ELEMENTOS REGULARES DE LOS SEMIGRUPOS $L_{\mathbb{F}}(V)$ Y $M_n(\mathbb{F})$

JUAN CAMILO CAMACHO PARRA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2024

ELEMENTOS REGULARES DE LOS SEMIGRUPOS $L_{\mathbb{F}}(V)$ Y $M_n(\mathbb{F})$

JUAN CAMILO CAMACHO PARRA

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director
Héctor Edonis Pinedo Tapia
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2024

DEDICATORIA

A ti, a papá y a Cris, quienes con su amor y apoyo incondicional hicieron que todo esto fuese posible.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi madre que desde donde este, siempre me ha cuidado.

A mi padre que sin dudarlo ni un segundo, me apoyo hasta el último día de esta carrera.

A mi hermano y mejor amigo, que con su voz de aliento, cada día me motivaba a ser un mejor profesional.

Al profesor Héctor Edonis Pinedo Tapia, quien fue el impulsor de este trabajo de grado y también quien me ha llevado a seguir estudiando esta hermosa disciplina.

Al profesor Jorge Eliecer Goméz Rios, quien con sus comentarios a este trabajo lo han enriquecido.

A residencias universitarias UIS. Gracias por cada momento compartido, en especial a Cristian, Herson, Jaider, Sebastian, Juan Diego, Neider, quienes más que amigos fueron mi segunda familia.

A todos los profesores que hicieron parte de mi formación académica. Gracias por despertar en mi esta pasión por las matemáticas.

A mis grandes amigos Nidia Martinez, Julian Morales, Julian Fajardo y Andres Vargas, quienes en más de una ocasión me apoyaron en todo este proceso.

Por último agradecer a cada uno de mis amigos que hice en la universidad, en especial a Liz, quien con su apoyo y cariño me acompañó hasta el final.

CONTENIDO

RESUMEN

TÍTULO: ELEMENTOS REGULARES DE LOS SEMIGRUPOS $L_{\mathbb{F}}(V)$ Y $M_n(\mathbb{F})$ [*]

AUTOR: JUAN CAMILO CAMACHO PARRA [**]

PALABRAS CLAVE: SEMIGRUPOS REGULARES, TRANSFORMACIONES LINEALES, MATRICES, RELACIONES DE GREEN.

DESCRIPCIÓN:

La teoría de semigrupos regulares es introducida por J.A. Green en 1951 en su artículo *On the Structure of Semigroups* [1] la cual consiste en la búsqueda de aquellos elementos que se comportan de forma similar a los elementos invertibles en un grupo, estos elementos se les conoce como elementos regulares, es decir, un elemento $x \in S$ es un **elemento regular** si existe $y \in S$ tal que $xyx = x$, decimos que S es un semigrupo regular si todo elemento en S es regular. Sea S un semigrupo regular y sea U un subsemigrupo de S. Una pregunta natural que surge es: ¿Es U un semigrupo regular? La respuesta en general es NO, así que la siguiente pregunta es: ¿Bajo qué condiciones U es un semigrupo regular?.

En 2007 S. Nenthein y Y. Kemprasit en [2] consideran el semigrupo de las transformaciones lineales $T : V \to V$ con la composición de funciones y teniendo en cuenta que el subsemigrupo de un semigrupo regular no es necesariamente regular, consideran los subsemigrupos

$$I_{\mathbb{F}}(V,W) = \{T \in L_{\mathbb{F}}(V) \mid \operatorname{im} T \subseteq W\} \quad \text{y} \quad K_{\mathbb{F}}(V,W) = \{T \in L_{\mathbb{F}}(V) \mid W \subseteq \ker T\}.$$

Donde W es un subespacio vectorial de V. Se caracterizan sus elementos regulares y mas tarde en [3] se estudiaran algunos ideales del subsemigrupo $\operatorname{Reg}(I_{\mathbb{F}}(V,W))$. Por otro lado, en [2] también se exponen las caracterizaciones de los elementos regulares de los subsemigrupos

$$C_n(\mathbb{F},k) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid a_{ij} = 0 \ \forall i,j \in \{1,\dots,n\} \text{ y } j > k\}$$
$$R_n(\mathbb{F},k) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid a_{ij} = 0 \ \forall i,j \in \{1,\dots,n\} \text{ y } i > k\}$$

---

[*] Trabajo de grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Doctor en Matemáticas.

[1] John VON NEUMANN. "On regular rings". En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 22.12 (1936), págs. 707-713.

[2] Sansanee NENTHEIN y Yupaporn KEMPRASIT. "Regular elements of some semigroups of linear transformations and matrices". En: *Int. Math. Forum*. Citeseer. 2007.

[3] Robert SULLIVAN. "Semigroups of linear transformations with restricted range". En: *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 77.3 (2008), págs. 441-453.

del semigrupo $M_n(\mathbb{F})$ junto con la multiplicación usual de matrices.

En este trabajo de grado expondremos los resultados obtenidos en [2] para la caracterización de los elementos regulares en $I_{\mathbb{F}}(V,W) = \{T \in L_{\mathbb{F}}(V) \mid \operatorname{im} T \subseteq W\}$ y $K_{\mathbb{F}}(V,W) = \{T \in L_{\mathbb{F}}(V) \mid W \subseteq \ker T\}$ y así extenderlo a los subsemigrupos $C_n(\mathbb{F},k)$ y $R_n(\mathbb{F},k)$ de $M_n(\mathbb{F})$, posteriormente expondremos los resultados en [3] acerca de los ideales de $\operatorname{Reg}(I_{\mathbb{F}}(V,W))$.

ABSTRACT

TITLE: REGULAR ELEMENTS OF SEMIGROUPS $L_{\mathbb{F}}(V)$ AND $M_n(\mathbb{F})$. [*]

AUTHOR: JUAN CAMILO CAMACHO PARRA [**]

KEYWORDS: REGULAR SEMIGROUPS, LINEAR TRANSFORMATIONS, MATRICES, GREEN RELATIONS.

DESCRIPTION:

The theory of regular semigroups is introduced by J.A. Green in 1951 in his article *On the Structure of Semigroups* [1] which consists in the search for those elements that behave similarly to invertible elements in a group, these elements are known as regular elements, that is, an element $x \in S$ is a **regular element** if there exists $y \in S$ such that $xyx = x$, we say that S is a regular semigroup if every element in S is regular. Let S be a regular semigroup and let U be a subsemigroup of S. A natural question that arises is: Is U a regular semigroup? The answer in general is NO, so the next question is: Under what conditions is U a regular semigroup?

In 2007 S. Nenthein and Y. Kemprasit in [2] consider the semigroup of linear transformations $T : V \to V$ with the composition of functions and taking into account that the subsemigroup of a regular semigroup is not necessarily regular, they consider the subsemigroups

$$I_{\mathbb{F}}(V,W) = \{T \in L_{\mathbb{F}}(V) \mid \operatorname{im} T \subseteq W\} \quad \text{y} \quad K_{\mathbb{F}}(V,W) = \{T \in L_{\mathbb{F}}(V) \mid W \subseteq \ker T\}.$$

Where W is a vector subspace of V. Its regular elements are characterized and later in [3] some ideals of the subsemigroup $\operatorname{Reg}(I_{\mathbb{F}}(V,W))$ will be studied. On the other hand, in [2] the characterizations of the regular elements of the subsemigroups are also exposed.

$$\begin{aligned} C_n(\mathbb{F},k) &= \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid a_{ij} = 0 \ \forall i,j \in \{1,\dots,n\} \text{ y } j > k\}, \\ R_n(\mathbb{F},k) &= \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid a_{ij} = 0 \ \forall i,j \in \{1,\dots,n\} \text{ y } i > k\}. \end{aligned}$$

of the semigroup $M_n(\mathbb{F})$ together with the usual matrix multiplication.

In this thesis we will expose the results obtained in [2] for the characterization of the regular elements in $I_{\mathbb{F}}(V,W) = T \in L_{\mathbb{F}}(V) \mid \operatorname{im} T\{K_{\mathbb{F}}(V,W) = T \in L_{\mathbb{F}}(V) \mid W \subseteq W \ker T\}$ and thus extend it to the subsemigroups $C_n(\mathbb{F},k)$ and $R_n(\mathbb{F},k)$ of $M_n(\mathbb{F})$, subsequently we will state the results in [3] about the ideals of $\operatorname{Reg}(I_{\mathbb{F}}(V,W))$.

---

[*] Bachelor Thesis

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Doctor en Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

En 1936 el matemático John Von Neumann en su artículo *On Regular Rings*, (ver [1]), introduce la noción de **anillo regular**, el cual es un anillo R en el que para cada elemento x existe un elemento y también en R tal que $xyx = x$. En general, a los elementos de un anillo que cumple esta condición se les denomina **elementos regulares**. En 1951 James Alexander Green en su tesis doctoral *On the Structure of Semigroups*, (ver [1]), se restringe a estudiar los elementos regulares en un semigrupo. Para esto son definidas las **relaciones de Green**, las cuales son útiles en el estudio de los ideales de un semigrupo y la caracterización de sus elementos regulares.

En 2007 S. Nenthein y Y. Kemprasit en su trabajo *Regular elements of some semigroups of linear transformation and matrices*, (ver [2]), estudian los elementos regulares de dos semigrupos famosos del álgebra lineal. El primero es el semigrupo de las transformaciones lineales de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ en si mismo, bajo la composición de funciones $\langle L_{\mathbb{F}}(V), \circ\rangle$. El segundo es el semigrupo de las matrices cuadradas con entradas en un cuerpo $\mathbb{F}$ bajo la multiplicación usual $\langle M_n(\mathbb{F}), \cdot\rangle$. Se parte del hecho de que ya son semigrupos regulares, es decir, cada elemento del semigrupo es regular. Y se consideran dos subsemigrupos en los cuales se pregunta si estos heredan la propiedad de ser regulares y de no llegar a ser así, bajo qué condiciones esto podría suceder. Para el primer semigrupo se consideran los subsemigrupos $I_{\mathbb{F}}(V, W)$ el conjunto de las transformaciones lineales con imagen restringida al subespacio W y $K_{\mathbb{F}}(V, W)$ el conjunto de las transformaciones lineales tales que el subespacio W está contenido en su kernel, se da una caracterización de sus elementos regulares y así las condiciones para las cuales dichos subsemigrupos son regulares. Para el segundo semigrupo sean $C_n(\mathbb{F}, k)$ el subsemigrupo de las matrices con un número k de columnas no nulas y $R_n(\mathbb{F}, k)$ el subsemigrupo de las matrices con un número k de filas no nulas.

Por último en 2008 R.P. Sullivan en su artículo *Semigroups of linear transformations with restricted range*, (ver [3]) profundiza en los ideales del subsemigrupo $I_{\mathbb{F}}(V, W)$; para ello el autor estudia el conjunto de los elementos regulares de $I_{\mathbb{F}}(V, W)$, el cual forma un subsemigrupo y de este se caracterizan sus ideales quienes serán la base de los ideales

---

[1] James GREEN. "On the structure of semigroups". En: *Annals of Mathematics* (1951), págs. 163-172.

de $I_{\mathbb{F}}(V, W)$.

El propósito de este trabajo, es estudiar los artículos [2] y [3]. Para esto, primero se recuerdan algunos resultados básicos de álgebra lineal y de teoría de semigrupos; seguido de esto, se mencionan algunos resultados sobre los semigrupos regulares. Posteriormente se definen los subsemigrupos $I_{\mathbb{F}}(V, W)$ y $K_{\mathbb{F}}(V, W)$ en donde se mencionarán los resultados obtenidos para la distinción de los elementos regulares, así se harán algunos comentarios a cerca de los ideales cuyos elementos sean regulares del subsemigrupo $I_{\mathbb{F}}(V, W)$. Por último se usarán los resultados anteriores para caracterizar los elementos regulares de los subsemigrupos $C_n(\mathbb{F}, k)$ y $R_n(\mathbb{F}, k)$.

OBJETIVOS

Dado un espacio vectorial finito dimensional V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, considerando el semigrupo $\langle L_{\mathbb{F}}(V), \circ\rangle$ de endomorfismos lineales de V, y definimos los subsemigrupos $I_{\mathbb{F}}(V,W) = \{T \in L_{\mathbb{F}}(V) \mid \operatorname{im} T \subseteq W\}$ de endomorfismos lineales con rango restringido a subespacio W y $K_{\mathbb{F}}(V,W) = \{T \in L_{\mathbb{F}}(V) \mid \operatorname{im} T \subseteq W\}$ de los endomorfismos lineales de V tales que W está contenido en su kernel. Por otro lado consideramos el semigrupo $\langle M_n(\mathbb{F}), \cdot\rangle$ de matrices cuadradas de tamaño $n \times n$ con entradas en el cuerpo $\mathbb{F}$ y definimos los subsemigrupos $C_n(\mathbb{F}, k)$ de las matrices con un número k de columnas no nulas y $R_n(\mathbb{F}, k)$ el subsemigrupo de las matrices con un número k de filas no nulas.

Objetivo general

El objetivo de este trabajo es estudiar elementos básicos en la teoría de semigrupos, especialmente los elementos regulares de los semigrupos $L_{\mathbb{F}}(V)$ y $M_n(\mathbb{F})$.

Objetivos específicos

1. Caracterizar los elementos regulares de los subsemigrupos $I_{\mathbb{F}}(V,W)$ y $K_{\mathbb{F}}(V,W)$ del semigrupo $L_{\mathbb{F}}(V)$.
2. Identificar algunos ideales del subsemigrupo $I_{\mathbb{F}}(V,W)$.
3. Establecer una relación entre los subsemigrupos $I_{\mathbb{F}}(V,W)$ y $C_n(\mathbb{F}, k)$, de forma análoga entre los subsemigrupos $K_{\mathbb{F}}(V,W)$ y $R_n(\mathbb{F}, k)$.

1. PRELIMINARES

Comenzaremos este capítulo con un breve repaso a los elementos básicos del álgebra lineal y de teoría de semigrupos, los cuales serán relevantes en la comprensión de la teoría de semigrupos regulares.

1.1. Álgebra lineal

Toda la teoría aquí trabajada se hará tomando un espacio vectorial de dimensión finita V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, en donde podemos establecer el isomorfismo $L_{\mathbb{F}}(V) \cong M_n(\mathbb{F})$, el cual nos permite establecer resultados obtenidos en $L_{\mathbb{F}}(V)$ y llevarlos a $M_n(\mathbb{F})$.

1.1.1. Bases y dimensión

Definición 1.1.1. Un subconjunto W de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ es llamado un **subespacio** de V, si W es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ con las operaciones de suma y multiplicación por escalar definidas en V.

En cualquier espacio vectorial V, los conjuntos V y $\{0\}$ son subespacios, el último es llamado el **subespacio cero** de V.

Definición 1.1.2. El **subespacio generado** por un conjunto no vacío S de vectores en un espacio vectorial V es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores en S

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{finitas} c_i v_i \mid c_i \in \mathbb{F}, v_i \in S \right\}.$$

En caso de que $S = \emptyset$ entonces $\langle S \rangle = \{0\}$. Un conjunto de vectores en V es llamado **generador** de V, si $V = \langle S \rangle$.

Definición 1.1.3. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Un subconjunto $S = \{v_1, \cdots, v_k\}$ de V es **linealmente dependiente** si existen escalares $c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{F}$, no todos nulos tales que

$$\sum_{i=1}^{k} c_i v_i = 0.$$

En este caso decimos que los vectores de S son linealmente independientes. Un conjunto cuando no es linealmente dependiente diremos que es **linealmente independiente**.

Observación 1.1.4. Las siguientes condiciones son verdaderas para cualquier espacio vectorial

1. El conjunto vacío es linealmente independiente, ya que los conjuntos linealmente dependientes deben ser no vacíos.

2. Un conjunto consistiendo de un solo vector no nulo es linealmente independiente, pues si $\{u\}$ fuese linealmente dependiente, entonces $\alpha u = 0,$ para algún escalar $\alpha \in \mathbb{F}$. Luego $u = \alpha^{-1}(\alpha u) = \alpha^{-1}0 = 0$.

