

**Estudio numérico de corrientes laminares magnetohidrodinámicas relativistas en un fluido
polarizado magnéticamente**

Jose Miguel Amado Dugarte

Trabajo de Grado para optar al título de Físico

Director

Fabio Duván Lora Clavijo

Doctor en Física

Codirector

Oscar Mauricio Pimentel Díaz

Doctor en Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2021

Tabla de Contenido

Introducción	9
1. GRRMHD con polarización magnética	17
1.1. Descomposición 3+1 de la Relatividad General	18
1.2. Ecuaciones de la GRRMHD en forma conservativa	29
1.2.1. Ley de conservación de la masa	30
1.2.2. Ley de conservación del tensor energía-momentum	32
1.2.2.1. Ley de conservación de la energía	34
1.2.2.2. Ley de conservación del momentum	36
1.2.3. Ecuaciones de Maxwell de la Electrodinámica en medios materiales	39
1.2.3.1. Ecuaciones de Maxwell en medios materiales en forma conservativa	54
1.3. Tensor energía-momentum para un fluido conductor no ideal polarizado	59
1.3.1. Tensor energía-momentum del fluido perfecto	60
1.3.2. Tensor energía-momentum del campo electromagnético	63
1.3.3. Tensor energía-momentum asociado a la polarización	66
1.4. Ley de Ohm covariante	69
1.5. Ecuaciones de la RRMHD con polarización magnética en forma conservativa	72
2. Métodos Numéricos	77

2.1. Código <i>CAFE</i>	77
2.2. Limpieza de la Divergencia	84
2.3. Recuperación de las variables primitivas	89
2.4. Pruebas numéricas	93
2.4.1. Tubo de choque resistivo sin polarización magnética	94
2.4.2. Tubo de choque resistivo con polarización magnética	96
3. Corrientes Laminas y Reconexión Magnética	103
3.1. ¿Qué es una Corriente Laminar?	103
3.2. Configuración inicial para la Corriente Laminar	108
3.3. Resultados Numéricos	110
4. Conclusiones	121
Referencias Bibliográficas	125
Apéndices	134

Lista de Figuras

Figura 1.	Foliación del espacio-tiempo.	18
Figura 2.	Geometría entre dos hipersuperficies adyacentes.	20
Figura 3.	Observadores Euleriano y comovil.	25
Figura 4.	Componentes del tensor energía-momentum.	33
Figura 5.	Volumen de control en el método de volúmenes finitos.	80
Figura 6.	Componente B_y del campo magnético para diferentes conductividades eléctricas.	95
Figura 7.	Componente B_y del campo magnético para diferentes resoluciones espaciales.	96
Figura 8.	Tubo de choque de $\sigma = 0$ para diferentes susceptibilidades magnéticas.	98
Figura 9.	Tubo de choque de $\sigma = 10$ para diferentes susceptibilidades magnéticas.	99
Figura 10.	Tubo de choque de $\sigma = 10^2$ para diferentes susceptibilidades magnéticas.	100
Figura 11.	Tubo de choque de $\sigma = 10^3$ para diferentes susceptibilidades magnéticas.	101
Figura 12.	Representación 2D para una corriente laminar.	104
Figura 13.	Formación de una corriente laminar.	105
Figura 14.	Reconexión de las líneas de campo magnético.	106
Figura 15.	Tearing instability.	107
Figura 16.	Corriente laminar numérica.	110

- Figura 17. Componente j_f^z de la densidad de corriente libre para tres tiempos y valores de susceptibilidad magnética diferentes. 111
- Figura 18. Componente u^x de la cuadrivelocidad del fluido para tres tiempos y valores de susceptibilidad magnética diferentes 115
- Figura 19. Componente u^x de la cuadrivelocidad del fluido a lo largo de la corriente laminar para tres tiempos y valores de susceptibilidad magnética diferentes. 116
- Figura 20. Evolución temporal de la energía magnética, energía cinética y energía interna específica para para tres valores de susceptibilidad magnética. 119

Lista de Apéndices

	pág.
Apéndice A. Término fuente de la ley de conservación de la energía.	134
Apéndice B. Término fuente de la ley de conservación del momentum.	138
Apéndice C. Tensor de Faraday y su tensor dual.	142
Apéndice D. Derivación del tensor energía-momentum del campo electromagnético.	146
Apéndice E. Derivación del tensor energía-momentum asociado a la polarización.	148
Apéndice F. Norma al cuadrado de la velocidad v^2 .	151
Apéndice G. Derivada del factor de Lorentz $W'(Z)$.	152

Resumen

Título: Estudio numérico de corrientes laminares magnetohidrodinámicas relativistas en un fluido polarizado magnéticamente. *

Autor: Jose Miguel Amado Dugarte. **

Palabras Clave: Reconexión magnética, corrientes laminares, magnetohidrodinámica resistiva, polarización magnética, descomposición $3 + 1$ de la Relatividad General.

Descripción: La reconexión magnética es un mecanismo natural de conversión de energía que toma lugar en fluidos conductores tales como plasmas. Este proceso transforma la energía magnética del sistema en energía cinética o en energía térmica. Por lo tanto, este mecanismo ha sido propuesto para explicar las elevadas temperaturas y grandes cantidades de energía emitidas en varios sistemas de interés astrofísico. Diferentes modelos teóricos apuntan a que las corrientes laminares pueden desencadenar el fenómeno de reconexión, lo cual hace que su estudio sea de vital importancia para la astrofísica de altas energías. Adicionalmente, simulaciones numéricas han mostrado que la polarización magnética del plasma puede ser relevante en sistemas con presencia de campos magnéticos intensos. Debido a lo anterior, en el presente trabajo se empleó el formalismo de la Magnetohidrodinámica Resistiva en Relatividad General (GRRMHD) para obtener una primera aproximación a los efectos introducidos por la polarización magnética en el proceso de Reconexión. Para llevar a cabo este propósito, esta tesis muestra por primera vez el sistema de ecuaciones correspondiente a la GRRMHD con polarización electromagnética, el cual fue escrito en forma conservativa empleando la formulación de Valencia. Este sistema de ecuaciones fue implementado en el código CAFE considerando un espaciotiempo de Minkowski y polarización eléctrica nula. Esto convierte a CAFE en el primer código que resuelve las ecuaciones de la RRMHD con polarización magnética para materiales lineales e isótropos. Finalmente, se presentan las simulaciones de Reconexión Magnética considerando como dato inicial una corriente laminar de Harris. Se muestra que la energía magnética disipada será mayor para el caso diamagnético y menor en el paramagnético respecto al fluido no polarizado. Sin embargo, las energías cinética e interna específica presentan valores mayores en el caso diamagnético y valores menores en el caso paramagnético comparado con fluido no polarizado.

* Trabajo de grado para optar por el título de Físico.

** Facultad de Ciencias, Escuela de Física. Director: Fabio Duván Lora Clavijo, Doctor en Física. Codirector: Oscar Mauricio Pimentel Díaz, Doctor en Física.

Abstract

Title: Numerical study of relativistic magnetohydrodynamic current sheets in a magnetic polarized fluid. *

Author: Jose Miguel Amado Dugarte. **

Keywords: Magnetic reconnection, current sheets, resistive magnetohydrodynamics, magnetic polarization, $3 + 1$ decomposition of General Relativity.

Description: Magnetic reconnection is a natural mechanism of energy conversion that takes place in conductive fluids such as plasma. This process transforms the magnetic energy of the system either into kinetic energy or into thermal energy. Therefore, this mechanism has been proposed as an explanation of the high temperatures and great amounts of energy emitted in several systems of astrophysics interest. Different theoretical models indicate that Current Sheets may trigger the Reconnection phenomenon, making its study of vital importance in high energy astrophysics. In addition to this, numerical simulations have shown that magnetic polarization of plasma may be relevant in systems with intense magnetic fields. Due to the above, the formalism of General Relativistic Resistive Magnetohydrodynamics (GRRMHD) was employed in order to obtain a first approximation to the effects introduced by magnetic polarization in the Reconnection process. In order to accomplish this purpose, this thesis shows for the first time the equation system corresponding to the GRRMHD with electromagnetic polarization, which was written in conservative form following the Valencia formulation. This equation system was implemented in the CAFE code considering a Minkowski space-time and zero electric polarization. This makes CAFE the first code that solves the RRMHD equations with magnetic polarization for linear and isotropic materials. Finally, the magnetic reconnection simulations are presented taking as the initial data a Harris current sheet. Here it is shown that dissipated magnetic energy will be bigger for the diamagnetic and smaller for the paramagnetic case with respect to the non polarized fluid. However, kinetic energy and internal specific energy show bigger values in the diamagnetic case and smaller values in the paramagnetic case in comparison with the non polarized fluid.

* Bachelor Thesis.

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Fabio Duván Lora Clavijo, Doctor en Física. Codirector: Oscar Mauricio Pimentel Díaz, Doctor en Física.

Introducción

El estado de agregación de la materia formado por un gas cuyas partículas están ionizadas, se denomina *plasma*. El plasma consiste en un conjunto de partículas cargadas (iones cargados positivamente y electrones) que colectivamente responden a fuerzas electromagnéticas y globalmente presentan neutralidad de carga, donde las partículas que lo conforman pueden moverse libremente generando corrientes eléctricas y densidades de carga que modifican el campo electromagnético presente en el sistema. Este estado de la materia se presenta de forma natural por todo el universo, algunos ejemplos de plasmas son la Heliosfera, la Magnetosfera de los planetas y las estrellas de neutrones, el medio interestelar e intergaláctico, los Jets en los núcleos activos de galáxias, etc. Hoy en día se sabe que aproximadamente el 95 % de la materia presente en el universo se encuentra en estado de plasma (Chiuderi and Velli, 2015), por esta razón, entender la dinámica de este es de vital importancia para la Física, ya que nos permite comprender la evolución de diversos sistemas de interés astrofísico.

Existen diversos modelos teóricos que permiten estudiar la dinámica del plasma. Uno de los modelos matemáticos más simples y de gran interés es la *Magnetohidrodinámica* (MHD), la cual consiste en tratar al plasma como un fluido continuo capaz de conducir una corriente eléctrica teniendo en cuenta su interacción con los campos magnéticos presentes en el sistema. Bajo este modelo el fluido conductor puede ser totalmente descrito mediante pocos parámetros como la densidad de masa, la presión y la velocidad del fluido, las cuales no dependen del tamaño físico de

la muestra (Schnack, 2009). En varios escenarios de interés astrofísico, el plasma puede alcanzar velocidades comparables con la velocidad de la luz en el vacío y estar sometido a campos gravitacionales extremos. Por ejemplo, en explosiones de supernovas, discos de acreción en estrellas de neutrones y agujeros negros, explosiones de rayos gamma, jets relativistas provenientes de los núcleos activos de galáxias o pulsares, etc (Anile, 2005). Debido a lo anterior, estos sistemas formalmente se modelan mediante las ecuaciones de la MHD acopladas con las ecuaciones de campo de Einstein. Este conjunto de ecuaciones conforma la Magnetohidrodinámica en Relatividad General (GRMHD por sus siglas en inglés).

En algunos de los sistemas anteriormente mencionados, la dinámica del plasma se estudia bajo la aproximación del *fluido de prueba*, la cual consiste en despreciar el campo gravitacional generado por el fluido debido a que es prácticamente nulo en comparación con el campo gravitacional de fondo (Font, 2008). Además de lo anterior, la mayoría de plasmas presentes en el universo pueden describirse adecuadamente mediante la MHD ideal. Esta aproximación consiste en asumir que la conductividad eléctrica del fluido es infinita $\sigma \rightarrow \infty$ (conductor perfecto) ocasionando que los efectos debidos a la disipación Ohmica sean totalmente despreciables (Priest and Forbes, 2000). Sin embargo, existen regiones de intensas concentraciones de corriente como las *corrientes laminares*, en donde la energía magnética puede ser disipada y esta aproximación deja de ser válida (Priest, 1985).

La formación de corrientes laminares es un proceso de vital importancia para la astrofísica

debido a que estas dan origen al fenómeno de *reconexión magnética*. En dicho proceso la topología del campo magnético presente en el sistema cambia, liberando así grandes cantidades de energía (Palenzuela et al., 2009). La reconexión magnética es un mecanismo natural de conversión de energía, aquí la energía magnética del sistema se transforma en energía cinética, mediante la aceleración de las partículas en el plasma, o en calor, mediante disipación Ohmica. Es posible mostrar que el cambio en la topología del campo magnético da lugar a configuraciones de menor energía magnética (Yamada et al., 2010). La evidencia de la Reconexión Magnética es fuerte en maquinas de fusión nuclear como Tokamaks, aunque no se entiende completamente la manera en la que ocurre en estos dispositivos. También se cree que las Auroras Boreales son el resultado directo o indirecto de la reconexión en la Magnetosfera terrestre. Por otra parte, las eyecciones de flujo magnético durante las eyecciones de masa coronal necesariamente requieren que la reconexión ocurra. Además este proceso se ha propuesto como el mecanismo de calentamiento de la corona solar (Priest and Forbes, 2000). Mas allá del sistema solar, se cree que la Reconexión Magnética toma lugar en objetos como pulsares, discos de acreción, núcleos activos de galáxias, radio jets, explosiones de rayos Gamma, entre otros (Lyubarsky, 2005). En estos sistemas la MHD juega un papel central, esto se debe a que los modelos que se tienen para explicar las fuentes de energía en astrofísica están basados en la dinámica de fluidos relativistas como gases o plasmas. Por esta razón, el estudio de la MHD resistiva en Relatividad General (GRRMHD) es indispensable para poder dar una explicación a las grandes cantidades de energía emitidas en el universo.

Las ecuaciones de la GRMHD forman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no

lineales y acopladas, por esta razón es imposible obtener una solución analítica no estacionaria para un determinado problema a menos que se consideren sistemas con un alto grado de simetría (Alcubierre, 2008). Es aquí donde surge la necesidad de realizar códigos que resuelvan dichas ecuaciones numéricamente y permitan obtener una solución aproximada. Algunos de los códigos desarrollados con este propósito y escritos bajo la aproximación de conductor perfecto (MHD ideal) son *COSMOS++* (Anninos et al., 2005), *WhiskyMHD* (Giacomazzo and Rezzolla, 2007), *BHAC* (Porth et al., 2017) cuya finalidad es estudiar el mecanismo de acreción al rededor de agujeros negros, *ECHO* (Del Zanna et al., 2007) y *CAFE* (Lora-Clavijo et al., 2015; Cruz-Osorio, 2014), el cual resuelve numéricamente las ecuaciones de la GRMHD ideal con el fin de estudiar escenarios astrofísicos relacionados con la generación y liberación de grandes cantidades de energía. Además de lo anterior, también se han desarrollado códigos que resuelven el sistema de la GRRMHD como las versiones resistivas de *WhiskyMHD* (Dionysopoulou et al., 2013) y *BHAC* (Ripperda et al., 2019), entre otros.

En la mayoría de códigos numéricos desarrollados para solucionar las ecuaciones de la GRMHD sólo se tiene en cuenta el campo magnético generado por el movimiento de las partículas que conforman el plasma, esta descripción es incompleta ya que no se tiene en cuenta la respuesta del fluido al campo magnético al que está sometido, la cual consiste en la generación de un campo magnético propio por parte del material. Cuando esto sucede se dice que el material está *polarizado magnéticamente* (Pimentel et al., 2018a). Esta nueva fuente de campo magnético, la cual es generada por la polarización del fluido, puede ser relevante para dar una posible explicación al origen de

los intensos campos magnéticos presentes en algunos escenarios astrofísicos (Pimentel et al., 018b). Un mecanismo donde se amplifica el campo magnético y la polarización magnética podría tomar un papel fundamental es en la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, la cual ocurre cuando hay una velocidad relativa entre dos fluidos adyacentes. Aquí la energía cinética del sistema se convierte en energía magnética y amplifica el campo inicial, esta inestabilidad puede producirse de forma natural en los Jets relativistas provenientes de los núcleos activos de galáxias, en la región donde interactúan los flujos provenientes de las explosiones de rayos gamma con el medio interestelar, entre otros (Pimentel and Lora-Clavijo, 2019).

La polarización magnética, desde un punto de vista clásico, se debe a que los materiales microscópicamente presentan pequeñas corrientes debido al movimiento orbital de los electrones en el átomo. Por tal razón, estos se pueden ver macroscópicamente como pequeñas espiras de corriente y ser tratados como dipolos magnéticos. Cuando los dipolos del material se alinean en la misma dirección del campo externo producto de torques magnéticos da lugar al *paramagnetismo*, y cuando el campo externo induce un momento magnético en los electrones presentes en el material se da el *diamagnetismo*. El campo magnético inducido en el material amplifica el campo externo en el caso paramagnético y lo reduce en el caso diamagnético (Griffiths, 2005). Debido a lo anterior, se debe agregar a las ecuaciones de la GRMHD un término que proporcione información de la respuesta del plasma al campo magnético externo para realizar una descripción más completa del fenómeno físico. Como consecuencia de esto, Pimentel et al. (018a) introdujeron los términos correspondientes a la polarización magnética del material (considerando un material lineal e isó-

tropo) al código *CAFE*.

Los efectos introducidos por la polarización magnética ya han sido estudiados en trabajos previos. En Blandford and Hernquist (1982) se calcula la susceptibilidad magnética de la corteza de una estrella de neutrones para diferentes valores de densidad, temperatura e intensidad del campo magnético. Aquí se muestra que la polarización magnética no afecta la estructura de la corteza del objeto compacto, aunque esta puede estar relacionada de manera indirecta con efectos observacionales. En el artículo de Chatterjee et al. (2015), se estudió la estructura de una estrella de neutrones en presencia de un campo magnético fuerte. En este modelo se tuvo en cuenta la polarización magnética considerando un fluido ideal y el efecto del campo magnético en la ecuación de estado, aquí se concluyó que la inclusión de la polarización no afecta significativamente la masa máxima del objeto compacto. En Pimentel et al. (2018b) se presentó por primera vez una familia de soluciones analíticas para Toros magnetizados alrededor de un agujero negro de Kerr, donde se encontró que si un Toro es paramagnético será más denso que uno diamagnético para el caso en que se considera una susceptibilidad magnética constante. Adicionalmente, en Pimentel and Lora-Clavijo (2019) se pudo evidenciar que el carácter magnético del plasma influye en la amplificación de la energía magnética en la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, en este trabajo se pudo determinar que si un fluido presenta un carácter paramagnético amplificará más la energía que un fluido diamagnético. Debido a lo anterior, se ha podido determinar que el carácter magnético del fluido afecta significativamente la evolución del campo magnético presente en algunos sistemas astrofísicos, los cuales están relacionados con la generación de grandes cantidades de energía.

Debido a los argumentos expuestos anteriormente, la finalidad de este trabajo es estudiar el fenómeno de Reconexión Magnética producto de una corriente laminar en un fluido polarizado magnéticamente. Esto hace que sea necesario modificar el sistema de ecuaciones implementado en el código *CAFE* con el fin de introducir los términos resistivos. Por tal razón, este trabajo está organizado de la siguiente manera: en el capítulo 1 se presenta la derivación matemática de las ecuaciones de la GRRMHD con polarización magnética y polarización eléctrica, donde se empleó el formalismo $3 + 1$ de la Relatividad General y se siguió la formulación de Valencia (Antón Ruiz et al., 2006). En el capítulo 2 se realiza una breve descripción de los principales elementos que conforman el código *CAFE* y se explican explícitamente los métodos numéricos que tuvieron que ser modificados con el fin de agregar resistividad al código. Posteriormente, se presentan las pruebas de Tubos de Choque que permiten validar el código *CAFE* resistivo en el límite ideal y se muestra una primera aproximación de estas pruebas numéricas para un fluido no ideal cuya polarización magnética es diferente de cero. En el capítulo 3 se realiza una breve descripción de qué es una Corriente laminar y del fenómeno de Reconexión Magnética, aquí se muestran los resultados de las pruebas numéricas para una corriente laminar perturbada considerando un fluido diamagnético, paramagnético y uno sin polarización magnética. Por último, se presentan las principales conclusiones obtenidas en el desarrollo de este trabajo.

A lo largo del desarrollo de esta tesis se empleará el convenio de suma de Einstein en el cual los índices repetidos indican suma, aquí los índices griegos ($\mu, \nu, \alpha, \beta \dots$) correrán de 0 a 3 y los

índices latinos ($i, j, k, l, m \dots$) correrán de 1 a 3. Además de lo anterior, se empleará la signatura mayormente positiva para el tensor métrico $(-, +, +, +)$ y se usarán unidades de Heaviside-Lorentz en las cuales la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética en el vacío son iguales a uno, $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$, esto implica inmediateamente que la velocidad de la luz en el vacío será igual a la unidad $c = 1$.

1. GRRMHD con polarización magnética

La Magnetohidrodinámica (MHD) es una rama de la Física de los medios continuos que describe la interacción entre fluidos eléctricamente conductores con campos electromagnéticos, donde el fluido globalmente presenta neutralidad de carga $\rho_q = 0$ (Schnack, 2009). Las ecuaciones de la GRRMHD con polarización magnética están conformadas por la ley de conservación de la densidad de masa, la ley de conservación del tensor energía-momentum, las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica y la generalización relativista de la ley de Ohm. El tensor energía-momentum empleado consistirá en una superposición de los tensores energía-momentum de un fluido perfecto, del campo electromagnético y el correspondiente a la polarización del material.

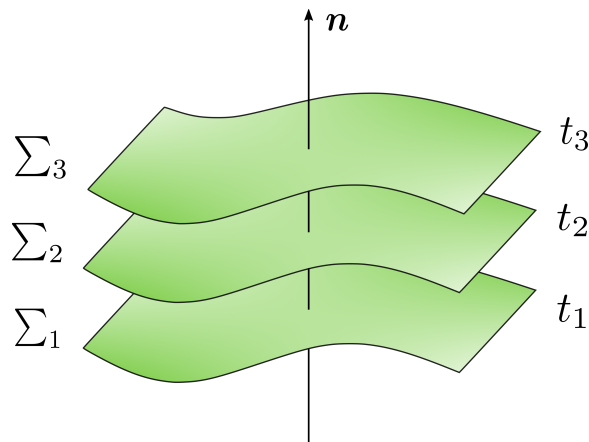
En este capítulo se presenta la derivación de las ecuaciones de la GRRMHD con polarización magnética en su forma conservativa, empleando la formulación $3 + 1$ de la Relatividad General y siguiendo la formulación de Valencia (Antón Ruiz et al., 2006). Adicionalmente, se considera una relación constitutiva lineal entre el campo magnético y el cuadvivector de polarización magnética del material, esto con el fin de poder describir materiales diamagnéticos y paramagnéticos. Vale la pena mencionar que aunque en este trabajo se empleará la métrica de Minkowski que corresponde a el espacio-tiempo plano, todas las ecuaciones se derivan para un espacio-tiempo arbitrario.

1.1. Descomposición 3+1 de la Relatividad General

El formalismo 3 + 1 de la Relatividad General consiste en separar el espacio y el tiempo de manera independiente. Esto se realiza con el fin de escribir las ecuaciones de evolución como un problema de valores iniciales, el cual se denomina *problema de Cauchy*. Para esto se considera inicialmente un espacio-tiempo con tensor métrico g , el cual está descompuesto en hipersuperficies espaciales Σ_t (las cuales no se intersectan unas con otras) parametrizadas por un tiempo constante t . Cada una de estas hipersuperficies es perpendicular a un vector unitario tipo tiempo n , de manera que los campos vectoriales tangentes a la hipersuperficie son tipo espacio. Este proceso se denomina *foliación del espacio-tiempo* (Shibata, 2015) y puede apreciarse gráficamente en la figura (1).

Figura 1.

Foliación del espacio-tiempo.



Nota. Foliación del espacio-tiempo mediante hipersuperficies espaciales Σ_t parametrizadas por un tiempo t .

La geometría del espacio-tiempo contenida entre dos hipersuperficies adyacentes puede ser

descrita mediante tres elementos (ver figura (2)):

1. La función Lapso $\alpha(t, x^i)$, la cual relaciona el intervalo de tiempo propio $d\tau$ medido por el *observador Euleriano* entre dos hipersuperficies adyacentes con el intervalo de tiempo coordinado dt :

$$d\tau = \alpha(t, x^i) dt. \quad (1)$$

Se denomina observador Euleriano a un observador cuya línea de mundo siempre es normal a cada una de las hipersuperficies.

2. El vector de corrimiento β^i , el cual corresponde a la velocidad relativa entre la línea de mundo del observador Euleriano y una línea de coordenadas espaciales constantes (línea coordinada) $x^i = cte$:

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - \beta^i dt. \quad (2)$$

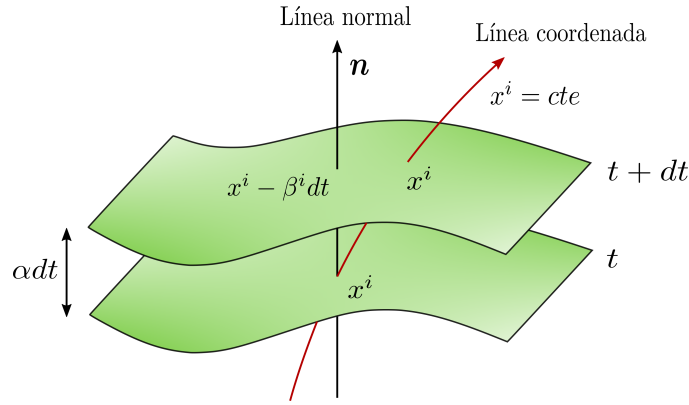
3. La métrica inducida o métrica espacial γ , la cual permite medir distancias propias dl sobre cada hipersuperficie:

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (3)$$

Las funciones α y β^i se denominan *funciones de norma* y junto a la métrica inducida γ_{ij} llevan toda la información acerca del sistema de coordenadas seleccionado.

Figura 2.

Geometría entre dos hipersuperficies adyacentes.



Nota. Elementos que definen la geometría contenida entre dos hipersuperficies adyacentes.

En términos de las componentes de la métrica espacial γ_{ij} y las funciones de norma, el intervalo espaciotemporal está dado por

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (4)$$

en donde se puede mostrar que el tensor métrico en términos de sus componentes covariantes y contravariantes está dado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_i \beta^i & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^2} & \frac{\beta^i}{\alpha^2} \\ \frac{\beta^j}{\alpha^2} & \gamma^{ij} - \frac{\beta^i \beta^j}{\alpha^2} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Aquí se ha asumido que los índices de los vectores totalmente espaciales se pueden subir y bajar únicamente con la métrica espacial, es decir que $\beta_i = \gamma_{ij}\beta^j$ y $\beta^i = \gamma^{ij}\beta_j$. De las expresiones (5) también es posible mostrar que

$$\sqrt{-g} = \alpha\sqrt{\gamma}, \quad (6)$$

en donde g es el determinante del tensor métrico y γ el determinante de la métrica inducida (Alcubierre, 2008).

Con el fin de poder escribir las ecuaciones de evolución (ecuaciones de la GRRMHD con polarización magnética) como un sistema conservativo, el formalismo $3+1$ de la Relatividad General le asocia una base de cuadvectores al observador Euleriano. Dicha base está dada por

$$\mathbf{e}_\mu = (\mathbf{n}, \mathbf{e}_i), \quad (7)$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario tipo tiempo normal a cada una de las hipersuperficies y $\mathbf{e}_i$ son un conjunto de vectores tipo espacio tangentes a cada una de las hipersuperficies, por lo cual se cumple que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i = 0$. El vector $\mathbf{n}$ coincide con la cuadvirvelocidad del observador Euleriano ya que su producto interno está dado por

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = n^\mu n_\mu = -1, \quad (8)$$

por lo tanto, se pueden encontrar de manera explícita las componentes del vector $\mathbf{n}$ acudiendo a la

definición de la cuadrivelocidad y a la expresión (1), de lo cual se obtiene

$$n^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{1}{\alpha} \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (9)$$

Teniendo en cuenta que el cuadvivector posición se define como $x^\mu = (t, x^i)$, al hacer $\mu = 0$ en la expresión anterior se tiene que la componente temporal está dada por $n^0 = 1/\alpha$. Por otra parte, al hacer $\mu = i$ y empleando la ecuación (2), se obtiene que las componentes espaciales cumplen $n^i = -\beta^i/\alpha$ (donde $\beta^i = -dx^i/dt$). De esta forma, el cuadvivector $\mathbf{n}$ expresado en términos de sus componentes contravariantes está dado por

$$n^\mu = \frac{1}{\alpha} (1, -\beta^i). \quad (10)$$

Empleando la métrica dada en la expresión (5) se pueden hallar las componentes covariantes de la cuadrivelocidad Euleriana mediante la relación $n_\mu = g_{\mu\nu}n^\nu$, lo cual da como resultado

$$n_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0). \quad (11)$$

Por otra parte, el producto interno de los vectores espaciales $\mathbf{e}_i$ define la métrica espacial, por lo cual se cumple

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \gamma_{ij} = g_{\mu\nu} (\mathbf{e}_i)^\mu (\mathbf{e}_j)^\nu, \quad (12)$$

de lo cual se puede mostrar que las componentes covariantes de los cuadvivectores $\mathbf{e}_i$ están dadas

explícitamente por (Antón Ruiz et al., 2006)

$$e_{(i)v} = (\beta_i, \gamma_j) = g_{iv}. \quad (13)$$

El formalismo $3+1$ nos proporciona una manera de descomponer cualquier cuadvectores en una parte tipo tiempo paralela al vector $\mathbf{n}$ y otra parte tipo espacio tangente a la hipersuperficie Σ_t . Esto se lleva a cabo mediante la aplicación del *operador de proyección espacial* a un cuadvectores arbitrario. Este operador en términos de sus componentes mixtas se define de la siguiente manera

$$h^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + n^\mu n_\nu, \quad (14)$$

en donde $\delta^\mu{}_\nu$ son las componentes mixtas del delta de Kronecker². Al aplicar el operador de proyección espacial a un cuadvectores arbitrario A^μ se obtiene que dicho cuadvectores puede ser reescrito como

$$A^\mu = h^\mu{}_\nu A^\nu - n^\mu n_\nu A^\nu. \quad (15)$$

Definiendo una nueva cantidad tensorial $N^\mu{}_\nu = -n^\mu n_\nu$, la cual se denomina *operador de proyec-*

² El delta de Kronecker se define como

$$\delta^{\mu\nu} = \begin{cases} +1 & \text{si } \mu = \nu, \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

ción temporal. La expresión anterior se transforma en

$$A^\mu = h^\mu{}_\nu A^\nu + N^\mu{}_\nu A^\nu, \quad (16)$$

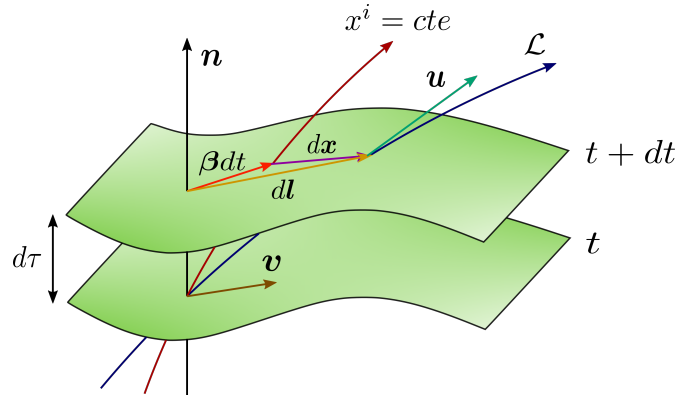
en donde el primer término representa la parte espacial del cuadvivector A^μ y el segundo término representa la proyección del cuadvivector a lo largo de la dirección temporal. Cuando se aplica el operador de proyector espacial al tensor métrico se obtiene la métrica inducida, es decir que $\gamma^{\mu\nu} = h^\mu{}_\alpha g^{\alpha\nu}$, por lo cual, la métrica inducida en términos de sus componentes contravariantes satisface

$$\gamma^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu, \quad (17)$$

donde se satisface que $\gamma^{0\mu} = \gamma^{\mu 0} = 0$ debido a que es un tensor netamente espacial (Rezzolla and Zanotti, 2013).

Para el caso particular en el que se desea estudiar fluidos en el marco de la Relatividad General se consideran dos observadores: el primero es el observador Euleriano y el segundo es un observador comovil con el fluido en consideración. La línea de mundo del fluido $\mathcal{L}$ atraviesa cada una de las hipersuperficies y no necesariamente coincide con la línea coordenada de $x^i = cte$, por lo cual entre estas existe un desplazamiento espacial $d\mathbf{x}$. Esto se puede apreciar gráficamente en la figura (3).

Figura 3.
Observadores Euleriano y comovil.



Nota. Representación gráfica de la línea de mundo del fluido, la línea normal y la línea coordenada $x^i = cte$ para dos hipersuperficies adyacentes.

