MÉTODO UNIVERSAL PARA RESOLVER DESIGUALDADES EN EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

René Ortiz Gómez

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2010

MÉTODO UNIVERSAL PARA RESOLVER DESIGUALDADES EN EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

René Ortiz Gómez

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Director:

Profesor Ricardo Monturiol Martínez

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2010

DEDICATORIA

A mis hijas Angy Stefania, Karen Yarid y María José, que siempre han sido mi motivación para seguir avanzando en la vida.

AGRADECIMIENTOS

A los profesores Gerardo Latorre Bayona y Ricardo Monturiol Martínez, por su valioso aporte para la realización de este trabajo.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

RESUMEN

TÍTULO: MÉTODO UNIVERSAL PARA RESOLVER DESIGUALDADES EN EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES.*

AUTOR: RENÉ ORTIZ GÓMEZ.†

PALABRAS CLAVES: MÉTODO UNIVERSAL, TEOREMA DE BOLZANO, RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES, NÚMEROS REALES.

CONTENIDO: En este trabajo se formaliza un método alternativo que permite resolver desigualdades, planteadas en el marco del sistema de los números reales. El procedimiento presentado se fundamenta en un corolario del teorema de Bolzano y además posibilita realizar un bosquejo gráfico de la función. El trabajo también introduce un paquete informático que permite verificar las soluciones presentadas y graficar las funciones, empleando un procedimiento relativamente sencillo. El documento comprende tres capítulos escritos en un lenguaje claro, que permite ser consultado por estudiantes de undécimo grado y primer año de universidad.

El trabajo contiene conceptos fundamentales sobre el sistema de los números reales, su representación decimal y, para los racionales, el paso de representación decimal a fraccionaria y viceversa. También se presenta el concepto de densidad y la relación entre los números reales y la recta numérica. Asimismo, se presentan axiomas y teoremas de interés para el desarrollo del método presentado.

Al introducir el método universal para resolver desigualdades, se presenta el concepto de intervalo y se enuncian teoremas relacionados. El método se ilustra con varios ejemplos, en los que se sigue paso a paso el procedimiento propuesto. También se trabajan los conceptos de valor absoluto y distancia, junto con propiedades fundamentales para su aplicación en la resolución de desigualdades. La comprensión de lo expuesto se refuerza con ejemplos de aplicación, resueltos a partir de los conceptos presentados y aplicando el método universal propuesto.

Como ejemplo de tecnología computacional, se presenta el programa “Derive”. Esta es una opción interesante por su facilidad de utilización y la forma natural como se escriben las expresiones que se desean resolver, dibujar, derivar, etc. Para ilustrar su utilidad, se resuelven ejercicios de desigualdades, siguiendo el procedimiento propuesto para el método universal formalizado en este trabajo de grado.

* Proyecto de grado.

† Facultad de ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Ricardo Monturiol Martínez.

SUMMARY

TITLE: UNIVERSAL METHOD TO SOLVE INEQUALITIES INTO THE REAL NUMBER SYSTEM.[‡]

AUTHOR: RENÉ ORTIZ GÓMEZ.[§]

KEY WORDS: UNIVERSAL METHOD, BOLZANO'S THEOREM, INEQUALITIES SOLUTION, REAL NUMBER SYSTEM.

CONTENT:

This work includes an alternative method that allows students to resolve inequalities, into the real number system. The presented procedure is based on a corollary of the Bolzano's theorem and also enables to perform a graphical outline of the function. The work also introduces a software package called Derive. It is used to verify the presented solutions and plot functions using a relatively simple procedure. The document includes three chapters written as a reference document for students in 11th grade and first University year.

The work contains fundamental subjects on the real number system and their decimal representation. Also introduces the concept of density and the relationship between the real numbers and the number line. The document also has axioms and theorems of interest for the development of the proposed method to solve inequalities.

To enter the universal method to resolve inequalities, the document introduces the interval concept and includes related theorems. The method is illustrated by examples, which follows the proposed procedure step by step. It is also worked the distance concept and the absolute value concept, along with basic properties useful for the inequalities exercises resolution. To better understand the presented concepts, topics are reinforced with application examples, using the proposed universal method.

As an example of computer technology application, the Derive software package is presented. This is an interesting option for its easy use and the natural way as expressions to resolve, draw, derive, etc., are written. To illustrate its usefulness, it is used to resolve inequalities exercises, according to the procedure proposed for the universal method formalized in this undergraduate degree work.

[‡] Undergraduate degree work.

[§] Sciences Faculty. School of Mathematics. Director: Ricardo Monturiol Martínez.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo tiene como objeto de estudio la formulación y aplicación del método universal para resolver desigualdades, en el sistema de los números reales. Se trata de mostrar una forma alterna para resolver las desigualdades, sin tener que recurrir exclusivamente a las propiedades. Asimismo, el procedimiento descrito permite realizar un bosquejo, bastante aproximado, de la gráfica de la función. Además, se introduce un paquete informático que permite verificar las soluciones presentadas y graficar las funciones, empleando un procedimiento relativamente sencillo. Con ese propósito, el trabajo se divide en tres capítulos escritos en un lenguaje claro, de tal manera que permita su consulta por parte de estudiantes de undécimo grado y primer año de universidad.

En el capítulo 1 se introduce el concepto de los números reales. Para ello se parte de la noción de números naturales y la de los números enteros. Asimismo se definen los números racionales y su representación como decimales y como cocientes de dos enteros. Se enfatiza en la representación de los números reales por medio de decimales y se establece claramente la diferencia entre los decimales periódicos y los no periódicos. También se trabaja el concepto de densidad y la relación uno a uno entre los números reales y la recta numérica. Finalmente se presentan axiomas y teoremas de interés para el desarrollo de este trabajo de grado.

En el capítulo 2 se introduce el método universal para resolver desigualdades. Con ese propósito, inicialmente se presenta el concepto de intervalo y se especifican las clases de intervalos. Se enuncian dos teoremas relacionadas con desigualdades y se procede a describir el método. Para apoyar su comprensión, se presentan algunos ejemplos en los que se sigue paso a paso el procedimiento propuesto. También se define el concepto de valor absoluto y se introducen propiedades fundamentales para su aplicación en la resolución de desigualdades.

Asimismo, se presenta el concepto de distancia y su aplicación en la resolución de desigualdades, acompañado de ejercicios que refuerzan su comprensión. Finalmente, el capítulo se cierra con la aplicación del método universal propuesto para la resolución de desigualdades que contienen expresiones con valor absoluto.

El capítulo 3 se centra en la presentación y aplicación del programa “Derive”. Se eligió este programa por su facilidad de utilización y la forma natural como se escriben las expresiones que se desean resolver, dibujar, derivar, etc. El software descrito permite resolver problemas de algebra, geometría, trigonometría y cálculo, con diferentes grados de complejidad. Derive es un ejemplo claro de utilización de nuevas tecnologías para desarrollar matemática simbólica y numérica en computadores personales. Para ilustrar su utilidad, al final del capítulo se resuelven ejercicios de desigualdades, siguiendo el procedimiento propuesto para el método universal formalizado en este trabajo de grado.

1. EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

En este capítulo se introduce el concepto de los números reales. Para ello se parte de nociones sencillas de los números naturales y de los números enteros. Posteriormente se definen los números racionales y su representación como decimales y como cocientes de dos enteros. Se enfatiza en la representación de los números reales por medio de decimales y se establece claramente la diferencia entre los decimales periódicos y los no periódicos. También se trabaja el concepto de densidad y la relación uno a uno entre los números reales y la recta numérica. Finalmente se presentan axiomas y teoremas de interés para el desarrollo de este trabajo de grado.

1.1 LOS NÚMEROS NATURALES (N) Y LOS ENTEROS (Z): RELACIÓN "SIGUIENTE DE" N y Z

¿Cuáles son los números reales y cuáles son sus propiedades? Para responder esta inquietud se empieza con algunos sistemas numéricos más simples.

Los números más simples son los naturales: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,… Con ellos es posible contar cosas tan diferentes como: el dinero, los años, los integrantes de la familia, etc.

Para introducir los números naturales se empieza con el 1, cuya existencia está asegurada por representar la existencia de un único elemento. El 1 no tiene antecesor en el conjunto de los naturales, pero todos los naturales, incluso el 1 tienen un sucesor. De ahí se sigue que 1+1 se representa por el 2, 2+1 por el 3, 3+1 por el 4, y así sucesivamente. Los números 1, 2, 3, 4,… obtenidos de este modo, por la adición repetida del 1, son positivos y reciben el nombre de números Naturales.

Rigurosamente esta descripción de los naturales no es precisa, porque no se ha presentado una explicación de lo que se entiende por “y así sucesivamente” o por “adición repetida del 1”. Desde el lenguaje el significado puede ser claro, pero es necesario dar una definición más precisa de los naturales. Un método consiste en introducir primero la noción de conjunto inductivo.

DEFINICION DE CONJUNTO INDUCTIVO: Un conjunto de números se denomina conjunto inductivo si tiene las siguientes propiedades:

a) El número 1 pertenece al conjunto.

b) Para todo x en el conjunto, el número x+1 pertenece también al conjunto.

Por ejemplo, R es un conjunto inductivo, también lo es el conjunto de R+. Se definen los naturales como aquellos números reales que pertenecen a todo conjunto inductivo.

Si a los números naturales se agregan los inversos aditivos y el cero, se obtienen los Enteros: -∞… -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5… ∞

¿Pero cuáles son los inversos aditivos?

Para cada número natural n existe un número m, que ya no es natural, porque es negativo, tal que n + m = m + n = 0. Ejemplo:

El inverso aditivo de 8 es -8, porque: 8 + (-8) = -8 + 8 = 0.

Con los números enteros es posible ir más allá de simplemente contar cosas. Sin embargo, cuando se trata de medir el peso de una partícula, la longitud de un cuerpo o el tiempo que demora una actividad (recorrido, carrera, trabajo), los enteros son imprecisos. Están demasiado separados para dar la suficiente confiabilidad en el resultado. Por lo tanto, se requieren los cocientes (razones) de los enteros, tales como: $\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{5}{2}, \frac{-1}{3}$ ...

Los cocientes entre enteros no deben incluir ningún número de la forma $\frac{a}{0}$, donde a $\in$ Z, ya que la división entre cero (0) no está definida. Es decir, es imposible dividir entre cero (0). Estos números reciben el nombre de Racionales (los que se pueden escribir de la forma $\frac{m}{n}$, donde m y n $\in$ Z, con n ≠ 0)

¿Sirven los números racionales para medir todas las longitudes? NO

Aplicando el teorema de Pitágoras se puede determinar que $\sqrt{2}$ es la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados tienen longitudes de uno (1). Es posible medir los catetos de ese triángulo y representar esa medida como el cociente entre dos enteros, pero $\sqrt{2}$ no se puede escribir de esa forma. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ no es un racional. También hay otros números que no pertenecen al conjunto de los racionales: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ etc. Tales números se denominan Irracionales.

Considerando todos los números (racionales e irracionales) que pueden utilizarse para representar las medidas de pesos, volúmenes, longitudes, etc., junto con sus inversos aditivos y el cero (0), se conforma el conjunto de los números reales.

$N \subset Z \subset Q \subset R$

Donde: $\subset$ es el símbolo de inclusión o contenencia de conjuntos, se lee “es un subconjunto de”; N naturales, Z enteros, Q racionales y R reales.

1.2 LOS NÚMEROS RACIONALES COMO DECIMALES Y COMO COCIENTES DE ENTEROS

Todo número racional puede ser escrito como decimal, porque siempre se puede escribir como un cociente de dos enteros. Si se divide el numerador entre el denominador se obtiene un decimal. Ejemplos:

$$\frac{3}{4} = 0.375$$
$$\frac{1}{5} = 0.2$$
$$\frac{15}{11} = 1.3636363636\ldots$$
$$\frac{3}{7} = 0.428514285142851\ldots$$

También los números irracionales pueden expresarse como decimales. Ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1.4142135623\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1.7320508075\ldots$$
$$\pi = 3.1415926535\ldots.$$

Con estos ejemplos y con lo explicado hasta ahora, se concluye que todo racional se puede escribir como un decimal. Sin embargo, todo decimal no se puede escribir como un racional.

1.3 REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES POR MEDIO DE DECIMALES

Un número real de la forma:

$$m = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}, \qquad (1)$$

donde a_0 es un entero y a_1, a_2… a_n son números que satisfacen las desigualdades $0 \leq a_i \leq 9$, se escribe corrientemente en la forma más breve siguiente:

$$m = a_0.a_1a_2\ldots a_n$$

Se dice que esta es la representación decimal finita de m. Ejemplos:

$$\frac{1}{2} = 0 + \frac{5}{10} = 0.5;$$

$$\frac{1}{50} = 0 + \frac{0}{10} + \frac{2}{10^2} = 0.02;$$

$$\frac{29}{4} = 7 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} = 7.25$$

Números reales de esta clase son necesariamente racionales y todos ellos son de la forma m = $\frac{a}{10^n}$, donde a es un entero. Sin embargo, no todos los números racionales pueden expresarse por medio de una representación decimal finita. Por ejemplo: si $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$, entonces 3a = 10^n para algún entero a. Pero esto es imposible, puesto que 3 no es divisor de ninguna potencia de 10. Por tanto, $\frac{1}{3}$ no tiene una representación decimal finita.

No obstante, cualquier número real x > 0, puede aproximarse con un error tan pequeño como se quiera, por medio de una suma de la forma m = $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$; si se toma n suficientemente grande. La razón de ello puede verse mediante el siguiente argumento geométrico: si x no es entero, x está comprendido entre dos enteros consecutivos; es decir, $a_0 < x < a_0+1$. Una vez ubicado este intervalo, el segmento que une a_0 y a_0+1 puede subdividirse en diez partes iguales. Si x no coincide con uno de estos puntos de subdivisión, x debe estar comprendido entre dos de ellos. Esto da lugar a un par de desigualdades de la forma:

$a_0 + \frac{a_1}{10} < x < a_0 + \frac{a_1+1}{10}$, donde a_1 es un entero ($0 \leq a_1 \leq 9$). Se divide ahora el segmento que une $a_0 + \frac{a_1}{10}$ y $a_0 + \frac{a_1+1}{10}$, en diez partes iguales (cada una de longitud 10^{-2}) y se continúa el proceso. Si después de un número finito de subdivisiones, uno de los puntos coincide con x, x es un número de la forma m = $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$. Si no es así, el proceso puede continuar indefinidamente y se generaría un conjunto de infinitos enteros $a_1, a_2,\ldots$ En este caso, se dice que x = $a_0.\, a_1\, a_2\, a_3,\ldots$ sería una representación decimal infinita.

Por lo expuesto anteriormente, después de n subdivisiones x satisface las desigualdades

$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots \ldots + \frac{a_n}{10^n} < x < a_0 + \frac{a_1+1}{10} + \frac{a_2+1}{10^2} + \cdots + \frac{a_n+1}{10^n}$

Las cuales dan dos aproximaciones de x, una por exceso y otra por defecto, por medio de decimales finitos que difieren en 10^{-n}. Por lo tanto, se puede lograr un grado de aproximación deseado sin más que tomar n suficientemente grande. Si $x = \frac{1}{3}$, es fácil comprobar que $a_0 = 0$ y $a_n = 3$ para cada $n \geq 1$. Por lo tanto, la aproximación decimal correspondiente es:

$$\frac{1}{3} = 0.33333333 \ldots$$

A diferencia de los números racionales, en los que unos tienen una representación decimal finita y otros tienen una representación decimal infinita, cada número irracional tiene una representación decimal infinita. Por ejemplo, si $x = \sqrt{2}$ se pueden calcular, por medio del tanteo, tantos dígitos como se deseen de su aproximación decimal. Pues $\sqrt{2}$ está comprendido entre 1 y 2, dado que $(1)^2 < 2 < (2)^2$. El siguiente decimal se obtiene dividiendo el intervalo entre 1 y 2 en sub-intervalos de 10^{-1} y empezando con el sub-intervalo más pequeño (en este caso 1.1) se eleva al cuadrado y se compara con 2, luego se prueba con 1.2, con 1.3 y así sucesivamente, hasta que se obtenga un valor mayor que 2. De esta forma se obtiene que $\sqrt{2}$ está entre 1.4 y 1.5, ya que $(1.4)^2 < 2 < (1.5)^2$. Análogamente, dividiendo el intervalo entre 1.4 y 1.5 en sub-intervalos de 10^{-2}, elevando al cuadrado y comparando con 2 se obtiene la desigualdad $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$. Con ese procedimiento se obtienen las siguientes aproximaciones sucesivas:

$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$; $\quad 1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$; $\quad 1.41421 < \sqrt{2} < 1.41422$.

Obsérvese que el proceso anterior genera una sucesión de intervalos de longitud 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3},… cada uno contenido en el anterior y conteniendo cada uno el punto x. Esto es un ejemplo del llamado encaje de intervalos a partir de los racionales; concepto que se utiliza algunas veces como base para construir los números irracionales a partir de los racionales.

Lo anteriormente expuesto lleva a definir expresiones decimales con ayuda del axioma del extremo superior:

Si x es un número real positivo dado, sea a_0 el mayor entero tal que $a_0 \leq x$. Tomando a_0, sea a_1 el mayor entero tal que $a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x$.

En general, determinados $a_0,\ a_1, \ldots a_{n-1},$ sea a_n el mayor entero tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x. \qquad (2)$$

Sea S el conjunto de todos los números a_i obtenidos de esta forma, para i = 0, 1, 2, 3,…, n. Puesto que S es no vacio y acotado superiormente, tiene un extremo superior que coincide con x. Los enteros $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ así obtenidos se pueden utilizar para definir una expresión decimal de x, poniendo:

$$x = a_0.a_1a_2\ldots a_n$$

Donde el dígito a_n, que ocupa el lugar n, es el mayor entero que satisface la ecuación (2). De esta forma es posible escribir:

$$\frac{1}{8} = 0.125$$

Si en (2) se sustituye el signo de la desigualdad ≤ por <, se obtiene una definición de la expresión decimal algo distinta. El extremo superior de todos los números de la forma $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$ es también x. Sin embargo, los enteros $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ no han de ser necesariamente los mismos que satisfacen (2). Por ejemplo: si se aplica la segunda definición a $x = \frac{1}{8}$, se encuentra $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ y $a_n = 9$ para cada $n \geq 4$. Esto conduce a la representación decimal infinita:

$$\frac{1}{8} = 0.124999999999999 \ldots$$

El que dos números reales puedan tener dos representaciones decimales distintas, es un simple ejemplo del hecho que dos conjuntos distintos de números reales pueden tener un mismo extremo superior.

1.4 DECIMALES PERIÓDICOS Y NO PERIÓDICOS

La representación decimal de un número racional o bien es finita o se repite en ciclos regulares hasta infinito. Ejemplos:

$\frac{3}{4}$ = 0.75 es finita

$\frac{13}{11}$ = 1.18181818181818… se repite en ciclos regulares hasta infinito

No obstante, un decimal finito puede ser considerado como uno infinito en el que se repiten ceros. Ejemplo:

$\frac{3}{4}$ = 0.75 = 0.7500000000000000000000…

Por lo tanto, todo número racional puede escribirse como un decimal periódico. La reciproca también es cierta: todo decimal periódico representa un número racional.

Para reforzar este concepto se consideran algunos ejemplos:

Demuestre que x = 0.136136136… y y = 0.27171717171717…. representan números racionales.

Solución para x: Teniendo en cuenta el número de dígitos que se repite, en este caso 3, y el número de dígitos que no se repite, en este caso 0, se resta x de 10^3 x y después se despeja x. Entonces,

$$\begin{array}{rl} 10^0 * 10^3\, x = & 136.136136\ldots \\ \underline{-\ \ 10^0 * x \ =} & \underline{0.136136136\ldots} \\ 999x = & 136 \end{array}$$

De esta forma, $x = \frac{136}{999}$

Para el número dado “y” hay dos dígitos que se repiten y uno que no se repite:

$$10 * 10^2 y = 271.7171717171 \ldots$$
$$\underline{-\ 10 * y \ = \quad 2.7171717171 \ldots.}$$
$$990y = 269$$

Entonces, $y = \frac{269}{990}$

En resumen, si los decimales que no se repiten constan de m dígitos y los que se repiten en cada ciclo constan de k dígitos, se pueden seguir cuatro pasos para llegar al número racional: el primer paso consiste en multiplicar el decimal periódico por 10^m y por 10^k. En el segundo paso, se multiplica el decimal periódico por 10^m. En el tercer paso se resta este último resultado del primero y finalmente, en el cuarto paso, se despeja la variable, para obtener el número racional.

Ejemplo: demuestre que x = 3.2417777777… representa un número racional.

Solución: El número de dígitos decimales que no se repite es m = 3 (en este caso el 2, el 4 y el 1) y el número de dígitos que se repite es k = 1 (en este caso el 7). Aplicando los cuatro pasos:

Primer paso: $10^3 * 10 * x = 32\,417.77777777\ldots$

Segundo paso: $10^3 * x = 3\,241.77777777\ldots$

Tercer paso:

$$10^4 x = 32\,417.77777777\ldots$$
$$\underline{-\ 10^3 x = \ 3\,241.77777777\ldots}$$
$$9\,000 x = 29\,176$$

Cuarto paso: $x = \frac{29\,176}{9\,000} = \frac{3\,647}{1\,125}$

De otra parte, las representaciones decimales de números irracionales no se repiten en ciclos. Recíprocamente, un decimal no periódico debe representar un número irracional, ejemplo:

π = 3.1415926535… Si conociéramos todos los decimales nunca habría un ciclo.

Resumiendo, los números reales se dividen en racionales e irracionales:

Números reales

Números racionales (Decimales periódicos)	Números irracionales (Decimales no periódicos)

1.5 DENSIDAD

Entre dos números reales diferentes cualesquiera a y b, hay otro número real. En particular c = $\frac{a+b}{2}$ es un número ubicado en la mitad entre a y b. Dado que también hay un número d entre a y c y otro número e entre c y b, y como este argumento puede repetirse *ad infinitum*, es obligatorio aceptar la sorprendente pero correcta conclusión de que entre dos números reales cualesquiera (no importa lo cercano que se encuentren) hay una infinidad de otros números reales.

.___________.___________.___________.___________.
a d c = $\frac{a+b}{2}$ e b

Esto destruirá de una vez para siempre nociones tales como “el número que sigue de 5”; puesto que no hay tal número. En realidad sólo es posible decir que entre dos números reales distintos, hay tanto números racionales como irracionales (una cantidad infinita de cada especie).

Ejemplo: Encontrar un número racional y uno irracional comprendido entre a y b sí:

a = 0.452386980…
b = 0.452387000…

Solución:

Sea c = $\frac{a+b}{2}$ = 0.452386990000000… y d = 0.45238699010010001…

Entonces c es racional (termina en ciclo de ceros) mientras que d es irracional (obsérvese el patrón de insertar más y más ceros entre los 1). Resulta claro que $a < c < d < b$. Se deja como ejercicio para el lector interesado, hallar otros ejemplos.

Una forma matemática de describir la situación que se ha estado analizando, consiste en decir que tanto los números racionales como los irracionales son densos en la recta real. Todo número tiene tantos vecinos racionales como irracionales arbitrariamente cercanos a él. Los dos tipos de números están entrelazados en forma inseparable entre sí. Una aplicación de esta propiedad de densidad recién descrita, es que se puede aproximar cualquier número irracional, tanto como se desee, mediante números racionales. Por ejemplo, la sucesión de números racionales 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.41423,… Sigue en forma regular e indefinida hacia la raíz de 2 ($\sqrt{2}$). Avanzando lo suficiente en esta sucesión, se puede llegar tan cerca de $\sqrt{2}$ como se quiera.

1.6 LOS NÚMEROS REALES: CORRESPONDENCIA ENTRE LA RECTA NUMÉRICA Y LA REAL

Es posible asociar los números reales con los puntos sobre una recta l, de manera que a cada número real le corresponda uno y sólo un punto de la recta l, y viceversa, a cada punto P de l le corresponda exactamente un número real. A una asociación tal entre dos conjuntos se le llama correspondencia uno a uno. Primero se elige un punto arbitrario cero (0), sobre la recta, llamado origen, y se le asigna el número 0; luego se determinan los puntos asociados con los enteros marcando a ambos lados de 0 segmentos sucesivos de la misma longitud. Los puntos correspondientes a los números racionales, por ejemplo $\frac{23}{5}$ y $\frac{-1}{2}$ se obtienen dividiendo los segmentos anteriores. Los puntos asociados a ciertos números irracionales, como raíz de 2 ($\sqrt{2}$), pueden hallarse por construcción geométrica, con regla y compás. Otros números irracionales, como π, pueden aproximarse con el grado de precisión que se quiera, localizando sucesivamente los puntos correspondientes a 3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, etc[**]. Se puede mostrar que a cada número irracional le corresponde un único punto sobre l, e inversamente, a cada punto que no está asociado a un número racional le corresponde un número irracional.

```
                          -1/2              π     23/5
-.----.----.----.----.----.--.--.----.----.----.----.---.-.----.----.-> l
-6  -5  -4   -3   -2   -1    0    1    2    3    4     5    6
```

Al número a, asociado al punto A, sobre la recta l, se le llama coordenada de A. Una asignación de coordenadas a los puntos de l se llama un sistema coordenado para l, y l se llama una recta coordenada o recta real. Se le puede asignar una dirección a l, tomando la dirección positiva hacia la derecha y la dirección negativa hacia la izquierda. La dirección positiva se distingue poniendo una punta de flecha en l como en la gráfica.

Los números reales correspondientes a los puntos a la derecha de 0 en la gráfica se llaman números reales positivos, mientras que aquellos correspondientes a los puntos a la izquierda de 0 se llaman números reales negativos. El número real 0 no es positivo ni negativo.

1.7 AXIOMAS Y TEOREMAS IMPORTANTES EN EL SISTEMA DE NÚMEROS REALES

AXIOMAS DE CUERPO: Junto con el conjunto de los números reales se supone la existencia de dos operaciones llamadas adición y multiplicación. Así, para cada par de números reales x e y se puede formar la suma de x e y, que es otro número

[**] También se puede aproximar el valor de π mediante la conocida construcción geométrica de la circunferencia.

real designado por x + y, y el producto de x por y designado por (xy) o x·y. La suma x + y y el producto x·y están unívocamente determinados por x e y. A los signos + y · no se les asigna otro significado que el precisado en los axiomas.