3. Un conjunto $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$ es linealmente independiente si, y solo si, las únicas representaciones de 0 como combinaciones lineales de los elementos en S, son las representaciones triviales.

   La prueba se hará demostrando la contra-recíproca de cada afirmación. En efecto, primero supongamos que S es un conjunto linealmente dependiente, entonces para algún s_i en S, se puede expresar como una combinación lineal de los demás vectores en S, es decir, existen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ en $\mathbb{F}$ tales que

   $$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k s_k = s_i,$$

   con $k \neq i$, de lo cual tenemos que

   $$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k s_k - s_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k s_k = 0.$$

   Ahora supongamos que para los vectores en S, existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ en $\mathbb{F}$, no todos nulos, tales que

   $$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k s_k = 0.$$

   Sin pérdida de generalidad, supongamos que α_i en $\mathbb{F}$ es no nulo, así pues

   $$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k s_k = -\alpha_i s_i,$$

luego, para $\beta_k = -\dfrac{\alpha_k}{\alpha_i}$ en $\mathbb{F}$ se sigue que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k s_k = s_i,$$

es decir, s_i se puede expresar como una combinación lineal de los demás vectores en S. Por lo tanto, S es linealmente dependiente.

Definición 1.1.5. Sea V un espacio vectorial. Un subconjunto S de V es una **base** para V si

1. S es un conjunto linealmente independiente.

2. S genera a V.

Lema 1.1.6. *Sea V un espacio vectorial generado por un conjunto finito de vectores $v_1, \cdots, v_n$. Entonces cualquier subconjunto S de vectores linealmente independientes es finito y no contiene más de n elementos.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $S = \{s_1, \cdots, s_m\}$ es un subconjunto de vectores en V tal que $n < m$. Como $v_1, \cdots, v_n$ generan a V, entonces cada $s_i \in S$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores $v_1, \cdots, v_n$, es decir para algunos $\alpha_i \in \mathbb{F}$ tenemos que

$$s_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Considere $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i = 0$ para algunos $\lambda_i \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i &= 0 \\
\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} v_j \right) &= 0 \\
\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i}^{n} (\lambda_i \alpha_{ij})\, v_j &= 0 \\
\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \lambda_i \right) v_j &= 0.
\end{aligned}$$

Ahora como $v_1, \cdots, v_n$ es linealmente independiente, entonces $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\lambda_i = 0$, como $n < m$ se sigue que algunos λ_i son no nulos. Luego S es linealmente dependiente, lo cual es absurdo. Por lo tanto $m \leqslant n$. $\square$

Corolario 1.1.7. *Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ el cual es generado por un conjunto finito de vectores, entonces cualesquiera dos bases de V tienen el mismo tamaño.*

Corolario 1.1.8. *Sea $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base para V un espacio vectorial finito dimensional sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.*

1. *Cada conjunto con más de n vectores en V es linealmente dependiente.*
2. *Cada conjunto con menos de n vectores en V no puede generar a V.*

Definición 1.1.9. Un espacio vectorial V se llama de **dimensión finita** si tienen una base que consiste de un número finito de vectores. El único entero n tal que cada base para V contiene n elementos es llamado la **dimensión** de V, denotada por $\dim V$. Un espacio vectorial que no es finito dimensional es llamado **infinito dimensional**.

Lema 1.1.10. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Entonces cualquier conjunto linealmente independiente en V se puede extender a una base para V.*

DEMOSTRACIÓN: Sea S un conjunto linealmente independiente de vectores en V. Si $|S| = n$, entonces S es una base para V. Ahora supongamos que $|S| < n$ luego por el Corolario 1.1.8 tenemos que S no genera a V, así pues, existe $v \in V$ tal que $v \notin \langle S \rangle$. Por lo cual podemos considerar un nuevo conjunto $S' = S \cup \{v\}$, el cual también es linealmente independiente. Si $|S'| < n$, entonces se puede repetir el proceso hasta construir un conjunto S^* tal que $|S^*| = n$, así S^* es una base para V. Por lo que de S podemos extender una base para V. $\square$

Proposición 1.1.11. *Sea V un espacio vectorial y sean U y W subespacios de V, el conjunto*

$$U \cap W = \{u \in V \mid u \in U \wedge u \in W\},$$

es un subespacio vectorial de V. Más generalmente, la intersección de cualquier colección $\{S_i \mid i \in I\}$ de subespacios es el conjunto de todos los elementos que están en cada S_i con $i \in I$.

$$\bigcap_{i \in I} S_i = \{u \in V \mid u \in S_i \ \forall i \in I\},$$

es un subespacio, llamado el subespacio intersección.

Proposición 1.1.12. *Sea V un espacio vectorial con subespacios U y W, el conjunto*

$$U + W = \{u + w \in V \mid u \in U, w \in W\}$$

es un subespacio vectorial de V. Más generalmente, la suma de cualquier colección $\{S_i \mid i \in I\}$ de subespacios, esto es, el conjunto de todas las sumas finitas de vectores de la unión $\bigcup S_i$ es

$$\sum_{i \in I} S_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i \mid s_j \in \bigcup_{i=1}^{n} S_i \right\},$$

es un subespacio, llamado el subespacio suma.

Definición 1.1.13. Un espacio vectorial V es la **suma directa** de una familia $\mathcal{F} = \{S_i \mid i \in I\}$ de subespacios de V, lo que denotamos por

$$V = \bigoplus_{i \in I} S_i,$$

si se cumple lo siguiente:

1. V es la suma de la familia $\mathcal{F}$:
$$V = \sum_{i \in I} S_i.$$
2. Para cada $i \in I$,
$$S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j \right) = \{0\}.$$

   En este caso, cada S_i es llamado un **sumando directo** de V.

Definición 1.1.14. Si un espacio vectorial $V = S \oplus T$ donde S y T son subespacios de V, entonces T es llamado un **complemento** de S en V.

Ejemplo 1.1.15. Sean U y W subespacios de un espacio vectorial V, la dimensión del subespacio $U + W$ esta dada por la identidad de Grassmann

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

En efecto, Sea $\beta = \{v_1, \cdots, v_k\}$ una base para $U \cap W$, como $U \cap W \subseteq U$, por el Lema 1.1.10 podemos extender β a una base $\beta_1 = \{v_1, \cdots, v_k, u_1, \cdots, u_n\}$ para U, de forma análoga extendemos β a una base $\beta_2 = \{v_1, \cdots, v_k, w_1, \cdots, w_m\}$ para W. Considere $\beta_1 \cup \beta_2 = \{v_1, \cdots, v_k, u_1, \cdots, u_n, w_1, \cdots, w_m\}$. Veamos que $\beta_1 \cup \beta_2$ es una base para $U + W$.

Sea $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^{m} \theta_i w_i$ para $v_i, u_i, w_i \in \mathbb{F}$ una combinación de los vectores en $\beta_1 \cup \beta_2$, si

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^{m} \theta_i w_i = 0,$$

se sigue que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = -\sum_{i=1}^{m} \theta_i w_i. \tag{1.1}$$

Por lo tanto $-\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \theta_i w_i$ es una combinación lineal de los vectores en β_1, luego $-\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \theta_i w_i \in U \cap W$, así para algunos $\gamma_i \in \mathbb{F}$,

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i v_i = -\sum_{i=1}^{m} \theta_i w_i,$$

luego

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i v_i + \sum_{i=1}^{m} \theta_i w_i = 0.$$

Dado que $\beta_2 = \{v_1, \cdots, v_k, w_1, \cdots, w_m\}$ es linealmente independiente, se sigue que $\gamma_1 = \cdots = \gamma_k = \theta_1 = \cdots = \theta_m = 0$. Por lo tanto $-\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \theta_i w_i = 0$. Ahora por (1) se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0,$$

como $\beta_1 = \{v_1, \cdots, v_k, u_1, \cdots, u_n\}$ es linealmente independiente entonces $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. Por lo tanto $\beta_1 \cup \beta_2$ es linealmente independiente. Por lo tanto $\beta_1 \cup \beta_2$ es una base para $U + W$.

Además note que

$$\begin{aligned}\dim(U+W) &= |\beta_1 \cup \beta_2|\\ &= |\beta_1| + |\beta_2| - |\beta_1 \cap \beta_2|\\ &= |\beta_1| + |\beta_2| - |\beta|\\ &= \dim U + \dim W - \dim U \cap W.\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 1.1.16. *Sea V un espacio vectorial.*

1. *Sea β es una base para V. Si dados dos subconjuntos no vacíos β_1 y β_2 tales que $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ y $\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$, entonces*

$$V = \langle \beta_1 \rangle \oplus \langle \beta_2 \rangle.$$

2. *Sea $V = S \oplus T$. Si β_1 es una base para S y β_2 es una base para T, entonces $\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$ y $\beta_1 \cup \beta_2$ es una base para V.*

DEMOSTRACIÓN:

(1) Sea $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base para V y sean β_1 y β_2 subconjuntos no vacíos de β tales que $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ y $\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $\beta_1 = \{v_1, \cdots, v_k\}$ y $\beta_2 = \{v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ con $k < n$. Considere $\langle \beta_1 \rangle$ y $\langle \beta_2 \rangle$ los subespacios generados por β_1 y β_2. Veamos que $V = \langle \beta_1 \rangle \oplus \langle \beta_2 \rangle$

- Mostraremos que $\langle \beta_1 \rangle \cap \langle \beta_2 \rangle = \{0\}$. En efecto, sea $x \in \langle \beta_1 \rangle \cap \langle \beta_2 \rangle$ entonces $x \in \langle \beta_1 \rangle$ y $x \in \langle \beta_2 \rangle$, luego $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$ y $x = \displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i$ con $\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Ahora

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i - \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i = 0$$

Como $\{v_1, \cdots, v_n\} = \beta$ es una base para V, en particular es linealmente independiente, se sigue que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. Por lo tanto $x = 0$.

- Note que para $x \in V$ tenemos que $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i = u + v,$ con $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, donde $u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \in \langle \beta_1 \rangle$ y $v = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i \in \langle \beta_2 \rangle$. Por lo tanto, $x = u + v \in \langle \beta_1 \rangle + \langle \beta_2 \rangle$.

(2) Sean S y T subespacios de un espacio vectorial finito dimensional V, tal que $V = S \oplus T$. Si $\beta_1 = \{v_1, \cdots, v_k\}$ es una base para S y $\beta_2 = \{v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ es una base para T, veamos que $\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$ y $\beta_1 \cup \beta_2$ es una base para V.

- Supongamos que $\beta_1 \cap \beta_2 \neq \emptyset$, sea $x \in \beta_1 \cap \beta_2$, entonces $x \in \beta_1$ y $x \in \beta_2$, se sigue que $x \in \langle \beta_1 \rangle = S$ y $x \in \langle \beta_2 \rangle = T$, es decir, $x \in S \cap T$, dado que $V = S \oplus T$ entonces $S \cap T = \{0\}$ luego $x = 0$, lo cual es absurdo ya que x debe ser diferente de cero para estar en β_1 o en β_2. Por lo tanto $\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$.
- Ahora mostraremos que $\beta_1 \cup \beta_2$ es una base para V
  - Sea $x \in V = S \oplus T$, entonces $x = u + v$ tal que $u \in S$ y $v \in T$ así pues $u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$ y $v = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i$ con $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, luego

$$x = u + v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i.$$

    Por lo tanto x es un combinación lineal de los vectores en $\{v_1, \cdots, v_n\}$, es decir, x es generado por $\beta_1 \cup \beta_2$.
  - Considere $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$, mostraremos que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, para $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, dado que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i$ se sigue que:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = -\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i.$$

    Luego $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \in T$, y como $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \in S$, entonces $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \in S \cap T$ y tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0,$$

y ya que β_1 es base, entonces $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Nos queda $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i = 0$ y como β_2 es base, tenemos que $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$. Esto muestra que $\beta_1 \cup \beta_2$ es linealmente independiente.

Por lo tanto el conjunto $\beta_1 \cup \beta_2$ es una base de V y $\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$.

$\square$

Definición 1.1.17. Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Una función $T : V \to W$ es una transformación lineal si

$$T(\alpha_1 u + \alpha_2 v) = \alpha_1 T(u) + \alpha_2 T(v),$$

para todo $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ y vectores $u, v \in V$. El conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W es denotado por $L_{\mathbb{F}}(V, W)$.

Definición 1.1.18. Una transformación lineal $T : V \to V$ es llamado un **operador lineal** sobre V. El conjunto de todos los operadores lineales de V es denotado por $L_{\mathbb{F}}(V)$.

Definición 1.1.19. Sea $T \in L_{\mathbb{F}}(V, W)$, el conjunto

$$\ker T = \{v \in V \mid T(v) = 0\},$$

es llamado el **kernel** de T. El conjunto

$$\operatorname{im} T = \{T(v) \in W \mid v \in V\},$$

es llamado la **imagen** de T.

Teorema 1.1.20. *Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Si $T \in L_{\mathbb{F}}(V, W)$, entonces*

1. $\ker T$ *es un subespacio de* V.

2. $\operatorname{im} T$ *es un subespacio de* W.

Teorema 1.1.21. *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal de espacios vectoriales V en W sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces, T es inyectiva si y solo si $\ker T = \{0\}$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\ker T = \{0\}$ y veamos que T es inyectiva, sea $T(u) = T(v)$, para $u, v \in V$, entonces $T(u) - T(v) = 0$, como T es transformación lineal, tenemos que $T(u - v) = 0$, así $u - v \in \ker T$ y como $\ker T = \{0\}$ se sigue que $u - v = 0$, es decir $u = v$.

Ahora supongamos que T es inyectiva, sea $u \in \ker T$, por definición $T(u) = 0 = T(0)$, como T es inyectiva, se sigue que $u = 0$. $\square$

Definición 1.1.22. Dada una transformación lineal $T : V \to W$ de espacios vectoriales V en W sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Decimos que T es

1. Un **monomorfismo**, si T es inyectiva.
2. Un **epimorfismo**, si T es sobreyectiva.
3. Un **isomorfismo**, si T es biyectiva.

Lema 1.1.23. *Sea $S = \{v_1, \cdots, v_k\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Si $T[S] = \{T(v_1), \cdots, T(v_k)\}$ es linealmente independiente, entonces S también es linealmente independiente.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos $\sum\limits_{i=1}^{k} c_i v_i = 0$, para c_i en $\mathbb{F}$. Veamos que $c_1 = \cdots = c_k = 0$. En efecto, aplicando la transformación lineal T tenemos que

$$T\left(\sum_{i=1}^{k} c_i v_i\right) = T(0) = 0,$$

así por las propiedades de la transformación lineal, se sigue que

$$\sum_{i=1}^{k} c_i T(v_i) = 0.$$

Luego como $\{T(v_1), \cdots, T(v_k)\} = T[S]$ es linealmente independiente, entonces $c_1 = \cdots = c_k = 0$. Por lo tanto $\{v_1, \cdots, v_k\} = S$ es linealmente independiente. $\square$

Teorema 1.1.24. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita $\dim V = n$ y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Si β_1 es una base para $\operatorname{im} T$, entonces existe $\beta' \subset V$ linealmente independiente, tal que $T[\beta'] = \beta_1$ y además*

$$V = \langle \beta' \rangle \oplus \ker T.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea β_1 una base de $\operatorname{im} T = \{w_1, ..., w_k\}$, entonces para cada w_i tome un $v_i \in V$ tal que $T(v_i) = w_i$, así considere el conjunto $\beta' = \{v_i \in V \mid T(v_i) = w_i \in \beta_1\}$ y por el Lema 1.1.23 se tiene que β' es un conjunto linealmente independiente tal que $T[\beta'] = \beta_1$. Ahora veamos que $V = \langle \beta' \rangle \oplus \ker T$, para ello considere $\beta_2 = \{u_1, \cdots, u_{n-k}\}$ una base para $\ker T$, mostraremos que $\beta' \cup \beta_2$ es una base de V y $\beta' \cap \beta_2 = \emptyset$.

