POLINOMIOS DE CHEBYSHIOV Y FIGURAS ESTRELLADAS

DIANA MARÍA RODRÍGUEZ MORANTES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2006

POLINOMIOS DE CHEBYSHIOV Y FIGURAS ESTRELLADAS

DIANA MARÍA RODRÍGUEZ MORANTES

Trabajo presentado para optar al título de

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

Director

EDILBERTO J. REYES G.

Magíster en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2006

Agradecimientos

Agradezco muy especialmente a:

- **Dios**, por darme la fortaleza y la sabiduría para lograr todos mis propósitos.
- **Mis padres Cristóbal y Mariela**, por brindarme apoyo incondicional, comprensión, amor y porque sin ellos hoy este proyecto no sería una realidad.
- **Mis hermanos Claudia, Cristóbal, y Oscar**, por su apoyo moral, afectivo y ser quienes han compartido conmigo muy bellos momentos de mi vida.
- Al profesor **Edilberto J. Reyes G.**, por su colaboración y acertada orientación para la realización de este trabajo.
- Los **profesores**, por sus aportes en mi formación académica.
- Mis **compañeros de carrera**, que de una u otra manera me apoyaron y me brindaron amistad incondicional.

TITLE: CHEBYSHEV POLYNOMIALS AND STAR FIGURES *

AUTHOR: DIANA MARÍA RODRÍGUEZ MORANTES**

KEY WORDS:

Chebyshev polynomials of the first kind, Chebyshev polynomials of the second kind, Differential equation of Chebyshev, Star figures, Recurrent formulas, Zeros, Eigenvalues.

DESCRIPTION

This work has as main aims to study the polynomials of Chebyshev and to show their relation with the star figures. The Chebyshev polynomials of the first kind, $t_n(x)$, and the ones of the second kind $u_n(x)$, can be obtained in different ways. In this work, three of these methods are presented: firstly, based on the trigonometrical functions $\cos n\theta$ and $\operatorname{sen} n\theta$; secondly, as a solution of the differential equation of Chebyshev; and, lastly, as an orthogonal set which is the result of the orthogonalization process of Gram-Schmidt.

With regard on the polynomials $t_n(x)$ and $u_n(x)$, their properties, such as the recurrent formulas, the zeros, the parity, the extreme values, etc, are analized by means of explicit formulas. Besides, the properties of the polynomial associated to $u_n(x)$, $v_n(x) = u_n(x) + u_{n-1}(x)$, are defined and presented. In the same way, it is established that a very remarkable characteristic of the polynomials $t_n(x)$, $u_n(x)$ and $v_n(x)$ is that they can be obtained as a curious determinant.

On the other hand, focusing on the star figures, their definition, examples, and some qualities are cited to show, later on, their connection with the polynomials of Chebyshev. The representation of the polynomials $u_n(x)$ and $v_n(x)$ as the determinant of a matrix leads to consider, in this work, their relation with the star figures, taking into account that the eigenvalues of these matrixes are related to the measure of the side and radius of a star figure.

---

*Monograph

** FACULTY OF SCIENCES, LICENTIATE IN MATHEMATICS.

DIRECTOR Edilberto J. Reyes G.

TITULO: POLINOMIOS DE CHEBYSHIOV Y FIGURAS ESTRELLADAS*

AUTOR: DIANA MARÍA RODRÍGUEZ MORANTES**

PALABRAS CLAVES:

Polinomios de Chebyshiov de primera clase, Polinomios de Chebyshiov de segunda clase, Ecuación Diferencial de Chebyshiov, Figuras estrelladas, Fórmulas de Recurrencia, Raíces, Valores propios.

DESCRIPCIÓN

Este trabajo tiene como fines principales: estudiar los polinomios de Chebyshiov y mostrar su relación con las figuras estrelladas. Los polinomios de Chebyshiov de primera clase, $t_n(x)$, y de segunda clase, $u_n(x)$, se pueden obtener de diversas formas. En este trabajo se presentan tres de ellas: inicialmente, a partir de las funciones trigonométricas $\cos n\theta$ y $\operatorname{sen} n\theta$; en segundo lugar, como la solución de la ecuación diferencial de Chebyshiov; y, por último, como un conjunto ortogonal resultado del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Con relación a los polinomios $t_n(x)$ y $u_n(x)$ se estudian propiedades, como las fórmulas de recurrencia, las raíces, la paridad, los valores extremos, etc, utilizando para ello fórmulas explícitas. Además se definen y presentan propiedades del polinomio asociado a $u_n(x)$, $v_n(x) = u_n(x) + u_{n-1}(x)$. De igual forma se expone que una característica muy importante de los polinomios $t_n(x)$, $u_n(x)$ y $v_n(x)$ es que se pueden obtener como un curioso determinante.

Por otra parte, en cuanto a las figuras estrelladas, se presenta su definición, ejemplos y algunas propiedades, para luego mostrar su relación con los polinomios de Chebyshiov. La representación de los polinomios $u_n(x)$ y $v_n(x)$ como el determinante de una matriz permite observar, en este trabajo, su relación con las figuras estrelladas, ya que los valores propios de estas matrices se relacionan con la medida del lado y radio de una figura estrellada.

---

*Monografía

** FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.

DIRECTOR Edilberto J. Reyes G.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Los polinomios encontrados por el matemático ruso Pafnuty Lvóvich Chebyshiov* y que llevan su nombre son de gran interés por la diversidad de aplicaciones que presentan ya que se utilizan en muchas ramas de la matemática: análisis numérico, teoría de interpolación, polinomios ortogonales, teoría de aproximación, teoría ergódica, e incluso en geometría.

Es precisamente la relación de los polinomios con la geometría el propósito de este trabajo, específicamente, la relación de los polinomios de Chebyshiov de segunda clase $u_n(x)$ y el polinomio $v_n(x)$ asociado a este, con los polígonos regulares y figuras estrelladas, tomando como referencia el artículo "Chebychev Poynomials and Regular Poligons"de D. Y. Savio y E. R. Suryanarayan, (ver [7] en la Bibliografía).

En el primer capítulo se presentan algunos conceptos y propiedades útiles para el desarrollo del trabajo. Posteriormente, en el capítulo dos, se obtienen los polinomios de Chebyshiov de diferentes formas, primero como las funciones $\operatorname{sen} n\theta$ y $\cos n\theta$, utilizando identidades trigonométricas y la fórmula de Euler; luego se expresan como solución de la ecuación diferencial de Chebyshiov y por último como un conjunto ortogonal.

*En la literatura matemática no hay transliteración estándar para el apellido de este matemático, debido a que el original cirílico da lugar a Chebyshev (inglés), Tchébychev (francés), Cebysciev (italiano), Tschebyschev (alemán), etc. Aquí se utilizará la transliteración castellana Chebyshiov.

Teniendo definidos los polinomios de Chebyshiov de primera clase $t_n(x)$ y de segunda clase $u_n(x)$, en el tercer capítulo se presentan algunas propiedades de estos y se define un polinomio muy importante asociado a $u_n(x)$; además, se muestra otra forma de ver los polinomios de Chebyshiov, esta vez como un curioso determinante.

El cuarto capítulo está dedicado a establecer la relación de los polinomios de Chebyshiov de segunda clase $u_n(x)$ y el polinomio $v_n(x)$ asociado a este con los polígonos regulares y figuras estrelladas, para lo cual se presentan inicialmente las primeras figuras estrelladas, la medida de los ángulos y lados, para finalizar con el teorema que relaciona estas figuras con los polinomios.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Antes de iniciar el estudio sobre los polinomios de Chebyshiov se quiere destacar la importancia de este matemático, ya que con sus trabajos realizó un gran aporte al desarrollo de la matemática especialmente en Rusia. Además se presentan algunos conceptos y proposiciones que se utilizarán en capítulos posteriores.

1.1. CHEBYSHIOV Pafnuty Lvóvich (1821-1894)

Conocido como uno de los célebres matemáticos rusos del siglo XIX, Chebyshiov ejerció gran influencia en el desarrollo de la matemática y en particular en la formación de la Escuela Matemática de San Petersburgo. Esta escuela y en general los trabajos de Chebyshiov se caracterizan por una estrecha relación con la práctica y un amplio contenido de problemas científicos.

Siendo aún estudiante Chebyshiov ganó medalla de plata en el concurso de trabajos estudiantiles por su obra "Cálculo de raíces de ecuaciones"; posteriormente, en 1846, presentó su tesis de maestría "Experiencia del análisis elemental de la teoría de probabilidades", y en 1849 obtuvo el grado de Doctor con su tesis "Teoría de las congruencias".

En general, el legado científico de Chebyshiov está conformado por mas de 80 trabajos, los cuales se pueden clasificar en cuatro ramas: teoría de números, teoría de probabilidades, teoría de integración y teoría de aproximación de funciones.

Chebyshiov se interesó por diferentes tipos de mecanismos articulados y les dedicó muchos trabajos; justamente la investigación de ellos lo condujo a problemas matemáticos como la determinación de polinomios que tienen una mínima desviación de cero y la aproximación de funciones por polinomios. Estudiando estos problemas Chebyshiov encontró una clase especial de polinomios que llevan su nombre y juegan un gran papel en las matemáticas por su diversidad de aplicaciones.

Las obras completas de Chebyshiov fueron editadas en 1945 en la colección "Herencia Científica de P.L. Chebyshiov", formada por dos tomos: el primero sobre matemática y el segundo tomo sobre cinemática de mecanismos.

1.2. Propiedades básicas

La mayoría de los resultados utilizados en este trabajo son sencillos y muy conocidos. Por ejemplo la fórmula de Euler, identidades trigonométricas y otros que se mencionarán en el momento que se requieran. Por esta razón, en esta sección se presenta solamente un método para resolver ecuaciones diferenciales mediante series de potencias, el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt, la definición de valor propio y el Teorema de Rolle.

Las siguientes definiciones y teoremas se establecen considerando la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y^{''} + P_1(x)y^{'} + P_2(x)y = 0. \tag{1.1}$$

Teorema 1.1. *Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$ soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea (1.1) en un intervalo I. Si $Y(x)$ es cualquier solución de (1.1) en I, entonces es posible encontrar constantes c_1, c_2 tales que $Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$.*

Definición 1.1. *Se dice que $x = x_0$ es un* ***punto ordinario*** *de la ecuación (1.1) si $P_1(x)$ y $P_2(x)$ son analíticas en x_0, esto es, si las funciones $P_1(x)$ y $P_2(x)$ permanecen finitas en $x = x_0$. Cuando $P_1(x)$ ó $P_2(x)$ (o ambas) divergen a medida que $x \to x_0$, el punto $x = x_0$ se llama* ***punto singular***.

Los puntos singulares se clasifican en **regulares** e **irregulares**.

Definición 1.2. *Un punto singular $x = x_0$ de la ecuación (1.1) se denomina* ***punto singular no esencial*** *o* ***regular*** *si $(x - x_0)P_1(x)$ y $(x - x_0)^2 P_2(x)$ permanecen finitas a medida que $x \to x_0$.*

Definición 1.3. *Un punto singular $x = x_0$ de la ecuación (1.1) se denomina* ***punto singular esencial*** *o* ***irregular*** *si $(x - x_0)P_1(x)$ o $(x - x_0)^2 P_2(x)$ divergen a medida que $x \to x_0$, esto es, cuando x_0 no es un punto singular regular.*

A continuación, se enuncian dos teoremas que permiten encontrar soluciones en series de potencias alrededor de puntos ordinarios y puntos singulares regulares, respectivamente, para ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

Teorema 1.2. *Si $x = x_0$ es un punto ordinario de la ecuación (1.1), entonces ella tiene dos soluciones linealmente independientes de la forma*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

y dichas soluciones convergen en un intervalo abierto con centro en x_0.

