Funciones Localmente Inyectivas entre Continuos

Daniel Armando Herrera Villamizar

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2012

Funciones Localmente Inyectivas entre Continuos

Daniel Armando Herrera Villamizar

Trabajo de grado para optar al título de

Matemático

Director

Ph.D. Javier Enrique Camargo García

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2012

Agradecimientos

El autor agradece al profesor Javier Enrique Camargo García por su predisposición y colaboración en la realización de este trabajo.

Igualmente agradece a Juan Carlos Quijano, Cesar Celis, William Valencia y Viviana Rosero por el apoyo y la colaboración recibida durante toda la carrera.

Agradece a Carmen Villamizar, Carlos Villamizar y Hercilia Herrera por su paciencia y credibilidad en que todo esto era posible.

Índice general

Introducción **10**

1. Preliminares **12**

1.1. Definición y ejemplos de continuos 12

1.2. Intersección anidada de continuos 15

1.3. Producto de continuos 16

1.4. Límites inversos de continuos 20

1.5. Continuos encadenables 22

2. Funciones localmente inyectivas **24**

2.1. Definición, ejemplos y propiedades 24

2.2. Árboles, grafos y unión finita de arcos 26

2.3. Algunos resultados 33

2.4. Homeomorfismos locales 36

3. Continuos arbolados **40**

3.1. Definición y ejemplos 40

3.1.1. La curva del topólogo 41

3.1.2. Continuos arbolados y límites inversos 42

3.1.3. Dendritas 45

3.2. Teorema de Heath 48

Índice de figuras

1.1.1.Triodo 13
1.1.2.Curva del topólogo S 13
1.1.3.Abanico armónico F_α 14
1.2.1.Carpeta de Sierpinski 16
1.5.1.Cadenas 22
1.5.2.Una $\varepsilon - cadena$ en $[0,1]$ 23
1.5.3.Una $\varepsilon - cadena$ en la curva del topólogo 23

2.2.1.Continuo $\mathcal{D}_4$ 28
2.2.2.Continuo $\mathcal{F}_\omega$ 29
2.2.3.Una unión finita de arcos que no es un grafo 30

3.1.1.$S = \overline{\{(x, sen(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}}$ 41
3.1.2.$f_\varepsilon : S \to T_\varepsilon$ 42
3.1.3.$\mathcal{K}_2$ 44
3.1.4.$\mathcal{K}_3$ 45
3.1.5.Función del primer punto para Y_1 46
3.1.6.Función del primer punto para Y_2 47
3.1.7.Función del primer punto para Y_3 y Y_4 47
3.2.1.Cubrimiento de un árbol que se puede árbol indexar 49
3.2.2.Cubrimiento de S^1 que no se puede árbol indexar 50
3.2.3.$h : X \to Y$ 51
3.2.4.$f_\rho : Y \to T_\rho$ 52
3.2.5.$\mathcal{A} = \{A_t : t \in T_\rho\}$ un cubrimiento de T_ρ 52
3.2.6.$\mathcal{L} = \{L_1, L_2, ..., L_m\}$un refinamiento de $\{U_y : y \in Y\}$ 53
3.2.7.$W(i,j)$ 54

TÍTULO: FUNCIONES LOCALMENTE INYECTIVAS ENTRE CONTINUOS.*

AUTOR: DANIEL ARMANDO HERRERA VILLAMIZAR.**

PALABRAS CLAVES: Funciones localmente inyectivas, homeomorfismo, continuos, dendritas, árboles, continuos arbolados.

RESUMEN

Homeomorfismos locales, una gran clase de funciones ligeras y funciones de fibra finita, son ejemplos de funciones localmente inyectivas. Por esta razón, las funciones localmente inyectivas pueden ser un camino para conseguir importantes aportes en matemáticas y por lo tanto, es indispensable estudiar esta clase de funciones entre continuos.

Esta monografía está enfocada a estudiar propiedades que puedan preservar este tipo de funciones, características de los continuos para que toda función localmente inyectiva entre ellos sea un homeomorfismo y propiedades de tipo algebraico como las propiedades de composición y factor.

Esta monografía está dividida en tres capítulos distribuidos de la siguiente manera: En el primer capítulo se dan herramientas para construir continuos, como las intersecciones anidadas de continuos, el producto de continuos y el límite inverso de una sucesión inversa de continuos. En el segundo capítulo se da definición, ejemplos y propiedades de funciones localmente inyectivas, además se estudian grafos, árboles, dendritas, continuos que son unión finita de arcos, continuos únicamente arcoconexos y continuos con una cantidad finita de arcocomponentes. En el tercer capítulo se prueba que las dendritas y los continuos de Knaster son continuos arbolados y se demuestra que toda función localmente inyectiva de un continuo sobre un continuo arbolado es un homeomorfismo.

---

*Monografía

**Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Ph.D. Javier Enrique Camargo García.

TITLE: LOCALLY ONE-TO-ONE MAPS BETWEEN CONTINUA.*

AUTHOR: DANIEL ARMANDO HERRERA VILLAMIZAR.**

KEY WORDS: Locally one-to-one maps, homeomorphism, continua, dendrites, trees, tree-like continua.

ABSTRACT

Locally homeomorphisms, a large class of light maps, and finite fiber maps, that are examples of locally one-to-one maps. For this reason, locally one-to-one maps may be a way to get important contributions for the mathematics, therefore, it is indispensable to study this class of maps between continua.

This monograph is focused to study properties that this kind of maps can to preserve, characteristics from continua so that each locally one-to-one map between them is an homeomorphism, and algebraic kind properties, for example, composition and factor property.

This monograph is divided in three chapters distributed as follows: The first chapter gives tools to build continua, for example, nested intersections of continua, the product of continua and the inverse limit of an inverse sequence of continua. The second chapter provides definition, examples and properties from locally one-to-one maps, also it studies graphs, dendrites, continua that are the union of finitely many arcs, continua only arc-connectedness and continua with a finitely many of arc-component. The third chapter provides the proof that dendrites and Knaster continua are tree-like continua and here it shows that each locally one-to-one map from a continuum onto a tree-like continuum is an homeomorphism.

*Monograph

**Faculty of Sciences. School of Mathematics. Director: Javier Enrique Camargo García.

Introducción

En topología es muy importante estudiar propiedades de manera local. Por ejemplo, los espacios localmente conexos y localmente compactos forman parte de teoremas que constituyen una herramienta fundamental para el desarrollo de la topología.

Si queremos realizar algún trabajo de investigación en topología, es indispensable el uso de funciones continuas, en algunos casos, con propiedades adicionales como los homeomorfismos, las funciones abiertas, cerradas, monótonas, inyectivas, etc. Estas clases de funciones se pueden estudiar de manera local, por ejemplo, los homeomorfismos locales constituyen una clase muy importante y estudiada en topología algebraica y análisis complejo.

En general, siempre que tenemos una clase de funciones continuas, podemos estudiarla de manera local naturalmente; esto es, si por ejemplo tenemos la clase de funciones monótonas, podemos decir que una función es localmente monótona si para cada punto existe un vecindad abierta del punto tal que la restricción de la función a esta vecindad es monótona.

En este trabajo estudiaremos la clase de funciones localmente inyectivas. Esta clase de funciones ha sido estudiada por diferentes autores con diferentes propósitos. Nosotros estudiaremos, particularmente, funciones localmente inyectivas definidas entre continuos (espacios métricos, compactos y conexos). Además de estudiar los trabajos desarrollados hasta este momento, estudiaremos propiedades que puedan preservar este tipo de funciones, características de los espacios para que las funciones cumplan alguna propiedad adicional y propiedades de tipo algebraico como las propiedades de composición y factor.

Homeomorfismos locales, una gran clase de funciones ligeras y funciones de fibra finita, son ejemplos de funciones localmente inyectivas. Por esta razón, las funciones localmente inyectivas pueden ser un camino para conseguir importantes aportes en matemática y por lo tanto, es indiscutible la importancia de estudiar esta clase de funciones entre continuos.

Una de las principales causas que motivó a la realización de este trabajo de grado, es el estudio de condiciones suficientes y necesarias para que una función localmente inyectiva entre continuos sea un homeomorfismo. En [1] se estudian estas condiciones para funciones localmente inyectivas de un continuo sobre si mismo. En [5] se hace un estudio más general, donde se prueba que toda función localmente inyectiva de un continuo sobre un continuo arbolado es un homeomorfismo, este resultado probado por la profesora Jo W. Heath en 1996, generaliza los resultados previos obtenidos por T. Maćkowiak en 1977, quien prueba que todo homeomorfismo local de un un continuo sobre un continuo arbolado es un homeomorfismo y por T. Rogers en 1995, quien prueba que toda función localmente inyectiva de un continuo hereditariamente descomponible sobre un continuo arbolado es un homeomorfismo. Este trabajo está dividido en tres capítulos distribuidos de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se dan herramientas para construir continuos, como son las intersecciones anidadas de continuos, el producto de continuos y el límite inverso de una sucesión inversa de continuos.

En el Capítulo 2 introducimos la definición de función localmente inyectiva entre continuos y homeomorfismo local entre continuos. Veremos un resultado que nos permitirá decidir cuando una función localmente inyectiva es homeomorfismo local. Además mencionaremos algunas propiedades de las funciones localmente inyectivas, como por ejemplo, que la composición de funciones localmente inyectivas es localmente inyectiva. Igualmente haremos un breve estudio de continuos arcoconexos sin curvas cerradas simples, en particular las dendritas y los árboles.

En el Capítulo 3 daremos la definición de continuo arbolado e ilustraremos algunos ejemplos de continuos arbolados que no son árboles y por último daremos una prueba detallada y muy elaborada del resultado más relevante de este trabajo, el Teorema de Heath.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos conceptos básicos de *teoría de continuos* que usamos en el estudio de las funciones localmente inyectivas. Este capítulo lo desarrollamos de la siguiente manera: en la primera sección definimos continuo y damos algunos ejemplos, en las tres secciones siguientes mostraremos herramientas para construir continuos como son: intersecciones anidadas, productos y límites inversos, y por último, damos la definición de continuo encadenable y presentamos algunos ejemplos.

1.1. Definición y ejemplos de continuos

A continuación presentamos los espacios donde trabajaremos el desarrollo del presente escrito.

Definición 1.1.1. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío.

Los siguientes son algunos ejemplos clásicos de continuos.

Ejemplo 1.1.2. Un *arco* es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$.

Observación 1.1.3. Denotamos por $\overline{ab}$ el arco, tal que si $h : [0, 1] \to \overline{ab}$ es un homeomorfismo, entonces $h(0) = a$ y $h(1) = b$. Además, diremos que a y b son puntos finales del arco $\overline{ab}$.

Ejemplo 1.1.4. Una *curva cerrada simple* es un espacio homeomorfo al conjunto $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$.

Ejemplo 1.1.5. Para algún entero $n \geq 3$, un $n-odo$ es un espacio homeomorfo a la unión de n arcos $\bigcup_{i=0}^{n} \overline{ab_i}$, donde $a = (0,0)$, $b_0 = (1,0)$ y $b_i = \left(1, \frac{1}{i}\right)$, para cada $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$. En particular, un $3-$odo (*triodo*) se puede ver como el de la Figura 1.1.1.

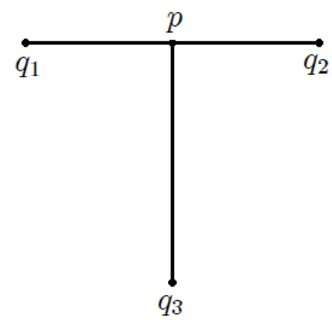

Figura 1.1.1: Triodo

Hasta ahora todos nuestros continuos son localmente conexos. Los siguientes son ejemplos de continuos que no son localmente conexos.

Ejemplo 1.1.6. La *curva del topólogo* es la adherencia de W, donde

$$W = \left\{(x, sen(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\right\};$$

es decir, la curva del topólogo que denotaremos por S es $S = W \cup (\{0\} \times [-1, 1])$.

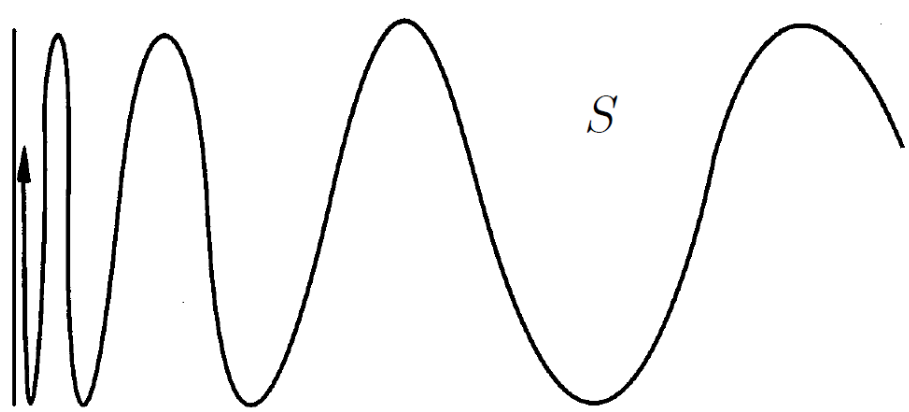

Figura 1.1.2: Curva del topólogo S

Ejemplo 1.1.7. El *abanico armónico,* que denotamos por F_α se define como $F_\alpha = \bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{ab_n}$, donde $a = (0,0)$, $b_0 = (1,0)$ y $b_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. La Figura 1.1.3 representa F_α.

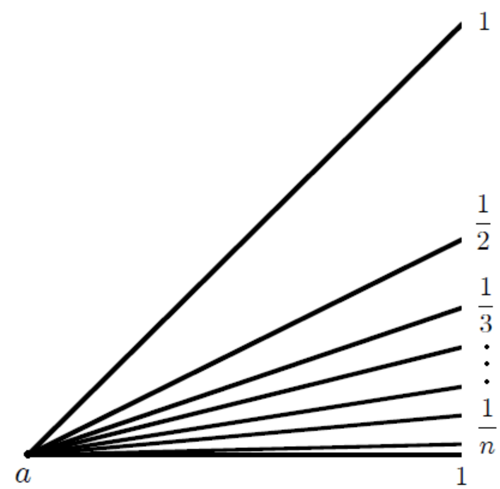

Figura 1.1.3: Abanico armónico F_α

Finalizamos esta sección con dos resultados relacionados con funciones continuas entre continuos. En las pruebas sólo mostramos las ideas principales con el fin de no extender el trabajo con conceptos básicos de topología general.

Teorema 1.1.8. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos, entonces f es cerrada.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Dado $K \subset X$ cerrado. K es compacto, por [4, Teorema 1.4, pág.224]. Como f es continua, entonces $f(K) \subset Y$ es compacto. Por otro lado Y es Hausdorff. Así, $f(K)$ es cerrado, por [4, Teorema 1.4, pág.224]. Por lo tanto f es cerrada. **Q.E.D.**

Corolario 1.1.9. *Sea $f : X \to Y$ una biyección continua entre continuos, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva entre continuos. Por el Teorema 1.1.8., f es cerrada. Así, f es un homeomorfismo, por [4, Teorema 12.2, pág.89]. **Q.E.D.**

1.2. Intersección anidada de continuos

Una de las técnicas más importantes para obtener ejemplos de continuos es el uso de las intersecciones anidadas. A continuación, después de la prueba del siguiente lema, mostramos que la intersección anidada de continuos es un continuo.