1. Para probar que $\beta' \cap \beta_2 = \emptyset$. Supongamos que $\beta' \cap \beta_2 \neq \emptyset$, sea $v \in \beta' \cap \beta_2$, entonces $v \in \beta'$ y $v \in \beta_2$, así pues $T(v) = 0$ y como $v \in \beta'$ entonces $T(v) \neq 0$. Lo cual es absurdo, así pues $\beta' \cap \beta_2 = \emptyset$.

2. Para ver que $\beta' \cup \beta_2$ es base, note que

$$\begin{aligned} |\beta' \cup \beta_2| &= |\beta'| + |\beta_2| - |\beta' \cap \beta_2| \\ &= |\beta_1| + |\beta_2| \\ &= \dim(\operatorname{im} T) + \dim(\ker T) \\ &= n. \end{aligned}$$

Sea
$$\sum_{i=1}^{k} c_i v_i + \sum_{i=1}^{n-k} d_i u_i = 0,$$
se sigue que
$$\sum_{i=1}^{k} c_i v_i = -\left(\sum_{i=1}^{n-k} d_i u_i \right),$$
así $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} c_i v_i \in \ker T$, y como $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} c_i v_i \in \langle \beta' \rangle$, entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} c_i v_i \in \ker T \cap \langle \beta' \rangle = \{0\}$, tenemos que
$$\sum_{i=1}^{k} c_i v_i = 0,$$
y ya que β' es linealmente independiente $c_1 = \cdots = c_k = 0$. Nos queda $\sum_{i=1}^{n-k} d_i u_i = 0$

y como β_2 es linealmente independiente tenemos que $d_1 = \cdots = d_{n-k} = 0$. Esto muestra que $\beta' \cup \beta_2$ es linealmente independiente. Por lo tanto $\beta' \cup \beta_2$ es base de V y ya que $\beta' \cap \beta_2 = \emptyset$ por el Teorema 1.1.16 podemos concluir que $V = \langle \beta' \rangle \oplus \ker T$. $\square$

Teorema 1.1.25 (Teorema de la dimensión). *Sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal entre espacios vectoriales* V *y* W*, donde* $\dim V = n < \infty$*. Entonces*

$$\dim V = \dim(\operatorname{im} T) + \dim(\ker T)$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\beta_1 = \{v_1, \cdots, v_k\}$ una para $\ker T$, por el Lema 1.1.10 existen $\{v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ tal que $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base de V. Ahora probaremos que el conjunto $\{T(v_{k+1}), \cdots, T(v_n)\}$ es una base para $\operatorname{im} T$. Primero note que al aplicar la transformación sobre los vectores de la base $\{v_1, \cdots, v_n\}$ tenemos que

$$T[\beta] = \{T(v_1), \cdots, T(v_n)\} = \{0, T(v_{k+1}), \cdots, T(v_n)\}$$

ya que $T(v_i) = 0$ para todo $i \leq k$. Luego $\{T(v_{k+1}), \cdots, T(v_n)\}$ genera a los vectores en $\operatorname{im} T$. Ahora veamos que este conjunto es linealmente independiente, para esto considere $c_i \in \mathbb{F}$ con $k + 1 \leq i \leq n$, tales que

$$\sum_{i=k+1}^{n} c_i T(v_i) = 0,$$

como T es una transformación lineal, tenemos que

$$T\left(\sum_{i=k+1}^{n} c_i v_i\right) = 0.$$

Así el vector $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} c_i v_i$ esta en el $\ker T$, entonces se puede ver como una combinación lineal de los vectores en β_1, así para algunos $b_i \in \mathbb{F}$ con $1 \leq i \leq k$, se sigue que

$$\sum_{i=k+1}^{n} c_i v_i = \sum_{i=1}^{k} b_i v_i,$$

luego

$$\sum_{i=1}^{k} b_i v_i - \left(\sum_{i=k+1}^{n} c_i v_i\right) = 0,$$

y como $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es linealmente independiente, tenemos que

$$b_1 = \cdots = b_k = c_{k+1} = \cdots = c_n = 0.$$

Si $r = \dim \operatorname{im} T$, como $\{T(v_{k+1}), \cdots, T(v_n)\}$ forma una base para $\operatorname{im} T$ tenemos que $r = n - k$ y como $k = \dim(\ker T)$ y $n = \dim V$ entonces

$$\dim V = \dim(\operatorname{im} T) + \dim(\ker T).$$

$\square$

Teorema 1.1.26. *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre espacios vectoriales V y W. Si $S = \{s_1, \cdots, s_k\}$ es un subconjunto de V. Entonces $T[\langle S\rangle] = \langle T[S]\rangle$*

DEMOSTRACIÓN: Sea $u \in T[\langle S\rangle]$, luego $u = T(v)$, donde $v \in \langle S\rangle$, así v se puede escribir como una combinación lineal de los vectores en S, entonces para algunos $\alpha_i \in \mathbb{F}$ con $1 \leq i \leq k$, tenemos que $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i$, ahora $u = T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i\right)$ ya que T es una transformación lineal se sigue que $u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(s_i)$ y por tanto $u \in \langle T[S]\rangle$.

Ahora sea $u \in \langle T[S]\rangle$, luego u se puede escribir como una combinación lineal de los vectores en $\langle T[S]\rangle$, así para algunos $\alpha_i \in \mathbb{F}$ con $1 \leq i \leq k$, tenemos que $u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(s_i)$ dado que T es transformación lineal, entonces $u = T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i\right)$ y por tanto $u \in T[\langle S\rangle]$. $\square$

Ahora demostraremos dos lemas que serán la base fundamental de la existencia y caracterización de los elementos regulares en $L_{\mathbb{F}}(V)$.

Lema 1.1.27. *Sean $S, T \in L_{\mathbb{F}}(V)$. Entonces, $T = S \circ R$ para algún $R \in L_{\mathbb{F}}(V)$ si y solo si $\operatorname{im} T \subseteq \operatorname{im} S$.*

DEMOSTRACIÓN: $\Rightarrow$) Supongamos que $T = S \circ R$ entonces $\operatorname{im} T = \operatorname{im}(S \circ R) \subseteq \operatorname{im} S$

$\Leftarrow$) Supongamos que $\operatorname{im} T \subseteq \operatorname{im} S$. Considere β_1 una base para $\operatorname{im} T$. Por el Teorema 1.1.24 existe $\beta^1 \subset V$ tal que $T[\beta^1] = \beta_1$ y además tenemos que $V = \langle \beta^1 \rangle \oplus \ker T$, así por el Teorema 1.1.16 tenemos que $\beta^1 \cup \beta$ es una base para V, donde β es una base para $\ker T$. Ahora sea β_2 una base para $\operatorname{im} S$. Por el Teorema 1.1.24 existe $\beta^2 \subset V$ tal que $S[\beta^2] = \beta_2$. Como $\operatorname{im} T \subseteq \operatorname{im} S$ entonces existe un subconjunto $\beta_3 \subseteq \beta_2$ tal que $\langle \beta_1 \rangle = \langle \beta_3 \rangle$, así pues existe un subconjunto $\beta^3 \subseteq \beta^2$ tal que $\langle \beta^3 \rangle \cong \langle \beta^1 \rangle$. Luego $T[\beta^1] = S[\beta^3]$ y además tenemos que $V = \langle \beta^2 \rangle \oplus \ker S = \langle \beta^3 \rangle \oplus \langle \beta^2 \setminus \beta^3 \rangle \oplus \ker S$, así por el Teorema 1.1.16 tenemos que $\beta^2 \cup \tilde{\beta} = \beta^3 \cup (\beta^2 \setminus \beta^3) \cup \tilde{\beta}$ es una base para V, donde $\tilde{\beta}$ es una base para $\ker S$. Luego podemos escribir

$$T(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in \langle \beta \rangle, \\ v \in \langle S[\beta^3] \rangle & \text{si } u \in \langle \beta^1 \rangle, \end{cases}$$

$$S(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in \langle \tilde{\beta} \rangle, \\ v \in \langle S[\beta^3] \rangle & \text{si } u \in \langle \beta^3 \rangle, \\ w \in \langle S[\beta^2 \setminus \beta^3] \rangle & \text{si } u \in \langle \beta^2 \setminus \beta^3 \rangle. \end{cases}$$

Defina $R \in L_{\mathbb{F}}(V)$ por

$$R(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in \langle \beta \rangle, \\ v \in \langle \beta^3 \rangle & \text{si } u \in \langle \beta^1 \rangle. \end{cases}$$

Así $(S \circ R)[\langle \beta^1 \rangle] = S[\langle \beta^3 \rangle]$ luego por el Teorema 1.1.26 se tiene que $S[\langle \beta^3 \rangle] = \langle S[\beta^3] \rangle = \langle T[\beta^1] \rangle = \operatorname{im} T$. Ahora como $(S \circ R)[\langle \beta \rangle] = S[\{0\}] = 0 = T[\beta]$. Por lo tanto $S \circ R = T$. $\square$

Lema 1.1.28. *Sean $S, T \in L_{\mathbb{F}}(V)$. Entonces $T = R \circ S$, para algún $R \in L_{\mathbb{F}}(V)$ si y solo si $\ker S \subseteq \ker T$.*

DEMOSTRACIÓN: $\Rightarrow$) Supongamos que $T = R \circ S$, entonces $\ker S \subseteq \ker T$, ya que para $x \in \ker S$, entonces $S(x) = 0$, aplicando R en ambos lados de la ecuación, tenemos que $R(S(x)) = R(0)$, como R es una transformación lineal, se sigue que $T(x) = R(S(x)) = R(0) = 0$. Por lo tanto $x \in \ker T$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\ker S \subseteq \ker T$. Sea β_1 una base para $\ker S$. Ya que $\ker S \subseteq \ker T$ entonces por el Lema 1.1.23 podemos extender β_1 a una base $\beta_2 = (\beta_2 \setminus \beta_1) \cup \beta_1$ para $\ker T$ tal que $\beta_1 \subseteq \beta_2$. Ahora considere una base β_3 para V tal que $\beta_2 \subseteq \beta_3$. Luego como

$\beta_3 = (\beta_3 \setminus \beta_2) \cup \beta_2$, así por el Teorema 1.1.16 tenemos que $V = \langle \beta_3 \setminus \beta_2 \rangle \oplus \ker T$. Defina

$$S(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in \langle \beta_1 \rangle, \\ v \in \langle S[\beta_2 \setminus \beta_1] \rangle & \text{si } u \in \langle \beta_2 \setminus \beta_1 \rangle, \\ w \in \langle S[\beta_3 \setminus \beta_2] \rangle & \text{si } u \in \langle \beta_3 \setminus \beta_2 \rangle, \end{cases}$$

$$T(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in \langle \beta_1 \rangle, \\ 0 & \text{si } u \in \langle \beta_2 \setminus \beta_1 \rangle, \\ v \in \langle S[\beta_3 \setminus \beta_2] \rangle & \text{si } u \in \langle \beta_3 \setminus \beta_2 \rangle. \end{cases}$$

Sea β_4 una base para $\operatorname{im} S$, por el Lema 1.1.23 podemos extender a una base β_5 para V tal que $V = \operatorname{im} S \oplus \langle \beta_5 \setminus \beta_4 \rangle$ y definimos $R \in L_{\mathbb{F}}(V)$ por

$$R(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in \langle \beta_5 \setminus \beta_4 \rangle, \\ 0 & \text{si } u \in \langle S[\beta_2 \setminus \beta_1] \rangle, \\ v \in \langle S[\beta_3 \setminus \beta_2] \rangle & \text{si } u \in \langle S[\beta_3 \setminus \beta_2] \rangle. \end{cases}$$

Por lo tanto $T = R \circ S$. □

1.1.2. El espacio dual

Definición 1.1.29. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, una transformación lineal de V en el cuerpo $\mathbb{F}$ es denominada una forma lineal o funcional lineal. El conjunto $L_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F}) = V^*$ de todas las formas lineales, es denominado el **espacio dual** de V, y también es un espacio vectorial.

Ejemplo 1.1.30. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo considere el espacio vectorial $\mathbb{F}^n$ y para cada $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ definamos $h_x : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ dada por $h_x(y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ para todo $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{F}^n$ y se puede probar que:

$$(\mathbb{F}^n)^* = \{h_x \mid x \in \mathbb{F}^n\}.$$

En efecto, sea $f \in (\mathbb{F}^n)^*$ y sea $\beta = \{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{F}^n$ y defina $f(e_i) = x_i$

para algún escalar $x_i \in \mathbb{F}$, así pues para $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{F}^n$ tenemos que

$$f(y) = f(y_1, \cdots, y_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = h_x(y).$$

□

Definición 1.1.31. Sea V un espacio vectorial y sea $\beta = \{v_i \mid i \in I\}$. Para cada $i \in I$, definimos un funcional lineal $f_i \in V^*$ por la condición de ortogonalidad

$$f_i(v_j) = \delta_{i,j},$$

donde $\delta_{i,j}$ es la función **delta de Kronecker**, definida así

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j, \\ 0 & si \quad i \neq j. \end{cases}$$

Teorema 1.1.32. *Sea V un espacio vectorial y $\beta = \{v_i \mid i \in I\}$ una base de V, entonces*

1. *El conjunto $\beta^* = \{f_i \in V^* \mid i \in I\}$ es linealmente independiente.*
2. *Si V es finito dimensional entonces β^* es una base para V^* la cual es llamada **base dual** de β.*

DEMOSTRACIÓN:

1. Considere
$$\sum_{i \in I} c_i f_i = \mathbf{0}.$$
Entonces para cada $v_j \in \beta$ tenemos
$$0 = \sum_{i \in I} c_i f_i(v_j) = \sum_{i \in I} c_i \delta_{i,j} = c_j.$$
Luego $c_i = 0$, para todo $i \in I$. Por lo tanto β^* es linealmente independiente.

2. Como V es finito dimensional, sea $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base para V, entonces, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, definimos el funcional $f_i \in V^*$ tal que $f_i(v_j) = \delta_{i,j}$. Veamos que $\beta^* = \{f_1, \cdots, f_n\}$ forma una base para V^*. Del inciso anterior tenemos que β^*

es linealmente independiente, ahora suponga que para $f \in V^*$ lo podemos escribir como una combinación lineal de los elementos en β^*

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i,$$

luego como

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(v_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{i,j} = c_j.$$

Por lo tanto,

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) f_i.$$

Así f está en el generado de β^*. Por lo tanto β^* es base de V^*. $\square$

En caso de que V sea un espacio finito dimensional tenemos que $\dim V = \dim V^*$. Por ende tenemos que $V \cong V^*$. Ahora en caso de que V sea infinito dimensional tenemos que β^* es un conjunto linealmente independiente, pero no se puede garantizar que sea una base para V^*. Por lo tanto, $\dim V \leq \dim V^*$. Por otro lado, denominamos a β^* la **base dual** de V ya que está base se construye a partir de una base β para V, donde para cada $f_i \in \beta^*$ esta dado por $f_i(v_j) = \delta_{i,j}$ con $v_j \in \beta$.