Teorema 1.3. *Si x_0 es un punto singular regular de la ecuación (1.1), dicha ecuación tiene por lo menos una solución no trivial de la forma*

$$y = |x - x_0|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

con $a_0 \neq 0$, y r una constante (real o compleja) que se puede determinar. Tal solución converge en algún intervalo con centro en x_0.

Teorema 1.4. ***(Gram-Schmidt)****. Sea $\mathcal{M} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p\}$ un conjunto generador de un espacio vectorial dotado de un producto interno. Entonces existe un conjunto ortogonal $\mathcal{O} = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_p\}$, tal que el espacio generado por $\mathcal{M}$ es igual al generado por $\mathcal{O}$.*

Demostración. Se usará inducción sobre el número de elementos del conjunto $\mathcal{M}$. Si $\mathcal{M}$ es un conjunto con sólo un elemento, es decir, $\mathcal{M} = \{\mathbf{v}_1\}$ entonces se considera $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$ y es inmediato que $\mathcal{O} = \{\mathbf{w}_1\}$ es un conjunto ortogonal, y $\mathcal{G}(\mathcal{M}) = \mathcal{G}(\mathcal{O})$. Ahora se supone que el resultado se cumple para un conjunto con $p-1$ elementos y se verifica para un conjunto con p elementos. Sea entonces $\mathcal{M} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$. Por hipótesis de inducción se puede construir un conjunto $\mathcal{O} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{p-1}\}$ tal que $\mathcal{G}(\mathcal{O}) = \mathcal{G}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{p-1}\})$, y $\mathcal{O}$ es un conjunto ortogonal. Se define

$$\mathbf{w}_p = \mathbf{v}_p - \sum_{i=1}^{p-1} a_i \mathbf{w}_i,$$

con $a_i = 0$ si $\mathbf{w}_i = \mathbf{0}$ y $a_i = \dfrac{\langle \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_i \rangle}{\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle}$ si $\mathbf{w}_i \neq \mathbf{0}$. Ahora es necesario probar que $\mathcal{G}(\mathcal{O} \cup \{\mathbf{v}_p\}) = \mathcal{G}(\mathcal{M})$ y que $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{p-1}, \mathbf{w}_p\}$ es un conjunto ortogonal.

En primer lugar se prueba que $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{p-1}, \mathbf{w}_p\}$ es ortogonal.

$$\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_p \rangle = \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{v}_p \rangle - \langle \mathbf{w}_j, \sum_{i=1}^{p-1} a_i, \mathbf{w}_i \rangle = \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{v}_p \rangle - \sum_{i=1}^{p-1} a_i \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_i \rangle.$$

Si $j < p$ se sigue que $\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_p \rangle = \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{v}_p \rangle - a_j \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j \rangle = \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{v}_p \rangle - \dfrac{\langle \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_j \rangle}{\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j \rangle} \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j \rangle = 0$. En el caso en que $\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$ es inmediato.

A continuación se demuestra que los espacios generados por los conjuntos son iguales. Si $\mathbf{v} \in \mathcal{G}(\mathcal{M})$, entonces $\mathbf{v}$ es de la forma $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} b_i \mathbf{v}_i$, puesto que para $i < p$ cada $\mathbf{v}_i$ es combinación lineal de los elementos de $\mathcal{O}$, y por la construcción de $\mathbf{w}_p$ el vector $\mathbf{v}_p$ es combinación lineal de los elementos de $\mathcal{O} \cup \{w_p\}$, de lo cual se deduce que $\mathbf{v} \in \mathcal{G}(\mathcal{O} \cup \{\mathbf{w}_p\})$. Si $\mathbf{v} \in \mathcal{G}(\mathcal{O} \cup \{\mathbf{w}_p\})$, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} c_i \mathbf{w}_i$. Cada $\mathbf{w}_i$ con $i < p$ es combinación lineal de los $\{\mathbf{v}_i\}$ $i = 1, \ldots, (p-1)$. Por la construcción de $\mathbf{w}_p$, este es combinación lineal de los elementos de $\mathcal{M}$, entonces $\mathbf{v} \in \mathcal{G}(\mathcal{M})$. ■

Definición 1.4. *Sea A una matriz de $n \times n$ con componentes reales. El número λ (real o complejo) se llama valor propio de A si existe un vector $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$.*

Teorema 1.5. *Sea A una matriz cuadrada de orden n; entonces λ es un valor propio de A si y sólo si $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$.*

Demostración. Si λ es un valor propio de A, existe un $\mathbf{v}$ diferente de cero tal que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} = \lambda I\mathbf{v}$, luego $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Esta igualdad corresponde a un sistema homogéneo de ecuaciones que tiene soluciones no triviales puesto que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$; así se concluye que $det(A - \lambda I) = 0$.

En el otro sentido, si $det(A - \lambda I) = 0$, entonces el sistema de ecuaciones representado por $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, tiene soluciones no triviales, es decir, existe $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, y reescribiendo esto se tiene, $A\mathbf{v} = \lambda I\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Luego λ es un valor propio de A.

$\blacksquare$

El siguiente teorema es muy conocido en los cursos de Cálculo Diferencial y Análisis Matemático. En este trabajo se utilizará en el Capítulo 3 para demostrar una propiedad de los polinomios de Chebyshiov de primera clase.

Teorema 1.6. *(Teorema de Rolle) Sea f una función que satisface las tres hipótesis siguientes:*

1. *f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.*

2. *f es diferenciable en el intervalo abierto (a, b).*

3. *$f(a) = f(b)$.*

Entonces existe un número c, en (a, b), tal que $f'(c) = 0$.

CAPÍTULO 2

POLINOMIOS DE CHEBYSHIOV

En matemática se conocen diferentes tipos de polinomios. En este capítulo se estudia una clase especial, *los polinomios de Chebyshiov*, que tienen gran utilidad en campos de la matemática como teoría de interpolación, polinomios ortogonales, teoría de aproximación, teoría ergódica, etc. En Análisis Numérico una idea básica es aproximar una función dada utilizando funciones fáciles de operar, por ejemplo polinomios; de aquí surge el problema de encontrar un polinomio de grado prefijado para el que la norma del máximo sea lo más pequeña posible; el primero en resolver este problema fue Chebyshiov, encontrando los polinomios que llevan su nombre y son el objeto de este trabajo.

En palabras de Rivlin [6], "Los polinomios de Chebyhiov son como una joya fina que revela sus diferentes características bajo iluminación desde varias posiciones".

Los polinomios de Chebyshiov se pueden obtener de varias formas: primero, a partir de identidades trigométricas utilizando la fórmula de Euler y el teorema del binomio; segundo, como la solución de la ecuación diferencial de Chebyshiov; y por último, aplicando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

2.1. Funciones trigonométricas $\operatorname{sen} n\theta$ y $\cos n\theta$

Las siguientes identidades trigonométricas son conocidas desde los primeros cursos de matemática universitaria:

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1, & \operatorname{sen} 2\theta &= \operatorname{sen}\theta(2\cos\theta),\\
\cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, & \operatorname{sen} 3\theta &= \operatorname{sen}\theta(4\cos^2\theta - 1),\\
\cos 4\theta &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1, & \operatorname{sen} 4\theta &= \operatorname{sen}\theta(8\cos^3\theta - 4\cos\theta).
\end{aligned}$$

Observándolas detenidamente se pueden inducir propiedades especiales de las funciones $\cos n\theta$ y $\operatorname{sen} n\theta$; por ejemplo, $\cos n\theta$ se puede expresar como un polinomio de grado n en $\cos\theta$, y $\operatorname{sen} n\theta$ como el producto de $\operatorname{sen}\theta$ y un polinomio de grado $n-1$ en $\cos\theta$. Estas afirmaciones se pueden demostrar mediante inducción matemática y se dejan como un buen ejercicio para el lector.

Acá se demuestran mediante la bien conocida fórmula de Euler y el teorema del binomio, lo que permite obtener fórmulas más precisas para los polinomios que aparezcan en el desarrollo de $\operatorname{sen} n\theta$ y $\cos n\theta$.

En efecto: Sea $n \in \mathbb{Z}^+$; tomando como argumento $n\theta$ en la fórmula de Euler se tiene $e^{in\theta} = \cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta$, además, $e^{in\theta} = [e^{i\theta}]^n = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n$, luego

$$\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n. \tag{2.1}$$

Realizando el desarrollo del binomio en el segundo miembro de la igualdad se tiene:

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[\cos\theta]^{n-k}[i\operatorname{sen}\theta]^k = \binom{n}{0}[\cos\theta]^n + \binom{n}{1}[\cos\theta]^{n-1} i\operatorname{sen}\theta +\\
&+ \binom{n}{2}[\cos\theta]^{n-2}[i\operatorname{sen}\theta]^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}\cos\theta[i\operatorname{sen}\theta]^{n-1} + \binom{n}{n}[i\operatorname{sen}\theta]^n =\\
&= \binom{n}{0}[\cos\theta]^n + \binom{n}{1}[\cos\theta]^{n-1} i\operatorname{sen}\theta + \binom{n}{2}[\cos\theta]^{n-2}(-1)(1-\cos^2\theta) +\\
&+ \binom{n}{3}[\cos\theta]^{n-3}(-1)(i\operatorname{sen}\theta)(1-\cos^2\theta) + \ldots + \binom{n}{n}[i\operatorname{sen}\theta]^n =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{[|\frac{n}{2}|]} \binom{n}{2k} [\cos\theta]^{n-2k}[1-\cos^2\theta]^k(-1)^k + \\
&+ \sum_{k=0}^{[|\frac{n-1}{2}|]} \binom{n}{2k+1} [\cos\theta]^{n-(2k+1)}(i\operatorname{sen}\theta)(i\operatorname{sen}\theta)^{2k} = \\
&= \sum_{k=0}^{[|\frac{n}{2}|]} \binom{n}{2k} [\cos\theta]^{n-2k}[1-\cos^2\theta]^k(-1)^k + \\
&+ \sum_{k=0}^{[|\frac{n-1}{2}|]} \binom{n}{2k+1} [\cos\theta]^{n-(2k+1)}(i\operatorname{sen}\theta)(-1^k)(1-\cos^2\theta)^k = \\
&= \sum_{k=0}^{[|\frac{n}{2}|]} (-1)^k \binom{n}{2k} [\cos\theta]^{n-2k}[1-\cos^2\theta]^k + \\
&+ i\operatorname{sen}\theta \sum_{k=0}^{[|\frac{n-1}{2}|]} (-1^k) \binom{n}{2k+1} [\cos\theta]^{n-(2k+1)}(1-\cos^2\theta)^k.
\end{aligned}
$$

Reemplazando en (2.1), se tiene,

$$
\begin{aligned}
\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta = &\sum_{k=0}^{[|\frac{n}{2}|]} (-1)^k \binom{n}{2k} [\cos\theta]^{n-2k}[1-\cos^2\theta]^k + \\
&+ i\operatorname{sen}\theta \sum_{k=0}^{[|\frac{n-1}{2}|]} (-1^k) \binom{n}{2k+1} [\cos\theta]^{n-(2k+1)}(1-\cos^2\theta)^k. \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

Igualando la parte real e imaginaria de cada miembro en la ecuación (2.2), se concluye que

$$
\cos n\theta = \sum_{k=0}^{[|\frac{n}{2}|]} (-1)^k \binom{n}{2k} [\cos\theta]^{n-2k}[1-\cos^2\theta]^k, \qquad (2.3)
$$

$$
\operatorname{sen} n\theta = \operatorname{sen}\theta \sum_{k=0}^{[|\frac{n-1}{2}|]} (-1)^k \binom{n}{2k+1} [\cos\theta]^{n-(2k+1)}(1-\cos^2\theta)^k. \qquad (2.4)
$$

Tal como se observa en las identidades trigonométricas mostradas al inicio de esta sección, las fórmulas (2.3) y (2.4) indican que la función $\cos n\theta$ es igual a un polinomio de grado n en $\cos\theta$, y la función $\operatorname{sen} n\theta$ es el producto de $\operatorname{sen}\theta$ y un polinomio de grado $n-1$ en $\cos\theta$.