Lema 1.2.1. *Sean $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos compactos tales que $X_{i+1} \subset X_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. Si U es un abierto de X_1 tal que $X \subset U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_i \subset U$ para todo $i \geq N$. En particular, si cada $X_i \neq \emptyset$, entonces $X \neq \emptyset$ y claramente, X es métrico y compacto.*

Demostración. Supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $x_i \in X_i \setminus U$. Como $X_1 \setminus U$ es un espacio métrico compacto, podemos suponer que la sucesión $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ converge a algún punto $p \in X_1 \setminus U$. Como $X_{i+1} \subset X_i$ para cada i, para cada k, $x_i \in X_k$ para todo $i \geq k$. Por lo tanto $p \in X_k$ para cada k. Así, $p \in X$. Como $p \notin U$, contradecimos que $X \subset U$. Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_i \subset U$ para todo $i \geq N$. Esto prueba la primera parte del lema. Finalmente, si $X \neq \emptyset$, basta tomar $U = \emptyset$ y tenemos que $X_i \neq \emptyset$ para todo $i \geq N$. Con lo que completamos nuestra prueba. **Q.E.D.**

Teorema 1.2.2. *Sean $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos tales que $X_{i+1} \subset X_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. Entonces X es un continuo.*

Demostración. Por el Lema 1.2.1., X es un espacio métrico, compacto y diferente del vacío. Supongamos que X no es conexo. Entonces $X = A \cup B$, donde A y B son disjuntos, no vacíos y cerrados. Como X_1 es un espacio normal, por [4, 3.2, pág.144] existen abiertos disjuntos V y W de X_1, tales que $A \subset V$ y $B \subset W$. Sea $U = V \cup W$. Entonces por el Lema 1.2.1., $X_n \subset U$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $X_n = (X_n \cap V) \cup (X_n \cap W)$. Como $X = A \cup B$, $X \subset X_n$, $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, tenemos que $X_n \cap V \neq \emptyset$ y $X_n \cap W \neq \emptyset$. Así, contradecimos que X_n es conexo. **Q.E.D.**

Ejemplo 1.2.3. *La carpeta de Sierpinski es un continuo.* Sean $\mathcal{C}_1 = [0,1] \times [0,1]$ y $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \setminus \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$; es decir, para construir $\mathcal{C}_2$ tomamos el cuadrado $\mathcal{C}_1$ y lo dividimos en nueve subcuadrados iguales de los cuales extraemos el interior del cuadrado de la mitad. De forma similar, tomamos $\mathcal{C}_2$ que esta formado por ocho cuadrados de los cuales a cada uno de estos lo dividimos en nueve subcuadrados iguales y quitamos el interior del cuadrado de la mitad para obtener $\mathcal{C}_3$, ver Figura 1.2.1. Continuando con este proceso definimos una sucesión de continuos $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\mathcal{C}_{n+1} \subset \mathcal{C}_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos $\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$. Por el Teorema 1.2.2., $\mathcal{C}$ es un continuo y es conocido como la *carpeta de Sierpinski*.

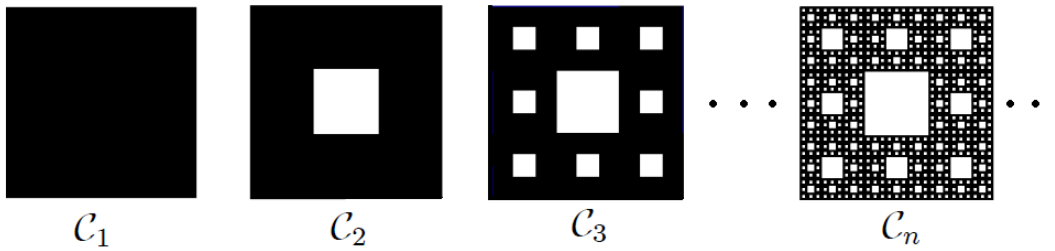

Figura 1.2.1: Carpeta de Sierpinski

1.3. Producto de continuos

Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una colección de continuos y definimos

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha = \left\{ (x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} : x_\alpha \in X_\alpha \text{ para cada } \alpha \in \mathcal{A} \right\}.$$

Para cada $\lambda \in \mathcal{A}$ definimos $\pi_\lambda : \prod X_\alpha \to X_\lambda$ por $\pi_\lambda \left((x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \right) = x_\lambda$. El espacio $\prod X_\alpha$ lo dotamos de la topología producto, cuya topología es generada por la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1} (U_{\alpha_i}) : U_{\alpha_i} \text{ es abierto de } X_{\alpha_i} \text{ y } \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \subset \mathcal{A} \right\}.$$

En esta sección mostramos que $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ es un continuo si $\mathcal{A}$ es a lo más numerable.

Proposición 1.3.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces $d'(x, y) = mín \{d(x, y); 1\}$ define una métrica sobre X la cual induce la misma topología que la métrica d.*

Demostración. Veamos que $d'(x, y) = mín \{d(x, y); 1\}$ define una métrica sobre X. Sean x, y, $z \in X$. Tenemos que $d'(x, y) = 0$ si y sólo si $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$. Para verificar que d' satisface la desigualdad triangular, consideremos todos los casos posibles. Primero supongamos que $d'(x, y) = d(x, y)$, $d'(x, z) = d(x, z)$ y $d'(y, z) = d(y, z)$. Así, como d satisface la desigualdad triangular, tenemos $d'(x,y) \leq d'(x,z) + d'(y,z)$. Note que en cualquier otro caso $1 \leq d'(x,z) + d'(y,z) \leq 2$ y como $d'(x,y) \leq 1$, se tiene que $d'(x,y) \leq d'(x,z) + d'(y,z)$ para todo x, y, $z \in X$.

Ahora veamos que d' induce la misma topología que d. Sean $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta_1 = \varepsilon$, tal que si $d(x_0,x) < \delta_1$, entonces $d'(x_0,x) \leq d(x_0,x) < \varepsilon$. Por otro lado existe $\delta_2 = \textit{mín}\{\varepsilon; 1\}$, tal que si $d'(x_0,x) < \delta_2$, para $0 < \varepsilon < 1$, tenemos que $\delta_2 = \varepsilon$ y $d'(x_0,x) < \varepsilon$. Entonces $d(x_0,x) < \varepsilon$. Para $\varepsilon \geq 1$, tenemos que $\delta_2 = 1$ y $d'(x_0,x) < 1$. Entonces $d(x_0,x) < 1 \leq \varepsilon$. Así, por [4, Teorema 3.2, pág.184], d y d' generan la misma topología sobre X. **Q.E.D.**

Por la proposición anterior podemos suponer que todo espacio métrico X tiene métrica d tal que $d(x,y) \leq 1$ para todo x e y en X. En adelante, siempre supondremos las métricas acotadas por 1. A continuación mostramos que el producto a lo más numerable de espacios métricos es metrizable.

Proposición 1.3.2. *Sea $\{(X_\alpha, d_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familia de espacios métricos. Si $\mathcal{A}$ es a lo más numerable, entonces el producto $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ es un espacio métrico.*

Demostración. Si $\mathcal{A}$ es finito, entonces escribimos $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha = \prod_{i=1}^{n} X_i$. No es difícil ver que $d\left((x_1,x_2,...,x_n),(y_1,y_2,...,y_n)\right) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i)$ define una métrica sobre $\prod_{i=1}^{n} X_i$ y esta topología es la topología producto. Un caso más interesante es tomar $\mathcal{A}$ numerable. Escribiremos $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ y definimos

$$d\left((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i}.$$

Note que $0 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$. Por lo tanto la suma $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i}$ siempre existe. Veamos que d es una métrica y genera la topología producto. Sean $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$ y $z = (z_i)_{i=1}^{\infty}$ en $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Entonces $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i} = 0$ si y sólo si $d_i(x_i,y_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$ si y sólo si $x_i = y_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$ si y sólo si $x = y$. De la Proposición 1.3.1., se tiene que $d_i(x_i,y_i) \leq d_i(x_i,z_i) + d_i(y_i,z_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,z_i)}{2^i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(y_i,z_i)}{2^i}.$$

Ahora veamos que la métrica $d\left((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i}$ induce la topología producto. Denotemos por τ_d a la topología inducida por d y τ_p a la topología producto. Primero veamos que $\tau_p \subset \tau_d$. Para esto, sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Para cada $j \in \{1, 2, ..., m\}$, sea $\varepsilon_j = \frac{\varepsilon}{2^m}$. Debemos probar que $\bigcap_{j=1}^{m} \pi_j^{-1}\left(B_{d_j}(x_j, \varepsilon_j)\right) \subset B_d\left((x_i)_{i=1}^{\infty}, \varepsilon\right)$. Para esto, sea $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in \bigcap_{j=1}^{m} \pi_j^{-1}\left(B_{d_j}(x_j, \varepsilon_j)\right)$. Queremos ver que $d\left((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty},\right) < \varepsilon$. Note que

$$d\left((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i}.$$

Además,

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i} < \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{\varepsilon}{2^m} + \frac{\varepsilon}{2} = \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) \frac{\varepsilon}{2^m} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $d\left((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}\right) < \varepsilon$. Para ver que $\tau_d \subset \tau_p$, sean $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ y $U = \bigcap_{j=1}^{k} \pi_j^{-1}\left(B_{d_j}(x_j, \varepsilon_j)\right)$. Tomemos $\varepsilon = mín\left\{\frac{\varepsilon_1}{2^1}, \frac{\varepsilon_2}{2^2}, ..., \frac{\varepsilon_k}{2^k}\right\}$. Debemos probar que $B_d\left((x_i)_{i=1}^{\infty}, \varepsilon\right) \subset U$. Para esto, sea $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in B_d\left((x_i)_{i=1}^{\infty}, \varepsilon\right)$.

Entonces $d\left((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty},\right) < \varepsilon$, es decir, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i} < \varepsilon$. Por lo tanto $\frac{d_j(x_j,y_j)}{2^j} < \varepsilon \leq \frac{\varepsilon_j}{2^j}$, para cada $j \in \{1, 2, ..., k\}$. Así, si $j \in \{1, 2, ..., k\}$, entonces $d_j(x_j, y_j) < \varepsilon_j$. Por lo tanto, $B_d\left((x_i)_{i=1}^{\infty}, \varepsilon\right) \subset U$. **Q.E.D.**

Proposición 1.3.3. *Sea $\{(X_\alpha, d_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familia de espacios conexos. Si $\mathcal{A}$ es a lo más numerable, entonces el producto $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ es un espacio conexo.*

Demostración. Si $\mathcal{A}$ es finito, entonces escribimos $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha = \prod_{n=1}^{m} X_n$. No es difícil ver que $\prod_{n=1}^{m} X_n$ es conexo. Un caso más interesante es tomar $\mathcal{A}$ numerable. Escribiremos $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Sean x y $x_{(n)}$ en $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, donde cada X_i es conexo. Primero probaremos que si $x_{(n)}$ y x difieren a lo más en $n < \infty$ coordenadas, entonces $x_{(n)}$ y x están en un conjunto conexo. Haremos la prueba por inducción sobre el número n de coordenadas en las que $x_{(n)}$ y x difieren. Para $n = 1$, la afirmación se cumple, ya que si $x_{(1)}$ y x difieren en la α- ésima coordenada, la rebanada $S(x; \alpha)$ a lo largo de x y paralela al α- ésimo factor es homeomorfo a X_α, que es un conjunto conexo que tiene a x y $x_{(n)}$. Ahora supongamos que la afirmación es cierta para todo $x_{(n-1)}$. Entonces, dado algún $x_{(n)}$, encontramos un $x_{(n-1)}$ tal que difiere de $x_{(n)}$ en una coordenada. Por el caso $n = 1$, $x_{(n)}$ y $x_{(n-1)}$ están en subconjunto conexo C y por la hipótesis de inducción $x_{(n-1)}$ y x están en un conjunto conexo C_1. Como $C \cap C_1$ tiene a $x_{(n-1)}$, tenemos que $C \cup C_1$ es conexo. Esto completa el paso inductivo.

Para terminar, sea A la unión de todos los subconjuntos conexos de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ que tienen a x. A es conexo, por [4, Teorema 1.5, pág.108] y por la primera parte de la demostración, $D \subset A$, donde

$$D = \left\{ y \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : y \text{ y } x \text{ difieren a lo más en una cantidad finita de coordenadas} \right\}.$$

Veamos que D es denso en $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$; es decir, $\overline{D} = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Para esto, sean $B = \bigcap_{n=1}^{k} \pi_n^{-1}(U_n)$ abierto en $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, donde U_i es abierto de X_i e $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in B$, tal que $x_j = y_j$ para todo $j \geq k+1$. Note que, y y x difieren a lo más en una cantidad finita de coordenadas. Por lo tanto $y \in B \cap D$. Así, D es denso en $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, por [4, 4.13, pág.72]. Luego, $\overline{A}$ es conexo, por [4, Teorema 1.6, pág.109] y como $\overline{D} \subset \overline{A}$, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es conexo. **Q.E.D.**

Teorema 1.3.4. *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familia de continuos. Si $\mathcal{A}$ es a lo más numerable, entonces el producto $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ es un continuo.*

Demostración. Dada una colección de continuos $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, tal que $\mathcal{A}$ es a lo más numerable, tenemos que $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ es conexo por la Proposición 1.3.3. y compacto por [4, Teorema 1.4, pág.224]. Además, por la Proposición 1.3.2., $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ es un espacio métrico. Así $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ es un continuo. **Q.E.D.**

Ejemplo 1.3.5. Una $n-$*celda* es un espacio homeomorfo al producto $\prod_{i=1}^{n} X_i$, donde cada $X_i = [0,1]$. Así, una $n-$celda es un continuo, por el Teorema 1.3.4.

Ejemplo 1.3.6. El *toro* se define como el producto $S^1 \times S^1$. Así, por el Teorema 1.3.4., el toro es un continuo.

Ejemplo 1.3.7. El *cubo de Hilbert* Q es un espacio homeomorfo al producto cartesiano numerable $\prod_{i=1}^{\infty} I_i$, donde cada $I_i = [0,1]$.

Note que Q es el continuo universal en el sentido que si X es un continuo, entonces existe una inmersión $i : X \to Q$; es decir, Q contiene una copia homeomorfa de cualquier continuo, por [7, Teorema 1, pág.241].

Observación 1.3.8. El producto arbitrario de compactos es compacto, por [4, Teorema 1.4, pág 224] y producto arbitrario de conexos es conexo por [4, Teorema 1.7, pág.109]. Pero en general, el producto arbitrario de continuos no es un continuo, ya que el producto no numerable de espacios métricos no es metrizable, por [4, Corolario 7.3, pág.191].

1.4. Límites inversos de continuos

En la teoría de continuos, el límite inverso de una sucesión inversa de continuos es una herramienta poderosa totalmente teórica que nos permite construir una gran variedad de continuos. Los continuos de Knaster son ejemplos de continuos que se construyen usando límites inversos. En esta sección estudiaremos los límites inversos de continuos.

Definición 1.4.1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sean X_n un continuo y $f_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ una función continua. Entonces decimos que la doble sucesión $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ es una *sucesión inversa* de continuos.

Definición 1.4.2. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos. Entonces el *límite inverso* de $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ denotado por $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ o X_∞ es un subespacio del espacio producto cartesiano $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, definido como

$$\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

En el Teorema 1.4.6. probaremos que el límite inverso de una sucesión inversa de continuos es un continuo.

Definición 1.4.3. Sean $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos con límite inverso X_∞ y $\pi_m : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \to X_m$ la proyección de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ sobre X_m, para algún $m \in \mathbb{N}$. Definimos la función f_m como $f_m = \pi_m|_{X_\infty} : X_\infty \to X_m$.

Observación 1.4.4. No es difícil demostrar que f_m es sobreyectiva, para todo $m \in \mathbb{N}$, si y sólo si f_n^{n+1} es sobreyectiva para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, por [4, Teorema 2.1, pág.101] f_m es continua.

Lema 1.4.5. *Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos. Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos $Q_i(X_n, f_n^{n+1})$ como*

$$Q_i\left(X_n, f_n^{n+1}\right) = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n, \text{ para todo } n \leq i \right\}.$$

Entonces:

(1) $Q_i(X_n, f_n^{n+1}) \supset Q_{i+1}(X_n, f_n^{n+1})$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

(2) $Q_i(X_n, f_n^{n+1})$ *es homeomorfo a* $\prod_{n=i+1}^{\infty} X_n$*, para todo* $i \in \mathbb{N}$.

(3) $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty} = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i(X_n, f_n^{n+1})$.

Demostración. Probemos (1). Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_{i+1}(X_n, f_n^{n+1})$. Así, $x_n = f_n^{n+1}(x_{n+1})$, para todo $n \leq i+1$. Luego, $x_n = f_n^{n+1}(x_{n+1})$ para todo $n \leq i$. Por lo tanto $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_i(X_n, f_n^{n+1})$.

