abierto y cerrado.

$b) \Rightarrow a)$ Sean A y B conjuntos densos en sí mismos disjuntos. Considere los siguientes conjuntos:

$$A^{\#} = \overline{A} \setminus B \qquad\qquad B^{\#} = \overline{B} \setminus A^{\#}. \tag{2.2}$$

Note que:

$$A^{\#} \cap B^{\#} = \emptyset. \tag{2.3}$$

De (2.2) y (2.3) se tiene que:

$$A \subseteq A^{\#} \subseteq \overline{A} \qquad\qquad B \subseteq B^{\#} \subseteq \overline{B}. \tag{2.4}$$

Por último observe que:

$$A^{\#} \cup B^{\#} = \overline{A \cup B}. \tag{2.5}$$

De (2.5) y (2.3) es claro que $A^{\#} = \overline{A \cup B} \backslash B^{\#}$, o equivalentemente :

$$A^{\#c} = \left(\overline{A \cup B}\right)^c \cup B^{\#} \tag{2.6}$$

De (2.4) y el Lema 2.4,3 se tiene que $A^{\#}$ y $B^{\#}$ son densos en sí mismos. Por otro lado, de (2.6) se tiene que $A^{\#c}$ es denso en sí mismo, ya que $\left(\overline{A \cup B}\right)^c$ y $B^{\#}$ lo son también. Análogamente se puede ver que $B^{\#c}$ es denso en sí mismo.

Luego, como $A^{\#}$ y $B^{\#}$ son conjuntos sin puntos aislados tales que sus complementos tampoco tienen puntos aislados, se sigue por $b)$, que $A^{\#}$ y $B^{\#}$ son cerrados, pero $A \subseteq A^{\#} \subseteq \overline{A}$ y $B \subseteq B^{\#} \subseteq \overline{B}$, de modo que $A^{\#} = \overline{A}$ y $B^{\#} = \overline{B}$. Por tanto, por (2.3), se obtiene que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

□

Definición 2.6. *Un espacio X es llamado **extremadamente disconexo** si la adherencia de todo subconjunto abierto de X es un conjunto abierto.*

Ejemplo 2.7. *Si X es un conjunto infinto, entonces (X, τ_{cof}), en donde $\tau_{cof} = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ es finito}\}$, es un espacio sin puntos aislados, T_1 y extremadamente disconexo. Es bien conocido que (X, τ_{cof}) es un espacio conexo, lo que contrasta mucho con el nombre que se le ha dado a la propiedad estudiada. Es fácil verficar que si un espacio extremadamente disconexo sin puntos aislados es T_2, el espacio es disconexo. Mostraremos un ejemplo de espacio extremadamente disconexo T_2 sin puntos aislados en la siguiente sección, y en el próximo capítulo la complejidad de estos.*

El siguiente resultado es una caracterización sencilla de los espacios extremadamente disconexos. Fue enunciada por Hewitt. Nosotros damos una prueba ligeramente distinta.

Lema 2.8. *[4, p. 326] Sea X un espacio topológico. X es extremadamente disconexo si, y sólo si, para todo par de subconjuntos abiertos disjuntos, se tiene que sus adherencias son también disjuntas.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sea X extremadamente disconexo. Sean A, B subconjuntos abiertos disjuntos. Se tiene que $A \subseteq X \setminus B$. Dado que $X \setminus B$ es cerrado, se tiene que $\overline{A} \subseteq X \setminus B$. De esta última expresión se tiene que $B \subseteq X \setminus \overline{A}$. $X \setminus \overline{A}$ es cerrado por ser X extremadamente disconexo. Así, $\overline{B} \subseteq X \setminus \overline{A}$. Por tanto $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Sea $A \subseteq X$ un conjunto abierto. Se tiene que $(X \setminus \overline{A}) \cap A = \emptyset$, luego, por hipótesis, se da que $\overline{X \setminus \overline{A}} \cap \overline{A} = \emptyset$. Por tanto $X \setminus \overline{A}$ es cerrado.

□

Teorema 2.9. *Sea X un espacio ultradisconexo. Entonces:*

a) Cada subespacio cerrado sin puntos aislados de X es abierto.

b) X es extremadamente disconexo.

c) Cada subespacio sin puntos aislados de X es ultradisconexo.

Demostración. a) Sea A un subespacio cerrado sin puntos aislados de X. $X \setminus A$ es abierto, luego por el Lema 2.4, $X \setminus A$ no tiene puntos aislados. Del Teorema 2.5 se sigue que A es abierto.

b) Sea A subconjunto abierto de X. Por el Lema 2.4 se tiene que $\overline{A}$, al ser la adherencia de un conjunto sin puntos aislados, no tiene puntos aislados. Además, $X \setminus \overline{A}$, al ser abierto, tampoco tiene puntos aislados. Luego, por el teorema 2.5 se tiene que $\overline{A}$ es cerrado.

b) Sea Y un subespacio de X sin puntos aislados. Sean A, B subconjuntos de Y sin puntos aislados (en Y) tales que $A \cap B = \emptyset$. Note que si A y B no tienen puntos aislados en Y, tampoco tienen puntos aislados en X. Por otro lado, es sabido que:

$$cl_Y(A) = cl_X(A) \cap Y \qquad cl_Y(B) = cl_X(B) \cap Y. \tag{2.7}$$

Dado que A y B no tienen puntos aislados en X y X es ultradisconexo, se tiene que $cl_X(A) \cap cl_X(B) = \emptyset$. De donde es claro, por (2.7), que $cl_Y(A) \cap cl_Y(B) = \emptyset$.

□

El siguiente teorema no lo encontramos en la literatura, así que proporcionamos una prueba de él.

Teorema 2.10. *Sea X un espacio T_2, 1-numerable y extremadamente disconexo. Entonces, X es discreto.*

Demostración. Supongamos que X tiene un punto de acumulación x. Existe una sucesión $(x_n)_{n\in\omega} \subseteq X \setminus \{x\}$ tal que $x_n \to x$. Supongamos sin pérdida de generalidad que (x_n) es inyectiva. Debido a que el espacio es T_2 existe una familia $\{B_n\}_{n\in\omega}$ de abiertos disjuntos dos a dos tales que $x_n \in B_n$ para cada $n \in \omega$. Debido a que el espacio es extremadamente disconexo se tiene que $\overline{B_m} \cap \overline{B_n} = \emptyset$. Sean $B_1 = \bigcup_{n\in\omega} \overline{B_{2n+1}}$ y $B_2 = \bigcup_{n\in\omega} \overline{B_{2n}}$. Dado que X es extremadamente disconexo, se tiene que B_1 y B_2 son abiertos y en consecuencia $\overline{B_1}$ y $\overline{B_2}$ también lo son. Por otro lado, $\overline{B_1} = B_1 \cup \{x\}$ y $\overline{B_2} = B_2 \cup \{x\}$. Por tanto $\{x\} = \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$ es un abierto. Contradicción. □

De este resultado se deducen fácilmente las dos siguientes proposiciones:

Corolario 2.11. *Todo espacio métrico extremadamente disconexo es discreto.*

Corolario 2.12. *Ningún espacio métrico es ultradisconexo.*

Hasta el momento no hemos presentado ningún ejemplo de algún espacio que sea ultradisconexo. De hecho, hemos mostrado que ningún espacio métrico no discreto es extremadamente disconexo (y en consecuencia tampoco ultradisconexo). A continuación veremos que, en efecto, los espacios ultradisconexos sí existen.

Teorema 2.13. *Todo espacio maximal T_i es ultradisconexo, para $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio maximal T_i $(i = 1, 2, 3)$ y sea $A \subseteq X$ un conjunto sin puntos aislados tal que su complemento A^c tampoco tiene puntos aislados. Se quiere ver que A es abierto y cerrado, para concluir por el teorema 2.5 que X es ultradisconexo. Denotemos por τ_A y por τ_{A^c} a las topologías de A y A^c como subespacios de (X, τ), respectivamente.

Considérese la colección $\rho = \{U \cup V : U \in \tau_A,\ V \in \tau_{A^c}\}$.

Es fácil verificar que ρ es una topología T_i sobre X. Además, es claro que $\rho \supseteq \tau$. Luego, $\rho = \tau$. Por tanto, A y A^c, al ser abiertos de ρ, son también abiertos de τ.