AXIOMA 1: PROPIEDAD CLAUSURATIVA: $x + y, xy \in R$

AXIOMA 2: PROPIEDAD CONMUTATIVA: $x + y = y + x$; $y \cdot x = x \cdot y$

AXIOMA 3: PROPIEDAD ASOCIATIVA: $x + (y + z) = (x + y) + z$; $x \cdot (yz) = (xy) \cdot z$

AXIOMA 4: PROPIEDAD DISTRIBUTIVA: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

AXIOMA 5: EXISTENCIA DE ELEMENTOS NEUTROS. Existen dos números reales distintos que se indican por 0 y 1, tales que para cada número real x se tiene: $0 + x = x + 0 = x$ y $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

AXIOMA 6: EXISTENCIA DE INVERSOS. Para cada número real x existe un número real (y) tal que $x + y = y + x = 0$. y se nota –x, el inverso aditivo de x.

AXIOMA 7: EXISTENCIA DEL RECÍPROCO. Para cada número real $x \neq 0$, existe un número real y tal que $x \cdot y = y \cdot x = 1$. $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, inverso multiplicativo,

Nota: los números 0 y 1 de los axiomas 6 y 7 son los mismos del axioma 5.

De los axiomas anteriores se pueden deducir todas las leyes del Álgebra elemental. Las más importantes de ellas se recogen a continuación como teoremas. En todos estos teoremas, las letras a, b, c, d, representan números reales cualesquiera.

TEOREMA 1. LEY DE SIMPLIFICACION PARA LA SUMA.

Si $a + b = a + c$ entonces $b = c$. (En particular esto prueba que el número 0 del axioma 5 es único)

Demostración:

Dado $a + b = a + c$. Por el axioma 6, se puede elegir (y) de manera que $y + a = 0$, con lo cual $y +(a + b) = y + (a + c)$.

Aplicando la propiedad asociativa $(y + a) + b = (y + a) + c$, o sea, $0 + b = 0 + c$. Pero por el axioma 5 se tiene $0 + b = b$ y $0 + c = c$. En consecuencia, $b = c$. Obsérvese que este teorema demuestra que existe sólo un número real que tiene la propiedad del 0 en el axioma 5. En efecto, si 0 y 0' tuvieran ambos esta propiedad, entonces $0 + 0' = 0$ y $0' + 0 = 0$. Por tanto $0 + 0' = 0' + 0$ y por la ley de simplificación $0 = 0'$.

TEOREMA 2. POSIBILIDAD DE LA SUSTRACCIÓN.

Dados a y b existe uno y solo un x tal que $a + x = b$. Este x se designa por $b – a$. En particular $0 – a$ se escribe simplemente $–a$ y se denomina el negativo de a.

Demostración:

Dados a, b se elige y de manera que $a + y = 0$. Sea $x = y + b$.

Entonces $a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$. Por tanto, hay por lo menos una x tal que $a + x = b$. Pero en virtud del teorema 1, hay a lo sumo una. Luego hay una y sólo una x en estas condiciones. Esa x se designa como $x = b – a$.

TEOREMA 3. $b – a = b + (-a)$

Demostración:

Sea $x = b – a$ y sea $y = b + (-a)$. Se trata de probar que $x = y$.

Por definición de $b – a$, teorema 2, $x + a = b$. Entonces, sumando a con y, se tiene que $y + a = [b + (-a)] + a = b + [(-a) + a] = b + 0 = b$. Por lo tanto $x + a = y + a$, y en virtud del teorema 1, $x = y$.

TEOREMA 4. – (-a) = a

Demostración:

Se tiene a + (-a) = 0 por definición de –a. Pero esta igualdad dice que a es el opuesto de (-a), es decir, que a = - (-a) como se afirma en el teorema.

TEOREMA 5. a (b - c) = ab – ac

Demostración:

b – c = x Por (resolubilidad de ecuaciones con adición) entonces b = c + x (clausura) entonces ab = a (c + x) = ac + ax entonces ax = ab – ac. Pero por hipótesis x = b – c, entonces ax = a(b - c) y en consecuencia a(b-c) = ab – ac

Nota: de la misma manera se muestra que (a - b) c = ac – bc

TEOREMA 6. 0.a = a.0= 0

Demostración:

Por definición, para cualquier x que pertenezca a los reales se tiene que 0 = x – x, entonces es posible multiplicar cada miembro de la igualdad por a:

a.0 = a. (x – x) = ax – ax = 0. Luego a.0 = 0.a = 0.

TEOREMA 7. LEY DE SIMPLIFICACIÓN PARA LA MULTIPLICACIÓN.

Si ab = ac y a ≠ 0, entonces b = c. (En particular esto demuestra que el número 1 del Axioma 5 es único)

Demostración:

Dado a.b = a.c, a ≠ 0. Por el axioma 7 se puede elegir (y) de manera que y.a =1, con lo cual y.(a.b) = y.(a.c), y aplicando la propiedad asociativa (y.a).b = (y.a).c, o sea, 1b = 1c. Pero en virtud del axioma 5, se tiene 1.b = b y 1.c = c, o sea b = c.

Obsérvese que este teorema demuestra que existe un número real que tiene la propiedad del 1 en el axioma 5. En efecto, si 1 y 1’ tuvieran ambos esta propiedad, entonces 1.1’ = 1 y 1’.1 = 1 por tanto 1.1’ = 1’. 1 y por la ley de la simplificación 1’=1.

TEOREMA 8. POSIBILIDAD DE LA DIVISION

Dados a y b con a ≠ 0, existe uno y solo un x tal que ax = b. La x se designa por $\frac{b}{a}$ y se denomina cociente de b y a. En particular $\frac{1}{a}$ se escribe también a^{-1} y se designa recíproco de a.

Demostración:

Dados a y b con a ≠ 0 se elige (y) de manera que a.y = 1, sea x = (y.b). Entonces a.x = a (y.b) = (a.y).b = 1.b = b. Por tanto, hay por lo menos una x tal que a.x = b. Pero en virtud del teorema 7, hay a lo sumo una. Luego hay una y sólo una x en estas condiciones.

TEOREMA 9. Si b ≠ 0, entonces $\frac{a}{b} = a.b^{-1}$ (Algoritmo de la división)

Demostración:

. $\frac{a}{b} = x \leftrightarrow b.x = a \rightarrow$ multiplicando por (b^{-1}) en ambos lados de la igualdad se tiene que $(b^{-1})\, bx = b^{-1}a$ de donde $x = b^{-1}a$ por lo tanto $\frac{a}{b} = a.b^{-1}$

Nota: Como se ve, el teorema define una nueva operación en los reales, que se denomina división y que se simboliza colocando el primer elemento de la pareja (que recibe el nombre de dividendo o numerador) encima de una rayita horizontal, el segundo (denominado divisor o denominador, y que por la condición del teorema debe ser diferente de 0) debajo de la misma, o interponiendo entre el dividendo y el divisor el signo ÷ (“divido por”). Se puede decir entonces que dividir el número a por el número b, en ese orden, consiste en multiplicar el número a por el recíproco de b. El resultado de dividir a por b se denomina cociente entre a y b.

TEOREMA 10. Si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$

Demostración:

Como tanto a como a^{-1} son no nulos, existe $(a^{-1})^{-1}$. Además $(a^{-1})(a^{-1})^{-1} = 1 = (a^{-1})a$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.

TEOREMA 11. Si $ab = 0$ entonces o $a = 0$ o $b = 0$

Demostración:

Si $a = b = 0$ la implicación es trivial. Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = 0$, entonces (resolubilidad ecuaciones con multiplicación) $b = 0a^{-1} = 0$. Esto es, $b = 0$, de la misma manera se ve que si $b \neq 0$ entonces $a = 0$.

TEOREMA 12. $(-a)b = -(ab)$ y $(-a)(-b) = ab$

Demostración:

$(-a)\, b = (0 - a)b$ (por resolubilidad de ecuaciones con adición) y $(-a)\, b = 0.b – ab$ (por la propiedad distributiva). Entonces, $(-a)\, b = 0 – ab = -ab$.

De otra parte, $(-a)\,(-b) = (-a)\,(0 - b)$ (por resolubilidad de ecuaciones con adición). Entonces, $(-a)\,(-b) = (-a).0 – (-a)\, b = -\,(-a\, b)$. Por el teorema 4, $(-a)\,(-b) = ab$.

TEOREMA 13. $(\frac{a}{b}) + (\frac{c}{d}) = \frac{(ad+bc)}{bd}$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$

Demostración:

$(\frac{a}{b}) + (\frac{c}{d}) = (\frac{a}{b})\frac{d}{d} + (\frac{c}{d})\frac{b}{b}$ (Por resolubilidad de ecuaciones con multiplicación y por que cada miembro de una igualdad se puede multiplicar por un mismo número sin que la igualdad se altere). $(\frac{a}{b})$ + $(\frac{c}{d})$ = $\frac{ad}{bd}$ + $\frac{bc}{bd}$ (por multiplicación de fraccionarios). Entonces, $(\frac{a}{b})$ + $(\frac{c}{d})$ = $\frac{ad.1}{bd}$ + $\frac{bc.1}{bd}$ (Por multiplicación de un número por un fraccionario). Así, $(\frac{a}{b})$ + $(\frac{c}{d})$ = ad $(\frac{1}{bd})$ + bc $(\frac{1}{bd})$ = (ad + bc) $(\frac{1}{bd})$. Por la multiplicación de un número por un fraccionario $(\frac{a}{b})$ + $(\frac{c}{d})$ = $\frac{(ad+bc)}{bd}$.

TEOREMA 14. $(\frac{a}{b})$ $(\frac{c}{d})$ = $\frac{(ac)}{bd}$ si b ≠ 0 y d ≠ 0

Demostración:

$\frac{a}{b}$. $\frac{c}{d}$ = a. $\frac{1}{b}$. c. $\frac{1}{d}$ (Por multiplicación de un número por un fraccionario). En consecuencia, $\frac{a}{b}$. $\frac{c}{d}$ = a. $\frac{1}{b}$. c . $\frac{1}{d}$ = ac $\frac{1}{b}$. $\frac{1}{d}$ = ac $\frac{1}{bd}$ = $\frac{ac}{bd}$

TEOREMA 15. $(\frac{a}{b})$ / $(\frac{c}{d})$ = $\frac{ad}{bc}$ si b ≠ 0, c ≠0 y d ≠ 0

Demostración:

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ = $\frac{a}{b}$ / $\frac{c}{d}$ = $\frac{a}{b}$. $(\frac{c}{d})^{-1}$ (por el algoritmo de la división) = $\frac{a}{b}$. $\frac{d}{c}$ (Por el teorema 14) = $\frac{ad}{bc}$

AXIOMAS DE ORDEN: Este grupo de axiomas se refiere a un concepto por el que se establece un orden entre los números reales. Según este orden, se puede decidir si un número real es mayor o menor que otro. Las propiedades de orden se introducen en este punto, como un conjunto de axiomas referentes al concepto primitivo de positivo, para definir después los conceptos de mayor que y menor que, a partir del de positivo.

Se supone que existe un cierto subconjunto $R^+ \subset R$, llamado conjunto de números positivos, que satisfacen los tres axiomas de orden siguientes:

AXIOMA 8: Si x e y pertenecen a R^+, lo mismo ocurre a x + y y a xy.

AXIOMA 9: Para todo real $x \neq 0$, o $x \in R^+$ o $-x \in R^+$ pero no ambos

AXIOMA 10: 0 $\notin R^+$

Ahora se pueden definir los símbolos $<$, $>$, $\geq$, $\leq$ llamados respectivamente menor que, mayor que, igual o mayor que, igual o menor que. Esos símbolos se definen de la manera siguiente:

$x < y$ si y sólo si $y - x$ es positivo

$y > x$ si y sólo si $x < y$

$x \leq y$ si y sólo si o $x < y$ o $x = y$

$y \geq x$ si y sólo si $x \leq y$

Por lo tanto, se tiene $x > 0$ si y sólo si x es positivo.

Si $x < 0$ entonces $-x > 0$ y así x no es positivo ni cero. De esta forma se definen los números negativos. De igual manera, se dice que x es no negativo si $x \geq 0$. Además, el par de desigualdades simultaneas $x < y$, $y < z$, se escriben frecuentemente en la forma más breve $x < y < z$. Interpretaciones análogas se dan a las desigualdades compuestas:

$x \leq y < z \qquad x < y \leq z \qquad x \leq y \leq z.$

De los axiomas de orden se pueden deducir todas las reglas usuales del cálculo con desigualdades. Las más importantes de ellas se dan a continuación como teoremas.

TEOREMA 16. PROPIEDAD DE TRICOTOMÍA

Para a y b números reales cualesquiera, se verifica una y sólo una de las tres relaciones $a < b$, $b < a$, $a = b$

Demostración:

Si a, b $\in$ R entonces se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

i) $a - b = 0$ y ii) $a - b \neq 0$

De la condición ii se pueden representar los siguientes casos:

1) $a - b \in R^+$ de donde $a > b$

2) $-(a - b) \in R^+$ de donde $a < b$.

De lo anterior se puede concluir que sólo se verifica una y sólo una de las tres condiciones. Si $b = 0$ entonces $a = 0$ ó $a > 0$ ó $a < 0$. Asimismo, para todo $\varepsilon > 0$, si $0 \leq a < \varepsilon$, entonces $a = 0$.

TEOREMA 17. PROPIEDAD TRANSITIVA. Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

Demostración:

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $b - a > 0$ y $c - b > 0$. En virtud del axioma 8 se pueden sumar, obteniéndose $(b - a) + (c - b) > 0$, es decir, $c - a > 0$. Por tanto $a < c$.

TEOREMA 18. Si $a < b$ y $c \in R$ entonces $a + c < b + c$

Demostración:

Si $a < b$ entonces $(b - a) \in R^+$ y $[(b - a) + (c - c)] \in R^+$.

Entonces: $[(b + c) - (a + c)] \in R^+ \rightarrow b + c > a + c$

TEOREMA 19. Si $a < b$ y $c > 0$ es $ac < bc$

Demostración:

Si $a < b$ entonces $b - a > 0$. Si $c > 0$ en virtud del axioma 8, se puede multiplicar c por $(b - a)$ obteniéndose $(b - a) c > 0$. Pero $(b - a) c = bc – ac$, por tanto $bc – ac >0$ y esto significa $bc > ac$ como se quería demostrar.

TEOREMA 20. Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$

Demostración:

Si $a > 0$, por el axioma 8, $a.a > 0$. Si $a < 0$, entonces $–a > 0$ y, por tanto $(-a)(-a) > 0$, en virtud del axioma 8. En ambos casos se tiene $a^2 > 0$

TEOREMA 21. $1 > 0$

Demostración: Dado que 1 es el elemento neutro de la multiplicación, entonces $1·1 = 1^2 = 1$. Ahora, aplicando el teorema 20 al caso $a = 1$, se tiene que $1^2 > 0$ y por tanto, $1 > 0$. En particular esto demuestra que el conjunto de los R^+ no es vacío.

TEOREMA 22. $a < b$, si y sólo si $-a > -b$. En particular si $a < 0$, entonces $-a > 0$.

Demostración:

Si $a < b$, entonces $b – a > 0$. Dado que $–b \in R$, por el teorema 18, $(b – a) + (-b) > 0 + (-b)$. Entonces, $(b – b) – a > -b$ y por tanto, $-a > -b$. En particular, si $a < 0$ y $b = 0$, entonces $–a > 0$.

TEOREMA 23. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$

Demostración:

Si $a < b$ entonces $(b - a) > 0$. Si $c < 0$, entonces $-c > 0$. Por tanto $(b - a)(-c) > 0$. Así $-b.c + a.c > 0$ de donde $a.c > b.c$.

TEOREMA 23º. Si $c < 0$, entonces $\frac{1}{c} < 0$

Demostración:

De no ser así: $\frac{1}{c}$ = 0 ó $\frac{1}{c}$ > 0;

Si $\frac{1}{c}$ = 0 obliga a que 1 = 0·c = 0, pero eso no es posible porque 1 ≠ 0. Si $\frac{1}{c}$ > 0 y –c > 0, entonces se tiene que $-c\frac{1}{c}$ > -c·0. Así -1 > 0, con lo cual 1 < 0. Lo que está en contradicción con el hecho que 1 > 0. Por lo tanto $\frac{1}{c}$ < 0.

TEOREMA 23'. Si a < b y c < 0, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Demostración:

Si a < b, entonces b - a > 0

Si c < 0, entonces $\frac{1}{c} < 0$ y $-\frac{1}{c} > 0$. Por tanto (b - a) $(-\frac{1}{c})$ > 0. En consecuencia, $-\frac{b}{c} + \frac{a}{c} > 0$ con lo cual $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

TEOREMA 24. ab > 0 si y sólo si a y b son ambos positivos o ambos negativos.

Demostración:

Si ab > 0, es posible obtener p > 0 tal que (ab – p) = 0. Multiplicando por el inverso de a, $\frac{1}{a}(ab - p) = \frac{1}{a}(0)$, entonces $\left(b - \frac{p}{a}\right) = 0$. Por tanto, $b = \frac{p}{a}$. Dado que p > 0, si a > 0, entonces b > 0 y si a < 0 entonces b < 0; por la ley de los signos.

De otra parte, si a > 0 y b > 0, entonces a·b > 0·b por el teorema 19. Por tanto, ab > 0. Asimismo, si a < 0 y b < 0, entonces a·b > 0·b por el teorema 23. Por tanto, ab > 0.

De forma análoga puede demostrarse que ab < 0 si y sólo si a < 0 $\wedge$ b > 0 ó a > 0 $\wedge$ b < 0. Se deja para el lector interesado realizar esta demostración.

TEOREMA 25. Si a < b, y c < d, entonces a + b < b + d

Demostración:

a < b $\leftrightarrow$ (b - a) $\in$ R^+ y c < d $\leftrightarrow$ (d - c) $\in$ R^+. Entonces, $[(\mathrm{b}-\mathrm{a})+(\mathrm{d}-\mathrm{c})] \in \mathrm{R}^{+}$ dado que la suma de dos reales positivos es un real positivo. Aplicando la propiedad asociativa: $[(\mathrm{b}+\mathrm{d})-(\mathrm{a}+\mathrm{c})] \in \mathrm{R}^{+}$ entonces, $(\mathrm{a}+\mathrm{c})<(b+d)$.

TEOREMA 26. Si 0 < a < b, entonces $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

Demostración:

Dado a < b y teniendo en cuenta que a > 0, se multiplica por el inverso de a: $\frac{1}{a}a<\frac{1}{a}b$. Entonces $1<\frac{b}{a}$. Como b > 0, se multiplica por el inverso de b y se tiene que: $\frac{1}{b}(1)<\frac{1}{b}\cdot\frac{b}{a}$. Por tanto, $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$.

TEOREMA 26°. Si a < b < 0, entonces $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

Demostración:

Dado a < b y teniendo en cuenta que a < 0, se multiplica por el inverso de a: $\frac{1}{a}a>\frac{1}{a}b$. Entonces $1>\frac{b}{a}$. Como b < 0, se multiplica por el inverso de b y se tiene que: $\frac{1}{b}(1)<\frac{1}{b}\cdot\frac{b}{a}$. Por tanto, $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$.

TEOREMA 26'. Si a < b, con a < 0 y b > 0, entonces $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

Demostración:

Dado a < b y teniendo en cuenta que a < 0, se multiplica por el inverso de a: $\frac{1}{a}a>\frac{1}{a}b$. Entonces $1>\frac{b}{a}$. Como b > 0, se multiplica por el inverso de b y se tiene que: $\frac{1}{b}(1)>\frac{1}{b}\cdot\frac{b}{a}$. Por tanto, $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$.

2. DESIGUALDADES

En este capítulo se trabaja sobre métodos para resolver desigualdades. Para ello, inicialmente se enuncia el concepto de intervalo y se especifican las clases de intervalos. Se presentan dos teoremas relacionadas con desigualdades: el teorema de conservación del signo para funciones continuas y el de Bolzano. Establecidos esos fundamentos, se procede a describir el método universal para resolver desigualdades, que constituye la propuesta de este trabajo. Para su cabal comprensión, se presentan ejemplos en los que se sigue paso a paso el método. Para incrementar el nivel de complejidad en los ejercicios, enseguida se procede a definir el concepto de valor absoluto y se introducen ocho propiedades fundamentales para su aplicación en la resolución de desigualdades. Posteriormente, se introduce el concepto de distancia y su aplicación en la resolución de desigualdades. Se presentan otros ejercicios de mayor complejidad, en los que el concepto de distancia no ofrece una ventaja frente a la aplicación del concepto de valor absoluto y las propiedades antes señaladas. El capítulo se cierra con la aplicación del método universal para resolver desigualdades, aplicado a la resolución de problemas con valor absoluto. En ellos se puede apreciar la fortaleza del método para resolver cualquier tipo de desigualdad.

2.1 INTERVALOS

¿Qué es un intervalo? Dado $I \subset R$, I es un intervalo si y solo si para todo $x \in I \wedge y \in I$, con $x < y$, se tiene que si $x \leq z \leq y$, $z \in I$. Los conjuntos que se van a definir se denominan en general intervalos.

CLASES DE INTERVALOS

Los intervalos pueden ser abiertos, cerrados o semi-abiertos. Por ejemplo, la doble desigualdad $a < x < b$ describe un intervalo abierto, constituido por el conjunto de todos los números comprendidos entre *a* y *b*, sin incluir los extremos *a* y *b.* Se designa mediante el símbolo (a,b). Por el contrario, la doble desigualdad $a \leq x \leq b$ describe el correspondiente intervalo cerrado, que si incluye los extremos *a* y *b.* La tabla 1 indica la amplia variedad de posibilidades y presenta la notación que se seguirá en este documento.

Tabla 1. Clases de intervalos

Número	**Notación de conjuntos**	**Notación de intervalos**
1	$\{x \in R / a < x < b\}$	(a, b)
2	$\{x \in R / a \leq x \leq b\}$	[a, b]
3	$\{x \in R / a < x \leq b\}$	(a, b]
4	$\{x \in R / a \leq x < b\}$	[a, b)
5	$\{x \in R / a \leq x\}$	[a, ∞)
6	$\{x \in R / a < x\}$	(a, ∞)
7	$\{x \in R / x \leq a\}$	(-∞, a]
8	$\{x \in R / x < a\}$	(-∞, a)
9	$\{x \in R\}$	(-∞,∞)

En particular se dice que los intervalos 1, 6, 8 y 9 son abiertos, y que el intervalo 2 es cerrado.

Es claro que como conjuntos, todos los intervalos de la lista son infinitos. Sin embargo, se suele decir que los cuatro primeros son intervalos finitos y que los cinco siguientes son intervalos infinitos. Los números *a* y *b* se llaman extremos de los intervalos, con a como extremo izquierdo (o inferior) y b como extremo derecho (o superior).

Los primeros cuatro intervalos de la lista se leen como: “los números reales desde a hasta b”, pero incluyendo una referencia a si los extremos están o no contenidos en el intervalo. Por ejemplo, en el caso 3 se lee: “Los números reales desde *a* hasta *b*, sin incluir *a* pero incluyendo *b*”. En los otros casos, como en el caso 6, se leerá: “los reales mayores que *a*” ó “los reales a partir de *a,* pero sin incluirlo”.

Los símbolos ∞ y $-\infty$ no representan número real alguno y sólo sirven como signos auxiliares para las definiciones que se han hecho. Por lo general se leen como infinito y menos infinito.

2.2 TEOREMAS RELACIONADOS CON DESIGUALDADES

Para establecer el método, que en este trabajo se denomina método UNIVERSAL para resolver desigualdades, se requieren algunos resultados previos, muy importantes para llegar a las bases teóricas del método.

TEOREMA 27: DE CONSERVACION DEL SIGNO PARA FUNCIONES CONTINUAS

Sea *f* una función continua en un punto *a*:

1. Si *f*(a) > 0, entonces existe una vecindad de *a* donde f(x) > 0.
2. Si f(a) < 0, entonces existe una vecindad de a donde f(x) < 0.

Demostración de 1.

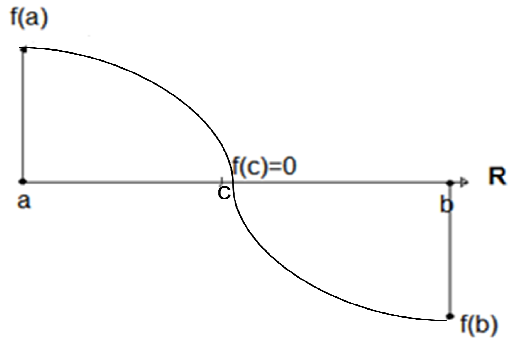
Si *f* es continua en a, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\partial > 0$ tal que si $0<|x-a|<\partial$ entonces $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$. Como $f(a) > 0$, entonces para $\varepsilon = f(a)$ existe un $\partial > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \partial$ entonces $|f(x)-f(a)| < f(a)$. Por la definición de valor absoluto, esto equivale a $-f(a) < f(x)-f(a) < f(a)$ si y solo si $0< f(x) < 2f(a)$, por lo tanto $f(x) >0$ para todo $x \in (a - \partial, a + \partial)$. De manera análoga se demuestra 2.

TEOREMA 28: TEOREMA DE BOLZANO:

Si f es una función continua en [a,b] y $f(a)f(b) < 0$, entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$. La idea intuitiva que encierra este teorema es muy sencilla. Si f es continua en [a, b], eso indica que el dibujo de la gráfica de f no se interrumpe, no tiene rupturas o saltos en [a, b], puesto que si presentara una ruptura o salto la función no sería continua en dicho punto y por lo tanto en [a, b].

Si la gráfica está representada por un trozo de hilo de una sola pieza, tiene que conectar el punto (a, f(a)) con el punto (b, f(b)). Esos puntos no están sobre el eje x, como se ilustra en la figura 1.

Figura 1. Ilustración del Teorema de Bolzano



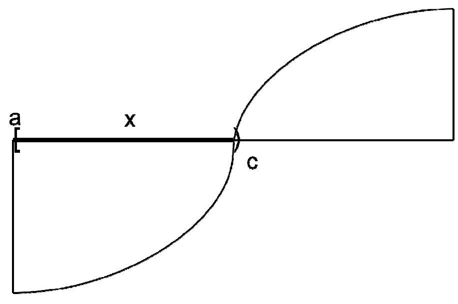
Es obvio que la gráfica tiene que pasar a través del eje x, por lo menos una vez, y si no ocurre esto el hilo se tiene que cortar. Este teorema requiere del teorema anterior y del axioma del extremo superior para la demostración.

DEMOSTRACION:

No se pierde generalidad si se supone que f(a) < 0 < f(b).

Sea $S = \{x \in [a, b] \,/\, f(x) < 0\}$. Esto se puede ilustrar con la figura 2.