Para probar (2). Fijamos un i y definimos $h : Q_i(X_n, f_n^{n+1}) \to \prod_{n=i+1}^{\infty} X_n$, como $h((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (x_n)_{n=i+1}^{\infty}$, para todo $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_i(X_n, f_n^{n+1})$. Veamos que h es continua. Sean $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_i(X_n, f_n^{n+1})$ y $\varepsilon > 0$. Entonces tomemos $\delta = \varepsilon$. Si $d((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} < \delta$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} = \sum_{n=1}^{i} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} + \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} < \varepsilon,$$

luego $d(h((x_n)_{n=1}^{\infty}), h((y_n)_{n=1}^{\infty})) = \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} < \varepsilon$. Por lo tanto h es continua. Sea $g : \prod_{n=i+1}^{\infty} X_n \to Q_i(X_n, f_n^{n+1})$, definida como $g(x_{i+1}, x_{i+2}, ...) = (y_1, ..., y_i, x_{i+1}, ...)$, donde $y_k = f_k^{k+1} \circ ... \circ f_i^{i+1}(x_{i+1})$ con $k \in \{1, 2, ..., i\}$. Es fácil ver que g es continua. Además, $g \circ h = id$ y $h \circ g = id$. Luego, h es un homeomorfismo, por [4, Teorema 12.3, pág.89].

Para terminar la demostración del Lema. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=i}^{\infty} X_n$, donde $x_n = f_n^{n+1}(x_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular $x_n = f_n^{n+1}(x_{n+1})$ para todo $n \leq i$, con $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_i(X_n, f_n^{n+1})$ para cualquier $i \in \mathbb{N}$. Así $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i(X_n, f_n^{n+1})$. Inversamente, si $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i(X_n, f_n^{n+1})$, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_i(X_n, f_n^{n+1})$ para todo i. Sea $m \in \mathbb{N}$. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_m(X_n, f_n^{n+1})$ entonces $x_m = f_m^{m+1}(x_{m+1})$. Como m fue arbitrario, $x_m = f_m^{m+1}(x_{m+1})$, para todo $m \in \mathbb{N}$. De lo anterior $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$.

Q.E.D.

El siguiente es el principal resultado de esta sección y lo usaremos con mucha frecuencia en los capítulos siguientes.

Teorema 1.4.6. *Sea* X_∞ *el límite inverso de una sucesión inversa de continuos, entonces* X_∞ *es un continuo.*

Demostración. Sean $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos y $X_\infty = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ el límite inverso. Por el Lema 1.4.5. $X_\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i(X_n, f_n^{n+1})$, donde

$Q_i\left(X_n, f_n^{n+1}\right)$ es un continuo y $Q_i\left(X_n, f_n^{n+1}\right) \supset Q_{i+1}\left(X_n, f_n^{n+1}\right)$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Así, X_∞ es un continuo por el Teorema 1.2.2. **Q.E.D.**

1.5. Continuos encadenables

Como veremos más adelante, los continuos encadenables son una clase especial de continuos arbolados, continuos que estudiaremos con más detalle en el capítulo 3. Por esta razón, dedicamos esta subsección para estudiar la definición y un par de ejemplos.

Definición 1.5.1. Sea X un continuo. Una *cadena* en X es una colección finita de abiertos de X etiquetados como $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$, tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i-j| \leq 1$. Además cada U_i se llama *eslabón* de la cadena.

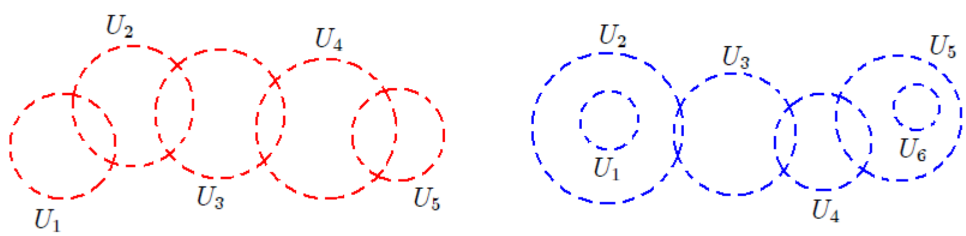

Figura 1.5.1: Cadenas

Definición 1.5.2. Sea $\mathcal{C} = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ una cadena. Se define la *malla* de $\mathcal{C}$ como $malla(\mathcal{C}) = máx\,\{diám(U_i) : i \in \{1, 2, ..., n\}\}$. Si $\mathcal{C}$ es una cadena en X y $malla(\mathcal{C}) < \varepsilon$ decimos que $\mathcal{C}$ es una $\varepsilon - cadena$ en X.

Con las definiciones anteriores podemos introducir la definición de continuo encadenable.

Definición 1.5.3. Un continuo X se dice *encadenable* si para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\varepsilon - cadena$ en X que es un cubrimiento de X.

Ejemplo 1.5.4. *El intervalo* $[0,1]$ *es encadenable.* Para ver esto, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Hacemos una partición $a_0 = 1 < a_1 < a_2 ... < a_{N-1} < a_N = 1$ del intervalo $[0,1]$, de manera que $|a_k - a_{k-1}| = \frac{1}{N}$, para todo $k \in \{1, 2, ..., N\}$. Ahora, para cada $a_k \in [0,1]$ construimos un abierto centrado en a_k y radio $\frac{2}{3N}$. Así, $\left\{B\left(a_k, \frac{2}{3N}\right) : k \in \{0, 1, ..., N\}\right\}$ es una $\varepsilon -$ cadena para cualquier $\varepsilon > 0$.

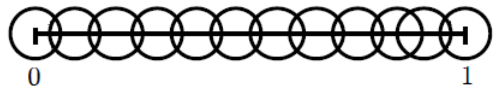

Figura 1.5.2: Una $\varepsilon -$ *cadena* en $[0, 1]$

Ejemplo 1.5.5. *La curva del topólogo es encadenable.* Aunque escribir de manera explícita la cadena puede ser complicado, la Figura 1.5.3. muestra una idea de como construir una $\varepsilon -$ cadena para cualquier $\varepsilon > 0$.

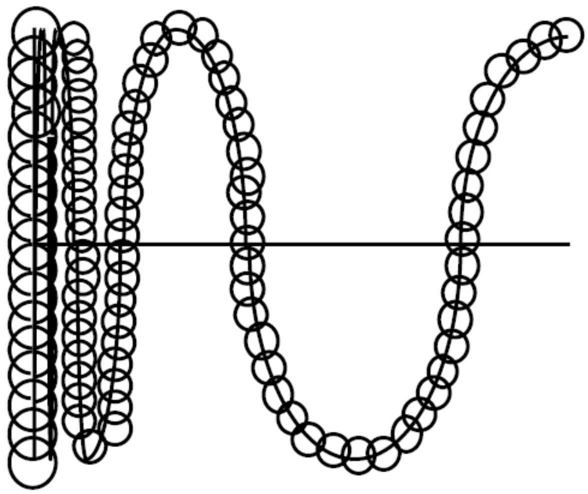

Figura 1.5.3: Una $\varepsilon -$ *cadena* en la curva del topólogo

Capítulo 2

Funciones localmente inyectivas

Este capítulo está dedicado al estudio de las funciones localmente inyectivas entre continuos, que es el objetivo central de este trabajo. En (2.1) damos definición y ejemplos de funciones localmente inyectivas entre continuos, igualmente presentamos algunos teoremas útiles para demostrar resultados importantes de éste y el siguiente capítulo. En (2.2) estudiaremos la relación que existe entre árboles, grafos y unión finita de arcos y caracterizamos los continuos que son unión finita de arcos, por medio de funciones localmente inyectivas. En (2.3) veremos que toda función localmente inyectiva entre continuos únicamente arcoconexos y toda función localmente inyectiva entre continuos con una cantidad finita de arcocomponentes es un homeomorfismo. Por último en (2.4) hacemos un breve estudio acerca de los homeomorfismos locales entre continuos, presentando definición, ejemplos y un resultado que relaciona las funciones localmente inyectivas con los homeomorfismos locales.

2.1. Definición, ejemplos y propiedades

En esta sección damos la definición, ejemplos y algunas propiedades de las funciones localmente inyectivas entre continuos.

Definición 2.1.1. Sean X e Y continuos. Una función continua $f : X \to Y$ se dice *localmente inyectiva*, si para todo $x \in X$ existe un abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$ y la función restringida $f|_U : U \to Y$ es inyectiva.

Observación 2.1.2. Si $f : X \to Y$ es una función localmente inyectiva entre continuos, entonces $f|_K : K \to Y$ también es localmente inyectiva para todo subcontinuo K de X.

Claramente toda función inyectiva entre continuos es localmente inyectiva, sin embargo lo recíproco no siempre se tiene. A continuación damos un ejemplo de una función localmente inyectiva entre continuos que no es inyectiva.

Ejemplo 2.1.3. Sea $f : [0,1] \to S^1$ definida por $f(t) = e^{2\pi it}$, para $t \in [0,1]$. Como $f(0) = f(1) = 1$, f no es inyectiva. Sin embargo existen abiertos $[0,a)$ y $(b,1]$ de $[0,1]$ tales que $0 \in [0,a)$, $1 \in (b,1]$ y las restricciones $f|_{[0,a)}$ y $f|_{(b,1]}$ son inyectivas. Por lo tanto f es localmente inyectiva.

Los profesores S. Sabogal y R. Isaacs en [6] demostraron que las funciones $f_n(z) = z^n$, donde n es un entero positivo, son todas las funciones localmente inyectivas de S^1 sobre S^1, salvo equivalencias.

Los siguientes teoremas muestran propiedades sencillas de las funciones localmente inyectivas.

Teorema 2.1.4. *Sea $f : X \to Y$ una función localmente inyectiva y sobreyectiva entre continuos. Para todo $x \in X$, sea $U \subset X$ el abierto tal que $x \in U$ y $f|_U$ es inyectiva. Entonces para todo $A \subset U$, A cerrado de X, la función $f|_A : A \to f(A)$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Como $A \subset U$ y $f|_U$ es inyectiva, tenemos que $f|_A : A \to f(A)$ es continua y biyectiva. Veamos que $f|_A$ es cerrada. Sea $K \subset A$, donde K es cerrado. Como A es cerrado de X, K es cerrado de X. Por [4, Teorema 1.4, pág.224], K es compacto. Así $f(K)$ es compacto. Por [4, Teorema 1.4, pág.224], $f(K)$ es cerrado y por [4, Teorema 12.2, pág.89], $f|_A : A \to f(A)$ es un homeomorfismo. **Q.E.D.**

Teorema 2.1.5. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos funciones localmente inyectivas entre continuos. Entonces su composición $g \circ f : X \to Z$ es localmente inyectiva.*

Demostración. Sean f y g funciones localmente inyectivas. Entonces, para todo $x \in X$ existe un abierto $V \subset X$, tal que $x \in V$ y $f|_V$ es inyectiva. Además, $f(x) \in Y$ y como g es localmente inyectiva existe un abierto $W \subset Y$, tal que $f(x) \in W$ y $g|_W$ es inyectiva. Por otro lado, como f es continua, existe un abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subset W$. Sea $O = V_x \cap U$ abierto de X. Veamos que $(g \circ f)|_O$ es inyectiva. Sean

$x_1, x_2 \in O$ tal que $x_1 \neq x_2$. Como $f|_O$ es inyectiva, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ahora, $f(x_1)$ y $f(x_2)$ están en $f(O) \subset W$ y $g|_W$ es inyectiva. Así, $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. **Q.E.D.**

Definición 2.1.6. Una función $f : X \to Y$ entre continuos se dice *finita a uno*, si para cada $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ tiene un número finito de elementos. Además, al conjunto $f^{-1}(y)$ se le llama la *fibra* de y.

Teorema 2.1.7. *Sea $f : X \to Y$ una función localmente inyectiva entre continuos, entonces f es finita a uno.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función localmente inyectiva entre continuos. Entonces para todo $x \in X$, existe un abierto $U_x \subset X$ tal que $x \in U_x$ y $f|_{U_x}$ es inyectiva. Además, $\{U_x : x \in X\}$ es un cubrimiento de X. Como X es compacto, tiene un subcubrimiento finito $\{U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_k}\}$, donde f restringida a cada U_{x_i}, con $i \in \{1, 2, ..., k\}$, es inyectiva. Note que, para todo $y \in Y$, U_{x_i} tiene a lo más un elemento de $f^{-1}(y)$. Por lo tanto $|f^{-1}(y)| \leq k$, para todo $y \in Y$. En conclusión f es finita a uno.
Q.E.D.

Observación 2.1.8. De la demostración del teorema anterior, se deduce que el número de elementos de cada una de las fibras de una función localmente inyectiva entre continuos está acotado por una constante.

2.2. Árboles, grafos y unión finita de arcos

Esta sección esta dedicada al estudio de la relación que existe entre árboles, grafos y continuos que son unión finita de arcos. Por último daremos una caracterización de los continuos que son unión finita de arcos por medio de una función localmente inyectiva.

Definición 2.2.1. Una *dendrita* es un continuo localmente conexo que no contiene una curva cerrada simple.

Las dendritas son ejemplos de continuos en el plano, arcoconexos tales que todo subcontinuo propio es una dendrita. Para mayor información sobre las dendritas ver [10, capítulo X].

Definición 2.2.2. Un continuo X se dice que es *unión finita de arcos*, si existen arcos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ en X, tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i$.

El arco, la curva cerrada simple, un $n-$odo, son algunos ejemplos de continuos que son unión finita de arcos. El abanico armónico es un continuo que no es unión finita de arcos.

Definición 2.2.3. Un *grafo* es un continuo que es unión finita de arcos, tal que cualesquiera dos de ellos son disjuntos ó se interceptan sólo en uno o ambos de sus puntos finales.

El arco, la curva cerrada simple, un $n-$odo, son algunos ejemplos de grafos. Claramente, el abanico armónico y la curva del topólogo son ejemplos de continuos que no son grafos.

Definición 2.2.4. Un *árbol* es un grafo que no contiene una curva cerrada simple.

No es difícil ver que un árbol es una dendrita. Sin embargo, existen dendritas que no son árboles. A continuación, presentamos dos ejemplos de dendritas que no son árboles.

Ejemplo 2.2.5. Sean $D_1 = \overline{ao} \cup \overline{bo} \cup \overline{co} \cup \overline{do}$, donde $a = (-1, 0)$, $b = (1, 0)$, $c = \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $d = \left(0, -\frac{1}{3}\right)$ y $o = (0, 0)$, y $D_2 = D_1 \cup \overline{eg} \cup \overline{fg} \cup \overline{hj} \cup \overline{ij} \cup \overline{km} \cup \overline{lm} \cup \overline{nq} \cup \overline{pq}$, donde $e = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$, $f = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$, $g = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $h = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$, $i = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$, $j = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $k = \left(-\frac{1}{9}, \frac{1}{6}\right)$, $l = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{6}\right)$, $m = \left(0, \frac{1}{6}\right)$, $n = \left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{6}\right)$, $p = \left(\frac{1}{9}, -\frac{1}{6}\right)$ y $q = \left(0, -\frac{1}{6}\right)$; es decir, D_2 se construye pegando dos arcos en los puntos medios de cada arco cuya unión es D_1, de manera que todo arco cuya unión es D_2 tiene un punto final que no es un punto de ningún otro arco. De esta manera, podemos inferir que D_n es la unión de D_{n-1} con $2^{(2n-1)}$ arcos. Por otro lado, definimos $f_1^2 : X_2 \to X_1$ como la función cociente como que identifica los arcos $\overline{ef}$, $\overline{kl}$, $\overline{hi}$, $\overline{np}$. De manera similar, definimos inductivamente $f_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde claramente cada f_i^{i+1} es una función cociente y por lo tanto continua. Además, es fácil ver que cada f_i^{i+1} es una función monótona. Sea $\mathcal{D}_4 = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}$. Luego $\mathcal{D}_4$ es homeomorfo a $\varprojlim \{D_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, por [10, Teorema 2.10, pág.23]. Además, como cada D_i es una dendrita, entonces $\varprojlim \{D_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ es una dendrita, por [10, Teorema 10.36, pág.180]. Así, $\mathcal{D}_4$ es una dendrita.