$\square$

2.2 ESPACIOS MAXIMAL REGULARES

En esta sección veremos que los espacios ultradisconexos regulares son exactamtente los espacios que son maximales en la colección de topologías regulares. Luego, mostraremos que existen espacios que son maximales en la colección de topologías regulares, pero no maximales en la colección de todas las topologías.

Caracterizaremos los espacios maximal regulares en términos de los espacios ultradisconexos.

Teorema 2.14. *Un espacio es maximal regular si, y sólo si, es regular y ultradisconexo.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Se sigue de la prueba del Teorema 2.13.

$(\Leftarrow)$ Sea (X, τ) un espacio regular y ultradisconexo, y sea $\mathcal{J} \supseteq \tau$ una topología regular sin puntos aislados sobre X.

Sean $A \in \mathcal{J}$ y $x \in A$. Dado que $\mathcal{J}$ es regular, existe un $U \in \mathcal{J}$ tal que $x \in U \subseteq cl_{\mathcal{J}}(U) \subseteq A$. Como $\mathcal{J}$ no tiene puntos aislados, se tiene que $cl_{\mathcal{J}}(U)$ y $X \setminus cl_{\mathcal{J}}(U)$ son densos en sí mismos en $\mathcal{J}$. Dado que $\tau \subseteq \mathcal{J}$, se tiene que $cl_{\mathcal{J}}(U)$ y $X \setminus cl_{\mathcal{J}}(U)$ también son densos en sí mismos en τ. Por tanto, por el Teorema 2.5, se tiene que $cl_{\mathcal{J}}(U)$ es abierto. Luego, $A \in \tau$.

$\square$

Corolario 2.15. *Todo espacio maximal regular es extremadamente disconexo, y en consecuencia cero-dimensional (esto es, tiene una base de conjuntos abiertos y cerrados)*

Demostración. Sea X maximal regular. De los Teoremas 2.14 y 2.9 b) se sigue que X es extremadamente disconexo.

Veamos que X tiene una base de abiertos y cerrados. Sea $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ una base de X. Considérese la colección $\mathcal{B}' = \{\overline{B_i}\}_{i \in I}$. Sea $U \subseteq X$ y $x \in U$. Debido a que X es regular, se tiene que existe un $B_i \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B_i \subseteq \overline{B_i} \subseteq U$. Como X es extremadamente disconexo, $\overline{B_i}$ es abierto. Por tanto, $\mathcal{B}'$ es una base de conjuntos abiertos y cerrados. □

A continuación mostraremos que existen espacios que son maximales con respecto a las topologías regulares, pero que no son maximales. Recordamos que con los axiomas de separación T_1 y T_2 esto no ocurre, por esta razón es sencillo garantizar la existencia de espacios Hausdorff maximales.

Teorema 2.16. *Existe un espacio maximal regular que no es maximal.*

Demostración. Por el Teorema 2.2 a) existe un espacio M maximal regular y T_1. Sea p un ultrafiltro no principal de ω y q algún elemento de M. Por el Corolario 2.15, se tiene que M tiene una base de conjuntos abiertos y cerrados $\mathcal{U} = \{U : U \in \mathcal{U}\}$.

Considere el espacio $X = (\omega \times M) \cup \{p\}$ con la topología generada por la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, donde:

$$\mathcal{B}_1 = \{\{n\} \times U : n \in \omega, U \in \mathcal{U}\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \left(\bigcup_{n \in K} \{n\} \times U_n \right) \cup \{p\} : n \in \omega, U_n \in \mathcal{U}, q \in U_n,\ K \in p \right\}$$

Es claro que $\mathcal{B}$ sí es una base de topología, y que además la topología generada por ella, llamémosla τ, no tiene puntos aislados.

El esquema de la prueba es el siguiente: Veremos que (X,τ) es regular y posteriormente veremos que es ultradisconexo para concluir por el Teorema 2.14 que τ es maximal regular. Por último construiremos una topología regular sin puntos aislados más fina que τ y concluiremos que τ no es maximal.

Veamos primero que τ regular. Es suficiente ver que τ es cero-dimensional.

Sea $\{m\}\times U$ un básico en $\mathcal{B}_1$. Se tiene que:

$$X\setminus(\{m\}\times U)=(\{m\}\times(M\setminus U))\cup\left(\bigcup_{n\in\omega\setminus\{m\}}\{n\}\times M\right)\cup\{p\}. \tag{2.8}$$

Como p es un ultrafiltro no principal y $\omega\setminus\{m\}$ un conjunto cofinito, se tiene que $\omega\setminus\{m\}\in p$. Y dado que U es cerrado de M, se tiene que $M\setminus U$ es abierto de M. Así $X\setminus(\{m\}\times U)$ es abierto.

Sea $\left(\bigcup_{n\in K}\{n\}\times U_n\right)\cup\{p\}$ un básico en $\mathcal{B}_2$. Se tiene que:

$$X\setminus\left(\left(\bigcup_{n\in K}\{n\}\times U_n\right)\cup\{p\}\right)=\left(\bigcup_{n\in K^c}\{n\}\times M\right)\cup\left(\bigcup_{n\in K}\{n\}\times(M\setminus U_n)\right)$$

es claramente abierto. Luego, τ es regular.

Veamos que X es ultradisconexo:

Sea $A\subseteq X$ tal que él y su complemento $X\setminus A$ son densos en sí mismos. Considere el conjunto $A_n=\{x\in M:(n,x)\in A\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $p\in A$.

Es fácil ver que, el hecho de que A no tiene puntos aislados implica que para cualquier $n\in\omega$, A_n tampoco tiene puntos aislados. Asimismo, $M\setminus A_n$ no tiene puntos aislados ya que $X \setminus A$ tampoco los tiene. De esto concluimos por el teorema 2.14 que A_n es abierto y cerrado de M.

Veamos que $X \setminus A$ es abierto. Sea $(n,x) \notin A$, de modo que $x \notin A_n$. De esto es claro que $(n,x) \in \{n\} \times (M \setminus A_n) \subseteq X \setminus A$. Así, $X \setminus A$ es abierto al ser $M \setminus A_n$ abierto de M.

Necesitamos ver que A es abierto. Para esto consideremos a el conjunto $L = \{n \in \omega : q \in A_n\}$. Afirmamos que $L \in p$.

Supongamos que $L \notin p$. Dado que p es ultrafiltro, se tiene que $L^c = \{n \in \omega : q \in M \setminus A_n\} \in p$. Tenemos entonces que $\{p\} \cup \left(\bigcup_{n \in L^c} \{n\} \times (M \setminus A_n)\right)$ es un abierto de X contenido en $\{p\} \cup (X \setminus A)$. Por tanto, p es un punto aislado de A. Contradicción.

Sea $y \in A$:

(.) Caso (i) $y = (n,x)$. Es claro que $x \in A_n$, por tanto $y = (n,x) \in \{n\} \times A_n \subseteq A$, con A_n abierto.

(..) Caso (ii) $y = p$. Se tiene que $q \in A_n$ para todo $n \in L$. De esto es claro que $\left(\bigcup_{n \in L} \{n\} \times A_n\right) \cup \{p\}$ es un abierto que contiene a $\{p\}$ y está contenido en A. Luego, A es abierto.

Con esto concluimos, por el Teorema 2.14, que X es maximal regular.

Por último, consideremos la mínima topología sobre X que contiene a τ y tal que $\omega \times \{q\}$ es cerrado, esto es, consideremos a $\rho = \tau \cup \{A \setminus (\omega \times \{q\}) : A \in \tau\}$. Esta topología es más fina que τ y no tiene puntos aislados. Luego, τ no es maximal.

$\square$

2.3 ESPACIOS IRRESOLUBLES

En esta sección estudiamos espacios que no pueden ser "resueltos" en subconjuntos densos complementarios. Veremos que los espacios que sí pueden resolverse en subconjuntos densos conforman una familia muy amplia de espacios topológicos.