Además de lo anterior, el observador del fluido se mueve con cuadrivelocidad $\mathbf{u}$, la cual es un vector unitario tipo tiempo cuyo producto interno cumple

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u^\mu u_\mu = -1, \quad (18)$$

y su velocidad espacial respecto del observador Euleriano se define por

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{l}}{d\tau}, \quad (19)$$

en donde $d\mathbf{l}$ es el desplazamiento espacial entre la línea de mundo del observador Euleriano y la línea de mundo del fluido. El *factor de Lorentz* W se puede encontrar de forma explícita con ayuda

de la relación vectorial

$$d\tau_0 \mathbf{u} = d\tau \mathbf{n} + d\mathbf{l}, \quad (20)$$

la cual puede ser apreciada fácilmente en la figura (3), donde $d\tau_0$ es el tiempo medido por el observador comovil al fluido. Multiplicando escalarmente la ecuación anterior por el cuadvivector $\mathbf{n}$ se tiene que esta puede ser reescrita como

$$\frac{d\tau}{d\tau_0} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \quad (21)$$

en donde se ha tenido en cuenta que $n^\mu n_\mu = -1$ y que $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Ahora, los tiempos medidos por el observador Euleriano y el observador del fluido se relacionan mediante $d\tau = W d\tau_0$. Con esto se tiene que el factor de Lorentz en términos de las cuadvivelocidades $\mathbf{n}$ y $\mathbf{u}$ está dado por

$$W = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -u^\mu n_\mu. \quad (22)$$

Ahora, teniendo en cuenta el cuadvivector n_μ dado en la ecuación (11), el factor de Lorentz se transforma en

$$W = \alpha u^0. \quad (23)$$

El factor de Lorentz también puede ser escrito en su forma estándar. Para esto se divide la ecuación (20) por $d\tau$, lo cual da como resultado que la cuadvivelocity del fluido $\mathbf{u}$, en términos

de la cuadvirvelocidad del observador Euleriano $\mathbf{n}$ y la velocidad espacial $\mathbf{v}$ cumple

$$\mathbf{u} = W (\mathbf{n} + \mathbf{v}). \quad (24)$$

Reemplazando la expresión anterior en la ecuación (18) y teniendo en cuenta que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, el factor de Lorentz satisface la relación

$$W = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}}, \quad (25)$$

en donde el producto interno de la velocidad $\mathbf{v}$ se realiza con la métrica inducida debido a que es un vector netamente espacial, es decir, que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \gamma^{ij} v_i v_j$.

Introduciendo una nueva velocidad espacial denominada *velocidad coordenada del fluido*, se pueden encontrar de manera explícita las componentes espaciales de la cuadvirvelocidad del fluido $\mathbf{u}$. Esta velocidad coordenada se define por

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad (26)$$

la cual no es más que la velocidad a la que se mueve la línea de mundo del fluido respecto de la línea coordenada $x^i = cte$. Teniendo en cuenta la figura (3) se puede apreciar que se cumple la relación vectorial

$$d\mathbf{l} = \boldsymbol{\beta} dt + d\mathbf{x}, \quad (27)$$

dividiendo la expresión anterior por $d\tau$ y teniendo en cuenta la ecuación (1) esta se puede reescribir como

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\alpha} (\boldsymbol{\beta} + \mathbf{V}). \quad (28)$$

La velocidad coordenada del fluido en términos de las componentes de la cuadrivelocidad $\mathbf{u}$ puede escribirse por definición como $V^i = u^i/u^0$, por lo cual se tiene que la expresión anterior se transforma en

$$v^i = \frac{1}{\alpha} \left(\beta^i + \frac{u^i}{u^0} \right). \quad (29)$$

Reemplazando la ecuación (23) en la expresión anterior se tiene que las componentes espaciales de la cuadrivelocidad del fluido cumplen (Gourgoulhon, 2012)

$$u^i = W \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right). \quad (30)$$

Finalmente, teniendo en cuenta las expresiones (23) y (30) se puede apreciar que la cuadrivelocidad del fluido en términos de sus componentes contravariantes está dada explícitamente por

$$u^\mu = \left[\frac{W}{\alpha}, W \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) \right]. \quad (31)$$

Mediante la expresión $u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu$ se puede encontrar que la cuadrivelocidad del fluido en términos de sus componentes covariantes toma la forma

$$u_\mu = [W (\beta_i v^i - \alpha), W v_i]. \quad (32)$$

Debido a que el sistema de ecuaciones de la GRRMHD está escrito de manera covariante, es necesario que su parte espacial y temporal sean separadas de manera independiente. Esto se realiza con el fin de evolucionar el sistema de ecuaciones a partir de un determinado dato inicial. Para llevar a cabo este objetivo, en la siguiente sección se empleará la descomposición $3 + 1$ de la Relatividad General para escribir el sistema de ecuaciones en forma conservativa.

1.2. Ecuaciones de la GRRMHD en forma conservativa

El sistema de ecuaciones de la GRRMHD está constituido principalmente por dos grupos de ecuaciones, las ecuaciones de conservación que rigen la hidrodinámica del plasma y las ecuaciones que gobiernan la dinámica de los campos electromagnéticos presentes en el sistema. El primer grupo de ecuaciones está conformado por la ley de conservación de la masa

$$\nabla_{\mu} (\rho u^{\mu}) = 0, \quad (33)$$

en donde ρ es la densidad de masa del fluido dada en el marco comovil y ∇_{μ} es la derivada covariante asociada al tensor métrico g . La ley de conservación del tensor energía-momentum

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (34)$$

la cual no es más que la ley de conservación de la energía cuando $\nu = 0$ y la ley de conservación del momentum cuando $\nu = i$. El segundo grupo de ecuaciones está conformado por las ecuaciones

de Maxwell no homogéneas

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu, \quad (35)$$

las cuales corresponden a la ley de Gauss del campo eléctrico cuando $\nu = 0$ y la ley de Ampere-Maxwell cuando $\nu = i$, siendo $F^{\mu\nu}$ el tensor de Faraday y J^ν el cuadvivector densidad de corriente eléctrica. Y por último, las ecuaciones de Maxwell homogéneas

$$\nabla_\nu (*F^{\mu\nu}) = 0, \quad (36)$$

las cuales corresponden a la ley de Gauss del campo magnético cuando $\nu = 0$ y la ley de inducción de Faraday cuando $\nu = i$, siendo $*F^{\mu\nu}$ el tensor dual de Faraday (Ripperda et al., 2019).

Para poder evolucionar el sistema de ecuaciones de la GRRMHD es necesario que las ecuaciones covariantes (33)-(36) sean escritas de manera conservativa mediante el formalismo $3 + 1$ de la Relatividad General. Esto permitirá evidenciar la evolución en cada instante de tiempo y así tener un mejor entendimiento del sistema en cuestión a partir de un determinado dato inicial, este procedimiento es conocido como la *formulación de Valencia* (Antón Ruiz et al., 2006). La derivación matemática de cada una de las ecuaciones se muestra a continuación.

1.2.1. Ley de conservación de la masa. La primera de las ecuaciones de la GRRMHD, dada por la ley de conservación de la masa, puede ser reescrita en forma conservativa haciendo uso

de la expresión para la divergencia de un cuadvivector

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} A^\mu), \quad (37)$$

en donde A^μ es un cuadvivector arbitrario y ∂_μ son las derivadas parciales a lo largo de cada una de las coordenadas empleadas (Poisson, 2004). Por tal razón, al hacer uso de dicha propiedad la ecuación (33) puede ser reescrita como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \rho u^\mu) = 0. \quad (38)$$

Expandiendo la expresión anterior en términos de su parte temporal y su parte espacial se obtiene

$$\partial_0 (\alpha \sqrt{\gamma} \rho u^0) + \partial_i (\alpha \sqrt{\gamma} \rho u^i) = 0, \quad (39)$$

en donde se ha tenido en cuenta la ecuación (6). Reemplazando de manera explícita las componentes de la cuadvivelocity del fluido mostradas en la expresión (31), se tiene que la ley de conservación de la masa en forma conservativa está dada por

$$\partial_0 (\sqrt{\gamma} D) + \partial_i [\sqrt{\gamma} D (\alpha v^i - \beta^i)] = 0, \quad (40)$$

donde se ha introducido una nueva variable conservativa $D = W\rho$, la cual corresponde a la densidad de masa medida por el observador Euleriano.

1.2.2. Ley de conservación del tensor energía-momentum. Para describir apropiadamente la energía y el momentum de un determinado sistema físico, se hace uso del *tensor energía-momentum* $\mathbf{T}$. Este es un tensor simétrico de segundo orden, construido en términos de la densidad de energía, densidad de momentum y sus respectivos flujos medidos por un observador en un determinado evento del espaciotiempo. Cada una de estas cantidades puede estar asociada con todas las formas de materia y todos los campos no gravitacionales del sistema (Misner et al., 1973).

Las componentes del tensor energía-momentum $T^{\mu\nu}$ tienen un determinado significado físico, esto puede apreciarse con ayuda del cuadrimomentum $p^\mu = (E, p^i)$. El tensor energía-momentum se define como el flujo del μ -momentum a través de una superficie con x^ν constante. Es decir, que sus componentes cumplen que (Schutz, 2009):

$$T^{00} = \text{Flujo de energía a través de una superficie } t = cte.$$

$$T^{0i} = \text{Flujo de energía a través de una superficie } x^i = cte.$$

$$T^{i0} = \text{Flujo del } i\text{-momentum a través de una superficie } t = cte.$$

$$T^{ij} = \text{Flujo del } i\text{-momentum a través de una superficie } x^j = cte.$$

El significado físico de las componentes del tensor energía-momentum puede ser apreciado en la figura (4).

El tensor energía-momentum puede reescribirse bajo la descomposición $3 + 1$ de la Relati-

Figura 4.

Componentes del tensor energía-momentum.

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \boxed{T^{00}} & \boxed{T^{01}} & \boxed{T^{02}} & \boxed{T^{03}} \\ \boxed{T^{10}} & \boxed{T^{11}} & \boxed{T^{12}} & \boxed{T^{13}} \\ \boxed{T^{20}} & \boxed{T^{21}} & \boxed{T^{22}} & \boxed{T^{23}} \\ \boxed{T^{30}} & \boxed{T^{31}} & \boxed{T^{32}} & \boxed{T^{33}} \end{pmatrix}$$

Densidad de energía Flujo de energía
Densidad de momentum Flujo de momentum Presión isotrópica

Nota. Significado físico de cada una de las componentes del tensor energía-momentum. Imagen adaptada de Rezzolla and Zanotti (2013).

vidad General de tal manera que la energía, momentum y sus respectivos flujos sean medidos por el observador Euleriano. Para esto se hace uso del delta de Kronecker en términos de la métrica espacial y la cuadvirvelocidad Euleriana (ecuación (17)), por lo cual se cumple

$$T^{\mu\nu} = \delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta T^{\alpha\beta} = (\gamma^\mu_\alpha - n^\mu n_\alpha) (\gamma^\nu_\beta - n^\nu n_\beta) T^{\alpha\beta}$$

$$T^{\mu\nu} = T^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta n^\mu n^\nu - \gamma^\mu_\alpha T^{\alpha\beta} n_\beta n^\nu - n^\mu n_\alpha T^{\alpha\beta} \gamma^\nu_\beta + \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta T^{\alpha\beta}. \quad (41)$$

Definiendo las cantidades $U = T^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta$, $S^\mu = -\gamma^\mu_\alpha n_\beta T^{\alpha\beta}$ y $W^{\mu\nu} = \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta T^{\alpha\beta}$ se tiene que el tensor energía momentum puede ser reescrito como

$$T^{\mu\nu} = U n^\mu n^\nu + S^\mu n^\nu + n^\mu S^\nu + W^{\mu\nu}, \quad (42)$$

en donde U , S^μ y $W^{\mu\nu}$ son respectivamente la densidad de energía, densidad de momentum y tensor de esfuerzos medidos por el observador Euleriano. De la expresión anterior se puede apreciar que $S^0 = W^{0\mu} = W^{\mu 0} = 0$ debido a la definición de la métrica inducida mostrada en la ecuación (17).

Las expresiones de la energía y momentum en forma conservativa pueden ser obtenidas al proyectar la conservación de $T^{\mu\nu}$ (ecuación (34)) en la base del observador Euleriano. Esta proyección puede escribirse como

$$\nabla_\mu [T^{\mu\nu} e_{(\sigma)\nu}] = T^{\mu\nu} \nabla_\mu [e_{(\sigma)\nu}], \quad (43)$$

en donde $e_{(\sigma)\nu}$ están dados por (7).

1.2.2.1. Ley de conservación de la energía. La ley de conservación de la energía se obtiene al hacer $\sigma = 0$ en la expresión (43), con la identidad (37) la ecuación anterior se convierte en

$$\partial_\mu [\sqrt{-g} T^{\mu\nu} e_{(0)\nu}] = \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \nabla_\mu e_{(0)\nu}. \quad (44)$$

Al reemplazar (6) en la ecuación anterior y debido a que $e_{(0)\nu} = n_\nu$, la expresión anterior puede ser reescrita como

$$\partial_0 (\alpha \sqrt{\gamma} T^{0\nu} n_\nu) + \partial_i (\alpha \sqrt{\gamma} T^{i\nu} n_\nu) = \mathcal{S}, \quad (45)$$

en donde $\mathcal{S}$ representa el término fuente de la ecuación, el cual explícitamente está dado por $\mathcal{S} = \sqrt{-g}T^{\mu\nu}\nabla_\mu n_\nu$. Al sumar a la expresión anterior la ley de conservación de la masa (40) se obtiene

$$\partial_0 [\sqrt{\gamma}(\alpha T^{0\nu}n_\nu + D)] + \partial_i \{ \sqrt{\gamma} [\alpha T^{i\nu}n_\nu + D(\alpha v^i - \beta^i)] \} = \mathcal{S}, \quad (46)$$

en donde el primer factor del primer término corresponde a $-U$, esto se debe a que $\alpha T^{0\nu}n_\nu = -n_0 T^{0\nu}n_\nu = -T^{\mu\nu}n_\mu n_\nu = -U$. Por lo tanto, al definir una nueva variable $\tau = U - D$ la expresión anterior da como resultado

$$\partial_0(\sqrt{\gamma}\tau) + \partial_i \left\{ \sqrt{\gamma} \left[-\tau\beta^i - \alpha Dv^i + \alpha \left(\frac{\beta^i}{\alpha} U - T^{i\nu}n_\nu \right) \right] \right\} = -\mathcal{S}. \quad (47)$$

El tercer factor del segundo término corresponde a las componentes espaciales de la densidad de momentum del observador Euleriano S^i (ecuación (42)), por lo cual se cumple

$$\begin{aligned} S^i &= -\gamma^i_\alpha T^{\alpha\beta}n_\beta = -(\delta^i_\alpha + n^i n_\alpha) T^{\alpha\beta}n_\beta, \\ S^i &= -T^{i\beta}n_\beta - n^i U = \frac{\beta^i}{\alpha} U - T^{i\beta}n_\beta, \end{aligned} \quad (48)$$

de esta forma la ecuación (47) se transforma en

$$\partial_0(\sqrt{\gamma}\tau) + \partial_i \{ \sqrt{\gamma} [\alpha (S^i - Dv^i) - \tau\beta^i] \} = -\mathcal{S}. \quad (49)$$

Por último, el término fuente $\mathcal{S}$ para el caso en el que se emplea una métrica espacial estacionaria $\partial_0 \gamma^{ik} = 0$ está dado por (ver el apéndice (1) para su derivación)

$$\mathcal{S} = \sqrt{\gamma} \left(S^i \partial_i \alpha - W^i_l \partial_i \beta^l - \frac{1}{2} W^{ik} \beta^l \partial_l \gamma_{ik} \right). \quad (50)$$

Reemplazando esta expresión en (49), la ley de conservación de la energía en forma conservativa es

$$\partial_0(\sqrt{\gamma}\tau) + \partial_i \{ \sqrt{\gamma} [\alpha (S^i - Dv^i) - \tau \beta^i] \} = \sqrt{\gamma} \left(\frac{1}{2} W^{ik} \beta^l \partial_l \gamma_{ik} + W^i_l \partial_i \beta^l - S^i \partial_i \alpha \right). \quad (51)$$

Cabe resaltar que la conservación de la energía se ha escrito en términos de la variable τ de tal forma que en el límite Newtoniano se recupere la densidad de energía (Palenzuela, 2013).

1.2.2.2. Ley de conservación del momentum. La ley de conservación del momentum se obtiene al hacer $\sigma = k$ en la expresión (43), mediante la identidad (37) se obtiene

$$\partial_\mu [\sqrt{-g} T^{\mu\nu} e_{(k)\nu}] = \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \nabla_\mu e_{(k)\nu}. \quad (52)$$

Expandiendo la expresión anterior en términos de su parte temporal y espacial, esta se transforma en

$$\partial_0 \left[\alpha \sqrt{\gamma} (T^{00} e_{(k)0} + T^{0l} e_{(k)l}) \right] + \partial_i \left[\alpha \sqrt{\gamma} (T^{i0} e_{(k)0} + T^{il} e_{(k)l}) \right] = \mathcal{S}_k, \quad (53)$$

en donde $\mathcal{S}_k$ es el término fuente de la ecuación, el cual explícitamente está dado por $\mathcal{S}_k = \sqrt{-g}T^{\mu\nu}\nabla_\mu e_{(k)\nu}$. Al reemplazar cada una de las componentes de los vectores de la base Euleriana dadas en la ecuación (13), se tiene que la expresión anterior se puede reescribir como

$$\partial_0 \left[\sqrt{\gamma} \left(\alpha T^{00} \beta_k + \alpha T^{0l} \gamma_{kl} \right) \right] + \partial_i \left[\sqrt{\gamma} \left(\alpha T^{i0} \beta_k + \alpha T^{il} \gamma_{kl} \right) \right] = \mathcal{S}_k. \quad (54)$$

El factor en el interior de la derivada temporal corresponde a las componentes covariantes de la densidad de momentum medida por el observador Euleriano S_k , esto da como resultado

$$\begin{aligned} S_k &= g_{k\nu} S^\nu = -g_{k\nu} \gamma^\nu_\alpha T^{\alpha\beta} n_\beta \\ S_k &= -g_{k\alpha} T^{\alpha\beta} n_\beta - n_k T^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta. \end{aligned} \quad (55)$$

Aquí se puede apreciar que el segundo término se hace cero, esto se debe a que las componentes covariantes espaciales de la cuatriveLOCIDAD del observador Euleriano n_k son nulas (ver la ecuación (11)). Al expandir la expresión anterior en términos de su parte temporal y espacial, el momentum S_k se reescribe como

$$S_k = -g_{k0} T^{00} n_0 - g_{kl} T^{l0} n_0. \quad (56)$$

Ahora, reemplazando las componentes g_{k0} , g_{kl} del tensor métrico y la componente temporal n_0 de la cuadvirvelocidad Euleriana se tiene

$$S_k = \alpha T^{00} \beta_k + \alpha T^{0l} \gamma_{lk}. \quad (57)$$

Por otra parte, el factor en el interior de la derivada espacial puede obtenerse mediante la definición del tensor de esfuerzos mixto W^α_β , el cual está dado por

$$W^\alpha_\beta = W^{\alpha\sigma} g_{\sigma\beta} = \gamma^\alpha_\mu \gamma^\sigma_\nu T^{\mu\nu} g_{\sigma\beta}. \quad (58)$$

Al hacer en la expresión anterior $\alpha = i$, $\beta = k$ y reemplazando la ecuación (17), puede mostrarse que la matriz de esfuerzos satisface

$$W^i_k = T^{i0} g_{k0} + T^{il} g_{kl} + n^i g_{k0} T^{00} n_0 + n^i g_{kl} T^{l0} n_0, \quad (59)$$

multiplicando la expresión anterior por la función Lapso α y reemplazando las componentes g_{k0} , g_{kl} de la métrica covariante y las componentes n^i , n_0 de la cuadvirvelocidad Euleriana, la expresión anterior se convierte en

$$\alpha W^i_k - \beta^i (\alpha T^{00} \beta_k + \alpha \gamma_{kl} T^{l0}) = \alpha T^{i0} \beta_k + \alpha T^{il} \gamma_{kl}, \quad (60)$$

en donde se puede apreciar que el segundo término del lado derecho corresponde a la densidad de momentum S_k dada en la expresión (57), por tal razón se obtiene

$$\alpha W^i_k - \beta^i S_k = \alpha T^{i0} \beta_k + \alpha T^{il} \gamma_{kl}. \quad (61)$$

Reemplazando las ecuaciones (57) y (61) en la expresión (54), esta puede ser reescrita como

$$\partial_0 (\sqrt{\gamma} S_k) + \partial_i [\sqrt{\gamma} (\alpha W^i_k - \beta^i S_k)] = \mathcal{S}_k, \quad (62)$$

en donde el término fuente $\mathcal{S}_k$ está dado por (ver el apéndice (2) para su derivación)

$$\mathcal{S}_k = \sqrt{\gamma} \left(\frac{\alpha}{2} W^{il} \partial_k \gamma_{il} + S_l \partial_k \beta^l - U \partial_k \alpha \right). \quad (63)$$

Por tal razón, la ley de conservación del momentum en forma conservativa es

$$\partial_0 (\sqrt{\gamma} S_k) + \partial_i [\sqrt{\gamma} (\alpha W^i_k - \beta^i S_k)] = \sqrt{\gamma} \left(\frac{\alpha}{2} W^{il} \partial_k \gamma_{il} + S_l \partial_k \beta^l - U \partial_k \alpha \right). \quad (64)$$

Las expresiones (51) y (64) representan las ecuaciones de conservación para la densidad de energía y momentum asociadas a un tensor energía-momentum arbitrario, por esta razón dichas ecuaciones son válidas para describir la dinámica de cualquier fluido que se desee estudiar.

1.2.3. Ecuaciones de Maxwell de la Electrodinámica en medios materiales.

Las ecuaciones de Maxwell son un conjunto de cuatro ecuaciones que describen la dinámica del campo

eléctrico $\mathbf{E}$ y el campo magnético $\mathbf{B}$. Estas ecuaciones en el vacío satisfacen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_q, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (65)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (66)$$

las cuales corresponden respectivamente a la ley de Gauss del campo eléctrico, la ley de Ampere-Maxwell, la ley de Gauss del campo magnético y la ley de inducción de Faraday. En estas expresiones ρ_q es la densidad volumétrica de carga eléctrica y $\mathbf{J}$ la densidad de corriente eléctrica.

Este conjunto de ecuaciones tiene la misma forma para cualquier observador y además es invariante bajo transformaciones de Lorentz pero su forma no permite apreciarlo, por lo tanto es necesario que estas sean reescritas de forma covariante (Carroll, 2019). Para esto es necesario introducir un tensor que lleve toda la información de los campos eléctricos y magnéticos presentes en el sistema, este se denomina *tensor de Faraday* y en términos de sus componentes contravariantes se define como

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (67)$$

en donde A^μ es el cuadripotencial dado por $A^\mu = (\phi, A^i)$, cuya componente temporal ϕ corresponde al potencial eléctrico y sus componentes espaciales A^i corresponden a las componentes del potencial vectorial magnético. Teniendo en cuenta la definición (67), las componentes covariantes

y contravariantes del tensor de Faraday satisfacen

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (68)$$

en donde E_i y B_i son las componentes de los campos eléctricos y magnéticos dados en una base de coordenadas cartesiana. A partir del tensor de Faraday se puede encontrar su tensor dual mediante la aplicación del operador estrella de Hodge. Este tensor está dado por

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (69)$$

en donde $\eta^{\mu\nu\alpha\beta}$ es el tensor de Levi-Civita para cuatro dimensiones². De esta forma las compo-

² El tensor de Levi-Civita se define como

$$\eta^{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \text{si } (\mu\nu\alpha\beta) \text{ es una permutación par de } (0123), \\ -1 & \text{si } (\mu\nu\alpha\beta) \text{ es una permutación impar de } (0123), \\ 0 & \text{si dos o más índices se repiten.} \end{cases}$$

nentes covariantes y contravariantes del tensor dual de Faraday son iguales a

$${}^*F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^*F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (70)$$

El tensor de Faraday y su tensor dual pueden ser escritos en términos de la cuadrivelocidad y los campos electromagnéticos presentes en el sistema. Para poder mostrar esto se considera un sistema arbitrario $\mathcal{O}$ que se encuentra en reposo, la cuadrivelocidad y los campos electromagnéticos en este sistema están dados por

$$\mathcal{U}^\mu = (1, 0^i), \quad \mathcal{E}^\mu = (0, E^i), \quad \mathcal{B}^\mu = (0, B^i), \quad (71)$$

por lo cual en el marco de referencia $\mathcal{O}$, el tensor de Faraday y su dual en términos de los cuadvectores $\mathcal{E}^\mu$, $\mathcal{B}^\mu$ y $\mathcal{U}^\mu$ pueden ser reescritos como (ver el apéndice (3) para su derivación)

$$F^{\mu\nu} = \mathcal{U}^\mu \mathcal{E}^\nu - \mathcal{E}^\mu \mathcal{U}^\nu + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{B}_\alpha \mathcal{U}_\beta, \quad (72)$$

$${}^*F^{\mu\nu} = \mathcal{U}^\mu \mathcal{B}^\nu - \mathcal{B}^\mu \mathcal{U}^\nu - \eta^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{E}_\alpha \mathcal{U}_\beta, \quad (73)$$

en donde las componentes de cada uno de estos dos tensores coinciden con las dadas en las ecua-

ciones (68) y (70). Debido a que en este sistema de referencia las componentes temporales de los campos $\mathcal{E}^\mu$, $\mathcal{B}^\mu$ y las componentes espaciales de la cuadrivelocidad $\mathcal{U}^\mu$ son nulas, se puede apreciar que se cumplen las relaciones

$$\mathcal{E} \cdot \mathcal{U} = \mathcal{E}^\mu \mathcal{U}_\mu = 0, \quad \mathcal{B} \cdot \mathcal{U} = \mathcal{B}^\mu \mathcal{U}_\mu = 0. \quad (74)$$

Además es fácil ver que los campos $\mathcal{E}^\mu$ y $\mathcal{B}^\mu$ en términos de la cuadrivelocidad, el tensor de Faraday y su dual pueden ser escritos como

$$\mathcal{E}^\mu = F^{\mu\nu} \mathcal{U}_\nu, \quad \mathcal{B}^\mu = {}^*F^{\mu\nu} \mathcal{U}_\nu, \quad (75)$$

cada una de las expresiones anteriores, a pesar que se obtuvieron considerando un sistema de referencia particular, son válidas para cualquier sistema de referencia. Esto se debe a que son ecuaciones tensoriales y se cumple el principio de covarianza de la Relatividad General (Antón Ruiz, 2008).

Haciendo uso del tensor de Faraday se tiene que las ecuaciones (65) pueden ser reescritas como

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu, \quad (76)$$

en donde J^ν es el cuadvivector densidad de corriente dado por $J^\nu = (\rho_q, J^i)$; esta expresión representa las ecuaciones no homogéneas de Maxwell donde se obtiene la ley de Gauss del campo

eléctrico al hacer $v = 0$ y la ley de de Ampere-Maxwell al hacer $v = i$. De manera análoga, mediante el uso del tensor dual de Faraday se tiene que las ecuaciones (66) pueden ser reescritas como

$$\partial_\nu (*F^{\mu\nu}) = 0, \quad (77)$$

las cuales corresponden a las ecuaciones homogéneas de Maxwell donde se obtiene la ley de Gauss del campo magnético al hacer $v = 0$ y la ley de inducción de Faraday al hacer $v = i$ (Ryder, 2009). Las ecuaciones (76) y (77) pueden escribirse en Relatividad General debido a que son ecuaciones tensoriales que cumplen el principio de covarianza y son válidas para cualquier sistema de referencia. Por lo tanto se puede considerar que están dadas en un sistema localmente inercial (coordenadas normales) donde los símbolos de Christoffel son nulos; esto no es más que el principio de equivalencia de Einstein. Por esta razón, las derivadas parciales pueden sustituirse por derivadas covariantes y el tensor de Levi-Civita por su densidad tensorial, de tal forma que

$$\nabla_\nu \left(\mathcal{U}^\mu \mathcal{E}^\nu - \mathcal{E}^\mu \mathcal{U}^\nu + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{B}_\alpha \mathcal{U}_\beta \right) = J^\mu, \quad (78)$$

$$\nabla_\nu \left(\mathcal{U}^\mu \mathcal{B}^\nu - \mathcal{B}^\mu \mathcal{U}^\nu - \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{E}_\alpha \mathcal{U}_\beta \right) = 0, \quad (79)$$

en donde $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ es la densidad tensorial de Levi-Civita, la cual en términos de sus componentes

covariantes y contravariantes se define como

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \eta^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -\sqrt{-g} \eta_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (80)$$

siendo g el determinante del tensor métrico (Rezzolla and Zanotti, 2013). Para el caso particular en el que se desean escribir las ecuaciones de Maxwell en medios materiales, la densidad de corriente eléctrica J^μ se separa como

$$J^\mu = J_f^\mu + \nabla_\nu \mathcal{M}^{\mu\nu}, \quad (81)$$

en donde J_f^μ es la densidad de corriente eléctrica debida al movimiento libre de los electrones en el plasma y el segundo término corresponde a las corrientes de polarización eléctrica y magnética inducidas en el interior de los iones del plasma. Las corrientes de polarización se escriben en términos del *tensor de polarización* $\mathcal{M}^{\mu\nu}$, el cual está dado explícitamente por

$$\mathcal{M}^{\mu\nu} = p^\mu u^\nu - p^\nu u^\mu + \varepsilon^{\mu\nu\sigma\beta} m_\sigma u_\beta, \quad (82)$$

siendo p^μ y m^μ respectivamente los cuadvectores de polarización eléctrica y de polarización magnética en el marco comovil al fluido (Maugin, 1978).

En el formalismo $3+1$ de la Relatividad General las expresiones derivadas anteriormente para los campos electromagnéticos, el tensor de Faraday y su dual también serán válidas para el observador Euleriano y para el observador comovil con el fluido. Por tal razón, los campos

electromagnéticos medidos por el observador Euleriano están dados por

$$E^\mu = F^{\mu\nu} n_\nu, \quad B^\mu = {}^*F^{\mu\nu} n_\nu, \quad (83)$$

y los campos electromagnéticos medidos por el observador comovil por

$$e^\mu = F^{\mu\nu} u_\nu, \quad b^\mu = {}^*F^{\mu\nu} u_\nu, \quad (84)$$

en donde las cuadrivelocidades n_ν y u_ν son las mostradas en las expresiones (11) y (32). De las expresiones anteriores se puede apreciar que los campos electromagnéticos medidos por el observador Euleriano son netamente espaciales debido a que $E^0 = B^0 = 0$, por esta razón los vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ serán tangentes a cada una de las hipersuperficies Σ_t . Por otra parte, los campos electromagnéticos medidos por el observador del fluido serán campos cuyas cuatro componentes son diferentes de cero, por esta razón los vectores $\mathbf{e}$ y $\mathbf{b}$ serán vectores espaciotemporales.