Si se sustituye $x = \cos\theta$ en (2.3), se obtiene un polinomio de grado n en x, el cual se conoce como polinomio de Chebyshiov de primera clase y se nota por $t_n(x)$, es decir,

$$\cos n\theta = t_n(x).$$

Igualmente si se hace $x = \cos\theta$ en (2.4), se obtiene la función de Chebyshiov de segunda clase; en esta, el polinomio que acompaña al factor $\sqrt{1-x^2}$ se conoce como polinomio de Chebyshiov de segunda clase y se nota por $u_{n-1}(x)$, es decir,

$$\operatorname{sen} n\theta = \sqrt{1-x^2}\; u_{n-1}(x).$$

Aunque $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ y por tanto $-1 \leq x \leq 1$, los resultados obtenidos tienen sentido para todo número real x.

Definición 2.1. *El polinomio de Chebyshiov $t_n(x)$ se define para todo x real por medio de la ecuación*

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{[|\frac{n}{2}|]} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k}(1-x^2)^k.$$

Definición 2.2. *El polinomio de Chebyshiov $u_{n-1}(x)$ se define para todo x real por medio de la ecuación*

$$u_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{[|\frac{n-1}{2}|]} (-1)^k \binom{n}{2k+1} x^{n-(2k+1)}(1-x^2)^k.$$

Dando valores a n y resolviendo la suma se obtiene la expresión para cada polinomio $t_n(x)$ y $u_{n-1}(x)$; por ejemplo:

$$\begin{aligned} t_0(x) &= 1, & u_0(x) &= 1, \\ t_1(x) &= x, & u_1(x) &= 2x, \\ t_2(x) &= 2x^2 - 1, & u_2(x) &= 4x^2 - 1, \\ t_3(x) &= 4x^3 - 3x, & u_3(x) &= 8x^3 - 4x. \end{aligned}$$

2.2. Ecuación diferencial de Chebyshiov

Fácilmente se puede verificar que

$$\cos n\theta = t_n(x) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} n\theta = \operatorname{sen}\theta\; u_{n-1}(x)$$

son soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + n^2 y = 0.$$

Haciendo $x = \cos\theta$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{d\theta} &= \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta\,\frac{dy}{dx},\\
\frac{d^2y}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta}\left(-\operatorname{sen}\theta\,\frac{dy}{dx}\right) =\\
&= \frac{d}{d\theta}\,(-\operatorname{sen}\theta)\,\frac{dy}{dx} + (-\operatorname{sen}\theta)\,\frac{d}{dx}\,(\frac{dy}{dx})\,\frac{dx}{d\theta} =\\
&= -\cos\theta\,\frac{dy}{dx} + \operatorname{sen}^2\theta\,\frac{d^2y}{dx^2}\,.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial se obtiene:

$$-\cos\theta\,\frac{dy}{dx} + \operatorname{sen}^2\theta\,\frac{d^2y}{dx^2} + n^2\,y = 0,$$

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0. \tag{2.5}$$

Por lo tanto, las funciones $t_n(x) = \cos n\theta$ y $\sqrt{1-x^2}\;u_{n-1}(x) = \operatorname{sen} n\theta$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación (2.5), conocida como *ecuación diferencial de Chebyshiov*.

En esta sección se hallarán nuevamente los polinomios de Chebyshiov resolviendo la ecuación diferencial (2.5) mediante series de potencias. De acuerdo con el Teorema (1.2), esta ecuación tiene dos soluciones linealmente independientes alrededor del punto ordinario $x_0 = 0$ de la forma:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k. \tag{2.6}$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned}
y' &= \sum_{k=1}^{\infty} kA_k x^{k-1},\\
y'' &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)A_k x^{k-2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
&(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)A_k x^{k-2} - x\sum_{k=1}^{\infty} kA_k x^{k-1} + n^2\sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k = 0,\\
&\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)A_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)A_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} kA_k x^k + n^2\sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k = 0,\\
&\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)A_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k[-k(k-1) - k + n^2] = 0,\\
&\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)A_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k[n^2 - k^2 + k - k] = 0,\\
&\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)A_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k[n^2 - k^2] = 0,\\
&\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)A_{k+2}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k[k^2 - n^2].
\end{aligned}
$$

Para que se cumpla esta última igualdad es necesario que los coeficientes satisfagan:

$$
(k+2)(k+1)A_{k+2} = (k^2 - n^2)\ A_k \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \cdots
$$

$$
A_{k+2} = \frac{k^2 - n^2}{(k+1)(k+2)}\ A_k. \tag{2.7}
$$

Iterando la fórmula (2.7) se observa que si $A_0 = 0$ todos los coeficientes pares son nulos, y los impares son:

$$
\begin{aligned}
A_3 &= \frac{1-n^2}{2\cdot 3}\ A_1,\\
A_5 &= \frac{3^2-n^2}{4\cdot 5}\ A_3 = \frac{(1-n^2)(3^2-n^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\ A_1,\\
A_7 &= \frac{5^2-n^2}{6\cdot 7}\ A_5 = \frac{(1-n^2)(3^2-n^2)(5^2-n^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\ A_1;
\end{aligned}
$$

en general, si $A_0 = 0$ y $k = 2p$ con $p = 0, 1, 2, \ldots$ $A_k = A_{2p} = 0$, si $A_1 \neq 0$ y $k = 2p+1$, se tiene:

$$
A_k = A_{2p+1} = \frac{(1-n^2)(3^2-n^2)(5^2-n^2)\ldots[(2p+1-2)^2 - n^2]}{(2p+1)!}\ A_1,
$$

$$
A_{2p+1} = \frac{(1-n^2)(3^2-n^2)(5^2-n^2)\ldots[(2p-1)^2 - n^2]}{(2p+1)!}\ A_1. \tag{2.8}
$$

Como $y(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_k x^k + \ldots$ es solución de la Ecuación (2.5), reemplazando los coeficientes obtenidos se encuentra la solución impar de la ecuación diferencial de Chebyshiov:

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= A_1x + \frac{(1-n^2)}{3!}\,A_1x^3 + \frac{(1-n^2)(3^2-n^2)}{5!}\,A_1x^5 + \ldots + \\
&\quad + \frac{(1-n^2)(3^2-n^2)(5^2-n^2)\cdots[(2p-1)^2-n^2]}{(2p+1)!}\,A_1x^{2p+1} + \ldots \\
y_1(x) &= A_1x - \frac{(n^2-1)}{3!}\,A_1x^3 + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}\,A_1x^5 - \ldots + \\
&\quad + (-1)^p\frac{(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2-5^2)\cdots[n^2-(2p-1)^2]}{(2p+1)!}\,A_1x^{2p+1} + \ldots \\
y_1(x) &= A_1\ [x - \frac{(n^2-1)}{3!}x^3 + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}x^5 - \ldots + \\
&\quad + (-1)^p\frac{(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2-5^2)\cdots[n^2-(2p-1)^2]}{(2p+1)!}x^{2p+1} + \ldots]. \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

Análogamente, iterando la fórmula (2.7) y tomando $A_1 = 0$ y $A_0 \neq 0$, todos los coeficientes impares son nulos, y los pares son:

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \frac{-n^2}{2!}\,A_0, \\
A_4 &= \frac{2^2-n^2}{4\cdot 3}\,A_2 = -\frac{(2^2-n^2)n^2}{4!}\,A_0 = \frac{(n^2-2^2)n^2}{4!}\,A_0, \\
A_6 &= \frac{(4^2-n^2)}{6\cdot 5}\,A_4 = \frac{(4^2-n^2)(2^2-n^2)(-n^2)}{6!}\,A_0 = \frac{-(n^2-4^2)(n^2 2^2)(n^2)}{6!}\,A_0;
\end{aligned}
$$

en este caso, si $k = 2p+1$ con $p = 0, 1, 2, \ldots$ $A_k = A_{2p+1} = 0$, y si $k = 2p$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
A_k = A_{2p} &= \frac{(-n^2)(2^2-n^2)(4^2-n^2)\ldots[(2p-2)^2-n^2]}{(2p)!}\,A_0, \\
A_{2p} &= (-1)^p\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\cdots[n^2-(2p-2)^2]}{(2p)!}\,A_0.
\end{aligned}
$$

Luego la solución par de la Ecuación (2.5) de Chebyshiov se obtiene reemplazando en (2.6) los coeficientes encontrados:

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= A_0 - \frac{n^2}{2!}A_0x^2 - \frac{(2^2-n^2)n^2}{4!}A_0x^4 + \ldots + \\
&\quad + (-1)^p\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\cdots[n^2-(2p-2)^2]}{(2p)!}A_0x^{2p} + \ldots \\
y_2(x) &= A_0[1 - \frac{n^2}{2!}x^2 - \frac{(2^2-n^2)n^2}{4!}x^4 + \ldots + \\
&\quad + (-1)^p\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\cdots[n^2-(2p-2)^2]}{(2p)!}x^{2p} + \ldots]. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

Dado que $t_n(x)$ es la única solución polinómica de la ecuación diferencial de Chebyshiov (salvo un factor constante), las expresiones (2.9) y (2.10) con un valor adecuado de A_0 ó A_1 son una fórmula explícita para el polinomio $t_n(x)$.

Si n es par, se reemplaza $x = \cos\frac{1}{2}\pi = 0$ en (2.10) y se tiene

$$t_n(\cos\frac{1}{2}\pi) = A_0;$$

como $t_n(\cos\frac{\pi}{2}) = \cos n\frac{\pi}{2} = (-1)^{\frac{n}{2}}$, entonces $A_0 = (-1)^{\frac{n}{2}}$. Luego una expresión para $t_n(x)$ con n par es:

$$\begin{aligned} t_n(x) = (-1)^{\frac{n}{2}}\ [1 - \frac{n^2}{2!}\ x^2 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\ x^4 - \cdots + \\ + (-1)^{\frac{n}{2}}\ \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\cdots[n^2-(n-2)^2]}{n!}\ x^n]. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Si n es impar, se divide (2.9) por $x = \cos\theta$ y se considera el siguiente límite:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{t_n(\cos\theta)}{\cos\theta} &= \lim_{x\to 0} \frac{t_n(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{A_1[x - \frac{(n^2-1)}{3!}x^3 + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}x^5 + \cdots]}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} A_1[1 - \frac{(n^2-1)}{3!}x^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}x^4 + \cdots = A_1; \end{aligned}$$

por otra parte se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{t_n(\cos\theta)}{\cos\theta} &= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos n\theta}{\cos\theta} \underbrace{=}_{\text{Regla de L'Hopital}} \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{n \operatorname{sen} n\theta}{\operatorname{sen}\theta} = n \operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi n \\ &= n(-1)^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

Luego $A_1 = n(-1)^{\frac{n-1}{2}}$. Reemplazando A_1 en (2.9) se obtiene una expresión para $t_n(x)$ si n es impar:

$$\begin{aligned} t_n(x) = n(-1)^{\frac{n-1}{2}}[x - \frac{(n^2-1)}{3!}x^3 + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}x^5 - \cdots + \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2-5^2)\cdots[n^2-(n-2)^2]}{n!}x^n]. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Las fórmulas (2.11) y (2.12) permiten obtener los polinomios de Chebyshiov de primera clase, cuando n es par o impar respectivamente. Estas expresiones son más explícitas que la Definición 2.1, y con ellas se pueden encontrar fácilmente los polinomios $t_n(x)$.