Definición 2.17. *Un espacio es llamado* ***irresoluble*** *si no tiene puntos aislados y ningún subconjunto denso tiene complemento denso. En caso de que exista algún conjunto denso con complemento denso, se dirá que el espacio es* ***resoluble****. Un espacio es llamado* ***hereditariamente irresoluble*** *si no tiene puntos aislados y si todo subconjunto sin puntos aislados es irresoluble (con su topología relativa).*

El siguiente teorema fue probado por Hewitt. Nosotros completamos los detalles.

Teorema 2.18. *[4, p. 328] Ningún espacio métrico es irresoluble.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico sin puntos aislados. Sea $X = \{p_1, p_2, ..., p_\alpha, ...\} = \{p_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{O}}$ una enumeración transfinita de X, en donde α va hasta el primer ordinal con cardinal $|X|$. Sea $A_3 = \{p_1\}$ y $B_3 = \{p_2\}$. Sean $\alpha \in \mathcal{O}$ y $A_\alpha, B_\alpha \subseteq X$ disjuntos tales que para cada $\beta < \alpha$, p_β pertenece a A_α o a B_α. Entonces, si $d(p_\alpha, A_\alpha) > d(p_\alpha, B_\alpha)$, definimos $A_{\alpha+1} = A_\alpha$ y $B_{\alpha+1} = B_\alpha \cup \{p_\alpha\}$, en caso contrario, definimos $A_{\alpha+1} = A_\alpha \cup \{p_\alpha\}$ y $B_{\alpha+1} = B_\alpha$. Nótese que en ambos casos $A_{\alpha+1} \cap B_{\alpha+1} = \emptyset$. (En esta prueba usamos de forma intuitiva el Teorema de Recursión transfinita, para más detalles acerca de este método veáse [7]).

Sean $A = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{O}} A_\alpha$ y $B = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{O}} B_\alpha$. Es fácil ver que $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$. Veamos que A es denso. Sean $p_\alpha \in X$ y $B(p_\alpha, r)$ una bola de radio $r > 0$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $p_\alpha \in B$. Sea $p_\gamma \neq p_\alpha$ tal que $d(p_\alpha, p_\gamma) \leq \frac{r}{3}$. Se puede asumir también sin pérdida de generalidad que $p_\gamma \in B$. Si $\gamma > \alpha$ entonces $p_\alpha \in B_\gamma$, por tanto $d(p_\gamma, A_\gamma) \leq d(p_\gamma, B_\gamma) \leq \frac{r}{3}$. Luego, $d(p_\alpha, A_\gamma) \leq d(p_\alpha, p_\gamma) + d(p_\gamma, A_\gamma) \leq \frac{2r}{3} < r$. Por lo tanto, existe un elemento en

$A_\gamma \subseteq A$ que está en la bola $B(p_\alpha, r)$. Si $\alpha > \gamma$ se obtiene el mismo resultado análogamente. Así, A es denso. Análogamente B es denso. $\square$

También se tiene que los espacios 2-numerables y los espacios localmente compactos no son irresolubles, de modo que los espacios sin la propiedad de irresolubilidad comprenden una familia muy grande de espacios. A continuación probaremos que ningún espacio 2-numerable es irresoluble, este resultado es un corolario de la prueba del Teorema 42 del artículo de Hewitt [4].

Teorema 2.19. *Sea X un espacio 2-numerable sin puntos aislados. Entonces X no es irresoluble.*

Demostración. Sea $\{U_n\}_{n\in\omega}$ una base de X. Dado que X es T_0 y no tiene puntos aislados, cada U_n tiene infinitos puntos.

Sean $A_1 = \{x_1\}$ y $B_1 = \{y_1\}$, en donde $x_1, y_1 \in U_1$ y $x_1 \neq y_1$. Sea $n \in \omega$. Supongamos que se han definido A_m y B_m para $m < n$. Definimos $A_n = \bigcup_{m<n} A_m \cup \{x_n\}$ y $B_n = \bigcup_{m<n} B_m \cup \{y_n\}$, donde $x_n, y_n \in U_n$, $x_n \neq y_m$ y $y_n \neq x_m$ para todo $m \leq n$. Sea $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ y $B = \bigcup_{n\in\omega} B_n$. Por la forma en que se construyeron, es fácil ver que A y B son disjuntos. Y además, son densos, ya que todo conjunto abierto intercepta a ambos. $\square$

Teorema 2.20. *[2] Ningún espacio localmente compacto es irresoluble.*

Hemos visto ejemplos de espacios que no son irresolubles, ahora mostraremos espacios que sí lo son.

Teorema 2.21. *Los espacios ultradisconexos T_1 son hereditariamente irresolubles.*

Demostración. Sea X ultradisconexo T_1. Por el Teorema 2.9 es suficiente probar que X es irresoluble. Supongamos que X es resoluble. Existen dos densos D_1, D_2 disjuntos. Dado que X es T_1 se tiene que D_1 y D_2 son densos en sí mismos, luego, por ser X irresoluble se tiene que $\overline{D_1} \cap \overline{D_2} = \emptyset$. Contradicción. $\square$

Por último mostraremos el siguiente teorema que afirma que los espacios irresolubles en los que la irresolubilidad se hereda a los subespacios abiertos son los espacios en los que para cualquier conjunto tener interior vacío equivale a ser nunca denso.

Teorema 2.22. *Para un espacio X sin puntos aislados las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) *Todo subconjunto abierto de X es irresoluble.*

b) $(\forall A \subseteq X)\,[A^\circ = \emptyset \Rightarrow A$ *es nunca denso*$]$.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Sea $A \subseteq X$ tal que $A^\circ = \emptyset$ y sea $U \subseteq X$ abierto. Tenemos que $U \setminus A$ es denso en U (ya que si existiese un abierto no vacío de U contenido en A, por ser U abierto, se tendría que ese mismo abierto de U, también es abierto de X). Luego, por $a)$, se tiene que A no es denso en U, o equivalentemente, $\overline{A} \not\supseteq U$. Dado que U es un abierto no vacío arbitrario, se tiene que $\left(\overline{A}\right)^\circ = \emptyset$.

$b) \Rightarrow a)$ Sean Y subespacio abierto de X y $A \subseteq Y$ denso en Y. Por $b)$ se tiene que $A^\circ \neq \emptyset$, esto es, existe un $U \subseteq A$ no vacío abierto de X. Luego, $Y \setminus A$ no es denso en Y, ya que U (que también es abierto de Y) no intersecta a $Y \setminus A$.

□

2.4 ESPACIOS NODEC

Los espacios nodec son los espacios en los que todos sus subconjuntos nunca densos son cerrados (y discretos). Veremos que los espacios métricos sin puntos aislados no pertenecen a esta familia, enunciaremos un teorema que permite construir estos espacios a partir de cualquier espacio topológico y por último probaremos que los espacios maximales son nodec.

Definición 2.23. *Un espacio X es llamado* ***nodec*** *si todo subconjunto nunca* *denso es cerrado.*

Lema 2.24. *Sea X un espacio topológico. Un subconjunto de X es cerrado y discreto si, y sólo si, todos sus subconjuntos son cerrados.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sean $D \subseteq X$ cerrado y discreto, y $A \subseteq D$. Por ser D discreto, se tiene que A es cerrado de D. Por tanto, $A = cl_D(A) = cl_X(A) \cap D$ es cerrado de X, al ser D cerrado.

$(\Leftarrow)$ Sea D subconjunto de X tal que para todo $A \subseteq D$ se tiene que A es cerrado. Claramente D es cerrado.

Sea $a \in D$. Tenemos que $D \setminus \{a\}$ es cerrado, luego, $(D \setminus \{a\})^c = D^c \cup \{a\}$ es abierto. Así, $\{a\} = (D^c \cup \{a\}) \cap D$ es abierto de D.

$\square$

Teorema 2.25. *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:*

a) X es nodec.

b) Todo subconjunto nunca denso es cerrado y discreto.

Demostración.

$a) \Rightarrow b)$ Sea $A \subseteq X$ un conjunto nunca denso. Es claro que todo subconjunto de A es también nunca denso, luego, por $a)$ se tiene que cada subconjunto de A es cerrado, y así por el lema 2.24, A es cerrado y discreto.

$b) \Rightarrow a)$ Es claro de la definición de espacio nodec.

$\square$

A continuación nosotros damos una prueba de que no hay espacios métricos sin puntos aislados que sean nodec.