Las componentes de los campos electromagnéticos medidos por el observador comovil al fluido se pueden calcular de manera explícita en términos de los campos electromagnéticos medidos por el observador Euleriano. En otras palabras, existe una transformación de Lorentz para los campos eléctrico y magnético entre estos dos observadores. Para el cálculo de las componentes del campo eléctrico $\mathbf{e}$ se hace uso de la ecuación (84), donde se escribe únicamente el tensor de

Faraday en términos de las cantidades medidas por el observador Euleriano, es decir que

$$e^\mu = F^{\mu\nu} u_\nu = \left[n^\mu E^\nu - E^\mu n^\nu + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} B_\alpha n_\beta \right] u_\nu. \quad (85)$$

La componente temporal de (85) se obtiene al hacer $\mu = 0$, lo cual da como resultado

$$e^0 = n^0 E^\nu u_\nu - E^0 n^\nu u_\nu + \varepsilon^{0\nu\alpha 0} u_\nu B_\alpha n_0, \quad (86)$$

en donde se puede apreciar que el segundo y tercer término se hacen cero debido a que $E^0 = \varepsilon^{0\nu\alpha 0} = 0$, por lo que la expresión anterior puede reescribirse como $e^0 = n^0 E^i u_i$. Al reemplazar explícitamente las componentes n^0 y u_i se obtiene que la componente temporal del campo eléctrico $\mathbf{e}$ está dada por

$$e^0 = \frac{W}{\alpha} E^i v_i. \quad (87)$$

Las componentes espaciales de (85) se obtienen al hacer $\mu = i$, por lo cual se tiene

$$e^i = n^i E^\nu u_\nu - E^i n^\nu u_\nu + \varepsilon^{i\nu\alpha\beta} u_\nu B_\alpha n_\beta. \quad (88)$$

Al tener en cuenta la ecuación (22) en el segundo término, además de expandir los factores restantes en términos de sus componentes temporales y espaciales, se tiene que la expresión anterior se transforma en

$$e^i = n^i E^k u_k + W E^i - n_0 \varepsilon^{0ijk} u_j B_k. \quad (89)$$

Reemplazando cada una de las componentes de manera explícita y teniendo en cuenta que $\varepsilon^{0ikl} = \varepsilon^{ikl}$, las componentes espaciales del campo eléctrico $\mathbf{e}$ están dadas por

$$e^i = WE^i - \frac{W}{\alpha} E^k v_k \beta^i + \alpha W \varepsilon^{ijk} v_j B_k. \quad (90)$$

Para el cálculo de las componentes del campo magnético $\mathbf{b}$ se hace uso de la ecuación (84), donde se escribe únicamente el tensor dual de Faraday en términos de las cantidades medidas por el observador Euleriano, de tal forma que

$$b^\mu = {}^*F^{\mu\nu} u_\nu = \left[n^\mu B^\nu - B^\mu n^\nu - \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} E_\alpha n_\beta \right] u_\nu. \quad (91)$$

La componente temporal de (91) se obtiene al hacer $\mu = 0$, lo cual da como resultado

$$b^0 = n^0 B^\nu u_\nu - B^0 n^\nu u_\nu - \varepsilon^{0\nu\alpha 0} u_\nu E_\alpha n_0, \quad (92)$$

en esta expresión el segundo y tercer término se anulan debido a que $B^0 = \varepsilon^{0\nu\alpha 0} = 0$. Por lo tanto,

la componente temporal del campo magnético $\mathbf{b}$ está dada por

$$b^0 = \frac{W}{\alpha} B^i v_i. \quad (93)$$

Las componentes espaciales de (91) se obtienen haciendo $\mu = i$, de lo cual se obtiene

$$b^i = n^i B^\nu u_\nu - B^i n^\nu u_\nu - \varepsilon^{i\nu\alpha\beta} u_\nu E_\alpha n_\beta. \quad (94)$$

Expandiendo la expresión anterior en términos de sus componentes temporales y espaciales, se tiene que las componentes espaciales del campo magnético $\mathbf{b}$ satisfacen

$$b^i = W B^i - \frac{W}{\alpha} B^k v_k \beta^i - \alpha W \varepsilon^{ijk} v_j E_k. \quad (95)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (87), (90), (93) y (95), las transformaciones de Lorentz entre los campos eléctrico y magnético medidos por los observadores Euleriano y comovil al fluido están dadas por

$$e^\mu = \left[\frac{W}{\alpha} E^k v_k, W E^i - e^0 \beta^i + \alpha W \varepsilon^{ikl} v_k B_l \right], \quad (96)$$

$$b^\mu = \left[\frac{W}{\alpha} B^k v_k, W B^i - b^0 \beta^i - \alpha W \varepsilon^{ikl} v_k E_l \right]. \quad (97)$$

Si suponemos que en el marco de referencia comovil al fluido no existe campo eléctrico, es decir que $e^\mu = 0^\mu$, se tiene que el campo eléctrico medido por el observador Euleriano cumple

$$E^i = -\alpha \varepsilon^{ikl} v_k B_l, \quad (98)$$

la cual corresponde a la condición de la magnetohidrodinámica en el límite ideal (Mignone et al.,

2019).

Análogamente, los cuadvectores p^μ y m^μ pueden ser calculados mediante contracciones al tensor de polarización como

$$p^\mu = -\mathcal{M}^{\mu\nu}u_\nu, \quad m^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathcal{M}_{\nu\alpha}u_\beta, \quad (99)$$

en donde se ha tenido en cuenta que, tanto el cuadvector de polarización eléctrica p^μ como el cuadvector de polarización magnética m^μ , son ortogonales a la cuadvirvelocidad del fluido, es decir, que se satisfacen las relaciones

$$p^\mu u_\mu = 0, \quad m^\mu u_\mu = 0. \quad (100)$$

Las expresiones anteriores son válidas para cualquier sistema de referencia, por lo cual en el marco de referencia del observador Euleriano se cumple

$$P^\mu n_\mu = 0, \quad M^\mu n_\mu = 0, \quad (101)$$

en donde P^μ y M^μ respectivamente son los cuadvectores de polarización eléctrica y polarización magnética medidos por el observador Euleriano. Mediante las expresiones (101) se puede apreciar que los cuadvectores de polarización eléctrica y magnética dados en el marco Euleriano serán totalmente espaciales, por esta razón serán tangentes a cada una de las hipersuperficies Σ_t (Huang

et al., 2010).

Las componentes de los cuadvectores de polarización eléctrica y magnética medidos por el observador comovil al fluido pueden ser calculadas en términos de los cuadvectores de polarización medidos por el observador Euleriano. Es decir, existe una transformación de Lorentz para la polarización eléctrica y magnética entre estos dos observadores al igual que sucedía para los campos electromagnéticos. Para el cálculo de las componentes del cuadvector de polarización eléctrica del fluido $\mathbf{p}$ se hace uso de la ecuación (99), donde se escribe únicamente el tensor de polarización en términos de las cantidades medidas por el observador Euleriano, es decir que

$$p^\mu = - \left(P^\mu n^\nu - P^\nu n^\mu + \varepsilon^{\mu\nu\sigma\beta} M_\sigma n_\beta \right) u_\nu. \quad (102)$$

La componente temporal de (102) se obtiene al hacer $\mu = 0$, de lo cual se tiene

$$p^0 = n^0 P^k u_k, \quad (103)$$

en donde se ha tenido en cuenta que $P^0 = \varepsilon^{0\nu\sigma 0} = 0$. Al reemplazar explícitamente las componentes n^0 y u_i , se obtiene que la componente temporal del cuadvector de polarización eléctrica $\mathbf{p}$ se transforma en

$$p^0 = \frac{W}{\alpha} P^k v_k. \quad (104)$$

Las componentes espaciales de (102) se obtienen al hacer $\mu = i$, de manera que

$$p^i = n^i P^k u_k - P^i n^\nu u_\nu - n_0 \varepsilon^{ikl0} u_k M_l, \quad (105)$$

al tener en cuenta la ecuación (22) se tiene que las componentes espaciales del cuadvivector de polarización eléctrica $\mathbf{p}$ dan como resultado

$$p^i = W P^i - \frac{W}{\alpha} P^k v_k \beta^i - \alpha W \varepsilon^{ikl} v_k M_l. \quad (106)$$

Para el cálculo de las componentes del cuadvivector de polarización magnética del fluido $\mathbf{m}$ se hace uso de la ecuación (99), donde se escribe el tensor de polarización en términos de las cantidades medidas por el observador Euleriano, es decir

$$\begin{aligned} m^\mu &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (P_\nu n_\alpha - P_\alpha n_\nu + \varepsilon_{\nu\alpha\sigma\rho} M^\sigma n^\rho) u_\beta, \\ m^\mu &= \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\nu n_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} \varepsilon^{\nu\alpha\beta\mu} \varepsilon_{\nu\alpha\sigma\rho} M^\sigma n^\rho u_\beta. \end{aligned} \quad (107)$$

Empleando en el segundo término la identidad $\varepsilon^{\nu\alpha\beta\mu} \varepsilon_{\nu\alpha\sigma\rho} = -2 (\delta^\beta_\sigma \delta^\mu_\rho - \delta^\mu_\sigma \delta^\beta_\rho)$ (Gourgoulhon, 2012), se tiene que el cuadvivector m^μ puede reescribirse como

$$m^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\nu n_\alpha u_\beta + M^\alpha u_\alpha n^\mu + W M^\mu. \quad (108)$$

La componente temporal de (108) se obtiene al hacer $\mu = 0$, lo cual da como resultado

$$m^0 = n^0 M^k u_k, \quad (109)$$

en donde se ha tenido en cuenta que $M^0 = \epsilon^{0\nu 0\beta} = 0$. Reemplazando las componentes n^0 y u_k , la componente temporal del cuadvivector $\mathbf{m}$ se transforma en

$$m^0 = \frac{W}{\alpha} M^k v_k. \quad (110)$$

Ahora, las componentes espaciales de (108) se hallan haciendo $\mu = i$, de manera que estas cumplen

$$m^i = n_0 \epsilon^{i0k} P_l u_k + M^k u_k n^i + W M^i. \quad (111)$$

Por tal razón, las componentes espaciales de $\mathbf{m}$ se pueden reescribir como

$$m^i = W M^i - \frac{W}{\alpha} M^k v_k \beta^i + \alpha W \epsilon^{ikl} v_k P_l. \quad (112)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (104), (106), (110) y (112), las transformaciones de Lorentz de la polarización eléctrica y magnética entre los observadores Euleriano y comovil al fluido satisfa-

cen las relaciones

$$p^\mu = \left[\frac{W}{\alpha} P^k v_k, W P^i - p^0 \beta^i - \alpha W \varepsilon^{ikl} v_k M_l \right], \quad (113)$$

$$m^\mu = \left[\frac{W}{\alpha} M^k v_k, W M^i - m^0 \beta^i + \alpha W \varepsilon^{ikl} v_k P_l \right]. \quad (114)$$

Estas transformaciones coinciden con las dadas en De Groot and Suttorp (1972) para el caso de Relatividad Especial.

1.2.3.1. Ecuaciones de Maxwell en medios materiales en forma conservativa.

Para escribir las ecuaciones de Maxwell homogéneas en forma conservativa se escribe la expresión (79) en términos de las cantidades medidas por el observador Euleriano, esto es

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu \left[\sqrt{-g} \left(n^\mu B^\nu - n^\nu B^\mu - \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} E_\alpha n_\beta \right) \right] = 0. \quad (115)$$

Ahora, expandiendo la expresión anterior en términos de su parte espacial y temporal, esta puede reescribirse como

$$\partial_0 (\sqrt{-g} n^0 B^\mu) + \partial_i \left[\sqrt{-g} \left(n^i B^\mu - n^\mu B^i - n_0 \varepsilon^{0\mu il} E_l \right) \right] = 0. \quad (116)$$

Al hacer en la expresión anterior $\mu = 0$ y utilizando la ecuación (6) se obtiene

$$\partial_i (\sqrt{\gamma} B^i) = 0, \quad (117)$$

la cual no es más que la ley de Gauss del campo magnético bajo el formalismo 3 + 1 de la Relatividad General. Por otra parte, al hacer en la ecuación (116) $\mu = k$ se tiene que dicha expresión se puede reescribir como

$$\partial_0 \left(\sqrt{-g} n^0 B^k \right) + \partial_i \left[\sqrt{-g} \left(n^i B^k - n^k B^i - n_0 \varepsilon^{0kil} E_l \right) \right] = 0. \quad (118)$$

Reemplazando el determinante del tensor métrico g y las componentes de la cuadrivelocidad Euleriana n , la ecuación anterior se transforma en

$$\partial_0 \left(\sqrt{\gamma} B^k \right) + \partial_i \left[\sqrt{\gamma} \left(B^i \beta^k - \beta^i B^k - \alpha^2 \varepsilon^{ikl} E_l \right) \right] = 0, \quad (119)$$

la cual no es más que la ley de inducción de Faraday en forma conservativa.

Para escribir las ecuaciones de Maxwell no homogéneas en medios materiales en forma conservativa se procede de manera similar al caso anterior. Por lo tanto, la ecuación (78) en términos de las cantidades medidas por el observador Euleriano, teniendo en cuenta la densidad de corriente eléctrica dada en la expresión (81), se transforma en

$$\partial_\nu \left[\sqrt{-g} \left(n^\mu E^\nu - n^\nu E^\mu + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} B_\alpha n_\beta \right) \right] = \sqrt{-g} J_f^\mu + \partial_\nu \left[\sqrt{-g} \left(P^\mu n^\nu - P^\nu n^\mu + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} M_\alpha n_\beta \right) \right]. \quad (120)$$

El cuadvectores densidad de corriente libre J_f^μ , se reescribe bajo la descomposición 3 + 1 de tal manera que se pueda separar en términos de una parte espacial tangente a cada una de

las hipersuperficies espaciales Σ_t y una parte temporal paralela al vector unitario $\mathbf{n}$. Para esto se hace uso de la definición del delta de Kronecker dada en la ecuación (17), de tal forma que este cuadvectores puede ser reescrito como

$$J_f^\mu = \delta^\mu_\nu J_f^\nu = \gamma^\mu_\nu J_f^\nu - n^\mu n_\nu J_f^\nu. \quad (121)$$

Definiendo las cantidades $\rho_q = -J_f^\nu n_\nu$ y $j_f^\mu = \gamma^\mu_\nu J_f^\nu$, el cuadvectores densidad de corriente libre se convierte en

$$J_f^\mu = \rho_q n^\mu + j_f^\mu, \quad (122)$$

en donde ρ_q es la densidad volumétrica de carga libre medida por el observador Euleriano y j_f^μ es un vector espacial tangente a cada una de las hipersuperficies Σ_t , el cual representa la densidad de corriente eléctrica producto al movimiento libre de cargas. Por tal razón, expandiendo la expresión (120) en términos de su parte espacial y temporal esta se reescribe como

$$\begin{aligned} \partial_0 (\sqrt{-g} n^0 E^\mu) + \partial_i \left[\sqrt{-g} (n^i E^\mu - n^\mu E^i + n_0 \epsilon^{0\mu il} B_l) \right] &= -\sqrt{-g} (\rho_q n^\mu + j_f^\mu) \\ - \partial_0 (\sqrt{-g} n^0 P^\mu) + \partial_i \left[\sqrt{-g} (P^i n^\mu - P^\mu n^i + n_0 \epsilon^{0\mu il} M_l) \right] &. \end{aligned} \quad (123)$$

Al hacer $\mu = 0$ en la expresión anterior y empleando la ecuación (6) se obtiene

$$\partial_i (\sqrt{\gamma} \mathcal{D}^i) = \sqrt{\gamma} \rho_q, \quad (124)$$

en donde $\mathcal{D}^i$ es el vector de *desplazamiento eléctrico* medido por el observador Euleriano, el cual se define como $\mathcal{D}^i = E^i + P^i$. La expresión anterior no es más que la ley de Gauss en un medio material bajo la descomposición 3 + 1 de la Relatividad General. Finalmente, al hacer en la ecuación (123) $\mu = k$ se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_0 \left(\sqrt{-g} n^0 E^k \right) + \partial_i \left[\sqrt{-g} \left(n^i E^k - n^k E^i + n_0 \epsilon^{0kil} B_l \right) \right] = -\sqrt{-g} \left(\rho_q n^k + j_f^k \right) \\ - \partial_0 \left(\sqrt{-g} n^0 P^k \right) + \partial_i \left[\sqrt{-g} \left(P^i n^k - P^k n^i + n_0 \epsilon^{0kil} M_l \right) \right]. \end{aligned} \quad (125)$$

Al reemplazar el determinante del tensor métrico g y las componentes de la cuadrivelocidad Euleriana n , la ecuación anterior se reduce a

$$\partial_0 \left(\sqrt{\gamma} \mathcal{D}^k \right) + \partial_i \left[\sqrt{\gamma} \left(\mathcal{D}^i \beta^k - \beta^i \mathcal{D}^k + \alpha^2 \epsilon^{ikl} H_l \right) \right] = \sqrt{\gamma} \left(\rho_q \beta^k - \alpha j_f^k \right), \quad (126)$$

en donde H^i es el vector de *intensidad magnética* medido por el observador Euleriano, el cual se define como $H^i = B^i - M^i$. La expresión anterior no es más que la ley de Ampere-Maxwell en forma conservativa.

Al contraer la ecuación (126) con el cuadvivector ∂_k y tener en cuenta la expresión (124) se obtiene

$$\partial_0 \left(\sqrt{\gamma} \rho_q \right) + \partial_k \left[\sqrt{\gamma} \left(\alpha j_f^k - \beta^k \right) \right] = \partial_i \left\{ \partial_k \left[\sqrt{\gamma} \left(\beta^i \mathcal{D}^k - \mathcal{D}^i \beta^k \right) \right] \right\}, \quad (127)$$

la cual corresponde a la ecuación de continuidad de la carga eléctrica para el caso de Relatividad

General. Por tal razón, el sistema de ecuaciones de la GRRMHD (40), (51), (64), (119), (126) y (127) puede escribirse de manera compacta como un sistema de ecuaciones conservativo de la forma

$$\partial_0 (\sqrt{\gamma} \mathbf{U}) + \partial_i (\sqrt{\gamma} \mathbf{F}^i) = \sqrt{\gamma} \mathbf{S}, \quad (128)$$

donde $\mathbf{U}$ es un vector de variables conservativas, $\mathbf{F}^i$ es un vector de flujos a lo largo de cada dirección espacial y $\mathbf{S}$ es un vector de fuentes. Cada uno de estos vectores están dados explícitamente por

$$\mathbf{U} = \left[D, S_k, \tau, B^k, \mathcal{D}^k, \rho_q \right]^T, \quad (129)$$

$$\mathbf{F}^i = \begin{bmatrix} D(\alpha v^i - \beta^i) \\ \alpha W_k^i - \beta^i S_k \\ \alpha(S^i - Dv^i) - \tau \beta^i \\ B^i \beta^k - \beta^i B^k - \alpha^2 \epsilon^{ikl} E_l \\ \mathcal{D}^i \beta^k - \beta^i \mathcal{D}^k + \alpha^2 \epsilon^{ikl} H_l \\ \alpha j_f^i - \beta^i \end{bmatrix}, \quad (130)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{2} W^{il} \partial_k \gamma_{il} + S_l \partial_k \beta^l - U \partial_k \alpha \\ \frac{1}{2} W^{ik} \beta^l \partial_l \gamma_{ik} + W^i_l \partial_i \beta^l - S^i \partial_i \alpha \\ 0^k \\ \rho_q \beta^k - \alpha j_f^k \\ \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_k \{ \partial_i [\sqrt{\gamma} (\mathcal{D}^i \beta^k - \beta^i \mathcal{D}^k)] \} \end{bmatrix}, \quad (131)$$

este sistema de ecuaciones es válido para un tensor energía-momentum arbitrario asociado a cualquier distribución de materia o campos no gravitacionales. Por tal razón, si se desea describir la dinámica de un plasma no ideal polarizado eléctrica y magnéticamente se deben definir explícitamente las cantidades U , S^i y W^i_k a partir de un tensor energía-momentum que lleve toda la información acerca de cada una de las contribuciones de interés, además de especificar la forma del vector espacial de densidad de corriente libre j_f^k . En las siguientes secciones se muestra el procedimiento matemático para la obtención de cada una de dichas cantidades físicas.

1.3. Tensor energía-momentum para un fluido conductor no ideal polarizado

El tensor energía-momentum asociado a un plasma no ideal, relativista y polarizado electromagnéticamente puede ser escrito como la superposición de cada una de sus contribuciones independientes como

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_f + \mathbf{T}_{em} + \mathbf{T}_p, \quad (132)$$

en donde $\mathbf{T}_f$, $\mathbf{T}_{em}$ y $\mathbf{T}_p$ son respectivamente los tensores energía-momentum para un fluido perfecto, para el campo electromagnético y el asociado a la polarización del material. Por tal razón, de la ecuación (42) se puede apreciar que la energía, momentum y tensor de esfuerzos para este sistema estarán dadas por

$$U = U_f + U_{em} + U_p, \quad (133)$$

$$S^\mu = S_f^\mu + S_{em}^\mu + S_p^\mu, \quad (134)$$

$$W^{\mu\nu} = W_f^{\mu\nu} + W_{em}^{\mu\nu} + W_p^{\mu\nu}, \quad (135)$$

en donde en cada una de las expresiones anteriores el primer término se debe a la contribución del fluido perfecto, el segundo término a la contribución del campo electromagnético y el tercer término a la contribución de la polarización del plasma. La forma explícita de cada uno de dichos términos se discutirá a continuación.

1.3.1. Tensor energía-momentum del fluido perfecto. Se dice que un fluido es perfecto cuando no presenta conducción de energía en forma de calor, no presenta viscosidad y además luce isótropo en su marco de referencia comovil. Que no exista conducción de energía en forma de calor implica inmediatamente que el flujo de la densidad de energía es nulo, por lo tanto se tiene que $T^{0i} = T^{i0} = 0$. Por otra parte, la viscosidad es consecuencia de las fuerzas de fricción o esfuerzos cortantes entre dos elementos de volumen adyacentes en el fluido. Que no exista viscosidad significa que sólo se presentarán fuerzas normales a las paredes del elemento de volumen del fluido, es decir, que $T^{ik} = 0$ cuando $i \neq k$. Por último, que el fluido luzca isótropo es

reflejo de que las fuerzas por unidad de área en cada una de las direcciones espaciales son iguales, lo cual significa que la presión p en todas las paredes del elemento de volumen será igual, esto implica inmediatamente que la parte espacial del tensor está dada por $T^{ik} = p\delta^{ik}$. Por lo tanto, el tensor energía-momentum para un fluido perfecto en su representación matricial en el marco de referencia comovil está dado por

$$\mathbf{T}_f = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (136)$$

donde ε es la densidad de energía total en un elemento de volumen del fluido y p es la presión termodinámica (Schutz, 2009). La expresión anterior implica que el tensor para el fluido perfecto puede reescribirse como

$$\mathbf{T}_f = \rho h \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{g}, \quad (137)$$

donde h es la entalpía específica del fluido, la cual está dada por

$$h = \frac{\varepsilon + p}{\rho} = 1 + \varepsilon + \frac{p}{\rho}, \quad (138)$$

siendo ε la energía interna específica del fluido. El tensor de la ecuación (137) es válido para cualquier sistema de referencia debido a que es una expresión covariante, por tal razón es inde-

pendiente del sistema de coordenadas empleado. Además, la presión p y la energía interna ε están relacionadas mediante una ecuación de estado de la forma $p = p(\rho, \varepsilon)$ (Shibata, 2015). A lo largo de este trabajo se empleará la ecuación de estado para un gas ideal, la cual está dada por

$$p = \rho\varepsilon(\Gamma - 1), \quad (139)$$

donde Γ es el índice adiabático del gas.

Para determinar la contribución de la energía, momentum y el tensor de esfuerzos asociadas al fluido perfecto se parte de las definiciones dadas en la descomposición $3 + 1$ del tensor energía momentum de la expresión (42). Por tal razón, la contribución de energía del fluido perfecto se encuentra como

$$U_f = T_f^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = (\rho h u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}) n_\mu n_\nu, \quad (140)$$

haciendo uso de las ecuaciones (8) y (22), se obtiene que la energía asociada al fluido perfecto está dada como

$$U_f = \rho h W^2 - p. \quad (141)$$

La contribución para el momentum del fluido perfecto se encuentra mediante la expresión

$$S_f^i = -\gamma_\alpha^i T_f^{\alpha\beta} n_\beta = -T_f^{i0} n_0 - n^i U_f. \quad (142)$$

Al reemplazar en la ecuación anterior las componentes de la cuadrivelocidad del observador Euleriano $\mathbf{n}$ y las componentes T_f^{i0} del tensor energía momentum del fluido perfecto, la expresión anterior se transforma en

$$S_f^i = \rho h W^2 v^i. \quad (143)$$

Por último, el tensor de esfuerzos asociado al fluido perfecto cumple que

$$W_f^{ik} = \gamma^i_\alpha \gamma^k_\beta T_f^{\alpha\beta} = T_f^{ik} + T_f^{i0} n^k n_0 + n^i T_f^{0k} n_0 + n^i n^k U_f. \quad (144)$$

Reemplazando las componentes T_f^{i0} , T_f^{ik} del tensor energía momentum y las componentes de la cuadrivelocidad Euleriana, el tensor de esfuerzos asociado al fluido perfecto está dado por

$$W_f^{ik} = \rho h W^2 v^i v^k + p \gamma^{ik}. \quad (145)$$

1.3.2. Tensor energía-momentum del campo electromagnético. De acuerdo a las ecuaciones de Maxwell de la Electrodinámica, se sabe que el campo electromagnético almacena energía y momentum. Por esta razón es adecuado asociar a dicho campo un tensor $\mathbf{T}_{em}$ que brinde información acerca de la densidad de energía, densidad de momentum y sus respectivos flujos. Este tensor en términos de sus componentes contravariantes se escribe como (Ripperda et al., 2019)

$$T_{em}^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha} F^\nu_\alpha - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (146)$$

Para el caso de Relatividad General, el tensor energía-momentum del campo electromagnético, en términos de los campos $\mathbf{e}$, $\mathbf{b}$ y la cuadrivelocidad del fluido $\mathbf{u}$, puede reescribirse como (ver el apéndice (4) para su derivación)

$$T_{em}^{\mu\nu} = \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu \right) (e^2 + b^2) - e^\mu e^\nu - b^\mu b^\nu - u^\mu \varepsilon^{\nu\alpha\beta\gamma} e_\alpha u_\beta b_\gamma - u^\nu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} e_\alpha u_\beta b_\gamma, \quad (147)$$

en donde $e^2 = e^\alpha e_\alpha$ y $b^2 = b^\alpha b_\alpha$. Para encontrar la energía, momentum y matriz de esfuerzos asociada al campo electromagnético medida por el observador Euleriano es conveniente reescribir la ecuación anterior en términos de cada una de las cantidades medidas por dicho observador. Esto se puede realizar debido a que esta es una ecuación tensorial y según el principio de covarianza de la Relatividad General debe tomar la misma forma independiente del marco de referencia empleado. Por esta razón, el tensor energía-momentum asociado al campo electromagnético escrito en el marco de referencia del observador Euleriano es

$$T_{em}^{\mu\nu} = \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu \right) (E^2 + B^2) - E^\mu E^\nu - B^\mu B^\nu - n^\mu \varepsilon^{\nu\alpha\beta\gamma} E_\alpha n_\beta B_\gamma - n^\nu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} E_\alpha n_\beta B_\gamma. \quad (148)$$

La energía asociada al campo electromagnético medida por el observador Euleriano se encuentra mediante $U_{em} = T_{em}^{\mu\nu} n_\mu n_\nu$, donde $T_{em}^{\mu\nu}$ es el tensor dado en la expresión (148). Por esta razón, la

contribución de la energía del campo electromagnético está dada por

$$U_{em} = \frac{1}{2} (E^2 + B^2), \quad (149)$$

en donde se ha tenido en cuenta que los campos electromagnéticos son ortogonales a la cuadrivelocidad Euleriana, es decir, que $E^\mu n_\mu = B^\mu n_\mu = 0$. La contribución del momentum del campo electromagnético puede encontrarse mediante la expresión

$$S_{em}^i = -\gamma^i_\alpha T_{em}^{\alpha\beta} n_\beta = -T_{em}^{i0} n_0 - n^i U_{em}. \quad (150)$$

Al reemplazar las componentes del tensor energía-momentum y de la cuadrivelocidad Euleriana de forma explícita se tiene que el momentum asociado al campo electromagnético satisface

$$S_{em}^i = \alpha \varepsilon^{ikl} E_k B_l, \quad (151)$$

en donde se puede apreciar que corresponde al vector de Poynting. Por último, el tensor de esfuerzos asociado al campo electromagnético W_{em}^{ik} cumple

$$W_{em}^{ik} = \gamma^i_\alpha \gamma^k_\beta T_{em}^{\alpha\beta} = T_{em}^{ik} + T_{em}^{i0} n^k n_0 + n^i T_{em}^{0k} n_0 + n^i n^k U_{em}, \quad (152)$$

el cual puede mostrarse que de manera explícita satisface la expresión

$$W_{em}^{ik} = \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \gamma^{ik} - E^i E^k - B^i B^k, \quad (153)$$

esta ecuación corresponde al tensor de esfuerzos de Maxwell.

1.3.3. Tensor energía-momentum asociado a la polarización. La respuesta de un determinado material cuando está sometido a un campo electromagnético externo consiste en la generación de un campo electromagnético propio, este fenómeno se denomina *polarización* del material. El tensor energía-momentum que describe tanto la polarización eléctrica y magnética para un determinado material está dado por (Chatterjee et al., 2015)

$$T_p^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (F^\mu{}_\alpha \mathcal{M}^{\alpha\nu} + F^\nu{}_\alpha \mathcal{M}^{\alpha\mu}). \quad (154)$$

En términos de los cuadvectores $\mathbf{p}$, $\mathbf{m}$ y la cuadvirvelocidad del fluido $\mathbf{u}$, el tensor energía-momentum asociado a la polarización del plasma puede reescribirse como (ver el apéndice (5) para su derivación)

$$\begin{aligned} T_p^{\mu\nu} = & -b^\alpha m_\alpha (g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu) + \frac{1}{2} (b^\mu m^\nu + m^\mu b^\nu) + e^\alpha p_\alpha u^\mu u^\nu - \frac{1}{2} (p^\mu e^\nu + e^\mu p^\nu) \\ & - \frac{1}{2} u^\mu \varepsilon^{\nu\alpha\sigma\beta} (e_\alpha m_\sigma u_\beta + b_\alpha p_\sigma u_\beta) - \frac{1}{2} u^\nu \varepsilon^{\mu\alpha\sigma\beta} (e_\alpha m_\sigma u_\beta + b_\alpha p_\sigma u_\beta), \end{aligned} \quad (155)$$

en donde se puede apreciar que en el caso en que el campo eléctrico y la polarización eléctrica son nulos $e^\mu = p^\mu = 0^\mu$ (caso ideal) el tensor de polarización se reduce al dado en el artículo de

Pimentel et al. (018a). Para encontrar la energía, momentum y tensor de esfuerzos medidos por el observador Euleriano asociado a la polarización es adecuado escribir el tensor energía-momentum T_p en términos de cada una de las cantidades medidas por dicho observador, por tal razón este tensor, en el marco de referencia Euleriano, está dado por

$$T_p^{\mu\nu} = -B^\alpha M_\alpha (g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu) + \frac{1}{2} (B^\mu M^\nu + M^\mu B^\nu) + E^\alpha P_\alpha n^\mu n^\nu - \frac{1}{2} (P^\mu E^\nu + E^\mu P^\nu) \\ - \frac{1}{2} n^\mu \varepsilon^{\nu\alpha\sigma\beta} (E_\alpha M_\sigma n_\beta + B_\alpha P_\sigma n_\beta) - \frac{1}{2} n^\nu \varepsilon^{\mu\alpha\sigma\beta} (E_\alpha M_\sigma n_\beta + B_\alpha P_\sigma n_\beta). \quad (156)$$

La energía asociada a la polarización medida por el observador Euleriano está dada por $U_p = T_p^{\mu\nu} n_\mu n_\nu$, donde $T_p^{\mu\nu}$ es el dado en la expresión (156). Por esta razón, la contribución de energía debido a la polarización da como resultado

$$U_p = E^\alpha P_\alpha, \quad (157)$$

en donde se ha hecho uso de las expresiones (101). La contribución al momentum del sistema puede encontrarse mediante la expresión

$$S_p^i = -\gamma^i_\alpha T_p^{\alpha\beta} n_\beta = -T_p^{i0} n_0 - n^i U_p. \quad (158)$$

Reemplazando las componentes del tensor energía-momentum T_p y las componentes de la cuadrivelocidad Euleriana, se llega a que el momentum debido a la polarización del material satisface

$$S_p^i = -\frac{\alpha}{2} \epsilon^{ikl} (E_k M_l + B_k P_l). \quad (159)$$

Por último, el tensor de esfuerzos debido a la polarización se calcula como

$$W_p^{ik} = \gamma^i_\alpha \gamma^k_\beta T_p^{\alpha\beta} = T_p^{ik} + T_p^{i0} n^k n_0 + n^i T_p^{0k} n_0 + n^i n^k U_p, \quad (160)$$

del cual puede mostrarse que, de manera explícita, está dado por

$$W_p^{ik} = -B^l M_l \gamma^{ik} + \frac{1}{2} (B^i M^k + M^i B^k) - \frac{1}{2} (P^i E^k + E^i P^k). \quad (161)$$

Finalmente, la energía total asociada al plasma no ideal polarizado teniendo en cuenta las contribuciones (141), (149) y (157) es igual a

$$U = \rho h W^2 - p + \frac{1}{2} (E^2 + B^2) + E_k P^k. \quad (162)$$

El momentum total teniendo en cuenta las contribuciones (143), (151) y (159) cumple

$$S^i = \rho h W^2 v^i + \alpha \epsilon^{ilm} E_l B_m - \frac{\alpha}{2} \epsilon^{ikl} (E_k M_l + B_k P_l), \quad (163)$$

y el tensor de esfuerzos total teniendo en cuenta las contribuciones (145), (153) y (161) satisface

$$W^{ik} = \rho h W^2 v^i v^k + \left[p + \frac{1}{2} (E^2 + B^2) - B^l M_l \right] \gamma^{ik} - E^i E^k - B^i B^k + \frac{1}{2} (B^i M^k + M^i B^k) - \frac{1}{2} (P^i E^k + E^i P^k), \quad (164)$$

estas serán las expresiones de energía, momentum y matriz de esfuerzos empleadas en el sistema conservativo de la ecuación (128).