Teorema 1.1.33. *Sea V un espacio vectorial finito dimensional sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ con base $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$. Entonces existe una única base dual $\beta^* = \{f_1, \cdots, f_n\}$ para V^* tal que $f_i(v_j) = \delta_{i,j}$. Para cada funcional f sobre V se tiene que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) f_i,$$

y para cada $v \in V$ se tiene que

$$v = \sum_{i=1}^{n} f_i(v) v_i.$$

DEMOSTRACIÓN: EXISTENCIA Sea $f \in V^*$, entonces por el Teorema 1.1.32 f se puede ver como una combinación lineal de los funcionales $f_i \in \beta^*$ donde los escalares de dicha combinación lineal están dados por $f(v_i)$ con $v_i \in \beta$.
Ahora para $v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i,$$

además,
$$f_j(v) = f_j\left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_j(v_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{i,j} = c_j,$$
de modo que la única expresión para v como combinación de los c_i es
$$v = \sum_{i=1}^{n} f_i(v) v_i.$$

UNICIDAD. Sean $\beta = \{v_1, \cdots v_n\}$ y $\beta' = \{u_1, \cdots, u_n\}$ dos bases para V tales que $\beta^* = (\beta')^*$, entonces
$$[u_j]_\beta = \sum_{i=1}^{n} f_i(u_j) v_i = \sum_{i=1}^{n} f_i(v_j) v_i = [v_j]_\beta,$$
donde $[u_j]_\beta$ es el vector u_j expresado como una combinación lineal de los vectores en β. Por lo tanto $u_i = v_i$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. □

Definición 1.1.34. Se denota $V^{**} = L_{\mathbb{F}}(V^*, \mathbb{F})$ y se denomina **espacio bidual** o espacio doble dual.

Ejemplo 1.1.35. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo considere el espacio vectorial $\mathbb{F}^n$ y para cada $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ definamos $T_x : (\mathbb{F}^n)^* \to \mathbb{F}$ dada por $T_x(f) = f(x)$, para toda $x \in \mathbb{F}^n$. Podemos ver que:
$$(\mathbb{F}^n)^{**} = \{T_x \mid x \in \mathbb{F}^n\}.$$
En efecto, sean $x \in \mathbb{F}^n$ y $T_x \in (\mathbb{F}^n)^{**}$, considere $\beta = \{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{F}^n$ y sea $\beta^* = \{f_1, \cdots, f_n\}$ la base dual de $(\mathbb{F}^n)^*$ asociada a la base β y defina $T_x(f_i) = x_i$, para algún escalar $x_i \in \mathbb{F}$, así pues para $f \in (\mathbb{F}^n)^*$ tenemos que
$$T_x(f) = T_x\left(\sum_{i=1}^{n} f(e_i) f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) T_x(f_i) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) x_i = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = f(x).$$
□

Definición 1.1.36. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y sea V^{**} el espacio dual de V podemos definir un elemento de este espacio así, para $v \in V$, considere la función $\bar{v} : V^* \to V$ definida por
$$\bar{v}(f) = f(v),$$
el cual envía el funcional f al escalar $f(v)$. La función es llamada la **evaluación de** v.

Note que $\bar{v} \in V^{**}$. Sean $f_1, f_2 \in V^*$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$,

$$\bar{v}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(v) = \alpha_1 f_1(v) + \alpha_2 f_2(v) = \alpha_1 \bar{v}(f_1) + \alpha_2 \bar{v}(f_2)$$

Por lo tanto $\bar{v}$ es lineal, así $\bar{v} \in V^{**}$.

Definición 1.1.37. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ y sea V^{**}, definimos la función $\tau : V \to V^{**}$ por

$$\tau(v) = \bar{v}.$$

Este es llamado la **función canónica** o la **función natural**.
Note que τ es lineal. Sean $u, v \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$, entonces

$$\begin{aligned}
\tau(\alpha_1 u + \alpha_2 v) &= \overline{\alpha_1 u + \alpha_2 v}(f), \\
&= f(\alpha_1 u + \alpha_2 v), \\
&= \alpha_1 f(u) + \alpha_2 f(v), \\
&= \alpha_1 \bar{u}(f) + \alpha_2 \bar{v}(f), \\
&= \alpha_1 \tau(u) + \alpha_2 \tau(v),
\end{aligned}$$

para todo $f \in V^*$.

Teorema 1.1.38. *La función $\tau : V \to V^{**}$ definido por $\tau(v) = \bar{v}$, donde $\bar{v}$ es la evaluación de v, es un monomorfismo. Si V es finito dimensional, entonces τ es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $v \in \ker \tau$, entonces $\tau(v) = 0$ así $\bar{v} = 0$, luego $\bar{v}(f) = 0$ para toda $f \in V^*$, se sigue que $f(v) = 0$. Por lo tanto $v = 0$, por el Teorema 1.1.21 τ es un monomorfismo. En caso de que V sea finito dimensional, por el Teorema 1.1.25 τ es un isomorfismo.

Definición 1.1.39. Si V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ y S un subconjunto de V, el anulador de S es el conjunto S^0 se define

$$S^0 = \{T \in V^* \mid T(v) = 0 \text{ para todo } v \in S\},$$

y

$$S^{00} = (S^0)^0 = \{F \in V^{**} \mid F(T) = 0 \text{ para todo } T \in S^0\}.$$

Teorema 1.1.40. *Sea V un espacio vectorial. Si S y T subconjuntos no vacíos de V tales que $S \subseteq T$ entonces $T^0 \subseteq S^0$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f \in T^0$ entonces para todo v en T se tiene que $f(v) = 0$, Ahora como $S \subseteq T$ entonces $f(w) = 0$ para todo w en S. Por lo tanto $f \in S^0$. □

Ejemplo 1.1.41. Sea W un subespacio de $\mathbb{F}^n$. Entonces:

$$W^{00} = \{T_x \mid x \in W\}.$$

En efecto

$$\begin{aligned} W^0 &= \{h_y \in (\mathbb{F}^n)^* \mid h_y(x) = 0 \text{ para todo } x \in W \text{ y } y \in V\}, \\ &= \left\{ h_y \in (\mathbb{F}^n)^* \mid \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = 0 \text{ para todo } x \in W \text{ y } y \in V \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} W^{00} =& \{T_x \in (\mathbb{F}^n)^{**} \mid T_x(h_y) = 0 \text{ para todo } h_y \in W^0\}, \\ =& \{T_x \in (\mathbb{F}^n)^{**} \mid h_y(x) = 0 \text{ para todo } h_y \in W^0\}, \\ =& \{T_x \mid x \in W\}. \end{aligned}$$

Teorema 1.1.42. *Sea V un espacio vectorial finito dimensional sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ y sea W un subespacio vectorial de V, entonces*

$$\dim V = \dim W + \dim W^0.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{v_1, \cdots, v_k\}$ una base de W y por el Lema 1.1.10, podemos considerar un conjunto linealmente independiente $\{v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ tal que $\{v_1, \cdots v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ sea una base de V. Ahora, sea $\{f_1, \cdots f_n\}$ una base de V^* que es dual a la base de V. Veamos que $\{f_{k+1}, \cdots, f_n\}$ forma una base para W^0. Note que $f_i \in W^0$ para $i \geq k+1$, pues

$$f_i(v_j) = \delta_{ij},$$

y $\delta_{ij} = 0$ si $i \geq k+1$ y $j \leq k$, así para $v \in W$ tenemos que $f_i(v) = 0$ para $i \geq k+1$. Como $\{f_{k+1}, \cdots f_n\}$ son linealmente independientes, basta con ver que genera a todo W^0. En efecto, sea $f \in V^*$

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) f_i.$$

De modo que sí $f \in W^0$, entonces $f(v_i) = 0$ si $i \leq k$, así

$$f = \sum_{i=k+1}^{n} f(v_i) f_i.$$

Por lo tanto si $\dim W = k$ y $\dim V = n$ entonces $\dim W^0 = n - k$, de lo cual se sigue

$$\dim V = \dim W + \dim W^0.$$

□

Teorema 1.1.43. *Sea V un espacio vectorial y S un subconjunto de V, entonces $S^0 = \langle S \rangle^0$*

DEMOSTRACIÓN: Note que $S \subseteq \langle S \rangle$ por el Teorema 1.1.40 entonces $\langle S \rangle^0 \subseteq S^0$. Ahora veamos que $S^0 \subseteq \langle S \rangle^0$, sea $f \in S^0$ así para todo $v \in S$ tenemos que $f(v) = 0$, considere $u \in \langle S \rangle$, entonces $u = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$ para $a_i \in \mathbb{F}$ y $x_i \in S$ luego $f(u) = f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i\right) = a_i \sum_{i=1}^{k} f(x_i)$ y como $f(x_i) = 0$ para todo $x_i \in S$. Por lo tanto $f \in \langle S \rangle^0$. □

Observación 1.1.44. El resultado anterior también implica que $S^{00} = \langle S \rangle^{00}$.

Lema 1.1.45. *Sea V un espacio vectorial finito dimensional sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Si W es un subespacio de V y $v \notin W$. Entonces existe $f \in W^0$ tal que $f(v) \neq 0$*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\beta = \{v_1, \cdots, v_k\}$ una base para W, por el Lema 1.1.23, podemos extender β a una base $\beta_1 = \{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ para V. Ahora consideremos la base dual a esta base $\beta^* = \{f_1, \cdots, f_k, f_{k+1}, \cdots, f_n\}$. Es claro que $\{f_{k+1}, \cdots, f_n\}$ es una base del anulador W^0, ya que f_i para $i \geq k+1$ y $j \leq k$ se tiene que $\delta_{i,j} = 0$, ahora como $v_{k+1}, \cdots, v_n \notin W$. Pero $v \notin W$, entonces se sigue que $v = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i$, donde $\alpha_i \in \mathbb{F}$ y al menos un α_l no nulo. Luego $f_l(v) = \alpha_l \neq 0$. Por lo tanto hemos encontrado uno. □

Teorema 1.1.46. *Sea V un espacio vectorial finito dimensional, entonces para cualquier subconjunto no vacío S de V, la función natural $\tau : \langle S \rangle \to S^{00}$. En particular, si S es un subespacio de V, entonces $S \cong S^{00}$.*

DEMOSTRACIÓN: Por la Observación 1.1.44 tenemos que $S^{00} = \langle S \rangle^{00}$, así es suficiente demostrar que si S es un subespacio de V entonces $S \cong S^{00}$. Por el Teorema 1.1.54

sabemos que $\tau : V \to V^{**}$ es un isomorfismo, basta ver que $\tau[S] = S^{00}$. Sea $s \in S$, entonces $\tau(s) = \bar{s}$ tiene la propiedad que para todo $f \in S^0$

$$\bar{s}(f) = f(s) = 0.$$

Así $\tau(s) = \bar{s} \in S^{00}$, lo cual implica que $\tau[S] \subseteq S^{00}$. Ahora, sea $\bar{v} \in S^{00}$, entonces para todo $f \in S^0$, se tiene que

$$f(v) = \bar{v}(f) = 0.$$

Luego todo funcional que anula a S también anula a v. Pero si $v \notin S$, por el Lema 1.1.45 existe un funcional tal que $g \in S^0$ y $g(v) \neq 0$. Por lo tanto, $v \in S$ luego $\bar{v} = \tau(v) \in \tau[S]$. Así $S^{00} \subseteq \tau[S]$. □

Lema 1.1.47. *Sea* $\mathbb{F}$ *un cuerpo y sean* $(a_{11}, \cdots, a_{1n}), \cdots, (a_{m1}, \cdots, a_{mn}),\ (b_1, \cdots, b_n)$ *elementos de* $\mathbb{F}^n$*. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes*

1. $(b_1, \cdots, b_n) \in \langle (a_{11}, \cdots, a_{1n}), \cdots, (a_{m1}, \cdots, a_{mn}) \rangle$.
2. *Para cualquier* $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n$*, si* $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0$ *para todo* $i \in \{1, \cdots, m\}$*, entonces* $b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0$*.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $U_1 = \langle (a_{11}, \cdots, a_{1n}), \cdots, (a_{m1}, \cdots, a_{mn}) \rangle$ y $U_2 = \langle (b_1, \cdots, b_n) \rangle$
$1. \Rightarrow 2.$ Como $(b_1, \cdots, b_n) \in \langle (a_{11}, \cdots, a_{1n}), \cdots, (a_{m1}, \cdots, a_{mn}) \rangle$. Entonces $U_2 \subseteq U_1$, luego por el Teorema 1.1.40 tenemos que ${U_1}^0 \subseteq {U_2}^0$. Sea $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ tal que $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, m\}$. Entonces

$$h_x(a_{i1}, \cdots, a_{in}) = 0 \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, \cdots, m\},$$

donde h_x es el funcional definido en el Ejemplo 1.1.30. Ahora se sigue que $h_x \in {U_1}^0$, luego $h_x \in {U_2}^0$ entonces $h_x(b_1, \cdots, b_n) = 0$, esto es $b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0$.
$2. \Rightarrow 1.$ Sean $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ y supongamos que para cualquier $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, si $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, m\}$, entonces $b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0$. Ahora por hipótesis tenemos que $h_x \in {U_1}^0$ implica que $h_x \in {U_2}^0$. De aquí sigue que ${U_1}^0 \subseteq {U_2}^0$, entonces ${U_2}^{00} \subseteq {U_1}^{00}$, luego por la Observación 1.1.54 tenemos que $U_2 \subseteq U_1$, lo que implica $(b_1, \cdots, b_n) \in \langle (a_{11}, \cdots, a_{1n}), \cdots, (a_{m1}, \cdots, a_{mn}) \rangle$. □

1.1.3. Transformaciones lineales y matrices En esta sección se pretende abordar algunos resultados que nos permiten establecer una relación entre una transformación lineal y una matriz y aquella relación que necesitamos.

Teorema 1.1.48. *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y sea A una matriz con entradas en el cuerpo $\mathbb{F}$ de $m \times n$. Entonces la transformación matricial $T_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ definida por*

$$T_A(x) = Ax, \quad \textit{para } x \textit{ en } \mathbb{F}^n,$$

es una transformación lineal.

DEMOSTRACIÓN: Sean u y v vectores en $\mathbb{F}^n$ y sea c un escalar en $\mathbb{F}$. Entonces

$$T_A(u+v) = A(u+v) = Au + Av = T_A(u) + T_A(v),$$

$$T_A(cu) = A(cu) = c(Au) = cT_A(u).$$

Por lo tanto T_A es una transformación lineal. $\square$

Observación 1.1.49. Si $T_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ donde A es una matriz de tamaño $n \times n$ con entradas en el cuerpo $\mathbb{F}$. Considere $\{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{F}^n$. Por lo tanto tenemos

$$T_A(e_i) = (a_{1i}, \cdots, a_{ni}), \ \text{ para } i \in \{1, \cdots, n\} \text{ y } A \in M_n(\mathbb{F}^n).$$

donde $T_A(e_i) = (a_{1i}, \cdots, a_{ni})$, es la i-ésima columna de A.

Teorema 1.1.50. *Sea $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ una transformación lineal. Entonces T es una trasformación matricial. Es decir $T = T_A$, donde A es la matriz de $m \times n$*

$$A = [T(e_1) \downarrow \cdots T(e_n) \downarrow],$$

donde $\{e_1, \cdots e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{F}^n$ y $T(e_i) \downarrow$ es la transformación del vector canónico e_i escrito como columna.