POLINOMIOS DE CHEBYSHIOV DE PRIMERA CLASE

$$
\begin{aligned}
t_0(x) &= 1,\\
t_1(x) &= x,\\
t_2(x) &= 2x^2-1,\\
t_3(x) &= 4x^3-3x,\\
t_4(x) &= 8x^4-8x^2+1,\\
t_5(x) &= 16x^5-20x^3+5x,\\
t_6(x) &= 32x^6-48x^4+18x^2-1,\\
t_7(x) &= 64x^7-112x^5+56x^3-7x,\\
t_8(x) &= 128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1,\\
t_9(x) &= 256x^9-576x^7+432x^5-120x^3+9x,\\
t_{10}(x) &= 512x^{10}-1280x^8+1120x^6-400x^4+50x^2-1.
\end{aligned}
$$

Conociendo $t_n(x)$, es posible encontrar la fórmula para $y=\sqrt{1-x^2}\; u_{n-1}(x)$ considerando la siguiente identidad:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1-x^2}\; u_{n-1}(x) = \operatorname{sen} n\theta &= -\frac{1}{n}\,\frac{d}{d\theta}(\cos n\theta) = -\frac{1}{n}\,\frac{d}{dx}(\cos n\theta)\,\frac{dx}{d\theta}\\
&= -\frac{1}{n}\,(-\operatorname{sen}\theta)\,\frac{d}{dx}\,(t_n(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\,\frac{d}{dx}(t_n(x)).
\end{aligned}
$$

Es decir, $u_{n-1}(x)=\dfrac{1}{n}\,\dfrac{d}{dx}\,(t_n(x))$, lo que equivale a $u_n(x)=\dfrac{1}{n+1}\,\dfrac{d}{dx}(t_{n+1}(x))$. Derivando con respecto a x las expresiones (2.11) y (2.12) se tienen fórmulas explícitas para $u_n(x)$:

Si n es par:

$$
\begin{aligned}
u_{n-1}(x) &= \frac{1}{n}\,\frac{d}{dx}\,\left\{\,(-1)^{\frac{1}{2}n}\,[1-\frac{n^2}{2!}\,x^2+\frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\,x^4-\ldots]\,\right\}\\
&= \frac{1}{n}\,(-1)^{\frac{1}{2}n}\,[-n^2x+\frac{n^2(n^2-2^2)}{3!}\,x^3-\ldots]\\
&= \frac{1}{n}\,(-1)^{\frac{1}{2}n}\,n^2\,[-x+\frac{(n^2-2^2)}{3!}\,x^3-\ldots]\\
&= (-1)^{\frac{1}{2}n-1}\,n\,[x-\frac{(n^2-2^2)}{3!}\,x^3+\ldots]. \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

Si n es impar:

$$\begin{aligned} u_{n-1}(x) &= \frac{1}{n}\ \frac{d}{dx}\ \{\ n(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\ [x - \frac{(n^2-1)}{3!}\ x^3 + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}\ x^5 - \ldots]\ \} \\ &= n(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\ \frac{1}{n}\ [1 - \frac{(n^2-1)}{2!}\ x^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{4!}\ x^4 - \ldots] \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\ [1 - \frac{(n^2-1)}{2!}\ x^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{4!}\ x^4 - \ldots]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Al igual que para $t_n(x)$, las fórmulas (2.13) y (2.14) permiten encontrar los polinomios de Chebyshiov de segunda clase más fácilmente que con la Definición 2.2.

POLINOMIOS DE CHEBYSHIOV DE SEGUNDA CLASE

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1, \\ u_1(x) &= 2x, \\ u_2(x) &= 4x^2 - 1, \\ u_3(x) &= 8x^3 - 4x, \\ u_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1, \\ u_5(x) &= 32x^5 - 32x^3 + 6x, \\ u_6(x) &= 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1, \\ u_7(x) &= 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x, \\ u_8(x) &= 256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1, \\ u_9(x) &= 512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x, \\ u_{10}(x) &= 1024x^{10} - 2304x^8 + 1796x^6 - 560x^4 + 60x^2 - 1. \end{aligned}$$

2.3. Ortogonalidad de los polinomios de Chebyshiov

En esta sección otra vez y finalmente se obtendrán de nuevo los polinomios de Chebyshiov de primera y segunda clase como elementos de un espacio vectorial con producto interno.

En el espacio vectorial P_n de polinomios de grado menor o igual a n con coeficientes reales, se considera el siguiente producto interno:

$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{p(x)q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad \text{para todo} \quad p,q \in P_n.$$

Aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base canónica $V = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ se encontrará un conjunto ortogonal $\{w_0, w_1, \cdots, w_n\}$ de la siguiente forma:

$$w_0 = 1 \in V,$$

$$w_1 = x - \frac{\langle x,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\,1,$$

$$\langle x,1\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0,$$

$$\langle 1,1\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi.$$

$$w_1 = x - \frac{0}{\pi} = x,$$

$$w_2 = x^2 - \sum_{i=0}^{1} \frac{\langle x^2, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle} w_i = x^2 - \frac{\langle x^2, w_0\rangle}{\langle w_0, w_0\rangle} w_0 - \frac{\langle x^2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1,1\rangle} - \frac{\langle x^2, x\rangle}{\langle x,x\rangle} x,$$

$$\langle x^2,1\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\langle x^2,x\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0.$$

$$w_2 = x^2 - \frac{\pi/2}{\pi}1 - \frac{0}{\pi/2}x = x^2 - \frac{1}{2} = \frac{2x^2-1}{2},$$

$$w_3 = x^3 - \sum_{i=0}^{2} \frac{\langle x^2, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle} w_i = x^3 - \frac{\langle x^3, w_0\rangle}{\langle w_0, w_0\rangle} w_0 - \frac{\langle x^3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle x^3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2$$

$$= x^3 - \frac{\langle x^3,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}1 - \frac{\langle x^3,x\rangle}{\langle x,x\rangle}x - \frac{\langle x^3, \frac{2x^2-1}{2}\rangle}{\langle \frac{2x^2-1}{2}, \frac{2x^2-1}{2}\rangle}\frac{2x^2-1}{2}$$

$$= x^3 - \frac{0}{\pi}1 - \frac{3\pi/8}{\pi/2}x - \frac{0}{\pi/8}\frac{2x^2-1}{2} = x^3 - \frac{3}{4}x = \frac{4x^3-3x}{4}$$

$$= x^3 - \frac{3}{4}x = \frac{4x^3-3x}{4}.$$

Análogamente,

$$w_4 = \frac{8x^4 - 8x^2 + 1}{8},$$

$$\begin{aligned}
w_5 &= \frac{16x^5 - 20x^3 + 5x}{16}, \\
w_6 &= \frac{32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1}{32}.
\end{aligned}$$

El conjunto encontrado,

$$\{1,\ x,\ \frac{2x^2-1}{2},\ \frac{4x^3-3x}{4},\ \frac{8x^4-8x^2+1}{8},\ \frac{16x^5-20x^3+5x}{16},\ \cdots\},$$

coincide con $\{t_0(x),\ t_1(x),\ t_2(x),\ t_3(x),\ \ldots\}$ salvo un factor constante, lo cual indica que los polinomios de Chebyshiov de primera clase son un conjunto ortogonal en el intervalo $[-1, 1]$.

Del mismo modo, aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base $\{\sqrt{1-x^2}, x\sqrt{1-x^2}, x^2\sqrt{1-x^2}, x^3\sqrt{1-x^2}, \cdots\}$ con el mismo producto interno, se encuentran las siguientes funciones.

$$\begin{aligned}
w'_1 &= \sqrt{1-x^2}, \\
w'_2 &= \sqrt{1-x^2}\ x, \\
w'_3 &= \sqrt{1-x^2}\ (\frac{4x^2-1}{4}), \\
w'_4 &= \sqrt{1-x^2}\ (2x^3-x), \\
w'_5 &= \sqrt{1-x^2}\ (\frac{16x^4-12x^2+1}{16}), \\
w'_6 &= \sqrt{1-x^2}\ (\frac{16x^5-16x^3+3x}{16}).
\end{aligned}$$

Este conjunto, $\{w'_1, w'_2, w'_3, w'_4, \cdots\}$, coincide (salvo un factor constante) con el conjunto de funciones de Chebyshiov de segunda clase

$$\{\sqrt{1-x^2}\ u_o(x),\ \sqrt{1-x^2}\ u_1(x),\ \sqrt{1-x^2}\ u_2(x),\ \ldots\}.$$

Por tanto, las funciones de Chebyshiov de segunda clase forman un conjunto ortogonal en el intervalo $[-1, 1]$.

CAPÍTULO 3

PROPIEDADES DE LOS POLINOMIOS DE CHEBYSHIOV

En este capítulo se presentan importantes propiedades de los polinomios de Chebyshiov de primera y segunda clase.

Proposición 3.1. *Los polinomios de Chebyshiov de primera clase satisfacen la siguiente identidad:*

$$t_{n+2}(x) = 2xt_{n+1}(x) - t_n(x) \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Demostración. Teniendo en cuenta la relación entre $\cos n\theta$, $t_n(x)$, $\operatorname{sen} n\theta$, y $u_{n-1}(x)$, se consideran las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos[(n+1)\theta] = \cos(n\theta + \theta) = \cos n\theta \cos\theta - \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen}\theta, \tag{3.1}$$

$$\operatorname{sen}[(n+1)\theta] = \operatorname{sen}(n\theta + \theta) = \operatorname{sen} n\theta \cos\theta + \cos n\theta \operatorname{sen}\theta. \tag{3.2}$$

Como $t_n(x) = \cos n\theta$ y $\operatorname{sen} n\theta = \operatorname{sen}\theta u_{n-1}(x)$, reemplazando en (3.1) se tiene:

$$t_{n+1}(x) = x\ t_n(x) - \operatorname{sen}\theta\ u_{n-1}(x)\ \operatorname{sen}\theta,$$

$$t_{n+1}(x) = x\ t_n(x) - \operatorname{sen}^2\theta\ u_{n-1}(x),$$

$$t_{n+1}(x) = x\ t_n(x) - (1 - x^2)\ u_{n-1}(x). \tag{3.3}$$

Análogamente, reemplazando en (3.2) se tiene:

$$\operatorname{sen}\theta u_n(x) = \operatorname{sen}\theta\ u_{n-1}(x)\ x + t_n(x)\operatorname{sen}\theta,$$

$$u_n(x) = x\ u_{n-1}(x) + t_n(x). \tag{3.4}$$

De (3.3), $u_{n-1}(x) = \dfrac{x\ t_n(x) - t_{n+1}(x)}{(1-x^2)}$; aplicando esto en (3.4) y operando, se encuentra que

$$\frac{x\ t_{n+1}(x) - t_{n+2}(x)}{(1-x^2)} = \frac{x\ [x\ t_n(x) - t_{n+1}(x)] + (1-x^2)\ t_n(x)}{(1-x^2)},$$

$$x\ t_{n+1}(x) - t_{n+2}(x) = x\ [\ x\ t_n(x) - t_{n+1}(x)\ ] + (1-x^2)\ t_n(x),$$

$$x\ t_{n+1}(x) - t_{n+2}(x) = x^2\ t_n(x) - x\ t_{n+1}(x) + t_n(x) - x^2\ t_n(x),$$

$$t_{n+2}(x) = x\ t_{n+1}(x) + x\ t_{n+1}(x) - t_n(x),$$

$$t_{n+2}(x) = 2x\ t_{n+1}(x) - t_n(x). \tag{3.5}$$

■

Proposición 3.2. *Los polinomios de Chebyshiov de segunda clase satisfacen la siguiente identidad:*

$$u_{n+1}(x) = 2xu_n(x) - u_{n-1}(x) \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Demostración.