Figura 2. Intervalo en el que la función es negativa



El conjunto S en este caso es [a, c). Es evidente que S ≠ Φ, puesto que a ∈ S y así b es cota superior de S. Como S no es vacío y es acotado superiormente, entonces según el axioma del extremo superior, tiene una mínima cota superior, que se denomina c.

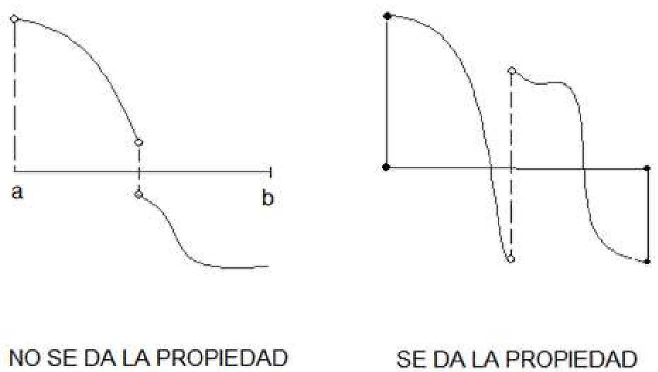
Ahora f(x) tiene que ser cero en x = c (f(c) = 0) puesto que si f(c) < 0 entonces existe una vecindad de c (c- ∂, c + ∂) donde f(x) < 0, debido al teorema de conservación del signo, y se tendría en esa vecindad elementos de (c, c+∂) que pertenecen a S y son más grandes que c y así c no puede ser cota superior de S.

Si de otro lado f(c) > 0, también existe una vecindad (c- ∂, c + ∂) tal que f(x) > 0 en ella y entonces en el intervalo (c-∂, c] no existen elementos de S. Por tanto, c no puede ser la mínima cota superior de S. De esta forma se descartan las posibilidades de f(x) < 0 y f(x) > 0.

En virtud de la propiedad de la tricotomía, sólo queda la alternativa f(c) = 0 y además c ∈ (a, b); ya que si c = a entonces f(c) = f(a) < 0 y si c = b entonces f(c) = f(b) > 0, pero f(c) = 0. De esto se concluye que existe c ∈ (a, b), tal que f(c) = 0, quedando demostrado el teorema.

La anterior propiedad puede o no darse, si la función no es continua en [a b]; figura 3.

Figura 3. Ejemplos de intervalos con funciones no continuas



Del teorema de Bolzano se desprenden los siguientes resultados:

COROLARIO 1: LLAMADO A VECES TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO:

Si f es continua en [a, b] y w es un número entre f(a) y f(b), con $f(a) \neq f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = w$.

Lo anterior indica que todos los números entre f(a) y f(b) son elementos del recorrido de f o que la función f toma todos los valores entre f(a) y f(b).

DEMOSTRACIÓN

Sea $h(x) = f(x) - w$. Es claro que h es continua en [a, b], puesto que es la diferencia de funciones continuas.

Ahora $h(a) = f(a) - w$ y $h(b) = f(b) - w$. Si $f(b) > f(a)$ se tiene que $h(a) < 0$ y $h(b) > 0$ y si $f(a) > f(b)$ entonces $h(a) > 0$ y $h(b) < 0$. En cualquier caso se tiene que h es continua en [a, b] y $h(a)h(b) < 0$.

En consecuencia, por el teorema de Bolzano se tiene que existe c en (a, b) tal que $h(c) = 0$. Pero $h(c) = f(c) - w$, por lo que $f(c) - w = 0$; de donde se concluye que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = w$.

COROLARIO 2: Sea f continua en un intervalo I tal que $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$.

1. Si $a \in I$ y $f(a) > 0$, entonces $f(x) > 0$ para todo $x \in I$
2. Si $a \in I$ y $f(a) < 0$, entonces $f(x) < 0$ para todo $x \in I$

Nota: Este corolario es la fundamentación matemática del método universal para resolver desigualdades que se presentará más adelante. Apoyándose en él, sólo se requiere determinar los intervalos en los que la función es continua y no nula. Después se evalúa un punto en cada intervalo, para determinar aquellos en los que la función es mayor que cero o en los que es menor que cero.

DEMOSTRACION:

PARTE 1

Si la conclusión de 1 no es cierta, quiere decir que existe b $\in$ I, tal que f(b) < 0 y como f es continua en el intervalo [a, b] o en el intervalo [b, a], según sea el caso, entonces f(a) f(b) < 0. Pero, por el teorema de Bolzano existiría c $\in$ [a, b] tal que f(c) = 0. Esto contradice la hipótesis f(x) ≠ 0 en I. Por tanto, f(x) > 0, $\forall$x $\in$ I.

LA PARTE 2 se demuestra de manera similar.

Intuitivamente se puede afirmar que si f es continua en I y no nula, entonces la gráfica de f no presenta puntos de ruptura en I y no tocará al eje x. Así, la gráfica estará encima del eje x, o por debajo del eje x, y por ello basta comprobar qué pasa en un punto.

2.3 EL MÉTODO UNIVERSAL PARA RESOLVER DESIGUALDADES

Sea f(x) > 0, con f continua en el dominio de f; esto es, con f continua en D_f. El método está conformado por los siguientes pasos:

1. Señalar el dominio de f
2. Resolver la ecuación f(x)=0. Sean $c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, c_n$ las soluciones de f(x)=0
3. Retirar los puntos $c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, c_n$ del D_f. En los intervalos que quedan, la función f es continua y no nula.
4. Aplicando el corolario 2 del teorema 27, basta escoger un punto x_i en cada intervalo y si en él $f(x_i) > 0$, entonces el intervalo respectivo es parte de la solución.

Si f(x) < 0, con f continua en D_f, simplemente en el paso 4 si $f(x_i) < 0$, entonces el intervalo respectivo es parte de la solución.

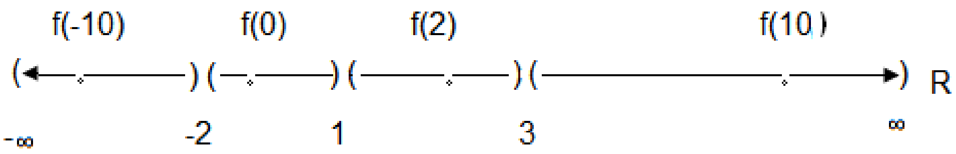
EJEMPLOS

1. Resolver: $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-3)} < 0$

Paso 1. Se determina el dominio de la función. f(x) $= \frac{(x-1)(x+2)}{(x-3)}$, es una función racional y continua en D_f = R - {3}.

Paso 2. Se resuelve la ecuación: f(x)=0. Entonces, $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-3)} = 0$ soluciones, x = 1 y x = -2.

Paso 3. Se retiran x = 1 y x = -2 del D_f. Gráficamente:



Quedan los intervalos (-∞, -2), (-2,1), (1, 3) y (3, ∞) donde f es continua y no nula.

Paso 4. Tomando 10 en el intervalo (3, ∞) y evaluando $f(10) = \frac{\mathbf{(10-1)(10+2)}}{\mathbf{(10-3)}} > 0$

Por lo tanto, el intervalo (3, ∞) no es solución de la desigualdad.

Se escoge 2 en el intervalo (1, 3) y evaluando f(2) $= \frac{\mathbf{(2-1)(2+2)}}{\mathbf{(2-3)}} < 0$

Por lo tanto, el intervalo (1, 3) es solución de la desigualdad

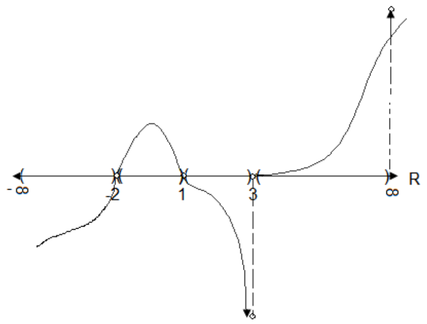
Tomando ahora 0 ∈ (-2, 1) y evaluando f(0) $= \frac{\mathbf{(0-1)(0+2)}}{\mathbf{(0-3)}} > 0$

En consecuencia el intervalo (-2, 1) no es solución de la desigualdad

Escogiendo -10 en el intervalo (-∞, -2) y evaluando f(-10) = $\frac{(-10-1)(-10+2)}{(-10-3)} < 0$

Se concluye que el intervalo (-∞, -2) también es solución de la desigualdad. De esta forma, la solución de la desigualdad es (-∞, -2) U (1, 3). Con esto no sólo se ha resuelto la desigualdad, sino que se dispone ahora de alguna información sobre la forma de su gráfica[††], ver figura 4.

Figura 4. Bosquejo de la función para el ejemplo 1



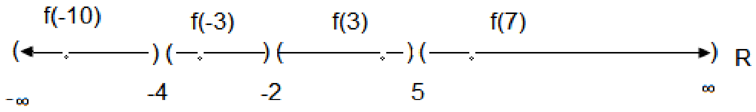
Aunque esta pueda no ser la gráfica, lo que se quiere señalar aquí es si la curva está por encima o por debajo del eje x; así como la continuidad.

2. Resolver $\frac{(x+4)(x-5)}{(x+2)} > 0$

F(x) = $\frac{(x+4)(x-5)}{(x+2)}$ es una función racional y continua en D_f = R - {-2}.

Se resuelve f(x) = 0. Entonces $\frac{(x+4)(x-5)}{(x+2)} = 0$, cuyas soluciones son: x = -4 y x = 5.

Se retira x = -4 y x = 5 del D_f. Gráficamente:



[††] Esto repercute de manera importante en el tratamiento cualitativo de las ecuaciones diferenciales, entre otras cosas.

Quedan los intervalos (-∞, -4), (-4,-2), (-2, 5) y (5, ∞) donde f es continua y no nula.

Escogiendo, por ejemplo, 7 en (5, ∞) y evaluando f(7) = $\frac{(\mathbf{7+4})(\mathbf{7-5})}{(\mathbf{7+2})} > 0$

Por lo tanto, el intervalo (5, ∞) es solución de la desigualdad.

Escogiendo 3 en el intervalo (-2, 5) y evaluando f(3) = $\frac{(\mathbf{3+4})(\mathbf{3-5})}{(\mathbf{3+2})} < 0$

Por lo tanto, el intervalo (-2, 5) no es solución de la desigualdad.

Tomando -3 ∈ (-4, -2) y evaluando f(-3) = $\frac{(\mathbf{-3+4})(\mathbf{-3-5})}{(\mathbf{-3+2})} > 0$

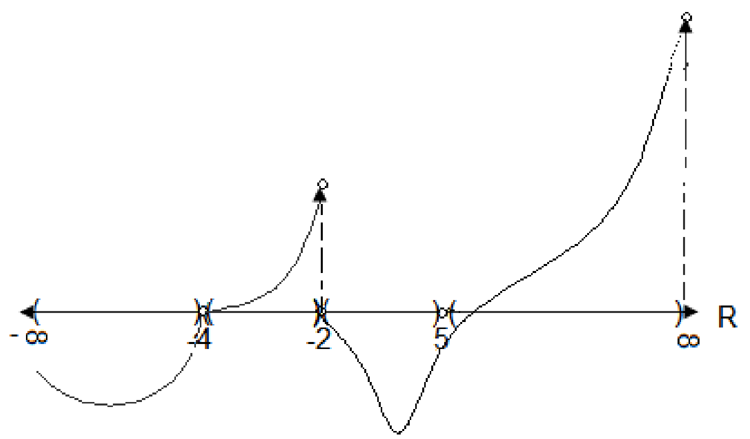
Se verifica que el intervalo (-4, -2) es solución de la desigualdad.

Escogiendo -10 en el intervalo (-∞, -4) y evaluando f(-10) = $\frac{(\mathbf{-10+4})(\mathbf{-10-5})}{(\mathbf{-10+2})} < 0$

Por lo tanto, el intervalo (-∞, -4) no es solución de la desigualdad.

De esta forma, la solución de la desigualdad es (-4, -2) U (5, ∞). Aprovechando la información obtenida, se puede hacer un bosquejo de la gráfica.

Figura 5. Bosquejo de la función para el ejemplo 2



Aunque esta pueda no ser la gráfica, lo que indica es si la curva está por encima o por debajo del eje x.

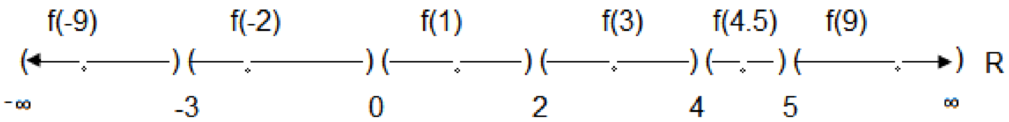
3. Resolver $\frac{(x-2)(x+3)(x-4)}{x(x-5)} < 0$

F(x) = $\frac{(x-2)(x+3)(x-4)}{x(x-5)}$ es una función racional y continua en D_f = R - {0, 5}.

Resolviendo f(x)=0,

$\frac{(x-2)(x+3)(x-4)}{x(x-5)} = \mathbf{0}$, se obtienen las soluciones: x = 2, x = -3, x = 4.

Se retira x = 2, x = -3 y x = 4 del D_f. Entonces, gráficamente:



Quedan los intervalos (-∞, -3), (-3,0), (0, 2), (2, 4), (4, 5) y (5, ∞) donde f es continua y no nula.

Escogiendo, por ejemplo, 9 en (5, ∞) y evaluando f(9)= $\frac{(9-2)(9+3)(9-4)}{9(9-5)} > 0$

Por lo tanto, el intervalo (5, ∞) no es solución de la desigualdad.

Escogiendo 4.5 en el intervalo (4, 5) y evaluando f(4.5)=$\frac{(4.5-2)(4.5+3)(4.5-4)}{4.5(4.5-5)} < 0$

Por lo tanto, el intervalo (4, 5) es solución de la desigualdad.

Tomando 3 $\in$ (2, 4) y evaluando f(3)= $\frac{(3-2)(3+3)(3-4)}{3(3-5)} > 0$

Luego el intervalo (2, 4) no es solución de la desigualdad.

Escogiendo 1 en el intervalo (0, 2) y evaluando f(1)= $\frac{(1-2)(1+3)(1-4)}{1(1-5)} < 0$

Por lo tanto el intervalo (0, 2) es solución de la desigualdad.

Tomando -2 $\in$ (-3, 0) y evaluando f(-2)= $\frac{(-2-2)(-2+3)(-2-4)}{-2(-2-5)} > 0$

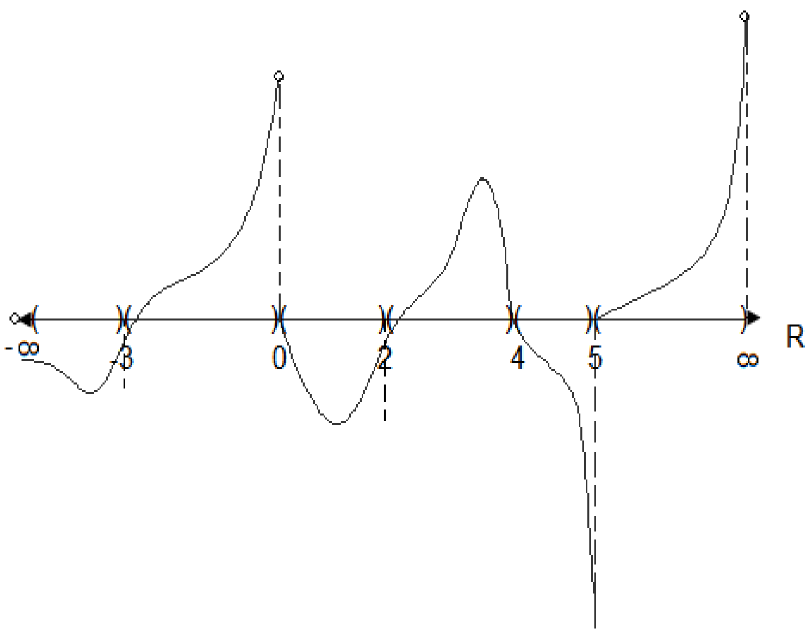
Luego (-3, 0) no es solución de la desigualdad.

Escogiendo -9 en (-∞, -3) y evaluando f(-9)= $\frac{(-9-2)(-9+3)(-9-4)}{-9(-9-5)} < 0$

Por lo tanto el intervalo (-∞, -3) es solución a la desigualdad.

La solución de la desigualdad es (-∞, -3) U (0, 2) U (4, 5) y no sólo se resuelve la desigualdad, sino que se tiene alguna información sobre su gráfica.

Figura 6. Bosquejo de la función para el ejemplo 3



Al igual que en los anteriores casos, aunque esta pueda no ser la gráfica, lo que indica es si la curva está por encima o por debajo del eje x.

4. Resolver

Bernulli $(1+x)^m \geq 1 + mx$

Para m = 3, se tiene: $(1+x)^3 \geq 1 + 3x$

Desarrollando el binomio al cubo se obtiene:

$1 + 3x + 3x^2 + x^3 \geq 1 + 3x$

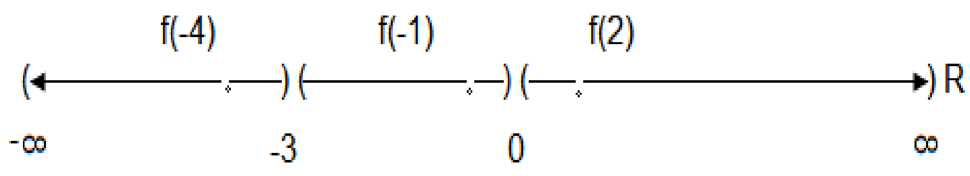
Simplificando se llega a que:

$x^2 (x + 3) \geq 0$

Sea f(x) = $\mathbf{x^2(x+3)}$ una función racional y continua en D_f = R

Se obtienen las raíces de la función, haciendo f(x)=0. Entonces, $\mathbf{x^2(x+3) = 0}$, cuyas soluciones son: x = 0, x = -3.

Se retiran x = 0 y x = -3 del D_f. Gráficamente



Quedan los intervalos (-∞, -3), (-3,0), (0, ∞), en los cuales f es continua y no nula.

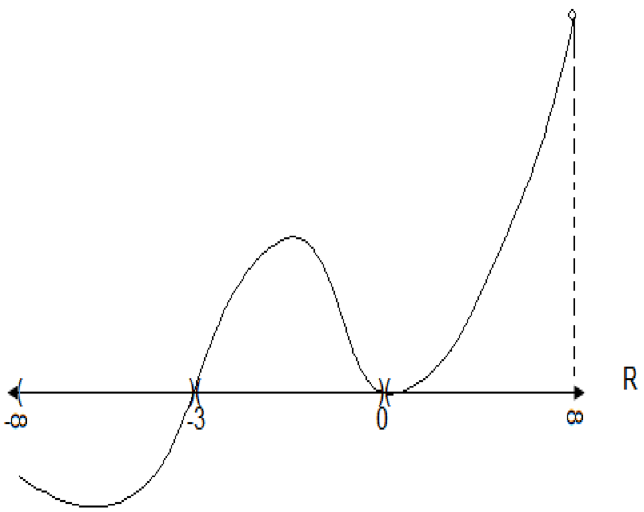
Escogiendo, por ejemplo -4 en el intervalo (-∞, -3) y evaluando f(-4) = $\mathbf{-4^2(-4+3)} < 0$. Por lo tanto, el intervalo (-∞, -3) no es solución de la desigualdad

Si se escoge -1 en el intervalo (-3, 0) y se evalúa la función, f(-1) =$\mathbf{-1^2(-1+3)} > 0$. Se tiene que (-3, 0) es solución de la desigualdad.

Tomando ahora 2 ∈ (0, ∞) y evaluando f(2) = $\mathbf{2^2(2+3)} > 0$, se observa que (0, ∞) también es solución de la desigualdad.

Por lo anterior, la solución de la desigualdad es [-3, ∞). Como en los anteriores ejemplos, no sólo se ha resuelto la desigualdad sino que se obtiene alguna información sobre su gráfica.

Figura 7. Bosquejo de la función para el ejemplo 4



5. Resolver $\sqrt{\mathbf{x+5}} + \sqrt{\mathbf{x}} - \mathbf{5} > 0$

Se determina el dominio de $\mathbf{f(x)} = \sqrt{\mathbf{x+5}} + \sqrt{\mathbf{x}} - \mathbf{5}$ (D_f). Para que la función esté definida, se debe cumplir que (x + 5) ≥ 0. Es decir, es necesario que x ≥ -5. Asimismo, también se debe cumplir que x ≥ 0 para que la función esté definida.

De esta forma, la función $\mathbf{f(x)} = \sqrt{\mathbf{x+5}} + \sqrt{\mathbf{x}} - \mathbf{5}$ es una función continua en el dominio D_f = [0, ∞).

Resolviendo f(x) = 0, se tiene que:

$\sqrt{\mathbf{x+5}} + \sqrt{\mathbf{x}} - \mathbf{5} = \mathbf{0}$; de donde, $\sqrt{\mathbf{x+5}} + \sqrt{\mathbf{x}} = \mathbf{5}$

Elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad se llega a que:

x + 5 + x + 2$\sqrt{\mathbf{x(x+5)}}$ = 25.

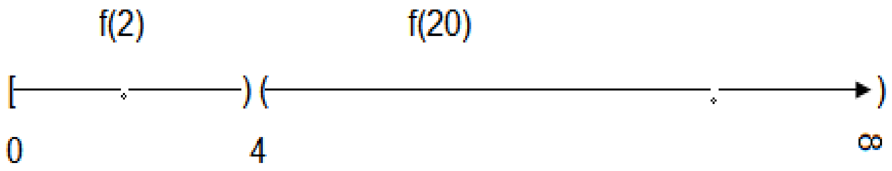
Operando, se obtiene: 2$\sqrt{\mathbf{x(x+5)}} = \mathbf{20 - 2x}$

Simplificando, $\sqrt{\mathbf{x(x+5)}} = \mathbf{10 - x}$

En esta etapa se vuelve a elevar al cuadrado a ambos lados, quedando la expresión: x(x + 5) = 100 - 20x + x^2

Realizando las operaciones nuevamente, 5x = 100 - 20x. Entonces, 25x - 100 = 0 y por tanto 25(x - 4) = 0. En consecuencia, la solución es x = 4. Esto se verifica porque $\sqrt{4+5} + \sqrt{4} - 5 = 3 + 2 - 5 = 0$.

Retirando x = 4 del D_f y con el apoyo gráfico quedan los intervalos [0, 4) y (4, ∞) donde f es continua y no nula.

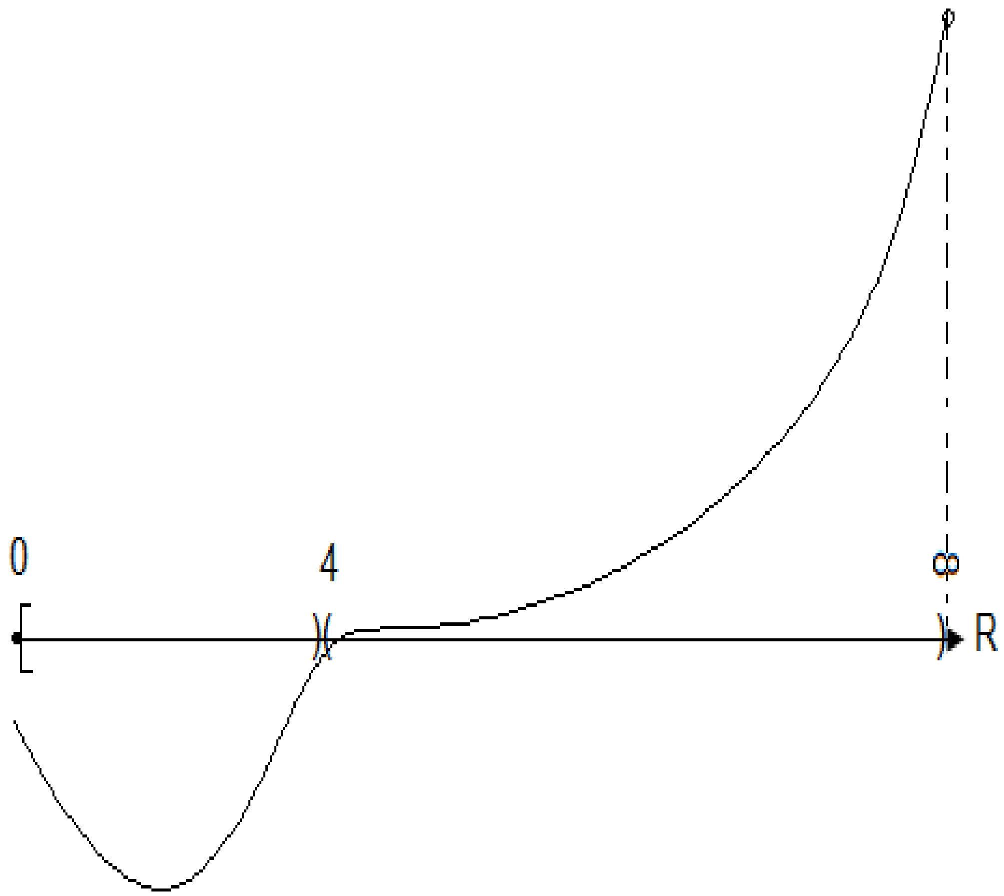


Escogiendo, por ejemplo, 2 en el intervalo [0, 4) y evaluando f(2) = $\sqrt{\mathbf{2+5}} + \sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{5} < 0$, se determina que el intervalo [0, 4) no es solución de la desigualdad.

De otra parte, tomando 20 en el intervalo (4, ∞) y evaluando f(20) = $\sqrt{\mathbf{20+5}} + \sqrt{\mathbf{20}} - \mathbf{5} > 0$, se llega a que el intervalo (4, ∞) es solución de la desigualdad.

Por lo anteriormente expuesto, la solución de la desigualdad planteada es (4, ∞). Con la información obtenida se puede plantear un bosquejo de la gráfica de la función.

Figura 8. Bosquejo de la función para el ejemplo 5



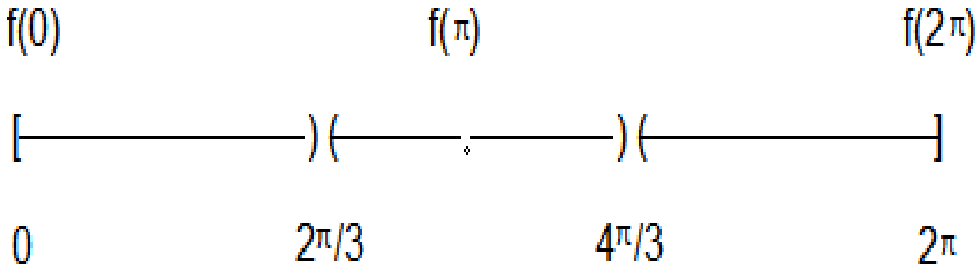
6. Sea f tal que f(x) = x + 2 sin x, con x $\in$ [0, 2$\boldsymbol{\pi}$]. ¿Dónde f es creciente o decreciente?

