

Estructuras y mecanismos mentales asociados a la construcción del concepto de ortogonalidad:
un modelo cognitivo desde la teoría APOE

Brandon Andrey Moreno Solares

Trabajo de Grado para optar al título de Magister en Educación Matemática

Directora

Dra. Solange Roa Fuentes

Codirector

Dr. Javier Enrique Camargo García

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2022

Agradecimientos

A mis padres, que me han apoyado incondicionalmente, sin ellos nada de esto sería posible.

A mi hermano, con quien sé que podré contar toda la vida.

A mi fiel compañera, porque a tu lado todo es más bonito y más fácil.

A mi directora, por la paciencia, motivación y gran dedicación en cada momento.

A mis compañeros, por la amistad, apoyo y todas esas conversaciones que contribuyeron en este proceso de formación.

A mis profesores, gracias por todas las enseñanzas y aportes, verdaderamente fueron fundamentales en mi formación académica.

A mis evaluadoras, por cada comentario y aporte realizado durante la revisión de este trabajo.

Tabla de Contenido

Introducción	12
1. Antecedentes	14
2. Problema de investigación	21
3. Marco teórico	24
3.1. Teoría APOE	24
3.2. Paradigma de Investigación	31
4. Método de Investigación	34
5. Análisis teórico	38
5.1. Análisis de libros de texto	39
5.1.1. Álgebra lineal: una introducción moderna, Poole (2011)	39
5.1.1.1. Estructura general del libro	39
5.1.1.2. Presentación y definición del concepto de ortogonalidad	40
5.1.1.3. Ejemplos y ejercicios proporcionados por el texto	48
5.1.2. Álgebra lineal para estudiantes de ingeniería y ciencias, Del Valle (2011)	56
5.1.2.1. Estructura general del libro	56
5.1.2.2. Presentación y definición del concepto de ortogonalidad	57

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ORTOGONALIDAD	4
5.1.2.3. Ejemplos y ejercicios proporcionados por el texto	59
5.1.3. Linear algebra, Hoffman & Kunze (1971)	60
5.1.3.1. Estructura general del libro	60
5.1.3.2. Presentación y definición del concepto de ortogonalidad	61
5.1.3.3. Ejemplos y ejercicios proporcionados por el texto	62
5.2. Descomposición Genética Preliminar	63
5.2.1. Estructuras iniciales	63
5.2.2. Construcción del concepto de Ortogonalidad	63
6. Recolección y análisis de datos	69
6.1. Análisis a priori de la entrevista	69
6.2. Análisis a posteriori de las preguntas de la entrevista	85
6.2.1. Acciones sobre Objetos concretos	85
6.2.2. Estructura intermedia entre la Acción y el Proceso	95
6.2.3. Estructura Proceso de ortogonalidad	102
7. Conclusiones	107
7.1. Descomposición genética refinada	107
7.2. Implicaciones didácticas	117
7.3. Reflexiones para futuras investigaciones	119
Referencias Bibliográficas	122

Lista de Figuras

Figura 1.	Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de un objeto matemático (Arnon et al, 2014)	28
Figura 2.	Construcción de Objetos abstractos a partir de acciones sobre Objetos concretos (tomado de Arnon et al., 2014, p. 154)	30
Figura 3.	Ciclo de Investigación de APOE (Arnon et al, 2014)	31
Figura 4.	Representación geométrica de u y v .	42
Figura 5.	Tomado de Poole (2011, p. 393)	44
Figura 6.	Tomado de Poole (2011, p.400)	44
Figura 7.	Tipos de Acciones sobre el concepto de ortogonalidad	64
Figura 8.	Representación de tres vectores en \mathbb{R}^3	66
Figura 9.	Construcción del Proceso de orgonalidad.	67
Figura 10.	Evidencias del trabajo realizado por los estudiantes en la pregunta 1a.	85
Figura 11.	Evidencias del trabajo realizado por ES4 en la pregunta 1a.	86
Figura 12.	Evidencias del trabajo realizado por ES1 en la pregunta 1a.	87
Figura 13.	Evidencias del trabajo realizado por ES5 en la pregunta 1a.	88
Figura 14.	Evidencias del trabajo realizado por ES4 en la pregunta 2.	90
Figura 15.	Evidencias del trabajo realizado por ES2 en la pregunta 1e.	96

Figura 16.	Evidencias del trabajo realizado por los estudiantes en la pregunta 1e.	98
Figura 17.	Evidencias del trabajo realizado por ES5 en la pregunta 1b.	100
Figura 18.	Evidencias del trabajo realizado por ES4 en la pregunta 4a.	100
Figura 19.	Evidencias del trabajo realizado por ES2 en la pregunta 4a.	101
Figura 20.	Evidencias del trabajo realizado por ES3 en la pregunta 4a.	102
Figura 21.	Descomposición genética refinada de ortogonalidad.	110
Figura 22.	Descomposición genética general del concepto de ortogonalidad.	112

Lista de Apéndices

	pág.
Apéndice A. Programa de álgebra lineal I	126
Apéndice B. Programa de álgebra lineal II	127
Apéndice C. Entrevista para álgebra lineal II	128
Apéndice D. Entrevista para Maestría en Matemáticas	130

Resumen

Título: Estructuras y mecanismos mentales asociados a la construcción del concepto de ortogonalidad: un modelo cognitivo desde la teoría APOE *

Autor: Brandon Andrey Moreno Solares **

Palabras Clave: Álgebra lineal, Ortogonalidad, Teoría APOE, Descomposición genética, Estructuras mentales.

Descripción: En este documento se presentan los resultados de una investigación de corte cualitativo, desarrollada por medio de un estudio de casos. Esta investigación se realiza con estudiantes de un primer curso de álgebra lineal con el fin de describir las estructuras y mecanismos mentales que permiten la construcción del concepto de ortogonalidad, sustentada bajo la perspectiva teórica de la teoría APOE.

Según las componentes del ciclo de investigación propuesto en la teoría APOE, se diseñó una descomposición genética hipotética basada en el análisis de libros de texto, la experiencia de los docentes y la literatura sobre el concepto de interés. Con base en la descomposición genética hipotética, se diseñaron tareas que fueron expuestas mediante una entrevista a cinco estudiantes de un primer curso de álgebra lineal. En cada una de estas tareas se realizó un análisis a priori en donde se describe la intención cognitiva y teórica de cada situación. Posteriormente, en el análisis de los datos se proporciona evidencia empírica sobre las estructuras y mecanismos mentales que interviene en la construcción del concepto de ortogonalidad.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Maestría en Educación Matemática. Directora: Solange Roa Fuentes, Doctora en Ciencias Especialidad Matemática Educativa.

Por último, se presenta una descomposición genética refinada que describe un posible camino para la construcción y comprensión del concepto de ortogonalidad.

Abstract

Title: Mental structures and mechanisms associated with the construction of the concept of orthogonality: a cognitive model from APOE theory. *

Author: Brandon Andrey Moreno Solares **

Keywords: Linear algebra, Orthogonality, APOS Theory, Genetic decomposition, Mental structures.

Description: This paper presents the results of a qualitative research, developed through a case study. This research is carried out with students of a first course of linear algebra with the purpose of describing the mental structures and mechanisms that allow the construction of the concept of orthogonality, sustained under the theoretical perspective of the APOE theory.

According to the components of the research cycle proposed in the APOE theory, a hypothetical genetic decomposition was designed based on the analysis of textbooks, teachers' experience and literature on the concept of interest. Based on the hypothetical genetic decomposition, tasks were designed and exposed through an interview to five students of a first course of linear algebra. In each of these tasks, an a priori analysis was performed describing the cognitive and theoretical intention of each situation. Subsequently, in the analysis of the data, empirical evidence is provided on the mental structures and mechanisms involved in the construction of the concept of orthogonality.

Finally, a refined genetic decomposition is presented that describes a possible path for the construction and understanding of the concept of orthogonality. understanding of the concept of orthogonality.

* Bachelor Thesis

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Directora: PhD. Solange Roa Fuentes.

Introducción

La presente investigación se preocupa por la construcción del concepto matemático de Ortogonalidad, el cual hace parte de un primer y segundo curso de álgebra lineal de estudiantes universitarios de primer año en algunos programas académicos tales como ingeniería eléctrica, ingeniería electrónica, licenciatura en matemáticas, matemáticas y física. Esta investigación se desarrolla teniendo como fundamento la teoría APOE (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktac, Roa-Fuentes, Trigueros y Weller, 2014) y busca en particular determinar cómo los estudiantes construyen y comprenden el concepto de ortogonalidad. Este concepto posee un alto grado de complejidad por su nivel de abstracción y el lenguaje requerido.

El concepto de ortogonalidad ha sido poco explorado en el campo de la Educación Matemática y en la línea de investigación de la Didáctica del Álgebra. Desde la teoría APOE, se han desarrollado diversos trabajos que involucran varios conceptos del álgebra lineal, pero hasta el momento no se han encontrado trabajos previos en torno a la ortogonalidad pese a que es un objeto matemático que se encuentra presente en el desarrollo de otros conceptos del álgebra lineal y en algunas aplicaciones que pertenecen a otros campos; por tal motivo, se considera pertinente investigar respecto a su enseñanza y aprendizaje.