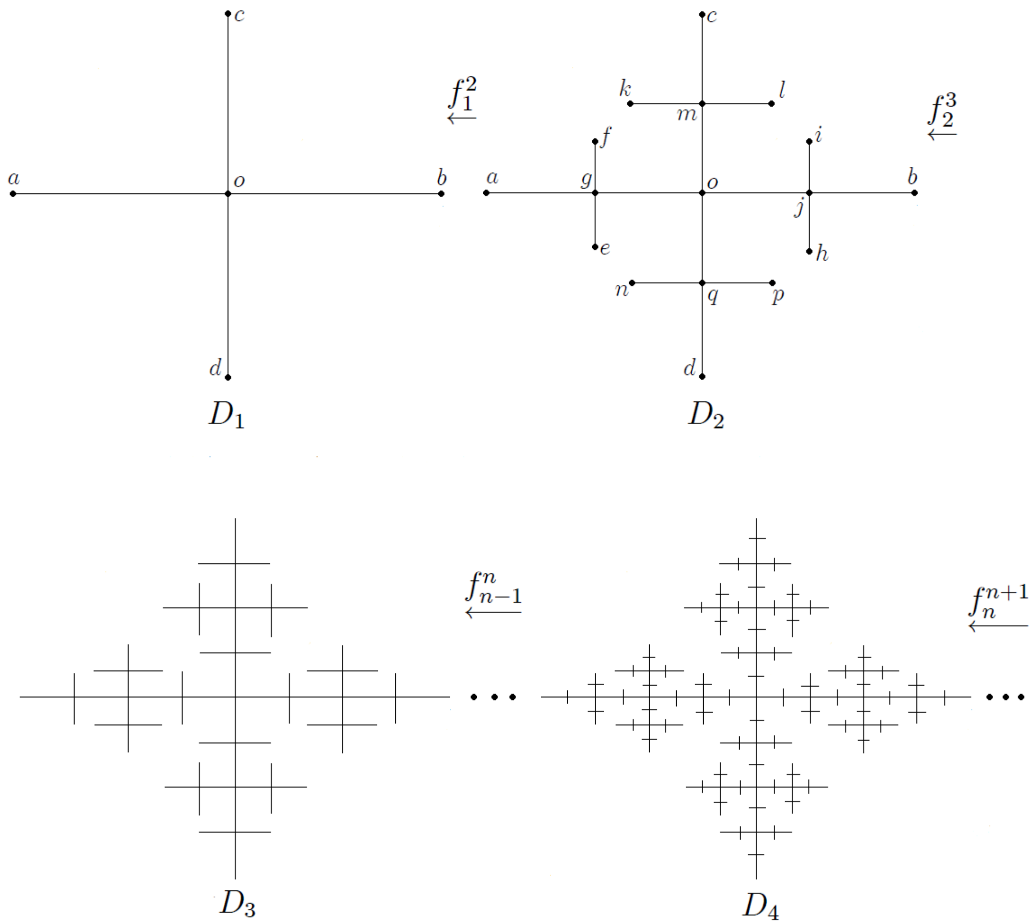

Figura 2.2.1: Continuo $\mathcal{D}_4$

Ejemplo 2.2.6. Definimos el continuo $\mathcal{F}_\omega$ como $\mathcal{F}_\omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_i$, donde

$$Y_i = \left\{ \left(\frac{r}{i+1}, \frac{r}{(i+1)^2} \right) \in \mathbb{R}^2 : r \in [0,1] \right\}.$$

Note que $\mathcal{F}_\omega$ no es un árbol, ya que hay una cantidad numerable de arcos Y_i, cuya intersección $Y_j \cap Y_k = \{(0,0)\}$ para todo j y k en $\mathbb{N}$ con $j \neq k$.

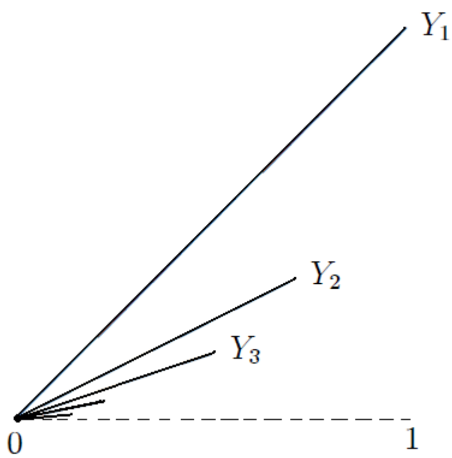

Figura 2.2.2: Continuo $\mathcal{F}_\omega$

Definición 2.2.7. Sean X un continuo y $x_0 \in X$. Entonces, si $X \setminus \{x_0\}$ no es conexo, diremos que x_0 es un *punto de corte* de X. En caso contrario, diremos que x_0 es un *punto de no corte* de X.

Definición 2.2.8. Sean X un continuo y $x' \in X$. Si no existe un arco $\alpha = \overline{pq}$ en X tal que $x' \in \alpha \setminus \{p, q\}$, diremos que x' es un *punto final* de X.

Observación 2.2.9. Todo punto de no corte de un continuo no necesariamente es un punto final. Por ejemplo, todo punto de una curva cerrada simple es un punto de no corte pero ninguno de ellos es un punto final. Sin embargo, por [10, Proposición 9.27, pág.153] todo punto de no corte de una dendrita es un punto final y viceversa.

Teorema 2.2.10. *Sea X un continuo, entonces X es un árbol si y solo si X es una dendrita con una cantidad finita de puntos finales.*

Demostración. Sea X un árbol, luego X es una dendrita. Además, X tiene un número finito de puntos de no corte, por [10, Proposición 9.28, pág.154]. Estos puntos de no corte son los puntos finales de X, por [10, Proposición 9.27, pág.153]. Por lo tanto, X es una dendrita con una cantidad finita de puntos finales. Recíprocamente, si X es una dendrita con una cantidad finita de puntos finales, por [10, Teorema 10.7, pág.168], estos puntos finales son los puntos de no corte de X. Entonces X es un continuo que tiene una cantidad finita de puntos de no corte. Así, X es un árbol, por [10, Proposición 9.28, pág.154]. **Q.E.D.**

A continuación discutiremos la veracidad de las afirmaciones en que se relacionan árboles, grafos y uniones finitas de arcos. En caso de no ser ciertas, daremos un ejemplo.

Ejemplo 2.2.11. *Existe un continuo que es unión finita de arcos y no es un grafo.* Sea $X = [0,1] \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n\,(t, f_n(t))$, donde cada G_i es el gráfico de la función f_i y $f_i : \left[\frac{3^{i+1}}{4^{i+1}}, \frac{3^i}{4^i}\right] \to \left[0, \frac{3^i}{4^{i+1}}\right]$, se define como $f_i(t) = \frac{3^i}{4^{i+1}} - \left|2\left(t - \frac{3^{i+1}}{4^{i+1}}\right) - \frac{3^i}{4^{i+1}}\right|$, para cada $i \in \{0, 1, ...\}$. Note que X es la unión finita de dos arcos y sin embargo, no lo podemos escribir como una unión finita de arcos tales que sólo se intercepten en uno o ambos de sus puntos finales; es decir X no es un grafo, ver Figura 2.2.3.

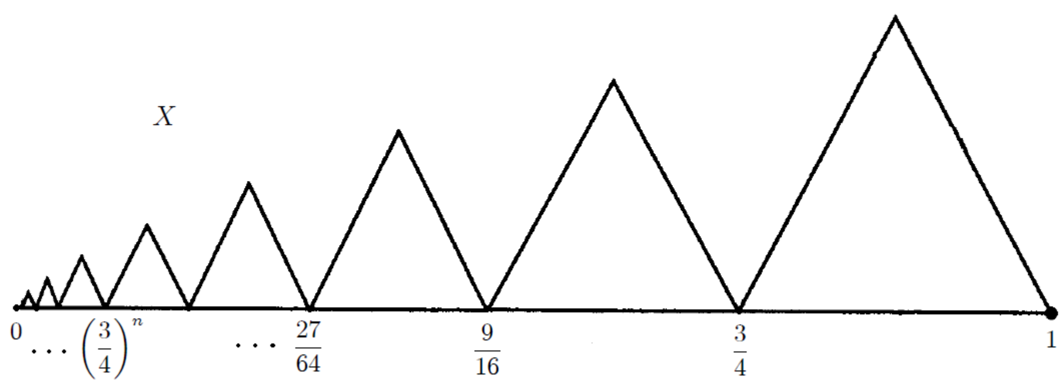

Figura 2.2.3: Una unión finita de arcos que no es un grafo

La siguientes proposiciones se siguen de las definiciones:

Proposición 2.2.12. *Si X es un grafo, entonces X es un continuo que es unión finita de arcos.*

Proposición 2.2.13. *Si X es un árbol, entonces X es un grafo.*

Como ya hemos visto, todo árbol es un grafo y todo grafo es un continuo que es unión finita de arcos. Por lo tanto tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.14. *Si X es un árbol, entonces X es un continuo que es unión finita de arcos.*

Ejemplo 2.2.15. *La curva cerrada simple es un grafo que no es un árbol.*

Ejemplo 2.2.16. *La curva cerrada simple es un continuo que es unión finita de arcos y no es un árbol.*

Es fácil ver que la imagen bajo una función localmente inyectiva de un grafo no es necesariamente un grafo. Sin embargo, como vemos en la siguiente proposición, esta imagen siempre es una unión finita de arcos.

Proposición 2.2.17. *Sean X un grafo, Y un continuo y $f : X \to Y$ una función localmente inyectiva y sobreyectiva. Entonces Y es un continuo que es unión finita de arcos.*

Demostración. Note que X es un continuo que es unión finita de arcos, por la Proposición 2.2.13. Además, existe $\varepsilon > 0$ tal que X puede escribirse como una unión finita de arcos $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$, donde $f|_{\alpha_i}$, con $i \in \{1, 2, ..., m\}$ es inyectiva, es decir $X = \bigcup_{i=1}^{m} \alpha_i$, tal que α_i es un arco y *diám* $(\alpha_i) < \varepsilon$, por [4, Teorema 4.5, pág.234]. Así, $Y = \bigcup_{i=1}^{m} f(\alpha_i)$ y por el Teorema 2.1.5., cada $f(\alpha_i)$ es un arco. **Q.E.D.**

Con la siguiente proposición mostramos que todo continuo que es unión finita de arcos es imagen localmente inyectiva de un árbol.

Proposición 2.2.18. *Sea X un continuo que es unión finita de arcos. Entonces existe un árbol T y una función $f : T \to X$ localmente inyectiva y sobreyectiva.*

Demostración. Sea X un continuo que es unión de una cantidad finita de arcos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Denotamos a X como $X_n = \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i$, si X es unión de n arcos. Vamos a mostrar por inducción sobre n, que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un árbol T_n y una función $f_n : T_n \to X_n$ localmente inyectiva y sobreyectiva.

Si $n = 1$. Entonces X_1 es un arco y $T_1 = X_1$ es un árbol. Luego existe $f_1 : T_1 \to X_1$, donde f_1 es la función identidad y claramente localmente inyectiva y sobreyectiva.

Supongamos que para $X_{n-1} = \bigcup_{i=1}^{n-1} \alpha_i$, existe un árbol T_{n-1} y una función $f_{n-1} : T_{n-1} \to X_{n-1}$ localmente inyectiva y sobreyectiva. Consideraremos dos casos.

1. La intersección $\alpha_n \cap X_{n-1}$ es conexa. Entonces esta intersección es un arco y lo denotamos como $\overline{x_2x_3}$. Denotando α_n como $\overline{x_1x_4}$, tenemos que $x_2 \in \overline{x_1x_3}$ y $x_3 \in \overline{x_2x_4}$. Luego $X_n = X_{n-1} \cup \overline{x_1x_2} \cup \overline{x_3x_4}$. Tomamos dos puntos t_2 y $t_3 \in T_{n-1}$, tales que $f_{n-1}(t_2) = x_2$ y $f_{n-1}(t_3) = x_3$. Ahora, sean D_n la unión de un arco $\overline{t_1t_2'}$ con T_{n-1}, tal que t_2' está identificado con t_2 y $T_{n-1} \cap \overline{t_1t_2'} = \{t_2\}$, y D_n' la unión de un arco $\overline{t_3't_4}$ con T_{n-1}, tal que

t_3' está identificado con t_3 y $T_{n-1} \cap \overline{t_3' t_4} = \{t_3\}$. Definimos $T_n = D_n \cup D_n'$ y extendemos f_{n-1} a la función localmente inyectiva $f_n : T_n \to X_n$ definida como $f_n|_{T_{n-1}} = f_{n-1}$, $f_n|_{\overline{t_1 t_2}} : \overline{t_1 t_2} \to \overline{x_1 x_2}$ y $f_n|_{\overline{t_3 t_4}} : \overline{t_3 t_4} \to \overline{x_3 x_4}$, donde $f_n|_{\overline{t_1 t_2}}$ y $f_n|_{\overline{t_3 t_4}}$ son homeomorfismos. Por lo tanto f_n es localmente inyectiva y sobreyectiva.

2. La intersección $\alpha_n \cap X_{n-1}$ no es conexa. Entonces, si esta intersección son dos puntos, $X_n = X_{n-1} \cup \alpha_n$ contiene una curva cerrada simple C. Denotamos como x_2 y x_3 a los puntos de la intersección $\alpha_n \cap X_{n-1}$. Tomamos un punto $x_0 \in C \setminus X_{n-1}$ y denotamos α_n como $\overline{x_1 x_4}$. Tomamos dos puntos t_2 y $t_3 \in T_{n-1}$, tal que $f_{n-1}(t_2) = x_2$ y $f_{n-1}(t_3) = x_3$. Ahora, sean D_1 la unión de un arco $\overline{t_1 t_2'}$ con T_{n-1}, tal que t_2' está identificado con t_2 y $T_{n-1} \cap \overline{t_1 t_2'} = \{t_2\}$, D_2 la unión de un arco $\overline{t_0' t_2'}$ con T_{n-1}, tal que t_2' está identificado con t_2 y $T_{n-1} \cap \overline{t_0' t_2'} = \{t_2\}$, D_3 la unión de un arco $\overline{t_0 t_3'}$ con T_{n-1}, tal que t_3' está identificado con t_3 y $T_{n-1} \cap \overline{t_0 t_3'} = \{t_3\}$, y D_4 la unión de un arco $\overline{t_4 t_3'}$ con T_{n-1}, tal que t_3' está identificado con t_3 y $T_{n-1} \cap \overline{t_4 t_3'} = \{t_3\}$. Definimos $T_n = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ y extendemos f_{n-1} a la función localmente inyectiva $f_n : T_n \to X_n$ definida como $f_n|_{T_{n-1}} = f_{n-1}$, $f_n|_{\overline{t_1 t_2}} : \overline{t_1 t_2} \to \overline{x_1 x_2}$, $f_n|_{\overline{t_0' t_2}} : \overline{t_0' t_2} \to \overline{x_0 x_2}$, $f_n|_{\overline{t_0 t_3}} : \overline{t_0 t_3} \to \overline{x_0 x_3}$, $f_n|_{\overline{t_4 t_3}} : \overline{t_4 t_3} \to \overline{x_4 x_3}$, donde $f_n|_{\overline{t_1 t_2}}$, $f_n|_{\overline{t_0' t_2}}$, $f_n|_{\overline{t_0 t_3}}$ y $f_n|_{\overline{t_4 t_3}}$ son homeomorfismos. Por lo tanto f_n es localmente inyectiva y sobreyectiva. Note que cualquier otro caso es combinación de los casos 1. y 2. **Q.E.D.**

Teorema 2.2.19. *Sea X un continuo. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(1)X es unión finita de arcos.

(2)X es la imagen de un árbol bajo una función localmente inyectiva.

(3)X es la imagen de un grafo bajo una función localmente inyectiva.

Demostración. Observe que (1) implica (2) se sigue de la Proposición 2.2.18. Todo árbol es un grafo. Así, (2) implica (3). Finalmente, (3) implica (1), por la Proposición 2.2.17. **Q.E.D.**

Ahora mostramos que los continuos que son unión finita de arcos se preservan por funciones localmente inyectivas.

Corolario 2.2.20. *Sea $f : X \to Y$ una función localmente inyectiva y sobreyectiva entre continuos. Si X es unión finita de arcos, entonces Y es unión finita de arcos.*

Demostración. Sean X un continuo que es unión finita de arcos, Y un continuo y $f : X \to Y$ una función localmente inyectiva y sobreyectiva. Entonces existe un árbol

T y una función localmente inyectiva y sobreyectiva $g : T \to X$, por el Teorema 2.2.19. Además, $f \circ g : T \to Y$ es localmente inyectiva, por el Teorema 2.1.5. Luego, Y es un continuo que es unión finita de arcos, por el Teorema 2.2.19. **Q.E.D.**

2.3. Algunos resultados

Esta sección está dedicada a un estudio parcial de las funciones localmente inyectivas entre continuos únicamente arcoconexos y funciones localmente inyectivas entre continuos con una cantidad finita arcocomponentes.