En consecuencia, f(x) = x + 2 sin x es una función continua en D_f = [0, 2$\boldsymbol{\pi}$].

Teniendo en cuenta que se debe determinar en dónde la función es creciente o decreciente, se calcula la derivada y si ésta es positiva la función será creciente. Si la derivada es negativa la función será decreciente.

De esta forma, la función: f´(x) = g(x) = 1 + 2 cos x. Se determinan las raíces de g(x); esto es, se resuelve la ecuación g(x) = 0. Entonces, 1 + 2 cos x = 0; por tanto, cos x = - ½.

Soluciones: $\mathbf{x}=\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}},\mathbf{x}=\frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{3}}$. De acuerdo con el procedimiento antes señalado, se retiran los valores $\mathbf{x}=\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}},\mathbf{x}=\frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{3}}$ del D_f. Gráficamente:



De esta forma, se determinan los intervalos $\left[\mathbf{0},\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}\right),\left(\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{3}}\right),(\frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{3}},\mathbf{2\pi}]$ en los cuales f´ es continua y no nula.

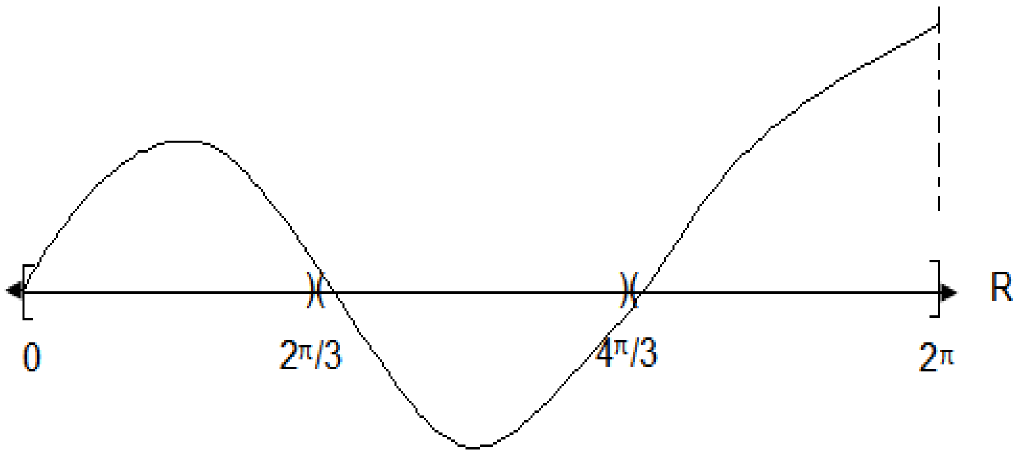
Escogiendo, por ejemplo, 0 en $\left[\mathbf{0},\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}\right)$ y evaluando f´(0) $=\mathbf{1}+\mathbf{2}\cos\mathbf{0}>0$, se determina que en el intervalo $\left[\mathbf{0},\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}\right)$ la función es creciente.

Tomando $\boldsymbol{\pi}$ en el intervalo $\left(\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{3}}\right)$ y evaluando f´($\boldsymbol{\pi}$) $=\mathbf{1}+\mathbf{2cos\pi}<0$, se llega a que en el intervalo $\left(\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{3}}\right)$ la función es decreciente.

Tomando 2 $\boldsymbol{\pi}$ ∊ $(\frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{3}},\mathbf{2\pi}]$ y evaluando f´(2 $\boldsymbol{\pi}$) = $\mathbf{1}+\mathbf{2cos2\pi}>0$, se tiene que en el intervalo $(\frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{3}},\mathbf{2\pi}]$ la función es creciente.

De esta forma no sólo se resuelve el ejercicio, sino que se obtiene alguna información sobre la gráfica de la función.

Figura 9. Bosquejo de la función para el ejemplo 6



2.4 VALOR ABSOLUTO

DEFINICION: El valor absoluto de un número real, notado |x|, se define como:

$$|\mathbf{x}| = \begin{cases} \mathbf{x\ si\ x \geq 0} \\ \mathbf{-x\ si\ x} < 0 \end{cases}$$

Esto es, si x ≥ 0, el valor absoluto es el mismo número. Pero si x < 0, el valor absoluto es el inverso aditivo. También se puede definir |x| = máx{x, -x}.

El valor absoluto mide la distancia del punto x al origen. Quién esté ubicado en x = 20 se encuentra a 20 unidades del origen y quién esté en x = -7 se encuentra a 7 (inverso aditivo de -7) unidades de origen.

PROPIEDADES

1. |x| > 0 si y solo si x ≠ 0

Si |x| > 0 puede darse que |x| = x ó |x| = -x, según x ≥ 0 ó x < 0. Pero como |x| > 0, entonces se cumple que x > 0 ó –x > 0. Por tanto, se observa claramente que x ≠ 0.

Ahora si x ≠ 0, puede ser x > 0 ó –x > 0. De esta forma, |x| = x ó |x| = -x; con lo cual queda demostrado que |x| > 0.

2. |x| = 0 si y solo si x = 0

Si |x| = 0 puede darse que: **i)** |x| = x si x ≥ 0 ó **ii)** |x| = -x si x < 0. De ahí se concluye que x = 0.

De otro lado, si x = 0, evidentemente |x| = 0.

3. $|x|^2 = x^2$ con x ∊ R.

Si x ≥ 0, entonces |x| = x. De ahí se puede concluir que $|x|^2 = x^2$. Si x < 0, entonces |x| = -x. Por tanto, $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$. De esta forma, $|x|^2 = x^2$.

4. $|x| = \sqrt{x^2}$

Elevando al cuadrado en ambos lados, $|x|^2 = x^2$ y por la propiedad anterior, se tiene el resultado.

5. |x| = |-x|

Como $|x| = \sqrt{x^2}$, entonces $|-x| = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2}$. Por tanto, |x| = |-x|

6. Si x ∊ R ∧ y ∊ R, entonces $|xy| = |x||y| \wedge \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{(x)^2(y)^2} = \sqrt{(x)^2}\sqrt{(y)^2} = |x||y|$$

$$|x| = \left|x\frac{y}{y}\right| = \left|\frac{x}{y}y\right| = \left|\frac{x}{y}\right||y| \rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

7. Si $x \in$ R, $-|x| \leq x \leq |x|$

Si $x \geq 0$ es claro que $0 \leq |x| = x$ y así $-|x| \leq x \leq 0 \leq |x|$

Si $x < 0$ es claro que $|x| = -x$ y así $-|x| = x$ de donde $|x| = x$. Entonces, $-|x| \leq x \leq 0 \leq |x|$ y por lo tanto $-|x| \leq x \leq |x|$.

8'. $|x| \leq a$, con $a \geq 0$, si y solo si $–a \leq x \leq a$

Si $x \in$ R se cumplen dos condiciones: **i)** que $x \geq 0$; entonces $–a \leq 0 \leq x$ y como $|x| = x \leq a$, se tiene que $–a \leq x \leq a$. **ii)** Si $x < 0$; entonces $|x| = -x$. en consecuencia $-|x| = x$ y $– a \leq -|x| = x < 0 \leq a$. De donde se tiene que $–a \leq x \leq a$. Por lo anterior, $-a \leq x \leq a$.

Hacia el otro lado, si $–a \leq x \leq a$ se cumplen dos condiciones: **i)** $x \geq 0$. Entonces $|x| = x \leq a$; de donde $x \geq a$ **ii)** si $x < 0$, entonces $|x| = -x$. Multiplicando por -1 se tiene que $-|x| = x$. De aquí se concluye que $–a \leq -|x|$ y por tanto $|x| \leq a$.

En el caso particular de $|x| = a$, con $a > 0$, se tiene que $x = \pm a$.

8''. $|x| \geq a$, con $a \geq 0$, y si y solo si $x \geq a$ o $x < -a$

Si $a \geq 0$ y $x \in$ R, entonces se cumplen dos condiciones **i)** $x \geq 0$. Esto implica que $x = |x| \geq$ *a,* con lo cual se concluye que $x \geq$ *a* **ii)** $x < 0$ implica que $|x| = -x \geq$ *a.* Por tanto, $x \leq a$; es decir, $a \leq -x$.

Hacia el otro lado, si $x \geq a$ y $a \geq 0$, entonces $x \geq 0$. De ahí se tiene que $|x| = x \geq a$. Además, si $x \leq -a$ y $a \geq 0$, entonces $x \leq 0$. En consecuencia, $|x| = -x$, y $|x| \geq a$.

8. Si $x,y,z \in$ R, entonces $|x \pm y| \leq |x| + |y|$. DESIGUALDAD TRIANGULAR

Se tiene $-|x| \leq x \leq |x|$ y $-|y| \leq y \leq |y|$, entonces $–(|x+y|) \leq x+y \leq |x+y|$. Por 8' se tiene $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Como $|x+y| \leq |x| + |y|$, para todo $x,y \in R$, entonces es válida para $x,-y$ y así $|x + (-y)| \leq |x| + |-y|$. Como $|y| = |-y|$, entonces $|x - y| \leq |x|+|y|$

APLICACIONES DE LA DESIGUALDAD TRIANGULAR

Si $x,y, \in R$, entonces $|x| - |y| \leq |x + y| \wedge -|x-y| \leq |x| - |y|$

$|x| = |x + (y - y)| \leq |(x + y) - y| \leq |x + y| + |y|$.

Por tanto se tiene que, $|x - y| \leq |x + y|$ (1)

$|y| = |y + (x - x)| \leq |(y + x)| + |x|$

Se tiene que $|y| - |x| \leq |x + y|$ (2)

Por lo anterior, $-|x + y| \leq |x - y|$.

Ahora de (1) y (2), se sigue que $-|x + y| \leq |x| - |y| \leq |x + y|$

Con lo cual $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

2.5 DISTANCIAS

La noción de la distancia o la medida de la distancia entre números reales o puntos de la recta notada, $d(x, y)$, debe ser un número positivo o cero; es decir, $d(x, y) \geq 0$. En consecuencia, la distancia entre x e y es igual a la distancia entre y e x: $d(x, y) = d(y, x)$. La distancia es cero si los dos puntos son iguales; entonces, $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

Si $x, y \in R$, entonces $d(x, y) = |x - y|$, debido a que $|x - y| \geq 0$.

Además, $|x - y| = |y - x|$.

En consecuencia, $|x - y| = 0$ si y solo si $x – y = 0$; esto es, $x = y$.

De otra parte, dados x, y, z $\in$ R, siempre se cumple la siguiente relación entre las distancias: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Si x, y, z $\in$ R, se sabe que:

$d(x, y) = |x - y|$

$d(x, z) = |x - z|$

$d(y, z) = |y - z|$

Aplicando la desigualdad triangular, se tiene que:

$|x - y| \leq |x - z| + |y - z|$

Por tanto, se puede observar que $|x - y| = |x - y + (z - z)|$

Agrupando términos, $|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|$.

Dado que $|z - y| = |y - z|$, se tiene que: $|x - y| \leq |x - z| + |y - z|$.

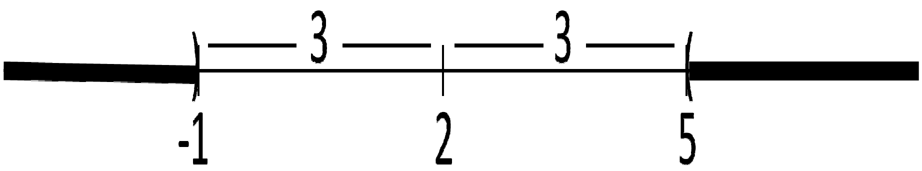
Es conveniente leer $|x - b|$ como la distancia de x a b. Esto permite resolver en forma trivial algunas desigualdades.

Ejemplo 1:

$|x - 2| > 3$

Léase, la distancia de los puntos x a 2 debe ser mayor que 3.

Tomando el punto dos como referencia y sabiendo que los puntos que están exactamente a tres unidades de x son: 2 + 3 = 5 y 2 – 3 = -1. Es posible determinar que los puntos que están a una distancia mayor que 3, con respecto a 2, son los de los dos intervalos $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$



Ejemplo 2:

|3 - 2x| < 1

En este caso conviene escribir la desigualdad en forma equivalente, de tal manera que se pueda interpretar como una distancia.

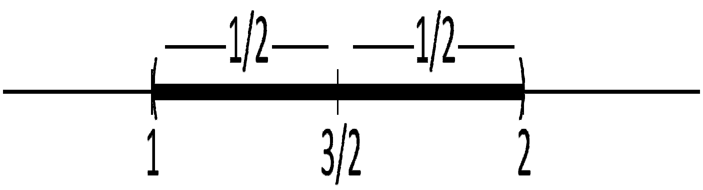
Así, |3 - 2x| < 1, si y solo si $\left|\mathbf{2}\left(\mathbf{x}-\frac{3}{2}\right)\right| < \mathbf{1}$.

Por tanto, |3 - 2x| < 1, si y solo si |2| $\mathbf{|}\left(\boldsymbol{x}-\frac{3}{2}\right)| < \mathbf{1}$.

De esta forma se obtiene que |3 - 2x| < 1, si y solo si $\left|\left(\mathbf{x}-\frac{3}{2}\right)\right| < \frac{1}{2}$

La solución de esta última desigualdad está dada por los puntos cuya distancia a $\frac{3}{2}$ es menor a $\frac{1}{2}$.

Se determina que los puntos 1 y 2 están exactamente a $\frac{1}{2}$ del punto $\frac{3}{2}$. Entonces, la solución buscada es el conjunto de los números incluidos en el intervalo (1, 2), puesto que los puntos interiores del intervalo están a una distancia inferior a $\frac{1}{2}$ unidad del punto $\frac{3}{2}$.

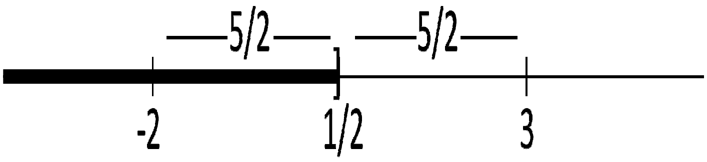


Ejemplo 3:

$|x - 3| \geq |x + 2|$

Esto se lee así: la distancia de x a 3 es mayor o igual que la distancia de x a -2. Notar que $|x + 2| = |x - (-2)|$.

En este caso, se tienen dos puntos a los cuales medir la distancia, los puntos 3 y -2. Entonces se define el intervalo [-2, 3], cuyo punto medio es (-2 + 3) / 2 = ½. Por ser el punto medio, 1/2 equidista de 3 y -2. Como en este caso se requieren los puntos cuya distancia a -2 sea menor o igual que la distancia a 3, entonces los puntos de intervalo $(-\infty, \frac{1}{2}]$ constituyen la solución de la desigualdad en cuestión.



Para el lector interesado se dejan los siguientes ejercicios:

$|3x-1| \geq 4$

$|2x-2| \leq |3-2x|$

$|3x-1| \leq |x-2|$

Las desigualdades resueltas en los ejemplos presentados, aplicando el concepto de distancia, también pueden ser resueltas utilizando las propiedades del valor absoluto señaladas anteriormente.

Por ejemplo, determinar la solución de la desigualdad $|x - 2| > 3$ aplicando las propiedades.

$|x – 2| > 3$ equivale a dos desigualdades: $-(x – 2) > 3$ ó $x – 2 > 3$.

Entonces, $x - 2 < -3$ ó $x - 2 > 3$. De donde se obtiene que $x < -1$ ó $x > 5$ que corresponde a los intervalos $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$, como se determinó anteriormente.

Algunas desigualdades más complicadas no pueden ser resueltas por el concepto de distancia. En esos casos se puede utilizar la definición de valor absoluto o bien emplear sus propiedades.

Ejemplo 4:

$|2x - 3| \leq 3|x - 1|$

Esto se puede escribir como $2|x - 3/2| \leq 3|x - 1|$. Sin embargo, es difícil ver cuáles son los números cuyo doble de la distancia a 3/2 es menor o igual que el triplo de la distancia a 1.

De otra parte, los factores $(x - 3/2)$ y $(x - 1)$ se anulan en 3/2 y 1, y son positivos a la derecha o negativos a la izquierda de 3/2 y 1 respectivamente. Entonces, se divide la recta en los intervalos $[3/2, \infty)$, $[1, 3/2)$, $(-\infty, 1)$ y en cada uno de ellos es posible aplicar a la desigualdad la definición de valor absoluto para tener tres desigualdades. Las soluciones de esas desigualdades en cada uno de los tres intervalos, conforman el conjunto de las soluciones buscadas.

Resolviendo para el intervalo $(-\infty, 1)$

Este intervalo está ubicado a la izquierda de 1 y de 3/2. En consecuencia, en él los factores son negativos. Por tanto,

$|x - 3/2| = -(x - 3/2) \quad \wedge \quad |x - 1| = -(x - 1)$.

Entonces,

$$2\left(\frac{3}{2}-x\right) \leq 3(1-x)$$

$$3-2x \leq 3-3x$$

$$x \leq 0$$

Resolviendo para el intervalo [1, 3/2)

Este intervalo está ubicado a la derecha de 1 y a la izquierda de 3/2. En consecuencia, en él el factor x – 3/2 es negativo y el factor x – 1 es positivo. Por tanto,

|x – 3/2| = -(x – 3/2) $\wedge$ |x – 1| = x – 1.

Entonces,

$$2\left(\frac{3}{2}-x\right) \leq 3(x-1)$$

$$3-2x \leq 3x-3$$

$$6 \leq 5x$$

$$x \geq \frac{6}{5}$$

Teniendo en cuenta el intervalo, la solución de esta parte será: $\frac{6}{5} \leq x < \frac{3}{2}$

Resolviendo para el intervalo [3/2, ∞)

Este intervalo está ubicado a la derecha de 1 y de 3/2. En consecuencia, en él los factores son positivos. Por tanto,

|x – 3/2| = x – 3/2 $\wedge$ |x – 1| = x – 1.

Entonces,

$2\left(x-\frac{3}{2}\right) \leq 3\ (x - 1)$

$2x - 3 \leq 3x - 3$

$x \geq 0$

Teniendo en cuenta el intervalo, la solución de esta parte será: $x \geq \frac{3}{2}$.

Gráficamente se tiene lo siguiente:

$-\infty$ 1 3/2 ∞

$2\left(\frac{3}{2}-x\right) \leq 3(1-x)$	$2\left(\frac{3}{2}-x\right) \leq 3(x-1)$	$2\left(x-\frac{3}{2}\right) \leq 3\ (x - 1)$
$3-2x \leq 3-3x$	$3-2x \leq 3x-3$	$2x - 3 \leq 3x - 3$
$x \leq 0$	$x \geq \frac{6}{5}$	$x \geq 0$

En consecuencia, la solución de la desigualdad dada será: $(-\infty, 0] \cup [\frac{6}{5}, \infty)$.

2.6 EL MÉTODO UNIVERSAL PARA RESOLVER DESIGUALDADES APLICADO A PROBLEMAS CON VALOR ABSOLUTO

Como se observó en los ejemplos anteriores, el concepto de distancia puede aplicarse a la resolución de desigualdades que involucran expresiones con valor absoluto. Sin embargo, también se vio que ese concepto tiene limitaciones para ser aplicado a problemas de mayor complejidad. En esos casos se comprobó que es posible hallar la solución aplicando la definición de valor absoluto. No obstante, en este trabajo se muestra que el método universal para resolver desigualdades puede aplicarse en todos los casos, con la enorme ventaja de su sencillez y la rapidez con la que se determina la solución. Se procede ahora a presentar la resolución de los ejemplos anteriores, aplicando el método universal para resolver desigualdades propuesto en este trabajo.

Ejemplo 1:

$|x - 2| > 3$

La expresión se escribe de la forma: $f(x) > 0$. Entonces,

$f(x) = |x – 2| - 3 > 0$

Paso 1. Se determina el dominio.

La función es continua en R

Paso 2. Se resuelve la ecuación $f(x) = 0$.

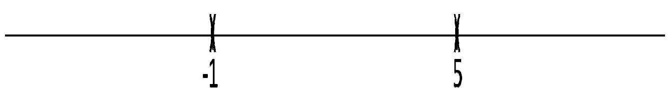
$f(x) = |x – 2| - 3 = 0$

Entonces, $|x – 2| = 3$

Por tanto: $x – 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 5$

También, $-(x – 2) = 3 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

Paso 3. Se retiran $x = 5$ y $x = -1$ del dominio. Quedan los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 5)$ y $(5, \infty)$. Gráficamente:



Paso 4. Se evalúa un punto en cada intervalo.

f(-5) = |-5 – 2| - 3 = |-7| - 3 = 7 – 3 = 4 > 0.

Entonces el intervalo (-∞, -1) es solución.

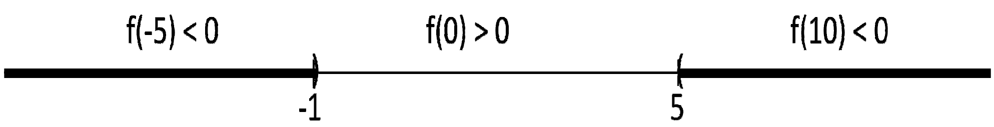
f(0) = |0 – 2| - 3 = |-2| - 3 = 2 – 3 = -1 < 0.

Entonces el intervalo (-1, 5) no es solución.

f(10) = |10 – 2| - 3 = |8| - 3 = 8 – 3 = 5 > 0.

Entonces el intervalo (5, ∞) es solución.

Por tanto, la solución es (-∞, -1) ∪ (5, ∞). Gráficamente:



Ejemplo 2:

|3 - 2x| < 1

La expresión se escribe de la forma: f(x) < 0. Entonces,

f(x) = |3 – 2x| - 1 < 0

Paso 1. Se determina el dominio.

La función es continua en R

Paso 2. Se resuelve la ecuación f(x) = 0.

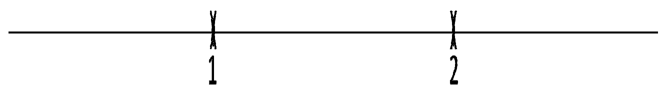
f(x) = |3 – 2x| - 1 = 0

Entonces, |2x – 3| = 1

Por tanto: $2x – 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

También, $-(2x – 3) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

Paso 3. Se retiran x = 2 y x = 1 del dominio. Quedan los intervalos (-∞, 1), (1, 2) y (2, ∞). Gráficamente:



Paso 4. Se evalúa un punto en cada intervalo.

f(-10) = |3 – 20| - 1 = |-17| - 1 = 17 – 1 = 16 > 0.

Entonces el intervalo (-∞, 1) no es solución.

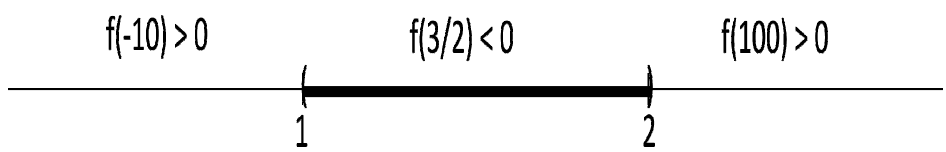
f(3/2) = |3 – 3| - 1 = |0| - 1 = 0 – 1 = -1 < 0.

Entonces el intervalo (1, 2) es solución.

f(100) = |3 – 200| - 1 = |-197| - 1 = 197 – 1 = 196 > 0.

Entonces el intervalo (2, ∞) no es solución.

Por tanto, la solución es el intervalo (1, 2). Gráficamente:



Ejemplo 3:

|x - 3| ≥ |x + 2|

La expresión se escribe de la forma: $f(x) \geq 0$. Entonces,

$f(x) = |x - 3| - |x + 2| \geq 0$

Paso 1. Se determina el dominio.

La función es continua en R

Paso 2. Se resuelve la ecuación $f(x) = 0$.

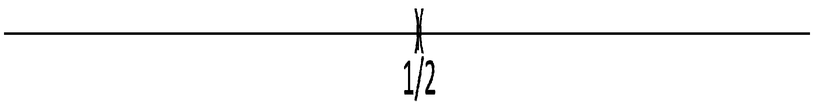
$f(x) = |x - 3| - |x + 2| = 0$

Entonces, $|x - 3| = |x + 2|$

Por tanto: $x - 3 = x + 2 \quad \Rightarrow \quad -3 = 2$ No es posible.

También, $x - 3 = -(x + 2) \quad \Rightarrow \quad x = ½$

Paso 3. Se retiran $x = ½$ del dominio. Quedan los intervalos $(-\infty, ½)$, $(½, \infty)$. Gráficamente:



Paso 4. Se evalúa un punto en cada intervalo.

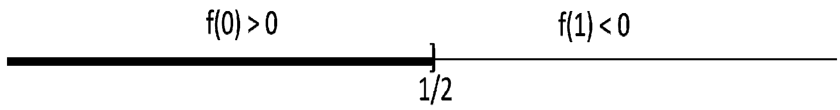
$f(0) = |0 - 3| - |0 + 2| = |-3| - |2| = 3 - 2 = 1 > 0$.

Entonces el intervalo $(-\infty, ½]$ es solución.

$f(1) = |1 - 3| - |1 + 2| = |-2| - |3| = 2 - 3 = -1 < 0$.

Entonces el intervalo $(½, \infty)$ no es solución.

Por tanto, el intervalo solución es $(-\infty, ½]$. Gráficamente:



Ejemplo 4:

|2x - 3| ≤ 3|x - 1|

La expresión se escribe de la forma: f(x) ≤ 0. Entonces,

f(x) = |2x – 3| - 3|x – 1| ≤ 0

Paso 1. Se determina el dominio.

La función es continua en R

Paso 2. Se resuelve la ecuación f(x) = 0.

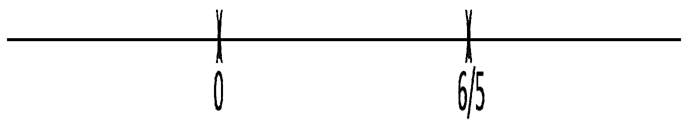
f(x) = |2x – 3| - 3|x – 1| = 0

Entonces, |2x – 3| = 3|x – 1|

Por tanto: 2x – 3 = 3(x – 1) $\Rightarrow$ x = 0

También, 2x – 3) = -3(x – 1) $\Rightarrow$ $x = \frac{6}{5}$

Paso 3. Se retiran x = 0 y $x = \frac{6}{5}$ del dominio. Quedan los intervalos (-∞, 0), (0, 6/5) y (6/5, ∞). Gráficamente:



Paso 4. Se evalúa un punto en cada intervalo.

f(-1) = |-5| - 3|-2| = 5 – 6 = -1 < 0.