Este documento está organizada en siete capítulos. En el capítulo 1 se encuentran los antecedentes, los cuales tienen que ver con las investigaciones que han desarrollado o involucrado el

concepto de ortogonalidad. En el capítulo 2, se describe la problemática, pregunta y objetivo de investigación de esta propuesta. En el capítulo 3, se presenta la teoría APOE (Arnon et. Al., 2014), como sustento teórico y metodológico de la investigación; se describen sus principales constructos teóricos y las relaciones entre ellos, así como las componentes del ciclo de investigación que guían los aspectos metodológicos, que corresponden a las fases descritas en el capítulo 4 de la metodología. El capítulo 5 describe el análisis teórico de libros de texto sobre el concepto de ortogonalidad y se propone una descomposición genética hipotética. En el capítulo 6 se encuentra la recolección y el análisis de los datos y por último, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones, implicaciones didácticas y reflexiones para futuras investigaciones.

1. Antecedentes

Dreyfus y Hillel (1998, 2005) realizaron una investigación que, según su ellos, para la construcción de significados relacionados con los conceptos de proyección y aproximación. Para la construcción de significados es necesario desarrollar una primera etapa llamada “perdida inicial de significados”; la cual, según los autores, “ocurre cuando un concepto familiar primero es generalizado y luego reinterpretado en contextos desconocidos” (p. 1). El concepto involucrado en esta investigación es proyección ortogonal; de esta manera, un concepto que se da por medio de otros conceptos tales como distancia y ortogonalidad y es comprendido primero en un contexto geométrico debe ser reinterpretado en un contexto desconocido; por ejemplo, en el espacio de las funciones continuas en un intervalo dado. Para esto, es necesario la noción “producto interno”, que es una generalización del producto punto en \mathbb{R}^n . A partir de la definición de Espacios con Producto Interno (EPI) es posible definir en términos más generales, otros conceptos como: proyección ortogonal, ortogonalidad, norma, distancia, entre otros. Una aplicación interesante de estos conceptos en este tipo de espacios, tiene que ver con la teoría de la aproximación. En particular, con el problema de encontrar la mejor aproximación de una función f mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

El trabajo de Dreyfus y Hillel se enfoca en el problema de encontrar la mejor aproximación de x^3 por medio de un polinomio de segundo grado. Además, se pide escribir x^3 como una combinación lineal de los polinomios que constituyen la base ortogonal de P_2 . Dentro de las reflexiones presentadas se encuentra que las nociones de ortogonalidad y proyección se presentan

según los tres modos de descripción propuestos por Hillel (2000); su enseñanza se da primero de manera abstracta (definición formal), luego a través de representaciones geométricas en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 y, finalmente basada en la resolución de ejercicios algebraicos. Este trabajo también sugiere una perspectiva diferente y poco usual al tratamiento de estos conceptos dentro de un curso tradicional de álgebra lineal. Por ejemplo, el espacio de funciones es de suma importancia en matemáticas y física; sin embargo, es tratado de manera superficial e introducido en el curso por su importancia y no por su utilidad (Dreyfus y Hillel, 2005). Por tanto, se tendrá en cuenta como una alternativa para la construcción del concepto de ortogonalidad.

Por otra parte, Carlson et al., (1993) formaron un grupo de educadores matemáticos llamado Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG, por sus siglas en inglés), cuyo propósito era estudiar las problemáticas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal. Este grupo generó un conjunto de cinco recomendaciones para un primer curso de álgebra lineal, para las cuales se tuvo en cuenta: aspectos pedagógicos y epistemológicos acerca del aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal; la experiencia de los docentes y algunas recomendaciones por personas pertenecientes a otros campos. Estas recomendaciones tienen que ver con: (i) El curso de álgebra lineal debe responder a las necesidades de las disciplinas de los alumnos, (ii) Considerar el curso de álgebra lineal como un curso orientado a matrices, (iii) Considerar las necesidades e intereses particulares de los alumnos, (iv) Uso de herramientas tecnológicas y, (v) un segundo curso de álgebra lineal debe ser prioridad para cada currículo de matemáticas. Dentro de la segunda recomendación, los autores destacan que un primer curso de álgebra lineal debe estar más enfoca-

do a la resolución de problemas que en el desarrollo de la abstracción; es decir, un curso menos abstracto, pero más práctico, lo cual se puede lograr a través de su orientación matricial. Por tal motivo, los autores proponen un plan de estudios que tiene por objetivo el dominio de los temas propuestos como centrales (álgebra matricial, sistemas de ecuaciones lineales, determinantes, propiedades de \mathbb{R}^n , valores y vectores propios y, ortogonalidad) y aumentar la capacidad de resolución de problemas. Respecto al concepto de ortogonalidad se encuentra:

Incluye los aspectos estándares con un fuerte énfasis en geometría: proyección ortogonal sobre un subespacio; ortogonalización de Gram-Schmidt e interpretación como una factorización QR; y soluciones por mínimos cuadrados de sistemas líneas inconsistentes, con aplicaciones para el ajuste de datos. (Carlson et al, 1993, p.44)

Posteriormente, Gueudet-Chartier (2004) investiga las contribuciones del uso de la geometría en el aprendizaje del álgebra lineal; un apartado de este trabajo está basado en el estudio de libros de texto referentes a los conceptos de ortogonalidad y producto punto. Esto, con el fin de observar el potencial y las limitaciones del uso de la geometría en la enseñanza del álgebra lineal. En dicho apartado, el autor destaca la carencia del aprendizaje de conceptos del álgebra lineal a partir de nociones intuitivas. Por ejemplo, el caso de la definición de ortogonalidad en espacios con producto interno que no tiene una noción intuitiva asociada que le permita a los estudiantes establecer un vínculo entre el álgebra lineal y la geometría. En esta investigación se invita a considerar las diferentes ramas de la matemática con el fin de mejorar la enseñanza del álgebra lineal y más aún la geometría, así conceptos como el de espacios con producto interno u ortogonalidad se podrían estudiar con éxito a través de este enfoque.

Bagley y Rabin (2013) realizaron un trabajo de investigación en torno a las formas de pensamiento en un curso de Álgebra Lineal cuando los estudiantes se enfrentan a un nuevo problema. Este trabajo busca identificar las estrategias de los estudiantes al resolver el problema, las facilidades y restricciones que posee cada una de estas formas de pensamiento y cómo estas son coordinadas por los estudiantes. Estos autores basados en su experiencia como docentes propusieron que los estudiantes de un curso de álgebra lineal deben desarrollar y transitar flexiblemente por tres formas de pensamiento que fueron denominadas como: pensamiento computacional, pensamiento abstracto y pensamiento geométrico. Esta investigación se desarrolló con un grupo voluntario de ocho estudiantes que pertenecían a un curso de álgebra lineal, a quienes se les realizaron entrevistas que giraban en torno al “Problema de Michelle”. Este problema consiste básicamente en encontrar una base para \mathbb{R}^4 a partir de dos vectores dados u y v . Durante este estudio se identificó que primaba el pensamiento computacional, aunque los otros dos tipos de pensamiento también estaban presentes en algunas de las respuestas.

Este problema puede ser solucionado de dos formas haciendo uso del concepto de ortogonalidad, la primera encontrando todos los vectores ortogonales a los vectores u y v , luego tomar dos de estos vectores para formar la base en \mathbb{R}^4 que se quiere. Para encontrar todos los vectores ortogonales a los vectores dados u y v basta con el encontrar el espacio nulo de la matriz 2×4 formada con estos dos vectores. La segunda solución consiste en encontrar una base ortogonal para \mathbb{R}^4 que incluya los vectores u y v por medio del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Una sugerencia del entrevistador fue solucionar el problema por medio de la ortogonalidad, los estudiantes intentaron este camino, pero al establecer un conjunto de ecuaciones no encontraron ninguna solución, ya que planteaban sustituciones circulares que conducían a afirmaciones vacías tales como $0 = 0$.

Respecto al concepto de ortogonalidad se evidenció que los estudiantes operaban de manera circular cuando intentaban resolver un sistema de ecuaciones. También se identificó que ellos pensaban que la única forma de producir vectores ortogonales era por el medio del proceso de Gram-Schmidt. Otro resultado interesante es que ningún estudiante intentó solucionar el problema a través de la ortogonalidad de manera espontánea, solamente lo hicieron cuando el entrevistador lo sugirió.

Al parecer existe una dificultad que tiene que ver con establecer relaciones entre los diferentes conceptos del álgebra lineal, por ejemplo, conocer que tener un conjunto de vectores ortogonales, implica que ese conjunto es linealmente independiente y por tanto forma una base para el espacio, lo cual conduce a una solución más rápida del problema. Por otra parte, cuando se está hallando el espacio nulo de una matriz también se están encontrando todos los vectores ortogonales a los vectores que componen la matriz. Esta falta de conexiones entre los conceptos del álgebra lineal tiene que ver con la falta de estructuras previas necesarias para la construcción de nuevos conceptos (Roa-Fuentes, 2012).