Con el siguiente resultado mostramos funciones cociente que son localmente inyectivas.

Proposición 2.3.1. *Sean X un espacio T_1 y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X, tal que $\sim$ identifica un número finito de puntos en un número finito de clases no degeneradas. Entonces $f : X \to X/\sim$ es localmente inyectiva.*

Demostración. Sea $x \in X$. Definamos $A = \{y \in X : y \neq x \text{ y } f^{-1}(f(y)) \neq \{y\}\}$. Note que A es finito y como X es T_1, A es cerrado. Sea $U = X \setminus A$. Claramente U es abierto, $x \in U$ y $f|_U : U \to f(U)$ es inyectiva. **Q.E.D.**

En virtud de la proposición anterior, podemos mostrar que la función definida en el Ejemplo 2.1.3. es localmente inyectiva, ya que esta función es una función cociente donde solo identificamos los puntos 0 y 1 en el intervalo cerrado $[0, 1]$.

En lo que sigue de esta sección estudiaremos algunos casos particulares para los cuales una función localmente inyectiva es un homeomorfismo.

Proposición 2.3.2. *Sean Y una dendrita y $f : [0, 1] \to Y$ una función localmente inyectiva, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Supongamos que existen dos puntos a y b en $[0, 1]$ tales que $a < b$ y $f(a) = f(b)$. Sea $L = f([a, b])$. Como Y es una dendrita y L es un subcontinuo de Y, L es una dendrita, por [10, Corolario 10.6, pág.167]. L tiene al menos dos puntos de no corte, por [10, Teorema 6.6, pág.89]. De lo anterior, podemos tomar un punto de no corte $y \neq f(a)$. Sea $c \in int([a, b])$ tal que $f(c) = y$. Como f es localmente inyectiva, existe un abierto $U_c \subset [0, 1]$ tal que $c \in U_c$ y $f|_{U_c}$ es inyectiva. Además existe $\delta > 0$ tal que $[c - \delta, c + \delta] \subset U_c \cap [a, b]$. Note que $[c - \delta, c + \delta]$ y $f([c - \delta, c + \delta])$ son subcontinuos de $[0,1]$ y Y, respectivamente. Como $f|_{[c-\delta,c+\delta]}$ es biyectiva y continua, por el Corolario 1.1.9., $f|_{[c-\delta,c+\delta]}$ es un homeomorfismo. Así, $y \in int\left(f\left([c-\delta, c+\delta]\right)\right)$, por lo tanto y es un punto de corte de $f\left([c-\delta, c+\delta]\right)$. Tenemos que $f\left([c-\delta, c+\delta]\right)$ y $L \setminus \{y\} \subset L$ son conexos, tales que $f\left([c-\delta, c+\delta]\right) \cap L \setminus \{y\} = f\left([c-\delta, c+\delta]\right) \setminus \{y\}$ no es conexo. Pero esto contradice que L sea una dendrita, ya que la intersección de dos subconjuntos conexos de L es conexo, por [10, Teorema 10.10, pág.169]. Por lo tanto f es inyectiva y es un homeomorfismo, por el Corolario 1.1.9. **Q.E.D.**

Definición 2.3.3. Un continuo X se dice *únicamente arcoconexo*, si para cada par de puntos x_0 y x_1 en X existe un único arco en X que tiene como puntos finales a x_0 y x_1.

A continuación mostramos una caracterización de cuando un continuo es únicamente arcoconexo.

Proposición 2.3.4. *Sea X un continuo arcoconexo, entonces X es únicamente arcoconexo si y sólo si X no contiene una curva cerrada simple.*

Demostración. Sea X un continuo arcoconexo y supongamos que tiene una curva cerrada simple $C \subset X$. Ahora, sean x_0 y $x_1 \in C$, tal que $x_0 \neq x_1$. Note que C es la unión de dos arcos distintos cuyos puntos finales son x_0 y x_1. Por lo tanto, X no es únicamente arcoconexo. Inversamente, supongamos que X no es únicamente arcoconexo. Entonces existen por lo menos dos arcos α_0 y α_1 en X, tal que los puntos finales de α_0 son puntos finales de α_1. Así X contiene una curva cerrada simple. **Q.E.D.**

Todo continuo localmente conexo es arcoconexo, por [10, Teorema 8.23, p.130]. Luego por la Proposición 2.3.4. toda dendrita es únicamente arcoconexo.

Teorema 2.3.5. *Si X es un continuo únicamente arcoconexo, entonces toda función $f : X \to X$ localmente inyectiva y sobreyectiva es un homeomorfismo.*

Demostración. Sean X un continuo únicamente arcoconexo y $f : X \to X$ una función localmente inyectiva. Supongamos que existen dos puntos distintos x_0 y $x_1 \in X$ tales que $f(x_0) = f(x_1)$. Como X es arcoconexo, existe un arco $\alpha \subset X$ con puntos finales x_0 y x_1. Por la Observación 2.1.2., $f|_{\alpha} : \alpha \to f(\alpha)$ es localmente inyectiva. Note que $f(\alpha)$ es un subcontinuo localmente conexo de X. Además $f(\alpha)$ es únicamente arcoconexo. Luego, por la Proposición 2.3.4. $f(\alpha)$ no contiene una curva cerrada simple. Entonces $f(\alpha)$ es una dendrita. Así, $f|_{\alpha}$ es un homeomorfismo, por la Proposición 2.3.2.

Pero esto es una contradicción, ya que x_0 y x_1 están en α y $f|_\alpha(x_0) = f|_\alpha(x_1)$. Luego f es inyectiva y por el Corolario 1.1.9., f es un homeomorfismo. **Q.E.D.**

Como una dendrita es únicamente arcoconexo, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.3.6. *Sea $f : X \to X$ una función localmente inyectiva y sobreyectiva donde X es una dendrita, entonces f es un homeomorfismo.*

El abanico armónico, ver Ejemplo 1.1.5. es un continuo únicamente arcoconexo, por lo tanto toda función localmente inyectiva del abanico armónico sobre el abanico armónico es un homeomorfismo.

Definición 2.3.7. Dado un continuo X y $x \in X$, la *arcocomponente* de x en X es el conjunto de puntos que pueden unirse a x por un arco en X. Además, una *arcocomponente* de un continuo es la arcocomponente de algún punto.

Teorema 2.3.8. *Si X es un continuo con una cantidad finita de arcocomponentes que no contiene una curva cerrada simple, entonces toda función $f : X \to X$ localmente inyectiva y sobreyectiva es un homeomorfismo.*

Demostración. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función localmente inyectiva. Supongamos que existen dos puntos distintos x_0 y x_1 en X, tales que $f(x_0) = f(x_1)$. Note que si x_0 y x_1 están en una misma arcocomponente, entonces existe un arco α que contiene a x_0 y x_1. Por la Observación 2.1.2. $f|_\alpha$ es localmente inyectiva. Además $f(\alpha)$ es un subcontinuo localmente conexo de X que no contiene una curva cerrada simple. Entonces $f(\alpha)$ es una dendrita. Luego f es un homeomorfismo, por la Proposición 2.3.2. Pero esto es una contradicción ya que x_0 y $x_1 \in \alpha$ y $f|_\alpha(x_0) = f|_\alpha(x_1)$. Luego f es inyectiva y por el Corolario 1.1.7. f es un homeomorfismo. Por otra parte, note que la imagen de una arcocomponente debe estar contenida en una arcocomponente. Así, si x_0 y x_1 son puntos en diferentes arcocomponentes de X y como X tiene un número finito de arcocomponentes, entonces f no puede ser sobreyectiva. Con lo que contradecimos que f es localmente inyectiva. De esta manera f es un homeomorfismo. **Q.E.D.**

La curva del topólogo es un continuo que tiene dos arcocomponentes, por lo tanto toda función localmente inyectiva de la curva del topólogo sobre la curva del topólogo es un homeomorfismo.

2.4. Homeomorfismos locales

Los homeomorfismos locales entre continuos son también conocidos como funciones recubridoras y son funciones que preservan muchas propiedades topológicas; por mencionar algún ejemplo, toda función recubridora es un homeomorfismo local. Para mayor información, consultar [9] y [11].

Definición 2.4.1. Sean X e Y continuos. Una función continua $f : X \to Y$ es un *homeomorfismo local*, si para todo $x \in X$ existe un abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$, $f(U) \subset Y$ es abierto y la función restringida $f|_U : U \to f(U)$ es un homeomorfismo.

Con el siguiente resultado, mostramos una caracterización de los homeomorfismos locales usando funciones localmente inyectivas.

Teorema 2.4.2. *Sea $f : X \to Y$ una función entre continuos, entonces f es un homeomorfismo local si y sólo si f es abierta y localmente inyectiva.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo local entre continuos. Es claro que f es localmente inyectiva. Para ver que f es abierta, sea $V \subset X$ abierto. Veamos que $f(V)$ es abierto en Y. Sea $y \in f(V)$, entonces existe $x \in V$ tal que $f(x) = y$. Como f es un homeomorfismo local, existe un abierto U de X tal que $x \in U$, $f(U)$ es abierto de Y y $f|_U : U \to f(U)$ es un homeomorfismo. Así, $f(U \cap V)$ es abierto de $f(U)$ y, por tanto, $f(U \cap V)$ es abierto de Y. Claramente $y \in f(U \cap V)$ y $f(U \cap V) \subset f(V)$. De lo anterior f es abierta. Recíprocamente, Sea $f : X \to Y$ una función localmente inyectiva entre continuos. De la Definición 2.1.1. f es continua y para todo $x \in X$, existe $U_x \subset X$ abierto tal que $x \in U_x$ y $f|_{U_x}$ es inyectiva. Por otro lado, como f es abierta, $f(U_x) \subset Y$ es abierto. Además $f|_{U_x}$ es abierta. Así $f|_{U_x}$ es continua, biyectiva y abierta. Luego $f|_{U_x}$ es un homeomorfismo, por [4, Teorema 12.2, pág.89]. **Q.E.D.**

El siguiente teorema nos permite determinar cuando una función localmente inyectiva entre continuos, es un homeomorfismo local.

Teorema 2.4.3. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos. Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

(1) f es localmente inyectiva y abierta.

(2) f es localmente inyectiva y existe un entero positivo n tal que $|f^{-1}(y)| = n$, para todo $y \in Y$.

(3) f es un homeomorfismo local.

Demostración. La equivalencia entre (1) y (3) se sigue del Teorema 2.4.2. Es claro que si f es un homeomorfismo local, entonces f es localmente inyectiva. Además, existe un entero positivo n tal que $|f^{-1}(y)| = n$, para todo $y \in Y$, por [1, Teorema 5.1, pág.10]. De esta manera (3) implica (2). Finalmente si suponemos (2), f es localmente inyectiva y existe un entero positivo n tal que $|f^{-1}(y)| = n$, para todo $y \in Y$. Luego f es abierta, por [1, Teorema 5.2, pág.10]. Así, f es un homeomorfismo local, por [1, Teorema 5.1, pág.10]. Por lo tanto (2) implica (3). **Q.E.D.**

Claramente todo homeomorfismo es un homeomorfismo local, sin embargo lo recíproco no siempre se cumple. A continuación presentamos un homeomorfismo local entre continuos que no es un homeomorfismo.

Ejemplo 2.4.4. Sea $f : S^1 \to S^1$ definida como $f(z) = z^2$, para $z \in S^1$. Claramente esta función no es un homeomorfismo ya que no es inyectiva. Sin embargo, f es localmente inyectiva. Además para cada $w \in S^1$ existen exactamente dos puntos distintos z_0 y $z_1 \in S^1$ tal que $f(z_0) = f(z_1) = w$. Así $|\{f^{-1}(z) : z \in S^1\}| = 2$, para cada $z \in S^1$. De esta manera f es un homeomorfismo local, por el Teorema 2.4.3.

Note que toda función $f : S^1 \to S^1$ que es localmente inyectiva es un homeomorfismo local. El siguiente ejemplo nos muestra que existe un continuo X y una función $f : X \to X$ localmente inyectiva tal que f no es un homeomorfismo local.

Ejemplo 2.4.5. Sea $X = S_1 \cup S_2$, donde

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \text{ y } S_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 1\}.$$

Claramente $S_1 \cap S_2 = \{1\}$. Así X es un continuo. Ahora definimos $f : X \to X$ como

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{si } z \in S_1; \\ z & \text{si } z \in S_2. \end{cases}$$

Note que f es continua y sobreyectiva. Observe que f es localmente inyectiva. Tomemos $w_0 = 1$ y $w_1 = 3$ en X. Entonces $f^{-1}(w_0) = \{1, -1\}$ y $f^{-1}(w_1) = \{3\}$. Así, f no es un homeomorfismo local, por el Teorema 2.4.3.

En [1] se estudian condiciones suficientes y necesarias para que toda función localmente inyectiva de un continuo sobre el mismo sea un homeomorfismo. En un principio se conjeturaba, que si un continuo X no contenía una curva cerrada simple, entonces toda función localmente inyectiva $f: X \to X$ era un homeomorfismo. Sin embargo, el siguiente resultado nos muestra que esta conjetura no es cierta.

Proposición 2.4.6. *Existen un continuo X que no contiene una curva cerrada simple y una función localmente inyectiva $f: X \to X$ tal que f no es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea el solenoide diádico, denotado por $\sum_2$, el conjunto definido por $\sum_2 = \left\{ (z_n)_{n=1}^{\infty} \in (S^1)^{\mathbb{N}} : z_n^2 = z_{n-1} \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \right\}$. Es bien conocido que $\sum_2$ es un continuo con la topología de subespacio de $(S^1)^{\mathbb{N}}$. Además, $\sum_2$ es un continuo indescomponible tal que todo subcontinuo propio es un arco; es decir, no contiene una curva cerrada simple, (ver [8, Definición 2.1.34., pág.83]). Sea $f: \sum_2 \to \sum_2$ la función definida por $f\left((z_n)_{n=1}^{\infty}\right) = (z_n^3)_{n=1}^{\infty}$. También sabemos que, f es una función 3 a 1, esto es, para cada $y \in \sum_2$, $|f^{-1}(y)| = 3$ y f es un homeomorfismo local. Como todo homeomorfismo local es una función localmente inyectiva, tenemos que f es localmente inyectiva y no es un homeomorfismo. **Q.E.D.**

Definición 2.4.7. Sean X un continuo y $\alpha = \overline{pq}$ un arco en X. Diremos que α es un *arco libre*, si $\alpha \setminus \{p, q\}$ es abierto en X.

En [1, Ejemplo 4.2, pág.8] se muestra que si toda función $f: X \to X$ locamente inyectiva de un continuo sobre si mismo es un homeomorfismo, no implica que X no contenga una curva cerrada simple. El siguiente teorema formaliza este resultado.

Teorema 2.4.8. *Sea X un continuo que contiene una curva cerrada simple. Si además, la curva cerrada simple contiene un arco libre de X, entonces existe una función localmente inyectiva $f: X \to X$ que no es un homeomorfismo.*

Demostración. Sean X un continuo, S una curva cerrada simple en X y α un arco libre de X tal que $\alpha \subset S \subset X$. Sean p y q los puntos finales de α. Tomemos α_0 un subarco en $\alpha \setminus \{p, q\}$, con puntos finales p_0 y q_0. Sea $\alpha_1 = \overline{(S \setminus \alpha_0)}$. Note que $S = \alpha_0 \cup \alpha_1$ y $\alpha_0 \cap \alpha_1 = \{p_0, q_0\}$. Sean $h_i : [0, 1] \to \alpha_i$, para $i \in \{0, 1\}$, tales que $h_0(0) = h_1(1) = p_0$ y $h_1(0) = h_0(1) = q_0$. Definimos la siguiente relación sobre X:

1. $x \sim x'$ si y sólo si $x = x'$ o
2. $x, x' \in S$ y existe $t \in [0, 1]$, tal que $\{h_0(t), h_1(t)\} = \{x, x'\}$.