Entonces el intervalo (-∞, 0] es solución.

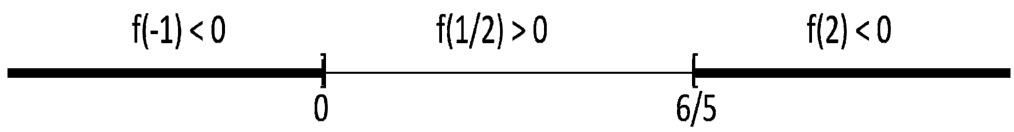
f(½) = 2 – 3/2 = 3/2 > 0.

Entonces el intervalo (0, 6/5) no es solución.

f(2) = 1 – 3 = -2 < 0.

Entonces el intervalo [6/5, ∞) es solución.

Por tanto, la solución es (-∞, 0] ∪ [6/5, ∞). Gráficamente:



3. USO DE TECNOLOGÍAS COMPUTACIONALES

Para resolver los ejemplos presentados en el capítulo 2, así como otros muchos ejemplos y problemas matemáticos, es posible utilizar una ayuda tecnológica. En la actualidad existen varias herramientas o paquetes de software que permiten resolver problemas de algebra, geometría, trigonometría y cálculo, con diferentes grados de complejidad. Software como Matlab, Maple o Derive son entornos poderosos que permiten desarrollar matemática simbólica y numérica en computadores personales. Este capítulo se centra en el programa denominado "Derive" (se pronuncia diraiv), por su facilidad de utilización y la forma natural como se escriben las expresiones que se desean resolver, dibujar, derivar, etc.

3.1 INTRODUCCIÓN AL PROGRAMA DERIVE

Derive es un programa muy poderoso que puede ser utilizado como herramienta de apoyo en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo matemático básico y avanzado. En este programa se pueden manejar variables, ecuaciones, funciones, desigualdades, expresiones algebraicas, expresiones trigonométricas, vectores, matrices, etc. También tiene la capacidad de una calculadora científica y puede representar funciones gráficas en dos y tres dimensiones, en varios sistemas de coordenadas.

A pesar de las muchas posibilidades que brinda en la solución de problemas con matemática simbólica y numérica, es un software fácil de manejar dado que ofrece todas las utilidades del entorno Windows. Es fácil navegar a través de él, se pueden cortar y pegar expresiones, o partes de una expresión, generar reportes y guardar documentos; entre otras prestaciones de interés. Además, permite consultar la ayuda en línea y ofrece un gran soporte manteniendo la tabla de contenidos disponible en todo momento. Adicionalmente, el usuario puede personalizar menús, barras de herramientas y crear atajos de comandos utilizando el teclado. A continuación se listan las posibilidades más interesantes que brinda el programa:

- Informes

Crea, edita, imprime y guarda informes del trabajo realizado.

Permite dar formato a las expresiones matemáticas, al texto y a las gráficas.

Se pueden abrir múltiples ventanas con hojas de trabajo para gráficas en dos y tres dimensiones.

Se pueden cortar, copiar y pegar objetos entre las hojas de trabajo.

Se pueden personalizar los encabezados y los pies de página. Además permite acceso a una vista previa del documento de trabajo.

Permite escribir documentos de trabajo en formato compatible con procesadores de texto.

Carga y analiza archivos de datos numéricos.

Genera programas en lenguaje “C”, “Fortran”, “Pascal” y “Basic”.

Permite la entrada natural de expresiones. Además, es posible editar las expresiones para corregirlas o modificarlas a conveniencia.

Se tiene la disponibilidad de un menú para el ingreso de letras griegas y símbolos matemáticos.

Entrada y edición de matrices en dos dimensiones.

Botones de acceso para funciones comunes de álgebra y cálculo.

Las expresiones se muestran utilizando notación matemática estándar.

Se puede resaltar parte de una expresión, extraerla y sustituirla.

- Gráficas en dos dimensiones

Se pueden hacer gráficas explícitas, implícitas y paramétricas.

Grafica utilizando coordenadas polares y rectangulares.

Es fácil modificar el rango del dibujo utilizando los botones de “zoom”.

Grafica partes reales e imaginarias.

Permite marcar las gráficas con la ecuación correspondiente.

- Gráficas en tres dimensiones

Grafica superficies en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.

Es posible rotar las gráficas utilizando el ratón del computador o las teclas de dirección.

Permite marcar las gráficas con la ecuación correspondiente.

- Aritmética

Aritmética racional exacta, sin errores de redondeo.

Es posible realizar cálculos aritméticos aproximados y ajustar la precisión a conveniencia.

Notación racional, decimal y científica.

Aritmética decimal, hexadecimal, octal o binaria.

Números reales, imaginarios y complejos.

Reconocimiento y generación de números primos.

Generación de números pseudo-aleatorios.

- Álgebra

Expansión y factorización de polinomios.

Expansión de funciones racionales en fracciones parciales.

Simplifica expresiones utilizando identidades ponderosas.

Resuelve ecuaciones e identidades de forma exacta o numérica.

Resuelve sistemas de ecuaciones polinómicas, lineales y no lineales.

Funciones exponenciales, trigonométricas e hiperbólicas.

Especifica ángulos en grados y en radianes.

Funciones continuas por tramos.

Funciones “Riemann zeta”, “gamma” y de error.

Funciones de probabilidad, estadística y financieras.

Sustituye valores de variables o subexpresiones.

Declaración de variables enteras, complejas y reales.

Permite definir funciones y asignar valores a las variables.

- Cálculo

Muestra los pasos en la simplificación de una expresión, con la opción de mostrar las reglas de transformación.

Límites simbólicos finitos e infinitos.

Derivadas de primer orden y de orden n.

Antiderivadas e integrales definidas.

Integración numérica aproximada.

Sumatorias y productos finitos e infinitos.

Diferenciación implícita y paramétrica.

Aproximaciones con series de Taylor y de Fourier.

Transformada de Laplace.

Resuelve de forma exacta ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden.

Aproximación de “Runge-Kutta” para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Posee una biblioteca de funciones especiales.

- Vectores, matrices y conjuntos

Elementos simbólicos y numéricos.

Utiliza la notación estándar con subíndices.

Producto punto, producto cruz y producto externo.

Transpuesta, determinantes, inversa y traza.

Reducción de matrices.

Valores y vectores característicos o propios.

Cálculo vectorial diferencial e integral.

Ajuste de curvas por mínimos cuadrados.

Unión e intersección de conjuntos.

- Programación

Utilización de bloques, lazos e instrucciones “if-then-else”.

Operadores booleanos y relacionales para predicados.

Define valores por omisión para variables locales.

Funciones de reconocimiento de expresiones.

Ordena y busca los elementos de conjuntos y vectores.

Extrae y reemplaza elementos de vectores utilizando subíndices.

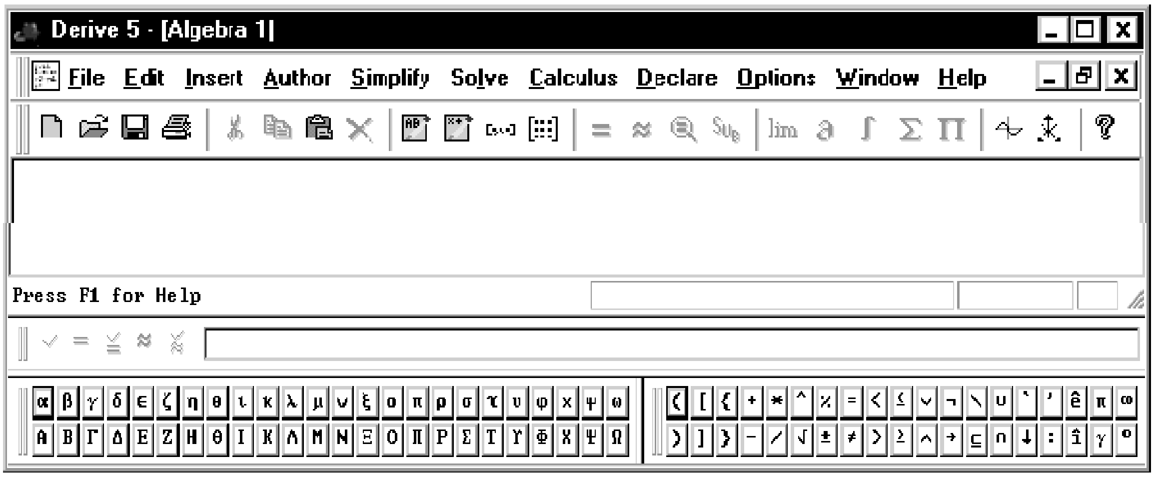
Funciones de procesamiento de caracteres alfanuméricos.

3.2 FUNCIONES Y PROCEDIMIENTOS PARA RESOLVER DESIGUALDADES

A continuación se describen las funciones y procedimientos seguidos para la solución de los ejercicios de desigualdades, objeto de estudio en este documento.

Al ingresar al programa se observa la siguiente pantalla:

Figura 10. Pantalla inicial del programa Derive



De arriba hacia abajo, esta ventana contiene:

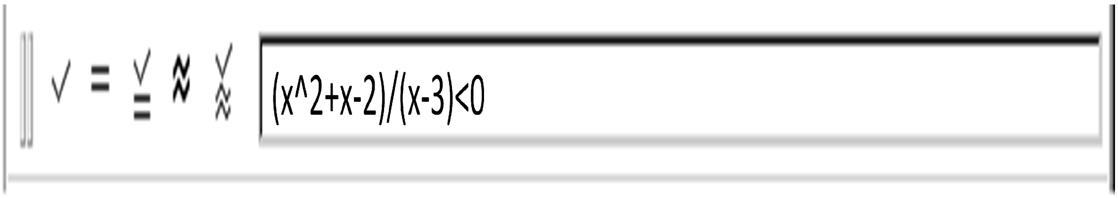
- Barra de título.
- Barra de menú.
- Barra de comandos y herramientas.
- Ventana de álgebra. También llamada ventana de vista de expresiones.
- Barra de estado.
- Barra de entrada de expresiones. También denominada “Línea de entrada”.
- Barra de herramientas de símbolos griegos y barra de herramientas de símbolos matemáticos.

Una vez ubicados en esta pantalla, es posible ingresar la expresión a evaluar utilizando la “línea de entrada”. Por ejemplo, se quiere resolver la desigualdad:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x - 3} < 0$$

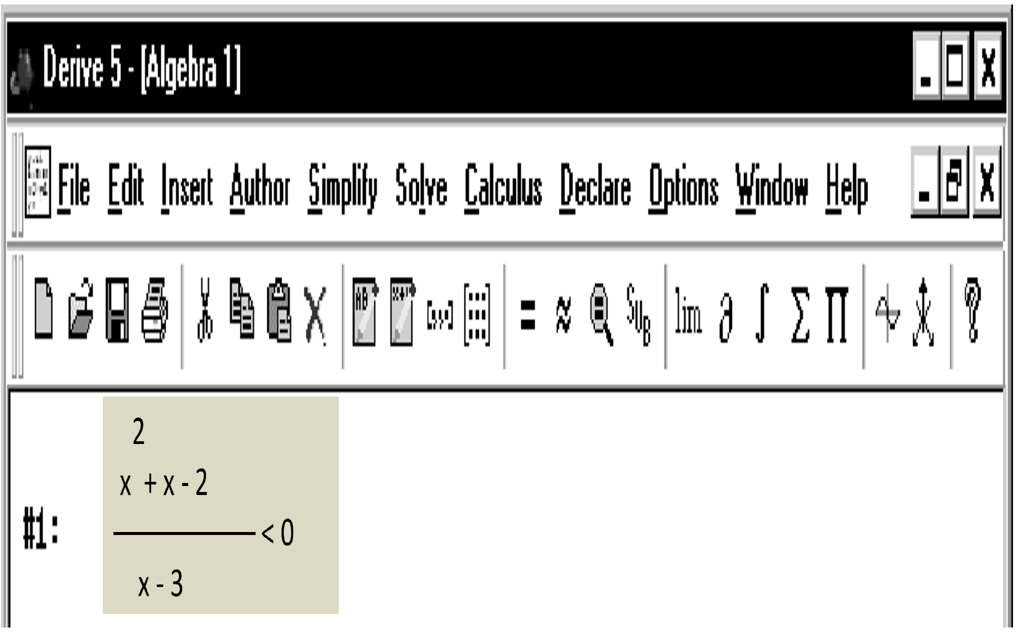
Esta expresión se introduce al sistema de la siguiente forma:

Figura 11. Ejemplo de entrada de una desigualdad a Derive



Al terminar de escribir la expresión se oprime la tecla de entrada: ↵. Como resultado de esta acción, aparece la expresión en la “ventana de álgebra”. Cada expresión se marca con un número. En este caso, por ser la primera expresión introducida, queda marcada con el número 1 (#1), como se indica a continuación:

Figura 12. Ejemplo de desigualdad introducida en Derive

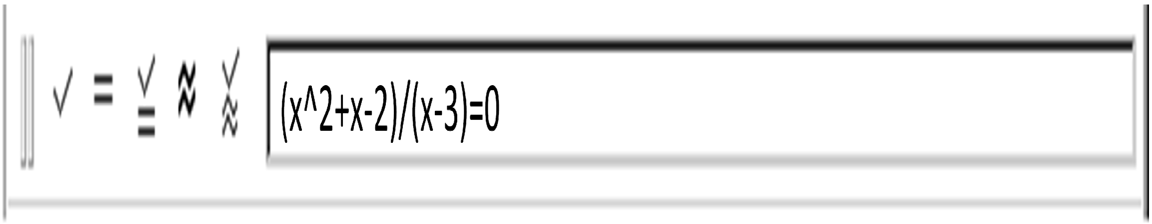


Teniendo la expresión en la “ventana de álgebra”, ya es posible resolver la desigualdad. Sin embargo, con el propósito de ilustrar el método universal para resolver desigualdades, aquí se determinan los valores de x que anulan la función. Para ello, se resuelve la ecuación:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x - 3} = 0$$

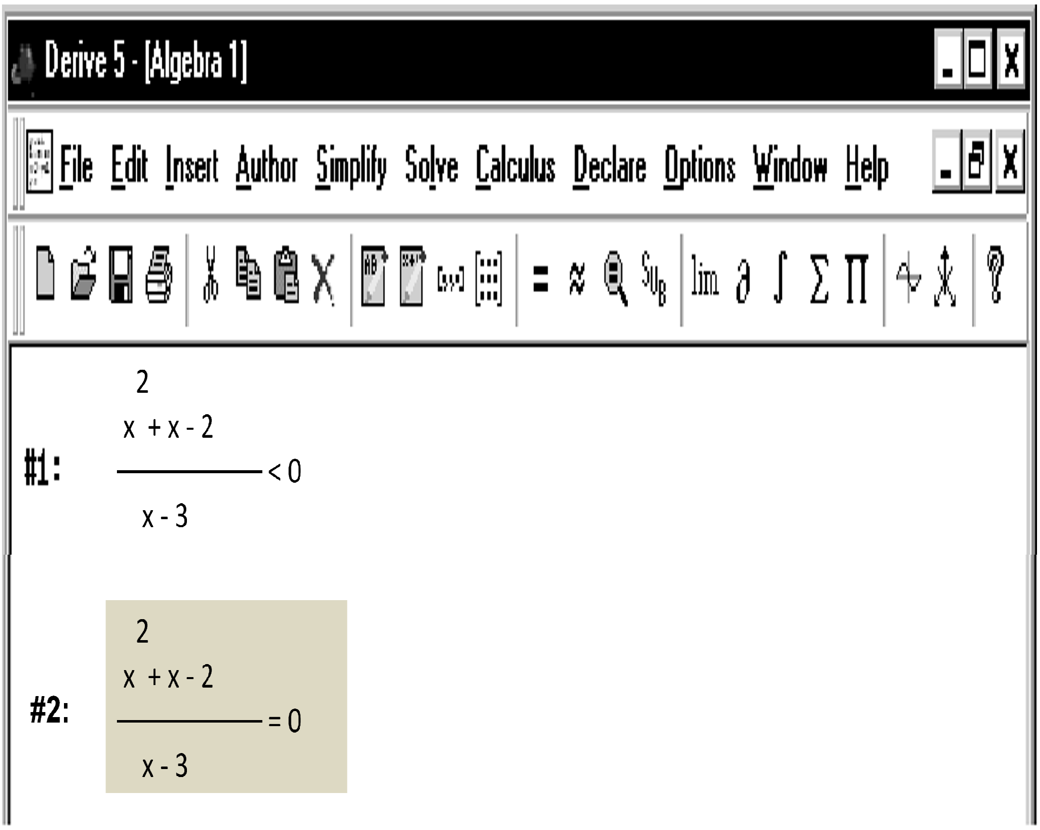
En consecuencia se introduce la expresión en la “línea de entrada”:

Figura 13. Ejemplo de entrada de función a Derive



Al oprimir la tecla de entrada: ↵, la expresión aparece en la “ventana de álgebra”, identificada con el #2, como se muestra a continuación:

Figura 14. Ejemplo de función introducida a Derive



Obsérvese que la última expresión que se introduce queda resaltada. Esto significa que cualquier operación que se realice se aplica sobre esta expresión.

Para seleccionar una expresión simplemente se hace "click" con el ratón del computador sobre ella.

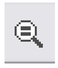
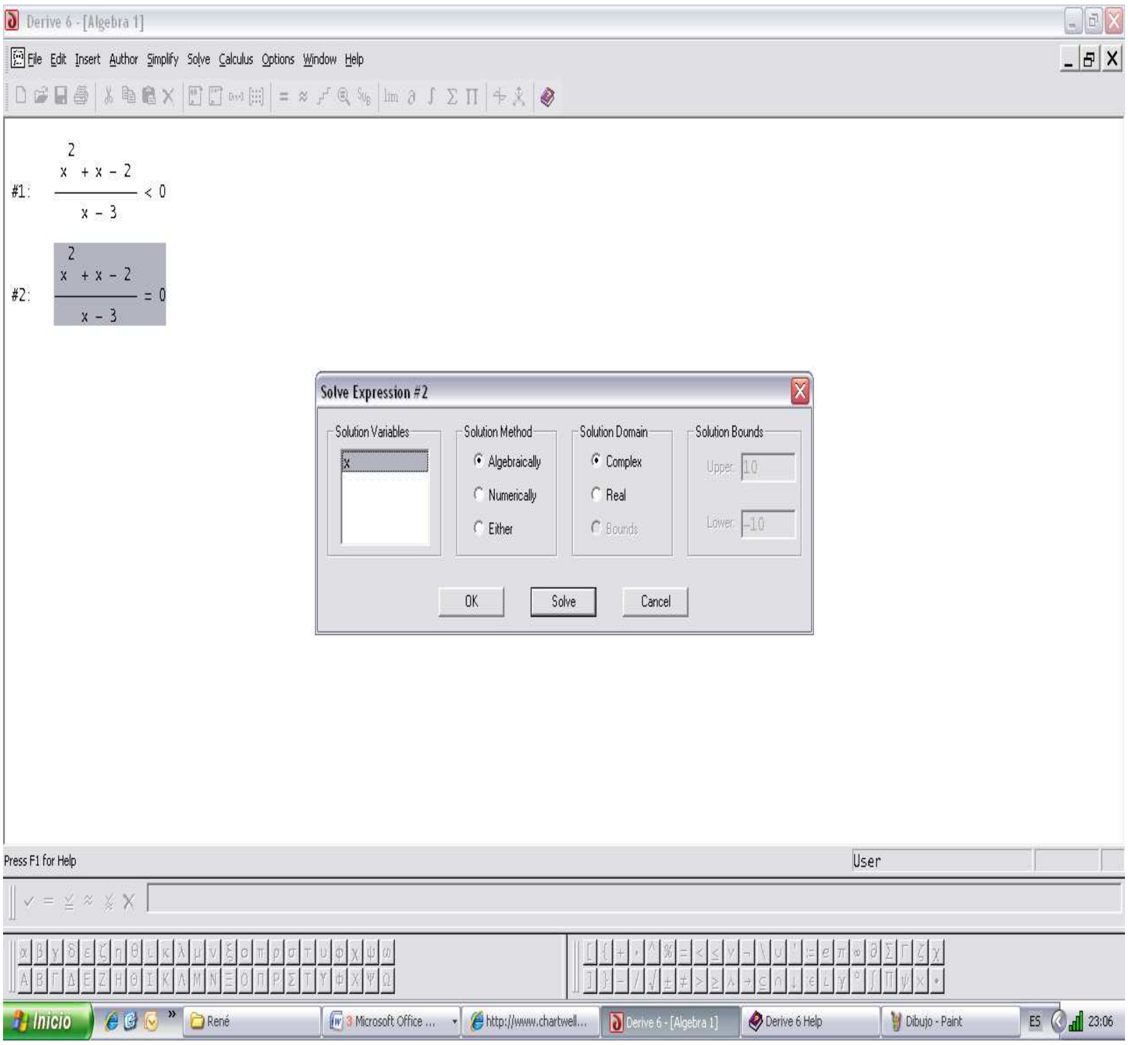
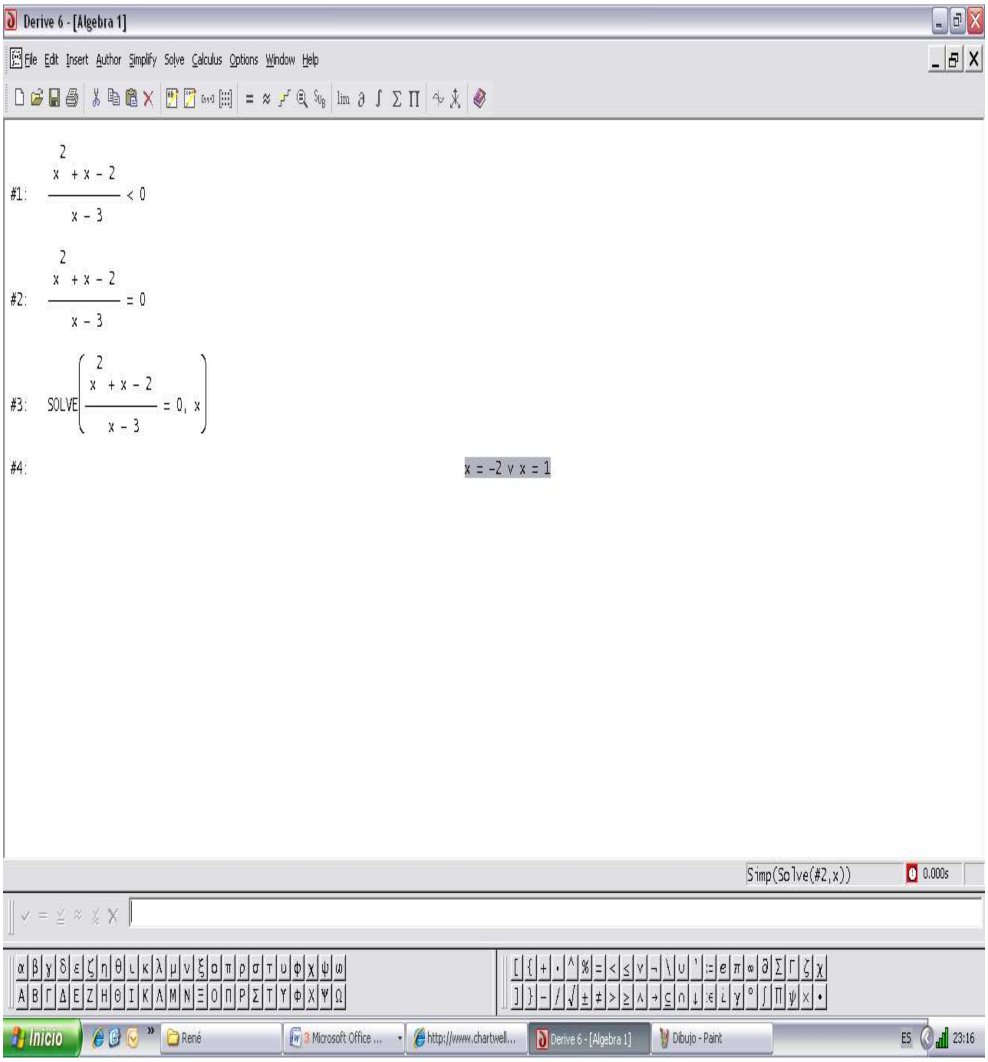
Ahora, para encontrar las raíces de la función se oprime el botón "solve" ubicado en la barra de menú. También se puede utilizar el botón  que se encuentra en la barra de comandos y herramientas. Aparece el cuadro de diálogo siguiente:

Figura 15. Ejemplo de utilización de la función solve en Derive



En el cuadro se indica que la expresión va a ser resuelta para la variable x, algebraicamente y que el dominio seleccionado para la solución es el de los números complejos. Estas opciones pueden modificarse a conveniencia; por ejemplo, para corregir el dominio al de los reales. Entonces se oprime el botón “solve” que aparece resaltado en el cuadro de diálogo, para obtener la respuesta:

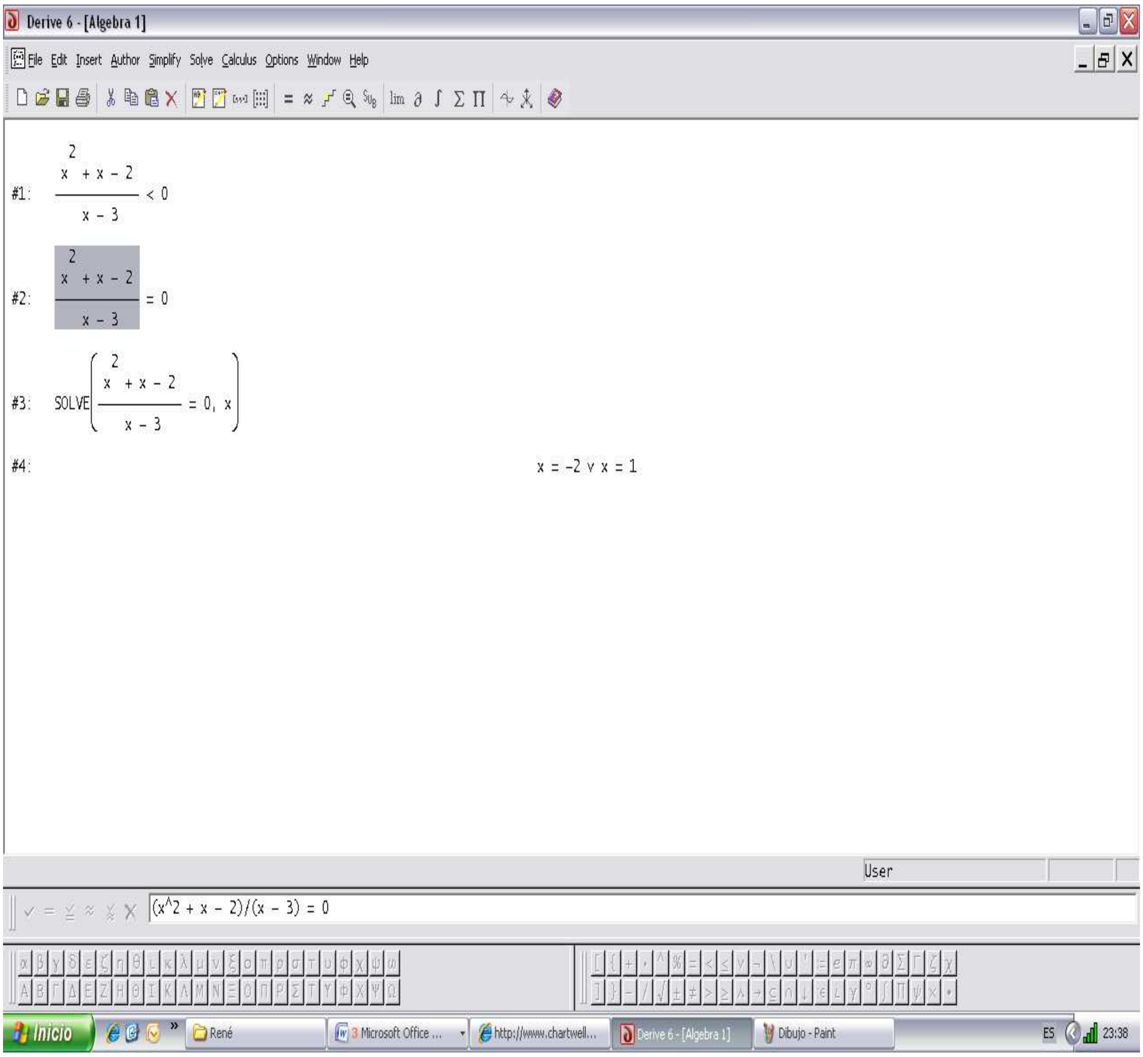
Figura 16. Ejemplo de presentación de la solución en Derive



En el método universal para resolver desigualdades se utilizan las raíces halladas y el dominio de f(x). Además, en este caso, se excluye a x = 3 para definir los intervalos en los cuales la función es continua y no nula. Con el Derive se puede graficar la función para observar los intervalos en los cuales la función es positiva y aquellos en los que es negativa.