Teniendo en cuenta las expresiones (3.3) y (3.4), se despeja $t_n(x)$ en (3.4), es decir, $t_n(x) = u_n(x) - xu_{n-1}(x)$, y aplicando en (3.3) se obtiene:

$$u_{n+1}(x) - x\ u_n(x) = x\ [\ u_n(x) - x\ u_{n-1}(x)\ ] - (1-x^2)\ u_{n-1}(x),$$

$$u_{n+1}(x) - x\ u_n(x) = x\ u_n(x) - x^2 u_{n-1}(x) - u_{n-1}(x) + x^2\ u_{n-1}(x),$$

$$u_{n+1}(x) = 2x\ u_n(x) - u_{n-1}(x). \tag{3.6}$$

■

Proposición 3.3. *Si $n \geq 1$, el polinomio $t_n(x)$ tiene ceros en los n puntos*

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Demostración. Puesto que $t_n(x) = \cos n\theta$ y $\cos n\theta = 0$ sólo si $n\theta$ es un múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$, es decir, cuando $n\theta = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$ para un cierto entero k y teniendo en cuenta que $\theta = \arccos x$, los ceros de $t_n(x)$ para $x \in [-1, 1]$ se encuentran entre los números

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.7}$$

Los valores $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ dan n ceros distintos $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ situados todos en el intervalo abierto $(-1, 1)$. Puesto que un polinomio de grado n no puede tener más de n ceros, es claro que deben ser todos los ceros de t_n. Los restantes x_k de (3.7) son repeticiones de estos n.

■

Proposición 3.4. *Si $n \geq 1$ el polinomio $u_n(x)$ tiene ceros en los n puntos*

$$x_k = \cos\frac{(k\pi)}{n+1} \quad k = 1, 2, \dots n. \tag{3.8}$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}(n+1)\theta = \sqrt{1-x^2}\; u_n(x)$, los ceros de $u_n(x)$ son iguales a los ceros de $\dfrac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\sqrt{1-x^2}}$, y $\dfrac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ sólo si $\operatorname{sen}(n+1)\theta = 0$. Esto se da cuando $(n+1)\theta$ es múltiplo de π, es decir, $(n+1)\theta = k\pi$, y como $x = \cos\theta$, los ceros de $u_n(x)$ se encuentran entre los números

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n+1} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.9}$$

Los valores $k = 1, 2, \dots n$ dan n ceros distintos $x_1, x_2, \dots, x_n$ situados en el intervalo abierto $(-1, 1)$. Como u_n es un polinomio de grado n, ellos deben ser todos los ceros de u_n, y para otros valores de k, los x_k son repeticiones de estos n.

■

A partir de los polinomios de Chebyshiov de segunda clase se puede definir un polinomio muy importante, como se observa a continuación.

Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $u_n(x)$ el polinomio de Chebyshiov de segunda clase; un polinomio asociado a este es

$$v_n(x) = u_n(x) + u_{n-1}(x) \quad n = 1,\ 2,\ \dots$$

Los primeros polinomios $v_n(x)$ son:

$$
\begin{aligned}
v_1(x) &= 2x + 1, \\
v_2(x) &= 4x^2 + 2x - 1, \\
v_3(x) &= 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1, \\
v_4(x) &= 16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1, \\
v_5(x) &= 32x^5 + 16x^4 - 32x^3 - 12x^2 + 6x + 1, \\
v_6(x) &= 64x^6 + 32x^5 - 80x^4 - 32x^3 + 24x^2 + 6x - 1, \\
v_7(x) &= 128x^7 + 64x^6 - 192x^5 - 80x^4 + 80x^3 + 24x^2 - 8x - 1, \\
v_8(x) &= 256x^8 + 128x^7 - 448x^6 - 192x^5 + 240x^4 + 80x^3 - 40x^2 - 8x + 1, \\
v_9(x) &= 512x^9 + 256x^8 - 1024x^7 - 448x^6 + 672x^5 + 240x^4 - 160x^3 - 40x^2 + 10x + 1, \\
v_{10}(x) &= 1024x^{10} + 512x^9 - 230x^8 - 1024x^7 + 1796x^6 + 672x^5 - 560x^4 - 160x^3 \\
&\quad + 60x^2 + 10x - 1.
\end{aligned}
$$

Proposición 3.5. *El polinomio $v_n(x)$ tiene ceros en los n puntos*

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \qquad k = 1, 2, \dots n.$$

Demostración. Como $u_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, operando y aplicando identidades trigonométricas se tiene que:

$$
\begin{aligned}
v_n(x) &= \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{\operatorname{sen} n\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}[\operatorname{sen}(n\theta + \theta) + \operatorname{sen} n\theta] \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}(2\frac{\theta}{2})}[\operatorname{sen} n\theta \cos\theta + \cos n\theta \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} n\theta] \\
&= \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}[\operatorname{sen} n\theta(\cos\theta + 1) + \cos n\theta \operatorname{sen}\theta] \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}[\operatorname{sen} n\theta(\frac{1+\cos 2\frac{\theta}{2}}{2}) + \frac{\cos n\theta \operatorname{sen} 2\frac{\theta}{2}}{2}] \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}[\operatorname{sen} n\theta(\cos^2\frac{\theta}{2}) + \frac{\cos n\theta\ 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2}] \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}[\operatorname{sen} n\theta \cos\frac{\theta}{2} + \cos n\theta \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}] \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\operatorname{sen}(n\theta + \frac{\theta}{2}) = \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}.
\end{aligned}
$$

Luego $v_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$, así que para encontrar los ceros de $v_n(x)$ es necesario que $(n+\frac{1}{2})\theta$ sea múltiplo de π, es decir $(n+\frac{1}{2})\theta = k\pi$ para algún entero k. Luego $\theta = \dfrac{2k\pi}{2n+1}$, y como $\theta = \arccos x = \dfrac{2k\pi}{2n+1}$, entonces los ceros de $v_n(x)$ se encuentran entre los números

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{2n+1} \quad k = \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Como $v_n(x)$ es un polinomio de grado n, los valores de $k = 1, 2, \cdots, n$ dan los n ceros distintos del polinomio $v_n(x)$. ■

Proposición 3.6. *Los polinomios $t_m(x)$ y $u_m(x)$ tienen la paridad de m.*

Demostración. Se consideran los siguientes casos para t_m:

1. Si m es par, $t_m(x)$ se define por la expresión (2.11):

$$\begin{aligned} t_m(-x) =& (-1)^{\frac{1}{2}m}[1 - \frac{m^2}{2!}(-x)^2 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{4!}(-x)^4 - \cdots + \\ & (-1)^{\frac{m}{2}}\frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\cdots[m^2-(m-2)^2]}{m!}(-x)^m] \\ =& (-1)^{\frac{1}{2}m}[1 - \frac{m^2}{2!}x^2 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{4!}x^4 - \cdots + \\ & (-1)^{\frac{m}{2}}\frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\cdots[m^2-(m-2)^2]}{m!}x^m] = t_m(x). \end{aligned}$$

   Luego $t_m(x)$ es una función par cuando m es par.

2. Si m es impar, $t_m(x)$ se define por la expresión (2.12):

$$\begin{aligned} t_m(-x) =& m(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}[(-x) - \frac{(m^2-1)}{3!}(-x)^3 + \frac{(m^2-1)(m^2-3^2)}{5!}(-x)^5 - \cdots + \\ & (-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{(m^2-1)(m^2-3^2)(m^2-5^2)\cdots[m^2-(m-2)^2]}{m!}(-x)^m] \\ =& m(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}[(-x) + \frac{(m^2-1)}{3!}x^3 - \frac{(m^2-1)(m^2-3^2)}{5!}x^5 - \cdots \\ & -(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{(m^2-1)(m^2-3^2)(m^2-5^2)\cdots[m^2-(m-2)^2]}{m!}(x)^m] \\ =& -m(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}[x + \frac{(m^2-1)}{3!}x^3 + \frac{(m^2-1)(m^2-3^2)}{5!}x^5 + \cdots + \\ & (-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{(m^2-1)(m^2-3^2)(m^2-5^2)\cdots[m^2-(m-2)^2]}{m!}(x)^m] \\ =& -t_m(x). \end{aligned}$$

   El polinomio $t_m(x)$ es una función impar cuando m es impar.

Para el polinomio $u_m(x)$ se considera:

1. Si m es par, $u_m(x)$ se define por la expresión (2.14):

$$u_m(-x) = (-1)^{\frac{1}{2}m} \cdot [1 - \frac{((m+1)^2-1)}{2!}(-x)^2 + \cdots],$$
$$u_m(-x) = (-1)^{\frac{1}{2}m} \cdot [1 - \frac{((m+1)^2-1)}{2!}x^2 + \cdots] = u_m(x).$$

   Luego $u_m(x)$ es una función par cuando m es par.

2. Si m es impar, $u_m(x)$ se define por la expresión (2.13):

$$u_m(-x) = (-1)^{\frac{1}{2}m} \cdot m \cdot [-x - \frac{((m+1)^2-2^2)}{3!}(-x)^3 + \cdots],$$
$$u_m(-x) = (-1)^{\frac{1}{2}m} \cdot m \cdot [-x + \frac{((m+1)^2-2^2)}{3!}x^3 + \cdots],$$
$$u_m(-x) = -(-1)^{\frac{1}{2}m} \cdot m \cdot [x - \frac{((m+1)^2-2^2)}{3!}x^3 + \cdots] = -u_m(x).$$

   El polinomio $u_m(x)$ es una función impar cuando m es impar.