Teorema 2.26. *Sea X un espacio métrico sin puntos aislados. Entonces, X no es nodec.*

Demostración. Sea $x \in X$. $X \setminus \{x\}$ no es cerrado. Luego, $x \in \overline{X \setminus \{x\}}$. Por tanto existe una sucesión $(x_n)_{n\in\omega} \subseteq X \setminus \{x\}$ tal que $x_n \to x$. Es fácil verificar que $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es nunca denso, y además es claro que $x \in \overline{\{x_n\}_{n\in\omega}} \setminus \{x_n\}_{n\in\omega}$. Luego, X no es nodec. □

Es posible exhibir ejemplos de topologías nodec. Sea (X, τ) un espacio topológico, se denota por $nwd(\tau)$ la colección de subconjuntos nunca densos de (X, τ).

Considere la colección:

$$\tau^\alpha = \{V \setminus N : V \in \tau \text{ y } N \in nwd(\tau)\}.$$

El siguiente teorema indica como se pueden construir espacios nodec, a partir de espacios que no lo son.

Teorema 2.27. *[6] Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes proposiciones son ciertas:*

1. $V \in \tau^\alpha$ *si, y sólo si,* $V \subseteq int_\tau (cl_\tau (int_\tau V))$.
2. (X, τ^α) *es un espacio nodec.*

Cabe señalar que τ^α es regular sólo si τ es nodec, en tal caso se da que $\tau^\alpha = \tau$, de modo que no es posible obtener una topología nodec regular usando directamente este teorema [11]. En lo que queda de la sección demostraremos que los espacios maximales son nodec.

Teorema 2.28. *Sea X maximal. Entonces, X es nodec.*

Demostración. Sea $A \subseteq X$ nunca denso.

Considerese la colección $\rho = \{U \cup (V \setminus A) : U, V \in \tau\}$. Es fácil verificar que ρ es una topología, y además es claro que $\rho \supseteq \tau$, lo que además implica que ρ es T_0. Veamos que ρ no tiene puntos aislados:

Sea $x \in X$. Dado que τ no tiene puntos aislados, $\{x\} \neq U$ para todo $U \in \tau$. Por otro lado, sea $V \in \tau$. Se tiene que $V \setminus \{x\}$ es abierto ya que $\{x\}$ es cerrado. Como $A^\circ = \emptyset$, se da que $V \setminus \{x\} \nsubseteq A$, o equivalentemente, $(V \setminus \{x\}) \setminus A \neq \emptyset$. Así, $V \setminus A \neq \{x\}$, y por tanto ρ no tiene puntos aislados.

Se sigue de la maximalidad de τ que $\rho = \tau$. Por tanto, al perteencer $X \setminus A$ a τ, se tiene que A es cerrado.

□

2.5 ESPACIOS PERFECTAMENTE DISCONEXOS

En esta sección introduciremos un concepto que será esencialmente equivalente al de espacio maximal.

Definición 2.29. *Un espacio X es llamado* ***perfectamente disconexo*** *si ningún punto de X es un punto límite de subconjutos disjuntos de X.*

A continuación daremos una caracterización de los espacios perfectamente disconexos que será de mucha utilidad para caracterizar las topología maximales.

Teorema 2.30. *Sea X un espacio topológico sin puntos aislados. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) X *es perfectamente disconexo.*

b) $(\forall x \in X) \left[\left\{ A \subseteq X : x \in \overline{A \setminus \{x\}} \right\} \text{ es un ultrafiltro} \right]$.

c) $(\forall A \subseteq X) \, (\forall x \in A) \left[x \in \overline{A \setminus \{x\}} \Rightarrow x \in A^\circ \right]$.

Demostración.

$a) \Rightarrow b)$ Sea $x \in X$. Considerese el conjunto:

$$\mathcal{J} = \left\{ A \subseteq X : x \notin \overline{A \setminus \{x\}} \right\}.$$

Por el Teorema 1.27, basta ver que $\mathcal{J}$ es un ideal maximal. Es claro que $\mathcal{J}$ es un ideal, veamos que es maximal. Sea $A \subseteq X$, por ser X perfectamente disconexo, se tiene que $x \notin \overline{A \setminus \{x\}}$ o $x \notin \overline{(X \setminus A) \setminus \{x\}}$. Así, alguno de los dos, A o $X \setminus A$, pertene a $\mathcal{J}$.

$b) \Rightarrow a)$ Sea $x \in X$ y sean $A, B \subseteq X$, tales que $A \cap B = \emptyset$. Supongamos que $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. De esto es claro que $x \notin \overline{B \setminus \{x\}}$, ya que de otra manera se tendría que $\emptyset = A \cap B$ está en el ultrafiltro.

$a) \Rightarrow c)$ Sean $A \subseteq X$ y $x \in A$ tal que $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Por ser X perfectamente disconexo, se tiene que $x \notin \overline{(X \setminus A) \setminus \{x\}}$. Ya que $x \in A$, se tiene que $x \notin \overline{(X \setminus A)} = X \setminus A^{\circ}$. Por tanto, $x \in A^{\circ}$.

$c) \Rightarrow a)$ Sea $x \in X$ y sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Supongamos que $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ y que $x \in \overline{B \setminus \{x\}}$. Tenemos que $\overline{A \setminus \{x\}} = \overline{(A \cup \{x\}) \setminus \{x\}}$, luego por $c)$ tenemos que $x \in (A \cup \{x\})^{\circ}$. Análogamente, $x \in (B \cup \{x\})^{\circ}$, por tanto $x \in (A \cup \{x\})^{\circ} \cap (B \cup \{x\})^{\circ} = ((A \cap B) \cup \{x\})^{\circ} = \emptyset$. Contradicción.

$\square$

De la equivalencia $a) \leftrightarrow b)$ vemos que la existencia de espacios perfectamente disconexos sin puntos aislados requiere de la existencia de ultrafiltros.

2.6 CARACTERIZACIÓN DE LAS TOPOLOGÍAS MAXIMALES

Veremos ahora una caracterización de los espacios maximales, la cual es uno de los objetivos principales de este trabajo. Esta caracterización nos permitirá construir un espacio maximal y regular.

Teorema 2.31. *Sea (X, τ) un espacio topológico T_1 sin puntos aislados. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) X es perfectamente disconexo.

(b) Un subconjunto de X es abierto si y sólo si no tiene puntos aislados.

(c) X *es maximal.*

(d) X *es ultradisconexo y nodec.*

(e) X *es extremadamente disconexo, nodec y todo subconjunto abierto es irresoluble.*

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b):$ En general, todo subconjunto abierto de un espacio sin puntos aislados, no tiene puntos aislados (Lema 2.4).

Sean $A \subseteq X$ sin puntos aislados y $x \in A$. Como A no tiene puntos aislados, x es punto de acumulación de A, esto es, $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Por la equivalencia $a) \leftrightarrow c)$ en el Teorema 2.30 se tiene que $x \in A^{\circ}$. Luego, A es abierto.

$(b) \Rightarrow (c):$ Sea ρ una topología sin puntos aislados tal que $\rho \supseteq \tau$.

Sea $A \in \rho$. Como ρ no tiene puntos aislados, A no tiene puntos aislados en ρ (Lema 2.4,1), y dado que $\tau \subseteq \rho$, se tiene que A tampoco tiene puntos aislados en τ, luego, por (b), se tiene que $A \in \tau$. Por tanto $\tau = \rho$.

$(c) \Rightarrow (d):$ Por el Teorema 2.13 se tiene que X es ultradisconexo y por el Teorema 2.28 X es nodec:

$(d) \Rightarrow (e):$ Del Teorema 2.9b se tiene que X es extremadamente disconexo y del teorema 2.21 se tiene que en X todo abierto es irresoluble.