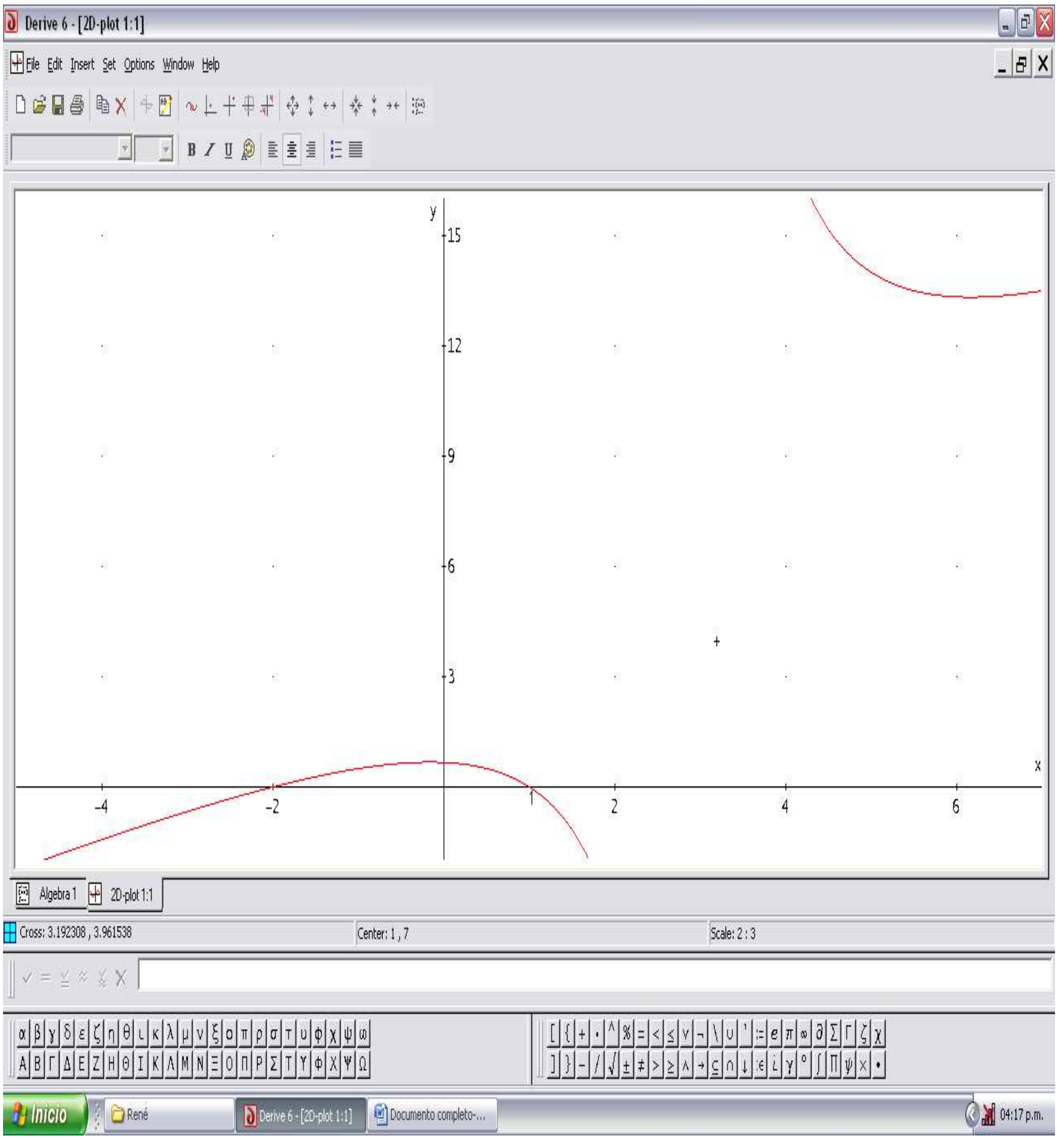
Para graficar la función se selecciona únicamente la parte izquierda, haciendo doble “click” sobre la expresión; como se indica a continuación:

Figura 17. Ejemplo de selección de parte de una expresión



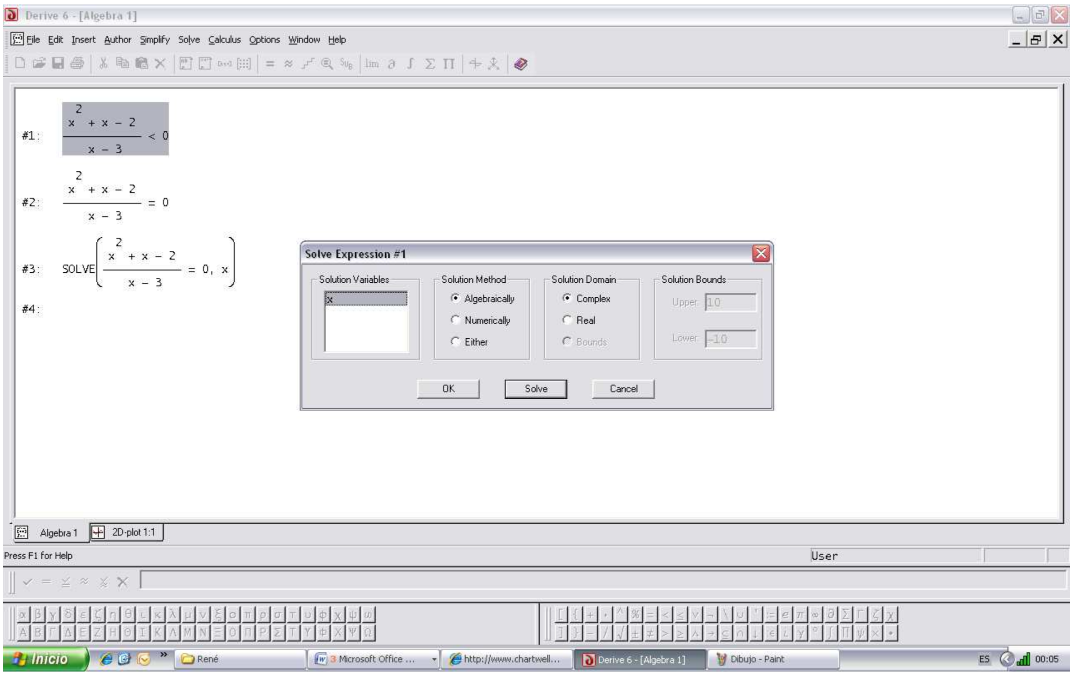
Se procede ahora a abrir la ventana de gráfica en dos dimensiones, oprimiendo el botón  que se encuentra en la barra de comandos y herramientas. Una vez ubicados en la ventana de gráfica en dos dimensiones, se oprime el botón graficar: . Para el ejemplo considerado, y haciendo uso de los botones de “zoom” para el cambio de escala, el resultado es:

Figura 18. Ejemplo de presentación de una gráfica en Derive



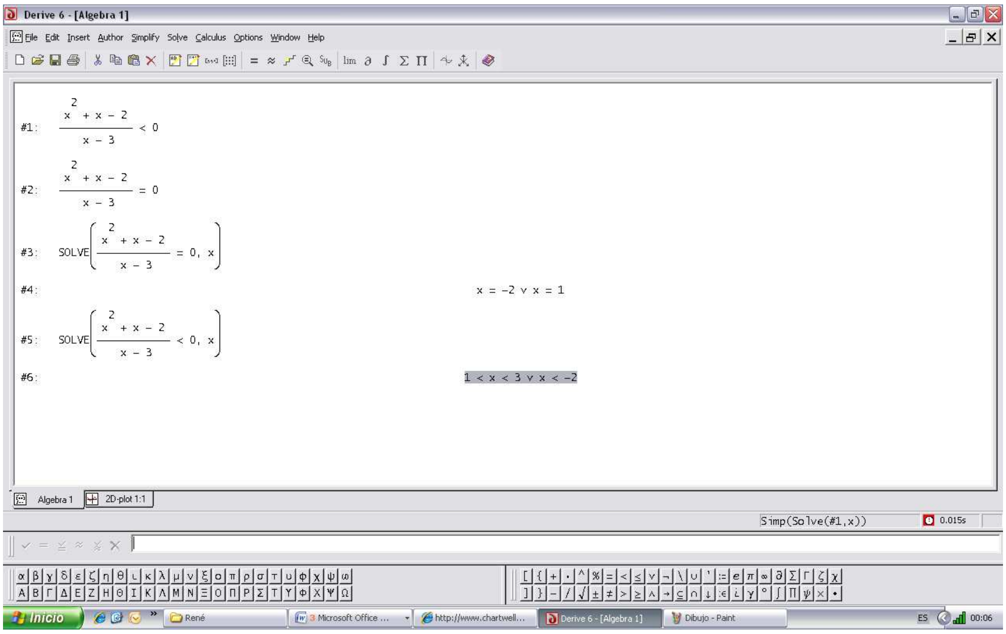
En la gráfica se observa que los intervalos en los cuales la función es menor que cero son: $x < -2 \vee 1 < x < 3$. En este caso el segundo intervalo llega hasta 3, sin incluirlo, porque en $x = 3$ está la asíntota vertical. Esto se puede verificar seleccionando en la ventana de álgebra la desigualdad y oprimiendo el botón "solve" o el botón , como se indicó anteriormente. En el programa la pantalla se ve de la siguiente forma:

Figura 19. Ejemplo de solución de una desigualdad en Derive



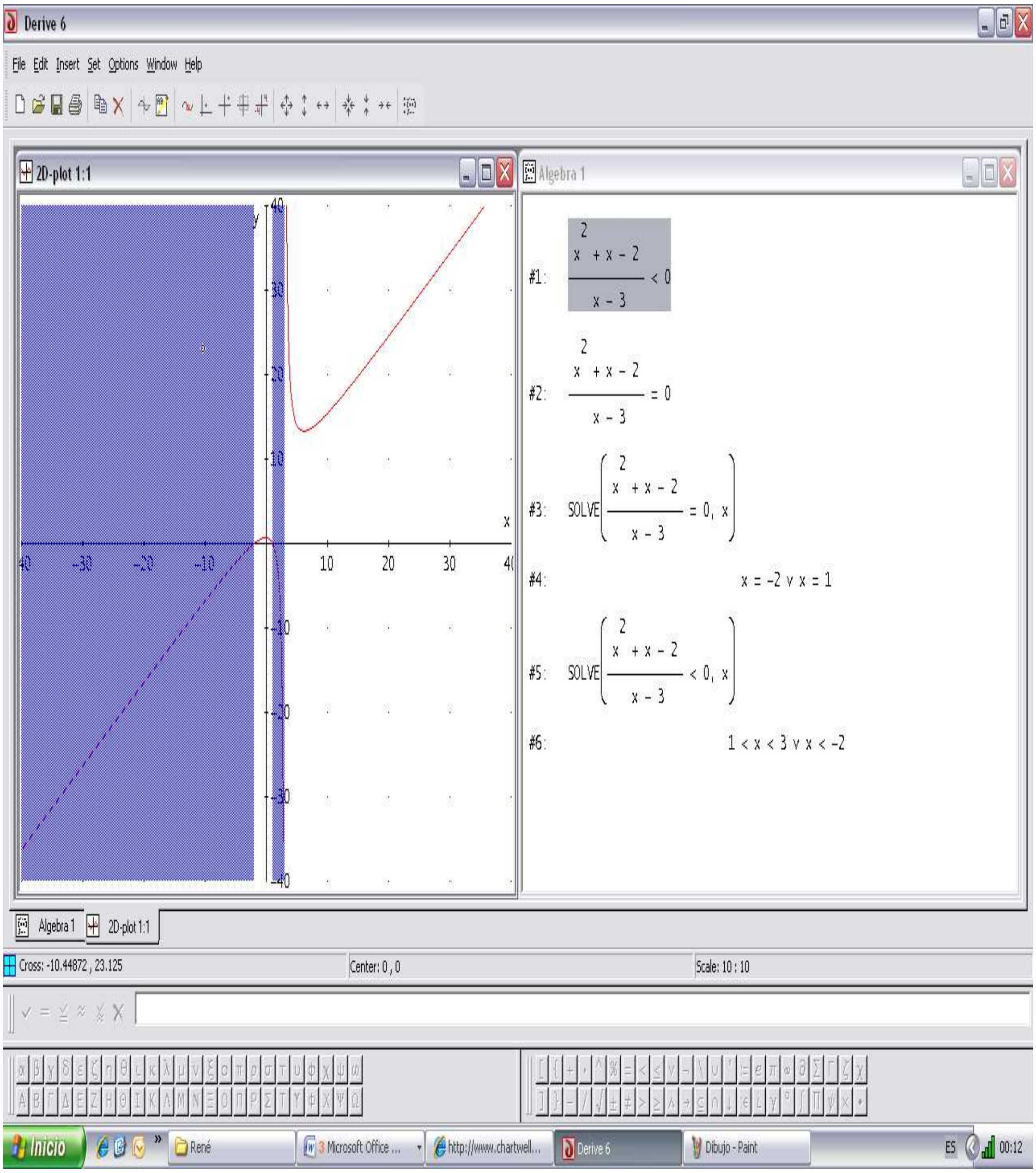
Al oprimir "solve" en el cuadro de diálogo se verifica la solución señalada anteriormente:

Figura 20. Ejemplo de presentación de la solución de la desigualdad



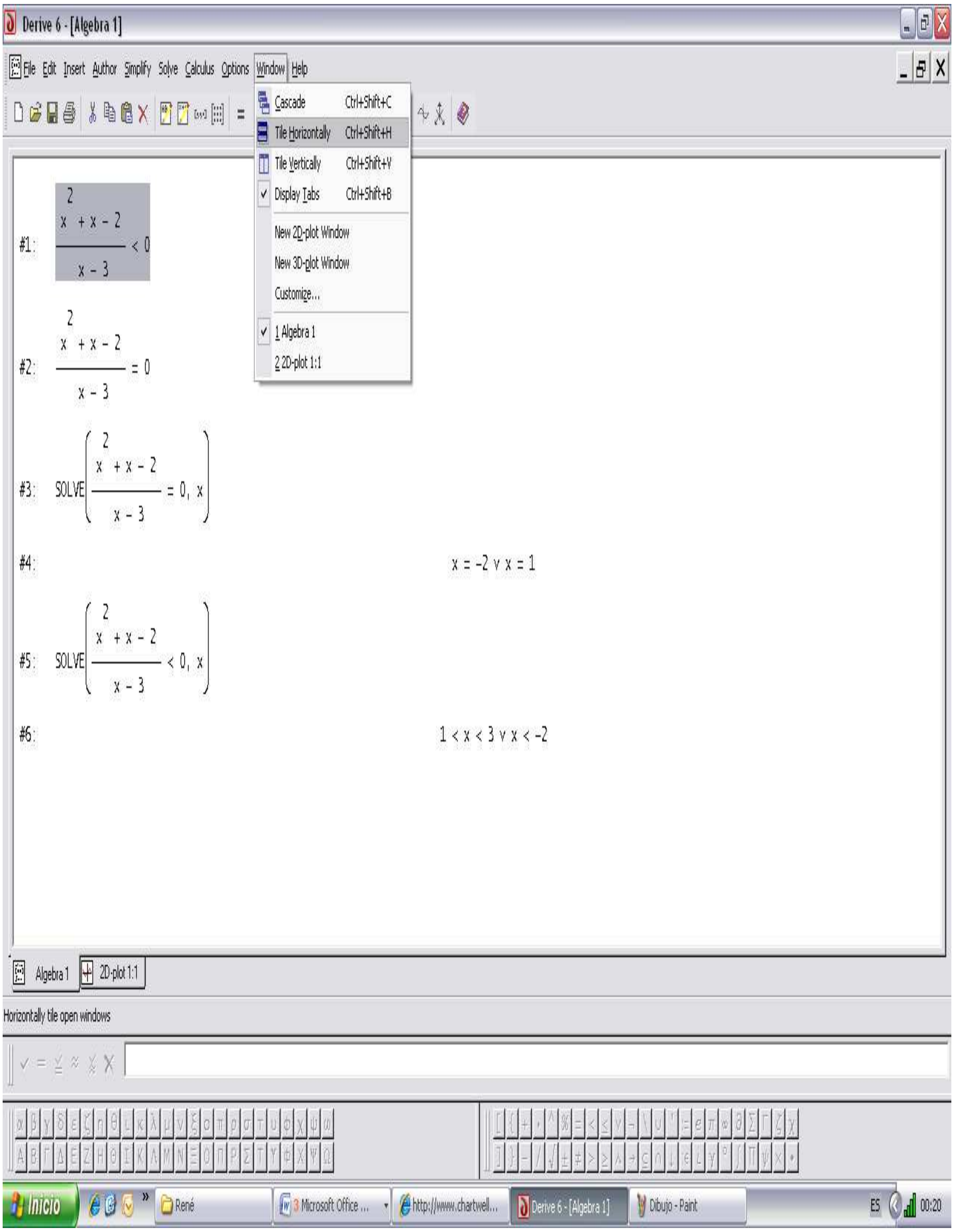
En Derive la solución también se puede obtener en forma gráfica. Para ello se selecciona la desigualdad, se oprime el botón de abrir la ventana de gráfica en dos dimensiones, , y en ella se oprime el botón de graficar . El resultado obtenido es el siguiente:

Figura 21. Ejemplo de solución gráfica de una desigualdad



Para ver esta presentación, en la ventana de álgebra, barra de menú, se seleccionó la opción “window – Tile Vertically”:

Figura 22. Ejemplo de uso del menú Window



3.3 APLICACIÓN DE DERIVE EN LA RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES

En lo que sigue se desarrollan varios ejercicios de aplicación del programa Derive, utilizando el procedimiento explicado en el numeral anterior.

Ejemplo 1

#1: $$\frac{(x + 2)\cdot(x - 1)}{x - 3} < 0$$

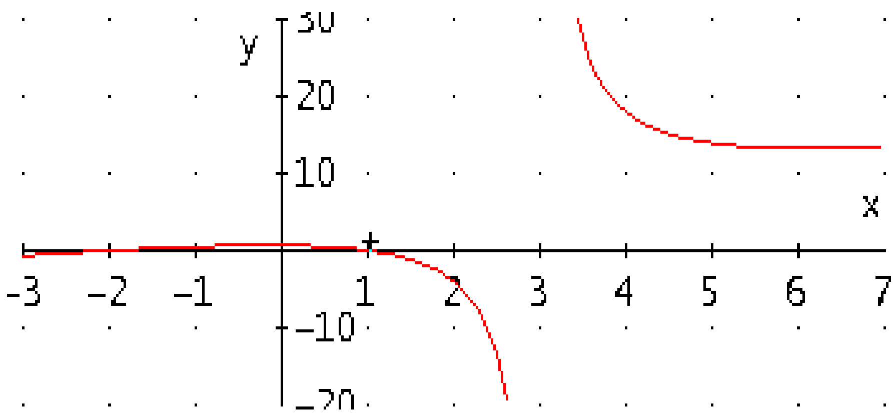
Se resuelve la ecuación f(x) = 0

#2: $$\frac{(x + 2)\cdot(x - 1)}{x - 3} = 0$$

#3: $$\text{SOLVE}\left(\frac{(x + 2)\cdot(x - 1)}{x - 3} = 0, x\right)$$

#4: $$x = -2 \lor x = 1$$

Gráfica de f(x)

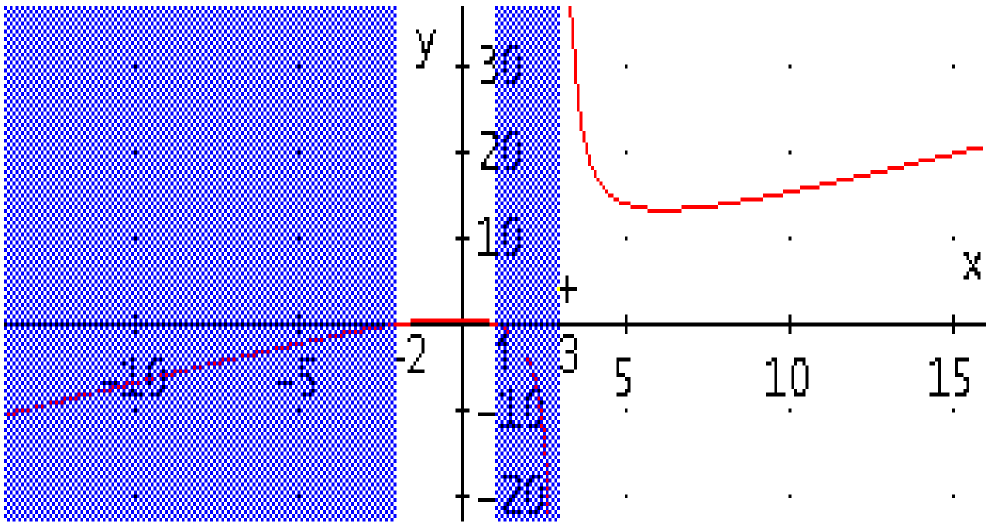


Solución de la desigualdad

$$\#5: \quad \text{SOLVE}\left(\frac{(x + 2)\cdot(x - 1)}{x - 3} < 0,\ x\right)$$

$$\#6: \quad 1 < x < 3 \lor x < -2$$

Solución gráfica de la desigualdad



Ejemplo 2

$$\#1: \quad \frac{(x + 4)\cdot(x - 5)}{x + 2} > 0$$

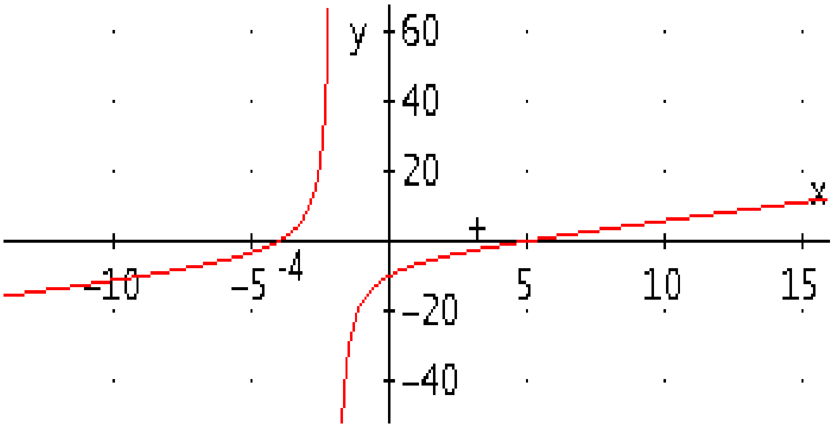
Se resuelve la ecuación f(x) = 0

$$\#2: \quad \frac{(x + 4)\cdot(x - 5)}{x + 2} = 0$$

$$\#3: \quad \text{SOLVE}\left(\frac{(x + 4)\cdot(x - 5)}{x + 2} = 0,\ x\right)$$

$$\#4: \quad x = 5 \lor x = -4$$

Gráfica de f(x)