1.4. Ley de Ohm covariante

La ley de Ohm es una relación constitutiva entre el campo eléctrico y la densidad de corriente eléctrica libre para un determinado sistema. Esta describe la respuesta de un material (sistema de muchas partículas) a un determinado estímulo externo. La ley de Ohm para el caso Relativista puede ser escrita de manera covariante. Para esto se asume una relación constitutiva lineal en el marco Euleriano dada por

$$j_f^\mu = \sigma^{\mu\nu} E_\nu, \quad (165)$$

en donde $\sigma^{\mu\nu}$ es el tensor de conductividad eléctrica y j_f^μ es el vector espacial de densidad de corriente. En general el tensor de conductividad eléctrica es un tensor anisótropo, el cual es una función de la densidad, la temperatura y los campos magnéticos presentes en el sistema. Sin embargo, si los campos magnéticos son lo suficientemente débiles este tensor puede ser reescrito como

$$\sigma^{\mu\nu} = \sigma g^{\mu\nu}, \quad (166)$$

donde σ es la conductividad eléctrica del medio, la cual es una función de la densidad y la temperatura, además de ser una función que lleva toda la información acerca del material en cuestión (Anile, 2005). Por tal razón la ecuación (165) se reduce a

$$j_f^\mu = \sigma E^\mu. \quad (167)$$

Considerando que la expresión anterior está dada en el marco Euleriano esta puede ser escrita en términos del tensor de Faraday según la expresión (83), por lo cual es fácil ver que esta ecuación se transforma en

$$j_f^\mu = \sigma F^{\mu\nu} n_\nu. \quad (168)$$

Al reemplazar la expresión anterior en (122), la densidad de corriente eléctrica toma la forma

$$J_f^\mu = -n^\mu J_f^\nu n_\nu + \sigma F^{\mu\nu} n_\nu, \quad (169)$$

esta ecuación es válida para cualquier sistema de referencia debido al principio de covarianza de la Relatividad. En el marco de referencia del fluido esta expresión toma la forma

$$\sigma F^{\mu\nu} u_\nu = J_f^\mu + u^\mu J_f^\nu u_\nu, \quad (170)$$

en donde la parte temporal de la ecuación anterior se obtiene al hacer $\mu = 0$, lo cual da como resultado

$$\sigma F^{0k} u_k = J_f^0 + u^0 \left(J_f^0 u_0 + J_f^k u_k \right). \quad (171)$$

Reemplazando las componentes de la cuadrivelocidad del fluido $\mathbf{u}$ y teniendo en cuenta que el campo eléctrico está dado por $F^{0k} = E^k$, la expresión anterior puede ser reescrita como

$$\sigma E^k v_k = \frac{W}{\alpha} \left(j_f^k v_k - \rho_q v^2 \right). \quad (172)$$

Por otro lado, la parte espacial de la ecuación (170) se obtiene al hacer $\mu = i$, lo cual conduce a

$$\sigma \left(F^{i0} u_0 + F^{ik} u_k \right) = J_f^i + u^i \left(J_f^0 u_0 + J_f^k u_k \right), \quad (173)$$

teniendo en cuenta, según la ecuación (68), que la parte espacial del tensor de Faraday satisface $F^{ik} = \varepsilon^{ikl} B_l$, la expresión anterior se transforma en

$$\sigma W \left[E^i \left(\alpha - \beta^k v_k \right) + \varepsilon^{ikl} v_k B_l \right] = j_f^i - \rho_q \frac{\beta^i}{\alpha} + W^2 \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) \left(j_f^k v_k - \rho_q \right). \quad (174)$$

Al despejar $j_f^k v_k$ en la ecuación (172) y reemplazarla (174) se obtiene que la densidad de corriente espacial j_f^i está dada por

$$j_f^i = \rho_q v^i + \sigma W \left[E^i \left(\alpha - \beta^k v_k \right) + \varepsilon^{ikl} v_k B_l - \alpha E^k v_k \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) \right]. \quad (175)$$

Es usual escribir esta ecuación en términos del coeficiente de resistividad, el cual se define como el inverso de la conductividad eléctrica, $\eta = 1/\sigma$. Por lo tanto, la densidad de corriente espacial puede reescribirse como

$$j_f^i = \rho_q v^i + \frac{W}{\eta} \left[E^i \left(\alpha - \beta^k v_k \right) + \varepsilon^{ikl} v_k B_l - \alpha E^k v_k \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) \right], \quad (176)$$

esta ecuación no es más que la generalización de la ley de Ohm para Relatividad General.

1.5. Ecuaciones de la RRMHD con polarización magnética en forma conservativa

A pesar de que se han deducido las ecuaciones de la GRRMHD, en este trabajo se empleará la métrica de Minkowski, la cual es la que gobierna la geometría del espaciotiempo para el caso de Relatividad Especial. La métrica de Minkowski en términos de sus componentes covariantes y contravariantes está dada por

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (177)$$

Comparando la expresión anterior con las componentes del tensor métrico g de la ecuación (5), puede apreciarse que la función lapso, el vector de corrimiento y la métrica espacial para el caso

de Relatividad Especial satisfacen

$$\alpha = 1, \quad \beta^i = 0^i, \quad \gamma^{ij} = \delta^{ij}. \quad (178)$$

Por tal razón, el sistema de ecuaciones de la GRRMHD dado en la ecuación (128) puede reescribirse como

$$\partial_0 \mathbf{U} + \partial_i \mathbf{F}^i = \mathbf{S}, \quad (179)$$

en donde se ha tenido en cuenta que el determinante de la métrica inducida es $\gamma = 1$. Aquí, el vector de variables conservativas $\mathbf{U}$, el vector de flujos $\mathbf{F}^i$ y el vector de fuentes $\mathbf{S}$ están dados explícitamente por

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} D \\ S_k \\ \tau \\ B^k \\ \mathcal{D}^k \\ \rho_q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^i = \begin{bmatrix} Dv^i \\ W^i_k \\ S^i - Dv^i \\ -\eta^{ikl} E_l \\ \eta^{ikl} H_l \\ j_f^i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0_k \\ 0 \\ 0^k \\ -j_f^k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (180)$$

siendo

$$D = \rho W, \quad (181)$$

$$S^i = \rho h W^2 v^i + \eta^{ilm} E_l B_m - \frac{1}{2} \eta^{ikl} (E_k M_l + B_k P_l) \quad (182)$$

$$\tau = \rho h W^2 - p + \frac{1}{2} (E^2 + B^2) + E_k P^k - D, \quad (183)$$

$$\begin{aligned} W^i_k = & \rho h W^2 v^i v_k + \left[p + \frac{1}{2} (E^2 + B^2) - B^l M_l \right] \delta^i_k - E^i E_k \\ & - B^i B_k + \frac{1}{2} (B^i M_k + M^i B_k) - \frac{1}{2} (P^i E_k + E^i P_k), \end{aligned} \quad (184)$$

en donde se ha tenido en cuenta que el determinante del tensor métrico está dado por $g = -1$. En este trabajo sólo se considerarán materiales lineales, homogéneos e isotrópos, por esta razón, los vectores de polarización eléctrica y magnética cumplirán respectivamente una relación constitutiva lineal con los vectores de desplazamiento eléctrico e intensidad magnética. Esta relación está dada explícitamente por

$$P^i = \chi_e E^i, \quad M^i = \chi_m H^i, \quad (185)$$

en donde χ_e y χ_m son respectivamente las susceptibilidades eléctrica y magnética del medio material. Teniendo en cuenta las expresiones (185), los vectores de desplazamiento eléctrico e intensidad magnética en términos de los campos electromagnéticos del sistema pueden ser reescritos

como

$$\mathcal{D}^i = (1 + \chi_e) E^i = \varepsilon E^i, \quad H^i = \frac{B^i}{1 + \chi_m} = \frac{B^i}{\mu}, \quad (186)$$

donde ε y μ corresponden a la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética del medio material. A partir de la expresión anterior, se puede mostrar que la relación entre el campo magnético y el vector de polarización magnética satisface

$$M^i = \chi B^i = \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} B^i. \quad (187)$$

La relación anterior permite describir materiales lineales polarizables magnéticamente como los materiales diamagnéticos y paramagnéticos, en los cuales χ_m será negativa para materiales diamagnéticos ($\chi_m < 0$) y positiva para materiales paramagnéticos ($\chi_m > 0$). Empleando las ecuaciones (185) y (187), la variable τ , la densidad de momentum y el tensor de esfuerzos para un fluido conductor polarizado electromagnéticamente están dadas por

$$S^i = \rho h W^2 v^i + \left(1 + \frac{\chi_{em}}{2}\right) \eta^{ikl} E_k B_l, \quad (188)$$

$$\tau = \rho h W^2 - p + \frac{1}{2} (E^2 + B^2) + \chi_e E^2 - D, \quad (189)$$

$$W^i_k = \rho h W^2 v^i v_k + \left[p + \frac{1}{2} (E^2 + B^2) - \chi B^2 \right] \delta^i_k - B^i B_k (1 - \chi) - E^i E_k (1 + \chi_e), \quad (190)$$

en donde se tuvo en cuenta que $\chi_{em} = \chi_e - \chi$. A partir de las expresiones anteriores, puede mostrarse que las variables D , S_k , τ y sus respectivos flujos dados en la ecuación (180) coinciden con las expresiones mostradas en Ripperda et al. (2019) para el caso en que las susceptibilidades magnética y eléctrica son nulas, es decir, que $\chi_m = \chi_e = 0$. Estas ecuaciones también son totalmente equivalentes a las presentadas en Pimentel et al. (2018a) cuando $\chi_e = 0$ y para el caso en el que se considera magnetohidrodinámica en el límite ideal, es decir, que el campo eléctrico satisface $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (ecuación (98)).

Por último, la generalización de la ley de Ohm presentada en la ecuación (176) para el caso de Relatividad Especial estará dada por

$$\mathbf{j}_f = \rho_q \mathbf{v} + \frac{W}{\eta} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}], \quad (191)$$

la cual corresponde a la presentada en Miranda-Aranguren (2018). De esta expresión se puede apreciar que en el límite de la Magnetohidrodinámica ideal $\eta \rightarrow 0$ (conductor perfecto) se recupera la condición $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, esto se debe a que el campo eléctrico no tiene ninguna componente a lo largo de la dirección de movimiento ya que $e^0 = 0$ (Palenzuela et al., 2009). Por otra parte, en el límite resistivo $\eta \rightarrow \infty$ se tiene que $\mathbf{j}_f = \rho_q \mathbf{v}$, por lo cual se cumple la ecuación de continuidad para la densidad de carga (Mignone et al., 2019).

2. Métodos Numéricos

Las ecuaciones de la RRMHD con magnetización forman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales y acopladas, lo cual hace casi imposible encontrar una solución analítica a este problema. Por tal razón, surge la necesidad de resolver dichas ecuaciones mediante métodos numéricos que permitan llegar a una solución aproximada. Ciertos métodos numéricos como el de diferencias finitas son ineficientes a la hora de solucionar dichas ecuaciones, esto se debe a que el sistema de ecuaciones presenta discontinuidades independientemente del dato inicial implementado. Por tal razón, para resolver dicho sistema de ecuaciones se hará uso del código *CAFE*, el cual se basa en los métodos de alta resolución para la captura de choques (High Resolution Shock Capturing Methods HRSC).

En este capítulo se explican brevemente los elementos que conforman el código *CAFE*, así como los métodos numéricos que tuvieron que ser modificados con el fin de implementar los términos resistivos al sistema de ecuaciones de la RMHD con polarización magnética. Por último, se muestran las pruebas numéricas de tubos de choque que permiten validar el código *CAFE* resistivo en el límite ideal ($\sigma \rightarrow \infty$) y se muestra una primera aproximación de estas pruebas para un fluido no ideal polarizado magnéticamente.

2.1. Código *CAFE*

El código *CAFE* (Code for the study of Astrophysical Fluids and Energetic events) es un código numérico especializado en resolver las ecuaciones tridimensionales de la RMHD ideal

acopladas con las ecuaciones de campo de Einstein. Este código se ha usado para estudiar diferentes escenarios astrofísicos relacionados con la generación y liberación de grandes cantidades de energía. En la primera versión de *CAFE* (versión netamente hidrodinámica) se estudiaron las oscilaciones del cono de choque formado en el proceso de acreción de un gas ideal supersónico en un agujero negro. Para este problema se consideraron dos tipos de agujeros negros, un agujero negro de Schwarzschild (Lora-Clavijo and Guzmán, 2013) y un agujero negro rotante descrito mediante las coordenadas de Kerr-Schwarzschild y Boyer-Lindquist (Cruz-Osorio et al., 2012). En la segunda versión de *CAFE* se adicionaron al código las ecuaciones de campo de Einstein, lo cual permitió estudiar el crecimiento del horizonte de eventos de un agujero negro en el proceso de acreción de fluidos de radiación (Lora-Clavijo et al., 2013b) y de materia oscura colisionante (Lora-Clavijo et al., 2014). En ambos casos se consideró un fluido perfecto que obedecía la ecuación de estado de un gas ideal. Posteriormente se acoplaron las ecuaciones de Maxwell al código *CAFE* (Lora-Clavijo et al., 2015), esto permitió estudiar un fluido conductor que se mueve a velocidades relativistas bajo el formalismo de la RMHD ideal. Debido a que la polarización magnética del material podría ser relevante en algunos sistemas astrofísicos como discos de acreción o pulsares, Pimentel et al. (018a) añadieron al código *CAFE* los términos de polarización magnética que permiten describir materiales diamagnéticos y paramagnéticos. Esto permitió estudiar el impacto que tiene el carácter magnético del fluido en la acreción de Toros en agujeros negros de Kerr (Pimentel et al., 018b) y la amplificación del campo magnético en inestabilidades como la de Kelvin-Helmholtz (Pimentel and Lora-Clavijo, 2019). En este capítulo se muestra el proceso mediante el cual se agregaron los términos resistivos al código *CAFE*, con el fin de estudiar

el mecanismo de Reconexión Magnética generado por una Corriente Laminar. A continuación se explican brevemente los métodos numéricos implementados en *CAFE*.

El código *CAFE* resuelve el sistema de ecuaciones de la RMHD mediante el *método de líneas*, el cual consiste en discretizar las derivadas espaciales para convertir el sistema de ecuaciones diferenciales parciales en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en cada punto de la malla numérica. Posteriormente, el sistema resultante se evoluciona en el tiempo mediante un determinado integrador numérico (Saucez et al., 2001). Particularmente *CAFE* realiza la discretización espacial mediante el método de *volúmenes finitos* y emplea un Runge-Kutta como integrador temporal.

La finalidad del método de volúmenes finitos es resolver un sistema tipo conservación de la forma

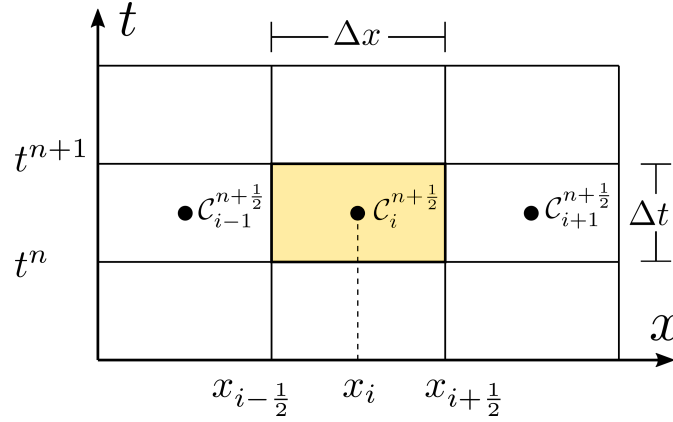
$$\partial_t \mathbf{q} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{q}) + \partial_y \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \partial_z \mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{s}(\mathbf{q}), \quad (192)$$

en donde $\mathbf{q}$ es un vector de variables conservativas, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ y $\mathbf{h}$ son los flujos a lo largo de cada una de las direcciones espaciales y $\mathbf{s}$ es un vector de fuentes. El método consiste en integrar la ecuación (192) en un volumen de control espacio-temporal $V = \Delta t \Delta x \Delta y \Delta z$, este volumen pertenece a una malla donde el tiempo y el espacio se discretizan como $t^n = n\Delta t$, $x_i = i\Delta x$, $y_j = j\Delta y$ y $z_k = k\Delta z$ (siendo n , i , j y k números enteros). El dominio del volumen V a lo largo de cada una de las coordenadas está dado en los intervalos $[t^n, t^{n+1}]$, $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, $[y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ y $[z_{k-1/2}, z_{k+1/2}]$.

El volumen de control V puede apreciarse gráficamente en la figura (5) para el caso de una sola dimensión espacial.

Figura 5.

Volumen de control en el método de volúmenes finitos.



Nota. Discretización espacial de la malla numérica mediante el método de volúmenes finitos. Aquí se muestra el volumen de control espacio-temporal $V = \Delta t \Delta x$ correspondiente a una sola dimensión espacial.

Del proceso de integración sobre el volumen de control V se obtiene que

$$\begin{aligned} Q_{i,j,k}^{n+1} = & Q_{i,j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{j+1/2}^{n+1/2} - F_{j-1/2}^{n+1/2} \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[G_{k+1/2}^{n+1/2} - G_{k-1/2}^{n+1/2} \right] \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[H_{i+1/2}^{n+1/2} - H_{i-1/2}^{n+1/2} \right] + S_{i,j,k}^{n+1/2} \Delta t, \end{aligned} \quad (193)$$

en donde $Q_{i,j,k}^n$ es el promedio espacial del vector de variables conservativas, $F_{i\pm 1/2}^{n+1/2}$, $G_{j\pm 1/2}^{n+1/2}$ y $H_{k\pm 1/2}^{n+1/2}$ son los promedios espacio-temporales de los flujos a lo largo de cada una de las direcciones espaciales y S_i^n es el promedio espacio-temporal del vector de fuentes. Cada uno de estos

promedios están dados explícitamente por

$$\mathbf{Q}_{i,j,k}^n = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \mathbf{q}(t^n, x, y, z) dx dy dz, \quad (194)$$

$$\mathbf{F}_{i\pm 1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t \Delta y \Delta z} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \mathbf{f}[\mathbf{q}(t, x_{i\pm 1/2}, y, z)] dt dy dz, \quad (195)$$

$$\mathbf{G}_{j\pm 1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t \Delta x \Delta z} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \mathbf{g}[\mathbf{q}(t, x, y_{j\pm 1/2}, z)] dt dx dz, \quad (196)$$

$$\mathbf{H}_{k\pm 1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t \Delta x \Delta y} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{h}[\mathbf{q}(t, x, y, z_{k\pm 1/2})] dt dx dy, \quad (197)$$

$$\mathbf{S}_{i,j,k}^n = \frac{1}{\Delta t \Delta x \Delta y \Delta z} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \mathbf{s}[\mathbf{q}(t, x, y, z)] dt dx dy dz. \quad (198)$$

Finalmente, la expresión (193) puede ser reescrita usando el método de líneas como (Toro, 2013)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Q}_{i,j,k}}{dt} = & -\frac{\mathbf{F}_{i+1/2,j,k} - \mathbf{F}_{i-1/2,j,k}}{\Delta x} - \frac{\mathbf{G}_{i,j+1/2,k} - \mathbf{G}_{i,j-1/2,k}}{\Delta y} \\ & - \frac{\mathbf{H}_{i,j,k+1/2} - \mathbf{H}_{i,j,k-1/2}}{\Delta z} + \mathbf{S}_{i,j,k}. \end{aligned} \quad (199)$$

El principal inconveniente del método de volúmenes finitos es que los promedios espacio-

temporales de los flujos mostrados en las expresiones (195)-(197) están dados en las interceldas, por dicha razón estos deben calcularse de forma numérica para posteriormente poder emplear el integrador Runge-Kutta. Para lograr este propósito, el código *CAFE* aproxima cada una de las componentes del vector de variables conservativas $\mathbf{q}$ como funciones por pedazos a la izquierda y derecha de las interceldas numéricas, definiendo así un problema de Riemann en cada una de ellas. Existen diversas formas de aproximar dichas funciones, ya sea por medio de constantes, líneas rectas o polinomios. Particularmente el código *CAFE* puede aproximar dichas variables con reconstructores como el Godunov, Minmode, MC (Monotonized Central), MC Beta o Superbee. Posteriormente se emplea el *resolvedor aproximado de Riemann HLLE* para obtener cada uno de los flujos numéricos en las interceldas de la malla.

El método *HLLE* consiste en resolver el problema aproximado de Riemann únicamente mediante el conocimiento de los autovalores de las matrices Jacobianas del sistema de ecuaciones tipo conservación (192). Empleando el convenio de suma de Einstein dicho sistema puede ser reescrito como

$$\partial_t \mathbf{q} + \mathbf{A}^i(\mathbf{q}) \partial_i \mathbf{q} = \mathbf{s}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{A}^i(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}^i}{\partial \mathbf{q}}, \quad (200)$$

en donde $\mathbf{A}^i(\mathbf{q})$ son las matrices Jacobianas a lo largo de cada una de las direcciones espaciales. Teniendo en cuenta lo anterior, la ecuación que describe los flujos numéricos a lo largo de la

dirección x en cada una de las interceldas según el resolutor $HLLE$ está dada por

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j,k}^{HLLE} = \frac{\lambda_x^+ \mathbf{f}(\mathbf{q}_{i+1/2,j,k}^L) - \lambda_x^- \mathbf{f}(\mathbf{q}_{i+1/2,j,k}^R) + \lambda_x^+ \lambda_x^- (\mathbf{q}_{i+1/2,j,k}^R - \mathbf{q}_{i+1/2,j,k}^L)}{\lambda_x^- - \lambda_x^+}, \quad (201)$$

en donde $\mathbf{q}_{i+1/2,j,k}^{L,R}$ son los valores de las variables conservativas definidos a izquierda y derecha de la intercelda, λ_x^+ y λ_x^- son los autovalores máximos y mínimos de la matriz Jacobiana a lo largo de la dirección x , los cuales explícitamente están dados por

$$\lambda_x^+ = \max(0, \lambda_{(i)}^R, \lambda_{(i)}^L), \quad \lambda_x^- = \min(0, \lambda_{(i)}^R, \lambda_{(i)}^L), \quad (202)$$

siendo $\lambda_{(i)}^L$ y $\lambda_{(i)}^R$ los autovalores a lo largo de x a izquierda y derecha respectivamente (Guzmán et al., 2012). La expresión (201) puede ser generalizada para los flujos numéricos a lo largo de las direcciones y y z como

$$\mathbf{G}_{i,j+1/2,k}^{HLLE} = \frac{\lambda_y^+ \mathbf{g}(\mathbf{q}_{i,j+1/2,k}^L) - \lambda_y^- \mathbf{g}(\mathbf{q}_{i,j+1/2,k}^R) + \lambda_y^+ \lambda_y^- (\mathbf{q}_{i,j+1/2,k}^R - \mathbf{q}_{i,j+1/2,k}^L)}{\lambda_y^- - \lambda_y^+}, \quad (203)$$

$$\mathbf{H}_{i,j,k+1/2}^{HLLE} = \frac{\lambda_z^+ \mathbf{h}(\mathbf{q}_{i,j,k+1/2}^L) - \lambda_z^- \mathbf{h}(\mathbf{q}_{i,j,k+1/2}^R) + \lambda_z^+ \lambda_z^- (\mathbf{q}_{i,j,k+1/2}^R - \mathbf{q}_{i,j,k+1/2}^L)}{\lambda_z^- - \lambda_z^+}. \quad (204)$$

Finalmente, los flujos $HLLE$ de las expresiones (201), (203) y (204) serán los empleados en el método de volúmenes finitos de la ecuación (199). La estructura de valores propios característica

de las ecuaciones de la RMHD ideal con polarización magnética implementada en el código *CAFE* se puede encontrar explícitamente en el artículo de Pimentel et al. (018a).

El campo magnético además de satisfacer una ecuación de evolución está sometido a una ecuación de ligadura que debe garantizar a cada paso de tiempo que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Sin embargo, debido a los errores numéricos dicha ligadura se deja de satisfacer y su valor empieza a crecer rápidamente lo cual conduce a resultados sin sentido físico. Por esta razón, se deben emplear estrategias numéricas que garanticen que la ligadura del campo magnético se satisfaga en cada paso de tiempo (Hirschmann et al., 2006). La técnica empleada inicialmente por el código *CAFE* para hacer cumplir la ecuación de ligadura es el método del *transporte de flujo restringido* (Evans and Hawley, 1988), sin embargo, en este trabajo dicha ligadura se garantizará mediante el método de la *limpieza de la divergencia* (Dedner et al., 2002). Este método convierte las ecuaciones de ligadura en ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas mediante la adición de dos campos escalares, esto hace que las ecuaciones de ligadura se puedan incorporar al método de volúmenes finitos y sea fácil su implementación numérica. Este método se explica detalladamente a continuación.

2.2. Limpieza de la Divergencia

El método de limpieza de la divergencia consiste en resolver un sistema de ecuaciones de Maxwell modificado, en el cual se convierten las ecuaciones diferenciales parciales elípticas de Maxwell ($\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho_q$ y $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) en ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas. Esto se realiza agregando, a las ecuaciones de Maxwell covariantes, la divergencia de dos nuevos campos escalares auxiliares o pseudo-potenciales ϕ y ψ , además de adicionar un término difusivo ajustable

por un determinado parámetro κ . Por lo tanto, las ecuaciones de Maxwell en medios materiales bajo este método se escriben como

$$\nabla_\nu (F^{\mu\nu} - \psi g^{\mu\nu}) = J_f^\mu + \nabla_\nu \mathcal{M}^{\mu\nu} - \kappa_\psi \psi n^\mu, \quad (205)$$

$$\nabla_\nu (*F^{\mu\nu} - \phi g^{\mu\nu}) = -\kappa_\phi \phi n^\mu, \quad (206)$$

en donde κ_ψ y κ_ϕ son las constantes de ajuste para los términos de difusión de los campos ϕ y ψ respectivamente (Miranda-Aranguren, 2018). Haciendo uso del tensor de Faraday, su tensor dual, el tensor de polarización y el cuadvivector densidad de corriente libre (122), las expresiones anteriores pueden reescribirse como

$$\begin{aligned} \partial_\nu \left[\sqrt{-g} \left(n^\mu E^\nu - n^\nu E^\mu + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} B_\alpha n_\beta - \psi g^{\mu\nu} \right) \right] &= \sqrt{-g} \left(\rho_q n^\mu + j_f^\mu - \kappa_\psi \psi n^\mu \right) \\ &+ \partial_\nu \left[\sqrt{-g} \left(P^\mu n^\nu - P^\nu n^\mu + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} M_\alpha n_\beta \right) \right], \end{aligned} \quad (207)$$

$$\partial_\nu \left[\sqrt{-g} \left(n^\mu B^\nu - n^\nu B^\mu - \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} E_\alpha n_\beta - \phi g^{\mu\nu} \right) \right] = \sqrt{-g} (-\kappa_\phi \phi n^\mu). \quad (208)$$

La parte temporal de la ecuación (207) se obtiene al hacer $\mu = 0$, lo cual da como resultado

$$\partial_0 \left[\sqrt{\gamma} \left(\frac{\psi}{\alpha} \right) \right] + \partial_i \left[\sqrt{\gamma} \left(\mathcal{D}^i - \frac{\psi}{\alpha} \beta^i \right) \right] = \sqrt{\gamma} (\rho_q - \kappa_\psi \psi). \quad (209)$$

La parte espacial se obtiene al hacer $\mu = i$, de lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_0 \left[\sqrt{\gamma} \left(\mathcal{D}^i + \frac{\psi}{\alpha} \beta^i \right) \right] + \partial_k \left\{ \sqrt{\gamma} \left[\beta^i \mathcal{D}^k - \beta^k \mathcal{D}^i - \alpha^2 \varepsilon^{ikl} H_l + \psi \left(\alpha \gamma^{ik} - \frac{\beta^i \beta^k}{\alpha} \right) \right] \right\} \\ = \sqrt{\gamma} \left[\beta^i (\rho_q - \kappa_\psi \psi) - \alpha j_f^i \right]. \end{aligned} \quad (210)$$

Para el caso de Relatividad Especial, en el que se emplea la métrica de Minkowski, estas dos expresiones se reducen a

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{D} = \rho_q - \kappa_\psi \psi, \quad (211)$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \nabla \psi - \mathbf{j}_f. \quad (212)$$

La parte temporal de la ecuación (208) se obtiene al hacer $\mu = 0$, lo cual da como resultado

$$\partial_0 \left[\sqrt{\gamma} \left(\frac{\phi}{\alpha} \right) \right] + \partial_i \left[\sqrt{\gamma} \left(B^i - \frac{\phi}{\alpha} \beta^i \right) \right] = -\sqrt{\gamma} \kappa_\phi \phi, \quad (213)$$

mientras que su parte espacial se obtiene al hacer $\mu = i$, de lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_0 \left[\sqrt{\gamma} \left(B^i + \phi \frac{\beta^i}{\alpha} \right) \right] + \partial_k \left\{ \sqrt{\gamma} \left[\beta^i B^k - \beta^k B^i + \alpha^2 \varepsilon^{ikl} E_l + \phi \left(\alpha \gamma^{ik} - \frac{\beta^i \beta^k}{\alpha} \right) \right] \right\} \\ = \sqrt{\gamma} \kappa_\phi \phi \beta^i. \end{aligned} \quad (214)$$

Estas dos expresiones en el caso de Relatividad Especial se reducen a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{B} - k_\phi \phi, \quad (215)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} - \nabla \phi. \quad (216)$$

Se puede apreciar de forma directa que cuando se considera el caso trivial en que $\psi = \phi = 0$ las ecuaciones (211), (212), (215) y (216) reducen a las ecuaciones de Maxwell en medios materiales ordinarias. Para entender de una mejor manera porqué la introducción de los campos escalares ψ y ϕ remueven las violaciones de la divergencia del campo magnético se tomará la derivada temporal de las ecuaciones (211) y (215), esto da como resultado

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho_q}{\partial t} - \kappa_\psi \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (217)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \kappa_\phi \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (218)$$

Reemplazando las ecuaciones (212) y (216) en las expresiones anteriores se tiene que estas se transforman en

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \nabla^2 \psi = \frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_f - \kappa_\psi \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (219)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla^2 \phi - \kappa_\phi \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (220)$$

Haciendo uso de la ecuación de continuidad de la carga (127) para el caso de Relatividad Especial, y debido a que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ para cualquier campo vectorial $\mathbf{A}$, se tiene que estas expresiones se reducen a

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \kappa_\psi \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla^2 \psi, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \kappa_\phi \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla^2 \phi. \quad (221)$$

Estas expresiones pueden reescribirse en términos del operador D'Alambertiano $\square = \partial^\mu \partial_\mu$ como

$$\square \psi = \kappa_\psi \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \square \phi = \kappa_\phi \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (222)$$

La ecuación anterior muestra que los campos escalares ψ y ϕ siguen una ecuación de onda amortiguada cuya velocidad de propagación es la velocidad de la luz. Además estos campos se disipan a las tazas κ_ψ y κ_ϕ (siendo κ_ψ y κ_ϕ mayores que cero). Esto significa que los campos ψ y ϕ tenderán a cero a medida que el tiempo avance, recuperando así las ecuaciones de Maxwell en medios materiales originales y expulsando los errores numéricos fuera del dominio en consideración (Penner, 2011).

Debido a que este método aumenta el sistema de ecuaciones tipo conservación, se tiene que los vectores de variables conservativas $\mathbf{U}$, vector de flujos $\mathbf{F}^i$ y vector de fuentes $\mathbf{S}$ de la ecuación

ecuación (179) deben ser modificados. Teniendo en cuenta las ecuaciones de Maxwell en medios materiales aumentadas y la expresión (186), estos vectores se transforman en

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} D \\ S_k \\ \tau \\ B^k \\ E^k \\ \phi \\ \psi \\ \rho_q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^i = \begin{bmatrix} Dv^i \\ W_k^i \\ S^i - Dv^i \\ -\eta^{ikl} E_l + \phi \delta^{ik} \\ \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\mu} \eta^{ikl} B_l + \psi \delta^{ik} \right) \\ B^i \\ \varepsilon E^i \\ j_f^i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0_k \\ 0 \\ 0^k \\ -\frac{1}{\varepsilon} j_f^k \\ -\kappa_\phi \phi \\ \rho_q - \kappa_\psi \psi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (223)$$

en donde S^i , τ y W_k^i son los dados en las ecuaciones (188)-(190) y j_f^i es el vector dado en la ecuación (191).

2.3. Recuperación de las variables primitivas

Gracias a los métodos numéricos implementados en el código *CAFE*, únicamente se evolucionan las variables conservativas $\mathbf{U}$, sin embargo, los flujos del sistema de ecuaciones también están en términos de las variables primitivas $\mathcal{W} = [\rho, v^i, p]^T$. Por esta razón es necesario obtener las variables $\mathcal{W}$ en cada paso de tiempo para el cálculo de los flujos en las interceldas de la malla numérica. Debido a que no es posible encontrar las variables primitivas en términos de las varia-

bles conservativas $\mathcal{W}(\mathbf{U})$ ya que se obtiene una ecuación trascendente, es necesario encontrar las variables primitivas en cada paso de tiempo de forma numérica. Para dicho propósito, las ecuaciones (188) y (189) se reducen a una sola ecuación en términos de una nueva variable Z , cuyas raíces se encontrarán mediante un algoritmo numérico que combina los métodos de Newton-Rhapson y Bisección. Debido a que en este trabajo se considera un fluido no ideal, es necesario modificar las ecuaciones mostradas en Pimentel et al. (018a). A continuación se describe explícitamente el proceso de obtención de la nueva ecuación a resolver.