En esta misma línea de investigación, Appova y Berezovski (2013) estudian los errores más comunes que siguen presentes en un grupo de veintitrés estudiantes luego de cursar una asignatura llamada “Métodos lineales” (variación del curso tradicional de álgebra lineal). Su investigación también gira en torno a una tarea específica, la cual consiste básicamente en expresar un vector x como la suma de dos vectores, donde el primero debía ser paralelo a un vector y y el segundo ortogonal al mismo vector.

En esta tarea se identifican dos tipos de dificultades: la primera hace referencia a dificultades en la comprensión de los conceptos relacionados a vectores, tales como: longitud de un vector, producto punto, multiplicación escalar, suma y resta de vectores, donde se evidencia que los estudiantes no tienen esas nociones claras. La segunda, que es de interés en el presente trabajo, muestra una falta de comprensión e interpretación del concepto de ortogonalidad y proyección ortogonal. En particular, uno de los errores comunes que se encontró en los trabajos de los estudiantes tiene que ver con la interpretación errónea de la proyección como un escalar y no como un vector; esto puede darse por la falta de comprensión o la confusión en la notación que involucra dicho concepto. Por otra parte, la ausencia de representaciones geométricas estuvo presente en todo el trabajo de los estudiantes.

Otra aplicación para el concepto de ortogonalidad y de espacios con producto interno es investigada por Caglayan (2018). Este autor estudia sobre la comprensión que pueden desarrollar los estudiantes sobre los polinomios ortogonales de Hermite e identifica las formas creativas e

innovadoras donde se coordinan enfoques visuales y analíticos a través de un software de geometría dinámica. Mediante la exploración de las actividades planteadas en un software de geometría dinámica, los estudiantes obtuvieron una parte de la secuencia de los polinomios de Hermite y posteriormente se abordaron algunas propiedades y conceptos en términos de los polinomios de Hermite tales como ortogonalidad, desigualdad de Cauchy-Schwarz, desigualdad del triángulo, teorema de Pitágoras, ortonormalidad, entre otros.

Los trabajos descritos desarrollan diferentes aportes respecto a la comprensión del concepto de ortogonalidad. En ellos, se identifican algunas dificultades relacionadas con el concepto y se proporciona un tratamiento diferente al usual en un curso de álgebra lineal mediante la aproximación de funciones; de esta manera, se evidencian las conexiones existentes entre la ortogonalidad y otros conceptos.

2. Problema de investigación

El álgebra lineal es una de las asignaturas del ciclo básico universitario de los programas de ingeniería y ciencias. Recientemente, la investigación de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal ha adquirido un mayor interés y, en la actualidad, se encuentra una gran variedad de trabajos que muestran su importancia, dificultades asociadas a su enseñanza y aprendizaje y, estudios para la comprensión de conceptos específicos. Existen dos aspectos fundamentales que hacen del álgebra lineal una asignatura de gran dificultad y con un alto nivel de complejidad, estos tienen que ver con la naturaleza abstracta del área en sí misma y el lenguaje o notación involucrado. La ortogonalidad es un concepto bastante abstracto y complejo que hace parte, en la mayoría de casos, de un segundo curso de álgebra lineal que solo está presente en algunos programas académicos de ingenierías y ciencias exactas; lo cual contradice las recomendaciones dadas por el grupo de educadores matemáticos LACSG, quienes proponen que el concepto de ortogonalidad se debe abordar en un primer curso de álgebra lineal junto con otros conceptos subyacentes tales como bases y matrices ortogonales, proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, entre otros conceptos (Harel, 2000).

Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000) mencionan que los estudiantes en cursos de álgebra lineal se sienten “en otro planeta” en el cual no pueden encontrar su rumbo. En el estudio realizado en 1987, Robert y Robinet diseñaron un cuestionario con el fin de identificar los conocimientos e ideas de los estudiantes en torno al álgebra lineal. Dos de las preguntas pedían a los alumnos realizar una descripción del curso y sus dificultades. En ellas se encontró que la dificultad

en la comprensión de un objeto particular (Espacio vectorial), la multitud de teoremas, propiedades y definiciones, el requerimiento de pruebas, rigor, precisión, lógica y cuantificadores y, la ausencia de conexiones entre los conocimientos previos y los nuevos son los principales obstáculos en la comprensión del álgebra lineal, denominado *obstáculo del formalismo*.

Desde otra perspectiva, Harel (2000) señala tres principios para el aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal: el principio de lo concreto, el principio de la necesidad y el principio de la generalización. El primer principio tiene que ver con la comprensión por parte de los estudiantes de los conceptos matemáticos partiendo de contextos concretos para ellos. El principio de la necesidad hace referencia a que el conocimiento se desarrolla a partir de necesidades, intelectualmente hablando; es decir, un estudiante aprenderá un concepto matemático cuando sienta la necesidad de usarlo para dar solución a una situación problema de su contexto. Finalmente, el principio de generalización tiene como objetivo permitir y fomentar en los estudiantes la generalización de los conceptos a partir de otros conceptos aprendidos en un modelo específico.

Posteriormente, Dorier y Sierpinska (2001) construyen una compilación de investigaciones alrededor del álgebra lineal, donde, se identifican dos tipos de dificultades: (i) dificultades conceptuales, las cuales corresponden a las dificultades asociadas a la naturaleza del álgebra lineal en sí misma, lo denominado por Hillel como “the nature of the beast”; y, (ii) dificultades cognitivas, las cuales hacen referencia al tipo de pensamiento que se necesita para la comprensión del álgebra lineal.

Por otra parte, se han realizado diferentes investigaciones estudiando la construcción y comprensión de algunos objetos matemáticos específicos del álgebra lineal, dentro de ellos se encuen-

tran los conceptos de espacio vectorial (Trigueros y Oktac, 2005; Oktac et al, 2006; Parraguez y Oktac, 2010); sistemas de ecuaciones lineales (Trigueros et al, 2007); base (Kú et al, 2008); transformación lineal (Roa-Fuentes y Oktac, 2010; Roa-Fuentes y Oktac, 2012); y, valores y vectores propios (Salgado y Trigueros, 2014). Como se puede observar, en los trabajos realizados con la teoría APOE en torno a los conceptos del álgebra lineal no se ha estudiado el concepto de ortogonalidad, lo cual es el interés de la presente investigación. Además, hay pocos trabajos desde otras teorías que involucran el estudio de la comprensión y la construcción de dicho concepto.

Luego de una extensa revisión bibliográfica, pocas investigaciones sobre la ortogonalidad se han encontrado en educación matemática, hasta el momento, ninguna de ellas bajo la mirada de la teoría APOE. Sin embargo, dicho concepto es de gran importancia dentro del álgebra lineal puesto que se encuentra presente y se relaciona con otros conceptos como se sintetizó en la sección anterior. Por lo tanto, se considera pertinente estudiar cómo se construye el concepto de ortogonalidad.

De acuerdo con lo expuesto en este documento se propone abordar la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué estructuras y mecanismos mentales necesita construir un estudiante para comprender el concepto de ortogonalidad? Con el fin de dar respuesta a esta pregunta, se plantea como objetivo de investigación:

Describir las estructuras y mecanismos mentales que desarrollan estudiantes universitarios de primer año sobre el concepto de Ortogonalidad, a través del diseño y desarrollo de dos componentes del ciclo de investigación (Análisis teórico y Recolección y análisis de datos).

3. Marco teórico

Para el desarrollo de esta investigación se usa la Teoría APOE (Arnon, et al., 2014), puesto que se considera que los constructos teóricos que la componen permiten describir los conocimientos previos y las estructuras que un estudiante necesita para construir el desarrollo y la comprensión del concepto ortogonalidad. Con base en dichos conocimientos y las relaciones que un individuo puede establecer entre estructuras y mecanismos mentales en contextos particulares, es posible diseñar y validar un modelo cognitivo de construcción del concepto de ortogonalidad. Por tanto, a continuación se realiza una descripción de la teoría y las componentes del ciclo de investigación que guía la metodología del presente trabajo.

3.1. Teoría APOE

APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es una teoría cognitiva creada por Dubinsky (1991). Esta se basa en el concepto de abstracción reflexiva de la teoría constructivista de Piaget; el cual es el eje fundamental para el desarrollo de los conceptos lógico-matemáticos de los niños. Dentro de la teoría piagetiana se destacan cuatro tipos de abstracción reflexiva: interiorización, coordinación, encapsulación y generalización. Más tarde Dubinsky (1991) reconsidera cada uno de estos aspectos en términos del pensamiento matemático avanzado y añade un quinto tipo de abstracción reflexiva: la reversión, la cual había sido considerada por Piaget, pero no de esta manera.