DEMOSTRACIÓN: Sea $x \in \mathbb{F}^n$, entonces $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, así pues

$$\begin{aligned} T(x) \downarrow &= T(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) \downarrow, \\ &= x_1T(e_1) \downarrow + \cdots + x_nT(e_n) \downarrow, \\ &= [T(e_1) \downarrow \cdots T(e_n) \downarrow] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \\ &= Ax. \end{aligned}$$

La matriz A se llama **matriz estándar de** T. $\square$

Definición 1.1.51. Sea $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base ordenada para un espacio vectorial finito dimensional V. Para $v \in V$, sean $c_1, \cdots, c_n$ los únicos escalares tales que

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i.$$

Definimos el **vector coordenado de** v **respecto a** β, denotado por $[v]_\beta$, por

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ tales que $\dim V = n$ y $\dim W = m$ y sean β y β' bases para V y W respectivamente. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Es natural preguntarse si para esta transformación lineal también existe una matriz estándar y la respuesta es que sí. Pues como $V \cong \mathbb{F}^n$ existe una transformación lineal $S : V \to \mathbb{F}^n$ dada por $S(v) = [v]_\beta$ para $v \in V$, de manera similar se tiene que $W \cong \mathbb{F}^m$ así existe una transformación lineal $R : W \to \mathbb{F}^m$ dada por $R(w) = [w]_{\beta'}$. Observe que tanto R como S son isomorfismos, podemos considerar $S^{-1} : \mathbb{F}^n \to V$ y así podemos definir $S^{-1} \circ T \circ R : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ dada por $(S^{-1} \circ T \circ R)([u]_\beta) = [T(u)]_{\beta'}$

$$\begin{tikzcd} V < 1ex >^S \arrow[r, "T"] \arrow[d, leftrightarrow] & W \arrow[d, "R"] \\ \mathbb{F}^n < 1ex >^{S^{-1}} \arrow[r, "S^{-1}\circ T \circ R"'] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd}$$

Así por el Teorema 1.1.50 existe una matriz A con entradas en el cuerpo $\mathbb{F}$ de tamaño $m \times n$ tal que

$$A[v]_\beta = [T(v)]_{\beta'}.$$

Lo anterior introduce el siguiente resultado:

Teorema 1.1.52. *Sean V y W dos espacios vectoriales finito dimensionales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ con bases $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ y $\beta' = \{u_1, \cdots, u_m\}$. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces la matriz A de $m \times n$ definida por*

$$A = [[T(v_1)]_{\beta'} \downarrow \cdots [T(v_n)]_{\beta'} \downarrow],$$

satisface

$$A[v]_\beta = [T(v)]_{\beta'},$$

*para cada vector $v \in V$. La matriz A se denomina **matriz de** T con respecto a las bases β y β'.*

Definición 1.1.53. Las siguientes operaciones elementales entre filas se pueden realizar sobre una matriz

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar diferente de cero.
- Adicionar un múltiplo de una fila a otra fila.

Definición 1.1.54. Una matriz E de tamaño de $n \times n$ es llamada una **matriz elemental** si esta se obtiene a partir de la matriz identidad I_n mediante una única operación de fila elemental.

Ejemplo 1.1.55. Sea $A \in M_2(\mathbb{F})$. Las matrices:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; E_2 = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Son matrices elementales tales que la matriz E_1 representa el cambio de la fila 1 con la fila 2, la matriz E_2 representa la multiplicación por escalar a la fila 1 y por último, la matriz E_3 representa la adición de $k - veces$ la fila 2 a la fila 1.

1.2. Teoría de semigrupos

La teoría de semigrupos es una rama de las matemáticas que tiene sus comienzos a principios del siglo XX, encabezado por los matemáticos Alfred Clifford, James Alexander Green y David Rees. Años más tarde los matemáticos John Howie en [2] y Peter Higgins en [3] escriben los textos básicos de la teoría de semigrupos y los cuales usaremos para el desarrollo de este trabajo.

---

[2] John HOWIE. *Fundamentals of semigroup theory*. oxford university Press, 1995.

[3] Peter HIGGINS. *Techniques of semigroup theory*. Clarendon Press, 1992.

Definición 1.2.1. Un **semigrupo** es un conjunto S dotado con una operación binaria $*$ que satisface las siguientes condiciones:

- Para todo $a, b \in S$ se tiene que $a * b \in S$.
- Para todo $a, b, c \in S$ se cumple la igualdad:

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

Ejemplo 1.2.2. Considere los siguientes semigrupos:

1. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo, V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, entonces $L_{\mathbb{F}}(V)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales $T : V \to V$ es un semigrupo con la composición de funciones, que denotaremos por $\langle L_{\mathbb{F}}(V), \circ\rangle$.
2. $M_n(\mathbb{F})$, el conjunto de todas las matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en el cuerpo $\mathbb{F}$, junto con la multiplicación usual de matrices, forma un semigrupo que denotaremos por $\langle M_n(\mathbb{F}), \cdot\rangle$.
3. Dado un conjunto X. El conjunto $\mathcal{T}(X) = \{f : X \to X \mid f \text{ es función}\}$, junto con la composición de funciones forma un semigrupo, denotado por $\langle \mathcal{T}(X), \circ\rangle$.

Observación 1.2.3. Sea S un semigrupo el cual no necesariamente posee un elemento identidad, entonces se añade un elemento extra 1 a S donde este nuevo elemento será la identidad y así se puede definir:

$$S^1 = \begin{cases} S & \text{si } S \text{ tiene elemento identidad,} \\ S \cup \{1\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Donde para cada $x \in S$ tenemos que $1 * x = x * 1 = x$ y además $1 * 1 = 1$.

Definición 1.2.4. Un subconjunto T de un semigrupo S es llamado un **subsemigrupo** si es cerrado con respecto a la multiplicación, es decir, si para todo $x, y \in T$ implica $xy \in T$.

Ejemplo 1.2.5. Sea $\langle \mathcal{T}(X), \circ\rangle$ el semigrupo definido en el Ejemplo 1.2.2 y sea Y un subconjunto no vacío de X. Considere el conjunto $\mathcal{T}(X, Y) = \{f \in \mathcal{T}(X) \mid \operatorname{im} f \subseteq Y\}$ que consiste de todas las funciones de X en X tales que su imagen está contenida en Y, es fácil ver que $\mathcal{T}(X, Y)$ es un subconjunto de $\mathcal{T}(X)$ el cual forma un subsemigrupo de $\langle \mathcal{T}(X), \circ\rangle$.

Definición 1.2.6. Sea S un semigrupo y sea $a \in S$. Definimos los conjuntos

$$aS = \{as \mid s \in S\}.$$

$$Sa = \{sa \mid s \in S\}.$$

En general dado un subconjunto A en S definimos

$$AS = \{as \mid a \in A, s \in S\}.$$

$$SA = \{sa \mid a \in A, s \in S\}.$$

Definición 1.2.7. Un subconjunto no vacío A de un semigrupo S es llamado un **ideal izquierdo** si $SA \subseteq A$, un **ideal derecho** si $AS \subseteq A$, y un **ideal bilateral** si es un ideal a izquierda y a derecha.

Ejemplo 1.2.8. Considere el semigrupo $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$ y sea $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es par } \}$ el subconjunto de los números pares. Podemos ver que P forma un ideal de $\mathbb{N}$, pues al multiplicar a cualquier número natural por un número par, el resultado es un número par y dado la conmutatividad del semigrupo se tiene que si es ideal a izquierda, también lo es a derecha.

Observación 1.2.9. Todo ideal es un subsemigrupo, la recíproca no es cierta. Para esto considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.10. Consideremos el semigrupo $\langle M_2(\mathbb{R}), \cdot \rangle$ el conjunto de las matrices cuadradas de tamaño 2×2 con entradas en $\mathbb{R}$ junto con la multiplicación usual de matrices y sea D_2 el conjunto las matrices diagonales de tamaño 2×2, es fácil ver que D_2 es un subsemigrupo de $M_2(\mathbb{R})$, ya que el producto de matrices diagonales, es una matriz diagonal, Ahora considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde $A \in M_2(\mathbb{R})$ y $B \in D_2$, luego como $AB = BA = A$ se sigue que $AB \notin D_2$. Por lo tanto D_2 no es un ideal de $M_2(\mathbb{R})$.

Definición 1.2.11. Sea S un semigrupo y $a \in S$, el ideal izquierdo más pequeño de S conteniendo a es $Sa \cup \{a\}$ y denotado por S^1a, de forma análoga podemos definir el ideal derecho más pequeño de S conteniendo a es $aS \cup \{a\}$ y denotado por aS^1.

Relaciones de Green Para hablar de elementos regulares en un semigrupo es necesario definir algunas relaciones de equivalencia las cuales nos ayudarán a determinar dichos elementos. Usaremos las relaciones de Green con el fin de establecer los ideales de un semigrupo S.

Definición 1.2.12. Sean a, b elementos de un semigrupo S. Definimos las siguientes relaciones:

- $a\,\mathcal{L}\,b$ si y solo si existen $x, y \in S^1$ tal que $xa = b$ y $yb = a$.
- $a\,\mathcal{R}\,b$ si y solo si existen $u, v \in S^1$ tal que $au = b$ y $bv = a$.
- $a\,\mathcal{J}\,b$ si y solo si $S^1aS^1 = S^1bS^1$, esto es si existen x, y, u, v en S^1 tal que

$$xay = b, \quad ubv = a.$$

  Esto implica que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{J}$ y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{J}$.

- Por último definimos las relaciones $\mathcal{D} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ y $\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$

Ejemplo 1.2.13. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y sean T_1, $T_2 \in L_{\mathbb{F}}(V)$, entonces

1. $T_1\,\mathcal{R}\,T_2$ si y solo si $\operatorname{im} T_1 = \operatorname{im} T_2$
2. $T_1\,\mathcal{L}\,T_2$ si y solo si $\ker T_1 = \ker T_2$
3. $T_1\,\mathcal{D}\,T_2$ si y solo si $\dim(\operatorname{im} T_1) = \dim(\operatorname{im} T_2)$
4. $\mathcal{D} = \mathcal{J}$

Observación 1.2.14. Estos resultados se encuentran en [2], pero para nuestra conveniencia demostraremos los ítem (1) y (2), pues sus ideas serán relevantes en el Capítulo 2.

DEMOSTRACIÓN: Sean T_1 y T_2 en $L_{\mathbb{F}}(V)$

1. $\Rightarrow)$ Supongamos que $T_1\,\mathcal{R}\,T_2$, luego existen R_1 y R_2 en $L_{\mathbb{F}}(V)$ tales que $T_1 = T_2 \circ R_2$ y $T_2 = T_1 \circ R_1$. Así pues se presentan dos casos

   Caso 1) $R_1 = i_{d_V}$ o $R_2 = i_{d_V}$, entonces $T_1 = T_2$. Por lo tanto $\operatorname{im} T_1 = \operatorname{im} T_2$.

   Caso 2) $R_1 \neq i_{d_V}$ y $R_2 \neq i_{d_V}$. Como $T_1 = T_2 \circ R_2$ y $T_2 = T_1 \circ R_1$ entonces por el Lema 1.1.27 tenemos que $\operatorname{im} T_1 \subseteq \operatorname{im} T_2$ y $\operatorname{im} T_2 \subseteq \operatorname{im} T_1$. Por lo tanto $\operatorname{im} T_1 = \operatorname{im} T_2$.

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que $\operatorname{im} T_1 = \operatorname{im} T_2$, entonces tenemos que $\operatorname{im} T_1 \subseteq \operatorname{im} T_2$, así por el Lema 1.1.27 existe $R_2 \in L_{\mathbb{F}}(V)$ tal que $T_1 = T_2 \circ R_2$. De forma análoga se tiene que $\operatorname{im} T_2 \subseteq \operatorname{im} T_1$, así por el Lema 1.1.27 existe $R_1 \in L_{\mathbb{F}}(V)$ tal que $T_2 = T_1 \circ R_1$. Por lo tanto $T_1 \,\mathcal{R}\, T_2$.

2. Este resultado es consecuencia inmediata del Lema 1.1.28. □

Semigrupos regulares

Definición 1.2.15. Un elemento x de un semigrupo S se dice **regular** si $x = xyx$, para algún $y \in S$.

Definición 1.2.16. El conjunto de los elementos regulares de S es denotado por $\operatorname{Reg}(S)$, decimos que S es regular si $\operatorname{Reg}(S) = S$.

Ejemplo 1.2.17. Sea X un conjunto y considere el semigrupo definido así $\langle \mathcal{P}(X), \cup \rangle$. Note que para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ y B subconjunto de A se tiene que $A = A \cup B \cup A$. En particular $\mathcal{P}(X)$ es un semigrupo regular.

Teorema 1.2.18. *El semigrupo $\langle L_{\mathbb{F}}(V), \circ \rangle$ es regular*

DEMOSTRACIÓN: Sea $T \in L_{\mathbb{F}}(V)$, considere β_1 una base de $\ker T$, β_2 una base de $\operatorname{im} T$, luego por el Lema 1.1.10 existe β_3 una base para V tal que $\beta_2 \subseteq \beta_3$. Por el Teorema 1.1.24 existe un conjunto β' tal que $T[\beta'] = \beta_2$ y además $V = \langle \beta' \rangle \oplus \ker T$, así por el Teorema 1.1.16 se tiene que $\beta = \beta_1 \cup \beta'$ es base para V y $\beta_1 \cap \beta' = \emptyset$. Defina $S \in L_{\mathbb{F}}(V)$ sobre la base β_3 así:

$$S(u') = \begin{cases} v' \in \langle \beta' \rangle & si \quad u' \in \operatorname{im} T, \\ 0 & si \quad u' \in V \setminus \operatorname{im} T, \end{cases}$$

donde $u' = T(v')$ para $v \in \langle \beta' \rangle$. Entonces para $v \in \langle \beta' \rangle$, se tiene que $T(S(T(v'))) = T(S(u')) = T(v')$, y como $T(S(T[\ker T])) = \{0\} = T[\ker T]$. Así $T \circ S \circ T = T$, dado que T es arbitrario, concluimos que $L_{\mathbb{F}}(V)$ es un semigrupo regular. □

Definición 1.2.19. Una función $f : S \to T$ donde $\langle S, \cdot \rangle$ y $\langle T, * \rangle$ son semigrupos, es llamado un homomorfismo si, para todo $x, y \in S$

$$f(x \cdot y) = f(x) * f(y).$$

Definición 1.2.20. Un homomorfismo el cual es biyectivo es llamado un **isomorfismo**.

Teorema 1.2.21. *Sea $f : S \to T$ un homomorfismo de un semigrupo S en un semigrupo T. Si S es un semigrupo regular entonces $\operatorname{im} f$ es un semigrupo regular.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $x \in \operatorname{im} f$, entonces existe $a \in S$ tal que $x = f(a)$ luego como $S = \operatorname{Reg} S$, entonces existe $b \in S$ tal que $a = aba$, así pues $f(a) = f(aba) = f(a)f(b)f(a)$ donde $y = f(b) \in \operatorname{im} f$ y así $x = xyx$. Por tanto $x \in \operatorname{Reg}(\operatorname{im} f)$. $\square$

Definición 1.2.22. Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$, definimos la función ${}_AT : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ por

$${}_AT(x) = xA, \text{ para } x \in \mathbb{F}^n.$$

Claramente, ${}_AT \in L_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)$. Además considere $\{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{F}^n$. Por lo tanto, tenemos

$${}_AT(e_i) = (a_{i1}, \cdots, a_{in}), \text{ para } i \in \{1, \cdots, n\} \text{ y } A \in M_n(\mathbb{F}^n),$$

donde $(a_{i1}, \cdots, a_{in})$ es la $i-$ésima fila de A.

Lema 1.2.23. *La función $f : M_n(\mathbb{F}) \to L_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)$ definida por $f(A) = {}_AT$, para toda $A \in M_n(\mathbb{F})$, es un isomorfismo de $M_n(\mathbb{F})$ sobre $L_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)$.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que f es un homomorfismo. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ y $x \in \mathbb{F}^n$,

$$f(AB) = {}_{AB}T(x) = xAB = ({}_AT(x))B = {}_BT({}_AT(x)) = ({}_BT\,{}_AT)(x) = f(A)f(B).$$

Veamos que f es inyectiva, sean ${}_AT, {}_BT \in L_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)$ tales que ${}_AT = {}_BT$, es decir ${}_AT(x) = {}_BT(x)$ para toda $x \in \mathbb{F}^n$, en particular se tiene que ${}_AT(e_i) = {}_BT(e_i)$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, entonces $(a_{i1}, \cdots, a_{in}) = (b_{i1}, \cdots, b_{in})$, así $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, luego $A = B$ y por tanto f es inyectiva.
Veamos que f es sobreyectiva, sea $S \in L_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)$, entonces defina $A \in M_n(F)$ como la matriz donde cada i-esima columna de A es la imagen del i-esimo vector de la base canónica de $\mathbb{F}^n$, es decir

$$(a_{i1}, \cdots, a_{in}) = S(e_i) \text{ para } i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Entonces por la Definición 1.2.22, ${}_AT(e_i) = S(e_i)$ para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$, así $f(A) = {}_AT = S$. Por lo tanto f es sobreyectiva. Luego f es un isomorfismo de semigrupos.