Es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre X. Además, si tomamos $Y = X/\sim$ es un continuo e Y es homeomorfo a X. De esta forma, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la función cociente f está definida de X sobre X. Como

h_0 y h_1 son homeomorfismos, observe que la relación de equivalencia sobre S genera una función cociente $f|_S$ topológicamente equivalente a $f_2 : S^1 \to S^1$ definida por $f_2(z) = z^2$. Finalmente note que $f|_{X\setminus\alpha_0}$ es inyectiva, donde $X \setminus \alpha_0$ es un abierto de X. Además, $\alpha \setminus \{p, q\}$ es abierto en X tal que $f|_{\alpha\setminus\{p,q\}}$ es localmente inyectiva y $X = (X \setminus \alpha_0) \cup (\alpha \setminus \{p, q\})$. Así, f es localmente inyectiva. **Q.E.D.**

Capítulo 3

Continuos arbolados

Este capítulo está dedicado al estudio de continuos arbolados, principalmente a las funciones localmente inyectivas de un continuo sobre un continuo arbolado. En (3.1) definimos continuo arbolado, seguido de algunos ejemplos que ilustran esta definición. En (3.2) presentamos el resultado más relevante de este trabajo de grado, el Teorema 3.2.5. publicado en 1996 por Jo. W. Heath acerca de las funciones localmente inyectivas de un continuo sobre un continuo arbolado. Resaltamos el hecho que la prueba que presentamos en este escrito, aunque la idea de Heath es la misma, difiere en que involucra menos conceptos y por este motivo es más sencillo entenderla. Lo anterior es uno de los principales aportes en este trabajo de grado.

3.1. Definición y ejemplos

En el Capítulo 2 dimos la definición de árbol y algunas de sus propiedades y caracterizaciones. A continuación definimos continuo arbolado seguido de algunos ejemplos que ilustran esta definición.

Definición 3.1.1. Sean X un continuo y $\mathcal{T}$ la colección de todos los árboles. X se dice *arbolado*, si para todo $\varepsilon>0$, existen $T_\varepsilon \in \mathcal{T}$ y una función $f_\varepsilon : X \to T_\varepsilon$ continua y sobreyectiva, tal que $diám\,(f_\varepsilon^{-1}(t)) < \varepsilon$ para todo $t \in T_\varepsilon$.

Todo árbol es claramente un continuo arbolado. Como mostraremos en esta sección, existe una gran variedad de continuos arbolados. Las siguientes subsecciones están dedicadas a mostrar ejemplos de continuos arbolados que no son árboles.

3.1.1. La curva del topólogo

En esta subsección mostraremos detalladamente que la curva del topólogo es un continuo arbolado. Primero note que los mínimos de la función $g(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$ con $x \in (0,1]$, son de la forma $\left(\frac{2}{(4n-1)\pi}, -1\right)$ con $n \in \mathbb{N}$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{2+\pi\varepsilon}{4\pi\varepsilon}$; esto es $\frac{2}{(4N-1)\pi} < \varepsilon$, ver Figura 3.1.1.

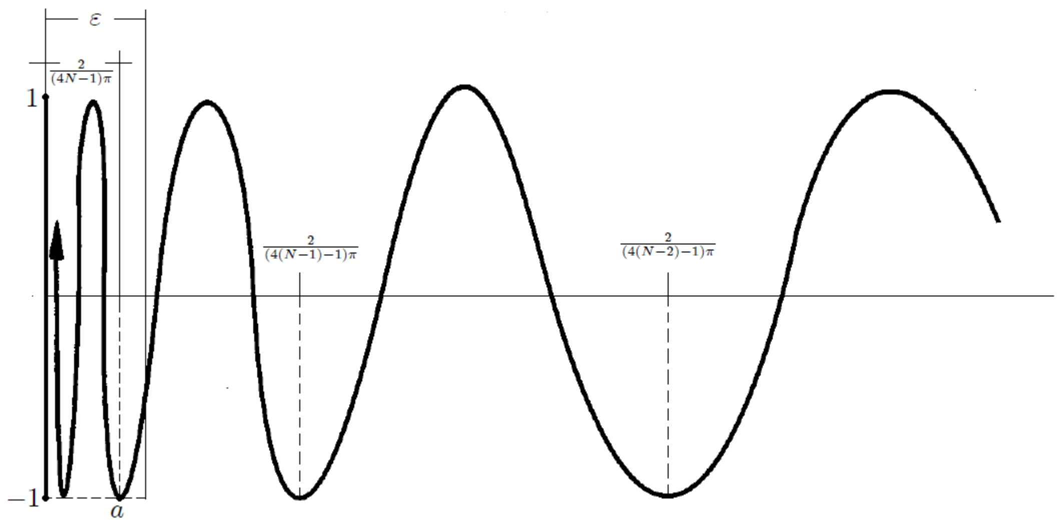

Figura 3.1.1: $S = \overline{\{(x, sen(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}}$

Sean $a = \left(\frac{2}{(4N-1)\pi}, -1\right)$ y $b = \left(\frac{2}{(4N-1)\pi}, 1\right)$. Denotemos por $\overline{ab}$ al segmento que une a con b, es decir, $\overline{ab} = \left\{\frac{2}{(4N-1)\pi}\right\} \times [-1,1]$. Sea

$$\pi : \overline{\left\{(x, sen(1/x)) : x \in \left(0, \frac{2}{(4N-1)\pi}\right]\right\}} \to \overline{ab},$$

definida por $\pi(x,y) = \left(\frac{2}{(4N-1)\pi}, y\right)$. Note que π es continua y sobreyectiva. Además, $diám\left(\pi^{-1}(t)\right) < \varepsilon$ para todo $t \in \overline{ab}$, ver Figura 3.1.2.

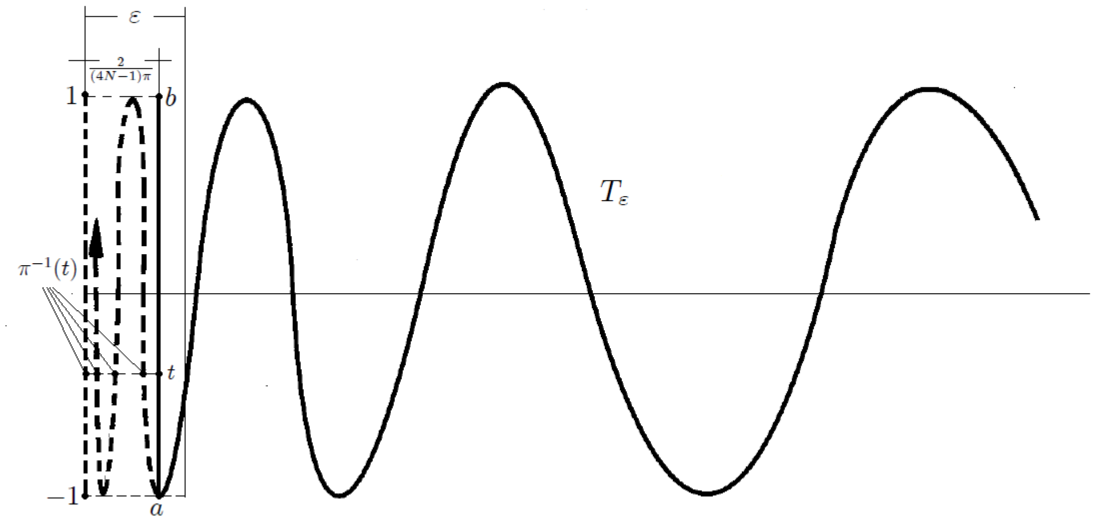

Figura 3.1.2: $f_\varepsilon : S \to T_\varepsilon$

Sea el árbol $T_\varepsilon = \overline{ab} \cup \left\{(x, sen(1/x)) : x \in \left[\frac{2}{(4N-1)\pi}, 1\right]\right\}$. Note que T_ε es un arco y por lo tanto un árbol. Definimos $f_\varepsilon : S \to T_\varepsilon$ de la siguiente manera

$$f_\varepsilon(w) = \begin{cases} w & \text{si } w \in \left\{(x, sen(1/x)) : x \in \left[\frac{2}{(4N-1)\pi}, 1\right]\right\} \\ \\ \pi(w) & \text{si } w \in \overline{\left\{(x, sen(1/x)) : x \in \left(0, \frac{2}{(4N-1)\pi}\right]\right\}} \end{cases},$$

donde claramente f_ε es sobreyectiva. Como

$$\left\{(x, sen(1/x)) : x \in \left[\frac{2}{(4N-1)\pi}, 1\right]\right\} \cap \overline{\left\{(x, sen(1/x)) : x \in \left(0, \frac{2}{(4N-1)\pi}\right]\right\}} = \{a\}$$

y $\pi(a) = a$, tenemos que f_ε es continua, por [12, Teorema 7.6, pág.45]. Además, es fácil ver que $diám\,(f_\varepsilon^{-1}(t)) < \varepsilon$ para todo $t \in T_\varepsilon$. De lo anterior el continuo S es arbolado.

3.1.2. Continuos arbolados y límites inversos

El corolario del siguiente teorema nos da una herramienta poderosa para construir continuos arbolados. Este corolario nos dice que el límite inverso de árboles es un continuo arbolado. Una consecuencia inmediata de este corolario, es que nos permite mostrar que los continuos de Knaster son arbolados.

Teorema 3.1.2. *Sea* $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *una sucesión inversa de continuos con límite inverso* $X_\infty = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ *, entonces para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $f_m : X_\infty \to X_m$*, tiene la propiedad que diám*$(f_m^{-1}(x)) < \varepsilon$ *para todo* $x \in X_m$*.*

Demostración. Sean $y = (y_n)_{n=1}^\infty$ y $z = (z_n)_{n=1}^\infty$ dos sucesiones en X_∞, y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \frac{d_n(y_n,z_n)}{2^n} < \varepsilon$. Sean $f_m : X_\infty \to X_m$ y $x \in X_m$. Por la Observación 1.4.4., f_m es continua y sobreyectiva. Note que si $y = (y_n)_{n=1}^\infty$ y $z = (z_n)_{n=1}^\infty$ pertenecen a $f_m^{-1}(x)$, entonces $y_n = z_n$ para todo $n \in \{1, 2, ..., m\}$. Es decir, los m primeros términos de cada sucesión en la fibra de x son iguales. Así

$$d(y, z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{d_n(y_n, z_n)}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{d_n(y_n, z_n)}{2^n} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{d_n(y_n, z_n)}{2^n} < \varepsilon.$$

Por lo tanto *diám* $(f_m^{-1}(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X_m$. **Q.E.D.**

El siguiente resultado nos permite construir continuos arbolados usando límites inversos.

Corolario 3.1.3. *Si* $T_\infty = \varprojlim \{T_n, f_n^{n+1}\}$ *es un continuo tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$*,* T_n *es un árbol, entonces* T_∞ *es arbolado.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.2., para todo $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$, tal que para $f_m : T_\infty \to T_m$, *diám* $(f_m^{-1}(t)) < \varepsilon$ para todo $t \in T_m$. Sabemos que f_m es continua y sobreyectiva, por lo tanto T_∞ es un continuo arbolado. **Q.E.D.**

Definición 3.1.4. Un *continuo de Knaster* es un continuo homeomorfo al límite inverso de una sucesión inversa de continuos $X_\infty = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$, donde para todo $n \in \mathbb{N}$, $X_n = [0, 1]$ y f_n^{n+1}es abierta y no es un homeomorfismo.

Como cada arco X_i es un árbol, tenemos que un continuo de Knaster es un límite inverso de árboles. Así, por el Corolario 3.1.3., obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.1.5. *Todo continuo de Knaster es arbolado.*

A continuación, mostramos dos ejemplos particulares de continuos de Knaster.

Ejemplo 3.1.6. El primer ejemplo es un continuo de Knaster $\mathcal{K}_2 = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$, donde $f_n(t) = 1- \mid 2t - 1 \mid$ y $X_n = [0, 1]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En [2, Proposición 4.2], se puede ver que $\mathcal{K}_2$ es homeomorfo a la siguiente construcción: Sean $\mathcal{C}$ el conjunto ternario de Cantor y

$$A_0 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = r^2, y \geq 0\right\},$$

donde $r + \frac{1}{2} \in \mathcal{C}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$A_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{5}{2 \cdot 3^n}\right)^2 + y^2 = r^2, y \leq 0\right\},$$

donde $r + \frac{5}{2 \cdot 3^n} \in \mathcal{C} \cap \left[\frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}\right]$. Entonces $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ es un continuo y es homeomorfo a $\mathcal{K}_2$. La Figura 3.1.3. muestra un modelo de este continuo.

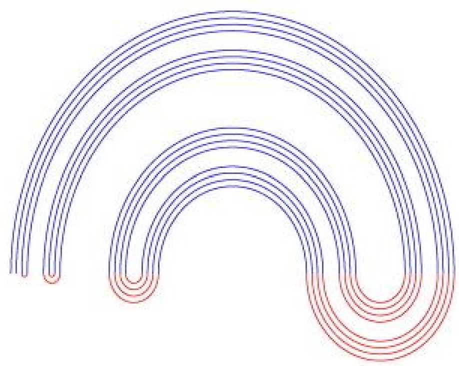

Figura 3.1.3: $\mathcal{K}_2$

Ejemplo 3.1.7. El segundo ejemplo es el continuo de Knaster $\mathcal{K}_3 = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$, donde

$$f_n(t) = \begin{cases} 3t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ 2 - 3t & \text{si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ 3t - 2 & \text{si } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

y $X_n = [0, 1]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En [2, Proposición 4.2], se puede ver que $\mathcal{K}_3$ es homeomorfo a la siguiente construcción: Sean $\mathcal{E}$ el conjunto quinario de Cantor y

$$A_0 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{7}{10 \cdot 5^n}\right)^2 + y^2 = r^2, y \leq 0\right\},$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $r + \frac{7}{10 \cdot 5^n} \in \mathcal{E} \cap \left[\frac{2}{5^{n+1}}, \frac{1}{5^n}\right]$ y sea

$$A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \left(1 - \frac{7}{10 \cdot 5^n}\right)\right)^2 + y^2 = r^2, y \geq 0\right\},$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2}{5^{n+1}} \leq \frac{7}{10 \cdot 5^n} - r \leq \frac{1}{5^n}$. Entonces $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ es un continuo y es homeomorfo a $\mathcal{K}_3$. La Figura 3.1.4. muestra un modelo de este continuo.

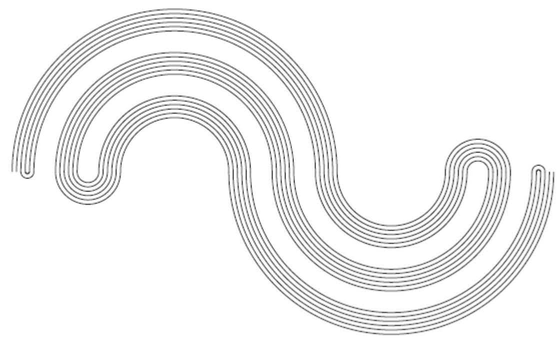

Figura 3.1.4: $\mathcal{K}_3$

3.1.3. Dendritas

En esta subsección mostraremos que una dendrita es un continuo arbolado. Por [10, Lema 10.24, pág.175] si X es una dendrita e Y es un subcontinuo de X, tenemos que para cada $x \in X \setminus Y$, existe un único punto $r(x) \in Y$ tal que $r(x)$ es un punto de cualquier arco en X, de x a cualquier punto de Y.

Definición 3.1.8. Sean X una dendrita e Y un subcontinuo de X. La función $\rho : X \to Y$ definida como

$$\rho(x) = \begin{cases} r(x) & \text{si } x \in X \setminus Y; \\ x & \text{si } x \in Y. \end{cases}$$

ρ se llama función del *primer punto* para Y.