La teoría APOE busca describir cómo un individuo construye su comprensión de un objeto matemático específico mediante niveles establecidos denominados estructuras mentales. Estas

estructuras le permiten reflexionar sobre las construcciones que va a hacer o que necesita realizar para lograr la comprensión de un concepto matemático o una noción matemática. De esta manera, el individuo puede realizar un acercamiento al concepto de forma más reflexiva, proporcionando así, un enriquecimiento de las estructuras matemáticas que evolucionan gracias a la construcción de un nuevo objeto matemático. Para la construcción de dichas estructuras se requiere de los diferentes mecanismos mentales, que funcionan como puentes que permiten el tránsito entre una estructura y otra y, por tanto, conducen a la construcción de conocimiento matemático.

Existen dos términos importantes y de uso frecuente dentro de la teoría APOE: *concepción* y *concepto*. Éstos, aunque bastante relacionados entre sí, es necesario diferenciarlos; una concepción de cierto contenido matemático específico son las ideas que un estudiante desarrolla internamente luego de un proceso de reflexión; en cambio, el concepto de ese contenido matemático hace referencia a lo que ha sido establecido por una comunidad de matemáticos. A continuación, se hace una descripción detallada de las estructuras mentales y los mecanismos que las generan.

Acción: Es la primera estructura mental que un individuo puede lograr de un concepto matemático particular. Inicialmente un individuo puede asociar un nuevo concepto con la aplicación de procedimientos o cálculos matemáticos realizados secuencialmente (paso a paso); en esta estructura el individuo no puede saltarse ningún paso, necesita realizarlos todos. Es decir, una concepción Acción está asociada a las operaciones que un individuo realiza para transformar un objeto físico o mental; en este caso está condicionado o guiado por indicaciones puntuales. Aunque en principio

parezca una estructura mental simple, las acciones son el eje fundamental para la construcción de los conceptos matemáticos puesto que a partir de ella se desarrollan las estructuras posteriores, en términos de Meel (2003) “la piedra angular más importante para la comprensión es la Acción” (p. 244). Por ejemplo, en la construcción del concepto de vector un individuo puede tomar una cantidad específica de números y colocarlos en un orden particular.

Proceso: La repetición continua de una Acción y la reflexión sobre la misma conduce a un control interno de la Acción. De esta manera, un conjunto de acciones que era guiado por indicaciones puntuales se convierte en una construcción interna denominada Proceso. Una concepción Proceso de un concepto matemático le permite al individuo reflexionar acerca de las acciones que realiza, comprender y describir el procedimiento, y, omitir y revertir algunos pasos dentro de su ejecución. En el caso del concepto de vector, el individuo puede construir una n -tupla mentalmente así el valor de n no sea definido; puede considerar la existencia de n -tuplas en cualquier espacio vectorial. Además, el individuo se hace consciente de que el orden en que aparecen los elementos del vector no puede cambiar. Los procesos pueden ser construidos a través de tres mecanismos mentales, la interiorización, la coordinación y la reversión; lo descrito en las líneas anteriores corresponde al mecanismo de interiorización, por lo tanto, se dice que las acciones interiorizadas son procesos. La coordinación entre diferentes procesos conduce a la construcción de nuevos procesos.

Objeto: Los procesos son considerados como estructuras dinámicas, de ello que una concepción Objeto de un concepto matemático se da cuando un individuo logra transformar una es-

estructura dinámica en una estructura estática (Objeto). De esta manera, el individuo es capaz de establecer nuevas acciones y procesos (transformaciones) sobre esa estructura estática u objeto construido. Una vez que esto sucede, se dice que el individuo ha encapsulado el Proceso en un Objeto. La comparación o la realización de operaciones binarias con vectores son las acciones que un individuo puede realizar luego de que el Proceso de formación de un vector se encapsule en un Objeto (Arnon et al., 2014). El mecanismo de desencapsulación permite que el individuo regrese sobre el Proceso que dio origen a un Objeto determinado. La investigación sobre diferentes conceptos matemáticos desde la perspectiva APOE ha mostrado que dicho mecanismo es fundamental a la hora de establecer relaciones entre Objetos construidos previamente y nuevos Procesos.

Esquema: Esta es la estructura mental más compleja, pocas veces es conseguida y es tema de estudio actual en diversas investigaciones. Un esquema es una estructura dinámica que está en constante evolución, está compuesta por acciones, procesos, objetos y otros esquemas. Dicha composición está a disposición de cada individuo que tenga una concepción Esquema para ser usada según la situación matemática y la capacidad que posea cada uno; la evolución de los esquemas está ligada a la experiencia de cada individuo resolviendo problemas matemáticos. Un esquema también puede ser visto como una estructura estática o un Objeto puesto que se pueden realizar transformaciones que lo involucren.

La descripción de las estructuras se sintetiza a través siguiente figura 3.1, en donde se muestran las relaciones entre las estructuras y los mecanismos mentales, así como el proceso de cons-

trucción del conocimiento matemático.

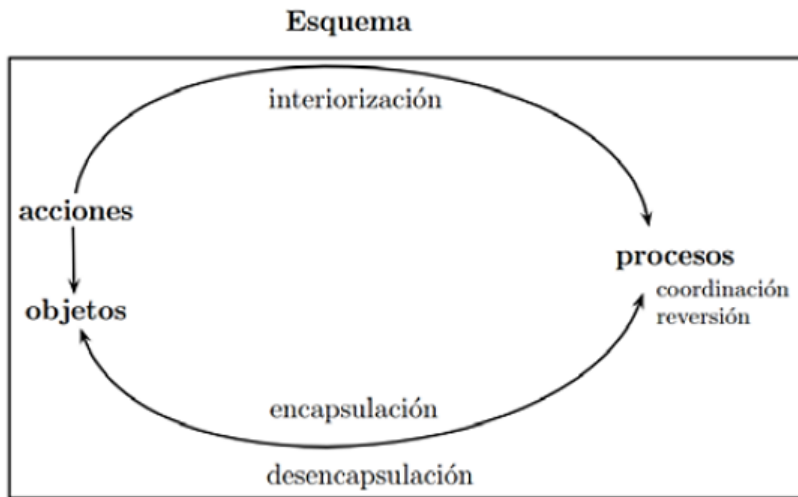


Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de un objeto matemático (Arnon et al, 2014)

Se puede observar que desde la teoría APOE el conocimiento matemático se origina con la aplicación de acciones; de transformaciones sobre los objetos físicos o mentales previamente contruidos por parte de un individuo; la interiorización de las acciones conduce a una reflexión sobre ellas y, por tanto, a una apropiación interna de las mismas, de esta manera se produce un Proceso sobre determinado concepto. El Objeto se logra a través de la encapsulación, esto es, comprender el Proceso como una estructura estática con la cual se pueden realizar acciones. La desencapsulación es el mecanismo por el cual el individuo regresa al Proceso que dio origen a un Objeto mental. Finalmente, un Esquema es un conjunto de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que el estudiante puede usar para dar solución a una situación problema. El nivel de comprensión de un individuo dependerá de su habilidad para establecer relaciones entre las diferentes construcciones

mentales (Arnon et al, 2014).

Un aspecto fundamental de esta teoría es que parte de la idea de que todo objeto o concepto matemático puede ser comprendido por un individuo si éste posee las estructuras previas necesarias (Arnon et al, 2014, p. 25). Por tanto, se requiere del diseño de un modelo cognitivo denominado descomposición genética; el cual es un camino que describe cómo un concepto matemático puede llegar a ser comprendido por un individuo. Dicha descomposición genética es el punto de partida para el diseño de actividades que favorezcan tanto el trabajo del profesor como el de los estudiantes, tales actividades deben promover cada una de las construcciones propuestas para la comprensión del concepto y de esta manera validar el modelo establecido; en caso de que el modelo no funcione deber ser refinado y repetir el ciclo hasta que la nueva descomposición genética sea un modelo que dé cuenta del aprendizaje del concepto deseado.

En particular en esta investigación se parte de la idea de incluir dentro de la construcción de conceptos matemáticos avanzados la aplicación de Acciones sobre Objetos concretos propuesta por Arnon et al (2014). En el caso del álgebra lineal González y Roa-Fuentes (2017) los Objetos Concretos han sido interpretados como las representaciones geométricas de vectores como flechas; más recientemente Ballesteros (2021), plantea dentro de la misma estructura aquellas interpretaciones de los vectores que incluyen valores específicos. Como se muestra en la siguiente figura la construcción de Objetos abstractos parte de la aplicación de Acciones sobre Objetos concretos previamente construidos por el individuo y que una vez se completa el Ciclo resultan en nuevos

Objetos Abstractos.