Definiendo una nueva variable $Z \equiv \rho h W^2$, se tiene que la densidad de momentum dada en la expresión (188) puede reescribirse en términos de Z como

$$S^i = Z v^i + \left(1 + \frac{\chi_{em}}{2}\right) \eta^{ikl} E_k B_l. \quad (224)$$

A partir de la expresión anterior, se tiene que las componentes de la velocidad del fluido están dadas por

$$v^i = \frac{S^i - \left(1 + \frac{\chi_{em}}{2}\right) \eta^{ikl} E_k B_l}{Z}. \quad (225)$$

Con el fin de obtener de manera explícita el factor de Lorentz W en términos de las variables conservativas, se calcula el cuadrado de la norma de la velocidad $v^2 = v^i v_i$. Esto da como resultado (ver el apéndice (6) para su derivación)

$$v^2 = \frac{S^2 - (2 + \chi_{em}) \eta^{ikl} S_i E_k B_l + \left(1 + \frac{\chi_{em}}{2}\right)^2 [E^2 B^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2]}{Z^2}. \quad (226)$$

A partir de la ecuación (25) se puede apreciar que el cuadrado de la norma de la velocidad cumple que $v^2 = 1 - W^{-2}$. Por tal razón el factor de Lorentz en términos de las variables conservativas y la variable Z está dado por

$$W(Z) = \left\{ 1 - \frac{S^2 - (2 + \chi_{em}) \eta^{ikl} S_i E_k B_l + \left(1 + \frac{\chi_{em}}{2}\right)^2 [E^2 B^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2]}{Z^2} \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (227)$$

donde

$$\eta^{ikl} S_i E_k B_l = S_x (E_y B_z - E_z B_y) + S_y (E_z B_x - E_x B_z) + S_z (E_x B_y - E_y B_x). \quad (228)$$

Ahora, la variable conservativa τ dada en la expresión (189) puede ser reescrita en términos de Z como

$$\tau = Z - p - D + \frac{1}{2} (E^2 + B^2) + \chi_e E^2. \quad (229)$$

Teniendo en cuenta las expresiones para la entalpía del fluido (138) y la ecuación de estado del gas ideal (139), la presión puede ser reescrita en términos de la variable Z como

$$p(Z) = \left(\frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \right) \left[\frac{Z - DW(Z)}{W(Z)^2} \right]. \quad (230)$$

Por lo tanto, se ha convertido el sistema de ecuaciones (181), (188) y (189) en una ecuación no lineal para la variable Z . Dicha ecuación corresponde a la ecuación (229), en donde p y W están dadas en las ecuaciones (227) y (230). El código *CAFE* resuelve esta ecuación mediante la combinación del método de Newton-Raphson y el de Bisección, encontrando así las raíces de la

función

$$f(Z) = Z - p(Z) - D - \tau + \frac{1}{2} (E^2 + B^2) + \chi_e E^2 = 0. \quad (231)$$

Si en la ecuación anterior se considera el caso ideal en que el campo eléctrico está dado por $E^i = -\eta^{ikl} v_k B_l$, además de considerar susceptibilidad eléctrica nula $\chi_e = 0$, la función $f(Z)$ se reduce a la presentada en el artículo de Pimentel et al. (018a).

Debido a que el método de Newton-Raphson involucra la primera derivada de la función a la que se desea calcular sus raíces, es necesario encontrar la primera derivada de $f(Z)$ respecto a la variable Z , la cual está dada por

$$\frac{df(Z)}{dZ} = 1 - \frac{dp(Z)}{dZ}. \quad (232)$$

La derivada de la presión $p(Z)$ respecto a la variable Z se calcula a partir de la ecuación (230), la cual está dada explícitamente por

$$\frac{dp(Z)}{dZ} = \left(\frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \right) \frac{1}{W(Z)^3} \left[W(Z) \left(1 + D \frac{dW(Z)}{dZ} \right) - 2Z \frac{dW(Z)}{dZ} \right], \quad (233)$$

en donde la derivada del factor de Lorentz $W(Z)$ respecto a la variable Z está dada explícitamente

por (ver el apéndice (7) para su derivación)

$$\frac{dW(Z)}{dZ} = \left[\frac{W(Z)}{Z} \right]^3 \left\{ (2 + \chi_{em}) \eta^{ikl} S_i E_k B_l - S^2 - \left(1 + \frac{\chi_{em}}{2} \right)^2 \left[E^2 B^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right] \right\}. \quad (234)$$

Una vez hallada Z , se recupera el factor de Lorentz de (227), la presión terminodinámica de (230) y la densidad de masa mediante $\rho = D/W(Z)$.

2.4. Pruebas numéricas

En esta parte del trabajo, para validar el código *CAFE* con términos resistivos, se verificará el comportamiento de la solución en el límite ideal. Para este propósito se realizaron una serie de experimentos numéricos en una sola dimensión espacial conocidos como *pruebas de tubos de choque*. Los tubos de choque son un tipo especial de problema de Riemann, los cuales consisten físicamente en un tubo lleno de un determinado fluido dividido en dos secciones por una membrana removible en la posición $x = x_0$. El fluido se caracteriza por tener en su configuración inicial valores diferentes de sus variables primitivas a izquierda y derecha de la membrana, siendo cada uno de estos valores constantes. En un tiempo posterior se remueve la membrana del tubo permitiendo que el fluido se mueva de la sección de mayor presión a la de menor presión, logrando que la discontinuidad decaiga en dos ondas no lineales que se propagan en direcciones opuestas (Lora-Clavijo et al., 2013a).

La configuración del tubo de choque que se considera en esta sección es el presentado en el artículo de Dionysopoulou et al. (2013), aquí se considera que la membrana está situada en la

posición $x = 0.5$ perteneciente al dominio numérico $x \in [0, 1]$ y que los valores de las variables de estado a derecha e izquierda de la discontinuidad están dados por

$$\begin{aligned} \rho^L &= 1.0, & \rho^R &= 0.125, \\ p^L &= 1.0, & p^R &= 0.1, \\ B_y^L &= 0.5, & B_y^R &= -0.5, \end{aligned} \tag{235}$$

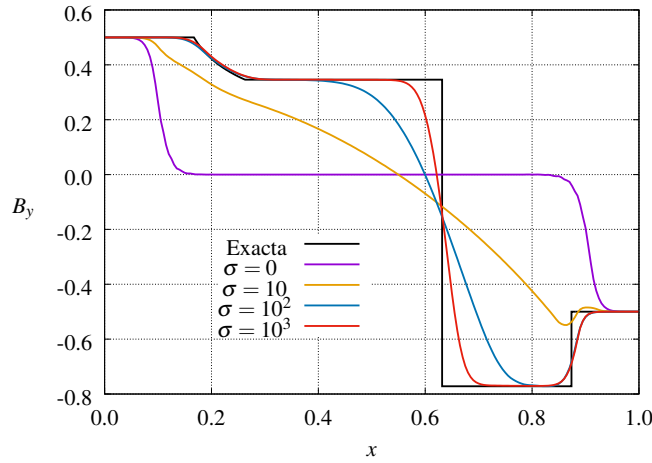
en donde los índices R y L denotan las variables a derecha e izquierda respectivamente. Todas las variables restantes del fluido se consideran inicialmente iguales a cero en las dos regiones del tubo de choque. La evolución de la configuración anterior en el caso de MHD ideal genera dos ondas rápidas, una onda de rarefacción que se propaga a la izquierda de la membrana y una onda de choque que se propaga en dirección opuesta. Además de lo anterior, en todas las simulaciones realizadas se consideró un índice adiabático de $\Gamma = 2$, susceptibilidad magnética de valor constante e igual en las dos secciones del tubo de choque y susceptibilidad eléctrica nula $\chi_e = 0.0$. Se empleó el reconstructor Minmode para aproximar las variables a derecha e izquierda y se evolucionó temporalmente el sistema de ecuaciones mediante un Runge-Kutta de cuarto orden. A continuación se muestran los resultados obtenidos en cada una de las simulaciones realizadas.

2.4.1. Tubo de choque resistivo sin polarización magnética. Como primera parte de la prueba se considera una susceptibilidad magnética nula $\chi_m = 0$ en todo el dominio numérico, donde se empleó una resolución espacial de $\Delta x = 1/200$ y un factor de Courant de 0.25. El resultado de esta simulación se presenta en la figura (6), la cual muestra las soluciones de la componente

B_y del campo magnético para los valores de conductividad eléctrica de $\sigma = 0, 10, 10^2$ y 10^3 en el tiempo $t = 0.4$, además de mostrar la solución exacta correspondiente al caso de MHD ideal. En esta gráfica se puede apreciar que la solución resistiva tiende suavemente a la solución exacta cuando la conductividad eléctrica aumenta, esto se debe a que la condición de MHD en el límite ideal se cumple cuando $\sigma \rightarrow \infty$.

Figura 6.

Componente B_y del campo magnético para diferentes conductividades eléctricas.



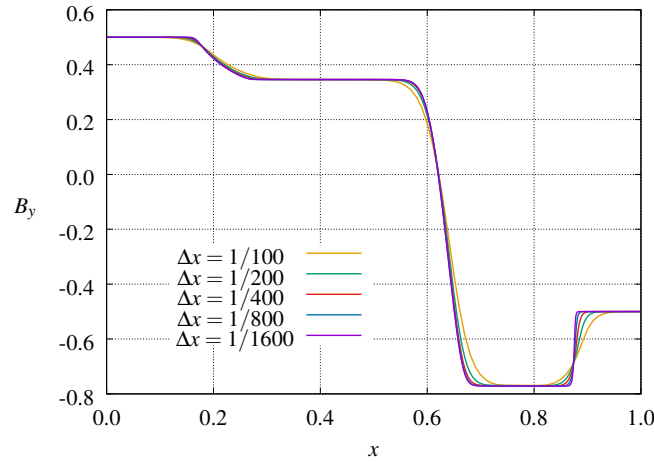
Nota. Componente B_y del campo magnético para las conductividades eléctricas $\sigma = \{0, 10, 10^2, 10^3\}$ y su solución exacta en el tiempo $t = 0.4$.

Como segunda parte de la prueba se empleó una conductividad eléctrica fija de $\sigma = 10^3$, una susceptibilidad magnética nula $\chi_m = 0$ para todo el dominio numérico y un factor de Courant de 0.25. El resultado de la simulación se presenta en la figura (7), la cual muestra el perfil de la componente B_y del campo magnético para las resoluciones espaciales $\Delta x = 1/100, 1/200, 1/400, 1/800$ y $1/1600$ para el tiempo $t = 0.4$. Mediante esta simulación se puede apreciar que incluso

en presencia de choques, la solución de las ecuaciones de la RMHD resistiva también tiende a la solución de la RMHD en el límite ideal a medida que la resolución espacial aumenta.

Figura 7.

Componente B_y del campo magnético para diferentes resoluciones espaciales.



Nota. Componente B_y del campo magnético para las resoluciones espaciales $\Delta x = \{1/100, 1/200, 1/400, 1/800, 1/1600\}$ en el tiempo $t = 0.4$.

Debido a que las simulaciones mostradas en esta sección concuerdan con las presentadas en los artículos de Palenzuela et al. (2009) y Dionysopoulou et al. (2013) se puede apreciar que la implementación de los términos resistivos en el código *CAFE* fue un éxito. Esto permite validar el código numérico en el régimen no ideal.

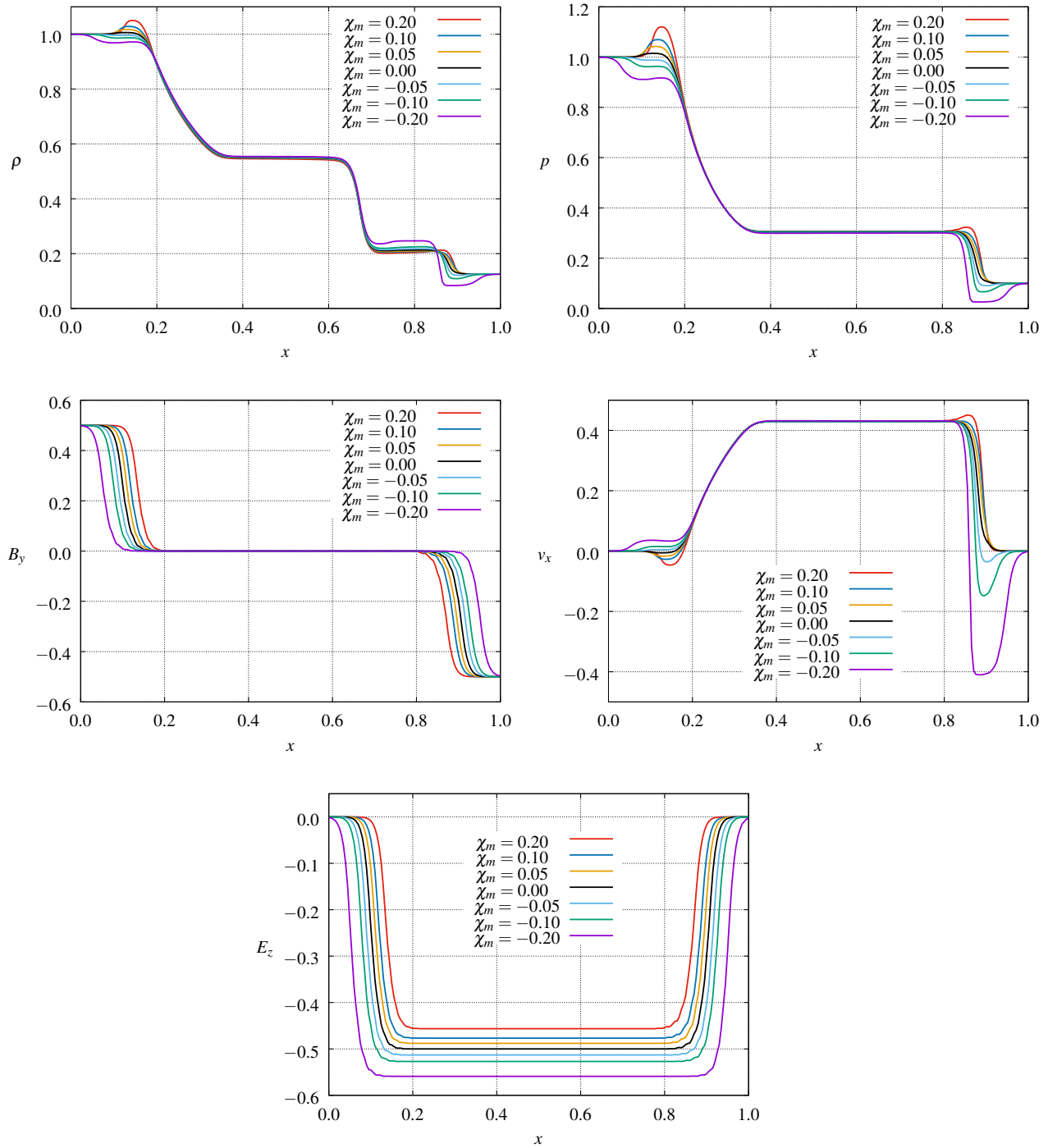
2.4.2. Tubo de choque resistivo con polarización magnética. Para la segunda prueba numérica se empleó un factor de Courant de 0.25 en cada una de las simulaciones mostradas. Aquí se consideraron varios valores de susceptibilidad magnética para evidenciar el comportamiento de materiales diamagnéticos y paramagnéticos en presencia de diferentes valores de con-

ductividad eléctrica. Las simulaciones se realizaron con una resolución espacial fija de $\Delta x = 1/400$ para un plasma cuya conductividad eléctrica tenía los valores de $\sigma = 0, 10, 10^2$ y 10^3 considerando los valores de susceptibilidad magnética $\chi_m = \pm 0.20, \pm 0.10, \pm 0.05$ y 0.00 . Las soluciones numéricas obtenidas bajo estos parámetros para el tiempo $t = 0.4$ pueden apreciarse en las gráficas (8)-(11).

En la gráfica (8) se puede apreciar que para el caso en que la conductividad eléctrica es nula se presenta una onda de contacto aproximadamente en $x = 0.7$, la cual se propaga a la misma velocidad independientemente de la susceptibilidad magnética del material, aquí también se puede observar que a medida que la conductividad eléctrica crece dicha onda desaparece. En las gráficas (9)-(11) se puede apreciar que para los casos en que la conductividad eléctrica tiene un valor pequeño y diferente de cero no se presentan estados constantes en ninguna de las variables de estado del fluido, esto presenta un primer impedimento para concluir el tipo de ondas que se generan en el tubo de choque bajo el formalismo de la RMHD no ideal. Sin embargo, a medida que la conductividad eléctrica crece se presentan choques más definidos y constantes, esto permite observar la generación de una onda de choque y una onda de rarefacción en el lado derecho e izquierdo del dominio respectivamente, también se puede apreciar la influencia que tiene el carácter magnético del material en las variables de estado del fluido para cada una de las ondas. En la onda de rarefacción se puede evidenciar que variables como la densidad, presión y magnitud del campo magnético presentan un valor menor si la susceptibilidad magnética disminuye, sin embargo, esta onda se propaga más rápido si el fluido es diamagnético. Para el choque del lado derecho se puede

Figura 8.

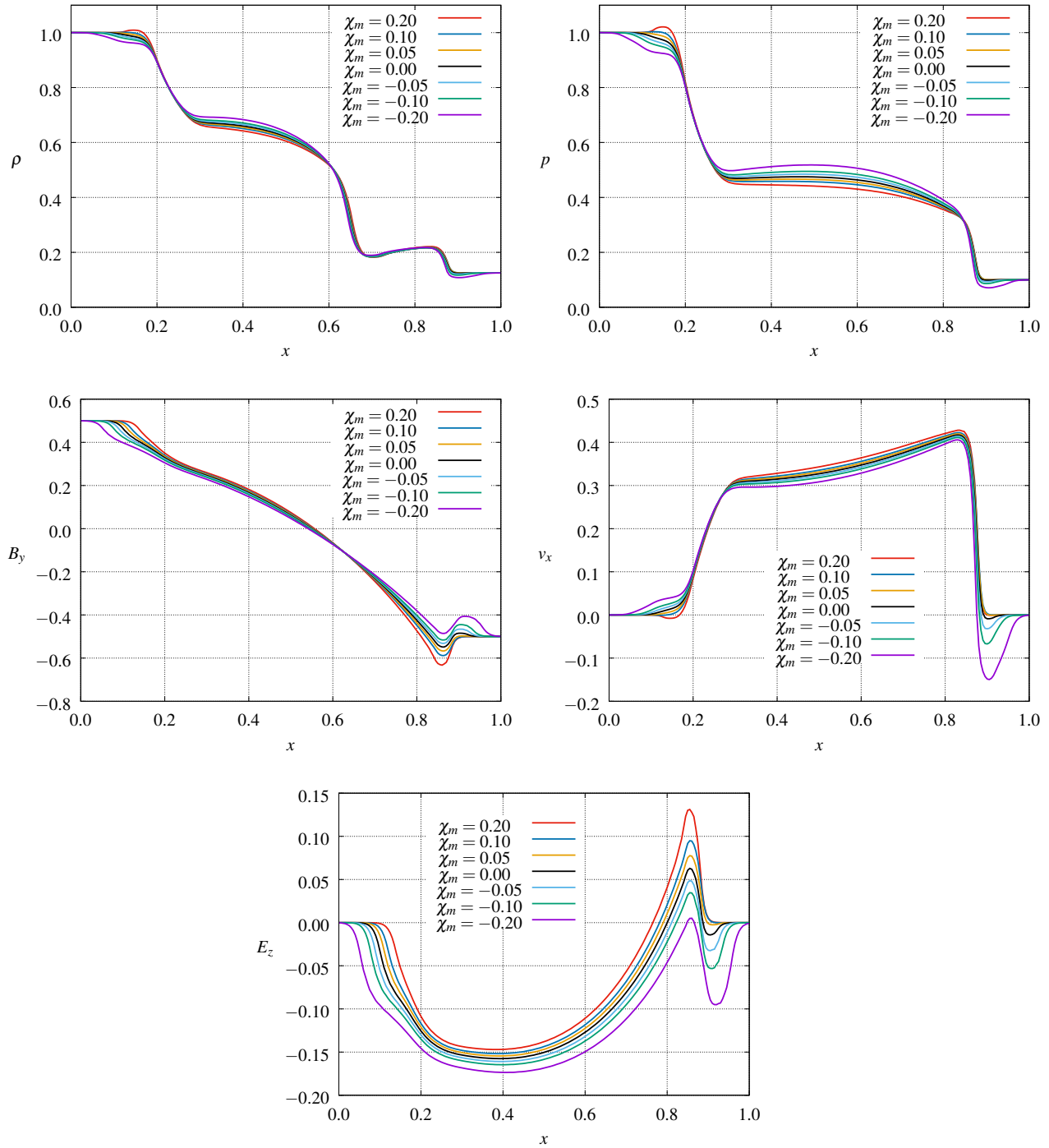
Tubo de choque de $\sigma = 0$ para diferentes susceptibilidades magnéticas.



Nota. Tubo de choque de conductividad $\sigma = 0$ para diferentes valores de susceptibilidad magnética χ_m . Simulaciones realizadas para una resolución espacial de $\Delta x = 1/400$ en un tiempo $t = 0.4$.

Figura 9.

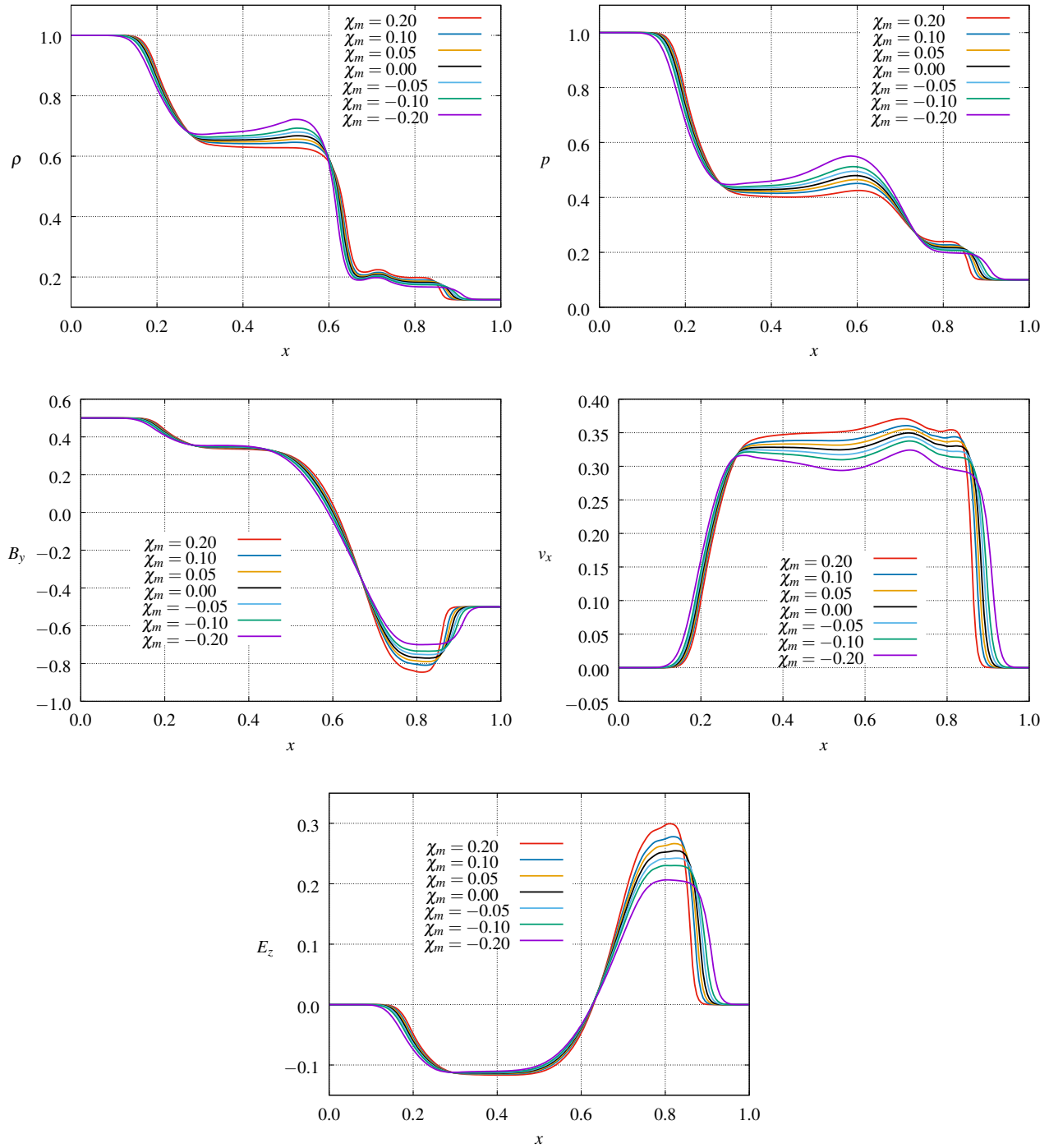
Tubo de choque de $\sigma = 10$ para diferentes susceptibilidades magnéticas.



Nota. Tubo de choque de conductividad $\sigma = 10$ para diferentes valores de susceptibilidad magnética χ_m . Simulaciones realizadas para una resolución espacial de $\Delta x = 1/400$ en un tiempo $t = 0.4$.

Figura 10.

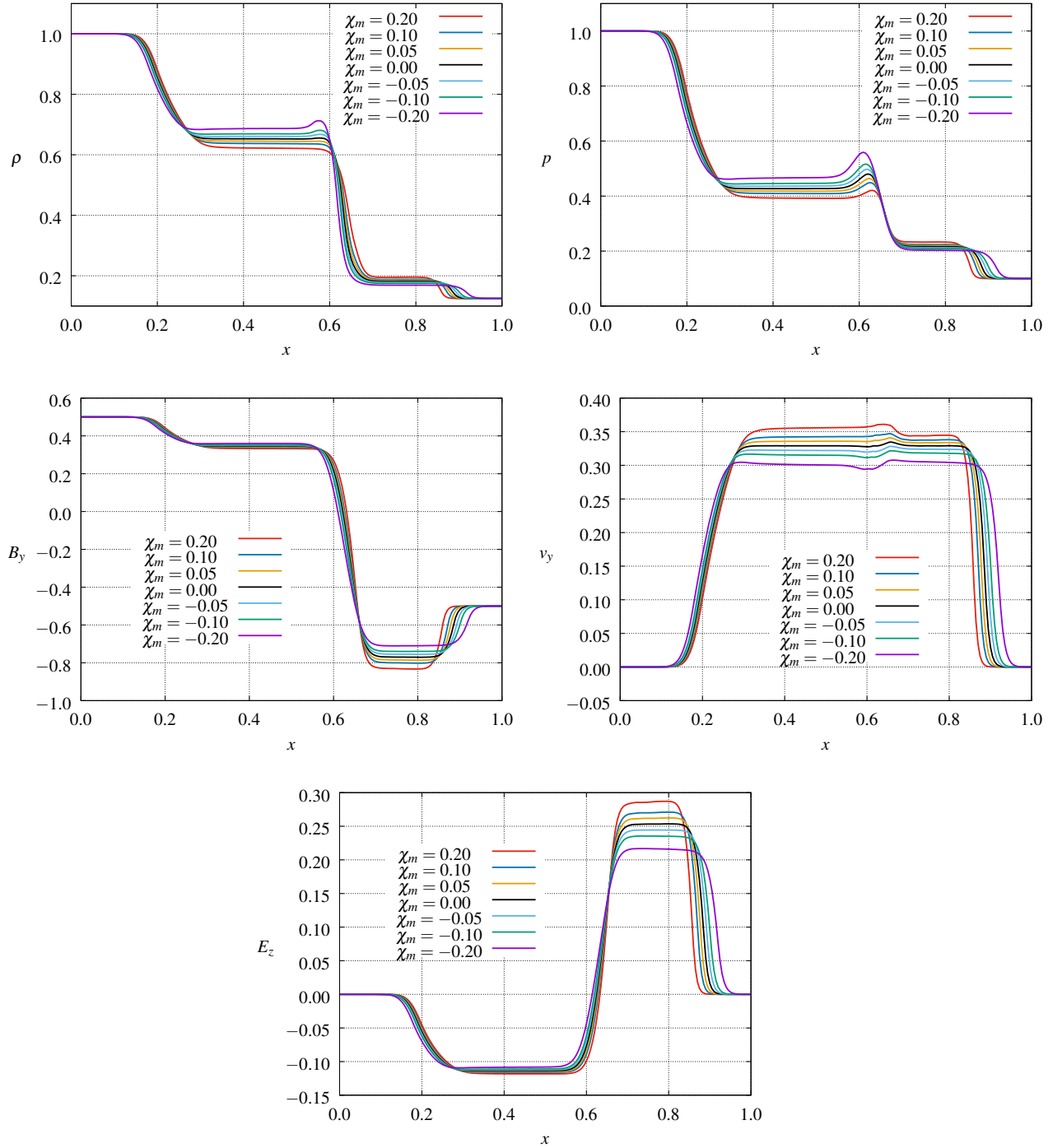
Tubo de choque de $\sigma = 10^2$ para diferentes susceptibilidades magnéticas.



Nota. Tubo de choque de conductividad $\sigma = 10^2$ para diferentes valores de susceptibilidad magnética χ_m . Simulaciones realizadas para una resolución espacial de $\Delta x = 1/400$ en un tiempo $t = 0.4$.

Figura 11.

Tubo de choque de $\sigma = 10^3$ para diferentes susceptibilidades magnéticas.



Nota. Tubo de choque de conductividad $\sigma = 10^3$ para diferentes valores de susceptibilidad magnética χ_m . Simulación realizada para una resolución espacial de $\Delta x = 1/400$ en un tiempo $t = 0.4$.

apreciar que la magnitud del campo magnético disminuye si la susceptibilidad magnética aumenta, sin embargo, la velocidad y densidad del fluido son mayores para fluidos paramagnéticos.

También puede observarse en la gráfica (8), correspondiente al límite resistivo, que los estados constantes en las variables hidrodinámicas tendrán prácticamente el mismo valor independientemente de la susceptibilidad magnética del material, efecto que no sucede en las variables electromagnéticas del fluido. Adicionalmente, se observa que para el caso de $\sigma = 0$ que las ondas rápidas se propagan a la misma velocidad independientemente de χ_m , efecto que desaparece a medida que la conductividad eléctrica aumenta. Finalmente, en las gráficas (8)-(11) se aprecia que entre más pequeño sea el valor de la conductividad eléctrica, el efecto de la susceptibilidad magnética disminuirá únicamente en las variables hidrodinámicas del plasma.

3. Corrientes Laminares y Reconexión Magnética

La reconexión magnética se ha reconocido por ser un fenómeno físico capaz de liberar grandes cantidades de energía en varios escenarios de interés astrofísico. Esto se lleva a cabo mediante la conversión de la energía magnética del sistema en energía cinética y térmica. Diferentes modelos teóricos apuntan a que la generación de una corriente laminar resistiva puede desencadenar el mecanismo de Reconexión. En este capítulo se presenta una breve descripción acerca del mecanismo de formación y las principales características de una corriente laminar, posteriormente se presentan las simulaciones realizadas en el código *CAFE* con el fin de determinar la influencia del carácter magnético del fluido en el proceso de Reconexión.

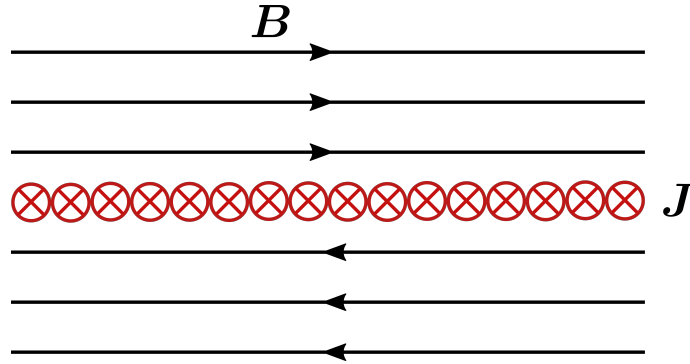
3.1. ¿Qué es una Corriente Laminar?

La mayoría de plasmas astrofísicos pueden tratarse adecuadamente bajo el formalismo de la MHD ideal, donde la disipación Ohmica es despreciable y las líneas de campo magnético son arrastradas por el movimiento del fluido. Sin embargo, existen excepciones donde la resistividad toma un papel fundamental como en regiones donde se presentan intensas concentraciones de corriente y la energía magnética del sistema puede ser disipada (Priest, 1985). Dichas regiones se denominan *corrientes laminares*. Una lámina de corriente o corriente laminar, es una lámina delgada portadora de una densidad de corriente a través de la cual el campo magnético del sistema cambia en dirección, magnitud o ambos. Ya que por definición dicha lámina posee una corriente, esta sólo puede presentarse en medios conductores tales como plasmas (Priest and Forbes, 2000). En otras palabras, la presencia de líneas de campo magnético orientadas en direcciones opuestas

confirma la existencia de una corriente laminar (Somov, 2013). Una representación gráfica de una lámina de corriente puede apreciarse en la figura (12).