$\square$

Ejemplo 1.2.24. Sea V un espacio vectorial finito dimensional tal que $\dim V = n$. Considere el homomorfismo $f : L_{\mathbb{F}}(V) \to M_n(\mathbb{F})$ dad0 por $f(T) = A_T$, donde A_T es la matriz estándar de la transformación. Como f es un isomorfismo y $L_{\mathbb{F}}(V)$ es un semigrupo regular, entonces $M_n(\mathbb{F})$ es un semigrupo regular.

Definición 1.2.25. Una función biyectiva $f : S \to T$ donde $\langle S, \cdot \rangle$ y $\langle T, * \rangle$ son semigrupos, es llamado un anti-isomorfismo si, para todo x, y en S

$$f(x \cdot y) = f(y) * f(x)$$

Ejemplo 1.2.26. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo, y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Considere la función $f : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ donde $f(A) = A^T$, es fácil ver que f es un anti-isomorfismo, pues $f(AB) = (AB)^T = B^T A^T = f(B)f(A)$.

Teorema 1.2.27. *Sea $f : S \to T$ un anti-isomorfismo de semigrupos, entonces* $\mathrm{Reg}(T) = f(\mathrm{Reg}(S))$.

DEMOSTRACIÓN: En efecto, sea $x \in \mathrm{Reg}\,(T)$ entonces existe $y \in T$ tal que $x = xyx$, luego como f es anti-isomorfismo entonces existen $a, b \in S$ tal que $x = f(a)$ y $y = f(b)$, como $x = xyx$, se sigue que $f(a) = f(a)f(b)f(a) = f(aba)$. Dado que f es biyectiva, entonces $a = aba$, así pues $a \in \mathrm{Reg}(S)$. Por lo tanto $x \in f(\mathrm{Reg}(S))$.
Sea $x \in f(\mathrm{Reg}\,(S))$ entonces existe $a \in \mathrm{Reg}\,(S)$ tal que para algún $b \in S$ tenemos que $a = aba$, como f es anti-isomorfismo $f(a) = f(aba) = f(a)f(b)f(a)$. Con $y = f(b) \in T$, entonces $x = xyx$, es decir $x \in \mathrm{Reg}\,(T)$. $\square$

2. ALGUNOS ELEMENTOS REGULARES DE $L_{\mathbb{F}}(V)$

Al comienzo de este documento se hizo una pregunta importante y es ¿dado un subsemigrupo U de un semigrupo S el cual es regular, entonces será este subsemigrupo también regular? En general, la respuesta a esta pregunta es **NO**, así que la siguiente pregunta a realizarse es ¿bajo qué condiciones este subsemigrupo si es regular?

En [4] Nenthein, S., Youngkhong, P. Kemprasit, Y. Consideran el problema con el semigrupo definido en el Ejemplo 1.2.2 y el subsemigrupo definido en el Ejemplo 1.2.5. Dos años después, los mismos autores, en [2], estudian el caso particular de los endomorfismos de espacios vectoriales finito dimensionales y toman como subsemigrupo el conjunto de endomorfismos con rango restringido.

Por otro lado, R.P. Sullivan, en [3], estudia los ideales del conjunto de elementos regulares de este subsemigrupo, para así, poder dar una caracterización de los ideales de $I_{\mathbb{F}}(V,W)$, así que en este capitulo trabajaremos algunos resultados sobre las equivalencias de Green, los cuales nos llevarán a obtener la caracterización de los elementos regulares de $I_{\mathbb{F}}(V,W)$.

2.1. El subsemigrupo $I_{\mathbb{F}}(V,W)$

Considere V un $\mathbb{F}$-$espacio\ vectorial$ y sea W un subespacio no vacío, entonces podemos construir el conjunto

$$I_{\mathbb{F}}(V,W) = \{T \in L_{\mathbb{F}}(V) \mid \operatorname{im} T \subseteq W\}.$$

Que consiste de todas las transformaciones lineales cuya imagen está contenida en el subespacio W.

Teorema 2.1.1. *Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y W un subespacio de V. Para $T \in I_{\mathbb{F}}(V,W)$, T es un elemento regular de $I_{\mathbb{F}}(V,W)$ si y solo si $\operatorname{im} T = T[W]$.*

DEMOSTRACIÓN:

---

[4] et al. NENTHEIN Sansanee. “Regular elements of some transformation semigroups”. En: *Pure Mathematics and Applications* 16.3 (2005), págs. 307-314.

$\Rightarrow$) Sea $T \in I_{\mathbb{F}}(V, W)$ y supongamos que T es un elemento regular, así pues $T = T \circ S \circ T$, para algún $S \in I_{\mathbb{F}}(V, W)$, entonces

$$T[W] \subseteq T[V] = (T \circ S \circ T)[V] = T[S[T[V]]] \subseteq T[W].$$

Luego $\operatorname{im} T = T[W]$.

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que $\operatorname{im} T = T[W]$. Sea β_1 una base del $\ker T$, β_2 una base de $\operatorname{im} T$, luego por el Lema 1.1.23 existe una base β_3 para V tal que $\beta_2 \subseteq \beta_3$. Como $\operatorname{im} T = T[W]$ y por el Teorema 1.1.24 existe un conjunto $\beta' \subseteq W$ tal que $T[\beta'] = \beta_2$ y además $V = \langle \beta' \rangle \oplus \ker T$, así por el Teorema 1.1.16 se tiene que $\beta = \beta_1 \cup \beta'$ es una base para V y $\beta_1 \cap \beta' = \emptyset$. Defina $S \in L_{\mathbb{F}}(V)$ sobre la base β_3 de V por:

$$S(u) = \begin{cases} u' \in \langle \beta' \rangle & si \quad u \in \operatorname{im} T, \\ 0 & si \quad u \in V \setminus \operatorname{im} T, \end{cases}$$

donde $S(u) = u'$, tal que $T(u') = u$. Ahora como , $T \circ S \circ T(u') = T(S(T(u'))) = T(S(u)) = T(u')$. Entonces $\operatorname{im} S = \langle \beta' \rangle \subseteq W$, luego $S \in I_{\mathbb{F}}(V, W)$, luego tenemos que $T \circ S \circ T = T$. Por lo tanto T es un elemento regular de $I_{\mathbb{F}}(V, W)$.

$\square$

Ejemplo 2.1.2. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida así:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

si se considera $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid w = 0\}$ entonces $T[W] = \{(x, y, w, z) \in \mathbb{R}^4 \mid z = w = 0\}$ y como $\operatorname{im} T = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid z = w = 0\}$ se tiene que $T \in \operatorname{Reg}(I_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, W))$ además $T = T \circ T \circ T = T^3$.

Corolario 2.1.3. *El semigrupo $I_{\mathbb{F}}(V, W)$ es regular si y solo si $W = V$ ó $W = \{0\}$.*

DEMOSTRACIÓN:

$\Rightarrow$) Suponga que $\{0\} \subsetneq W \subsetneq V$. Sea β_1 una base de W y β una base de V conteniendo a β_1. Sea $w \in \beta_1$ y considere el subespacio $\langle w \rangle$ generado por w. Así defina $T \in$

$L_{\mathbb{F}}(V)$ así:

$$T(u)=\begin{cases} 0 & si \quad u\in W,\\ v\in\langle w\rangle & si \quad u\in V\setminus W.\end{cases}$$

Entonces $\operatorname{im}T=\langle w\rangle\subseteq W$ y $T[W]=\{0\}$, así pues $\operatorname{im}T\neq T[W]$. Por lo tanto $T\in I_{\mathbb{F}}(V,W)$ y por el Teorema 2.1.1 T no es un elemento regular de $I_{\mathbb{F}}(V,W)$. Ahora como $I_{\mathbb{F}}(V,V)=L_{\mathbb{F}}(V)$ y $I_{\mathbb{F}}(V,\{0\})=\{0\}$ y estos son semigrupos regulares, así tenemos que $I_{\mathbb{F}}(V,W)$ es un semigrupo regular si $W=V$ o $W=\{0\}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $W=V$ entonces $I_{\mathbb{F}}(V,W)=I_{\mathbb{F}}(V,V)=L_{\mathbb{F}}(V)$. Por otro lado si $W=\{0\}$ entonces $I_{\mathbb{F}}(V,W)=I_{\mathbb{F}}(V,\{0\})=\{0\}$. Note que en ambos casos los semigrupos son regulares. □

2.1.1. Ideales cuyos elementos son regulares en $I_{\mathbb{F}}(V,W)$ Por el Teorema 2.1.1 todos los elementos del conjunto

$$\mathcal{Q}=\{T\in I_{\mathbb{F}}(V,W)\mid \operatorname{im}T=T[W]\},$$

son regulares en $I_{\mathbb{F}}(V,W)$, el cual forma un subsemigrupo de este mismo.

Teorema 2.1.4. *El subconjunto $\mathcal{Q}$ de $I_{\mathbb{F}}(V,W)$ es un subsemigrupo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $T_1,T_2\in\mathcal{Q}$, veamos que $T_1T_2\in Q$. En efecto, ya que

$$\operatorname{im}(T_1\circ T_2)=T_1[\operatorname{im}T_2]\subseteq T_1[T_2[W]]=(T_1\circ T_2)[W].$$

□

Para poder hablar acerca de los ideales de $\mathcal{Q}$ primero debemos mostrar algunos resultados de relaciones de Green sobre el subsemigrupo $I_{\mathbb{F}}(V,W)$.

Lema 2.1.5. *Sea $T\in\mathcal{Q}$ y $S\in I_{\mathbb{F}}(V,W)$, entonces $S=T\circ R$ para algún $R\in I_{\mathbb{F}}(V,W)$ si y solo si $\operatorname{im}S\subseteq\operatorname{im}T$.*

DEMOSTRACIÓN: $\Rightarrow$) Si $S=T\circ R$ para algún $R\in I_{\mathbb{F}}(V,W)$ entonces $\operatorname{im}S=\operatorname{im}(T\circ R)\subseteq\operatorname{im}T$.

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que $\operatorname{im}S\subseteq\operatorname{im}T$. Considere β_1 una base de $\operatorname{im}S$. Por el Teorema 1.1.24 existe $\beta^1\subset V$ tal que $S[\beta^1]=\beta_1$ y además tenemos que $V=\langle\beta^1\rangle\oplus\ker S$, así por el Teorema 1.1.16 tenemos que $\beta^1\cup\beta$ es una base para V, donde β es una base para $\ker S$.

Ahora sea β_2 una base para $\operatorname{im} T$. Por el Teorema 1.1.24 existe $\beta^2 \subset V$ tal que $T[\beta^2] = \beta_2$. Como $\operatorname{im} S \subseteq \operatorname{im} T \subseteq T[W]$ entonces existe un subconjunto $\beta_3 \subseteq \beta_2$ tal que $\langle \beta_1 \rangle = \langle \beta_3 \rangle$, así pues existe un subconjunto $\beta^3 \subseteq \beta^2 \subset W$ tal que $\langle \beta^3 \rangle \cong \langle \beta^1 \rangle$. Luego $S[\beta^1] = T[\beta^3]$ y además tenemos que $V = \langle \beta^2 \rangle \oplus \ker T = \langle \beta^3 \rangle \oplus \langle \beta^2 \setminus \beta^3 \rangle \oplus \ker T$, así por el Teorema 1.1.16 tenemos que $\beta^2 \cup \tilde{\beta} = \beta^3 \cup (\beta^2 \setminus \beta^3) \cup \tilde{\beta}$ es una base para V, donde $\tilde{\beta}$ es una base para $\ker T$. Luego podemos escribir

$$S(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in \langle \beta \rangle, \\ v \in \langle T[\beta^3] \rangle & \text{si } u \in \langle \beta^1 \rangle, \end{cases}$$

$$T(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in \langle \tilde{\beta} \rangle, \\ v \in \langle T[\beta^3] \rangle & \text{si } u \in \langle \beta^3 \rangle, \\ w \in \langle T[\beta^2 \setminus \beta^3] \rangle & \text{si } u \in \langle \beta^2 \setminus \beta^3 \rangle, \end{cases}$$

y defina $R \in L_{\mathbb{F}}(V)$ por

$$R(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in \langle \beta \rangle, \\ v \in \langle \beta^3 \rangle & \text{si } u \in \langle \beta_1 \rangle. \end{cases}$$

Así $(T \circ R)[\langle \beta^1 \rangle] = T[R[\langle \beta_1 \rangle]] = T[\langle \beta^3 \rangle] = \langle T[\beta^3] \rangle = \langle S[\beta^1] \rangle = \operatorname{im} S$ y $(T \circ R)[\langle \beta \rangle] = T[\{0\}] = 0 = S[\langle \beta \rangle]$. Por lo tanto $S = T \circ R$. □

Corolario 2.1.6. *Sean $T, S \in I_{\mathbb{F}}(V, W)$, entonces $T \mathcal{R} S$ en $I_{\mathbb{F}}(V, W)$ si y solo si $T = S$ o $\operatorname{im} T = \operatorname{im} S$ y $T, S \in \mathcal{Q}$.*

DEMOSTRACIÓN: $\Rightarrow$) Supongamos que $T \mathcal{R} S$, entonces existen $R_1, R_2 \in I_{\mathbb{F}}(V, W)^1$, tales que $T = S \circ R_1$ y $S = T \circ R_2$. Por la definición de $I_{\mathbb{F}}(V, W)^1$ se presentan dos casos.

$i)$ $R_1 = I$ o $R_2 = I$ entonces $T = S$.

$ii)$ $R_1 \neq I$ y $R_2 \neq I$, entonces $R_1, R_2 \in I_{\mathbb{F}}(V, W)$ y se tiene que

$$T = T \circ R_2 \circ R_1, \quad \text{y} \quad S = S \circ R_1 \circ R_2.$$

Donde I es el elemento identidad de $I_{\mathbb{F}}(V, W)$, así pues $\operatorname{im} T = T[\operatorname{im}(R_2 \circ R_1)] \subseteq T[W]$, de forma análoga se tiene que $\operatorname{im} S \subseteq S[W]$, luego $T, S \in \mathcal{Q}$ y por el lema anterior $\operatorname{im} S = \operatorname{im} T$.