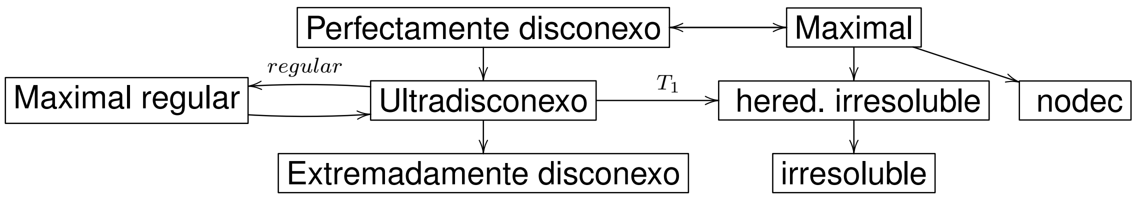
$(e) \Rightarrow (a):$ Probaremos que X satisface las condición $c)$ del Teorema 2.30. Sean $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Primero se probará que $x \in \overline{A^{\circ}}$. Es claro que $(A \setminus A^{\circ})^{\circ} = \emptyset$, luego, por el Teorema 2.22, se tiene que $A \setminus A^{\circ}$ es nunca denso, y por el Teorema 2.25, es discreto. Por tanto, $x \notin \overline{(A \setminus A^{\circ}) \setminus \{x\}}$, lo que implica que $x \in \overline{A^{\circ} \setminus \{x\}} \subseteq \overline{A^{\circ}}$.

Dado que X es extremadamente disconexo, se da que $\overline{A^{\circ}}$ es abierto. Por otro lado $(\overline{A^{\circ}} \setminus A^{\circ})$ tiene interior vacío, luego por el Teorema 2.22 y por ser X nodec, se tiene que es discreto y cerrado. Por tanto, por el Lema 2.24, se tiene que $(\overline{A^\circ} \setminus A^\circ) \setminus \{x\}$ es cerrado.

Del hecho de que $x \in \overline{A^\circ}$ es fácil ver que $A^\circ \cup \{x\} = \overline{A^\circ} \setminus \big((\overline{A^\circ} \setminus A^\circ) \setminus \{x\}\big)$. Luego, $A^\circ \cup \{x\}$ es un abierto (contenido en A). Por tanto $x \in A^\circ$.

$\square$

Para finalizar esta sección mostraremos un diagrama que muestra las implicaciones entre varias de las propiedades estudiadas en este capítulo. El diagrama es válido para un espacio topológico sin puntos aislados (T_0).



En este diagrama las flechas indican las implicaciones entre las propiedades. Si alguna flecha tiene una etiqueta encima, esta etiqueta indica qué axioma de separación se requiere para que la implicación sea válida.

2.7 UN ESPACIO REGULAR Y MAXIMAL

En esta sección probaremos la existencia de un espacio regular y maximal, para esto necesitaremos primero probar el siguiente lema:

Lema 2.32. *Sea X un espacio regular y numerable. Si todo subconjunto abierto de X es irresoluble, entonces:*

$$A_X = \big\{x \in X : \exists D \subseteq X \text{ discreto tal que } x \in \overline{D} \setminus D\big\} \tag{2.9}$$

es nunca denso.

Demostración. Por el Teorema 2.22 es suficiente probar que A_X tiene interior vacío. Veamos primero que:

$$(\forall x \in A_x^\circ)\,(\exists D \subseteq A_X^\circ)\,[D \text{ es discreto y } x \in (cl_{A_X} D) \setminus D]\,.$$

Sea $x \in X$. Si $x \in A_X^\circ$, existe un D' discreto tal que $x \in \overline{D'} \setminus D'$. Considérese el conjunto $D = D' \cap A_X^\circ$. Es fácil verificar que $x \in (cl_{A_X} D) \setminus D$.

Si se prueba que $A_X \neq X$, automáticamente queda probado que si U es un abierto no vacío se da que $A_U \neq U$, ya que U como subespacio de X hereda todas las propiedades que condicionan el Lema 2.32. Por otro lado, se mostrará que $A_U^\circ = A_{A_U^\circ}$, implicando que $A_U^\circ = \emptyset$ para cualquier abierto no vacío U, en particular, que $A_X^\circ = \emptyset$.

Veamos que $A_U^\circ = A_{A_U^\circ}$. Claramente $A_U^\circ \supseteq A_{A_U^\circ}$. Sea $x \in X$. Supongamos que $x \in A_U^\circ$, entonces existe un discreto $D \subseteq A_U^\circ$ tal que $x \in (cl_{A_U} D) \setminus D$. De esto es claro que $x \in (cl_{A_U^\circ} D) \setminus D$. Luego, $x \in A_{A_U^\circ}$.

Por tanto, basta probar que $A_X \neq X$ para culminar la prueba.

Supongamos que $A_X = X$. Sea $X = \{s_n : n \in \omega\}$ una enumeración de X.

Construiremos una sucesión de discretos $(D_n : n \in \omega)$ disjuntos que cumplan las siguientes condiciones:

a) $(\forall n \in \omega)\,(\forall k < n)\,\left[D_k \subseteq \overline{D_n}\right]$

b) $(\forall n \in \omega)\,\left[s_n \in \overline{D_n}\right]$

Sin embargo esto no es posible, ya que $\bigcup_{n\in\omega} D_{2n}$ y $\bigcup_{n\in\omega} D_{2n+1}$ son dos conjuntos disjuntos y densos.

La construcción es como sigue: $D_0 = \{s_0\}$. Sea $n \in \omega$ y asumamos que ya se ha construido cada D_k, para $k \leq n$. Considere el conjunto abierto $Y = X \setminus (\overline{D_n} \setminus D_n)$. Dado que X es regular y numerable, y D_n es discreto, existe una colección de abiertos disjuntos $\{U_x : x \in D_n\}$, tales que $x \in U_x \subseteq Y$, para cada $x \in D_n$. Por otro lado, de a) se tiene que:

c) $(\forall x \in D_n) \left[U_x \cap \bigcup_{k<n} D_k\right]$.

Dado que para cada $x \in D_n$ se tiene que $x \in A_X$, existen discretos $D_x \subseteq U_x$ tales que $x \in \overline{D_x} \setminus D_x$. Sea $T = \bigcup\{D_x : x \in D_n\}$. Definimos D_{n+1} como sigue:

$$D_{n+1} = \begin{cases} T & \text{si } s_{n+1} \in \overline{T} \\ T \cup \{s_{n+1}\} & \text{si } s_{n+1} \notin \overline{T} \end{cases}$$

Verifiquemos que D_{n+1} es como es deseado:

1) Se tiene que $D_n \subseteq \overline{T} \subseteq \overline{D_{n+1}}$ por la forma en que se definió D_{n+1}. Además, por a), se tiene que $D_k \subseteq \overline{D_{n+1}}$, para todo $k \leq n$.

2) Veamos que $D_{n+1} \cap D_k = \emptyset$ para todo $k \leq n$. Se tiene que $T \cap \bigcup_{k<n} D_k \subseteq \bigcup\{U_x : x \in D_n\} \cap \bigcup_{k<n} D_k = \emptyset$, siendo la última igualdad por c). Si $s_{n+1} \in \overline{T}$, entonces $D_{n+1} \cap \bigcup_{k<n} D_k = \emptyset$. Si $s_{n+1} \notin \overline{T}$, entonces por 1), $s_{n+1} \notin D_k$ para todo $k \leq n$, por tanto $D_{n+1} \cap \bigcup_{k<n} D_k = \emptyset$.

Por otro lado, se tiene que $T \cap D_n = \emptyset$ ya que para todo $x \in D_n$ se tiene que $D_x \cap D_n = D_x \cap U_x \cap D_n = D_x \cap \{x\} = \emptyset$. Si $s_{n+1} \in \overline{T}$, entonces $D_{n+1} \cap D_n = \emptyset$. Si $s_{n+1} \notin \overline{T}$, entonces por 1), $s_{n+1} \notin D_n$, y así $D_{n+1} \cap D_n = \emptyset$.

3) T es discreto ya que es la unión numerable de discretos (D_x) contenidos en abiertos disjuntos ($D_x \subseteq U_x$). De esto, es claro que D_{n+1} es discreto.

Por tanto, $(D_n : n \in \omega)$ es una sucesión de discretos disjuntos que verifican a) y b).

$\square$

A continuación probaremos que existe un espacio numerable maximal y regular. Debido al Teorema 2.31, probar la existencia de tal espacio es equivalente a probar el siguiente teorema.