Figura 12.

Representación 2D para una corriente laminar.



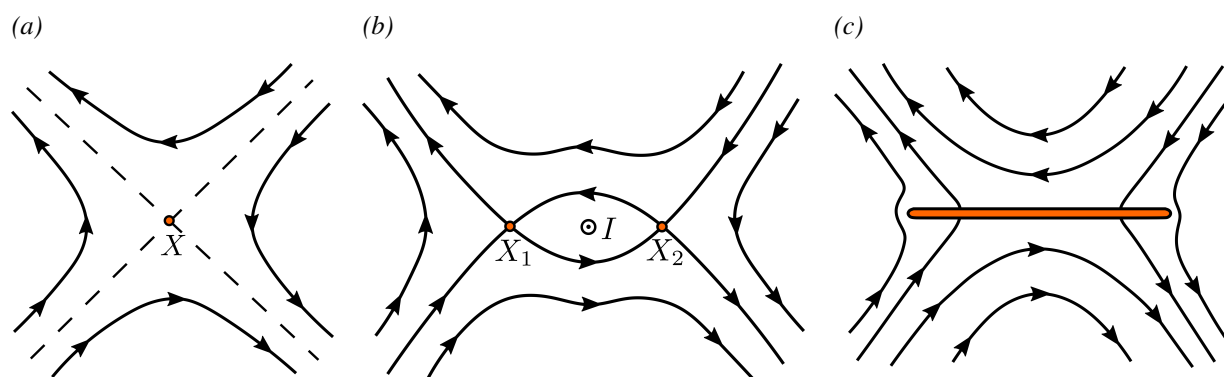
Nota. Representación 2D para una corriente laminar. Aquí se muestra una lámina de corriente perpendicular al plano del gráfico y la dirección de su campo magnético.

Las corrientes laminares se originan en regiones del espacio en las cuales el campo magnético es cero. Dichas regiones se conocen como *puntos nulos* o *puntos X*. Los puntos *X* son de interés porque determinan un gran número de fenómenos astrofísicos. Estos aparecen comunmente en regiones donde interactúan flujos provenientes de más de una fuente de campo magnético y representan su característica topológica más importante, ya que son lugares donde ocurre una redistribución del flujo magnético cambiando la conectividad de las líneas de campo (Somov, 2012). El proceso de formación de una corriente laminar a partir de un punto *X* puede apreciarse gráficamente en la figura (13). Se puede observar que el campo magnético en la vecindad del punto inicialmente tiene una estructura hiperbólica (figura (13a)) y en este punto, aunque el campo magnético es nulo, el campo eléctrico no lo será ($\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$). Esto induce una corriente I a lo largo del

punto X . El campo magnético que se genera debido a la corriente I cambia la topología inicial del campo, esto ocasiona la formación de dos puntos X a la derecha e izquierda del punto inicial como se muestra en la figura (13b) (Biskamp, 2000). Posteriormente, en los puntos X_1 y X_2 se inducirá nuevamente una corriente I debido al campo eléctrico, esto ocasiona la formación de dos nuevos puntos X y un cambio en la topología del campo magnético. El resultado final será la generación de una lámina de corriente como se muestra en la figura (13c).

Figura 13.

Formación de una corriente laminar.



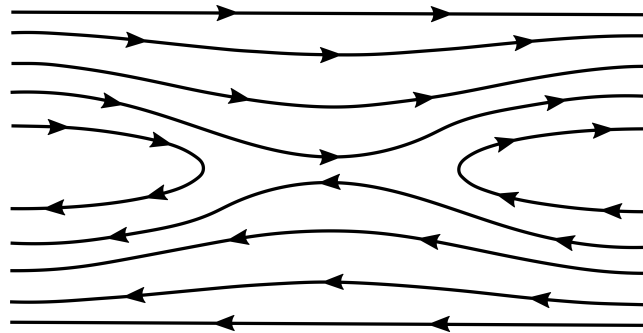
Nota. Proceso de formación para una Corriente Laminar debido a la aparición de un punto X .

La formación de una lámina de corriente cuya resistividad es diferente de cero implica que la energía magnética almacenada a su alrededor será rápidamente disipada y convertida en otras formas de energía, esto se debe a que sin importar qué tan pequeña sea la resistividad se romperá la condición de plasma ideal ocasionando que en dicha región la difusión del campo magnético sea dominante (Chiuderi and Velli, 2015). El mecanismo de difusión ocasiona que las líneas del campo magnético pasen a través de la corriente laminar cambiando su topología inicial,

este fenómeno físico se denomina *Reconexión Magnética* (Birn and Priest, 2007). El principal efecto de la reconexión magnética es convertir la energía magnética del sistema en otras formas de energía, las cuales pueden ser energía en forma de calor (mediante disipación ohmica) o energía cinética por medio de la aceleración de las partículas que conforman el plasma. El fenómeno de reconexión magnética también permite la generación de ondas de choque y turbulencia en el fluido, estos fenomenos están asociados a la generación de fuertes campos eléctricos los cuales pueden acelerar las partículas que conforman el plasma (Priest, 2014). Una representación gráfica de la topología del campo magnético después de la reconexión magnética puede apreciarse en la figura (14).

Figura 14.

Reconexión de las líneas de campo magnético.

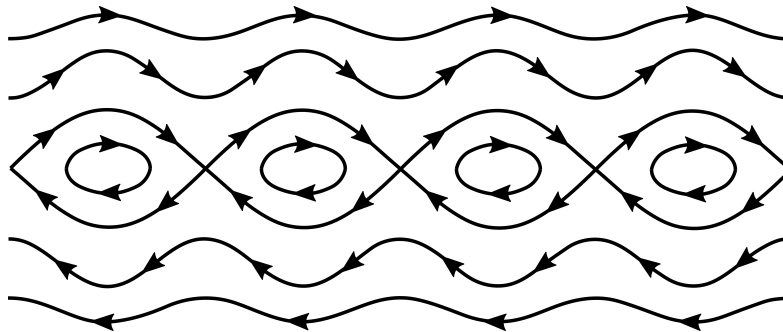


Nota. Representación gráfica de las líneas de campo magnético después del mecanismo de Reconexión.

Si el fenómeno de reconexión magnética sucede en varios puntos de la corriente laminar la topología final del campo magnético se asemejará a la mostrada en la figura (15). Esta configuración final del campo magnético es consecuencia de una inestabilidad magnetohidrodinámica denominada *tearing instability*, la cual se debe al carácter inestable de la corriente laminar. Esta

configuración muestra regiones donde el campo magnético se organiza en circuitos cerrados, los cuales reciben el nombre de *islas magnéticas* o de *plasmoides* para el caso de tres dimensiones espaciales (MacTaggart and Hillier, 2020). La formación de esta inestabilidad puede ser entendida fácilmente pensando en la corriente laminar como una sucesión continua de líneas paralelas que transportan una determinada corriente eléctrica (figura (12)). Debido a que los alambres que transportan corrientes paralelas se atraen este sistema será altamente inestable. Esto genera que una pequeña perturbación en la configuración inicial desplace las corrientes unas hacia otras logrando la formación de grupos de corrientes que dan origen a las islas magnéticas (Kadomtsev, 1987). Se cree que estos plasmoides pueden ser los responsables de diversos fenómenos astrofísicos que se han observado relacionados con la astrofísica de altas energías, esto se debe a que los plasmoides pueden colisionar entre sí liberando grandes cantidades de energía (Takamoto, 2018).

Figura 15.
Tearing instability.



Nota. Generación de islas magnéticas o plasmoides en una lámina de corriente.

Con el fin de obtener una primera aproximación a los efectos que introduce la polarización magnética del fluido en el proceso de Reconexión, en las siguientes secciones se presentan una

serie de pruebas numéricas que se realizaron con ayuda del código *CAFE* resistivo a partir de un dato inicial correspondiente a una corriente laminar perturbada.

3.2. Configuración inicial para la Corriente Laminar

En esta parte del trabajo, la configuración inicial para la Corriente Laminar perturbada que se implementó en el código *CAFE* está basada en los artículos de Komissarov et al. (2007) y Zenitani et al. (2010). El dato inicial corresponde a una Corriente Laminar de Harris ubicada en el plano xz que se propaga a lo largo de la dirección $-z$, es decir, la lámina de corriente es normal al eje y y su plano de simetría se encuentra en $y = 0$. El dominio numérico donde se estudia la prueba es en $[-1.0, 1.0] \times [-1.0, 1.0]$ perteneciente al plano xy . Las variables hidrodinámicas que se consideraron para el plasma están dadas por

$$\rho = p = 1.0, \quad v_x = v_y = v_z = 0.0. \quad (236)$$

Las variables electromagnéticas consideradas para el plasma corresponden a

$$\begin{aligned} B_y = B_z = 0.0, & \quad E_x = E_y = \rho_q = 0.0, \\ B_x = B_0 \tanh\left(\frac{y}{l}\right), & \quad E_z = -\left(\frac{B_0 \eta}{l}\right) \cosh^{-2}\left(\frac{y}{l}\right), \end{aligned} \quad (237)$$

en donde l es el grosor de la corriente laminar y η la resistividad del plasma. En esta configuración

se considera una perturbación en la componente y del campo magnético de la forma

$$\delta B_y = b_0 \sin(\pi x). \quad (238)$$

Y los valores empleados en las constantes de las expresiones anteriores están dados por

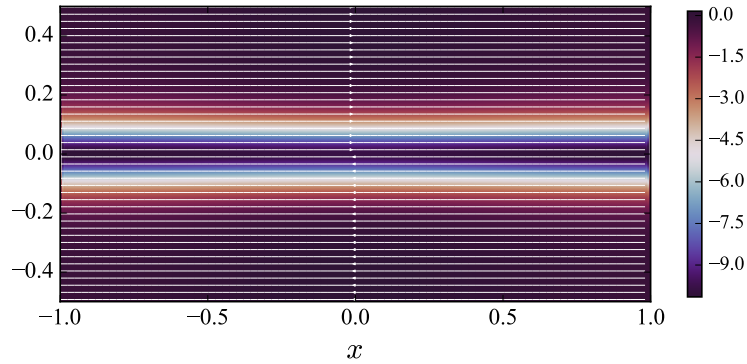
$$\begin{aligned} l &= 0.1, & B_0 &= 1.0, \\ \eta &= 0.001, & b_0 &= 0.05. \end{aligned} \quad (239)$$

Además de lo anterior, se empleó un valor nulo para la susceptibilidad eléctrica $\chi_e = 0.0$ y los campos escalares empleados en el método de Limpieza de la Divergencia se inicializaron como funciones Gaussianas, las cuales están dadas por

$$\phi = \psi = 10^{-8} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{0.04}\right), \quad (240)$$

en donde las constantes de ajuste para los términos difusivos de los campos escalares tienen los valores $\kappa_\phi = \kappa_\psi = 100$. Con el fin de tener un mejor entendimiento de la corriente laminar implementada, en el gráfico (16) se presenta el dato inicial ($t = 0$) de la componente z de la densidad de corriente eléctrica libre en escala de colores, la cual se calcula mediante la ecuación (191). Además de la anterior, en dicha gráfica también se puede apreciar la configuración inicial de las líneas de campo magnético generadas por la corriente laminar.

Figura 16.
Corriente laminar numérica.



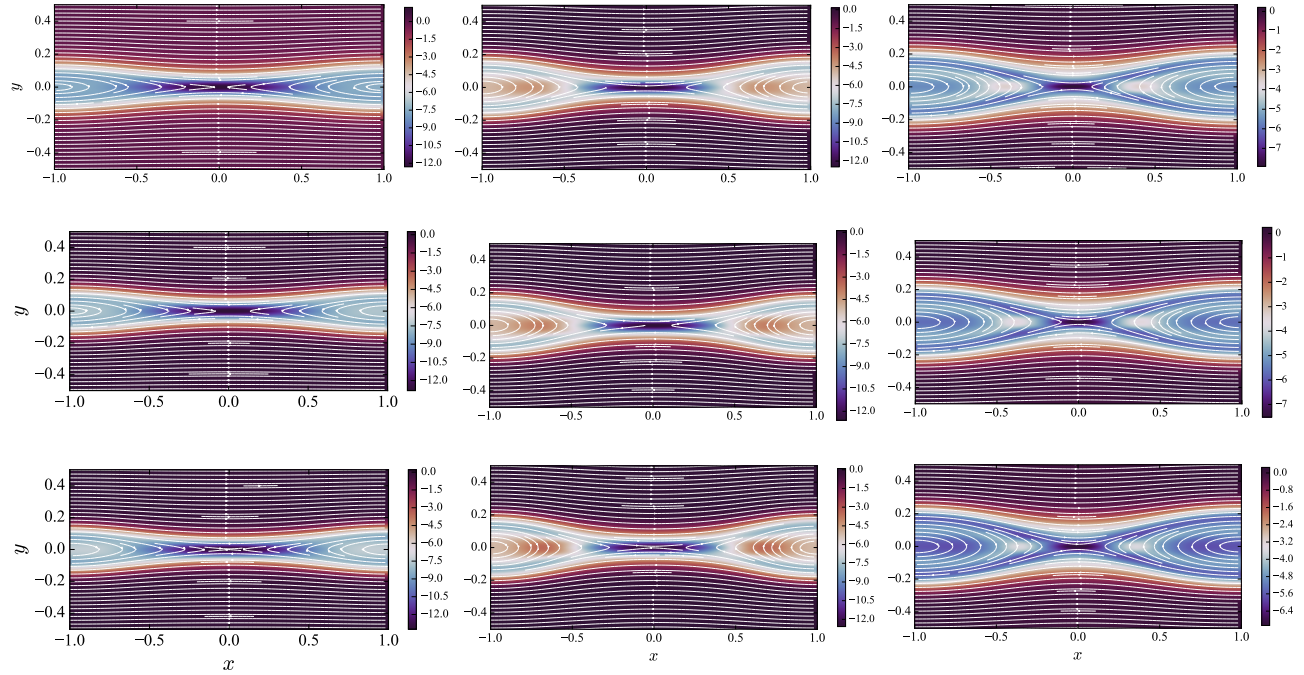
Nota. Configuración inicial para la corriente laminar. Aquí se muestra la componente j_f^z de la densidad de corriente eléctrica (escala de colores) y las líneas de campo magnético generadas por la lámina de corriente.

3.3. Resultados Numéricos

La configuración inicial descrita en la sección anterior para la corriente laminar se evolucionó mediante el sistema de ecuaciones dado en la expresión (223). Aquí se empleó una resolución espacial para el dominio numérico de $\Delta x = \Delta y = 1/512$, índice adiabático de $\Gamma = 4/3$, factor de Courant de 0.2 y se consideró una susceptibilidad magnética de valor constante en todo el dominio numérico. En esta simulación se empleó el reconstructor Minmode para aproximar las variables del plasma a derecha e izquierda de cada una de las interceldas y se evolucionó temporalmente el sistema mediante un Runge-Kutta de segundo orden. Finalmente, las condiciones de frontera empleadas fueron periódicas en $x = \pm 1.0$ y de flujo saliente en $y = \pm 1.0$. Las simulaciones obtenidas para la evolución temporal de la componente j_f^z de la densidad de corriente libre y las líneas de campo magnético correspondientes a la Corriente Laminar pueden observarse en la gráfica (17).

Figura 17.

Componente j_f^z de la densidad de corriente libre para tres tiempos y valores de susceptibilidad magnética diferentes.



Nota. Componente j_f^z de la densidad de corriente libre (escala de colores) para tres tiempos y valores de susceptibilidad magnética diferentes. La fila superior corresponde al caso paramagnético $\chi_m = 0.2$, la fila del medio al caso sin polarización magnética $\chi_m = 0.0$ y la fila inferior al caso diamagnético $\chi_m = -0.2$. La columna izquierda corresponde al tiempo $t = 2$, la columna del medio al tiempo $t = 4$ y la columna derecha al tiempo $t = 8$.

Aquí se muestran los casos en que el fluido presenta carácter paramagnético, diamagnético y cuando no presenta polarización magnética, los cuales corresponden a los valores de susceptibilidad magnética $\chi_m = 0.2$, $\chi_m = -0.2$ y $\chi_m = 0.0$ respectivamente. En la columna izquierda se muestra el tiempo $t = 2$ de la evolución, en donde puede observarse fácilmente que para los

tres valores de susceptibilidad magnética aparece un punto X en la coordenada $(0.0, 0.0)$ del plano xy . Esto ocasiona que se presente el fenómeno de Reconexión debido a la aparición de dos islas magnéticas en la izquierda y derecha del dominio numérico. Además de lo anterior, puede apreciarse que en el centro de la corriente laminar se presenta la región con mayor densidad de corriente eléctrica, donde a pesar de que la diferencia en las magnitudes de j_f^z son muy pequeñas, se tiene una mayor densidad de corriente para el caso diamagnético, seguido del caso sin polarización magnética y por último del caso paramagnético. En la columna central, correspondiente al tiempo $t = 4$, se ve una disminución considerable en la densidad de corriente libre en la región central de los dos plasmoides para los tres casos de susceptibilidad magnética, siendo la región más externa de estos la que presenta el valor máximo. Adicionalmente, se puede observar un crecimiento en el tamaño de los dos plasmoides para los tres fluidos en consideración. Finalmente, en la columna derecha correspondiente al tiempo $t = 8$, puede apreciarse que la distribución de la densidad de corriente se hace cada vez más uniforme en los plasmoides, sin embargo, se mantiene una pequeña región a la izquierda y derecha del punto central donde la densidad de corriente presenta su valor mínimo. También es posible observar que se presenta una disminución considerable en el valor de la densidad de corriente eléctrica en toda la corriente laminar para los tres fluidos considerados, en donde el caso paramagnético presenta la mayor densidad de corriente, seguido del fluido sin polarización y por último del diamagnético. Finalmente, se aprecia un crecimiento en el tamaño de los plasmoides en comparación con los dos tiempos anteriores para los tres fluidos considerados.

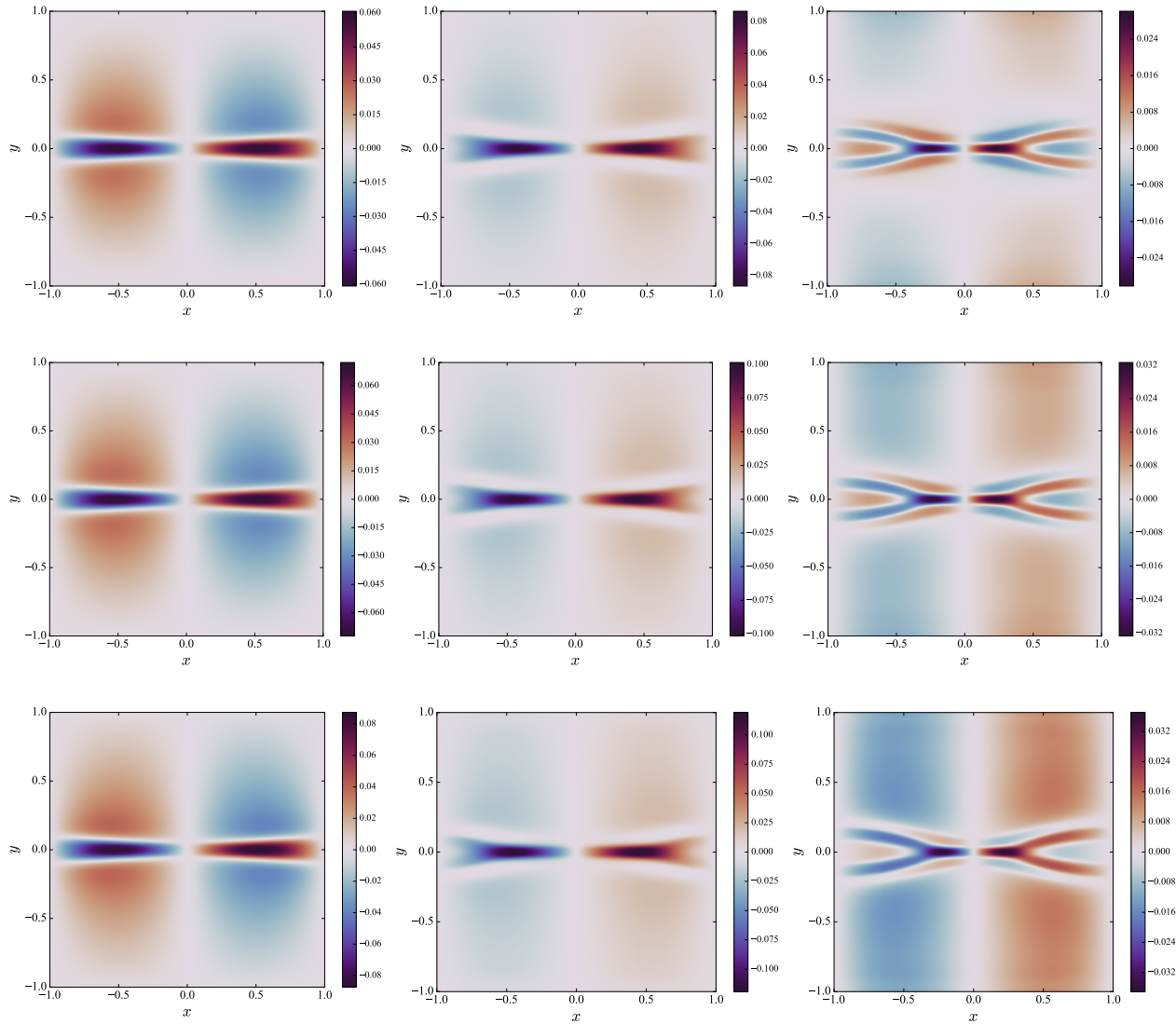
Para visualizar el comportamiento de las velocidades alcanzadas por el plasma en la co-

corriente laminar, en la gráfica (18) se muestra la evolución temporal de la componente u^x de la cuadrivelocidad del fluido. En la columna izquierda, correspondiente al tiempo $t = 2$, puede apreciarse que el plasma alcanza los valores máximos de velocidad en las regiones donde se forman las islas magnéticas. Aquí el fluido presenta valores negativos de velocidad en el plasmoide izquierdo y valores positivos en el plasmoide derecho, lo cual significa que cuando el proceso de Reconexión ocurre el plasma es expulsado hacia el exterior de la corriente laminar. Sin embargo, el plasma presenta valores positivos de velocidad en la zona superior e inferior del plasmoide izquierdo y valores negativos en la región superior e inferior del plasmoide derecho, lo cual significa que en las zonas externas a la corriente laminar el plasma se mueve hacia la región central del dominio numérico. Adicionalmente, es posible observar que los fluidos diamagnético y paramagnético alcanzan respectivamente velocidades superiores e inferiores en comparación al fluido sin polarizar. En la columna central, correspondiente al tiempo $t = 4$, puede apreciarse un cambio en la dirección de la velocidad del plasma en las regiones superior e inferior de cada uno de los plasmoides, esto significa que el plasma ahora está siendo expulsado de la zona central del dominio numérico. Por otra parte, la velocidad de salida del plasma dentro de los plasmoides aumentó considerablemente para los tres tipos de fluidos, en donde el fluido diamagnético presenta el mayor valor de velocidad y el paramagnético el menor valor en comparación con el fluido no polarizado. Adicionalmente, se puede observar que la velocidad del fluido tiende a cero en la región del plasmoide más alejada del punto central de la corriente laminar. Esta zona tiene un mayor tamaño si la susceptibilidad magnética del fluido disminuye. Finalmente, en el tiempo $t = 8$, se observa que en la región central de los plasmoides se genera un flujo de plasma hacia la región central de la corriente laminar. Sin

embargo, el flujo de entrada está rodeado por un flujo de salida, lo cual significa que el plasma cambia de dirección y es expulsado nuevamente cuando está próximo a la región central de la corriente laminar. Además de lo anterior, en las regiones externas a los plasmoides el plasma es llevado hacia afuera del dominio numérico. Cabe resaltar que en este tiempo la velocidad de los tres fluidos disminuyó considerablemente en comparación con el tiempo anterior, siendo el caso diamagnético más veloz, seguido por el caso no polarizado y finalmente por el caso paramagnético. Adicionalmente, vale la pena mencionar que el comportamiento obtenido en las simulaciones para la velocidad del plasma en la corriente laminar es muy similar al presentado por Zenitani et al. (2010). Finalmente, en la gráfica (19) se muestra el comportamiento de u^x descrito anteriormente a lo largo de la corriente laminar para los tres valores de susceptibilidad magnética y tiempos considerados.

Figura 18.

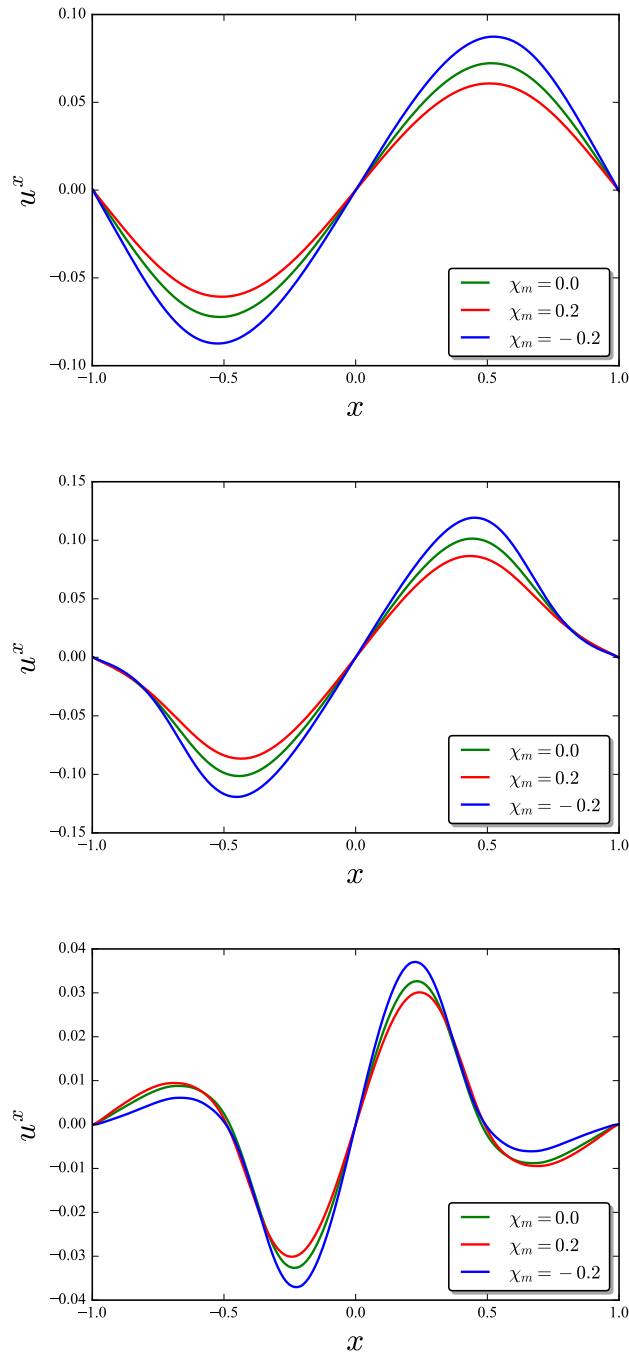
Componente u^x de la cuadrivelocidad del fluido para tres tiempos y valores de susceptibilidad magnética diferentes



Nota. Componente u^x de la cuadrivelocidad del fluido (escala de colores) para tres tiempos y valores de susceptibilidad magnética diferentes. La fila superior corresponde al caso paramagnético $\chi_m = 0.2$, la fila del medio al caso sin polarización magnética $\chi_m = 0.0$ y la fila inferior al caso diamagnético $\chi_m = -0.2$. La columna izquierda corresponde al tiempo $t = 2$, la columna del medio al tiempo $t = 4$ y la columna derecha al tiempo $t = 8$.

Figura 19.

Componente u^x de la cuadrivelocidad del fluido a lo largo de la corriente laminar para tres tiempos y valores de susceptibilidad magnética diferentes.



Nota. Componente u^x de la cuadrivelocidad del fluido a lo largo de la corriente laminar (dirección x) para tres tiempos y valores de susceptibilidad magnética diferentes. La gráfica superior corresponde al tiempo $t = 2$, la central al tiempo $t = 4$ y la inferior al tiempo $t = 8$. Adicionalmente, la curva roja corresponde al caso paramagnético $\chi_m = 0.2$, la curva verde al caso sin polarización magnética $\chi_m = 0.0$ y la curva azul al caso diamagnético $\chi_m = -0.2$.

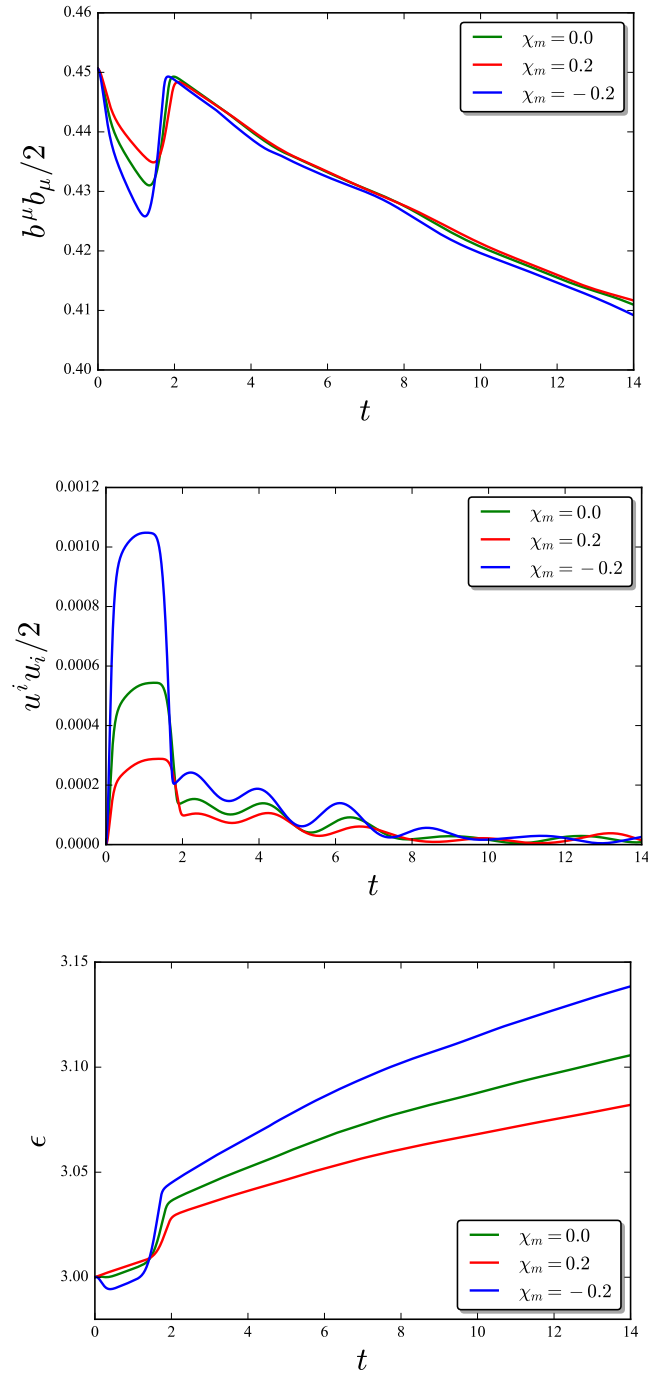
Por último, para tener un mejor entendimiento del fenómeno de reconexión magnética producto de una corriente laminar, se graficó la evolución temporal de la energía magnética, energía cinética y energía interna específica en el marco comovil al fluido para cada uno de los tres valores de susceptibilidad magnética. Los resultados obtenidos pueden observarse en la figura (20). Inicialmente la energía magnética disipada se transforma de manera eficiente en energía cinética, sin embargo, los valores de las energías dependen drásticamente de la susceptibilidad magnética del fluido. Se puede observar en los tiempos iniciales que si el fluido presenta carácter paramagnético disipará menos energía magnética que el fluido no polarizado y tendrá valores más bajos de energía cinética. Caso contrario al fluido diamagnético, el cual disipa más energía magnética y presenta los valores más altos de energía cinética. Respecto a la energía interna específica, se observa que el fluido diamagnético inicialmente presenta valores más bajos y el paramagnético valores un poco más elevados respecto al fluido no polarizado. Esto sugiere que en el instante que inicia el mecanismo de Reconexión, la energía magnética de los fluidos se transforma en mayor medida en energía cinética, acelerando así las partículas que forman el plasma, y sólo una pequeña parte en energía interna específica. Sin embargo, cuando se alcanza aproximadamente el tiempo $t = 1.6$, este comportamiento cambia notablemente, debido a un crecimiento en las energías magnética e interna específica. Caso contrario a la energía cinética, la cual disminuye drásticamente. A partir de este tiempo, el fluido diamagnético y el fluido paramagnético alcanzan respectivamente configuraciones de menor y mayor energía magnética en comparación con el fluido no polarizado, aunque las diferencias en sus valores no son tan apreciables. Sin embargo, la energía magnética disipada ahora se convierte más eficientemente en energía interna específica. Aquí se puede apreciar

que el fluido diamagnético es el que presenta los valores más elevados y el fluido paramagnético los valores más bajos en comparación con el fluido no polarizado. Respecto a la energía cinética, justo después del salto en los valores de energía, el fluido diamagnético es el fluido más veloz y el paramagnético el más lento comparado con el fluido no polarizado. Sin embargo, la energía cinética para los tres casos presenta una serie de oscilaciones hasta que se estabilizan y alcanzan aproximadamente los mismos valores energéticos.