$\Leftarrow$) La recíproca se tiene por el lema anterior. □

Lema 2.1.7. *Sean $T, S \in I_{\mathbb{F}}(V, W)$. Entonces $S = R \circ T$, para algún $R \in I_{\mathbb{F}}(V, W)$ si y solo si $\ker T \subseteq \ker S$.*

DEMOSTRACIÓN: $\Rightarrow$) Si $S = R \circ T$ para algún $R \in I_{\mathbb{F}}(V, W)$, entonces $\ker T \subseteq \ker S$.
$\Leftarrow$) Supongamos que $\ker T \subseteq \ker S$, sea β_1 una base para $\ker T$, como $\ker T \subseteq \ker S$, entonces por el Lema 1.1.23 podemos extender β_1 a una base $\beta_2 = (\beta_2 \setminus \beta_1) \cup \beta_1$ para $\ker S$ tal que $\beta_1 \subseteq \beta_2$. Ahora considere una base β_3 para V tal que $\beta_2 \subseteq \beta_3$. Luego como $\beta_3 = (\beta_3 \setminus \beta_2) \cup \beta_2$. Así por el Teorema 1.1.16 tenemos que $V = \langle \beta_3 \setminus \beta_2 \rangle \oplus \ker S$. Se define

$$T(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in \langle \beta_1 \rangle, \\ v \in \langle T[\beta_2 \setminus \beta_1] \rangle & \text{si } u \in \langle \beta_2 \setminus \beta_1 \rangle, \\ w \in \langle T[\beta_3 \setminus \beta_2] \rangle & \text{si } u \in \langle \beta_3 \setminus \beta_2 \rangle, \end{cases}$$

$$S(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in \langle \beta_1 \rangle, \\ 0 & \text{si } u \in \langle \beta_2 \setminus \beta_1 \rangle, \\ v \in \langle T[\beta_3 \setminus \beta_2] \rangle & \text{si } u \in \langle \beta_3 \setminus \beta_2 \rangle. \end{cases}$$

Sea β_4 una base para $\operatorname{im} T$, por el Lema 1.1.23 podemos extender a una base β_5 para V tal que $V = \operatorname{im} T \oplus \langle \beta_5 \setminus \beta_4 \rangle$ y definimos $R \in I_{\mathbb{F}}(V, W)$ por

$$R(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in \langle \beta_5 \rangle, \\ 0 & \text{si } u \in \langle T[\beta_2 \setminus \beta_1] \rangle, \\ v \in \langle T[\beta_3 \setminus \beta_2] \rangle & \text{si } u \in \langle T[\beta_3 \setminus \beta_2] \rangle. \end{cases}$$

Por lo tanto $S = R \circ T$. □

Corolario 2.1.8. *Sean $T, S \in I_{\mathbb{F}}(V, W)$, entonces $T \,\mathcal{L}\, S$ en $I_{\mathbb{F}}(V, W)$ si y solo si $\ker T = \ker S$.*

Lema 2.1.9. *Si $T, S \in \mathcal{Q}$, entonces $S = R_1 \circ T \circ R_2$, para algunos $R_1, R_2 \in \mathcal{Q}$ si y solo si $\dim(\operatorname{im} S) \leq \dim(\operatorname{im} T)$.*

DEMOSTRACIÓN: $\Rightarrow$) Si $S = R_1 \circ T \circ R_2$ para algunos $R_1, R_2 \in \mathcal{Q}$ entonces $\operatorname{im} S = (R_1 \circ T \circ R_2)[V] = (R_1 \circ T)R_2[W] \subseteq (R_1 \circ T)[W] = (R_1 \circ T)[V]$, así tenemos que $\dim(\operatorname{im} S) \leq \dim(\operatorname{im}(R_1 \circ T)) = \dim(\operatorname{im} T)$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $T, S \in \mathcal{Q}$ y además $\dim(\operatorname{im} S) \leq \dim(\operatorname{im} T)$. Note que $\operatorname{im} T = T[W]$ e $\operatorname{im} S = S[W]$, así considere β_1 una base para $\ker S$ por el Lema 1.1.23 podemos extender β_1 a una base β_2 para V, ahora como $\beta_2 = (\beta_2 \setminus \beta_1) \cup \beta_1$ y además $S[\langle \beta_2 \setminus \beta_1 \rangle] = \operatorname{im} S$

$$S(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in \langle \beta_1 \rangle, \\ v \in \langle S[\beta_2 \setminus \beta_1] \rangle & \text{si } u \in \langle \beta_2 \setminus \beta_1 \rangle. \end{cases}$$

Considere β_3 una base para $\ker T$, ahora por el Lema 1.1.23 podemos extender β_3 a una base β' para V, como $\beta' = (\beta' \setminus \beta_3) \cup \beta_3$ y además $T[\langle \beta' \setminus \beta_3 \rangle] = \operatorname{im} T$ luego como $\dim(\operatorname{im} S) \leq \dim(\operatorname{im} T)$, entonces existe un subconjunto $\beta_4 \subseteq (\beta' \setminus \beta_3)$ tal que $T[\langle \beta_4 \rangle] \cong S[\langle \beta_2 \setminus \beta_1 \rangle]$ y además $\operatorname{im} T = \langle T[(\beta' \setminus \beta_3) \setminus \beta_4] \rangle \oplus \langle T[\beta_4] \rangle$. Como $T[\beta_4]$ es linealmente independiente, entonces por el Lema 1.1.23 podemos extender lo a una base β'' para V. Definimos $R_1, R_2 \in I_{\mathbb{F}}(V, W)$ tales que

$$R_1(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in \langle \beta_1 \rangle, \\ v \in \langle \beta_4 \rangle & \text{si } u \in \langle \beta_2 \setminus \beta_1 \rangle, \end{cases}$$

$$R_2(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in \langle \beta'' \setminus T[\beta_4] \rangle, \\ v \in \langle S[\beta_2 \setminus \beta_1] \rangle & \text{si } u \in \langle T[\beta_4] \rangle. \end{cases}$$

Luego como $V = \langle \beta_1 \rangle \oplus \langle \beta_2 \setminus \beta_1 \rangle$, sabemos que $T \in \mathcal{Q}$ entonces $\langle \beta_2 \setminus \beta_1 \rangle \subset W$ así que $\operatorname{im} R_1 = \langle R_1[\beta_2 \setminus \beta_1] \rangle = R_1[\langle \beta_2 \setminus \beta_1 \rangle] \subseteq R_1[W]$, luego $R_1 \in \mathcal{Q}$. De igual forma tenemos que $\operatorname{im} R_2 = \langle R_2[T[\beta_4]] \rangle \subseteq R_2[W]$, luego $R_2 \in \mathcal{Q}$. ☐

Corolario 2.1.10. *Sean $T, S \in \mathcal{Q}$. $T \mathcal{J} S$ en $\mathcal{Q}$ si y solo si $\dim(\operatorname{im} T) = \dim(\operatorname{im} S)$.*

Teorema 2.1.11. *Los ideales de $\mathcal{Q}$ son precisamente los conjuntos*

$$\mathcal{Q}_r = \{T \in \mathcal{Q} \mid \dim(\operatorname{im} T) < r\},$$

donde $r \in \mathbb{N}$ es tal que $1 \leq r \leq \dim W$. Además, $\mathcal{Q}_r$ es principal si, y solo si, $r = s'$, donde $1 \leq s \leq \dim W$ y $s' = s + 1$.

DEMOSTRACIÓN: Si $T \in \mathcal{Q}_r$ y $S \in \mathcal{Q}$, entonces $\dim(\operatorname{im} S \circ T) = \dim S[\operatorname{im} T]$, como la imagen de cualquier subespacio bajo una transformación lineal no puede tener mayor dimensión que la del mismo subespacio, entonces $\dim S[\operatorname{im} T] \leq \dim(\operatorname{im} T) < r$ y además $\operatorname{im} T \circ S \subseteq \operatorname{im} T$ lo que implica $\dim(\operatorname{im}(T \circ S)) \leq \dim(\operatorname{im} T) < r$. Por lo tanto $T \circ S, S \circ T \in \mathcal{Q}_r$, es decir, Q_r es un ideal de $\mathcal{Q}$. Ahora supongamos que I es un ideal de $\mathcal{Q}$ y sea r el menor número natural tal que $\dim(\operatorname{im} T) < r$ para toda $T \in I$. Entonces $I \subseteq \mathcal{Q}_r$. Sea

$S \in \mathcal{Q}_r$ y supongamos que $\dim(\operatorname{im} S) = s < r$. Entonces existe $T \in I$ con $s \leq \dim(\operatorname{im} T)$ pues de lo contrario, $\dim(\operatorname{im} T) < s$ para toda $T \in I$ lo que contradice la elección de r. Por lo tanto $\dim(\operatorname{im} S) \leq \dim(\operatorname{im} T)$. Ahora por el Lema 2.1.9 existen $R_1, R_2 \in \mathcal{Q}$ tales que $S = R_1 \circ T \circ R_2$. Así $\mathcal{Q}_r \subseteq I$, es decir $I = \mathcal{Q}_r$.

Por otro lado si $r = s'$ para algún s tal que $1 \leq s \leq \dim W$. Sea $S \in \mathcal{Q}_r$, entonces $\dim \operatorname{im} S < r$ así pues $\dim \operatorname{im} S \leq \dim \operatorname{im} T$, luego por el Lema 2.1.9 tenemos que $S = R_1 \circ T \circ R_2$. Así $S \in \mathcal{Q}_r$ y dado que S es arbitrario, se tiene que $\mathcal{Q}_r \subseteq \mathcal{Q}^1 T \mathcal{Q}^1$ para cada $T \in \mathcal{Q}_r$ con $\dim(\operatorname{im} T) = s$ y sigue que $\mathcal{Q}_r$ es principal.

Ahora supongamos que $\mathcal{Q}_r = \mathcal{Q}^1 T \mathcal{Q}^1$ para algún $T \in \mathcal{Q}_r$. Sea $\dim(\operatorname{im} T) = s$ y supongamos que existe un número natural t tal que $s < t < r$. Como $r \leq \dim W$, entonces existe $S \in \mathcal{Q}$ con $\dim(\operatorname{im} S) = t$. Luego $S \in \mathcal{Q}_r$, así $S = R_1 \circ T \circ R_2$ para algunos $R_1, R_2 \in \mathcal{Q}^1$. Por el Lema 2.1.9 tenemos que $\dim(\operatorname{im} S) \leq \dim(\operatorname{im} T)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto t no existe y $r = s'$. $\square$

2.2. El subsemigrupo $K_{\mathbb{F}}(V, W)$

Considere V un $\mathbb{F}$-$espacio\ vectorial$ y sea W un subespacio vectorial de V, podemos construir el conjunto

$$K_{\mathbb{F}}(V, W) = \{T \in L_{\mathbb{F}}(V) \mid W \subseteq \ker T\},$$

que consiste de todas las transformaciones lineales tales que el subespacio W está contenido en el kernel de la transformación.

Teorema 2.2.1. *Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y W un subespacio de V. Para $T \in K_{\mathbb{F}}(V, W)$, T es un elemento regular si, y solo si, $\operatorname{im} T \cap W = \{0\}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $T \in K_{\mathbb{F}}(V, W)$ y supongamos que T es un elemento regular de $K_{\mathbb{F}}(V, W)$. Si $v \in \operatorname{im} T \cap W$, entonces $v \in W$ y $v = T(u)$ para algún $u \in V$ y por lo tanto $v = T(u) = (T \circ S \circ T)(u) = (T \circ S)(v) \in (T \circ S)[W], = \{0\}$. Así $\operatorname{im} T \cap W = \{0\}$.

Ahora supongamos que $\operatorname{im} T \cap W = \{0\}$. Sea β_1 una base de $\ker T$, β_2 una base de $\operatorname{im} T$ y por el Teorema 1.1.24 existe $\beta' \subset V$ tal que $T[\beta'] = \beta_2$, además $V = \langle \beta' \rangle \oplus \ker T$, así por el Teorema 1.1.16 $\beta' \cup \beta_1$ es una base para V. Sea β_3 una base de W. Luego como $\operatorname{im} T \cap W = \{0\}$, entonces $\beta_2 \cap \beta_3 = \emptyset$ y por otro lado tenemos que $\beta_2 \cup \beta_3$ es una base para de $\operatorname{im} T + W$. Por el Lema 1.1.23 existe una base β_4 para V tal que $\beta_2 \cup \beta_3 \subseteq \beta_4$. Ahora defina $S \in L_{\mathbb{F}}(V)$ por

$$S(u) = \begin{cases} v \in \langle \beta' \rangle & si \quad u \in \langle \beta_2 \rangle, \\ 0 & si \quad u \in V \setminus \langle \beta_2 \rangle. \end{cases}$$

Como $\beta_3 \subseteq \beta_4 \setminus \beta_2$ tenemos que $S[W] = S[\langle \beta_3 \rangle] = \{0\}$, así $S \in K_{\mathbb{F}}(V, W)$. Es más $(T \circ S \circ T)[\langle \beta_1 \rangle] = \{0\} = T[\langle \beta_1 \rangle]$. Por otro lado tenemos que $(T \circ S \circ T)[\langle \beta' \rangle] = (T \circ S)[\langle \beta_2 \rangle] = T[\langle \beta' \rangle]$. Por lo tanto $T = T \circ S \circ T$, luego T es un elemento regular de $K_{\mathbb{F}}(V, W)$. □

Ejemplo 2.2.2. Si V es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ es una transformación lineal tal que $\dim(\operatorname{im} T) = \dim(\operatorname{im} T^2)$ entonces $\operatorname{im} T \cap \ker T = \{0\}$, así que T es un elemento regular en $K_{\mathbb{F}}(V, \ker T)$.

En efecto. Primero note que por el teorema de la dimensión tenemos

$$\dim V = \dim(\operatorname{im} T) + \dim(\ker T),$$

$$\dim V = \dim(\operatorname{im} T^2) + \dim(\ker T^2),$$

ahora como $\dim(\operatorname{im} T) = \dim(\operatorname{im} T^2)$. Por lo tanto

$$\dim(\ker T) = \dim(\ker T^2).$$

Ahora veamos que $\ker T = \ker T^2$. Por el resultado anterior, basta con ver que $\ker T \subseteq \ker T^2$, sea $u \in \ker T$ entonces $T(u) = 0$, así tenemos $T(T(u)) = T(0) = 0$. Luego $u \in \ker T^2$. Por lo tanto $\ker T \subseteq \ker T^2$ y ya que $\dim(\ker T) = \dim(\ker T^2)$, entonces $\ker T = \ker T^2$.

Ahora veamos que $\ker T \cap \operatorname{im} T = \{0\}$. Sea $u \in \ker T \cap \operatorname{im} T$ entonces $u \in \operatorname{im}(T)$ y $u \in \ker T$. Como $u \in \operatorname{im} T$ existe $v \in V$ tal que $T(v) = u$, por lo que $T(v) \in \ker T$ entonces $T(T(v)) = 0$, luego $v \in \ker T^2$ y como $\ker T^2 = \ker T$, tenemos que $v \in \ker T$. Por lo tanto $u = T(v) = 0$. □

Corolario 2.2.3. *El semigrupo $K_{\mathbb{F}}(V, W)$ es regular si, y solo si, $W = V$ ó $W = \{0\}$.*

DEMOSTRACIÓN: Suponga que $\{0\} \subsetneq W \subsetneq V$. Sea β_1 una base de W y β una base de V conteniendo a β_1. Sea $w \in \beta_1$ y defina $T \in L_{\mathbb{F}}(V)$ así:

$$T(u) = \begin{cases} 0 & si \quad u \in W \\ v \in \langle w \rangle & si \quad u \in V \setminus W \end{cases}$$

Ahora como $T[W] = \{0\}$ tenemos que $T \in K_{\mathbb{F}}(V, W)$. Además $\operatorname{im} T \cap W = \langle w \rangle \cap W = \langle w \rangle \neq \{0\}$. Por lo tanto por el Teorema 2.2.1 concluimos que T no es un elemento regular $K_{\mathbb{F}}(V, W)$.

La reciproca es verdadera ya que $K_{\mathbb{F}}(V, V) = \{0\}$ y $K_{\mathbb{F}}(V, \{0\}) = L_{\mathbb{F}}(V)$. Note que en ambos casos los semigrupos son regulares. $\square$

3. ALGUNOS ELEMENTOS REGULARES DE $M_n(\mathbb{F})$

Uno de los semigrupos mas famosos del álgebra lineal es el semigrupo de las matrices cuadradas junto con la multiplicación usual de matrices. En el Ejemplo 1.2.24 probamos que $M_n(\mathbb{F})$ es un semigrupo regular partiendo del hecho que $L_{\mathbb{F}}(V)$ es un semigrupo regular, en el capítulo anterior hemos caracterizado los elementos de dos subsemigrupos de $L_{\mathbb{F}}(V)$ los cuales son $I_{\mathbb{F}}(V,W)$ y $K_{\mathbb{F}}(V,W)$. En este capítulo utilizaremos los resultados del capítulo anterior para así determinar los elementos de dos subsemigrupos de $M_n(\mathbb{F})$ los cuales describiremos a continuación.

3.0.1. El subsemigrupo $C_n(\mathbb{F},k)$ Se define el conjunto de todas las matrices de tamaño $n \times n$ tales que después de la k-$esima$ columna, las demás son de ceros.

$$C_n(\mathbb{F},k) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid a_{ij} = 0 \; \forall i,j \in \{1,\ldots,n\} \text{ y } j > k\}.$$

Ahora caracterizaremos a los elementos regulares de este subsemigrupo.