Teorema 2.33. *Existe un espacio numerable, ultradisconexo, nodec y regular.*

Demostración. Por el Teorema 2.2 a) existe un espacio X maximal regular, numerable y T_1. Por el Teorema 2.14 X es ultradisconexo, y por el Teorema 2.5 c) todo subespacio de X denso en sí mismo es ultradisconexo. Por tanto, por el Teorema 2.14 y 2.5 es suficiente encontrar un subespacio de X denso en sí mismo y nodec.

Sea $\theta = \{x \in X :$ no existe ningún subconjunto nunca denso D tal que $x \in \overline{D} \setminus D\}$.

θ es nodec: Sea $A \subseteq \theta$ nunca denso de θ. Se tiene que A es también nunca denso de X. Si A no fuese cerrado, existiría un $x \in \theta$, tal que $x \in \overline{A} \setminus A$. Luego, A es cerrado. Por tanto, θ es nodec.

Sea $\Theta = \{x \in X :$ no existe ningún subconjunto discreto D tal que $x \in \overline{D} \setminus D\}$. Veamos que $\theta = \Theta$:

En un espacio sin puntos aislados todo discreto es nunca denso, por tanto $\theta \subseteq \Theta$. Sea A algún subconjunto nunca denso de X y sea $D = \{x \in A : x$ es punto aislado de $A\}$. D es claramente discreto. Para probar que $\theta \supseteq \Theta$ es suficiente probar que $\overline{D} \supseteq A$. Supongamos que $A \setminus \overline{D} \neq \emptyset$. Tenemos que $A \setminus \overline{D}$ no tiene puntos aislados. Por otro lado, $X \setminus \big(A \setminus \overline{D}\big)$ es denso, y en consecuencia no tiene puntos aislados. Por tanto, por el Teorema 2.5, $A \setminus \overline{D}$ es abierto, lo que es contradictorio ya que $A \setminus \overline{D}$ está contenido en un conjunto nunca denso.

Por el Teorema 2.21 X verfica las condiciones del Lema 2.32. Por tanto, $X \setminus \theta$ es nunca denso, de modo que θ es denso. Por tanto, θ es denso en sí mismo. $\square$

Capítulo

3

COMPLEJIDAD DE TOPOLOGÍAS NUMERABLES MAXIMALES

En el capítulo anterior obtuvimos resultados generales acerca de las topologías maximales y construimos espacios numerables con topología maximal. Se observó que los espacios maximales tienen propiedades topológicas bastante inusuales, básicamente las propiedades de ser nodec, irresoluble y extremadamente disconexo. En particular vimos que los espacios métricos no poseen ninguna de estas propiedades. Esto motiva el estudio de la complejidad de estas topologías sobre conjuntos numerables. En la siguiente sección explicaremos qué queremos decir cuando hablamos de la complejidad de una topología.

3.1 ELEMENTOS DE TEORÍA DESCRIPTIVA DE CONJUNTOS

Sea X un espacio polaco (esto es, un espacio separable y metrizable por una métrica completa), se define la **clase de los borelianos** de X, denotada por $\mathcal{B}(X)$, como la menor $\sigma-$álgebra que contiene a los abiertos de X. Recordemos que una $\sigma-$álgebra es una colección de conjuntos cerrada bajo uniones numerables y complementación. Un subconjunto de X se dice que es **boreliano** si pertenece a $\mathcal{B}(X)$. Por ejemplo, los conjuntos abiertos, los conjuntos cerrados (complementos de abiertos), los conjuntos F_σ (uniones numerables de cerrados) y los conjuntos G_δ (complementos de conjuntos F_σ) son borelianos.

Un subconjunto A de un espacio polaco es llamado **analítico** si es la imagen continua de un espacio polaco. La clase de conjuntos analíticos de un espacio polaco X es denotada por $\Sigma_1^1(X)$. A continuación presentamos varios teoremas con relación a los conjuntos analíticos que pueden ser consultados en [5, 8].

Teorema 3.1. *Sea X un espacio polaco y $A \subseteq X$ no vacío. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *A es analítico.*
2. *A es la proyección de algún boreliano en $X \times Y$ donde Y es un espacio polaco.*

Teorema 3.2. *Sea X un espacio polaco. Entonces $\mathcal{B}(X) \subset \Sigma_1^1(X)$, esto es, la clase de los borelianos está contenida estrictamente en la clase de los conjuntos analíticos.*

Teorema 3.3. *La clase Σ_1^1 es cerrada bajo intersecciones y uniones numerables.*

Teorema 3.4. *Sean X e Y espacios polacos. Si $A \subseteq X \times Y$ es analítico, entonces la proyección de A sobre X, definida por $\pi_1(A) = \{x \in X : \exists y \in Y, (x, y) \in A\}$, es analítica en X.*

El siguiente teorema se conoce como Teorema de Suslin.

Teorema 3.5. *La clase de conjuntos borelianos es exactamente la clase de conjuntos analíticos con complemento analítico.*

Definición 3.6. *Sean X, Y espacios polacos, una función $f : X \to Y$ es una función borel si para cada conjunto boreliano A de Y, se tiene que $f^{-1}(A)$ es un conjunto boreliano de X.*

Teorema 3.7. *Si $f : X \to Y$ es una función borel, entonces la gráfica $Graf(f)$ de la función f, definida por $Graf(f) = \{(x, y) : y = f(x)\}$, es un subconjunto boreliano de $X \times Y$.*

En este contexto, entenderemos la complejidad de la siguiente manera: los conjuntos borelianos serán los más simples, los conjuntos analíticos no borelianos serán más complejos, y los conjuntos no analíticos serán aún más complejos.

Para estudiar la complejidad de una topología sobre un conjunto X numerable, miraremos a $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ como un subconjunto de 2^X, en donde 2^X tiene la topología producto. Esto se hace identificando a cada subconjunto $A \subseteq X$ con su función característica $\chi_A : X \to \{0, 1\}$. Note que 2^X es homeomorfo a 2^ω, ya que $|X| = |\omega|$. De modo que se puede estudiar a la topología en cuestión como un subconjunto del espacio de Cantor. Así, es posible estudiar la complejidad de las topologías. Por ejemplo, podemos preguntar si cierta topología es boreliana como un subconjunto del espacio de Cantor.

Diremos que una topología es analítica si es analítica como un subconjunto de 2^X. Asimismo, diremos que un espacio es analítico si su topología es analítica. Este enfoque fue introducido en [10]. De igual manera se puede estudiar la complejidad de cualquier familia de subconjuntos de un conjunto numerable, por ejemplo la complejidad de un filtro o un ideal.

3.2 COMPLEJIDAD DE TOPOLOGÍAS IRRESOLUBLES

Es esta sección analizaremos la complejidad de las topologías irresolubles T_1, para ello necesitaremos hacer uso de los dos próximos teoremas.

Para enunciar los teoremas introduciremos un par de definiciones: un subconjunto $A \subseteq X$ de un espacio topológico se llamará **magro** si es la unión numerable de conjuntos nunca densos, y se dirá que tiene **la propiedad de Baire** si existe un abierto U del espacio tal que la diferencia simétrica $A \triangle U$ es un conjunto magro [5, 8] .

Teorema 3.8. *[9, Jalali-Naini, Talagrand,p. 32] Sea $\mathcal{I}$ un ideal no principal sobre un conjunto numerable X. Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

1. *$\mathcal{I}$ tiene la propiedad de Baire.*
2. *Existe una partición $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in\omega}$ de subconjuntos finitos de X tal que ningún miembro de $\mathcal{I}$ contiene una unión infinita de $\mathcal{A}$.*

Teorema 3.9. *[5, p. 153] Los conjuntos analíticos tienen la propiedad de Baire.*

Con estos teoremas, ya podemos presentar el teorema central de esta sección.

Teorema 3.10. *[11] Sea X un espacio T_1 numerable sin puntos aislados y con topología analítica. Entonces X es resoluble. Más aún, X es $\aleph_0$-resoluble, esto es, existe una familia numerable de conjuntos disjuntos densos.*

Demostración. Sea $X = \{x_i\}_{i\in\omega}$ una enumeración de X. Sea $I_j = \{A \subseteq \omega \setminus \{j\} : x_j \notin \overline{\{x_i : i \in A\}}\}$. Claramente I_j es un ideal sobre $\omega \setminus \{j\}$. Más aún, por ser X un espacio T_1 se obtiene que I_j contiene a todos los subconjuntos finitos de $\omega \setminus \{j\}$, esto es, es no principal.