Proposición 3.1.9. *Toda dendrita es arbolado.*

Demostración. Sea X una dendrita. Por [10, Teorema 10.27, p.176], existen una sucesión $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$, donde cada $Y_i \subset Y_{i+1} \subset X$ y cada Y_i es un árbol, y $\rho_n : X \to Y_n$, con $n \in \mathbb{N}$, donde ρ_i es la función del primer punto para Y_i. Tenemos que $(\rho_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a la función identidad sobre X. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n > m$, $d(\rho_n(x), x) < \varepsilon$, para todo $x \in X$. Así, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > m$ y para $\rho_k : X \to Y_k$, tenemos que si $y = r(x) \in Y_k$, entonces $r(x) \in \rho_k^{-1}(r(x))$ y $d(r(x), x) < \varepsilon$, para todo $x \in \rho_k^{-1}(y)$. Por lo tanto *diám* $\left(\rho_k^{-1}(y)\right) < \varepsilon$, para todo $y \in Y_k$. Por otro lado, ρ_k es continua y sobreyectiva, por [10, Lema 10.25, p.176]. Entonces X es un continuo arbolado. **Q.E.D.**

A continuación ilustramos la demostración de la Proposición 3.1.9. con un ejemplo particular. Sea X la dendrita sin arcos libres que definimos en el Ejemplo 2.2.5. Definimos Y_1 el arco que representamos en la Figura 3.1.5. Entonces la función primer punto para el punto x se representa en la misma figura. Note que esta función ρ_1 tiene fibras con diámetro grande.

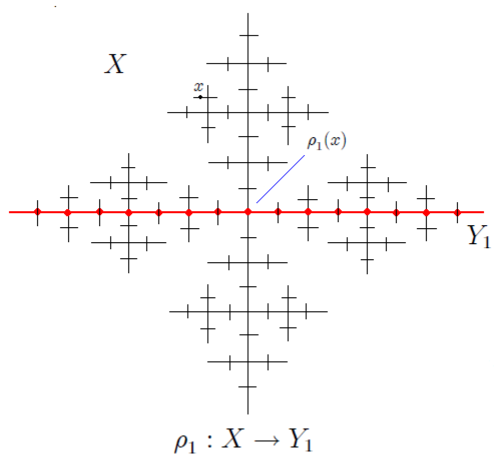

Figura 3.1.5: Función del primer punto para Y_1

Ahora tomemos Y_2 la cruz que vemos en la Figura 3.1.6 y observemos la imagen del mismo punto x pero ahora con la función ρ_2. Aunque esta función “primer punto” tiene aun fibras muy grandes, son más pequeñas que las de la función ρ_1.

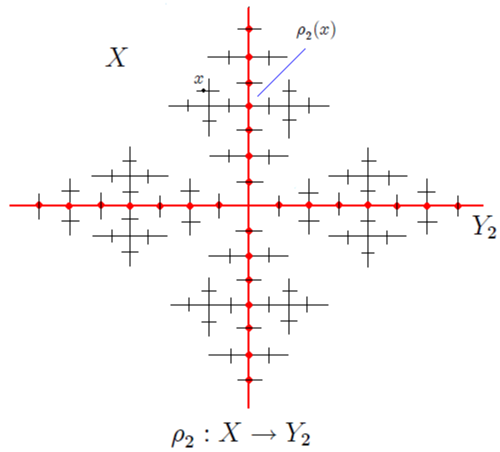

Figura 3.1.6: Función del primer punto para Y_2

De esta manera podemos definir la sucesión de árboles Y_n y funciones ρ_n donde sus fibras son en cada paso más pequeñas, como mostramos para $n = 3$ y $n = 4$ en la Figura 3.1.7.

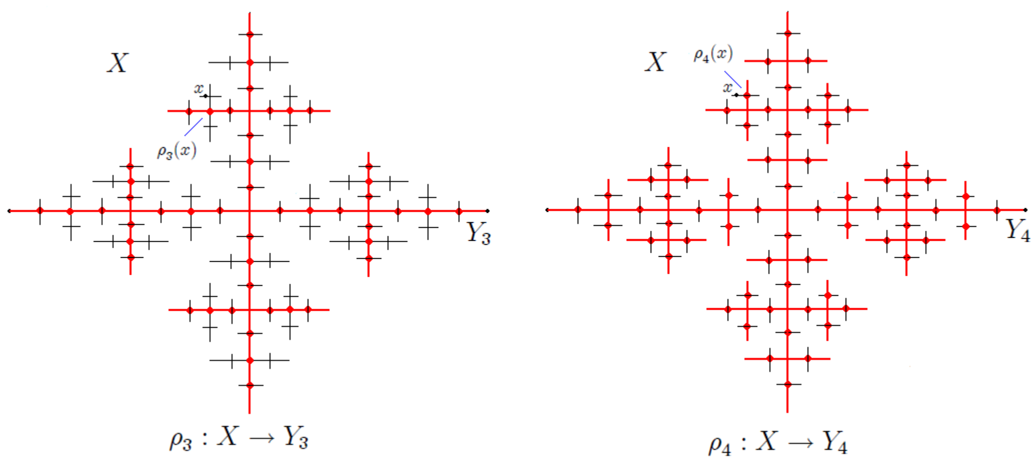

Figura 3.1.7: Función del primer punto para Y_3 y Y_4

De esta manera, no es difícil aceptar, para esta dendrita en particular en particular que dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\rho_n : X \to Y_n$ es una función tal que $di\acute{a}m\,(\rho_n^{-1}(y)) < \varepsilon$ para todo $y \in Y$, es decir, X es un continuo arbolado.

3.2. Teorema de Heath

En 1977, en [5, Referencia [3]], el profesor T. Maćkowiak prueba el siguiente resultado. *Todo homeomorfismo local de un continuo sobre un continuo arbolado es un homeomorfismo.* En 1995, en [5, Referencia [2]], el profesor T. Rogers prueba que *toda función localmente inyectiva* (no necesariamente abierta) *de un continuo hereditariamente descomponible sobre un continuo arbolado es un homeomorfismo*. Como todo homeomorfismo local entre continuos es abierta y localmente inyectiva, el teorema de Maćkowiak puede ser enunciado de la siguiente manera. *Toda función localmente inyectiva y abierta de un continuo sobre un continuo arbolado es un homeomorfismo*. El objetivo central de esta sección es mostrar detalladamente la prueba del resultado de Jo W. Heath, dada en [5] en 1996, donde vemos que la condición que la función sea abierta en la hipótesis del teorema de Maćkowiak y la condición que el continuo sea hereditariamente descomponible en la hipótesis del teorema de Rogers no son necesarias.

Antes de comenzar con la prueba de este resultado, daremos dos proposiciones que utilizaremos en la demostración.

Proposición 3.2.1. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos e $y \in Y$. Si $U \subset X$ es un abierto tal que $f^{-1}(y) \subset U$, entonces existe un abierto $W \subset Y$ tal que $y \in W$ y $f^{-1}(W) \subset U$.*

Demostración. Sean $y \in Y$ y $U \subset X$ un abierto tal que $f^{-1}(y) \subset U$. Supongamos que para todo abierto $W \subset Y$ tal que $y \in W$, tenemos que $f^{-1}(W) \cap X \backslash U \neq \varnothing$. En particular $f^{-1}\left(B(y, \frac{1}{n})\right) \cap X \backslash U \neq \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $x_n \in f^{-1}\left(B(y, \frac{1}{n})\right) \cap X \backslash U$. Así $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos en $X \backslash U$. Por [4, Teorema 1.4, p.224] $X \backslash U$ es compacto, luego $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k=i}^{\infty}$ que converge a un punto $x_0 \in X \backslash U$. Además como f es continua, tenemos que $(f(x_{n_k}))_{k=i}^{\infty}$ converge a $f(x_0) \in Y$. Por otro lado, como $x_{n_k} \in f^{-1}\left(B(y, \frac{1}{n_k})\right)$, tenemos que $f(x_{n_k}) \in B(y, \frac{1}{n_k})$ y por lo tanto $d\left(f(x_{n_k}), y\right) < \frac{1}{n_k}$. Como $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{1}{n_k} = 0$, tenemos que $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = y$. Así, $f(x_0) = y$. Entonces $x_0 \in f^{-1}(y) \subset U$. Pero esto es una contradicción ya que $x_0 \in X \backslash U$.

Q.E.D.

Definición 3.2.2. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento finito de un continuo. Si los elementos de $\mathcal{U}$ pueden ser etiquetados como $\{L_1, L_2, ..., L_m\}$ de manera que para cada $j \in \{2, 3, ..., m\}$, L_j intercepta exactamente un elemento del conjunto $\{L_1, L_2, ..., L_{j-1}\}$, decimos que $\mathcal{U}$ se puede *árbol indexar*.

Claramente las cadenas y en particular las $\varepsilon - cadenas$, (ver Definición 1.5.2.) que son un cubrimiento de los continuos encadenables, son un ejemplo de un cubrimiento finito que se puede árbol indexar. El cubrimiento del árbol T de la Figura 3.2.1 ilustra un ejemplo de un cubrimiento finito que se puede árbol indexar y no es una $\varepsilon -$ cadena.

El siguiente teorema no presenta una demostración formal en la literatura, sin embargo lo enunciamos, porque no es difícil convencerse de su veracidad.

Teorema 3.2.3. *Sea T un árbol, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un cubrimiento $\mathcal{U} = \{L_1, L_2, ..., L_{j-1}\}$ de T tal que malla $(\mathcal{U}) < \varepsilon$ y $\mathcal{U}$ se puede árbol indexar.*

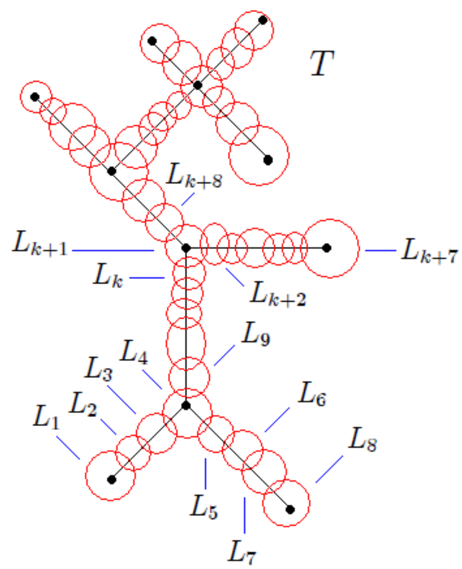

Figura 3.2.1: Cubrimiento de un árbol que se puede árbol indexar

La Figura 3.2.2 ilustra un ejemplo de un cubrimiento finito de S^1 que no se puede árbol indexar. Note que para cualquier etiqueta de este cubrimiento, L_k como último eslabón, intercepta exactamente a dos elementos cuyos subíndices son menores que k.

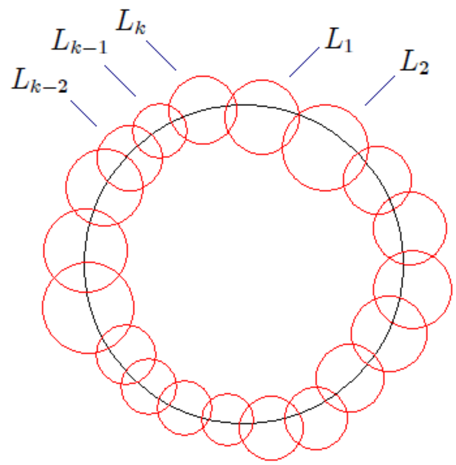

Figura 3.2.2: Cubrimiento de S^1 que no se puede árbol indexar

Proposición 3.2.4. *Sean T un árbol y $\mathcal{U} = \{U_i : i \in \Lambda\}$ un cubrimiento de T. Entonces existe un refinamiento $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ de $\mathcal{U}$ que se puede árbol indexar.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_i : i \in \Lambda\}$ un cubrimiento de T. Entonces existe $\delta > 0$, tal que para todo $t \in T$; $B(t, \delta)$ está contenida en algún U_i, por [4, Teorema 4.5, p.234]. Luego $\mathcal{B} = \{B(t, \delta) : t \in T\}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Como T es compacto, $\mathcal{B}$ tiene un subcubrimiento finito $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$. Además, haciendo un procedimiento similar al que mostramos en la Figura 3.2.1, es fácil ver que $\mathcal{V}$ se puede árbol indexar. Con esto concluimos nuestra prueba. **Q.E.D.**

Ahora estamos listos para hacer la prueba del principal resultado de este capítulo.

Teorema 3.2.5 (Heath). *Sea $h : X \to Y$ una función localmente inyectiva y sobreyectiva definida entre continuos. Si Y es arbolado, entonces h es un homeomorfismo y por lo tanto X es homeomorfo a Y.*

Demostración. Supongamos que h es una función localmente inyectiva de un continuo X sobre un continuo arbolado Y. h es finita a uno, por el Teorema 2.1.6. Además, existe un abierto $V_x \subset X$ tal que $x \in V_x$ y $h|_{V_x}$ es inyectiva, para todo $x \in X$. Como $\{V_x : x \in X\}$ es un cubrimiento de X, por [4, Teorema 4.5, p.234] existe $\lambda > 0$, tal que para todo $x \in X$, $B(x, \lambda)$ está contenida en algún V_x y por lo tanto $h|_{B(x,\lambda)}$ es inyectiva. Sean x y x' dos puntos en X tal que $d(x, x') < 2\varepsilon$ con $\varepsilon = \frac{\lambda}{2}$. Entonces siempre que $x' \in B(x, \lambda)$, se tiene que $h(x) \neq h(x')$. Es decir, si $h(x) = h(x')$ tenemos que

$d(x, x') > 2\varepsilon$. Por la Proposición 3.2.1. tenemos que para todo $y \in Y$, existe un abierto $U_y \subset Y$ con $y \in U_y$ tal que si $h^{-1}(y) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, entonces $h^{-1}(U_y) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$, ver Figura 3.2.3.

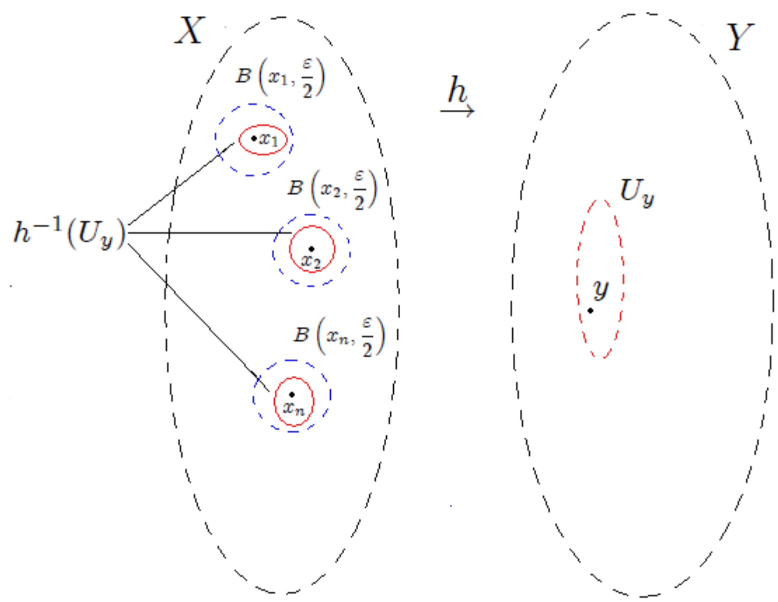

Figura 3.2.3: $h : X \to Y$

Como $\{U_y : y \in Y\}$ es un cubrimiento de Y, a partir de él vamos a construir un refinamiento que se pueda árbol indexar. Por [4, Teorema 4.5, p.234] existe $\rho > 0$ tal que para todo $y \in Y$, $B(y, \rho)$ está contenida en algún U_y. Por otro lado como Y es un continuo arbolado, existe un árbol T_ρ y una función $f_\rho : Y \to T_\rho$ continua y sobreyectiva, tal que *diám* $\left(f_\rho^{-1}(t)\right) < \rho$ para todo $t \in T_\rho$. Luego $f_\rho^{-1}(t)$ está contenida en algún U_y, ver Figura 3.2.4.