A pesar de los estudios y modelos teóricos desarrollados para entender el mecanismo de reconexión magnética, la manera en que sucede el proceso de conversión de energía durante este fenómeno es aún una pregunta abierta para la física del plasma (Yamada et al., 2014). Por tal razón, cabe resaltar que no se entiende completamente el comportamiento mostrado en las simulaciones antes del tiempo $t = 2$ para la conversión energética. Sin embargo, de las simulaciones se puede apreciar que si un fluido presenta un carácter diamagnético alcanzará en todo instante de tiempo configuraciones de menor energía magnética que un fluido no polarizado y un fluido paramagnético, además de convertir de una manera más eficiente la energía magnética en energía cinética y térmica respecto a los otros dos fluidos. Esto sugiere que si un plasma presenta un carácter diamagnético, probablemente sea un mejor candidato para explicar el calentamiento coronal estelar y la aceleración del plasma en sistemas como Jets.

Figura 20.

Evolución temporal de la energía magnética, energía cinética y energía interna específica para tres valores de susceptibilidad magnética.



Nota. Evolución temporal de la energía magnética, energía cinética y energía interna específica para tres valores de susceptibilidad magnética. La curva roja corresponde al caso paramagnético $\chi_m = 0.2$, la curva verde al caso sin polarización magnética $\chi_m = 0.0$ y la curva azul al caso diamagnético $\chi_m = -0.2$.

Finalmente, para evitar un mecanismo de disipación tan rápido en la energía cinética como el presentado en las simulaciones anteriores, es necesario satisfacer la relación $l/L \leq S^{\frac{1}{3}}$ que se deriva de modelos estándar de reconexión como el de Sweet-Parker. Esta expresión relaciona el ancho l y el largo L de la corriente laminar con el número de Lundquist S , el cual se define como $S = c_a L / \eta$ (siendo c_a la velocidad de Alfvén) (Papini et al., 2019). Una manera de satisfacer dicha relación es considerar valores bajos de resistividad. Esto presenta un impedimento para nuestro código numérico debido a que bajo esta condición el sistema de ecuaciones diverge dando lugar a términos tipo stiff. Los integradores numéricos implementados en *CAFE* no son apropiados para simular estos términos y por lo tanto es necesario implementar integradores más robustos como los IMEX. Otra alternativa a este problema es trabajar con configuraciones iniciales en las que se satisfaga la condición $l \ll L$ entre el ancho y largo de la corriente laminar. Esto generaría valores más elevados de energía cinética en el sistema que se mantendrían por más tiempo y posiblemente daría origen a inestabilidades como la *tearing instability*. Sin embargo, esto presenta un inconveniente a la hora de llevar a cabo las simulaciones debido a que se tendría que trabajar con resoluciones espaciales muy elevadas haciendo que las evoluciones sean muy longevas. Por las razones expuestas anteriormente, para hacer más eficientes las simulaciones y mejorar los resultados obtenidos en este trabajo, el siguiente paso a seguir es implementar un Runge-Kutta IMEX como integrador numérico en el código *CAFE*.

4. Conclusiones

En este trabajo se presentó la deducción de las ecuaciones de la GRRMHD con polarización magnética y polarización eléctrica en forma conservativa. Para esto se empleó el formalismo $3 + 1$ de la Relatividad General y se siguió la formulación de Valencia ya que es la más empleada en códigos numéricos que resuelven las ecuaciones de la hidrodinámica relativista. Debido a que bajo esta formulación se obtiene un sistema de ecuaciones asociado a un tensor energía-momentum arbitrario, fue necesario construir este tensor como la superposición de los tensores energía-momentum del fluido perfecto, campo electromagnético y el asociado a la polarización del material. Aquí se realizaron dos consideraciones con el fin de simplificar un poco el sistema de ecuaciones. La primera consistió en emplear la métrica de Minkowski $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ y la segunda que los cuadvectores de polarización magnética y eléctrica cumplen una relación constitutiva lineal con los cuadvectores de campo electromagnético. Dichas relaciones están dadas por $M^i = \chi B^i$ y $P^i = \chi_e E^i$. El sistema de ecuaciones resultante describe la hidrodinámica de un plasma no ideal que se mueve a velocidades relativistas y que está polarizado electromagnéticamente, este fluido tendrá carácter paramagnético si $\chi_m > 0$ y carácter diamagnético si $\chi_m < 0$. El sistema de ecuaciones obtenido en este trabajo es totalmente equivalente al presentado en Pimentel et al. (018a) cuando el campo eléctrico está dado por $E^i = -\eta^{ikl} v_k B_l$ (condición de la RMHD ideal) y cuando se considera polarización eléctrica nula $\chi_e = 0.0$. Además de lo anterior, cuando se considera que $\chi_m = \chi_e = 0.0$ el sistema de ecuaciones obtenido se reduce al presentado en Ripperda et al. (2019), el cual corresponde al sistema de ecuaciones de la RMHD no ideal.

Para solucionar numéricamente el sistema de ecuaciones de la RRMHD con polarización electromagnética se empleó el código *CAFE*. En el se modificaron ciertos métodos numéricos con el fin de implementar el nuevo sistema de ecuaciones de forma satisfactoria. Para este propósito lo primero que debió modificarse fueron los flujos HLLE debido a la presencia de campos eléctricos en el nuevo sistema de ecuaciones. Sin embargo, la estructura de valores propios característica del sistema de la RMHD ideal implementada en el código no fue modificada. Posteriormente, con el fin de garantizar el cumplimiento de las ecuaciones de ligadura de Maxwell para medios materiales ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y $\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho_q$), se implementó el método de Limpieza de la Divergencia. Este método convierte dichas ecuaciones de ligadura en ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas mediante la adición de dos campos escalares al sistema de ecuaciones. Finalmente, debido a que el código *CAFE* evoluciona únicamente las variables conservativas, se deben obtener las variables primitivas a cada paso de tiempo con el fin de calcular los flujos del sistema de ecuaciones. Para lograr este objetivo se modificaron todas las ecuaciones empleadas en el método de Recuperación de Variables Primitivas para incluir los campos eléctricos en el nuevo sistema de ecuaciones. Con todo lo anterior, fue posible determinar, mediante una serie de pruebas de Tubos de Choque, que la implementación de los términos resisitivos en el código *CAFE* fue un éxito. Esto se debe a que, en el caso en que la polarización eléctrica y magnética del fluido eran nulas $\chi_m = \chi_e = 0.0$, se reprodujeron las pruebas presentadas en el artículo de Ripperda et al. (2019) para un plasma cuya conductividad eléctrica era de $\sigma = 0, 10, 10^2$ y 10^3 , validando así el código *CAFE* resistivo en el límite ideal. Por último, se realizaron las pruebas de tubo de choque para un fluido no ideal cuya

susceptibilidad eléctrica era nula $\chi_e = 0.0$ y cuya susceptibilidad magnética tenía los valores de $\chi_m = \pm 0.20, \pm 0.10, \pm 0.05, 0.00$ y los mismos valores de conductividad eléctrica anteriormente mencionados. Aquí se observó que cuando el fluido presenta conductividades eléctricas bajas no se presentan estados constantes en ninguna de las variables de estado del fluido. Esto generó un impedimento para concluir con certeza el tipo de ondas que se propagan bajo estas condiciones, sin embargo, a medida que la conductividad eléctrica crecía se presentaron estados más definidos que se asemejaban a los resultados para los tubos de choque que se obtienen considerando RMHD bajo el límite ideal.

Por último, con el fin de determinar los efectos que introduce la polarización magnética en el fenómeno de Reconexión, se implementó en el código *CAFE* un dato inicial basado en los artículos de Komissarov et al. (2007) y Zenitani et al. (2010) que corresponde a una corriente laminar de Harris perturbada. En las pruebas numéricas se consideraron tres tipos de fluido, un fluido paramagnético de $\chi_m = 0.2$, un fluido no polarizado $\chi_m = 0.0$ y un fluido diamagnético de $\chi_m = -0.2$, además de considerar para todos los casos susceptibilidad eléctrica nula $\chi_e = 0.0$. En las simulaciones 2D se presentó el gráfico de la componente j_f^z de la densidad de corriente eléctrica libre y las líneas de campo magnético generadas por la corriente laminar, aquí se pudo evidenciar la generación del fenómeno de Reconexión para los tres fluidos en consideración debido a la formación de dos islas magnéticas en la parte izquierda y derecha del dominio numérico. Estas pruebas mostraron que en la región central de la corriente laminar se presenta la región con mayor densidad de corriente eléctrica, además se evidenció que el valor de la densidad de corriente disminuirá

progresivamente a medida que el tiempo avanza llegando así a una configuración más uniforme a lo largo de toda la corriente laminar. A pesar de que la morfología para los tres fluidos era muy similar y se presentaba poca diferencia en las magnitudes de la densidad de corriente libre, el fluido que presentó mayor densidad de corriente fue el paramagnético, seguido del fluido no polarizado y por último del fluido diamagnético. Posteriormente, para determinar el comportamiento de las velocidades del plasma en el proceso de Reconexión, se presentaron las gráficas 1D y 2D de la componente u^x de la cuadrivelocidad del fluido. En estas simulaciones se evidenció que cuando el proceso de Reconexión sucede el plasma será expulsado hacia la parte externa de la corriente laminar, en donde el fluido que alcanza mayor velocidad será el diamagnético, seguido del fluido no polarizado y finalmente por el fluido paramagnético. Además de lo anterior, se observó que a medida que el tiempo avanza se genera en el interior de los plasmoides un flujo de plasma que se mueve a la región central de la corriente laminar, sin embargo, cuando este flujo está próximo a la zona central cambia de dirección y es expulsado nuevamente de la lámina de corriente.

Finalmente, con el propósito de tener un mejor entendimiento del mecanismo de conversión de energía en el fenómeno de Reconexión, se realizaron gráficas de la evolución temporal de la energía magnética, energía cinética y energía interna específica para los tres fluidos en consideración. Estas pruebas mostraron que durante el fenómeno de Reconexión, el fluido diamagnético alcanza configuración final de menor energía magnética en comparación con el fluido sin polarización, siendo este el fluido que presenta los valores más elevados de energía cinética y energía interna específica. Por otra parte, el fluido paramagnético alcanza una configuración final de mayor

energía magnética en comparación con el fluido no polarizado, siendo este fluido el que presenta los valores más bajos de energía cinética y energía interna específica. Estos resultados muestran que un fluido diamagnético transforma más eficientemente la energía magnética disipada en energía cinética y energía interna específica en comparación con los otros dos fluidos considerados. Esto convierte al fluido diamagnético en el mejor candidato para poder dar una posible explicación al calentamiento en algunos sistemas astrofísicos como las coronas estelares y además proporciona un mecanismo más eficiente para la aceleración del plasma en sistemas como Jets. A pesar de lo anterior, cabe resaltar que la forma en la que sucede la conversión de energía en el proceso de Reconexión Magnética es un fenómeno aún sin entender en la física del plasma.

Para trabajos futuros se planea implementarle al código *CAFE* la estructura de valores propios característica de la RRMHD con polarización magnética y polarización eléctrica, un integrador numérico más potente como un IMEX y adicionar los términos que permitan estudiar sistemas astrofísicos en espaciotiempos curvos.

Referencias Bibliográficas

- Alcubierre, M. (2008). *Introduction to 3+ 1 numerical relativity*, volume 140. Oxford University Press.
- Anile, A. M. (2005). *Relativistic fluids and magneto-fluids: With applications in astrophysics and plasma physics*. Cambridge University Press.
- Anninos, P., Fragile, P. C., and Salmonson, J. D. (2005). Cosmos++: relativistic magnetohydrodynamics on unstructured grids with local adaptive refinement. *The Astrophysical Journal*, 635(1):723.
- Antón Ruiz, L. (2008). *Magnetohidrodinámica relativista numérica: Aplicaciones en Relatividad Especial y General*. Universitat de València.
- Antón Ruiz, L., Zanotti, O., Miralles, J. A., Martí, J. M., Ibáñez, J. M., Font, J. A., and Pons, J. A. (2006). Numerical 3+ 1 general relativistic magnetohydrodynamics: a local characteristic approach. *The Astrophysical Journal*, 637(1):296.
- Arfken, G. B. and Weber, H. J. (2005). *Mathematical methods for physicists* sixth edition.
- Birn, J. and Priest, E. R. (2007). *Reconnection of magnetic fields: magnetohydrodynamics and collisionless theory and observations*. Cambridge University Press.
- Biskamp, D. (2000). *Magnetic Reconnection in Plasmas*. Cambridge University Press.

- Blandford, R. and Hernquist, L. (1982). Magnetic susceptibility of a neutron star crust. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 15(30):6233.
- Carroll, S. M. (2019). *Spacetime and geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press.
- Chatterjee, D., Elghozi, T., Novak, J., and Oertel, M. (2015). Consistent neutron star models with magnetic-field-dependent equations of state. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 447(4):3785–3796.
- Chiuderi, C. and Velli, M. (2015). *Basics of plasma astrophysics*. Springer Science & Business Media.
- Cruz-Osorio, A. (2014). *Implementación numérica de la magnetohidrodinámica ideal relativista*. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
- Cruz-Osorio, A., Lora-Clavijo, F. D., and Guzmán, F. (2012). Is the flip-flop behaviour of accretion shock cones on to black holes an effect of coordinates? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 426(1):732–738.
- De Groot, S. R. and Suttorp, L. G. (1972). *Foundations of electrodynamics*. North-Holland Publishing Company - Amsterdam.
- Dedner, A., Kemm, F., Kröner, D., Munz, C.-D., Schnitzer, T., and Wesenberg, M. (2002). Hyperbolic divergence cleaning for the mhd equations. *Journal of Computational Physics*, 175(2):645–673.

- Del Zanna, L., Zanotti, O., Bucciantini, N., and Londrillo, P. (2007). Echo: a eulerian conservative high-order scheme for general relativistic magnetohydrodynamics and magnetodynamics. *Astronomy & Astrophysics*, 473(1):11–30.
- Dionysopoulou, K., Alic, D., Palenzuela, C., Rezzolla, L., and Giacomazzo, B. (2013). General-relativistic resistive magnetohydrodynamics in three dimensions: Formulation and tests. *Physical Review D*, 88(4):044020.
- Evans, C. R. and Hawley, J. F. (1988). Simulation of magnetohydrodynamic flows-a constrained transport method. *The Astrophysical Journal*, 332:659–677.
- Font, J. A. (2008). Numerical hydrodynamics and magnetohydrodynamics in general relativity. *Living Reviews in Relativity*, 11(1):1–131.
- Giacomazzo, B. and Rezzolla, L. (2007). Whiskymhd: a new numerical code for general relativistic magnetohydrodynamics. *Classical and Quantum Gravity*, 24(12):S235.
- Gourgoulhon, E. (2012). *3+1 formalism in general relativity: bases of numerical relativity*, volume 846. Springer Science & Business Media.
- Griffiths, D. J. (2005). Introduction to electrodynamics.
- Guzmán, F., Lora-Clavijo, F. D., and Morales, M. (2012). Revisiting spherically symmetric relativistic hydrodynamics. *Revista mexicana de física E*, 58(2):84–98.

- Hirschmann, E., Neilsen, D., and Millward, S. (2006). Relativistic mhd and black hole excision: Formulation and initial tests. In *APS April Meeting Abstracts*, pages H11–007.
- Huang, X.-G., Huang, M., Rischke, D. H., and Sedrakian, A. (2010). Anisotropic hydrodynamics, bulk viscosities, and r-modes of strange quark stars with strong magnetic fields. *Physical Review D*, 81(4):045015.
- Kadomtsev, B. (1987). Magnetic field line reconnection. *Reports on Progress in Physics*, 50(2):115.
- Komissarov, S., Barkov, M., and Lyutikov, M. (2007). Tearing instability in relativistic magnetically dominated plasmas. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 374(2):415–426.
- Lora-Clavijo, F. D., Cruz-Osorio, A., and Guzmán, F. (2015). Cafe: a new relativistic mhd code. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 218(2):24.
- Lora-Clavijo, F. D., Cruz-Pérez, J., Siddhartha Guzmán, F., and Gonzalez, J. (2013a). Exact solution of the 1d riemann problem in newtonian and relativistic hydrodynamics. *Revista mexicana de física E*, 59(1):28–50.
- Lora-Clavijo, F. D., Gracia-Linares, M., and Guzmán, F. (2014). Horizon growth of supermassive black hole seeds fed with collisional dark matter. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 443(3):2242–2251.
- Lora-Clavijo, F. D. and Guzmán, F. (2013). Axisymmetric bondi–hoyle accretion on to a schwarzs-

- child black hole: shock cone vibrations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 429(4):3144–3154.
- Lora-Clavijo, F. D., Guzmán, F., and Cruz-Osorio, A. (2013b). Pbh mass growth through radial accretion during the radiation dominated era. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2013(12):015.
- Lyubarsky, Y. (2005). On the relativistic magnetic reconnection. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 358(1):113–119.
- MacTaggart, D. and Hillier, A. (2020). *Topics in Magnetohydrodynamic Topology, Reconnection and Stability Theory*. Springer.
- Maugin, G. (1978). On the covariant equations of the relativistic electrodynamics of continua. i. general equations. *Journal of Mathematical Physics*, 19(5):1198–1205.
- Mignone, A., Mattia, G., Bodo, G., and Del Zanna, L. (2019). A constrained transport method for the solution of the resistive relativistic mhd equations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 486(3):4252–4274.
- Miranda-Aranguren, S. (2018). *Numerical resistive relativistic magnetohydrodynamics*. Universitat de València.
- Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. W. H. Freeman and Company.

- Palenzuela, C. (2013). Modelling magnetized neutron stars using resistive magnetohydrodynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 431(2):1853–1865.
- Palenzuela, C., Lehner, L., Reula, O., and Rezzolla, L. (2009). Beyond ideal mhd: towards a more realistic modelling of relativistic astrophysical plasmas. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 394(4):1727–1740.
- Papini, E., Landi, S., and Del Zanna, L. (2019). Fast magnetic reconnection: secondary tearing instability and role of the hall term. *The Astrophysical Journal*, 885(1):56.
- Penner, A. J. (2011). *Numerical analysis of the ultrarelativistic and magnetized Bondi-Hoyle problem*. University of British Columbia.
- Pimentel, O. M. and Lora-Clavijo, F. D. (2019). On the linear and non-linear evolution of the relativistic mhd kelvin-helmholtz instability in a magnetically polarized fluid. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 490(3):4183–4193.
- Pimentel, O. M., Lora-Clavijo, F. D., and González, G. A. (2018a). Numerical general relativistic mhd with magnetically polarized matter. *The Astrophysical Journal*, 861(2):115.
- Pimentel, O. M., Lora-Clavijo, F. D., and González, G. A. (2018b). Analytic solution of a magnetized tori with magnetic polarization around kerr black holes. *Astronomy & Astrophysics*, 619:A57.
- Poisson, E. (2004). *A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge university press.

- Porth, O., Olivares, H., Mizuno, Y., Younsi, Z., Rezzolla, L., Moscibrodzka, M., Falcke, H., and Kramer, M. (2017). The black hole accretion code. *Computational Astrophysics and Cosmology*, 4(1):1–42.
- Priest, E. R. (1985). The magnetohydrodynamics of current sheets. *Reports on Progress in Physics*, 48(7):955.
- Priest, E. R. (2014). *Magnetohydrodynamics of the Sun*. Cambridge University Press.
- Priest, E. R. and Forbes, T. (2000). *MAGNETIC RECONNECTION MHD Theory and Applications*. Cambridge University Press.
- Rezzolla, L. and Zanotti, O. (2013). *Relativistic hydrodynamics*. Oxford University Press.
- Ripperda, B., Bacchini, F., Porth, O., Most, E. R., Olivares, H., Nathanail, A., Rezzolla, L., Teunissen, J., and Keppens, R. (2019). General-relativistic resistive magnetohydrodynamics with robust primitive-variable recovery for accretion disk simulations. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 244(1):10.
- Ryder, L. (2009). *Introduction to general relativity*. Cambridge University Press.
- Saucez, P., Schiesser, W., et al. (2001). *Adaptive method of lines*. CRC Press.
- Schnack, D. D. (2009). *Lectures in magnetohydrodynamics: with an appendix on extended MHD*, volume 780. Springer.
- Schutz, B. (2009). *A first course in general relativity*. Cambridge university press.

Shibata, M. (2015). *Numerical Relativity*, volume 1. World Scientific.

Somov, B. V. (2012). *Plasma Astrophysics, Part II: Reconnection and Flares*, volume 392. Springer Science & Business Media.

Somov, B. V. (2013). *Cosmic plasma physics*, volume 251. Springer Science & Business Media.

Takamoto, M. (2018). Evolution of three-dimensional relativistic current sheets and development of self-generated turbulence. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 476(3):4263–4271.

Toro, E. F. (2013). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Springer Science & Business Media.

Yamada, M., Kulsrud, R., and Ji, H. (2010). Magnetic reconnection. *Reviews of Modern Physics*, 82(1):603.

Yamada, M., Yoo, J., Jara-Almonte, J., Ji, H., Kulsrud, R. M., and Myers, C. E. (2014). Conversion of magnetic energy in the magnetic reconnection layer of a laboratory plasma. *Nature communications*, 5(1):1–8.

Zenitani, S., Hesse, M., and Klimas, A. (2010). Resistive magnetohydrodynamic simulations of relativistic magnetic reconnection. *The Astrophysical Journal Letters*, 716(2):L214.

Apéndices

Apéndice A. Término fuente de la ley de conservación de la energía.

El término fuente de la ley de conservación de la energía está dado por

$$\mathcal{S} = \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \nabla_{\mu} n_{\nu}, \quad (241)$$

al emplear la definición de la derivada covariante (ver sección 2.10 del libro de Arfken and Weber (2005)) la expresión anterior puede reescribirse como

$$\mathcal{S} = \sqrt{-g} T^{\mu\nu} (\partial_{\mu} n_{\nu} - n_{\rho} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) = \sqrt{-g} T^{\mu\nu} (\partial_{\mu} n_{\nu} - n_{\rho} g^{\rho\sigma} \Gamma_{\sigma\mu\nu}),$$

escribiendo los símbolos de Christoffel en términos de las componentes covariantes del tensor métrico esta expresión se transforma en

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \left[\partial_{\mu} n_{\nu} - \frac{n^{\sigma}}{2} (\partial_{\nu} g_{\sigma\mu} + \partial_{\mu} g_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}) \right] \\ \mathcal{S} &= \sqrt{-g} \left(T^{\mu\nu} \partial_{\mu} n_{\nu} - T^{\mu\nu} n^{\sigma} \partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} n^{\sigma} T^{\mu\nu} \partial_{\sigma} g_{\mu\nu} \right) \\ \mathcal{S} &= \sqrt{-g} \left[\underbrace{T^{\mu 0} \partial_{\mu} n_0}_{\text{I}} + \underbrace{T^{\mu\nu} n^{\sigma} \left(\frac{1}{2} \partial_{\sigma} g_{\mu\nu} - \partial_{\mu} g_{\nu\sigma} \right)}_{\text{II}} \right]. \end{aligned} \quad (242)$$

Haciendo uso de la expresión del tensor energía-momentum bajo la descomposición 3 + 1

(ecuación (42)) el término I se convierte en

$$I = T^{\mu 0} \partial_{\mu} n_0 = (U n^{\mu} n^0 + S^{\mu} n^0 + S^0 n^{\mu} + W^{\mu 0}) \partial_{\mu} n_0$$

$$I = U n^0 n^0 \partial_0 n_0 + U n^0 n^i \partial_i n_0 + n^0 S^i \partial_i n_0,$$

aquí se ha tenido en cuenta que $S^0 = W^{\mu 0} = 0$. Reemplazando explícitamente cada una de las componentes se tiene que I se transforma en

$$\begin{aligned} I &= -\frac{U}{\alpha^2} \partial_0 \alpha + \frac{U}{\alpha^2} \beta^i \partial_i \alpha - \frac{S^i}{\alpha} \partial_i \alpha \\ I &= \frac{1}{\alpha^2} (U \beta^i \partial_i \alpha - U \partial_0 \alpha - \alpha S^i \partial_i \alpha). \end{aligned} \quad (243)$$

El término II puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} II &= T^{\mu \nu} n^{\sigma} \left(\frac{1}{2} \partial_{\sigma} g_{\mu \nu} - \partial_{\mu} g_{\nu \sigma} \right) \\ II &= n^{\sigma} (U n^{\mu} n^{\nu} + S^{\mu} n^{\nu} + n^{\mu} S^{\nu} + W^{\mu \nu}) \left(\frac{1}{2} \partial_{\sigma} g_{\mu \nu} - \partial_{\mu} g_{\nu \sigma} \right) \\ II &= -\frac{U}{2} \underbrace{n^{\mu} n^{\nu} n^{\sigma} \partial_{\sigma} g_{\mu \nu}}_{\text{III}} - \underbrace{S^{\mu} n^{\nu} n^{\sigma} \partial_{\mu} g_{\nu \sigma}}_{\text{IV}} + \frac{1}{2} \underbrace{W^{\mu \nu} n^{\sigma} \partial_{\sigma} g_{\mu \nu}}_{\text{V}} - \underbrace{W^{\mu \nu} n^{\sigma} \partial_{\mu} g_{\nu \sigma}}_{\text{VI}}. \end{aligned} \quad (244)$$

El término III está dado por

$$III = n^{\mu} n^{\nu} n^{\sigma} \partial_{\sigma} g_{\mu \nu}$$

$$III = n^0 n^0 n^0 \partial_0 g_{00} + 2n^0 n^0 n^i \partial_0 g_{0i} + n^0 n^i n^k \partial_0 g_{ik} + n^0 n^0 n^i \partial_i g_{00} + 2n^0 n^i n^k \partial_i g_{0k} + n^i n^k n^l \partial_i g_{kl}$$

$$\begin{aligned}
\text{III} &= \frac{1}{\alpha^3} \left[\partial_0 \left(-\alpha^2 + \beta_k \beta^k \right) + 2\beta^i \partial_0 \beta_i + \beta^i \beta^k \partial_0 \gamma_{ik} - \beta^i \partial_i \left(-\alpha^2 + \beta_k \beta^k \right) \right. \\
&\quad \left. + 2\beta^i \beta^k \partial_i \beta_k - \beta^i \beta^k \beta^l \partial_i \gamma_{kl} \right] \\
\text{III} &= \frac{1}{\alpha^3} \left[-2\alpha \partial_0 \alpha - \beta^k \partial_0 \left(\gamma_{kl} \beta^l \right) + \beta_k \partial_0 \beta^k + \beta^i \beta^k \partial_0 \gamma_{ik} + 2\alpha \beta^i \partial_i \alpha + \beta^i \beta^k \partial_i \left(\gamma_{kl} \beta^l \right) \right. \\
&\quad \left. - \beta^i \beta_k \partial_i \beta^k - \beta^i \beta^k \beta^l \partial_i \gamma_{kl} \right] \\
\text{III} &= \frac{1}{\alpha^3} \left[-2\alpha \partial_0 \alpha - \beta^k \gamma_{kl} \partial_0 \beta^l - \beta^k \beta^l \partial_0 \gamma_{kl} + \beta_k \partial_0 \beta^k + \beta^i \beta^k \partial_0 \gamma_{ik} + 2\alpha \beta^i \partial_i \alpha \right. \\
&\quad \left. + \beta^i \beta^k \gamma_{kl} \partial_i \beta^l + \beta^i \beta^k \beta^l \partial_i \gamma_{kl} - \beta^i \beta_k \partial_i \beta^k - \beta^i \beta^k \beta^l \partial_i \gamma_{kl} \right],
\end{aligned}$$

al eliminar los factores iguales se tiene que el término III se reduce a

$$\text{III} = \frac{2}{\alpha^2} (\beta^i \partial_i \alpha - \partial_0 \alpha). \quad (245)$$

El término IV está dado por

$$\begin{aligned}
\text{IV} &= S^\mu n^\nu n^\sigma \partial_\mu g_{\nu\sigma} = S^i \left(n^0 n^0 \partial_i g_{00} + 2n^0 n^k \partial_i g_{0k} + n^k n^l \partial_i g_{kl} \right) \\
\text{IV} &= \frac{S^i}{\alpha^2} \left[-2\alpha \partial_i \alpha + \partial_i \left(\beta_k \beta^k \right) - 2\beta^k \partial_i \beta_k + \beta^k \beta^l \partial_i \gamma_{kl} \right] \\
\text{IV} &= \frac{S^i}{\alpha^2} \left[-2\alpha \partial_i \alpha - \beta^k \partial_i \left(\gamma_{kl} \beta^l \right) + \beta_k \partial_i \beta^k + \beta^k \beta^l \partial_i \gamma_{kl} \right] \\
\text{IV} &= \frac{S^i}{\alpha^2} \left[-2\alpha \partial_i \alpha - \beta^k \gamma_{kl} \partial_i \beta^l - \beta^k \beta^l \partial_i \gamma_{kl} + \beta_k \partial_i \beta^k + \beta^k \beta^l \partial_i \gamma_{kl} \right],
\end{aligned}$$

al eliminar los factores iguales se tiene que el término IV se reduce a

$$IV = -\frac{2}{\alpha} S^i \partial_i \alpha. \quad (246)$$

El término V está dado por

$$V = W^{\mu\nu} n^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} = n^0 W^{ik} \partial_0 g_{ik} + n^l W^{ik} \partial_l g_{ik},$$

aquí se ha tenido en cuenta que $W^{0\nu} = 0$. Por lo tanto el término V se reescribe como

$$V = \frac{1}{\alpha} \left(W^{ik} \partial_0 \gamma_{ik} - \beta^l W^{ik} \partial_l \gamma_{ik} \right). \quad (247)$$

El término VI está dado por

$$\begin{aligned} VI &= W^{\mu\nu} n^\sigma \partial_\mu g_{\nu\sigma} = W^{ik} n^0 \partial_i g_{k0} + W^{ik} n^l \partial_i g_{kl} \\ VI &= \frac{W^{ik}}{\alpha} \left[\partial_i \left(\gamma_{kl} \beta^l \right) - \beta^l \partial_i \gamma_{kl} \right] = \frac{W^{ik}}{\alpha} \left(\beta^l \partial_i \gamma_{kl} + \gamma_{kl} \partial_i \beta^l - \beta^l \partial_i \gamma_{kl} \right) \\ VI &= \frac{1}{\alpha} W^i_l \partial_i \beta^l. \end{aligned} \quad (248)$$

Reemplazando las expresiones (245), (246), (247) y (248) en la ecuación (244), el término

II se transforma en

$$\Pi = \frac{1}{\alpha^2} \left[U \left(\partial_0 \alpha - \beta^i \partial_i \alpha \right) + 2\alpha S^i \partial_i \alpha + \frac{\alpha}{2} \left(W^{ik} \partial_0 \gamma_{ik} - \beta^l W^{ik} \partial_l \gamma_{ik} \right) - \alpha W^i_l \partial_i \beta^l \right],$$

al sumar la expresión anterior con la ecuación (243) se llega a

$$I + II = \frac{1}{\alpha^2} \left[\alpha S^i \partial_i \alpha + \frac{\alpha}{2} \left(W^{ik} \partial_0 \gamma_{ik} - \beta^l W^{ik} \partial_l \gamma_{ik} \right) - \alpha W^i{}_l \partial_i \beta^l \right].$$

Si se considera una métrica espacial estacionaria ($\partial_0 \gamma_{ik} = 0$) el término anterior se reduce a

$$I + II = \frac{1}{\alpha} \left[S^i \partial_i \alpha - \frac{1}{2} \beta^l W^{ik} \partial_l \gamma_{ik} - W^i{}_l \partial_i \beta^l \right].$$

Por último, al reemplazar la expresión anterior en la ecuación (242) y teniendo en cuenta que $\sqrt{-g} = \alpha \sqrt{\gamma}$, el término fuente de la ley de conservación de la energía puede ser reescrito como

$$\mathcal{S} = \sqrt{\gamma} \left(S^i \partial_i \alpha - W^i{}_l \partial_i \beta^l - \frac{1}{2} W^{ik} \beta^l \partial_l \gamma_{ik} \right). \quad (249)$$

Apéndice B. Término fuente de la ley de conservación del momentum.