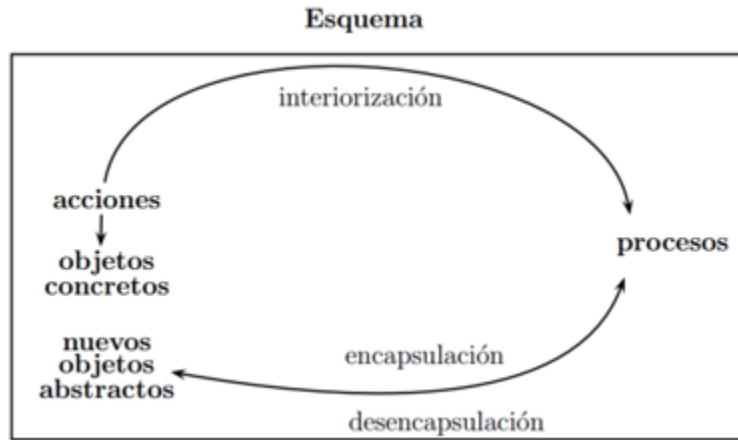


Figura 2. Construcción de Objetos abstractos a partir de acciones sobre Objetos concretos (tomado de Arnon et al., 2014, p. 154)

Los Objetos concretos son entendidos desde la perspectiva de Piaget como todo objeto físico o mental sobre el cuál un individuo puede realizar transformaciones. Por ejemplo, en el caso de la perpendicularidad, dado un polígono en su representación gráfica, un individuo puede determinar cuáles de sus lados son o no perpendiculares ya sea por un asunto de percepción visual o a partir de la medición de ángulos, entre otras formas de determinar dicha cualidad. Esto estará condicionado por su experiencia en abordar diferentes situaciones matemáticas. Como se mostrará en el desarrollo de esta investigación, la reflexión sobre qué es concreto y cómo puede o no potenciar la construcción de formas abstractas de los conceptos matemáticos, persiste y resulta e interés para el desarrollo de nuestra disciplina.

3.2. Paradigma de Investigación

Como se mencionó en la introducción de esta sección, la teoría APOE cuenta con un paradigma de investigación que consta de tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de instrumentos, y recolección y análisis de datos. En la figura 4.2 se muestran las tres componentes y cómo estas están relacionadas entre sí.

Análisis teórico: La investigación inicia con un estudio teórico sobre el objeto matemático que

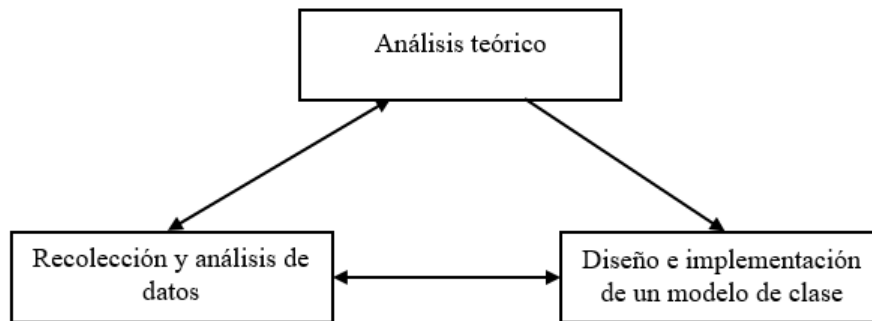


Figura 3. Ciclo de Investigación de APOE (Arnon et al, 2014)

se desea comprender, esta componente se desarrolla teniendo en cuenta los siguientes insumos: (i) análisis de libros de texto, (ii) dificultades identificadas desde otras perspectivas teóricas de la disciplina, (iii) la experiencia de los investigadores como estudiante y docente y, (iv) análisis histórico-epistemológico del concepto de interés. Asiala et al., (1996) plantea dos preguntas asociadas a esta primera fase del paradigma de investigación; “¿Qué significa comprender un concepto? y, ¿cómo esa comprensión puede ser construida por un estudiante?”

Por lo tanto, el propósito del análisis teórico es proporcionar un modelo cognitivo que de

cuenta de las construcciones mentales que un individuo necesita para lograr comprender un concepto matemático específico, este modelo es denominado como descomposición genética preliminar. Es importante aclarar que se habla en términos de un modelo cognitivo o una descomposición genética puesto que ésta no es única, como se mencionó en el apartado anterior, una descomposición genética es un camino viable para la comprensión de un concepto matemático, pero la construcción de dicho camino depende de las estructuras mentales previas que se consideren necesarias, o de la experiencia de los individuos. De esta manera, es posible afirmar que la descomposición genética es el eje fundamental del ciclo de investigación; una vez se obtiene, permite avanzar a las etapas posteriores del ciclo hasta completarlo, dando como resultado una descomposición genética refinada. Cuanto más se repita este proceso se obtendrán descripciones más finas de las construcciones mentales necesarias para la comprensión de un determinado concepto. (Roa-Fuentes & Oktaç, 2012).

Diseño e implementación de un modelo de clase: El diseño de actividades permite validar la descomposición genética propuesta o remodelarla en caso de ser necesario. Cada una de las actividades propuestas dentro de la investigación debe estar orientada hacia el desarrollo de todas y cada una de las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética preliminar (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010).

Recolección y análisis de datos: Una vez diseñada la descomposición genética del objeto matemático estudiado se debe proporcionar evidencia empírica que permita la remodelación o

validación de dicha descomposición genética; en caso contrario la descomposición genética permanecerá únicamente como una hipótesis. (Arnon et al, 2014) también señalan que el propósito de esta fase debe responder a dos preguntas: ¿Los estudiantes hicieron las construcciones mentales descritas en la descomposición genética? y, ¿qué tan bien construyeron los estudiantes el concepto? Existen diferentes tipos de datos que proporcionan información suficiente para responder a estas dos preguntas, Asiala et al (1996), por ejemplo, proponen tres formas para la recolección de estos datos: cuestionarios escritos previamente diseñados; entrevistas profundas enfocadas en el objeto matemático de interés y; una combinación de instrumentos escritos y entrevistas.

4. Método de Investigación

La presente investigación es de corte cualitativo ya que está enfocada en la descripción de las construcciones mentales que un estudiante debe realizar para comprender el concepto de ortogonalidad. Este tema es opcional en el programa de Álgebra Lineal I y obligatorio en el programa de Álgebra Lineal II (Anexo 1), de la Universidad Industrial de Santander. Esta investigación se desarrolla con un grupo de estudiantes de álgebra lineal I.

Este grupo está formado por 32 estudiantes de programas académicos correspondientes a ingenierías o ciencias exactas que están cursando álgebra lineal I por segunda, tercera o cuarta vez. Dado que el plan de área de la asignatura es opcional, todos los estudiantes no han visto el mismo contenido; sin embargo, todos han explorado el concepto de ortogonalidad en algún momento. Con base en el rendimiento en un taller aplicado sobre el concepto a tratar se seleccionan 5 estudiantes.

Como se mencionó en el capítulo anterior, esta investigación está guiada por dos componentes del Paradigma de Investigación dado por la teoría APOE (Arnon et al, 2014), análisis teórico y recolección y análisis de datos, que se constituyen en las etapas de la investigación. A continuación, se describe en términos generales cómo se desarrolla cada una de las componentes dentro de la investigación.

Análisis teórico: Teniendo en cuenta lo propuesto por Asiala (1996) para esta primera

componente del Paradigma de Investigación, se plantean las siguientes preguntas: (i) ¿Qué significa comprender el concepto de ortogonalidad? y, (ii) ¿Cómo se puede construir la comprensión de dicho concepto en estudiantes universitarios? Para dar respuesta a estas preguntas se propone diseñar un modelo cognitivo con base en la experiencia de los autores de esta investigación como estudiantes y profesores. Por otra parte, se realiza un análisis de tres libros de texto (Álgebra lineal: una introducción moderna, Poole 2011; Álgebra lineal para estudiantes de ingeniería y ciencias, Del Valle 2011; y Linear algebra, Hoffman & Kunze 1971) teniendo en cuenta los constructos teóricos de la teoría APOE y tres de los cuatro criterios establecidos por Campos (2017) para el análisis de libros de texto; estos son: 1). Estructura general del libro de texto, 2). Presentación y definición del concepto de ortogonalidad y, 3). Ejemplos y ejercicios proporcionados por el texto respecto al concepto de ortogonalidad. Finalmente, se tienen en cuenta los aspectos presentados por la Didáctica del Álgebra Lineal respecto al concepto de estudio y a conceptos asociados o que se consideren importantes para su construcción. Este modelo cognitivo es denominado por la teoría APOE como descomposición genética preliminar o descomposición genética hipotética, que da cuenta de las estructuras y mecanismos mentales previos que un estudiante debe construir para la comprensión del concepto de ortogonalidad. Esta descomposición genética es mucho más que la descripción de una secuencia de enseñanza o un listado de operaciones que un estudiante debe realizar (Arnon et al, 2014). Este análisis es considerado el corazón de la teoría APOE, incluye la descripción profunda de las estructuras y mecanismos mentales que los estudiantes pueden realizar, en este caso, sobre el concepto de ortogonalidad.