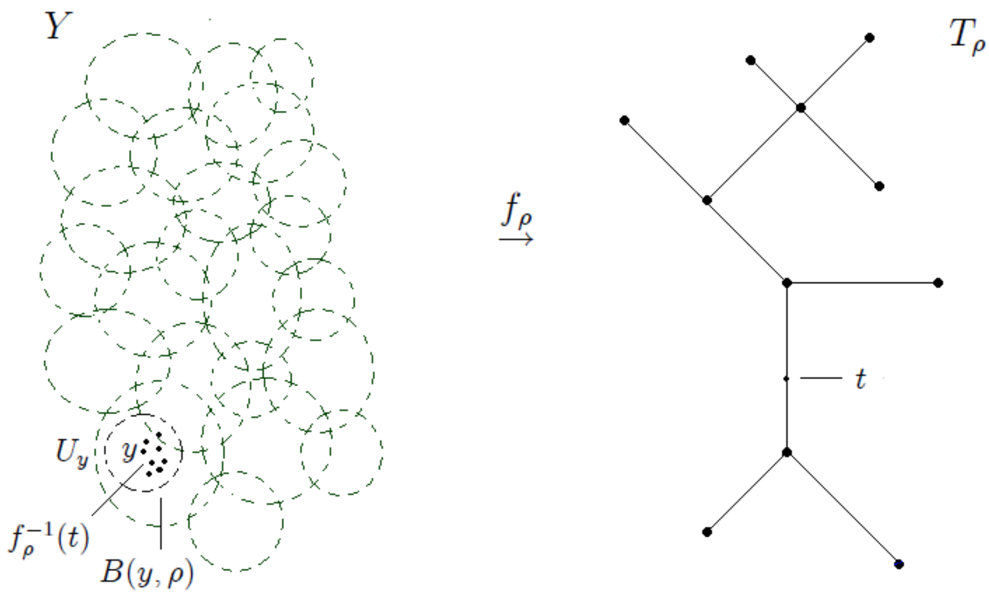

Figura 3.2.4: $f_\rho : Y \to T_\rho$

Por la Proposición 3.2.1. existe un abierto $A_t \subset T_\rho$ tal que $t \in A_t$ y $f_\rho^{-1}(A_t)$ está contenido en algún U_y. Luego $\mathcal{A} = \{A_t : t \in T_\rho\}$ es un cubrimiento de T_ρ, ver Figura 3.2.5.

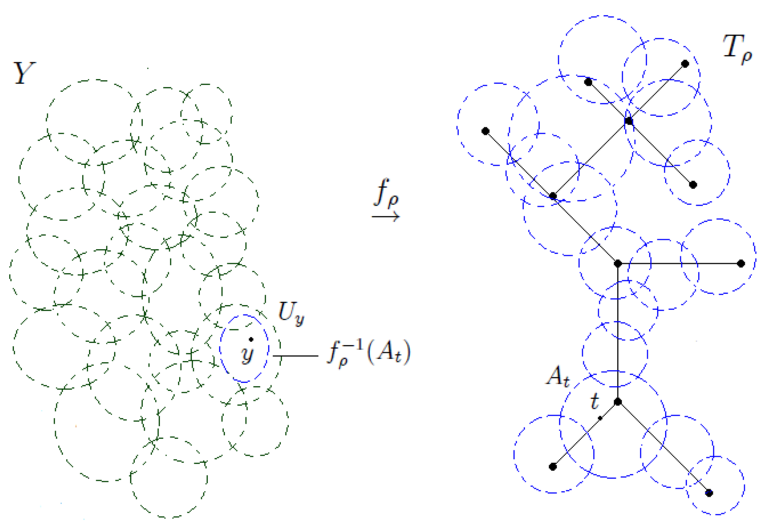

Figura 3.2.5: $\mathcal{A} = \{A_t : t \in T_\rho\}$ un cubrimiento de T_ρ

Entonces existe un refinamiento $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, ..., R_m\}$ de $\mathcal{A}$, tal que $\mathcal{R}$ se puede árbol indexar, por la Proposición 3.2.4. Además $\left\{f_\rho^{-1}(R_i) : i \in \{1, 2, ..., m\}\right\}$ es un cubrimiento de Y, ya que dado $y \in Y$, $f_\rho(y) = t \in R_k$ para algún $k \in \{1, 2, ..., m\}$, entonces $y \in f_\rho^{-1}(t) \subset f_\rho^{-1}(R_k)$. Como cada R_i está contenido en algún A_t, tenemos que $f_\rho^{-1}(R_i)$ está contenido en algún U_y. Luego $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, ..., L_m\}$, donde $L_1 = f_\rho^{-1}(R_1), L_2 = f_\rho^{-1}(R_2), ..., L_m = f_\rho^{-1}(R_m)$, es un refinamiento de $\{U_y : y \in Y\}$, ver Figura 3.2.6.

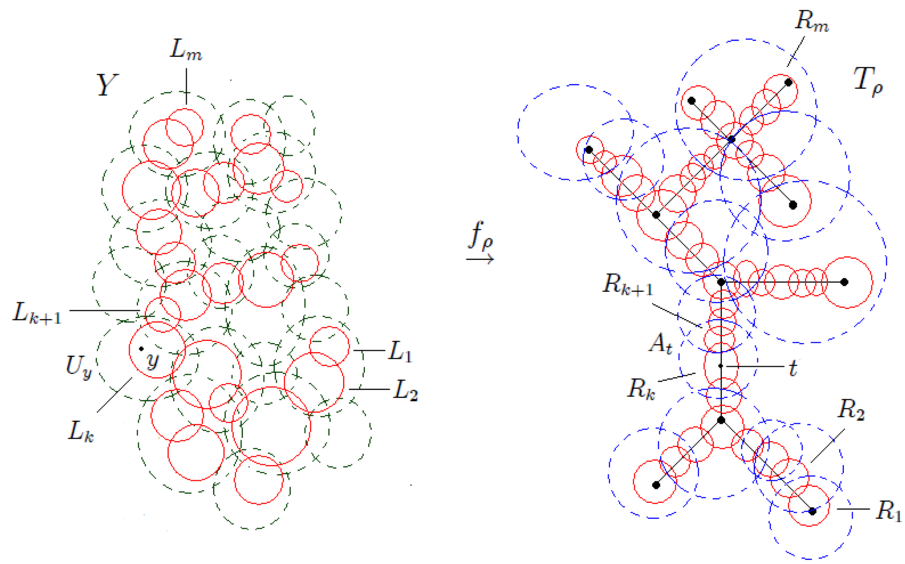

Figura 3.2.6: $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, ..., L_m\}$un refinamiento de $\{U_y : y \in Y\}$

Veamos que $\mathcal{L}$ se puede árbol indexar. Para esto, observe que $L_i \cap L_j = f_\rho^{-1}(R_i) \cap f_\rho^{-1}(R_j) \neq \emptyset$ si y solo si $R_i \cap R_j \neq \emptyset$. Así, como $\mathcal{R}$ se puede árbol indexar, tenemos que $\mathcal{L}$ se puede árbol indexar.

Ya construimos nuestro refinamiento, ahora para cada $L_i \in \mathcal{L}$, denotamos por y_i a un elemento de Y tal que $L_i \subseteq U_{y_i}$. Etiquetamos los elementos de $h^{-1}(y_i)$ como $\left\{x_1, x_2, ..., x_{k(i)}\right\}$ y para cada $j = 1, 2, ..., k(i)$, definimos $W(i, j) = h^{-1}(L_i) \cap B(x_j, \frac{\varepsilon}{2})$. Si esta intersección es no vacía, entonces $W(i, j) \subset X$ es un abierto de diámetro menor que ε y $h|_{W(i,j)}$ es inyectiva, ver Figura 3.2.7.

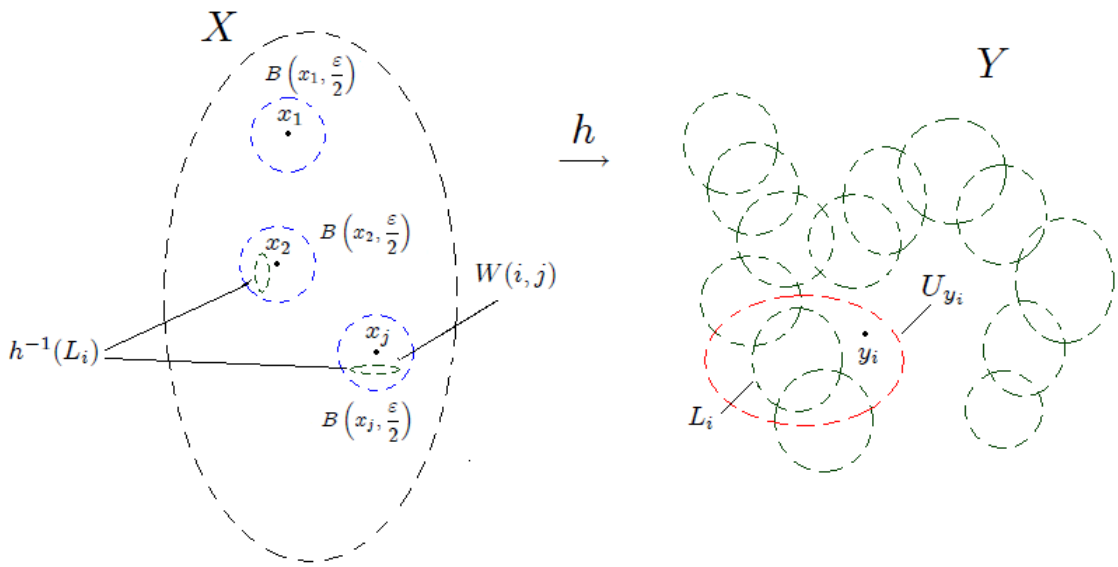

Figura 3.2.7: $W(i,j)$

Además

$$\mathcal{W} = \{W(i.j) : i \in \{1, 2, ..., m\}\,,\ \text{donde } j \in \{1, 2, ..., k(i)\}\}$$

es un cubrimiento de X. Para ver esto, dado $x \in X$, $h(x) = y \in L_i$ para algún $i \in \{1, 2, ..., m\}$, entonces $x \in h^{-1}(y) \subseteq h^{-1}(L_i)$. Por otro lado $y \in U_y$, luego $x \in h^{-1}(y) \subset h^{-1}(U_y) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$, entonces existe $j \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $x \in B(x_j, \frac{\varepsilon}{2})$. Por lo tanto tenemos que $x \in h^{-1}(L_i) \cap B(x_j, \frac{\varepsilon}{2}) = W(i,j)$.

Observación. Si $W(i_1, j_1), W(i_2, j_2), W(i_3, j_3)$ son elementos distintos de $\mathcal{W}$, tal que $W(i_1, j_1) \cap W(i_2, j_2) \neq \emptyset$ y $W(i_3, j_3) \cap W(i_2, j_2) \neq \emptyset$. Osea: los enteros $\{i_1, i_2, i_3\}$ son distintos. Para ver esto, sea $z_1 \in W(i_1, j_1) \cap W(i_2, j_2)$ y $z_3 \in W(i_3, j_3) \cap W(i_2, j_2)$. Note que $d(z_1, z_3) < \varepsilon$. Primero supongamos que $i_1 = i_2$. Por construcción, $W(i_1, j_1) \subseteq B(x_{j_1}, \frac{\varepsilon}{2})$ y $W(i_1, j_2) \subseteq B(x_{j_2}, \frac{\varepsilon}{2})$ donde $h(x_{j_1}) = h(x_{j_2}) = y_{i_1}$ con $j_1 \neq j_2$, luego $z_1 \in B(x_{j_1}, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(x_{j_2}, \frac{\varepsilon}{2})$. Ésto implica que $d(x_{j_1}, x_{j_2}) < \varepsilon$, por lo tanto $h(x_{j_1}) \neq h(x_{j_2})$ y esto es una contradicción. De manera análoga, si suponemos que $i_3 = i_2$ obtenemos una contradicción similar. Para terminar, supongamos que $i_1 = i_3$. Nuevamente por construcción, $z_1 \in W(i_1, j_1) \subseteq B(x_{j_1}, \frac{\varepsilon}{2})$ y $z_3 \in W(i_1, j_3) \subseteq B(x_{j_3}, \frac{\varepsilon}{2})$, donde $h(x_{j_1}) =$

$h(x_{j_3}) = y_{i_1}$ con $j_1 \neq j_3$, entonces $d(x_{j_1}, x_{j_3}) > 2\varepsilon$. Tenemos que $d(z_1, x_{j_1}) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(z_3, x_{j_3}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Así

$$2\varepsilon < d(x_{j_1}, x_{j_3}) \leq d(z_1, x_{j_1}) + d(z_1, x_{j_3}) \leq d(z_1, x_{j_1}) + d(z_1, z_3) + d(z_3, x_{j_3}) < \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} < 2\varepsilon$$

Lo cual es una contradicción. De lo anterior, tenemos la prueba de la observación.

Continuando con la demostración del teorema, supongamos que h no es un homeomorfismo, entonces h no es inyectiva. Luego existen dos puntos distintos, x_1 y x_2 en X tal que $h(x_1) = h(x_2)$. Así, $x_1 \in W(i, j)$ y $x_2 \in W(i, k)$ para algún i y algún $j \neq k$. Note que $W(i, j) \cap W(i, k) = \emptyset$. Luego existe una cadena cuyos eslabones están en $\mathcal{W}$, tal que el primer y último eslabón son $W(i, j)$ y $W(i, k)$ respectivamente. Sea $\mathcal{C} = \{W(k_1, n_1), W(k_2, n_2), ..., W(k_m, n_m)\}$ la cadena más corta tal que $k_1 = k_m$. Por definición $W(k_i, n_i) \cap W(k_j, n_j) \neq \emptyset$ si y solo si $\mid i - j \mid \leq 1$, luego por la Observación, $m > 3$. Sea k_j el menor entero en $\{k_1, k_2, ..., k_m\}$, entonces $k_{j+1} > k_j$. Note que como $W(k_{j+1}, n_{j+1}) \cap W(k_j, n_j) \neq \emptyset$, entonces $h^{-1}(L_{k_{j+1}}) \cap h^{-1}(L_{k_j}) \neq \emptyset$, luego $L_{k_{j+1}} \cap L_{k_j} \neq \emptyset$. Así L_{k_j} es el único elemento de $\mathcal{L}$ con subíndice menor al de $L_{k_{j+1}}$ que lo intercepta. Como $W(k_{j+2}, n_{j+2}) \cap W(k_{j+1}, n_{j+1}) \neq \emptyset$, entonces $h^{-1}(L_{k_{j+2}}) \cap h^{-1}(L_{k_{j+1}}) \neq \emptyset$, luego $L_{k_{j+2}} \cap L_{k_{j+1}} \neq \emptyset$. Por lo tanto $k_{j+2} > k_{j+1}$. Si continuamos con este proceso, tenemos que $k_j < k_{j+1} < k_{j+2} < ... < k_m = k_1 < k_2 < ... < k_{j-2} < k_{j-1}$. Como $W(k_j, n_j) \cap W(k_{j-1}, n_{j-1}) \neq \emptyset$ y $W(k_{j-1}, n_{j-1}) \cap W(k_{j-2}, n_{j-2}) \neq \emptyset$ tenemos que $L_{k_j} \cap L_{k_{j-1}} \neq \emptyset$ y $L_{k_{j-2}} \cap L_{k_{j-1}} \neq \emptyset$ donde $k_j < k_{j-1}$ y $k_{j-2} < k_{j-1}$, lo que contradice el hecho que $\mathcal{L}$ se puede árbol indexar. **Q.E.D.**

Bibliografía

[1] J. Camargo, *Funciones localmente inyectivas entre continuos*, Revista Colombiana de Matemáticas, 45 (2011), 167-177.

[2] J. Camargo, R. Isaacs, *Continuos tipo Knaster y sus modelos geométricos*, En proceso de publicación.

[3] J.J. Charatonik, S. Miklos, K. Omiljanowski, *Locally one-to-one mappings on graphs*, Czech. Math. Jour., Vol. 37, Nº 3 (1987), 343-350.

[4] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[5] Jo W. Heath, *Each locally one-to-one map from a continuum onto a tree-like continuum is a homeomorphism*, Amer. Math. Soc., Vol. 124, Nº 8 (1996), 2571-2573.

[6] R. Isaacs, S. Sabogal, *Semigrupos de funciones localmente inyectivas sobre* S^1, Lecturas Mat. , 15(1994), 15-20.

[7] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. 2, Academic press New York and London, Warszawa, 1968.

[8] S. Macías, *Topics on Continua, Pure and Applied Mathematics Series,* Vol. 275, Chapman and Hall/CRC, Taylor and Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[9] T. Maćkowiak, *Continuous mappings on continua*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 158 (1979), 1-95.

[10] S. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An Introduction, Pure and Applied Mathematics*, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[11] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1942.

[12] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, Massachutsetts, 1970.