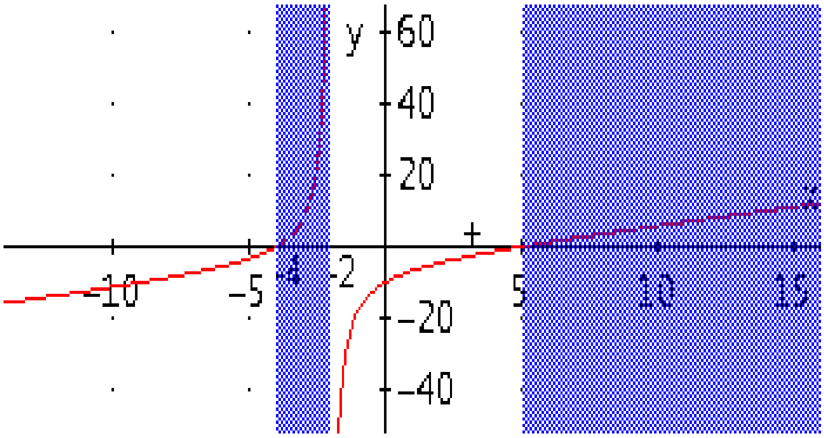


Solución de la desigualdad

$$\#5: \quad \text{SOLVE}\left(\frac{(x + 4)\cdot(x - 5)}{x + 2} > 0, x\right)$$

$$\#6: \quad -4 < x < -2 \vee x > 5$$

Solución gráfica de la desigualdad



Ejemplo 3

$$\#1: \quad \frac{(x - 2)\cdot(x + 3)\cdot(x - 4)}{x\cdot(x - 5)} < 0$$

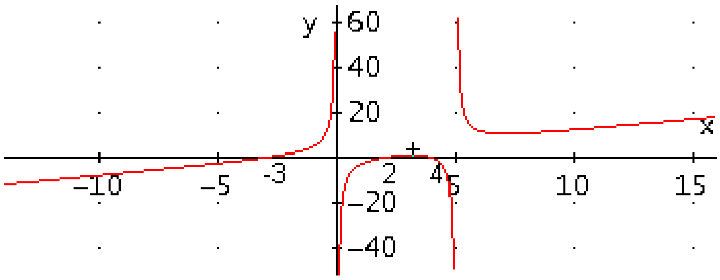
Se resuelve la ecuación f(x) = 0

#2: $$\frac{(x - 2)\cdot(x + 3)\cdot(x - 4)}{x\cdot(x - 5)} = 0$$

#3: $$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{(x - 2)\cdot(x + 3)\cdot(x - 4)}{x\cdot(x - 5)} = 0,\ x\right)$$

#4: $$x = 4 \vee x = -3 \vee x = 2$$

Gráfica de f(x)

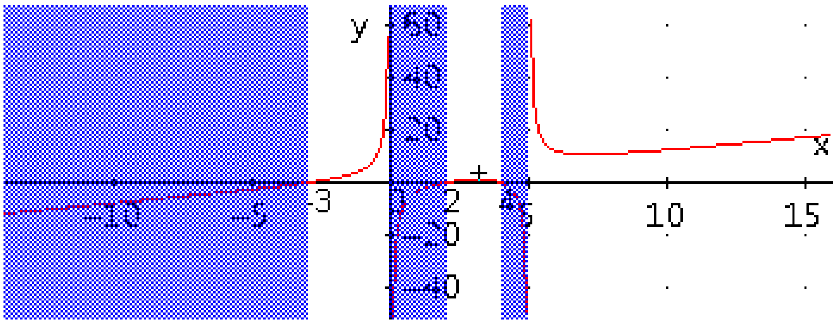


Solución de la desigualdad

#5: $$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{(x - 2)\cdot(x + 3)\cdot(x - 4)}{x\cdot(x - 5)} < 0,\ x\right)$$

#6: $$4 < x < 5 \vee x < -3 \vee 0 < x < 2$$

Solución gráfica de la desigualdad



Ejemplo 4

#1: $x^2 \cdot (x + 3) \ge 0$

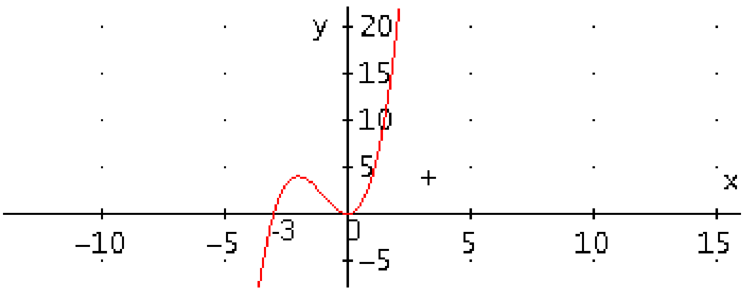
Se resuelve la ecuación f(x) = 0

#2: $x^2 \cdot (x + 3) = 0$

#3: SOLVE($x^2 \cdot (x + 3) = 0$, x)

#4: $x = -3 \vee x = 0$

Gráfica de f(x)

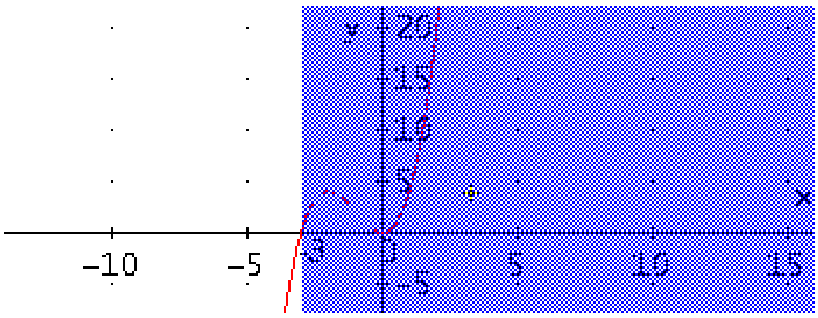


Solución de la desigualdad

#5: SOLVE($x^2 \cdot (x + 3) \ge 0$, x)

#6: $x \ge -3$

Solución gráfica de la desigualdad



Ejemplo 5

#1: $\sqrt{(x + 5)} + \sqrt{x} - 5 > 0$

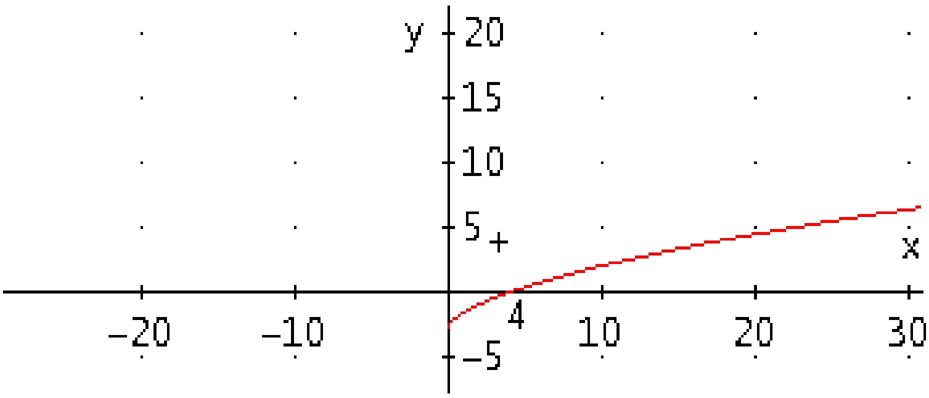
Se resuelve la ecuación f(x) = 0

#2: $\sqrt{(x + 5)} + \sqrt{x} - 5 = 0$

#3: SOLVE($\sqrt{(x + 5)} + \sqrt{x} - 5 = 0$, x)

#4: $x = 4$

Gráfica de f(x)

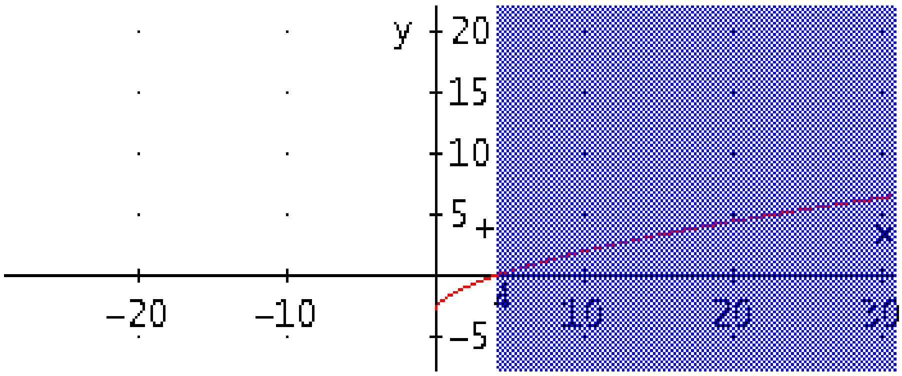


Solución de la desigualdad

#5: SOLVE($\sqrt{(x + 5)} + \sqrt{x} - 5 > 0$, x)

#6: $x > 4$

Solución gráfica de la desigualdad



Ejemplo 6

Sea y / y(x) = x + 2 sin x, con x ∈ [0, 2π]. ¿Dónde y es creciente o decreciente?

#1: $y = x + 2 \cdot SIN(x)$

Se obtiene la derivada y'(x)

#2: $\frac{d}{dx}(x + 2 \cdot SIN(x))$

#3: $2 \cdot COS(x) + 1$

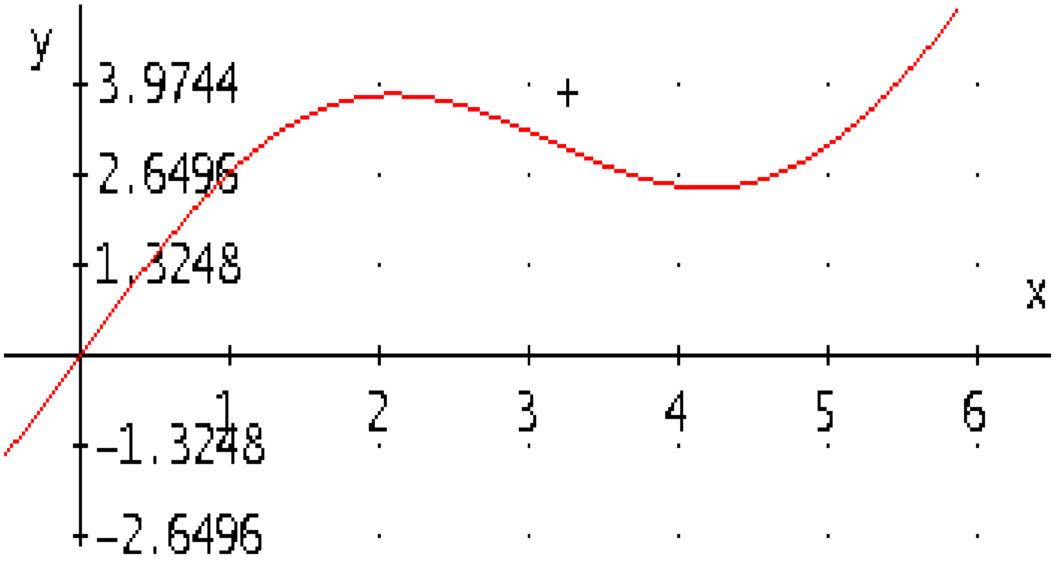
Se resuelve la ecuación y'(x) = 0

#4: $2 \cdot COS(x) + 1 = 0$

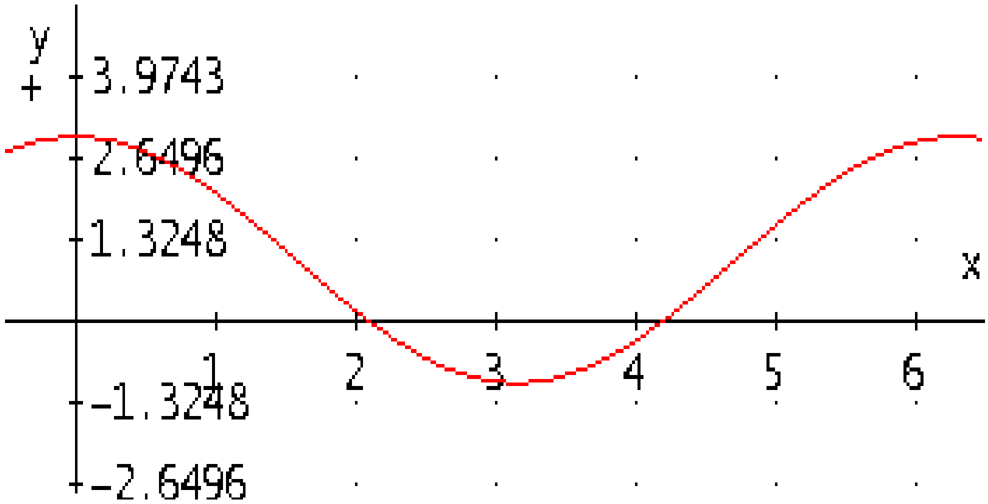
#5: $SOLVE(2 \cdot COS(x) + 1 = 0, x)$

#6: $x = \frac{4 \cdot \pi}{3} \lor x = \frac{2 \cdot \pi}{3}$

Gráfica de y(x)



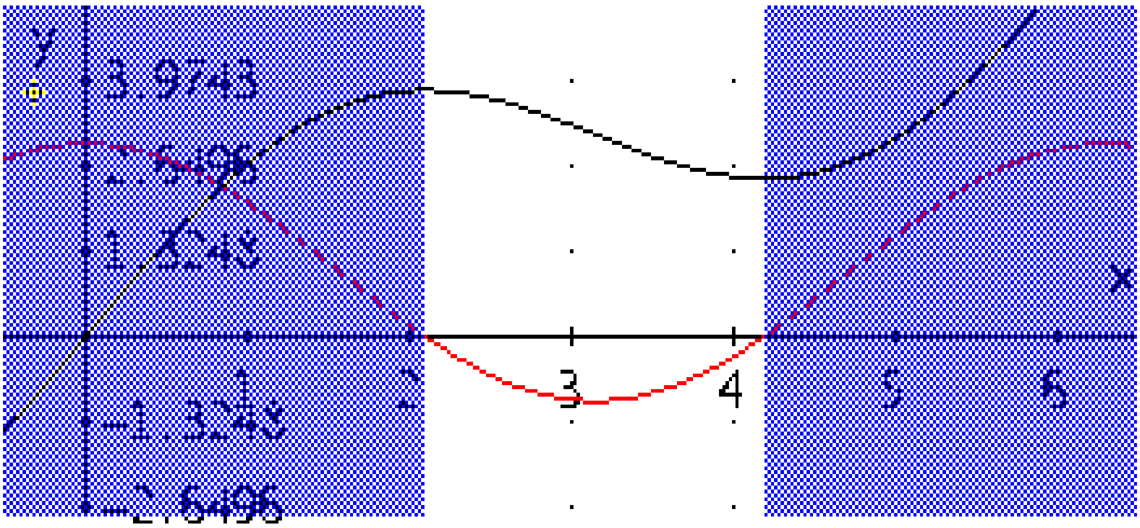
Gráfica de y'(x)



Se determinan los valores de x para los cuales se cumple que y'(x) > 0

```
#7:   2·COS(x) + 1 > 0
```

Solución gráfica de la desigualdad anterior



La función es creciente en los intervalos $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$ en los que se cumple la desigualdad. En esos intervalos la derivada es mayor que cero y por tanto la función es creciente. Asimismo, es decreciente en el intervalo $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$.

Ejemplo 7

$$\#1: \quad \frac{(x - 2)\cdot(x + 6)}{x} < 0$$

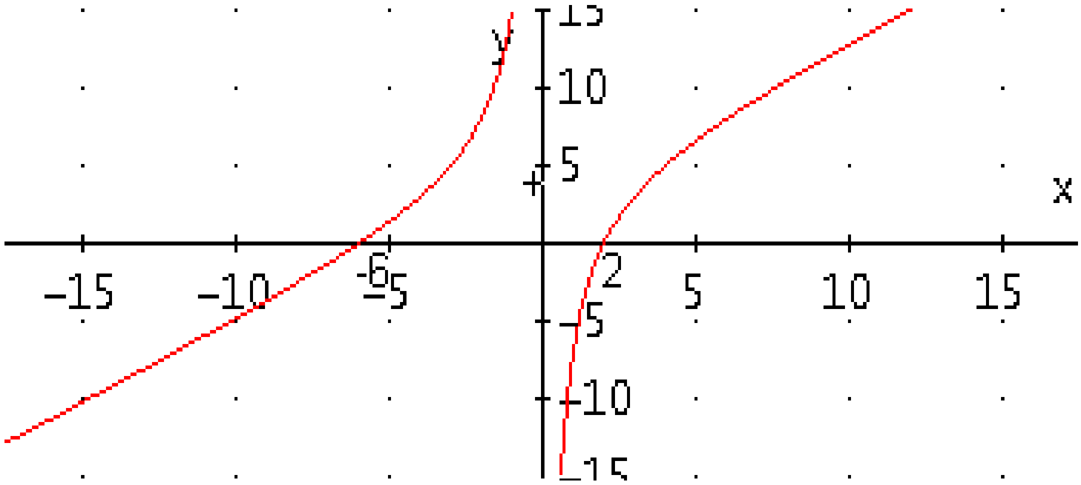
Se resuelve la ecuación f(x) = 0

$$\#2: \quad \frac{(x - 2)\cdot(x + 6)}{x} = 0$$

$$\#3: \quad \text{SOLVE}\left(\frac{(x - 2)\cdot(x + 6)}{x} = 0, x\right)$$

$$\#4: \quad x = -6 \vee x = 2$$

Gráfica de f(x)

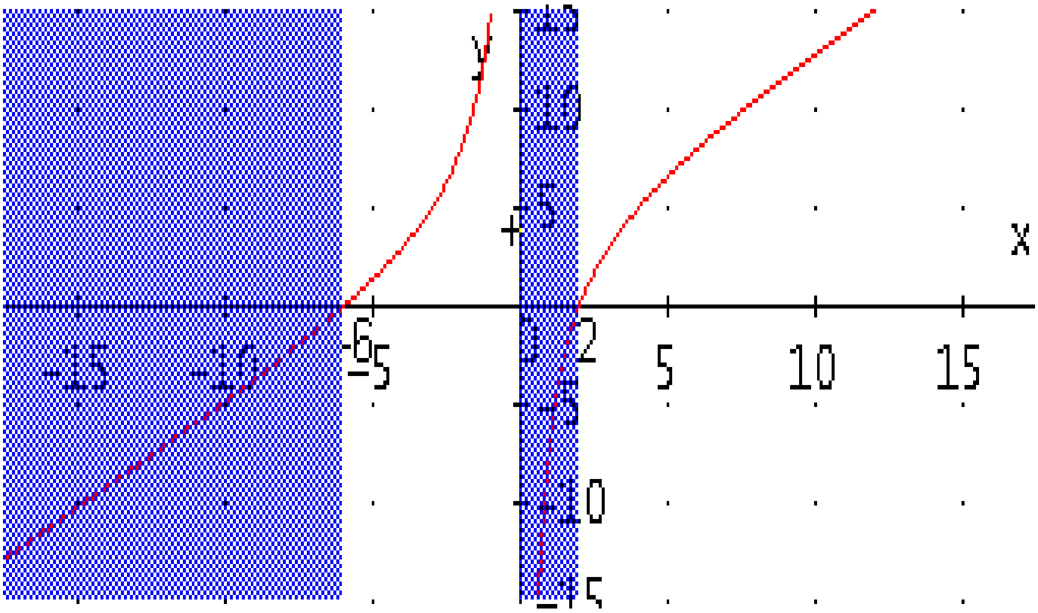


Solución de la desigualdad

$$\#5: \quad \text{SOLVE}\left(\frac{(x - 2)\cdot(x + 6)}{x} < 0, x\right)$$

$$\#6: \quad x < -6 \vee 0 < x < 2$$

Solución gráfica de la desigualdad



Ejemplo 8

$$\#1: \quad \frac{x^2 - 2 \cdot x}{x^2 - 2} > 0$$

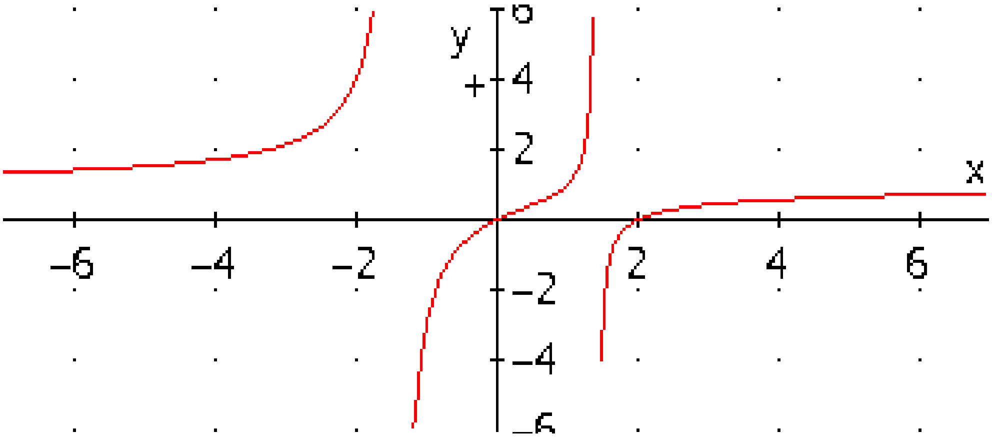
Se resuelve la ecuación f(x) = 0

$$\#2: \quad \frac{x^2 - 2 \cdot x}{x^2 - 2} = 0$$

$$\#3: \quad \text{SOLVE}\left(\frac{x^2 - 2 \cdot x}{x^2 - 2} = 0, x\right)$$

$$\#4: \quad x = 2 \vee x = 0$$

Gráfica de f(x)

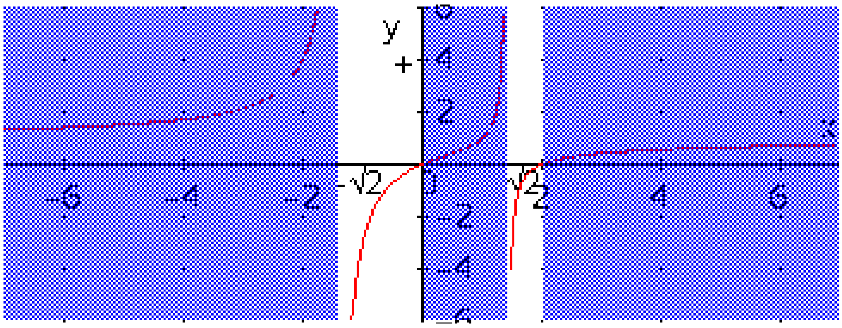


Solución de la desigualdad

$$\#5: \quad \text{SOLVE}\left(\frac{x^2 - 2\cdot x}{x^2 - 2} > 0,\ x\right)$$

$$\#6: \quad x < -\sqrt{2} \lor 0 < x < \sqrt{2} \lor x > 2$$

Solución gráfica de la desigualdad



Ejemplo 9

$$\#1: \quad \frac{2 + x}{3 - x} \le 1$$

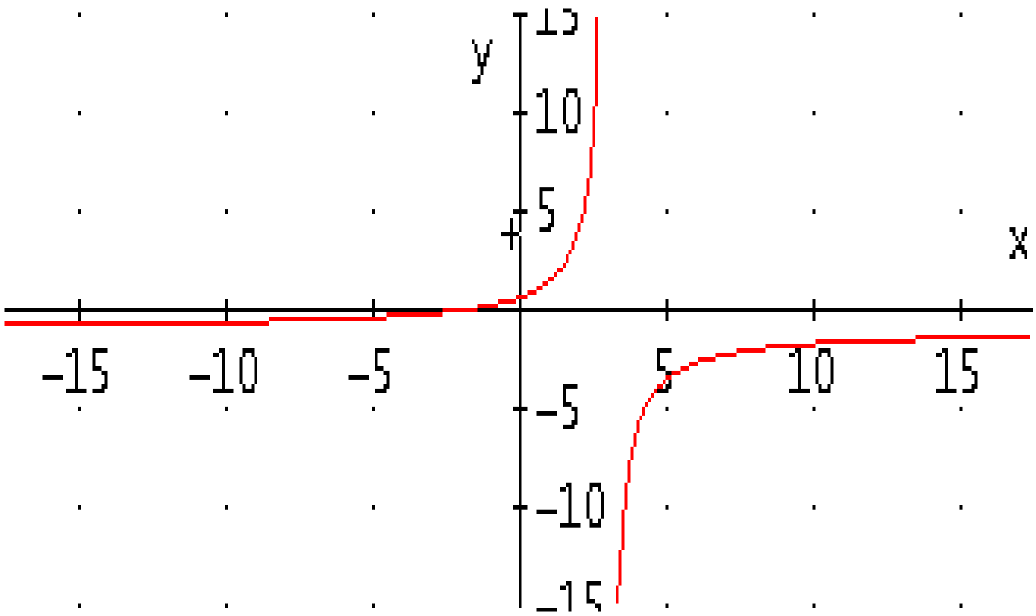
Se resuelve la ecuación f(x) = 0

$$\#2: \quad \frac{2 + x}{3 - x} - 1 = 0$$

$$\#3: \quad \text{SOLVE}\left(\frac{2 + x}{3 - x} - 1 = 0, x\right)$$

$$\#4: \quad x = \frac{1}{2}$$

Gráfica de f(x)

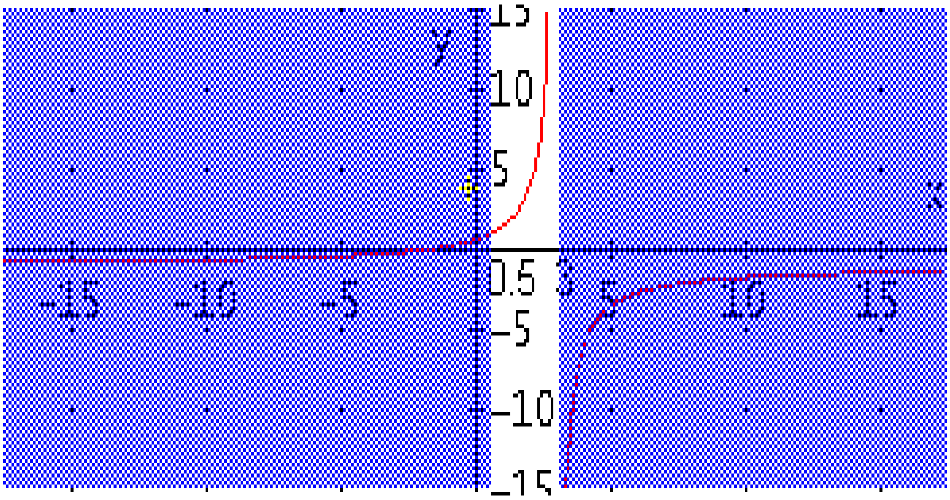


Solución de la desigualdad

$$\#5: \quad \text{SOLVE}\left(\frac{2 + x}{3 - x} \le 1, x\right)$$

$$\#6: \quad x \le \frac{1}{2} \lor x > 3$$

Solución gráfica de la desigualdad



Ejemplo 10

#1: $|x - 2| > 3$

Se rescribe la desigualdad de la forma f(x) > 0

#2: $|x - 2| - 3 > 0$

Se resuelve la ecuación f(x) = 0

#3: $|x - 2| - 3 = 0$

Entonces,

#4: x - 2 = 3

#5: NSOLVE(x - 2 = 3, x)