El término fuente de la ley de conservación del momentum está dado por

$$\mathcal{S}_k = \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \nabla_\mu e_{(k)\nu}, \quad (250)$$

empleando la definición de la derivada covariante se tiene que esta expresión puede ser reescrita

como

$$\mathcal{S}_k = \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \left(\partial_\mu e_{(k)\nu} - e_{(k)\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \right),$$

los vectores espaciales de la Base Euleriana pueden ser escritos en términos de las componentes covariantes del tensor métrico (ecuación (13)), por lo tanto la expresión anterior se transforma en

$$\mathcal{S}_k = \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \left(\partial_\mu g_{k\nu} - g_{k\sigma} g^{\sigma\alpha} \Gamma_{\alpha\mu\nu} \right),$$

escribiendo los símbolos de Christoffel en términos de las componentes covariantes del tensor métrico la expresión anterior se transforma en

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_k &= \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \left[\partial_\mu g_{k\nu} - \frac{\delta^\alpha_k}{2} (\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \right] \\ \mathcal{S}_k &= \sqrt{-g} \left(T^{\mu\nu} \partial_\mu g_{k\nu} - \delta^\alpha_k T^{\mu\nu} \partial_\nu g_{\alpha\mu} + \frac{1}{2} \delta^\alpha_k T^{\mu\nu} \partial_\alpha g_{\mu\nu} \right) \\ \mathcal{S}_k &= \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\mu\nu} \partial_k g_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

al escribir el tensor energía-momentum en términos de las cantidades medidas por el observador Euleriano (ecuación (42)) la expresión anterior se transforma en

$$\mathcal{S}_k = \frac{\sqrt{-g}}{2} \left[(U n^\mu n^\nu + S^\mu n^\nu + S^\nu n^\mu + W^{\mu\nu}) \partial_k g_{\mu\nu} \right]$$

$$\mathcal{S}_k = \frac{\sqrt{-g}}{2} \left(\underbrace{U n^\mu n^\nu \partial_k g_{\mu\nu}}_{\text{I}} + 2 \underbrace{S^\mu n^\nu \partial_k g_{\mu\nu}}_{\text{II}} + \underbrace{W^{\mu\nu} \partial_k g_{\mu\nu}}_{\text{III}} \right). \quad (251)$$

El término I está dado por

$$\begin{aligned} \text{I} &= n^\mu n^\nu \partial_k g_{\mu\nu} = n^0 n^0 \partial_k g_{00} + 2n^0 n^i \partial_k g_{0i} + n^i n^l \partial_k g_{il} \\ \text{I} &= \frac{1}{\alpha^2} \partial_k (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) - 2 \frac{\beta^i}{\alpha^2} \partial_k \beta_i + \frac{1}{\alpha^2} \beta^i \beta^l \partial_k \gamma_{il} \\ \text{I} &= -\frac{2}{\alpha} \partial_k \alpha + \frac{1}{\alpha^2} \partial_k (\gamma_{il} \beta^i \beta^l) - 2 \frac{\beta^i}{\alpha^2} \partial_k (\gamma_{il} \beta^l) + \frac{1}{\alpha^2} \beta^i \beta^l \partial_k \gamma_{il} \\ \text{I} &= -\frac{2}{\alpha} \partial_k \alpha + \frac{1}{\alpha^2} [\beta^i \beta^l \partial_k \gamma_{il} + \gamma_{il} \partial_k (\beta^i \beta^l)] - 2 \frac{\beta^i}{\alpha^2} (\gamma_{il} \partial_k \beta^l + \beta^l \partial_k \gamma_{il}) + \frac{1}{\alpha^2} \beta^i \beta^l \partial_k \gamma_{il} \\ \text{I} &= -\frac{2}{\alpha} \partial_k \alpha + \frac{2}{\alpha^2} \beta^i \beta^l \partial_k \gamma_{il} + \frac{1}{\alpha^2} \gamma_{il} (\beta^l \partial_k \beta^i + \beta^i \partial_k \beta^l) - \frac{2}{\alpha^2} \beta_l \partial_k \beta^l - \frac{2}{\alpha^2} \beta^i \beta^l \partial_k \gamma_{il} \\ \text{I} &= -\frac{2}{\alpha} \partial_k \alpha + \frac{2}{\alpha^2} \beta^i \beta^l \partial_k \gamma_{il} + \frac{2}{\alpha^2} \beta_l \partial_k \beta^l - \frac{2}{\alpha^2} \beta_l \partial_k \beta^l - \frac{2}{\alpha^2} \beta^i \beta^l \partial_k \gamma_{il}, \end{aligned}$$

por lo tanto el término I se reduce a

$$\text{I} = -\frac{2}{\alpha} \partial_k \alpha. \quad (252)$$

El término II está dado por

$$\text{II} = S^\mu n^\nu \partial_k g_{\mu\nu} = S^i n^0 \partial_k g_{i0} + S^i n^l \partial_k g_{il},$$

aquí se ha tenido en cuenta que $S^0 = 0$. Reemplazando explícitamente cada una de las componentes

se tiene que

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{S^i}{\alpha} \partial_k \beta_i - \frac{S^i}{\alpha} \beta^l \partial_k \gamma_{il} = \frac{S^i}{\alpha} \left[\partial_k (\gamma_{il} \beta^l) - \beta^l \partial_k \gamma_{il} \right] \\ \Pi &= \frac{S^i}{\alpha} \left[\beta^l \partial_k \gamma_{il} + \gamma_{il} \partial_k \beta^l - \beta^l \partial_k \gamma_{il} \right],\end{aligned}$$

por lo tanto el término II se reduce a

$$\Pi = \frac{1}{\alpha} S_l \partial_k \beta^l. \quad (253)$$

El término III está dado por

$$\text{III} = W^{\mu\nu} \partial_k g_{\mu\nu} = W^{0\nu} \partial_k g_{0\nu} + W^{i0} \partial_k g_{i0} + W^{il} \partial_k g_{il},$$

teniendo en cuenta que $W^{0\mu} = W^{\mu 0} = 0$ la expresión anterior se reduce a

$$\text{III} = W^{il} \partial_k g_{il}. \quad (254)$$

Reemplazando las ecuaciones (252), (253) y (254) en la expresión (251) se tiene que

$$\mathcal{S}_k = \frac{\sqrt{-g}}{2} \left(-\frac{2}{\alpha} U \partial_k + \frac{2}{\alpha} S_l \partial_k \beta^l \alpha + W^{il} \partial_k g_{il} \right),$$

haciendo uso de la ecuación (6), el término fuente de la ley de conservación del momentum se

transforma en

$$\mathcal{S}_k = \sqrt{\gamma} \left(\frac{\alpha}{2} W^{il} \partial_k \gamma_{il} + S_l \partial_k \beta^l - U \partial_k \alpha \right). \quad (255)$$

Apéndice C. Tensor de Faraday y su tensor dual.

El campo magnético y el campo eléctrico en términos del vector potencial magnético $\mathbf{A}$ y el potencial eléctrico ϕ están dados por (Griffiths, 2005)

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \phi, \quad (256)$$

por lo tanto estos en coordenadas cartesianas pueden reescribirse como

$$\mathbf{B} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y) \hat{i} + (\partial_z A_x - \partial_x A_z) \hat{j} + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \hat{k},$$

$$\mathbf{E} = -(\partial_t A_x + \partial_x \phi) \hat{i} - (\partial_t A_y + \partial_y \phi) \hat{j} - (\partial_t A_z + \partial_z \phi) \hat{k},$$

debido a que el cuadvivector contravariante de derivadas parciales está dado por $\partial^\mu = (\partial^0, \partial^i) = (-\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$, los cuadvectores de la expresión (71) pueden ser reescritos como

$$\mathcal{B}^\mu = (0, \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2, \partial^3 A^1 - \partial^1 A^3, \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1), \quad (257)$$

$$\mathcal{E}^\mu = (0, \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0, \partial^0 A^2 - \partial^2 A^0, \partial^0 A^3 - \partial^3 A^0). \quad (258)$$

De acuerdo a la definición (67), las componentes F^{0i} del tensor de Faraday están dadas por

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \mathcal{E}^i,$$

donde se ha tenido en cuenta la ecuación (258). La expresión anterior en términos de la componente temporal de la cuadrivelocidad del marco $\mathcal{O}$ (ecuación (71)) puede ser reescrita como $F^{0i} = \mathcal{U}^0 \mathcal{E}^i$. Debido a que $\mathcal{U}^i = \mathcal{E}^0 = 0$, las componentes F^{0i} en términos de $\mathcal{U}^\mu$ y $\mathcal{E}^\mu$ pueden ser escritas como

$$F^{0i} = \mathcal{U}^\mu \mathcal{E}^\nu = F^{\mu\nu}, \quad (259)$$

en la expresión anterior se cumple que $F^{i0} = 0$. Las componentes F^{i0} del tensor de Faraday de acuerdo a la definición (67) están dadas por

$$F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) = -\mathcal{E}^i,$$

la expresión anterior en términos de $\mathcal{U}^0$ se transforma en $F^{i0} = -\mathcal{E}^i \mathcal{U}^0$. Debido a que $\mathcal{U}^i = \mathcal{E}^0 = 0$, las componentes F^{i0} en términos de $\mathcal{U}^\mu$ y $\mathcal{E}^\mu$ pueden ser escritas como

$$F^{i0} = -\mathcal{E}^\mu \mathcal{U}^\nu = F^{\mu\nu}, \quad (260)$$

en la expresión anterior se cumple que $F^{0i} = 0$. Por lo tanto, al sumar las ecuaciones (259) y (260)

la parte temporal del tensor de Faraday puede ser escrita como

$$F^{\mu\nu} = \mathcal{U}^\mu \mathcal{E}^\nu - \mathcal{E}^\mu \mathcal{U}^\nu, \quad (261)$$

en la expresión anterior se cumple que $F^{00} = F^{ik} = 0$. Las componentes espaciales del tensor de Faraday de acuerdo a (67) están dadas por

$$\begin{aligned} F^{12} &= -F^{21} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = \mathcal{B}_3, \\ F^{13} &= -F^{31} = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 = -\mathcal{B}_2, \\ F^{23} &= -F^{32} = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 = \mathcal{B}_1, \\ F^{11} &= F^{22} = F^{33} = 0, \end{aligned}$$

las componentes anteriores en términos de las componentes del tensor de Levi-Civita ($\eta^{123} = \eta^{231} = 1$, $\eta^{132} = -1$ y $\eta^{iik} = 0$) están dadas por

$$\begin{aligned} F^{12} &= -F^{21} = \eta^{123} \mathcal{B}_3, & F^{11} &= \eta^{11l} \mathcal{B}_l = 0, \\ F^{13} &= -F^{31} = \eta^{132} \mathcal{B}_2, & F^{22} &= \eta^{22l} \mathcal{B}_l = 0, \\ F^{23} &= -F^{32} = \eta^{231} \mathcal{B}_1, & F^{33} &= \eta^{33l} \mathcal{B}_l = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las componentes espaciales del tensor de Faraday en términos del tensor de

Levi-Civita están dadas por

$$F^{ik} = \eta^{ikl} \mathcal{B}_l.$$

Teniendo en cuenta que $\eta^{ikl} = \eta^{0ikl}$ y que $\mathcal{U}_0 = -1$, la expresión anterior puede reescribirse como

$$F^{ik} = -\mathcal{U}_0 \eta^{0ikl} \mathcal{B}_l = \eta^{ikl0} \mathcal{B}_l \mathcal{U}_0,$$

debido a que $\mathcal{B}_0 = \mathcal{U}_i = 0$, las componentes espaciales del tensor de Faraday están dadas por

$$F^{ik} = \eta^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{B}_\alpha \mathcal{U}_\beta = F^{\mu\nu}, \quad (262)$$

en la expresión anterior se cumple que $F^{0i} = F^{i0} = F^{\nu\nu} = 0$. Por lo tanto, al sumar las expresiones (261) y (262) el tensor de Faraday se transforma en

$$F^{\mu\nu} = \mathcal{U}^\mu \mathcal{E}^\nu - \mathcal{E}^\mu \mathcal{U}^\nu + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{B}_\alpha \mathcal{U}_\beta. \quad (263)$$

El tensor dual de Faraday se calcula a partir de la expresión (69), por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} {}^*F^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} \left(\mathcal{U}_\alpha \mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha \mathcal{U}_\beta + \eta_{\alpha\beta\theta\psi} \mathcal{B}^\theta \mathcal{U}^\psi \right) \\ {}^*F^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} \eta_{\alpha\beta\theta\psi} \mathcal{B}^\theta \mathcal{U}^\psi + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{U}_\alpha \mathcal{E}_\beta - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{E}_\alpha \mathcal{U}_\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^*F^{\mu\nu} &= -\frac{2}{2}(\delta^\mu_\theta \delta^\nu_\psi - \delta^\nu_\theta \delta^\mu_\psi) \mathcal{B}^\theta \mathcal{U}^\psi + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\beta\alpha} \mathcal{U}_\beta \mathcal{E}_\alpha - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{E}_\alpha \mathcal{U}_\beta \\
{}^*F^{\mu\nu} &= -(\mathcal{B}^\mu \mathcal{U}^\nu - \mathcal{U}^\mu \mathcal{B}^\nu) - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{E}_\alpha \mathcal{U}_\beta - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{E}_\alpha \mathcal{U}_\beta,
\end{aligned}$$

por lo tanto, el tensor dual de Faraday está dado por

$${}^*F^{\mu\nu} = \mathcal{U}^\mu \mathcal{B}^\nu - \mathcal{B}^\mu \mathcal{U}^\nu - \eta^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{E}_\alpha \mathcal{U}_\beta. \quad (264)$$

Apéndice D. Derivación del tensor energía-momentum del campo electromagnético.

El tensor energía momentum del campo electromagnético en términos del tensor de Faraday está dado por

$$T_{em}^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (265)$$

haciendo uso de la expresión (72) la ecuación anterior puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
T_{em}^{\mu\nu} &= \left(u^\mu e^\alpha - u^\alpha e^\mu + \varepsilon^{\mu\alpha\beta\psi} b_\beta u_\psi \right) \left(u^\nu e_\alpha - u_\alpha e^\nu + \varepsilon^\nu{}_\alpha{}^{\delta\theta} b_\delta u_\theta \right) \\
&\quad - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \left(u^\alpha e^\beta - u^\beta e^\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta\psi\kappa} b_\psi u_\kappa \right) \left(u_\alpha e_\beta - u_\beta e_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\sigma\rho} b_\sigma u_\rho \right),
\end{aligned}$$

expandiendo los productos se obtiene que

$$\begin{aligned}
T_{em}^{\mu\nu} = & u^\mu e^\alpha u^\nu e_\alpha - u^\mu e^\alpha u_\alpha e^\nu + u^\mu e^\alpha \varepsilon^\nu{}_\alpha{}^{\delta\theta} b_\delta u_\theta - u^\alpha e^\mu u^\nu e_\alpha + u^\alpha e^\mu u_\alpha e^\nu - u^\alpha e^\mu \varepsilon^\nu{}_\alpha{}^{\delta\theta} b_\delta u_\theta \\
& + \varepsilon^{\mu\alpha\beta\psi} b_\beta u_\psi u^\nu e_\alpha - \varepsilon^{\mu\alpha\beta\psi} b_\beta u_\psi u_\alpha e^\nu + \varepsilon^{\mu\alpha\beta\psi} b_\beta u_\psi \varepsilon^\nu{}_\alpha{}^{\delta\theta} b_\delta u_\theta - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} (u^\alpha e^\beta u_\alpha e_\beta \\
& - u^\alpha e^\beta u_\beta e_\alpha + u^\alpha e^\beta \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\sigma\rho} b_\sigma u_\rho - u^\beta e^\alpha u_\alpha e_\beta + u^\beta e^\alpha u_\beta e_\alpha - u^\beta e^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\sigma\rho} b_\sigma u_\rho \\
& + \varepsilon^{\alpha\beta\psi\kappa} b_\psi u_\kappa u_\alpha e_\beta - \varepsilon^{\alpha\beta\psi\kappa} b_\psi u_\kappa u_\beta e_\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta\psi\kappa} b_\psi u_\kappa \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\sigma\rho} b_\sigma u_\rho),
\end{aligned}$$

empleando las ecuaciones (18), (74) y sabiendo que la densidad tensorial de Levi-Civita al ser contraída dos veces con el mismo cuádrivector se anula ($\varepsilon^{\nu\alpha\delta\theta} u_\alpha b_\delta u_\theta = 0$), la expresión anterior se reduce a

$$\begin{aligned}
T_{em}^{\mu\nu} = & u^\mu u^\nu e^\alpha e_\alpha + u^\mu \varepsilon^{\nu\alpha\delta\theta} e_\alpha b_\delta u_\theta + u^\nu e^{\mu\alpha\beta\psi} e_\alpha b_\beta u_\psi - e^\mu e^\nu \\
& + \underbrace{\varepsilon^{\mu\alpha\beta\psi} \varepsilon^\nu{}_\alpha{}^{\delta\theta} b_\beta u_\psi b_\delta u_\theta}_I - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \left(-2e^\alpha e_\alpha + \underbrace{\varepsilon^{\alpha\beta\psi\kappa} \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\sigma\rho} b_\psi u_\kappa b_\sigma u_\rho}_II \right). \quad (266)
\end{aligned}$$

El término I está dado por

$$\begin{aligned}
I = & \varepsilon^{\mu\alpha\beta\psi} \varepsilon^\nu{}_\alpha{}^{\delta\theta} b_\beta u_\psi b_\delta u_\theta = g^{\nu\sigma} \varepsilon^{\alpha\beta\psi\mu} \varepsilon_{\alpha\delta\theta\sigma} b_\beta u_\psi b^\delta u^\theta \\
I = & g^{\nu\sigma} \left(-\delta^\beta{}_\delta \delta^\psi{}_\theta \delta^\mu{}_\sigma - \delta^\mu{}_\delta \delta^\beta{}_\theta \delta^\psi{}_\sigma - \delta^\psi{}_\delta \delta^\mu{}_\theta \delta^\beta{}_\sigma + \delta^\beta{}_\delta \delta^\mu{}_\theta \delta^\psi{}_\sigma \right. \\
& \left. + \delta^\psi{}_\delta \delta^\beta{}_\theta \delta^\mu{}_\sigma + \delta^\mu{}_\delta \delta^\psi{}_\theta \delta^\beta{}_\sigma \right) b_\beta u_\psi b^\delta u^\theta \\
I = & -g^{\mu\nu} b^\delta b_\delta u^\theta u_\theta - b^\mu u^\nu b_\theta u^\theta - u^\mu b^\nu u_\delta b^\delta + u^\mu u^\nu b_\delta b^\delta + g^{\mu\nu} u_\delta b^\delta b_\theta u^\theta + b^\mu b^\nu u_\theta u^\theta,
\end{aligned}$$

sabiendo que $u^\alpha u_\alpha = -1$ y $b^\alpha u_\alpha = 0$, la expresión anterior se reduce a

$$I = g^{\mu\nu} b_\alpha b^\alpha + u^\mu u^\nu b_\alpha b^\alpha - b^\mu b^\nu. \quad (267)$$

El término II está dado por

$$\begin{aligned} II &= \varepsilon^{\alpha\beta\psi\kappa} \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\sigma\rho} b_\psi u_\kappa b_\sigma u_\rho = \varepsilon^{\alpha\beta\psi\kappa} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\rho} b_\psi u_\kappa b^\sigma u^\rho \\ II &= -2 (\delta^\psi_\sigma \delta^\kappa_\rho - \delta^\kappa_\sigma \delta^\psi_\rho) b_\psi u_\kappa b^\sigma u^\rho = -2 (b_\sigma u_\rho b^\sigma u^\rho - b_\rho u_\sigma b^\sigma u^\rho) \\ II &= -2 b_\sigma b^\sigma u_\rho u^\rho = 2 b_\sigma b^\sigma. \end{aligned} \quad (268)$$

Reemplazando las expresiones (267) y (268) en la ecuación (266) se tiene que

$$\begin{aligned} T_{em}^{\mu\nu} &= u^\mu u^\nu e^\alpha e_\alpha + u^\mu \varepsilon^{\nu\alpha\delta\theta} e_\alpha b_\delta u_\theta + u^\nu e^{\mu\alpha\beta\psi} e_\alpha b_\beta u_\psi - e^\mu e^\nu \\ &\quad + g^{\mu\nu} b_\alpha b^\alpha + u^\mu u^\nu b_\alpha b^\alpha - b^\mu b^\nu - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (-e^\alpha e_\alpha + b_\sigma b^\sigma), \end{aligned}$$

sabiendo que $e^\alpha e_\alpha = e^2$ y $b^\alpha b_\alpha = b^2$ esta expresión puede ser reescrita como

$$T_{em}^{\mu\nu} = \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu \right) (e^2 + b^2) - e^\mu e^\nu - b^\mu b^\nu - u^\mu \varepsilon^{\nu\alpha\delta\theta} e_\alpha u_\delta b_\theta - u^\nu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\psi} e_\alpha u_\beta b_\psi. \quad (269)$$

Apéndice E. Derivación del tensor energía-momentum asociado a la polarización.

El tensor energía momentum que describe la polarización eléctrica y magnética de un ma-

terial está dado por

$$T_p^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (F^\nu{}_\alpha \mathcal{M}^{\alpha\mu} + F^\mu{}_\alpha \mathcal{M}^{\alpha\nu}), \quad (270)$$

haciendo uso de las expresiones (72) y (82) la ecuación anterior puede reescribirse como

$$\begin{aligned} 2T_p^{\mu\nu} = & \left(u^\nu e_\alpha - u_\alpha e^\nu + \varepsilon^\nu{}_{\alpha\beta\gamma} b^\beta u^\gamma \right) (p^\alpha u^\mu - p^\mu u^\alpha + \varepsilon^{\alpha\mu\sigma\rho} m_\sigma u_\rho) \\ & + \left(u^\mu e_\alpha - u_\alpha e^\mu + \varepsilon^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} b^\beta u^\gamma \right) (p^\alpha u^\nu - p^\nu u^\alpha + \varepsilon^{\alpha\nu\sigma\rho} m_\sigma u_\rho), \end{aligned}$$

expandiendo los productos se obtiene que

$$\begin{aligned} 2T_p^{\mu\nu} = & u^\nu e_\alpha p^\alpha u^\mu - u^\nu e_\alpha p^\mu u^\alpha + u^\nu e_\alpha \varepsilon^{\alpha\mu\sigma\rho} m_\sigma u_\rho - u_\alpha e^\nu p^\alpha u^\mu + u_\alpha e^\nu p^\mu u^\alpha - u_\alpha e^\nu \varepsilon^{\alpha\mu\sigma\rho} m_\sigma u_\rho \\ & + p^\alpha u^\mu \varepsilon^\nu{}_{\alpha\beta\gamma} b^\beta u^\gamma - p^\mu u^\alpha \varepsilon^\nu{}_{\alpha\beta\gamma} b^\beta u^\gamma + \varepsilon^\nu{}_{\alpha\beta\gamma} b^\beta u^\gamma \varepsilon^{\alpha\mu\sigma\rho} m_\sigma u_\rho + u^\mu e_\alpha p^\alpha u^\nu - u^\mu e_\alpha p^\nu u^\alpha \\ & + u^\mu e_\alpha \varepsilon^{\alpha\nu\sigma\rho} m_\sigma u_\rho - e^\mu u_\alpha p^\alpha u^\nu + e^\mu u_\alpha p^\nu u^\alpha - e^\mu u_\alpha \varepsilon^{\alpha\nu\sigma\rho} m_\sigma u_\rho + p^\alpha u^\nu \varepsilon^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} b^\beta u^\gamma \\ & - p^\nu u^\alpha \varepsilon^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} b^\beta u^\gamma + \varepsilon^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} b^\beta u^\gamma \varepsilon^{\alpha\nu\sigma\rho} m_\sigma u_\rho b^\beta u^\gamma, \end{aligned}$$

empleando las ecuaciones (18), (100) y sabiendo que la densidad tensorial de Levi-Civita al ser contraída dos veces con el mismo cuadrivector se anula ($\varepsilon^{\alpha\mu\sigma\rho} u_\alpha m_\sigma u_\rho = 0$), la expresión anterior se reduce a

$$\begin{aligned} 2T_p^{\mu\nu} = & 2e_\alpha p^\alpha u^\mu u^\nu - p^\mu e^\nu - e^\mu p^\nu - u^\nu \varepsilon^{\mu\alpha\sigma\rho} e_\alpha m_\sigma u_\rho + u^\mu \varepsilon^{\nu\alpha\beta\gamma} p_\alpha b_\beta u_\gamma - u^\mu \varepsilon^{\nu\alpha\sigma\rho} e_\alpha m_\sigma u_\rho \\ & + u^\nu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} p_\alpha b_\beta u_\gamma + \underbrace{\varepsilon^\nu{}_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\alpha\mu\sigma\rho} b^\beta u^\gamma m_\sigma u_\rho}_I + \underbrace{\varepsilon^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\alpha\nu\sigma\rho} b^\beta u^\gamma m_\sigma u_\rho}_II. \end{aligned} \quad (271)$$

El término I está dado por

$$\begin{aligned}
 I &= \varepsilon^\nu_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\alpha\mu\sigma\rho} b^\beta u^\gamma m_\sigma u_\rho = -g^{\nu\varphi} \varepsilon_{\alpha\varphi\beta\gamma} \varepsilon^{\alpha\mu\sigma\rho} b^\beta u^\gamma m_\sigma u_\rho \\
 I &= -g^{\nu\varphi} \left(-\delta^\mu_\varphi \delta^\sigma_\beta \delta^\rho_\gamma - \delta^\rho_\varphi \delta^\mu_\beta \delta^\sigma_\gamma - \delta^\sigma_\varphi \delta^\rho_\beta \delta^\mu_\gamma + \delta^\mu_\varphi \delta^\rho_\beta \delta^\sigma_\gamma \right. \\
 &\quad \left. + \delta^\sigma_\varphi \delta^\mu_\beta \delta^\rho_\gamma + \delta^\rho_\varphi \delta^\sigma_\beta \delta^\mu_\gamma \right) b^\beta u^\gamma m_\sigma u_\rho \\
 I &= g^{\mu\nu} b^\sigma m_\sigma u^\rho u_\rho + u^\nu b^\mu u^\sigma m_\sigma + m^\nu u^\mu u_\beta b^\beta - g^{\mu\nu} b^\rho u_\rho u^\sigma m_\sigma - m^\nu b^\mu u_\gamma u^\gamma - u^\mu u^\nu b^\alpha m_\alpha,
 \end{aligned}$$

sabiendo que $u^\alpha u_\alpha = -1$, $u^\alpha b_\alpha = 0$ y $u^\alpha m_\alpha = 0$ la expresión anterior se reduce a

$$I = -b^\alpha m_\alpha g^{\mu\nu} + b^\mu m^\nu - b^\alpha m_\alpha u^\mu u^\nu. \quad (272)$$

El término II está dado por

$$\begin{aligned}
 II &= \varepsilon^\mu_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\alpha\nu\sigma\rho} b^\beta u^\gamma m_\sigma u_\rho = -g^{\mu\varphi} \varepsilon_{\alpha\varphi\beta\gamma} \varepsilon^{\alpha\nu\sigma\rho} b^\beta u^\gamma m_\sigma u_\rho \\
 II &= -g^{\mu\varphi} \left(-\delta^\nu_\varphi \delta^\sigma_\beta \delta^\rho_\gamma - \delta^\rho_\varphi \delta^\nu_\beta \delta^\sigma_\gamma - \delta^\sigma_\varphi \delta^\rho_\beta \delta^\nu_\gamma + \delta^\nu_\varphi \delta^\rho_\beta \delta^\sigma_\gamma \right. \\
 &\quad \left. + \delta^\sigma_\varphi \delta^\nu_\beta \delta^\rho_\gamma + \delta^\rho_\varphi \delta^\sigma_\beta \delta^\nu_\gamma \right) b^\beta u^\gamma m_\sigma u_\rho \\
 II &= g^{\mu\nu} b^\sigma m_\sigma u^\rho u_\rho + u^\mu b^\nu u^\sigma m_\sigma + m^\mu u^\nu b^\rho u_\rho - g^{\mu\nu} b^\rho u_\rho u^\sigma m_\sigma - m^\mu b^\nu u^\rho u_\rho - u^\mu u^\nu b^\sigma m_\sigma,
 \end{aligned}$$

sabiendo que $u^\alpha u_\alpha = -1$, $u^\alpha b_\alpha = 0$ y $u^\alpha m_\alpha = 0$ la expresión anterior se reduce a

$$II = -b^\alpha m_\alpha g^{\mu\nu} + m^\mu b^\nu - u^\mu u^\nu b^\alpha m_\alpha, \quad (273)$$

sumando las ecuaciones (272) y (273) se tiene que

$$I + II = -2b^\alpha m_\alpha (g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu) + b^\mu m^\nu + m^\mu b^\nu. \quad (274)$$

Reemplazando la expresión anterior en la ecuación (271) se tiene que

$$\begin{aligned} 2T_p^{\mu\nu} = & 2e_\alpha p^\alpha u^\mu u^\nu - p^\mu e^\nu - e^\mu p^\nu - u^\nu \varepsilon^{\mu\alpha\sigma\rho} e_\alpha m_\sigma u_\rho + u^\mu \varepsilon^{\nu\alpha\beta\gamma} p_\alpha b_\beta u_\gamma - u^\mu \varepsilon^{\nu\alpha\sigma\rho} e_\alpha m_\sigma u_\rho \\ & + u^\nu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} p_\alpha b_\beta u_\gamma - 2b^\alpha m_\alpha (g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu) + b^\mu m^\nu + m^\mu b^\nu, \end{aligned}$$

por lo tanto el tensor energía-momentum asociado a la polarización está dado por

$$\begin{aligned} T_p^{\mu\nu} = & -b^\alpha m_\alpha (g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu) + \frac{1}{2} (b^\mu m^\nu + m^\mu b^\nu) + e^\alpha p_\alpha u^\mu u^\nu - \frac{1}{2} (p^\mu e^\nu + e^\mu p^\nu) \\ & - \frac{1}{2} u^\mu \varepsilon^{\nu\alpha\sigma\beta} (e_\alpha m_\sigma u_\beta + b_\alpha p_\sigma u_\beta) - \frac{1}{2} u^\nu \varepsilon^{\mu\alpha\sigma\beta} (e_\alpha m_\sigma u_\beta + b_\alpha p_\sigma u_\beta). \end{aligned} \quad (275)$$

Apéndice F. Norma al cuadrado de la velocidad v^2 .

A partir de la ecuación (225) puede mostrarse que la relación $v^2 = v^i v_i$ está dada por

$$\begin{aligned} v^2 = & \left[\frac{S^i - \left(1 + \frac{\chi_{em}}{2}\right) \eta^{ikl} E_k B_l}{Z} \right] \left[\frac{S_i - \left(1 + \frac{\chi_{em}}{2}\right) \eta_{imn} E^m B^n}{Z} \right] \\ v^2 = & \frac{1}{Z^2} \left[S^i S_i - 2 \left(1 + \frac{\chi_{em}}{2}\right) \eta^{ikl} S_i E_k B_l + \left(1 + \frac{\chi_{em}}{2}\right)^2 \underbrace{\eta^{ikl} \eta_{imn} E_k B_l E^m B^n}_I \right]. \end{aligned} \quad (276)$$

El término I está dado por

$$\begin{aligned}
 I &= \eta^{ikl} \eta_{imn} E_k B_l E^m B^n \\
 I &= \left(\delta^k_m \delta^l_n - \delta^l_m \delta^k_n \right) E_k B_l E^m B^n = E_m B_n E^m B^n - E_n B_m E^m B^n \\
 I &= (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 = E^2 B^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2,
 \end{aligned} \tag{277}$$

reemplazando (277) en la ecuación (276), se tiene que v^2 está dado por

$$v^2 = \frac{S^2 - (2 + \chi_{em}) \eta^{ikl} S_i E_k B_l + \left(1 + \frac{\chi_{em}}{2}\right)^2 [E^2 B^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2]}{Z^2}. \tag{278}$$

Apéndice G. Derivada del factor de Lorentz $W'(Z)$.

La derivada del factor de Lorentz respecto a la variable Z está dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{dW(Z)}{dZ} &= \frac{d}{dZ} \left\{ \left[1 - \frac{S^2 - (2 + \chi_{em}) \eta^{ikl} S_i E_k B_l + \left(1 + \frac{\chi_{em}}{2}\right)^2 [E^2 B^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2]}{Z^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \\
 \frac{dW(Z)}{dZ} &= \frac{1}{2} W(Z)^3 \underbrace{\frac{d}{dZ} \left(\frac{1}{Z^2} \right)}_I \left\{ S^2 - (2 + \chi_{em}) \eta^{ikl} S_i E_k B_l + \left(1 + \frac{\chi_{em}}{2}\right)^2 [E^2 B^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2] \right\}.
 \end{aligned} \tag{279}$$

La derivada I está dada por

$$I = \frac{d}{dZ} \left(\frac{1}{Z^2} \right) = -\frac{2}{Z^3}.$$

Reemplazando I en (279), se tiene que la derivada del factor de Lorentz respecto a la variable Z se transforma en

$$\frac{dW(Z)}{dZ} = \left[\frac{W(Z)}{Z} \right]^3 \left\{ (2 + \chi_{em}) \eta^{ikl} S_i E_k B_l - S^2 - \left(1 + \frac{\chi_{em}}{2} \right)^2 \left[E^2 B^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right] \right\}. \quad (280)$$