■

Proposición 3.7. *El coeficiente de x^n en $t_n(x)$ es 2^{n-1}.*

Demostración. Se consideran dos casos, n par o impar:

1. Si $n = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}^+$:

$$\begin{aligned}
A_n &= (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot [\ (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n^2(n^2-2^2)\cdots(n^2-(n-2)^2)}{n!}\ ] \\
&= \frac{n^2(n^2-2^2)\cdots(n^2-(n-2)^2)}{n!} = \frac{(n^2-0)(n^2-2^2)\cdots(n^2-(n-2)^2)}{n!} \\
&= \frac{(2k)^2((2k)^2-2^2)((2k)^2-4^2)\cdots((2k)^2-((2k)-2)^2)}{(2k)!} \\
&= \frac{(2k)(2k)(2k-2)(2k+2)(2k-4)(2k+4)\cdots(2k-(2k-2))(2k+(2k-2))}{(2k)!} \\
&= \frac{\{\ (2k)(2k-2)(2k-4)\cdots(2))\} \cdot \{(2k)(2k+2)(2k+4)\cdots(2k+(2k-2))\}}{(2k)!} \\
&= \frac{\{\ (2k)2(k-1)2(k-2)\cdots(2))\} \cdot \{(2k)2(k+1)2(k+2)\cdots 2(k+(k-1))\}}{(2k)!} \\
&= \frac{\{2^k k(k-1)(k-2)\cdots 1\} \cdot \{2^{k-1}2k(k+1)(k+2)\cdots(k+(k-1))\}}{(2k)!}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2^{k+k-1}\{\ k(k-1)(k-2)\cdots 1\ \}\cdot\{\ (k+1)(k+2)\cdots(2k-1)2k\ \}}{(2k)!}$$
$$= \frac{2^{2k-1}\{\ 1\cdots(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)\cdots(2k-1)2k}{(2k)!}\ \} = 2^{n-1}.$$

2. Si $n = 2k+1$ con $k \in \mathbb{Z}^+$:

$$
\begin{aligned}
A_n &= n(-1)^{\frac{n-1}{2}}[(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2-5^2)\cdots(n^2-(n-2)^2)}{n!}]\\
&= n\frac{(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2-5^2)\cdots(n^2-(n-2)^2)}{n!}]\\
&= n\frac{(n-1)(n+1)(n-3)(n+3)(n-5)(n+5)\cdots(n-(n-2))(n+(n-2))}{n!}]\\
&= n\Big\{\big[(n-1)(n-3)(n-5)\cdots(n-(n-2))\big]\cdot\big[(n+1)(n+3)(n+5)\\
&\quad \cdots(n+(n-2))\big]\Big\}/n!\\
&= (2k+1)\Big\{\big[(2k+1-1)(2k+1-3)(2k+1-5)\cdots(2k+1-(2k+1-2))\big]\\
&\quad \big[(2k+1+1)(2k+1+3)(2k+1+5)\cdots(2k+1+(2k+1-2))\big]\Big\}/(2k+1)!\\
&= (2k+1)\Big\{\big[(2k)(2k-2)(2k-4)\cdots(2k+1-2k-1+2)\big]\\
&\quad \big[(2k+2)(2k+4)(2k+6)\cdots(4k)\big]\Big\}/(2k+1)!\\
&= (2k+1)\frac{\big[(2k)2(k-1)2(k-2)\cdots 2\big]\big[2(k+1)2(k+2)2(k+3)\cdots 2(2k)\big]}{(2k+1)!}\\
&= (2k+1)\frac{2^k\big[k(k-1)(k-2)\cdots 1\big]2^k\big[(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(2k)\big]}{(2k+1)!}\\
&= 2^{2k}\frac{1\cdots(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(2k)(2k+1)}{(2k+1)!}\\
&= 2^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Luego se tiene que $A_n = 2^{n-1}$ en cualquier caso, n par o impar.

■

Teorema 3.1. *En el intervalo* $[-1,1]$ *los valores extremos de* $t_n(x)$ *son* $+1$ *y* -1*, alcanzados alternativamente en los* $n+1$ *puntos*

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad para \quad k = 0,1,\ldots,n. \tag{3.10}$$

Demostración. Según el teorema de Rolle, el máximo y el mínimo relativos de t_n deben presentarse entre dos ceros consecutivos; existen $n-1$ puntos de tal naturaleza en el intervalo abierto $(-1,1)$. Como $t_n(x) = \cos n\theta$ con $x = \cos\theta$, los valores extremos, ± 1, son alcanzados en los $n-1$ puntos interiores $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, y también en los extremos $x = 1$ y $x = -1$. Por consiguiente, en el intervalo cerrado $[-1,1]$ los valores extremos $+1$ y -1 son alcanzados alternativamente en los $n+1$ puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dados por $x_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ para $k = 0, 1, \ldots, n$.

■

Como se dijo anteriormente, los polinomios de Chebyshiov resuelven el problema de encontrar un polinomio para el cual la norma del máximo sea lo más pequeña posible; así que el siguiente teorema muestra este hecho en el intervalo $[-1,1]$.

Teorema 3.2. *Sea $p_n(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$, un polinomio de grado $n \geq 1$ con primer coeficiente igual a 1, y considerando la norma del máximo dada por $\|p_n\| = \max\limits_{-1<x<1} |p_n|$. Se tiene que*

$$\|p_n\| \geq \|\tilde{t}_n\|,$$

donde $\tilde{t}_n(x) = \dfrac{t_n(x)}{2^{n-1}}$.

Demostración. En el intervalo $[-1,1]$ el polinomio $\tilde{t}_n$ toma sus valores extremos $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ y $-\dfrac{1}{2^{n-1}}$, alternativamente en los $n+1$ puntos distintos x_k indicados en el Teorema 3.1, por consiguiente, $\|\tilde{t}_n\| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

A continuación se demuestra que la desigualdad $\|p_n\| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ lleva a una contradicción.

Suponiendo $\|p_n\| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ y considerando la diferencia $r(x) = \tilde{t}_n(x) - p_n(x)$, en los $n+1$ puntos x_k dados por la ecuación (3.10) se tiene

$$r(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - p_n(x_k) = (-1)^k \left[\frac{1}{2^{n-1}} - (-1)^k p_n(x_k)\right].$$

El factor entre los corchetes es siempre positivo, debido a que $\|p\| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Por lo tanto $r(x_k)$ tiene signos alternados en los $n+1$ puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Como r es continua, debe anularse por lo menos una vez entre dos cambios de signo consecutivos. Por consiguiente, r tiene por lo menos n ceros distintos. Pero como r es un polinomio de grado menor o igual a $n-1$, esto significa que r es idénticamente nula. Luego, $p_n = \tilde{t}_n$, así que $\|p_n\| = \|\tilde{t}_n\| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$, lo cual es falso porque se supone $\|p_n\| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Esto demuestra que $\|p_n\| \geq \dfrac{1}{2^{n-1}} = \|\tilde{t}_n\|$.

∎

En el capítulo anterior se han hallado los polinomios de Chebyshiov de primera y segunda clase de diferentes formas; a continuación se presentan los mismos mediante un curioso determinante. Esta representación permite cumplir con el objetivo principal de este trabajo: mostrar la relación entre los polinomios de Chebyshiov y las figuras estrelladas, como se observará en el Capítulo 4.

Como $t_0(x) = 1$ y $t_1(x) = x$, aplicando la fórmula de recurrencia (3.5) para obtener $t_2(x)$ se tiene:

$$\begin{aligned} t_2(x) &= 2x\ t_1(x) - t_0(x) \\ &= 2x^2 - 1 \\ &= \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

De la misma forma,

$$\begin{aligned} t_3(x) &= 2xt_2(x) - t_1(x) \\ &= 2x\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} - x = 2x\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

que se puede ver como un determinante de orden tres, el cual se desarrolla por la tercera fila. Luego,

$$t_3(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}.$$

Además,

$$t_4(x) = 2xt_3(x) - t_2(x)$$

$$= 2x\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}.$$

Al igual que con $t_2(x)$ y $t_3(x)$, la fórmula de recurrencia (3.5) permitió ver a $t_4(x)$ como el determinante de una matriz que se desarrolla por la última fila.

Análogamente, como $u_0(x) = 1$ y $u_1(x) = 2x$, aplicando la fórmula de recurrencia (3.6) se tiene:

$$\begin{aligned} u_2(x) &= 2xu_1(x) - u_0(x) \\ &= 2x(2x) - 1 \\ &= \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}; \\ u_3(x) &= 2xu_2(x) - u_1(x) \\ &= 2x\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} - 2x = 2x\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}; \\ u_4(x) &= 2xu_3(x) - u_2(x) \\ &= 2x\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}.$$

De acuerdo con los ejemplos anteriores, se consideran las siguientes matrices de orden n,

$$T_n(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2x \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

$$U_n(x) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2x \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

De la ecuación de recurrencia (3.5) se puede inducir que

$$t_n(x) = \det T_n(x). \tag{3.13}$$

Análogamente, de la ecuación de recurrencia (3.6) se puede inducir que

$$u_n(x) = \det U_n(x). \tag{3.14}$$

Teorema 3.3. *Los valores propios de $U_n(x)$ son $2(x-1)+4\operatorname{sen}^2(\dfrac{k\pi}{2n+2})$, $k = 1, 2, \cdots, n$.*

Demostración. Para encontrar los valores propios de $U_n(x)$, se buscan los valores λ para los cuales $\det(U_n(x) - \lambda I) = 0$. Luego

$$U_n(x) - \lambda I = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x-\lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2x-\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2x-\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2x-\lambda \end{pmatrix} = U_n(x-\frac{\lambda}{2}).$$

Así pues los valores propios de $U_n(x)$ son los ceros de $u_n(x-\frac{\lambda}{2})$; de (3.8) los ceros son $x-\frac{\lambda_k}{2} = \cos\frac{k\pi}{n+1} con\ k = 1, 2, \cdots, n$; despejando se encuentra que $\lambda_k = 2x - 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$, por tanto los valores propios de U_n son

$$\lambda_k = 2x - 2\cos\frac{k\pi}{n+1} = 2x - 2\cos 2(\frac{k\pi}{2n+2}) = 2x - 2[1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2n+2}]$$
$$= 2x - 2 + 4\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2n+2} = 2(x-1) + 4\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2n+2}.$$

■

Ejemplo. Los valores propios de la matriz $U_n(1)$ son

$$\lambda_k = 4\operatorname{sen}^2(\frac{k\pi}{2n+2}) \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

Una característica importante del polinomio $v_n(x)$ es que puede verse como el determinante de una matriz cuadrada, al igual que los polinomios de Chebyshiov $t_n(x)$ y $u_n(x)$.