#6: x = 5

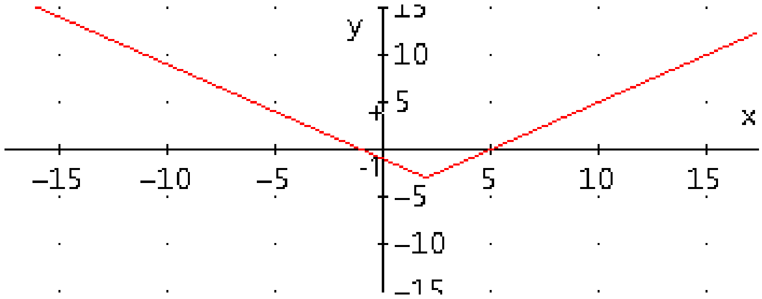
y

#7: x - 2 = -3

#8: NSOLVE(x - 2 = -3, x)

#9: x = -1

Gráfica de f(x)

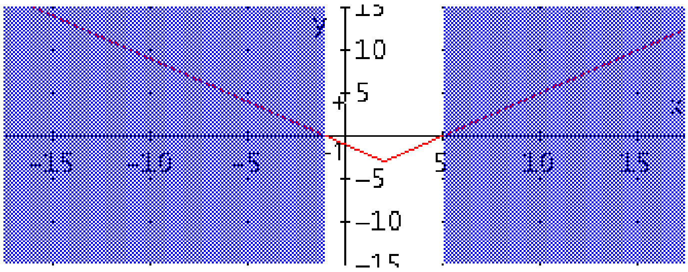


Solución de la desigualdad

#10: SOLVE($|x - 2| > 3$, x)

#11: $x < -1 \vee x > 5$

Solución gráfica de la desigualdad



Ejemplo 11

#1: $|3 - 2\cdot x| \le 1$

Se rescribe la desigualdad de la forma f(x) ≤ 0

#2: $|3 - 2\cdot x| - 1 \le 0$

Se resuelve la ecuación f(x) = 0

#3: $|3 - 2\cdot x| - 1 = 0$

Entonces,

#4: $3 - 2\cdot x = 1$

#5: SOLVE($3 - 2\cdot x = 1$, x)

#6:   x = 1

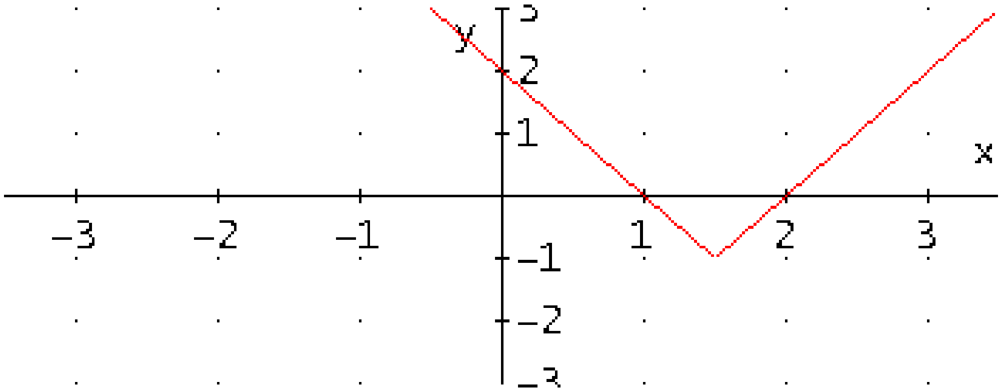
y

#7:   3 - 2·x = -1

#8:   SOLVE(3 - 2·x = -1, x)

#9:   x = 2

Gráfica de f(x)

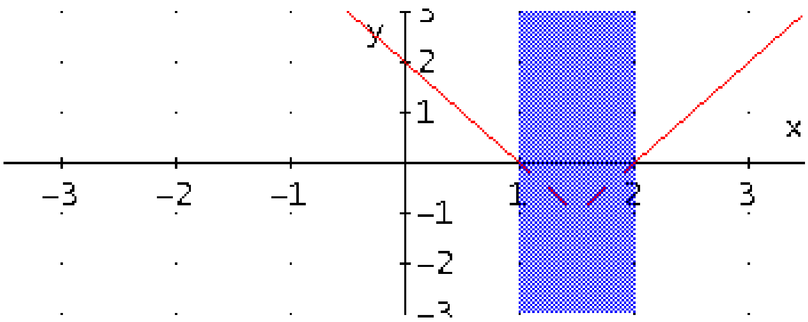


Solución de la desigualdad

#10: SOLVE(|3 - 2·x| ≤ 1, x)

#11:   1 ≤ x ≤ 2

Solución gráfica de la desigualdad



Ejemplo 12

#1: $|x - 3| \geq |x + 2|$

Se rescribe la desigualdad de la forma f(x) ≥ 0

#2: $|x - 3| - |x + 2| \geq 0$

Se resuelve la ecuación f(x) = 0

#3: $|x - 3| - |x + 2| = 0$

Entonces,

#4: x - 3 = x + 2

#5: SOLVE(x - 3 = x + 2, x)

#6: false

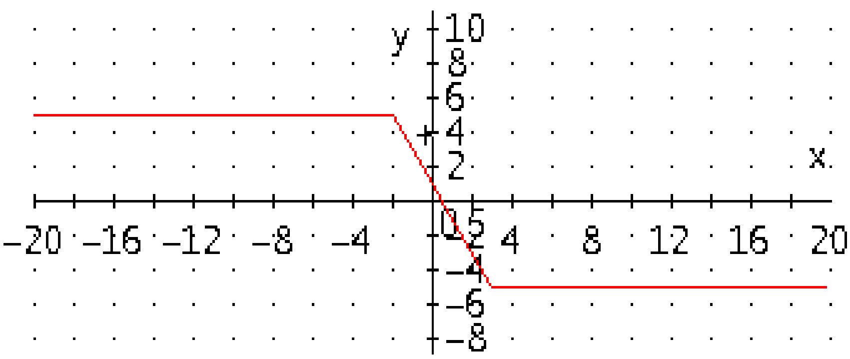
y

#7: x - 3 = - (x + 2)

#8: SOLVE(x - 3 = - (x + 2), x)

#9: $x = \frac{1}{2}$

Gráfica de f(x)

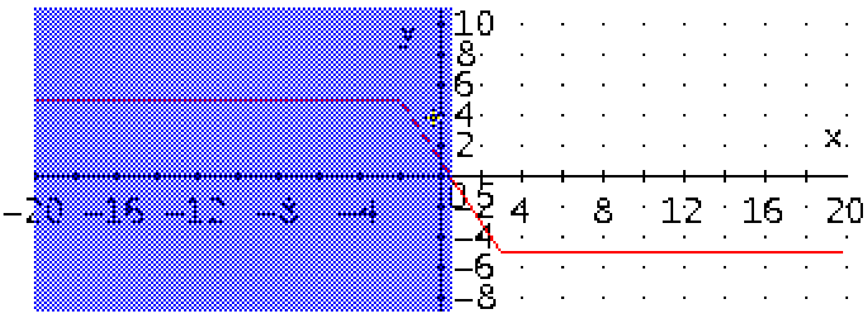


Solución de la desigualdad

#10: $\text{SOLVE}(|x - 3| \geq |x + 2|, x)$

#11: $x \leq \dfrac{1}{2}$

Solución gráfica de la desigualdad



Ejemplo 13

#1: $|3\cdot x - 1| \geq 4$

Se rescribe la desigualdad de la forma f(x) ≥ 0

#2: $|3\cdot x - 1| - 4 \geq 0$

Se resuelve la ecuación f(x) = 0

#3: $|3\cdot x - 1| - 4 = 0$

Entonces,

#4: $3\cdot x - 1 = 4$

#5: $\text{SOLVE}(3\cdot x - 1 = 4, x)$

#6: $x = \dfrac{5}{3}$

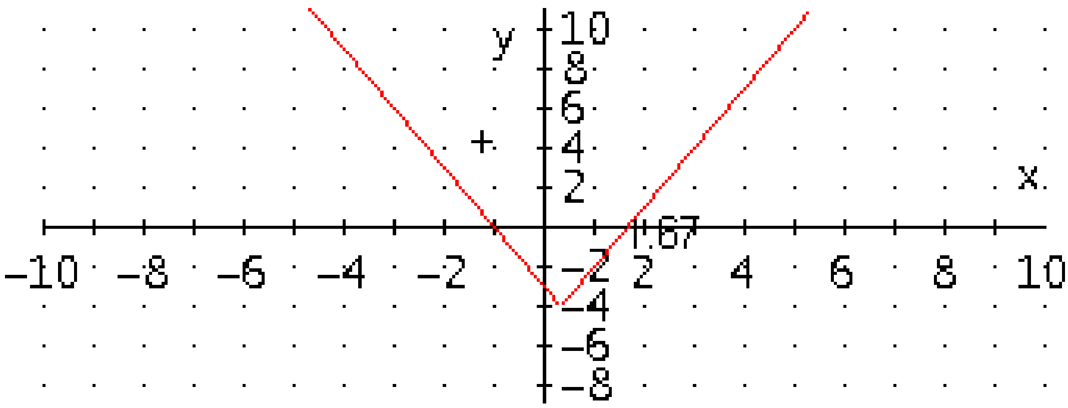
y

#7: $3\cdot x - 1 = -4$

#8: SOLVE($3\cdot x - 1 = -4$, x)

#9: $x = -1$

Gráfica de f(x)

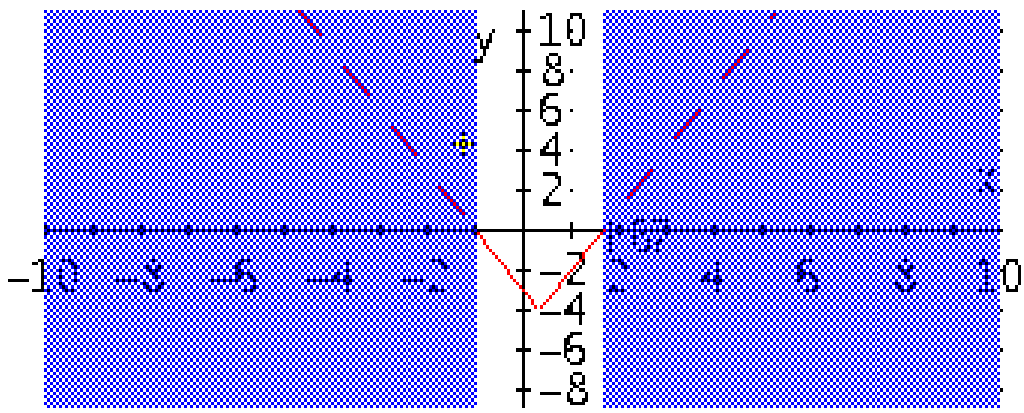


Solución de la desigualdad

#10: SOLVE($|3\cdot x - 1| \ge 4$, x)

#11: $x \le -1 \vee x \ge \frac{5}{3}$

Solución gráfica de la desigualdad



Ejemplo 14

#1: $\left|2\cdot x - 2\right| \le \left|3 - 2\cdot x\right|$

Se rescribe la desigualdad de la forma f(x) ≤ 0

#2: $\left|2\cdot x - 2\right| - \left|3 - 2\cdot x\right| \le 0$

Se resuelve la ecuación f(x) = 0

#3: $\left|2\cdot x - 2\right| - \left|3 - 2\cdot x\right| = 0$

Entonces,

#4: $2\cdot x - 2 = 3 - 2\cdot x$

#5: SOLVE(2·x - 2 = 3 - 2·x, x)

#6: $x = \frac{5}{4}$

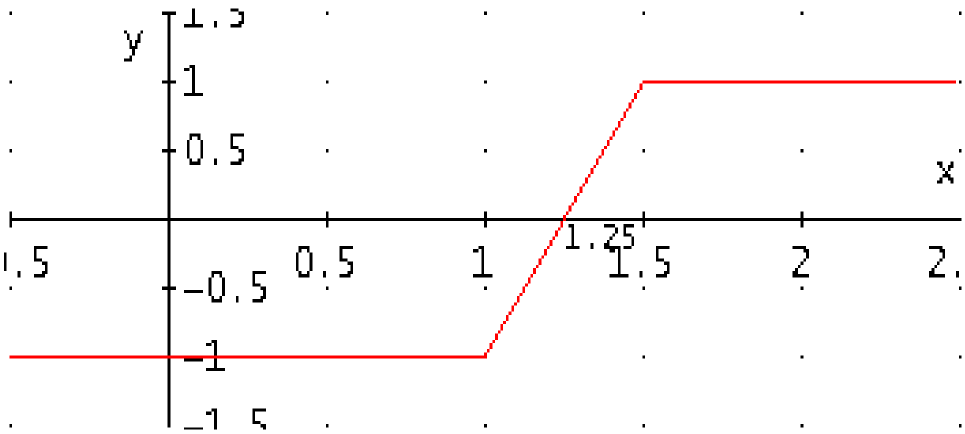
y

#7: $2\cdot x - 2 = -(3 - 2\cdot x)$

#8: SOLVE(2·x - 2 = - (3 - 2·x), x)

#9: false

Gráfica de f(x)

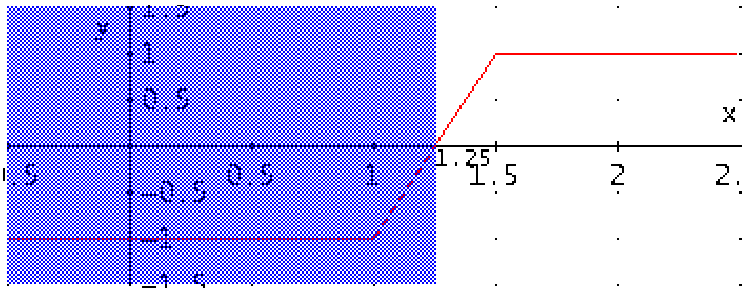


Solución de la desigualdad

#10: $\text{SOLVE}(|2\cdot x - 2| \le |3 - 2\cdot x|, x)$

#11: $$x \le \frac{5}{4}$$

Solución gráfica de la desigualdad



Ejemplo 15

#1: $|3\cdot x - 1| \le |x - 2|$

Se rescribe la desigualdad de la forma f(x) ≤ 0

#2: $|3\cdot x - 1| - |x - 2| \le 0$

Se resuelve la ecuación f(x) = 0

#3: $|3\cdot x - 1| - |x - 2| = 0$

Entonces,

#4: $3\cdot x - 1 = x - 2$

#5: $\text{SOLVE}(3\cdot x - 1 = x - 2, x)$

#6: $$x = -\frac{1}{2}$$

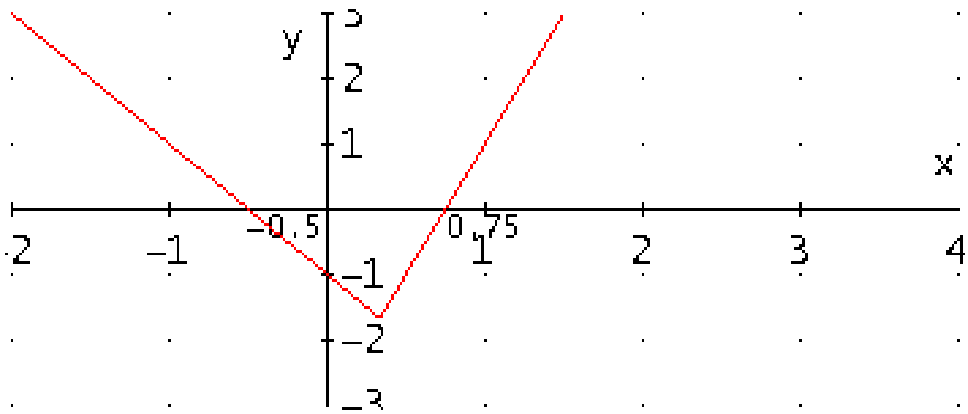
y

#7: $3\cdot x - 1 = -(x - 2)$

#8: SOLVE(3·x - 1 = - (x - 2), x)

#9: $x = \frac{3}{4}$

Gráfica de f(x)

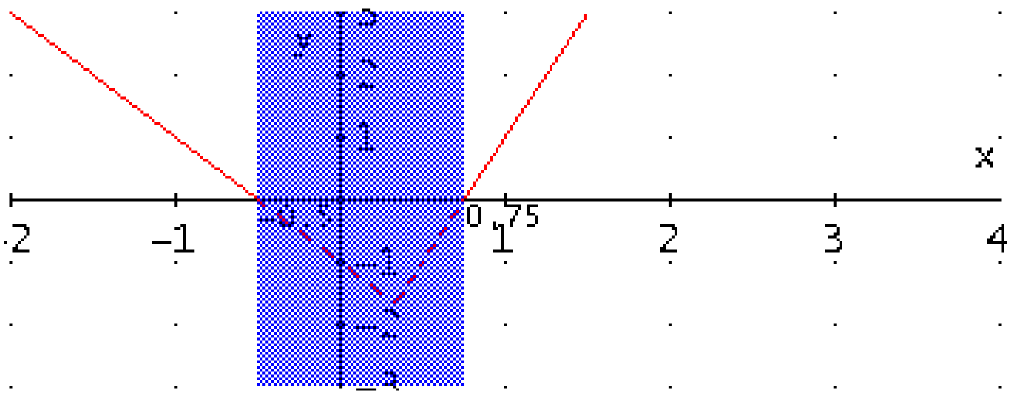


Solución de la desigualdad

#10: SOLVE(|3·x - 1| ≤ |x - 2|, x)

#11: $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4}$

Solución gráfica de la desigualdad



Ejemplo 16

#1: $|2 \cdot x - 3| \leq 3 \cdot |x - 1|$

Se rescribe la desigualdad de la forma f(x) ≤ 0

#2: $|2 \cdot x - 3| - 3 \cdot |x - 1| \leq 0$

Se resuelve la ecuación f(x) = 0

#3: $|2 \cdot x - 3| - 3 \cdot |x - 1| = 0$

Entonces,

#4: $2 \cdot x - 3 = 3 \cdot (x - 1)$

#5: SOLVE(2·x - 3 = 3·(x - 1), x)

#6: $x = 0$

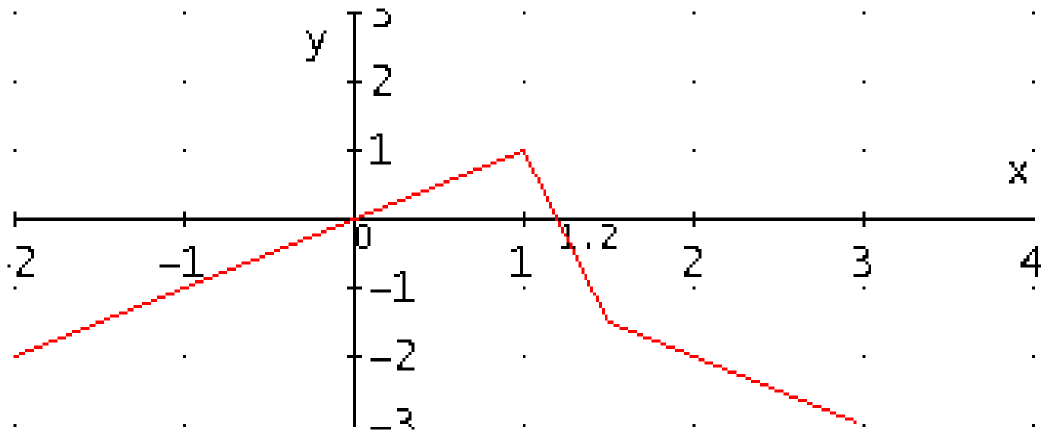
y

#7: $2 \cdot x - 3 = - 3 \cdot (x - 1)$

#8: SOLVE(2·x - 3 = - 3·(x - 1), x)

#9: $x = \frac{6}{5}$

Gráfica de f(x)

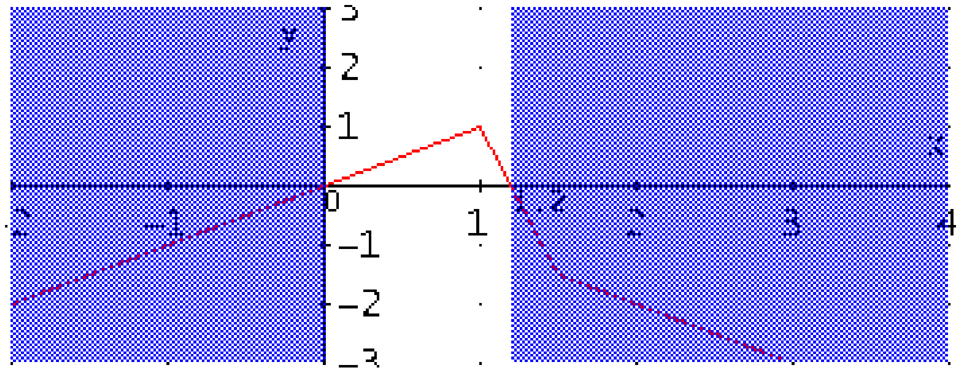


Solución de la desigualdad

#10: SOLVE($|2\cdot x - 3| \le 3\cdot|x - 1|$, x)

#11: $x \le 0 \lor x \ge \frac{6}{5}$

Solución gráfica de la desigualdad



4. OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

En este proyecto se trabajó el concepto de número real y se estableció que cualquier número real x > 0 puede aproximarse con un error tan pequeño como se quiera, por medio de una suma de la forma $m = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$; si se toma n suficientemente grande. Esto se ilustró con varios ejemplos de aplicación.

Se mostró que los números reales tienen una representación decimal que puede ser finita o infinita. De los números racionales, que pertenecen a los reales, unos tienen una representación decimal finita y otros tienen una representación decimal infinita. Por su parte, cada número irracional tiene una representación decimal infinita.

A la inversa, si se tiene un número racional en representación decimal, es posible expresarlo como el cociente de dos números enteros. En su representación decimal, un número racional puede tener decimales que se repiten y otros que no se repiten. Si los decimales que no se repiten constan de m dígitos y los que se repiten en cada ciclo constan de k dígitos, es posible seguir cuatro pasos para llegar al número racional. Sea x la representación decimal de un número racional, el primer paso consiste en multiplicar el decimal periódico por 10m y por 10k, para obtener un resultado A. En el segundo paso se multiplica el decimal periódico por 10m, obteniéndose un resultado B. En el tercer paso se resta B de A y finalmente, en el cuarto paso, se despeja la variable x para obtener el número racional buscado.

El principal aporte de este trabajo se evidencia en el método universal propuesto para resolver desigualdades. Como se mostró con ejemplos de diferente grado de complejidad, este método es bastante sencillo de aplicar, por cuanto sólo requiere puntos de corte y evaluar un único punto para cada uno de los intervalos donde la función es continua y no nula. Por tanto, si se utiliza sistemáticamente, por ejemplo a través de un programa creado para tal fin, puede economizar tiempo de cómputo y acelerar la obtención de la solución.

Otra forma sencilla de resolver algunas desigualdades que involucran expresiones con valor absoluto, consiste en aplicar el concepto de distancia. Esto teniendo en cuenta que la distancia o la medida de la distancia entre números reales o puntos de la recta notada, debe ser un número positivo o cero. Es decir, $d(x, y) \geq 0$. Así, la distancia entre x e y es igual a la distancia entre y e x: $d(x, y) = d(y, x)$. De esta forma, la distancia es nula si los dos puntos son iguales. Entonces, $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$. En este documento, el procedimiento para resolver desigualdades aplicando el concepto de distancia se ilustra con varios ejemplos. Sin embargo, también se evidenció que el concepto de distancia no es aplicable con facilidad a problemas con un mayor nivel de dificultad; lo que no sucede con el método universal para resolver desigualdades propuesto.

Dado el gran desarrollo informático en la actualidad, así como la difusión de los computadores personales, es de gran importancia incorporar su utilización para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En ese sentido, en este trabajo se introduce el programa Derive que ofrece diferentes facilidades para trabajar con variables, ecuaciones, funciones, desigualdades, expresiones algebraicas, expresiones trigonométricas, vectores, matrices, etc. También tiene la capacidad de una calculadora científica y puede representar funciones gráficas en dos y tres dimensiones, en varios sistemas de coordenadas. Todo ello empleando una forma sencilla para introducir las expresiones, conservando la notación matemática ampliamente utilizada y haciendo uso de comandos simples; además de todas las poderosas posibilidades que ofrece el entorno “Windows”. No obstante, toda esa versatilidad no excluye la exigencia de manejar un saber previo y un conocimiento adecuado de los temas.

A pesar de las ventajas señaladas, la utilización de una herramienta como Derive debe hacerse de forma adecuada. Esto teniendo en cuenta que el programa realiza todos los cálculos matemáticos sin la participación activa del educando. Por eso, es importante que sólo sea considerado un apoyo y no el eje fundamental del proceso. Por ejemplo, en la resolución de los ejercicios presentados en este trabajo sólo se requiere introducir la expresión a resolver y utilizar el comando “solve”, para que el software entregue la respuesta. En lugar del comando “solve”, también puede emplearse la opción gráfica y en ese caso Derive muestra la solución sombreando los intervalos correspondientes. Si simplemente se utilizara de esta forma, el alumno sólo obtiene la respuesta sin tener idea de cómo se llega a ella. Por eso, en este trabajo se desagregó la solución de cada ejercicio en etapas; procurando seguir los pasos del método universal propuesto. Sólo que en lugar de evaluar un punto en cada intervalo, se aprovechó la ventaja del programa y se evaluaron muchos puntos, representados en la gráfica de la función f(x).

El método presentado no se encuentra desarrollado en los libros de cálculo, de la forma como aquí se trabajó. Algunos sólo mencionan que existe la alternativa de evaluar puntos de prueba. Por ejemplo, el texto de Purcell, en el tema de desigualdades, presenta de forma somera el método aquí propuesto. Sin embargo, esto lo hace sin soporte ni demostración alguna. Ver los ejemplos 2 y 3, página 13, de la sexta edición.

5. BIBLIOGRAFÍA

-APOSTOL, Tom M. Calculus, Vol. I, Ed. Reverte, Colombia, 1988.

-LARSON-HOSTETLER Cálculo con Geometría Analítica, Ed. McGraw Hill, México. 1987

-LEITHOLD, L. El Cálculo con Geometría Analítica, 5º edición, Ed. Harla, México. 1987

-MAYORGA, Bernardo. Libro de lectura de cálculo. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga. 1996.

-PURCELL, Edwin J. & VASRBERG, D. Cálculo con Geometría Analítica, 6a. edición, Editorial Prentice-Hall, México. 1992