Veamos que I_j es analítico. Tenemos que:

$$A \in I_j \Leftrightarrow \exists V \in 2^X \left(V \in \tau \wedge x_j \in V \wedge V \cap \{x_i\}_{i\in A} = \emptyset\right).$$

Considere la relación $R \subseteq 2^{\omega\setminus\{j\}} \times 2^X$, definida por:

$$(A, V) \in R \Leftrightarrow (V \in \tau \wedge x_j \in V \wedge V \cap \{x_i\}_{i\in A} = \emptyset),$$

o de manera análoga, $R = R_1 \cap R_2 \cap R_3$, donde:

$$(A, V) \in R_1 \Leftrightarrow V \in \tau$$
$$(A, V) \in R_2 \Leftrightarrow x_j \in V$$
$$(A, V) \in R_3 \Leftrightarrow (V \cap \{x_i\}_{i\in A} = \emptyset) \Leftrightarrow (\forall i \in \omega)(x_i \notin V \vee i \notin A).$$

Debido a que τ es analítica, R_1 es un subconjunto analítico de $2^{\omega\setminus\{j\}} \times 2^X$. R_2 es abierto y cerrado, y R_3 al ser intersección de cerrados, es también cerrado. Por tanto, R es analítico. Así, $I_j = \pi_1(R)$ es analítico por el Teorema 3.4.

De ahora en adelante identificaremos a cada elemento de X con su índice para evitar sobrecargar la notación. Dado que I_j es analítico, tiene la propiedad de Baire, por el Teorema 3.9. Por tanto, por el teorema de Jalali-Naini, Talagrand, existe para cada $j \in \omega$, una colección $\{A_i^j\}_{i\in\omega}$ disjunta dos a dos de conjuntos finitos de $\omega \setminus \{j\}$ tal que $X \setminus \{x_j\} = \bigcup_{i\in\omega} A_i^j$ y que $x_j \in \overline{\bigcup_{i\in B} A_i^j}$ para todo $B \subseteq \omega$ infinito.

Sea $f : \omega \to \omega$ una función tal que para cada $a \in \omega$, $f^{-1}(a)$ es infinito. Definamos $g : \omega \to \{A_i^j\}_{i,j\in\omega}$ de la siguiente manera:

$$g(1) = A_1^{f(1)}$$
$$g(n) = A_k^{f(n)}, \text{ donde } k = min\{l \in \omega : A_l^{f(n)} \cap \bigcup_{i<n} g(i) = \emptyset\}.$$

Sea $x_j \in X$. Como $f^{-1}(j)$ es infinito, se tiene que $g[f^{-1}(j)] = \{A_i^j : i \in B\}$ para algún $B \subseteq \omega$ infinito, por tanto, $x_j \in \overline{\bigcup g[f^{-1}(j)]}$. Luego, $\bigcup_{j\in\omega} \bigcup g[f^{-1}(j)]$ es denso. Podemos particionar $g[f^{-1}(j)]$ en infinitos subconjuntos infinitos, llamemos $\{B_{i,j}\}_{i\in\omega}$ a tal partición. Aplicando el argumento precedente a cada $B_{i,j}$ se tiene que $x_j \in \overline{\bigcup B_{i,j}}$ para cada i, luego, $\bigcup_{j\in\omega}\bigcup B_{i,j}$ es denso para cada $i \in \omega$. Por tanto, $\{\bigcup_{j\in\omega}\bigcup B_{i,j}\}_{i\in\omega}$ es una familia infinita numerable de densos disjuntos. Luego, X es $\aleph_0$-resoluble, y en particular, resoluble. $\square$

3.3 COMPLEJIDAD DE TOPOLOGÍAS EXTREMADAMENTE DISCONEXAS

En esta sección estudiaremos la complejidad de los espacios extremadamente disconexos. Para obtener el resultado principal de esta sección se usará el siguiente teorema.

Teorema 3.11. *[9, p. 33] Sea X un conjunto númerable. Si $\mathcal{I}$ es un ideal maximal no principal sobre X, entonces $\mathcal{I}$ no es analítico.*

Demostración. Sea $\mathcal{I}$ un ideal maximal no principal. Supongamos que $\mathcal{I}$ es analítico. Por el Teorema 3.9 $\mathcal{I}$ tiene la propiedad de Baire y por el Teorema de Jalali-Naini Talagrand, existe una partición $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in\omega}$ de X tal que la unión de cualquier subcolección infinita de $\mathcal{A}$ no está en el ideal. Tenemos por tanto que $\{A_{2i}\}_{i\in\omega} \notin \mathcal{I}$, pero por la maximalidad de $\mathcal{I}$ se tiene que $\{A_{2i+1}\}_{i\in\omega} \in \mathcal{I}$, lo que contradice el Teorema de Jalali-Naini Talagrand. $\square$

A continuación probamos el resultado principal de esta sección acerca de las topologías extremadamente disconexas.

Teorema 3.12. *[12, p. 521] Sea X un espacio T_2 numerable sin puntos aislados y con topología analítica. Entonces X no es extremadamente disconexo.*

Demostración. Sea x un punto no aislado de X. Dado que X es T_2 existe una familia maximal $\{O_i\}_{i\in I}$ de abiertos disjuntos, tal que $x \notin \overline{O_i}$ para todo $i \in I$. Además note que I es numerable. Sea $\mathcal{I} = \{A \subseteq I : x \notin \overline{\bigcup_{i\in A} O_i}\}$. $\mathcal{I}$ es un ideal sobre I no principal. Claramente la unión finita y los subconjuntos de elementos de $\mathcal{I}$ están en $\mathcal{I}$. Además es claro que los subconjuntos finitos de I están en $\mathcal{I}$.

Veamos que $I \notin \mathcal{I}$. Supongamos que $x \notin \overline{\bigcup_{i \in I} O_i}$, entonces existe un abierto U tal que $x \in U$ y $U \cap \bigcup_{i \in A} O_i = \emptyset$, de modo que es posible añadir un abierto $V \subset U$ a $\{O_i\}_I$, manteniendo esta colección las mismas propiedades, contradiciendo su maximalidad.

Veamos que $\mathcal{I}$ es maximal. Sea $A \subseteq I$. Dado que X es extremadamente disconexo, por el lema 2.8, $\overline{O_i} \cap \overline{O_j} = \emptyset$, para todo $i \in A$ y $j \in I \setminus A$. De esto es fácil ver que $\bigcup_{i \in A} \overline{O_i} \cap \bigcup_{j \in I \setminus A} \overline{O_j} = \emptyset$. Luego, $\overline{\bigcup_{i \in A} O_i} \cap \overline{\bigcup_{j \in I \setminus A} O_j} = \emptyset$. Por tanto, $A \in \mathcal{I}$ o $I \setminus A \in \mathcal{I}$.

Luego, por el Teorema 3.11, se tiene que $\mathcal{I}$ no es analítico.

Por otro lado, tenemos que:

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{I} &\Leftrightarrow \exists V \in 2^X \, (V \in \tau \wedge x \in V \wedge (\forall i \in I)(i \in A \Rightarrow V \cap O_i = \emptyset)) \\ &\Leftrightarrow \exists V \in 2^X \, (V \in \tau \wedge x \in V \wedge (\forall i \in I)(i \notin A \vee V \cap O_i = \emptyset)) \end{aligned}$$

Considérese la relación $R = R_1 \cap R_2$, donde:

$$\begin{aligned} &(A, V) \in R_1 \Leftrightarrow V \in \tau \\ &(A, V) \in R_2 \Leftrightarrow x \in V \wedge (\forall i \in I)(i \notin A \vee V \cap O_i = \emptyset) \end{aligned}$$

Se tiene que R_1 es boreliano en $2^I \times 2^X$ y R_2 es analítico debido a que τ es una topología analítica. Luego, R es analítico, y $\mathcal{I} = \pi_1(R)$ es también analítico por el Teorema 3.4, contradiciendo la maximalidad de $\mathcal{I}$.