En esta etapa también se define de qué manera se aborda el concepto de ortogonalidad; en particular, el análisis de los libros de texto contribuye en la selección de la postura que asume la investigación. Es decir, el interés es determinar qué teoremas, propiedades, definiciones y notaciones intervienen en la construcción del concepto. Adicionalmente, hacia dónde debe dirigirse la enseñanza del concepto de ortogonalidad y qué tareas favorecen esta enseñanza.

Recolección y análisis de datos: Esta componente se encuentra estrechamente relacionada con la anterior, puesto que se toma como punto de referencia la descomposición genética preliminar con el fin de diseñar e implementar una actividad cuyo propósito es evaluar la comprensión de los estudiantes respecto al concepto estudiado para seleccionar aquellos con mejor desempeño académico; es decir, aquellos estudiantes que evidencien mayor dominio del concepto de ortogonalidad; esto se debe a que el interés de la investigación es estudiar cómo se construye este concepto para dar cuenta de la comprensión del mismo.

Posteriormente, se realiza una entrevista compuesta por cinco tareas a los estudiantes seleccionados. Cada una de las tareas que hacen parte de la entrevista está acompañada de un análisis a priori con el fin de poseer elementos importantes que permitan direccionar a los estudiantes para obtener una mejor descripción de las estructuras mentales que construyen. Estas entrevistas se llevan a cabo en las instalaciones de la Universidad Industrial de Santander (UIS), en una oficina de la Escuela de Matemáticas donde son videograbadas para registrar y analizar con más detalle la actividad desarrollada por los estudiantes durante la entrevista.

En esta etapa se analizan los datos obtenidos de la implementación de los instrumentos descritos previamente. Los resultados (videograbaciones, hojas de cálculo) se analizan a la luz de la descomposición genética propuesta, de esta manera, las estructuras descritas allí se convierten en categorías de análisis. Mediante una confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posterior, se pretende encontrar las estructuras propuestas que no se evidenciaron en las construcciones de los estudiantes y las estructuras necesarias que no fueron consideradas con el fin de realizar los ajustes correspondientes para que la descomposición genética sea una mejor aproximación a la construcción del concepto de ortogonalidad. A esto se le conoce como refinamiento de la descomposición genética. De esta manera, el análisis se realiza caracterizando las estructuras y mecanismos mentales que los estudiantes tienen alrededor del concepto de ortogonalidad lo cual permite la validación de la pertinencia y viabilidad de la descomposición genética.

5. Análisis teórico

En este capítulo se desarrolla la primera componente del Paradigma de Investigación propuesto por la teoría APOE. Se describen las construcciones mentales (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) y los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación y desencapsulación) que puede realizar un individuo para construir el concepto matemático de ortogonalidad. Además, se diseña un modelo cognitivo llamado descomposición genética hipotética del concepto de ortogonalidad, con el fin de dar cuenta de estas construcciones y mecanismos necesarios para la comprensión de dicho concepto. Por otra parte, se espera que este modelo sirva como punto de referencia para el diseño de actividades y modelos de clase que involucren su enseñanza.

Para el desarrollo de esta componente se plantearon las siguientes preguntas:

1. ¿Qué significa comprender el concepto de ortogonalidad?
2. ¿Cómo puede un estudiante universitario construir dicho concepto?
3. ¿Qué conocimientos previos debe poseer un estudiante para la construcción del concepto de ortogonalidad?

A continuación, se realiza el análisis de tres libros de texto según los tres primeros criterios (estructura general de texto, presentación y definición del concepto y, ejemplos y ejercicios proporcionados por el texto respecto al concepto) para el análisis de libros propuestos por Campos (2017).

5.1. Análisis de libros de texto

5.1.1. Álgebra lineal: una introducción moderna, Poole (2011).

5.1.1.1. Estructura general del libro. Este libro está conformado por siete capítulos: vectores, sistemas de ecuaciones lineales, matrices, eigenvalores y eigenvectores, ortogonalidad, espacios vectoriales y, distancia y aproximación. Además, desarrolla otros conceptos adicionales en cinco apéndices con temas tales como notación matemática y métodos de demostración, inducción matemática, números complejos, polinomios y, tecnología bytes. Cada capítulo del libro se encuentra dividido en diferentes secciones, dentro de las cuales hay una dedicada a estudiar algunas aplicaciones de diversas disciplinas; otra al repaso del capítulo y una sección de exploración que incluye resultados importantes que no son el tema principal del libro, por ejemplo, producto cruz y determinantes. Según Harel (1987) existen dos enfoques para secuenciar el contenido del álgebra lineal, uno de ellos desarrolla técnicas computacionales antes que ideas abstractas, denominado como enfoque de computación a abstracción. El otro, enfoque de abstracción a computación, desarrolla las ideas abstractas antes que las técnicas computacionales. De acuerdo con esto, este texto tiene un enfoque computación-abstracción, además el autor menciona que este libro es compatible con las recomendaciones del Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG) puesto que se centra en lo concreto antes que lo abstracto.

El concepto de ortogonalidad es desarrollado principalmente en tres momentos. Inicialmente se introduce este concepto en la segunda sección del primer capítulo, donde se explora la idea

de ortogonalidad a través del producto punto en \mathbb{R}^n . Posteriormente, el capítulo cinco está dedicado al estudio de la ortogonalidad y conceptos subyacentes tales como conjuntos ortogonales, complemento ortogonal, proyección ortogonal, proceso de Gram-Schmidt, matrices ortogonales, entre otros. Esto únicamente en el espacio \mathbb{R}^n . Finalmente, en la primera sección del capítulo siete se generalizan estas ideas cuando se trabaja con espacios con producto interno. Allí se explora nuevamente la idea de ortogonalidad en \mathbb{R}^n cuando el producto interno ya no es el usual (producto punto). Dichas ideas también se estudian en otros espacios vectoriales tales como \mathbb{P}_n y el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$.

5.1.1.2. Presentación y definición del concepto de ortogonalidad. La sección 1.2 inicia con la definición de producto punto y menciona que este es un caso particular de una noción más general llamada producto interior, la cual se desarrolla en el capítulo siete. Seguido de esto se proporciona un teorema con las principales propiedades del producto punto. La sección continua definiendo otros conceptos a partir del producto punto tales como longitud, distancia y ángulo entre vectores. El concepto de ortogonalidad es introducido a partir de la definición de ángulo entre vectores y en el caso particular de \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 ; esto es, en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , dos vectores u y v distintos de cero son perpendiculares si el ángulo θ entre ellos es un ángulo recto; es decir,

$$\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \cos 90^\circ = 0,$$

por lo tanto $u \cdot v = 0$.

Durante la sección, el autor resalta la importancia y utilidad de estudiar la perpendicularidad en la geometría, por ello se generaliza esta idea para vectores en \mathbb{R}^n , donde se le llama ortogonalidad. Además, menciona que “el concepto de ortogonalidad es uno de los más importantes y útiles en álgebra lineal, y con frecuencia surge en formas sorprendentes”. (p. 26)

De acuerdo con la organización de los contenidos del texto, se puede ver que los conocimientos previos que el autor considera para desarrollar el concepto de ortogonalidad en este primer momento son: vectores, producto punto y ángulo entre vectores. Puesto que en esta sección del libro no se define otro producto interno más que el usual, no se discute la idea de que dos vectores pueden ser ortogonales aún si el ángulo formado entre ellos no es recto, geoméricamente hablando; esta es una discusión que se considera importante desarrollar ya que genera una ruptura entre lo algebraico y lo geométrico. Mostrando así, en términos de Hillel (2000) que los modos de descripción del álgebra lineal no siempre son equivalentes (ver ejemplo 1).

- Ejemplo 1: Considere el siguiente producto interno en \mathbb{R}^2 , $\langle u, v \rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2$. Los vectores $u = [2, 1]$ y $v = [-3, 4]$ son ortogonales puesto que

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= 2(2)(-3) + 3(1)(4) \\ &= -12 + 12 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Graficamente sucede lo siguiente:

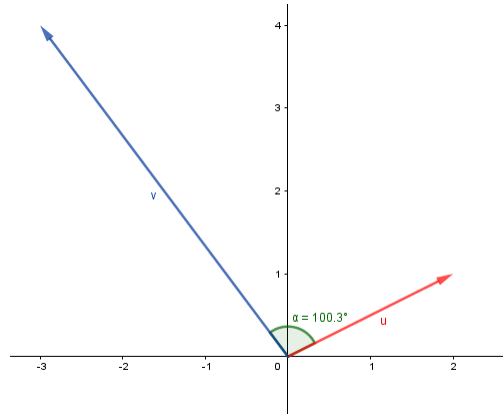


Figura 4. Representación geométrica de u y v .