Lema 3.0.1. *Sea $\beta = \{e_1,\cdots,e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{F}^n$ y sea $U = \langle e_1,\cdots,e_k\rangle$ con $k \leq n$, entonces*

$$I_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n,U) = \{{}_AT \mid A \in C_n(\mathbb{F},k)\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Note que $U = \{(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0) \mid x_1,\cdots,x_k \in \mathbb{F}\}$. Para $A \in M_n(\mathbb{F})$

$$\begin{aligned}
{}_AT \in L_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n,U) &\Leftrightarrow \operatorname{im}{}_AT \subseteq U\\
&\Leftrightarrow (a_{i1},\cdots,a_{in}) \in U \text{ para todo } i \in \{1,\cdots,n\}\\
&\Leftrightarrow a_{ij} = 0 \text{ para todo } i,j \in \{1,\cdots,n\} \text{ con } j > k\\
&\Leftrightarrow A \in C_n(\mathbb{F},k).
\end{aligned}$$

Luego por el Lema 1.2.23 se cumple la igualdad. □

Teorema 3.0.2. *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo, $n,k \in \mathbb{N}$ tal que $n > k$. Para $A \in C_n(\mathbb{F},k)$, A es regular en $C_n(\mathbb{F},k)$ si, y solo si, para cualquier $x_1,x_2,...,x_k \in \mathbb{F}$,*

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ik}x_k = 0 \; \forall i \in \{1,...,k\} \Rightarrow a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ik}x_k = 0 \; \forall i \in \{k+1,...,n\}.$$

Es decir, para cualquier $(x_1, , ..., x_k) \in \mathbb{F}^k$*.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\beta = \{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{F}^n$ y considere $U = \langle e_1, \cdots, e_k \rangle$ con $k \leq n$, entonces se tiene que $C_n(\mathbb{F}, k) \cong I_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n, U)$, pues para cada matriz A en $C_n(\mathbb{F}, k)$ por el Lema 1.2.23 existe una transformación lineal $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ tal que para cada x en $\mathbb{F}^n$ $T(x) = xA$, luego por el Lema 3.0.1 tenemos que $T \in I_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n, k)$.
Sea $A \in C_n(\mathbb{F}, k)$. Como $a_{ij} = 0$ para todo $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ con $j > k$, así pues tenemos

$$\operatorname{im}{}_A T = \langle (a_{11}, \cdots, a_{1k}, 0, \cdots, 0), \cdots, (a_{n1}, \cdots, a_{nk}, 0, \cdots, 0) \rangle,$$

luego

$${}_A T[U] = \langle (a_{11}, \cdots, a_{1k}, 0, \cdots, 0), \cdots, (a_{k1}, \cdots, a_{kk}, 0, \cdots, 0) \rangle.$$

Entonces

$$\begin{aligned} A \in \operatorname{Reg}(C_n(\mathbb{F}, k)) &\Leftrightarrow {}_A T \in \operatorname{Reg}(I_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n, U)) \\ &\Leftrightarrow \operatorname{im}{}_A T = {}_A T[U] \\ &\Leftrightarrow (a_{i1}, \cdots, a_{ik}, 0, \cdots, 0) \in \operatorname{im}{}_A T \text{ para } i \in \{k+1, \cdots, n\} \\ &\Leftrightarrow (a_{i1}, \cdots, a_{ik}, 0, \cdots, 0) \in {}_A T[U] \text{ para } i \in \{k+1, \cdots, n\} \\ &\Leftrightarrow (a_{i1}, \cdots, a_{ik}) \in \langle (a_{11}, \cdots, a_{1k}), \cdots, (a_{k1}, \cdots, a_{kk}) \rangle. \end{aligned}$$

Por el Lema 1.1.47 tenemos que $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ik}x_k$ para $i \in \{k+1, \cdots, n\}$. □

Ejemplo 3.0.3. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ -8 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Veamos que A esta en $\operatorname{Reg}(C_4(\mathbb{R},2))$, en efecto, note que $a_{11}x_1+a_{12}x_2=0=a_{21}x_1+a_{22}x_2$, donde $x_1=x_2=0$ y además tenemos que $a_{31}x_1+a_{32}x_2=0=a_{41}x_1+a_{42}x_2$. Por lo tanto A es un elemento regular, y para ser mas exactos, considere la matriz B en $C_4(\mathbb{R},2)$.

$$B=\begin{bmatrix} -3/5 & -2/5 & 0 & 0 \\ -4/5 & -1/5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tal que $A=ABA$

Observación 3.0.4. Cabe aclarar que esa matriz B no es la única que hace a la matriz A regular en $C_4(\mathbb{R},2)$, por ejemplo considere

$$B'=\begin{bmatrix} -3/5 & -2/5 & 0 & 0 \\ -4/5 & -1/5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se tiene que $A=AB'A$, en general si

$$B'=\begin{bmatrix} -3/5 & -2/5 & 0 & 0 \\ -4/5 & -1/5 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

para a,b,c,d en $\mathbb{R}$ se tiene que $A=ABA$, luego existen infinitas matrices que hacen que esta matriz sea regular en $C_4(\mathbb{R},2)$.

Corolario 3.0.5. *Si $A\in C_n(\mathbb{F},k)$ es de la forma*

$$A=\begin{cases} a_{ij} & \textit{si } i,j\leq k, \\ 0 & \textit{si } i,j>k. \end{cases}$$

Entonces A es regular en $C_n(\mathbb{F},k)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea A de la forma

$$A = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i,j \leq k, \\ 0 & \text{si } i,j > k. \end{cases}$$

entonces A se ve así

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Luego para esta matriz A considere la matriz A_k dada por

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

La cual esta en $M_k(\mathbb{F})$, como este semigrupo es regular entonces existe B_k en $M_k(\mathbb{F})$ tal que $A_k = A_k B_k A_k$ con

$$B_k = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk} \end{bmatrix}$$

Tome B en $M_n(\mathbb{F})$ así

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto se tienen que $A = ABA$. Por lo tanto A es regular. $\square$

Corolario 3.0.6. *Sea $k < n$ y $A \in C_n(\mathbb{F}, k)$ de la forma*

$$A = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i > k \text{ y } j \leq k, \\ 0 & \text{si } i \leq k \text{ o } j > k. \end{cases}$$

Entonces A es regular en $C_n(\mathbb{F}, k)$ si, y solo si, A es una matriz cero.

Corolario 3.0.7. *El semigrupo $C_n(\mathbb{F}, k)$ es un semigrupo regular si, y solo si, $k = n$.*

3.0.2. El subsemigrupo $R_n(\mathbb{F}, k)$ Se define el conjunto de todas las matrices de tamaño $n \times n$ tales que después de la k-$esima$ fila, las demás son de ceros.

$$R_n(\mathbb{F}, k) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid a_{ij} = 0 \ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \text{ y } i > k\}.$$

Ahora caracterizaremos a los elementos regulares de este subsemigrupo.

Lema 3.0.8. *Sea $\beta = \{e_1, \cdots, e_n\}$ una base canónica de $\mathbb{F}^n$ y sea $U = \langle e_{k+1}, \cdots, e_n \rangle$ con $k \leq n$, entonces*

$$K_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n, U) = \{{}_AT \mid A \in R_n(\mathbb{F}, k)\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $k \in \mathbb{N}$

Caso 1) Sea $k = n$, entonces $K_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n, U) = L_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)$ y $R_n(\mathbb{F}, k) = M_n(\mathbb{F})$, así por el Lema 1.2.23 se cumple la igualdad.

Caso 2) Sea $k < n$, entonces para $A \in M_n(\mathbb{F})$

$$\begin{aligned} {}_AT \in K_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n, U) &\Leftrightarrow U \subseteq \ker {}_AT \\ &\Leftrightarrow {}_AT[U] = \{(0, \cdots, 0)\} \\ &\Leftrightarrow {}_AT(e_i) = (0, \cdots, 0) \text{ para } i \in \{k+1, \cdots, n\} \\ &\Leftrightarrow (a_{i1}, \cdots, a_{ik}) = (0, \cdots, 0) \text{ para } i \in \{k+1, \cdots, n\} \\ &\Leftrightarrow A \in R_n(\mathbb{F}, k). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.0.9. *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo, $n, k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq n$. Para $A \in R_n(\mathbb{F}, k)$, A es regular en $R_n(\mathbb{F}, k)$ si, y solo si, cualquier $x_1, x_2, ..., x_k \in \mathbb{F}$,*

$$a_{1j}x_1 + \cdots + a_{kj}x_k = 0 \ \forall j \in \{1, ..., k\} \Rightarrow a_{1j}x_1 + \cdots + a_{kj}x_k = 0 \ \forall j \in \{k+1, ..., n\}.$$

Es decir, para cualquier $(x_1, , ..., x_k) \in \mathbb{F}^k$*.*

$$\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN: Si $k = n$ entonces $R_n(\mathbb{F}, k) = M_n(\mathbb{F})$ y por lo tanto es regular.
Ahora supongamos que $k < n$ y sea $U = \langle e_{k+1}, \cdots, e_n\rangle$, luego por el Lema 1.2.23 y el Lema 3.0.8 tenemos que $R_n(\mathbb{F}, k) \cong K_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n, U)$. Sea $A \in \operatorname{Reg}(R_n(\mathbb{F}, k))$ entonces $a_{ij} = 0$ para todo $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ con $i > k$. Además

$$\begin{aligned} A \in \operatorname{Reg}(R_n(\mathbb{F}, k)) &\Leftrightarrow {}_AT \in \operatorname{Reg}(K_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n, U)) \\ &\Leftrightarrow \operatorname{im}{}_AT \cap U = \{(0, \cdots, 0)\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, supongamos que $\operatorname{im}{}_AT \cap U = \{(0, \cdots, 0)\}$ y sean $x_1, \cdots, x_k \in \mathbb{F}$ tal que $a_{1j}x_1 + \cdots + a_{kj}x_k = 0$ para todo $j \in \{1, \cdots, k\}$. Entonces

$$\begin{aligned} {}_AT(x_1, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0) &= (x_1, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0)A \\ &= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{k1}x_k, \cdots, a_{1n}x_1 + \cdots + a_{kn}x_k). \end{aligned}$$

Por lo que $(a_{11}x_1 + \cdots + a_{k1}x_k, \cdots, a_{1n}x_1 + \cdots + a_{kn}x_k) = (0, \cdots, 0, a_{1,k+1}x_1 + \cdots + a_{k,k+1}x_k, \cdots, a_{1n}x_1 + \cdots + a_{kn}x_k) \in \operatorname{im}{}_AT \cap U = \{(0, \cdots, 0)\}$. Lo que implica que $a_{1j}x_1 + \cdots + a_{kj}x_k = 0$ para todo $j \in \{k + 1, \cdots, n\}$.
Ahora supongamos que $a_{1j}x_1 + \cdots + a_{kj}x_k = 0$ para todo $j \in \{1, ..., k\}$ implica que $a_{1j}x_1 + \cdots + a_{kj}x_k = 0$ para todo $j \in \{k + 1, ..., n\}$. Sea $(y_1, \cdots, y_n) \in \operatorname{im}{}_AT \cap U$. Entonces $y_j = 0$ para todo $j \in \{1, \cdots, k\}$ luego $(y_1, \cdots, y_n) = {}_AT(x_1, \cdots, x_n)$ para algún $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n$. De la misma forma $y_j = a_{1j}x_1 + \cdots + a_{kj}x_k$ para todo $j \in \{1, \cdots, n\}$. Ahora como $(y_1, \cdots, y_n) \in U$ tenemos que $a_{1j}x_1 + \cdots + a_{kj}x_k = 0$ para todo $j \in \{1, ..., k\}$ lo implica que $a_{1j}x_1 + \cdots + a_{kj}x_k = 0$ para todo $j \in \{k + 1, ..., n\}$. Por lo tanto $(y_1, \cdots, y_n) = (0, \cdots, 0)$ y dada la arbitrariedad de $(y_1, \cdots, y_n)$ se concluye que $\operatorname{im}{}_AT \cap U = \{(0, \cdots, 0)\}$. $\square$

Ejemplo 3.0.10. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Veamos que A no esta en $\operatorname{Reg}(R_4(\mathbb{R}, 2))$, en efecto, note que $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$, donde $x_1 = -2$ y $x_2 = 1$ luego para $a_{13}x_1 + a_{14}x_2 = -8$ y $a_{23}x_1 + a_{24}x_2 = -10$. Por lo tanto A no es un elemento regular por el teorema anterior.

Corolario 3.0.11. *Si $A \in R_n(\mathbb{F}, k)$ es de la forma*

$$A = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i, j \leq k, \\ 0 & \text{si } i, j > k. \end{cases}$$

Entonces A es regular en $R_n(\mathbb{F}, k)$.

DEMOSTRACIÓN: La demostración es análoga a la del Corolario 3.0.5. □

Corolario 3.0.12. *Sea $k < n$ y $A \in R_n(\mathbb{F}, k)$ de la forma*

$$A = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \leq k \text{ y } j > k, \\ 0 & \text{si } i > k \text{ o } j \leq k. \end{cases}$$

Entonces A es regular en $R_n(\mathbb{F}, k)$ si, y solo si, A es una matriz cero.

Corolario 3.0.13. *El semigrupo $R_n(\mathbb{F}, k)$ es un semigrupo regular si, y solo si, $k = n$.*

4. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos mostrado que para un espacio vectorial finito dimensional V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. El semigrupo $L_{\mathbb{F}}(V)$ es regular y dados los subsemigrupos $I_{\mathbb{F}}(V,W)$ y $K_{\mathbb{F}}(V,W)$, mostramos que estos no eran necesariamente regulares. Sin embargo se establecieron algunos resultados que permiten caracterizar dichos elementos regulares de tal forma que permiten saber, bajo que condiciones estos subsemigrupos pueden llegar a ser regulares. Además se tomó el subsemigrupo $I_{\mathbb{F}}(V,W)$ y se caracterizaron lo ideales del subsemigrupo $\operatorname{Reg} I_{\mathbb{F}}(V,W)$ con el fin de poder establecer la cara de los ideales de $I_{\mathbb{F}}(V,W)$.

Por otro lado, usamos el hecho de que $L_{\mathbb{F}}(V)$ es isomorfo a $M_n(\mathbb{F})$ para poder caracterizar los elementos regulares de los subsemigrupos $C_n(\mathbb{F},k)$ y $R_n(\mathbb{F},k)$, del semigrupo $M_n(\mathbb{F})$.

Por último, quedan aún preguntas por responder, las cuales esperamos un futuro lector las pueda abordar

- ¿Qué pasaría si en lugar de considerar un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V, se usa un R-módulo M?.
- ¿Qué resultados cambian si consideramos un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V infinito dimensional?.
- ¿Se pueden estudiar los elementos en $L_{\mathbb{F}}(V)$ que se comportan como elementos de un semigrupo inverso?.

Bibliografía

GREEN, James. “On the structure of semigroups”. En: *Annals of Mathematics* (1951), págs. 163-172 (vid. pág. 9).

HIGGINS, Peter. *Techniques of semigroup theory*. Clarendon Press, 1992 (vid. pág. 36).

HOWIE, John. *Fundamentals of semigroup theory*. oxford university Press, 1995 (vid. págs. 36, 39).

NENTHEIN Sansanee, et al. “Regular elements of some transformation semigroups”. En: *Pure Mathematics and Applications* 16.3 (2005), págs. 307-314 (vid. pág. 43).

NENTHEIN, Sansanee y Yupaporn KEMPRASIT. “Regular elements of some semigroups of linear transformations and matrices”. En: *Int. Math. Forum*. Citeseer. 2007 (vid. págs. 6-10, 43).

SULLIVAN, Robert. “Semigroups of linear transformations with restricted range”. En: *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 77.3 (2008), págs. 441-453 (vid. págs. 6-10, 43).

VON NEUMANN, John. “On regular rings”. En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 22.12 (1936), págs. 707-713 (vid. págs. 6, 8, 9).