Si se aplica a la definición de $v_n(x)$ la fórmula de recurrencia (3.6) se obtiene

$$v_n(x) = u_n(x) + u_{n-1}(x) = 2xu_{n-1}(x) - u_{n-2}(x) + u_{n-1}(x)$$
$$= (2x+1)u_{n-1}(x) - u_{n-2}(x).$$

Esta fórmula tiene sentido para $n = 2,\ 3\ , 4,\ \ldots$; por ejemplo,

$$v_2(x) = (2x+1)u_1(x) - u_o(x)$$
$$= (2x+1)2x - 1$$
$$= \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2x+1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned}
v_3(x) &= (2x+1)u_2(x) - u_1(x)\\
&= (2x+1)\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} - 2x = (2x+1)\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x+1 \end{vmatrix};\\
v_4(x) &= (2x+1)u_3(x) - u_2(x)\\
&= (2x+1)\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = (2x+1)\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2x+1 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

De acuerdo con los ejemplos y considerando la siguiente matriz de orden n:

$$V_n(x) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2x+1 \end{pmatrix}.$$

se pueden obtener los polinomios $v_n(x)$ de la siguiente forma:

$$v_n(x) = \det V_n(x). \tag{3.15}$$

Teorema 3.4. *Los valores propios de $V_n(x)$ son* $2(x-1)+4\,\mathrm{sen}^2(\dfrac{k\pi}{2n+1})$, $\quad n = 2,\ 3,\ ,\ldots$

Demostración. Los valores propios de $V_n(x)$ se encuentran calculando los λ para los cuales el $\det(V_n(x) - \lambda I) = 0$. Como

$$V_n(x) - \lambda I = \begin{pmatrix} 2x-\lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2x-\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2x-\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2x-\lambda+1 \end{pmatrix} = V_n(x - \frac{\lambda}{2}), \qquad (3.16)$$

y $\det(V_n(x-\frac{\lambda}{2})) = v_n(x-\frac{\lambda}{2})$. Entonces los valores propios de $V_n(x)$ son los ceros de $v_n(x-\frac{\lambda}{2})$. De (3.5), los ceros son $x - \frac{\lambda_k}{2} = \cos\frac{2k\pi}{2n+1}$ con $k = 1, 2, \cdots, n$; despejando se encuentra que $\lambda_k = 2x - 2\cos\frac{2k\pi}{2n+1}$, por tanto los valores propios de U_n son

$\lambda_k = 2x - 2\cos 2\frac{k\pi}{2n+1} = 2x - 2[1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,\frac{k\pi}{2n+1}] = 2(x-1) + 4\,\mathrm{sen}^2\,\frac{k\pi}{2n+1}$. ■

Ejemplo. Los valores propios de la matriz $V_n(1)$ son

$$\lambda_k = 4\,\mathrm{sen}^2(\frac{k\pi}{2n+1}) \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

CAPÍTULO 4

FIGURAS ESTRELLADAS

Entre las figuras geométricas se destacan los polígonos regulares y las figuras estrelladas. Estas interesantes formas han sido utilizadas desde hace mucho tiempo; por ejemplo, en el antiguo Egipto los octágonos regulares y polígonos de 16 lados aparecen en decoraciones de murales; los pitagóricos tenían como emblema el pentagrama; los babilonios usaron pentagramas y hexágonos, etc. Un estudio acerca de estas figuras lo realizó el inglés Thomas Bradwardine (1290-1349).

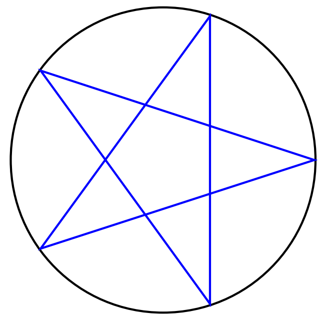
En el desarrollo de este capítulo se quiere mostrar la relación entre los polinomios de Chebyshiov de segunda clase $u_n(x)$, el polinomio asociado $v_n(x)$ con los polígonos regulares y las figuras estrelladas. Para esto se presentan inicialmente la definición de figura estrellada y algunas de sus propiedades.

Una **figura estrellada** de n lados es la que se forma con los n puntos que dividen una circunferencia en partes iguales, uniéndolos con segmentos de recta de dos en dos, tres en tres, etc. Si todos los n puntos no se unen, se inicia nuevamente con uno de los puntos que queda por fuera de la linea poligonal, hasta que se incluyan todos los puntos.

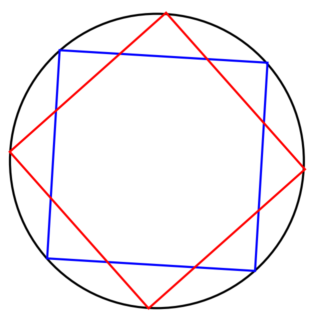
La situación se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo.

1. Si $n = 5$ y se unen los puntos de dos en dos, se forma la figura



2. Si $n = 8$ y se unen los puntos de dos en dos, se forma la figura



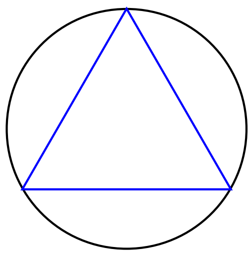
La figura estrellada formada al unir n puntos de q en q, se denota $\left\{\begin{matrix} n \\ q \end{matrix}\right\}$. El primero en usar un símbolo numérico como $\{n/q\}$ para referirse a las figuras estrelladas fue L. Schläfli (1814-1895).

Como unir puntos de q en q es igual a unirlos de $n - q$ en $n - q$, es decir, de q en q en sentido contrario, entonces se puede construir una figura estrellada por cada entero menor que $\frac{n}{2}$, es decir, para los q tales que $q < \frac{n}{2}$.

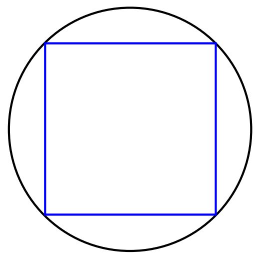
Sean $n, q \in \mathbb{Z}$, $n \geq 3$ y $q < \frac{n}{2}$; se presentan los siguientes casos:

1. Si $q = 1$ la figura que se obtiene es un polígono regular convexo de n lados y se denota por $\left\{n\right\}$.

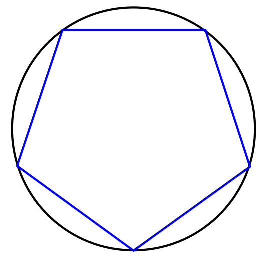
   Ejemplo. Triángulo equilátero, cuadrado, pentágono, etc.

   $\{3\}$

   $\{4\}$

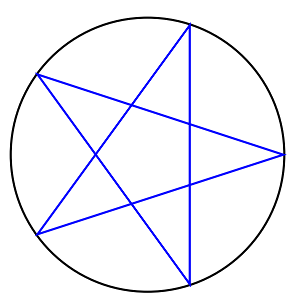
   

   $\{5\}$

2. Si n y q son primos relativos, se unen los vértices no consecutivos de q en q y la figura formada se llama ***polígono regular estrellado*** o ***n-grama***.

   - No existen polígonos regulares estrellados de 3 lados, debido a que el único primo relativo con 3 menor que $\frac{3}{2}$ es 1.
   - Para $n = 4$ tampoco existen polígonos regulares estrellados de 4 lados, puesto que el único primo relativo con 4 menor que $\frac{4}{2}$ es 1.
   - **Pentágono regular estrellado**

     El número primo relativo con 5 menor que $\frac{5}{2}$ es 2; luego se puede construir el pentagrama o pentágono regular estrellado uniendo los cinco puntos de dos en dos. Los pitagóricos usaron pentagramas como símbolo de buena salud y como un emblema de reconocimiento.

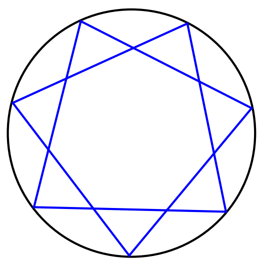
     

     $$\left\{\begin{matrix}5\\2\end{matrix}\right\}$$

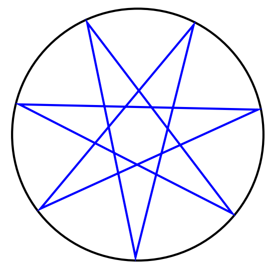
- No existen polígonos regulares estrellados de 6 lados, puesto que no hay primos relativos con 6 diferentes de 1 menores que $\frac{6}{2}$.

- **Heptágonos regulares estrellados**

  Existen dos números primos relativos con 7 menores que $\frac{7}{2}$, 2 y 3; así que se pueden construir dos heptágonos regulares estrellados, uniendo los 7 puntos de dos en dos, y otro de tres en tres:



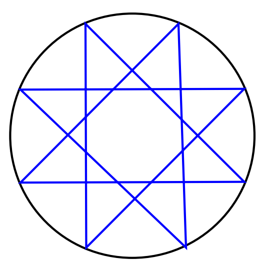
$\left\{\begin{matrix}7\\2\end{matrix}\right\}$



$\left\{\begin{matrix}7\\3\end{matrix}\right\}$

- **Octágono regular estrellado**

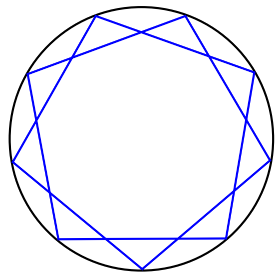
  El número primo relativo con 8 y menor que $\frac{8}{2}$ es 3, así que uniendo los 8 puntos de tres en tres se obtiene el octágono regular estrellado:



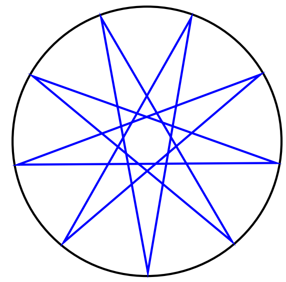
$\left\{\begin{matrix}8\\3\end{matrix}\right\}$

- **Eneágonos regulares estrellados**

  Los primos relativos con 9 menores que $\frac{9}{2}$ son 2 y 4, luego se pueden construir dos polígonos regulares estrellados de 9 lados:



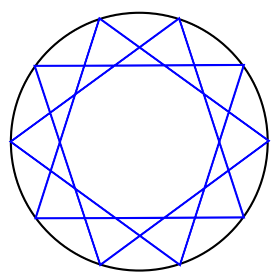
$\left\{\begin{matrix}9\\2\end{matrix}\right\}$



$\left\{\begin{matrix}9\\4\end{matrix}\right\}$

- **Decágono regular estrellado**

  Como 3 es primo relativo con 10, se forma al unir los 10 puntos de tres en tres:

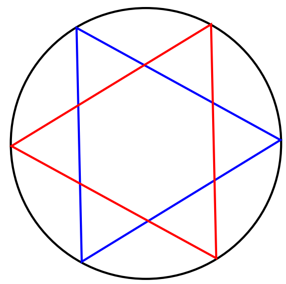


$\left\{\begin{matrix}10\\3\end{matrix}\right\}$

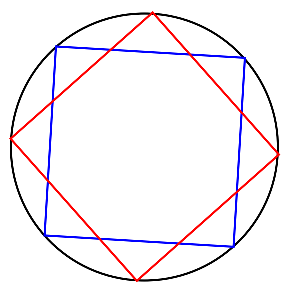
Para un n dado, ¿cuántos *n-gramas regulares* se pueden construir? Por cada $q < \frac{n}{2}$ se construye una figura estrellada $\left\{\begin{matrix}n\\q\end{matrix}\right\}$; como estas son *n-gramas regulares* cuando n y q son primos relativos, se puede construir un *n-grama* por cada $q < \dfrac{\phi(n)}{2}$, donde $\phi(n)$ es la función de Euler (cantidad de números menores que n y primos relativos con n).

3. Si n y q no son primos relativos, la figura estrellada se forma con dos o más polígonos girados uno con respecto al otro; esto se debe a que al unir los puntos, se cierra la línea poligonal sin incluirlos todos.

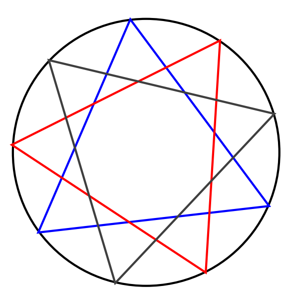
- La figura estrellada $\begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \end{Bmatrix}$ es la conocida **estrella de David**, y se forma por dos triángulos equiláteros.