El capítulo cinco está dedicado al estudio de la ortogonalidad de manera más detallada. Este capítulo inicia con una sección introductoria que, como se mencionó anteriormente, es opcional. Este capítulo busca generalizar la noción de proyección ortogonal desarrollada en el primer y tercer capítulo sobre un plano en \mathbb{R}^3 seguida de ciertos problemas que conducen a fórmulas análogas. Las siguientes secciones del libro abordan diversos conceptos subyacentes al de ortogonalidad desde el espacio \mathbb{R}^n . Para extender el concepto de ortogonalidad en \mathbb{R}^n se parte de la definición dada en el primer capítulo en términos del producto punto y se toman en cuenta dos propiedades que facilitan el trabajo con las bases estándar $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n ; estas son:

1. Dos vectores distintos cualesquiera en el conjunto son ortogonales.
2. Cada vector en el conjunto es unitario.

Con base en la primera propiedad se define lo que es un conjunto ortogonal de vectores y se establece relación con dos conceptos fundamentales del álgebra lineal: independencia lineal y base, puesto que un conjunto ortogonal de vectores implica que los vectores son linealmente in-

dependientes y si la cantidad de vectores es la misma que la dimensión del espacio entonces ese conjunto es una base para ese espacio; de manera más específica, es una base ortogonal. La segunda propiedad junto a la definición de conjunto ortogonal permite definir un conjunto ortonormal y base ortonormal. La sección finaliza con la definición de matriz ortogonal y algunos teoremas que la involucran.

En la segunda sección se toman como referencia algunos conceptos abordados en el primer capítulo con el fin de generalizarlos al espacio de \mathbb{R}^n , de manera que la noción de un vector normal a un plano se extiende a complementos ortogonales y la proyección de un vector sobre otro conduce al concepto de proyección ortogonal sobre un subespacio.

Para el caso del complemento ortogonal, se parte del hecho que para un vector normal n a un plano que pasa por el origen, es decir, un subespacio W de \mathbb{R}^3 es ortogonal a todo $w \in W$, al igual que lo es $gen \{n\}$. Por lo tanto, se tienen dos subespacios de \mathbb{R}^3 tales que todo vector de uno es ortogonal a todo vector del otro. Esta es la idea que conduce a la definición del complemento ortogonal de un subespacio W de \mathbb{R}^n . Por otra parte, el concepto de proyección ortogonal surge de la definición de la proyección de un vector v en \mathbb{R}^2 (ver figura 2); esto es,

$$\text{Proy}_u(v) = \left(\frac{u \cdot v}{u \cdot u} \right) u$$

Además, el vector $\text{perp}_u(v) = v - \text{proy}_u(v)$ es ortogonal a $\text{proy}_u(v)$, y v puede descomponerse como

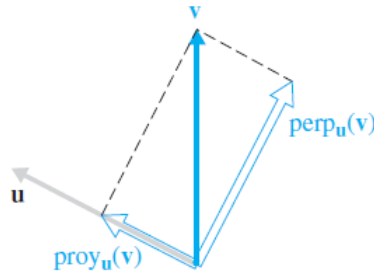


Figura 5. Tomado de Poole (2011, p. 393)

$$v = \text{Proy}_u(v) + \text{Perp}_u(v)$$

Si $W = \text{gen}\{u\}$, entonces $w = \text{proy}_u(v) \in W$ y $w^\perp = \text{perp}_u(v) \in W^\perp$. Por lo tanto, se tiene una forma de expresar a v como la suma de dos vectores, uno de W y el otro de W^\perp ; esto es, $v = w + w^\perp$. Esto conduce a la definición de proyección ortogonal en \mathbb{R}^n .

La sección 5.3 consiste en proporcionar un método para construir una base ortogonal u ortonormal para cualquier subespacio de \mathbb{R}^n , el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. El proceso de Gram-Schmidt es motivado a partir del problema de construir una base ortogonal para un subespacio $W = \text{gen}\{x_1, x_2\}$ de \mathbb{R}^3 , donde los vectores x_1 y x_2 forman una base para W .

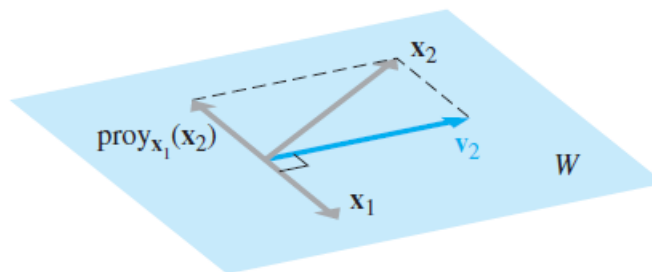


Figura 6. Tomado de Poole (2011, p.400)

De esta manera, tomando la componente ortogonal de x_2 a x_1 se puede construir un vector

v_2 ortogonal a x_1 . con el fin de formar la base ortogonal deseada; esto es,

$$\begin{aligned}v_2 &= \text{Perp}_{x_1}(x_2) = x_2 - \text{Proy}_{x_1}(x_2) \\ &= x_2 - \left(\frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 \cdot x_1} \right)\end{aligned}$$

El conjunto $\{x_1, x_2\}$ es un conjunto ortogonal de vectores en W . Por tanto, $\{x_1, x_2\}$ es un conjunto linealmente independiente y forma una base para W . Por medio de este ejemplo particular, el texto generaliza este método llamado, proceso de Gram-Schmidt.

En la sección 7.1 se extiende la noción de producto punto abordada a lo largo de todo el libro. Partiendo de la definición y propiedades del producto punto se define el producto interior y a través de esta nueva definición se construyen definiciones análogas de longitud, distancia y ortogonalidad en espacios vectoriales distintos a \mathbb{R}^n . Básicamente lo que hace el texto es generalizar cada uno de estos conceptos que habían sido definidos en términos del producto punto al producto interno; por ejemplo, la longitud o norma de un vector en \mathbb{R}^n que había sido definida como $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$ ahora se extiende a $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, siendo v un elemento de un espacio vectorial con producto interno cualquiera. De esta manera, también se redefinen otros conceptos trabajados en el capítulo 5 en términos del producto interior, conceptos tales como conjunto ortogonal, proyección ortogonal, proceso de Gram-Schmidt, entre otros.

Esta sección es bastante breve puesto que consiste en generalizar los conceptos que ya habían sido definidos; es decir, cambiar la operación bajo la cual estaban definidos dichos conceptos. Sin embargo, el autor menciona que lo que representan estos conceptos en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 no es lo mismo que en otro espacio vectorial bajo el producto interno. Por ejemplo, si V es el espacio de las funciones continuas en un intervalo cerrado, el hecho de que dos funciones f y g sean ortogonales ($\langle f, g \rangle = 0$) no significa que sus gráficas se intersequen en ángulos rectos.

El enfoque del autor en la presentación de los contenidos en el libro de texto es evidente, siempre parte de situaciones particulares en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 para posteriormente extender los conceptos a \mathbb{R}^n y más tarde a otros espacios vectoriales. Esto se hace con la intención de desarrollar cierta comprensión geométrica que según el autor, debe anteceder a las técnicas de cálculo.

Definición del concepto:

Durante todo el documento se presentan dos definiciones del concepto de ortogonalidad, la primera de ellas en el primer capítulo y la segunda en el séptimo. Estas definiciones son las siguientes:

1. Dos vectores u y v en \mathbb{R}^n son mutuamente **ortogonales** si $u \cdot v = 0$.
2. Sean u y v vectores en un espacio con producto interno V .
 - a) La **longitud** (o **norma**) de v es $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.
 - b) La **distancia** entre u y v es $d(u, v) = \|u - v\|$.
 - c) u y v son **ortogonales** si $\langle u, v \rangle = 0$.

La primera definición es únicamente para el espacio vectorial de \mathbb{R}^n y está dada en términos del producto punto, el cual es un caso particular del producto interno. Esta definición es introducida a través de la definición de ángulo donde se concluye que dos vectores son ortogonales si su producto punto es cero. En términos de la teoría APOE, para esta primera definición es necesario que los estudiantes posean una concepción objeto de vector puesto que es necesario realizar operaciones con ellos, en este caso la operación producto punto. Respecto al producto punto se requiere una concepción acción ya que solo es necesario operar los vectores bajo su definición, esto es, la suma del producto de sus correspondientes componentes, en caso de ser cero los vectores serían perpendiculares u ortogonales. Finalmente, sobre el ángulo entre vectores también es necesaria una concepción acción que indica que si el ángulo entre dos vectores es recto entonces los vectores son ortogonales.

Por el contrario de la primera definición, la segunda es introducida netamente de manera teórica como una generalización del producto punto, el tercer ítem es el de interés para esta investigación. Esta definición requiere de un mayor nivel cognitivo. Al igual que en la primera definición, un estudiante debe estar en un nivel objeto de vector debido a que el producto interno involucra operaciones entre estos elementos de un espacio vectorial V . Además, estos elementos tienen diferente naturaleza dependiendo del espacio vectorial en el que se encuentren, ya no son únicamente n -tuplas con entradas reales. Asimismo, el concepto de espacio vectorial juega un papel fundamental en esta definición. El espacio vectorial es quien determina la naturaleza de los elementos con los cuales se opera y por consiguiente se determina la condición de ortogonalidad, por lo tanto se

considera que un estudiante debe estar en una concepción proceso de dicho concepto. En lugar de una concepción acción de producto punto como en la primera definición, ahora es necesaria una concepción proceso del producto interno ya que es posible definir más de un producto interno en un mismo espacio vectorial y que no todos los productos que se definen son productos internos, estos deben satisfacer cuatro condiciones. Por último, la idea de que dos vectores ortogonales forman un ángulo recto se desvanece en esta definición, puesto que el concepto evoluciona al involucrar cualquier espacio con producto interior, donde la geometría euclidiana no tiene el mismo sentido.