$\square$

3.4 COMPLEJIDAD DE TOPOLOGÍAS NODEC

En las dos últimas secciones hemos visto que los espacios T_2 extremadamente disconexos y los espacios T_1 irresolubles (no discretos, en ambos casos) no son analíticos, y en consecuencia no existen topologías analitícas que sean maximales. A continuación presentaremos ejemplos de topologías nodec borelianas, para esto necesitaremos hacer uso del siguiente lema.

Lema 3.13. *[13] Sea τ una topología sobre un conjunto X numerable. Si τ tiene una base F_σ, entonces el operador clausura $cl_\tau : 2^X \to 2^X$ es una función borel.*

Teorema 3.14. *[11] Sea (X, τ) un espacio numerable. Sea $cl_\tau : 2^X \to 2^X$ el operador clausura respecto a τ. Si cl_τ es borel, entonces τ^α es boreliana. Donde, recordemos, $\tau^\alpha = \{V \setminus N : V \in \tau$ y Nes nunca denso.$\}$*

Demostración. Dado que cl_τ es borel y $int_\tau(A) = X \setminus cl_\tau(X \setminus A)$, se tiene que $int_\tau : 2^X \to 2^X$ es también borel. Por tanto, $f = int_\tau \circ cl_\tau \circ int_\tau$ es borel.

Del Teorema 2.27 a), tenemos que:

$$\begin{aligned} V \in \tau^\alpha &\Leftrightarrow V \subseteq f(V) \\ &\Leftrightarrow \exists W \in 2^X \left(W = f(V) \land V \subseteq W\right). \end{aligned}$$

Considere la relación $R \subseteq 2^X \times 2^X$ definida por:

$$\begin{aligned} (W, V) \in R &\Leftrightarrow W = f(V) \land V \subseteq W \\ &\Leftrightarrow (V, W) \in Graf(f) \land V \subseteq W. \end{aligned}$$

Dado que f es borel, se tiene que la gráfica de f, denotada por $Graf(f)$, es un conjunto boreliano de $2^X \times 2^X$. Por tanto, R es boreliano en $2^X \times 2^X$. Así, $\tau^\alpha = \pi_1(R)$ es analítico.

Por otro lado, tenemos que:

$$\begin{aligned} V \notin \tau^\alpha &\Leftrightarrow V \nsubseteq f(V) \\ &\Leftrightarrow \exists W \in 2^X \left(W = f(V) \land V \nsubseteq W\right). \end{aligned}$$

Denotemos por R' la siguiente relación:

$$\begin{aligned} (W, V) \in R' &\Leftrightarrow W = f(V) \land V \nsubseteq W \\ &\Leftrightarrow (V, W) \in Graf(f) \land V \nsubseteq W. \end{aligned}$$

R' es boreliano, por tanto $\mathcal{P}(X)\setminus\tau^\alpha = \pi_1(R')$. Tenemos que τ^α y su complemento son analíticos, luego, por el Teorema de Suslin, τ^α es una topología boreliana.

□

Teorema 3.15. *Sea τ la topología usual sobre $\mathbb{Q}$. Entonces τ^α es una topología nodec boreliana.*

Demostración. Dado que $\mathbb{Q}$ tiene una base numerable $\mathcal{B}$, es claro que $\mathcal{B}$ es F_σ como subconjunto de $2^{\mathbb{Q}}$. Luego, por el Lema 3.13 y el teorema 3.14, se tiene que τ^α es una topología nodec boreliana. □

En la sección 2.4 habíamos señalado que el Teorema 2.27 no podría usarse directamente para producir topologías nodec borelianas que sean regulares. Un resultado interesante de C. Uzcátegui y S. Todorčević con relación a este punto es el siguiente teorema.

Teorema 3.16. *[11] Existe un espacio regular, nodec, sin puntos aislados y con topología analítica.*

Capítulo

4

CONCLUSIONES

Para el estudio de las topologías maximales se han introducido y estudiado las nociones de espacios ultradisconexos, perfectamente disconexos, extremadamente disconexos, nodec e irresolubles. Se dio una caracterización en términos de estos conceptos, a saber, el Teorema 2.31. Este teorema afirma que los espacios maximales son los espacios perfectamente disconexos sin puntos aislados, y estos a su vez, son los espacios ultradisconexos nodec.

Hemos visto que las propiedades que se usaron para caracterizar las topologías maximales son propiedades muy inusuales y se probó que ningún espacio métrico sin puntos aislados las tiene. Esto motivó el estudio de la complejidad de las topologías que poseen estas propiedades. En dicho estudio nos restringimos a topologías sobre conjuntos numerables. Apoyándose de resultados de Teoría descriptiva de Conjuntos, se probó que los espacios irresolubles T_1 no son analíticos, que los espacios extremadamente disconexos T_2 tampoco son analíticos y se mostró un ejemplo de un espacio nodec boreliano.

Otro resultado importante del trabajo fue estudiar la prueba de que existen espacios maximales numerables con la propiedad de regularidad.

ÍNDICE

Conjunto nunca denso	p. 2.
Conjunto denso en sí mismo	p. 10.
Espacio maximal	p. 7.
Espacio maximal $\mathcal{J}$	p. 7.
Espacio ultradisconexo	p. 10
Espacio extremadamente disconexo	p. 12
Espacio irresoluble	p. 19
Espacio hereditariamente irresoluble	p. 19
Espacio nodec	p. 21
Espacio perfectamente disconexo	p. 24
Espacio Polaco	p. 32
Conjunto Boreliano	p. 32
$\sigma-$álgebra	p. 32
Conjunto F_σ y G_δ	p. 33
Conjunto análitico	p. 33
Función Borel	p. 33
Conjunto magro	p. 34
Propiedad de Baire	p. 35

REFERENCIAS

[1] D. Cameron, *Maximal and minimal topologies*, Transactions of the American Mathematical Society 160 (1971), 229-248.

[2] W.W. Comfort and S. García-Ferreira, *Resolvability: a selective survey and some new results*, Topology and its Applications 74 (1996), 149-167.

[3] E. K. van Douwen, *Applications of maximal topologies,* Topology and its Applications 51(1993), 125-139.

[4] E. Hewitt, *A problem of set-theoretic topology,* Duke Math J 10(2) (1943), 309-333

[5] A.S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, 1994.

[6] O. Njåstad, *On some classes of nearly open sets,* Pacific Journal of Mathematics 15(3) (1965), 961-970.

[7] C. Pinter, *A book of Set theory*, Dover publications, 2014.

[8] S. Srivastava, *A course on borel sets*, Springer, 1998.

[9] S. Todorčević, *Topics in topology*, Springer, 1997.

[10] S. Todorčević and C. Uzcátegui, *Analytic topologies over countable sets*, Topology and its Applications 111(3) (2001), 299-326.

[11] S. Todorčević and C. Uzcátegui, *A nodec regular analytic topology*, Topology and its Applications 166 (2014), 85-91.

[12] S. Todorčević and C. Uzcátegui, *Analytic k-spaces*, Topology and its Applications 146 (147) (2005), 511-526.

[13] C. Uzcátegui, *On the complexity of the subspaces of S_ω*, Fundamenta Mathematicae 176 (2003), 1-16.

[14] S. Willard, *General topology*, Addison-Wesley Series in Mathematics, 1968.

BIBLIOGRAFÍA

HEWITT, Edwin. A problem of set-theoretic topology. *Duke Math*. 1943, nro.10, p.309-333.

KECHRIS, Alexander. Classical Descriptive Set Theory, Springer-Verlag, 1994.

TODORČEVIĆ, Stevo y UZCÁTEGUI, Carlos. Analytic topologies over countable sets. *Topology and its Applications*. 2001, nro.111, p.299-326.

TODORČEVIĆ, Stevo y UZCÁTEGUI, Carlos. A nodec regular analytic topology. *Topology and its Applications*, 2014, nro. 166, p.85-91.

TODORČEVIĆ, Stevo y UZCÁTEGUI, Carlos. Analytic k-spaces. *Topology and its Applications*. 2005, nro.146, p.511-526.

UZCÁTEGUI, Carlos. On the complexity of the subspaces of S_ω. *Fundamenta Mathematicae*. 2003, nro.176, p.1-16.

VAN DOUWEN, Eric. Applications of maximal topologies. *Topology and its Applications*. 1993, nro.51, p.125-139.