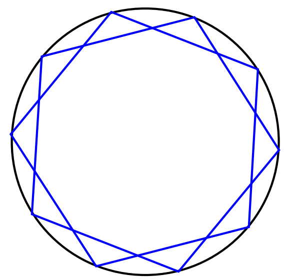
- La figura estrellada $\begin{Bmatrix} 8 \\ 2 \end{Bmatrix}$ es llamada **estrella de Lakshmi**, y fue usada por los indios para simbolizar las 8 formas de riqueza (Ashtalákshmi). Esta se forma con dos cuadrados:



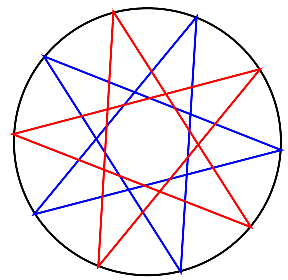
- La figura estrellada $\begin{Bmatrix} 9 \\ 3 \end{Bmatrix}$ se forma con tres triángulos equiláteros:



- De 10 lados se pueden formar las figuras estrelladas $\begin{Bmatrix} 10 \\ 2 \end{Bmatrix}$ y $\begin{Bmatrix} 10 \\ 4 \end{Bmatrix}$; la primera se forma con dos pentágonos, y la segunda es muy interesante ya que se forma con dos pentagramas, y no con polígonos regulares:



$\left\{\begin{matrix}10\\2\end{matrix}\right\}$



$\left\{\begin{matrix}10\\4\end{matrix}\right\}$

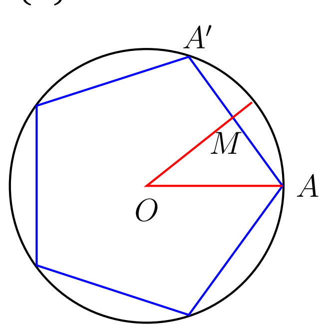
Sea O el centro, A, A' vértices de la figura estrellada, R el radio de la circunferencia circunscrita y M el punto medio del lado $\overline{AA'}$; la medida del ángulo AOM es $\dfrac{\pi}{n}$ para $\left\{n\right\}$ y $\dfrac{q\pi}{n}$ para $\left\{\begin{matrix}n\\q\end{matrix}\right\}$.

Conociendo la medida del ángulo AOM se puede determinar fácilmente la medida del lado de $\left\{n\right\}$ y $\left\{\begin{matrix}n\\q\end{matrix}\right\}$.

La medida del lado es $l = 2R \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{n}$ para $\left\{n\right\}$ y $l = 2R \operatorname{sen} \dfrac{q\pi}{n}$ para $\left\{\begin{matrix}n\\q\end{matrix}\right\}$.

Ejemplos.

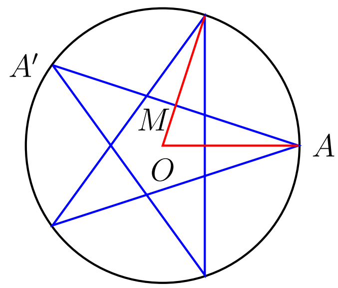
- Pentágono regular $\left\{5\right\}$.



$m\measuredangle AOM = \frac{2\pi}{2\cdot 5} = \frac{\pi}{5}$

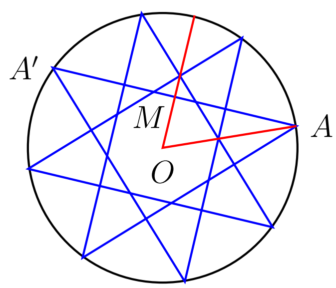
$l = 2R \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$

- Pentagrama $\begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \end{Bmatrix}$.



$m\measuredangle AOM = \frac{2\pi}{5}$
$l = 2R\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5}$

- Octágono regular estrellado, $\begin{Bmatrix} 8 \\ 3 \end{Bmatrix}$.



$m\measuredangle AOM = \frac{3\pi}{8}$
$l = 2R\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{8}$

Los polinomios de Chebyshiov de segunda clase $u_n(x)$ y el polinomio asociado $v_n(x)$ tienen una estrecha relación con las figuras estrelladas. Dicha relación se establece a través de los valores propios de las matrices U_n y V_n, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplos.

1. Si se consideran las figuras de seis lados $\{6\}$ y $\begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \end{Bmatrix}$, se tiene:

   - Para $\{6\}$, la medida del lado es $l = 2R\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{6})$, luego el cociente $\left(\frac{l}{R}\right)^2$ es

   $$\left(\frac{l}{R}\right)^2 = \left(\frac{2R\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{6})}{R}\right)^2 = 4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

   Por otra parte, del Teorema 3.3 se tiene que los valores propios de la matriz $U_2(1)$ son

   $$\lambda_k = 4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k\pi}{6}\right) \text{ para k=1, 2.}$$

Comparando las dos expresiones anteriores se observa que el cociente $\left(\frac{l}{R}\right)^2$ coincide con el valor propio λ_1.

- Para $\begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \end{Bmatrix}$, la medida del lado es $l = 2R\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{6})$, luego el cociente $\left(\frac{l}{R}\right)^2$ es

$$\left(\frac{l}{R}\right)^2 = \left(\frac{2R\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{6})}{R}\right)^2 = 4\operatorname{sen}^2(\frac{2\pi}{6}).$$

Este cociente coincide con el valor propio λ_2 de la matriz $U_2(1)$.

2. Si se consideran las figuras de siete lados $\{7\}$, $\begin{Bmatrix} 7 \\ 2 \end{Bmatrix}$ y $\begin{Bmatrix} 7 \\ 3 \end{Bmatrix}$, se tiene:

- Para $\{7\}$, la medida del lado es $l = 2R\operatorname{sen}(\frac{\pi}{7})$, luego el cociente $\left(\frac{l}{R}\right)^2$ es

$$\left(\frac{l}{R}\right)^2 = \left(\frac{2R\operatorname{sen}(\frac{\pi}{7})}{R}\right)^2 = 4\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{7}).$$

Por otra parte, de el Teorema 3.4 se tiene que los valores propios de la matriz $V_3(1)$ son

$$\lambda_k = 4\operatorname{sen}^2(\frac{k\pi}{7}) \text{ para k=1, 2, 3.}$$

Comparando las dos expresiones anteriores se observa que el cociente $\left(\frac{l}{R}\right)^2$ coincide con el valor propio λ_1.

- Para $\begin{Bmatrix} 7 \\ 2 \end{Bmatrix}$, la medida del lado es $l = 2R\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{7})$, luego el cociente $\left(\frac{l}{R}\right)^2$ es

$$\left(\frac{l}{R}\right)^2 = \left(\frac{2R\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{7})}{R}\right)^2 = 4\operatorname{sen}^2(\frac{2\pi}{7}).$$

Este cociente coincide con el valor propio λ_2 de la matriz $V_3(1)$.

- Para $\begin{Bmatrix} 7 \\ 3 \end{Bmatrix}$, la medida del lado es $l = 2R\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{7})$, luego el cociente $\left(\frac{l}{R}\right)^2$ es

$$\left(\frac{l}{R}\right)^2 = \left(\frac{2R\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{7})}{R}\right)^2 = 4\operatorname{sen}^2(\frac{3\pi}{7}).$$

Este cociente coincide con el valor propio λ_3 de la matriz $V_3(1)$.

Los ejemplos indican que las figuras estrelladas con un número par de lados se relacionan con los valores propios de las matrices U y las figuras estrelladas con un número impar de lados se relacionan con los valores propios de las matrices V. Estos hechos se presentan formalmente en el siguiente teorema, con el cual se finaliza este estudio sobre polinomios de Chebyshiov y figuras estrelladas.

Teorema 4.1. *Sea l un lado y R el radio de la figura estrellada regular de n lados:*

- *Si $n = 2k$, los valores propios de $U_{k-1}(1)$ son las proporciones $\left(\frac{l}{R}\right)^2$ de $\begin{Bmatrix} n \\ j \end{Bmatrix}$ para $j = 1, 2, \cdots, k-1$.*
- *Si $n = 2k+1$, los valores propios de $V_k(1)$ son las proporciones $\left(\frac{l}{R}\right)^2$ de $\begin{Bmatrix} n \\ j \end{Bmatrix}$ para $j = 1, 2, \cdots, k$.*

Demostración. Se consideran los casos:

- Si $n = 2k$, los valores propios de $U_{k-1}(1)$, de acuerdo con el Teorema 3.3, son $4\operatorname{sen}^2(\frac{j\pi}{2(k-1)+2})$ para $j = 1, 2, \ldots, k-1$, luego operando se tiene que $4\operatorname{sen}^2(\frac{j\pi}{2(k-1)+2}) = 4\operatorname{sen}^2(\frac{j\pi}{2k}) = 4\operatorname{sen}^2(\frac{j\pi}{n}) = \frac{R^2}{R^2}4\operatorname{sen}^2(\frac{j\pi}{n}) = (\frac{2R\operatorname{sen}\frac{j\pi}{n}}{R})^2 = \left(\frac{l}{R}\right)^2$, donde l es el lado de la figura estrellada $\begin{Bmatrix} n \\ j \end{Bmatrix}$.
- Si $n = 2k+1$, los valores propios de $V_k(1)$, de acuerdo con el Teorema 3.4, son $4\operatorname{sen}^2(\frac{j\pi}{2k+1})$ para $j = 1, 2, \ldots, k$, luego operando se tiene $4\operatorname{sen}^2(\frac{j\pi}{2k+1}) = 4\frac{R^2}{R^2}\operatorname{sen}^2(\frac{j\pi}{2k+1}) = (\frac{2R\operatorname{sen}\frac{j\pi}{n}}{R})^2 = \left(\frac{l}{R}\right)^2$, donde l es el lado de la figura estrellada $\begin{Bmatrix} n \\ j \end{Bmatrix}$.

■

Este teorema es la generalización de un resultado observado por el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630), quien afirmó que los cuadrados de los lados de los polígonos

$\left\{7\right\}$, $\left\{\begin{matrix}7\\2\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}7\\3\end{matrix}\right\}$ de radio unitario son las raíces de la ecuación

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 7 = 0.$$

Estas raíces son precisamente los valores propios de $V_3(1)$.

El Teorema 4.1 es interesante ya que relaciona los valores propios de las matrices que generan los polinomios de Chebyshiov $u_n(x)$ y el polinomio asociado $v_n(x)$ con el lado y el radio de los polígonos regulares y las figuras estrelladas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] APOSTOL Tom. *Calculus*. Vol.2. Editorial Reverté, S.A., Barcelona, segunda edición, 1988.

[2] COXETER H. *Introduction to Geometry*. John Wiley, New York, 1962.

[3] DERRICK William et al. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones.* Fondo Educativo Interamericano, México, 1984.

[4] GUZMÁN Gildardo. *Algebra Lineal*. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 1999.

[5] RÍBNIKOV K. *Historia de las Matemáticas*. Editorial Mir, Moscú, primera edición, 1987.

[6] RIVLIN Theodore. *The Chebyshev Polinomials*. John Wiley, New York, 1974.

[7] SAVIO D. et al. "Chebychev Polinomials and Regular Polygons". *The American Mathematical Monthly*, Vol. 100, No. 7 (August-September, 1993), p. 657-661.

[8] TAKEUCHI Yu. *Polinomios de Tschebysheff*. Departamento de matemáticas y estadística, U. NAL., Publicaciones, Montería, 1972.