5.1.1.3. Ejemplos y ejercicios proporcionados por el texto. A continuación se presenta un análisis de algunos de los ejemplos y ejercicios propuestos por el libro de texto que involucran directa o indirectamente el concepto de ortogonalidad. Al igual que en la presentación del concepto, este análisis se realiza en tres momentos: sección 1.2, capítulo 5 y sección 7.1. Es importante mencionar que no se analizan todos los ejemplos y ejercicios que presenta el texto, por tanto, se toman aquellos que se consideran más importantes.

Sección 1.2: Longitud y ángulo: el producto punto.

- Ejemplo 1: Este primer ejemplo se proporciona inmediatamente después de la definición de ortogonalidad, consiste en determinar si dos vectores dados $u = [1, 1, -2]$ y $v = [3, 1, 2]$ son ortogonales. En efecto, $u \cdot v = 3 + 1 - 4 = 0$.

Este ejemplo únicamente requiere una concepción acción del concepto de ortogonalidad puesto que para su resolución basta con calcular el producto punto entre los dos vectores de \mathbb{R}^3 .

- Teorema 1: Para todos los vectores u y v en \mathbb{R}^n , $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ si y solo si u y v son ortogonales.

Demostración: de un ejemplo anterior se obtuvo que $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u \cdot v) + \|v\|^2$ para todo vector u, v en \mathbb{R}^n . Por tanto, $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ si y solo si u y v son ortogonales.

Sección 5.1: Ortogonalidad en \mathbb{R}^n .

- Ejemplo 2: Demuestre que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto ortogonal en \mathbb{R}^3 si

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para determinar si ese conjunto de vectores es ortogonal se debe verificar que los vectores son ortogonales dos a dos; esto es, $v_1 \cdot v_2 = 0$, $v_2 \cdot v_3 = 0$ y $v_1 \cdot v_3 = 0$. Este ejemplo requiere de una concepción acción de ortogonalidad puesto que solo involucra un cálculo entre vectores; la acción consiste en realizar el producto punto entre vectores para determinar si el conjunto de vectores es ortogonal.

- Ejemplo 3: Encuentre una base ortogonal para el subespacio W de \mathbb{R}^3 dado por

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x - y + 2z = 0 \right\}$$

Este es un ejemplo interesante puesto que hasta este momento aún no se ha descrito el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, por lo cual en términos del autor "se encontrará la base ortogonal mediante fuerza bruta"(p. 381). Esto es, encontrar un conjunto de vectores linealmente independientes que generen el subespacio W y sean ortogonales entre sí. Lo primero que se hace es encontrar una base para W , como W es un plano cualquier base para este va a estar conformada por dos vectores u y v . Sin embargo, u y v no necesariamente son ortogonales, por tanto es necesario construir un tercer vector w en W tal que $w \cdot u = 0$ o $w \cdot v = 0$. De esta manera, una base ortogonal para W es $\beta_1 = \{u, w\}$ o $\beta_2 = \{v, w\}$. Se considera que este ejemplo requiere de una concepción proceso de ortogonalidad ya que un estudiante debe reflexionar sobre las condiciones que debe tener un conjunto de vectores para formar una base ortogonal y reconocer que se debe construir un tercer vector para cumplir dichas condiciones, lo cual no es una indicación directa del enunciado del problema.

- Ejemplo 4: Encuentre las coordenadas de $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ con respecto a la base ortogonal del ejemplo 2.

El objetivo de este ejemplo es hacer uso de un teorema proporcionado en esta sección que menciona que un vector w de un subespacio W puede ser representado de una única manera $w = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k$ en términos de una base ortogonal $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ para W , donde

$$c_i = \frac{w_i \cdot v_i}{v_i \cdot v_i} \text{ para } i = 1, \dots, k$$

Por tanto, se considera que este ejemplo requiere únicamente de una concepción acción ya que solo se debe aplicar el teorema para encontrar los respectivos escalares c_1, c_2, c_3 tal que $w = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ y de esta manera

$$[w]_{\beta} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Al igual que el ejemplo anterior, los siguientes ejemplos que proporciona el texto requieren únicamente de acciones puesto que hay responder a indicaciones puntuales a través de una definición o de un teorema, por ejemplo verificar si un conjunto de vectores es un conjunto orto-

normal o partiendo de una base ortogonal construir una base ortonormal. Por tal motivo, éstos no se describen de manera detallada.

Sección 5.2: Complementos y proyecciones ortogonales.

- Ejemplo 5: Sea W el subespacio de \mathbb{R}^5 generado por

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Encuentre una base para W^\perp .

El argumento que el autor usa para resolver este ejemplo es que el subespacio W generado por w_1, w_2, w_3 es igual al espacio columna de la matriz formada por estos vectores como columna. Luego, por un teorema que menciona que si A es una matriz de $m \times n$, entonces $W^\perp = (\text{col}(A))^\perp = \text{nul}(A^T)$. De esta manera, usando A^T se encuentra $\text{nul}(A^T) = W^\perp$ y por tanto, una base para este subespacio. Conocer el teorema no es suficiente para que un estudiante resuelva de manera eficiente este problema, puesto que se deben considerar las condiciones e igualdades que permiten abordar este problema de otra forma y en consecuencia, llegar al resultado deseado. Por tal motivo, se considera que este ejercicio requiere de una concepción proceso de ortogonalidad, con el fin de

hacer uso de los teoremas necesarios y establecer relaciones con otros conceptos, en este caso, espacio columna, espacio nulo, base y complemento ortogonal.

- Ejemplo 6: Sea W el plano en \mathbb{R}^3 con ecuación $x - y + 2z = 0$ y sea $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Encuentre la proyección ortogonal de v sobre W y el componente ortogonal de w a W .

Enfretarse a este problema requiere de una concepción acción del concepto ya que consiste en aplicar un procedimiento que está dado por las definiciones de proyección ortogonal y componente ortogonal.

Sección 5.3: El proceso de Gram-Schmidt.

En esta sección se desarrollan dos ejemplos, el primero de ellos tiene que ver con encontrar una base ortonormal a partir de una base dada, para lo cual basta con la aplicación del proceso de Gram-Schmidt para encontrar una base ortogonal y luego normalizar cada uno de los vectores que conforman dicha base. El segundo ejemplo consiste en encontrar una base ortogonal de \mathbb{R}^3 que incluya a un vector v dado. En este caso, es necesario tomar dos vectores u y w tal que $\{u, v, w\}$ sea una base para \mathbb{R}^3 ; finalmente, se procede a ortogonalizar esta base mediante el proceso de Gram-Schmidt. Estos dos ejemplos requieren de una concepción acción de ortogonalidad puesto que para resolverlos basta con aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Sección 7.1: Espacios con producto interno.

Como ya se mencionó, en esta sección se presentan los conceptos de manera breve como una generalización de los mismos en la sección 1.2; esto es, se emplea una sola definición para longitud, distancia y ortogonalidad. De la misma forma se presenta un único ejemplo compuesto por tres incisos que ilustra cada uno de los conceptos de la definición, por tal motivo solo se considera el inciso que involucra la ortogonalidad.

- Ejemplo 7: Este ejemplo consiste en determinar si dos funciones dadas $f = x$ y $g = 3x - 2$ en $C[0, 1]$ son ortogonales con el producto interno usual en este espacio.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 x(3x - 2)dx = \int_0^1 (3x^2 - 2x)dx = [x^3 - x^2]_0^1 = 0.$$

Por tanto, f y g son ortogonales.

Aunque se involucren conceptos más avanzados como el espacio de las funciones continuas sobre un intervalo cerrado, producto interior e integral; se considera que este ejemplo solo requiere de una concepción acción ya que únicamente implica un cálculo (operación) y dos elementos específicos. La acción consiste en integrar el producto de las funciones f y g y determinar si son ortogonales.

- Teorema 2: Sean u y v vectores en un espacio con producto interno V . Entonces u y v son ortogonales si y solo si

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Demostración: Al igual que en la sección 1.2, de un ejercicio anterior se tiene que

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

Por tanto,

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \text{ si y solo si } \langle u, v \rangle = 0.$$

Al igual que en la sección 1.2 se presenta el teorema de Pitágoras pero en esta ocasión de la forma más general posible, su demostración se realiza haciendo uso de la ortogonalidad.

- Ejemplo 8: Construya una base ortogonal para \mathbb{P}_2 con respecto al producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

al aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, x, x^2\}$.

Este ejemplo consiste únicamente en aplicar el proceso de Gram-Schmidt con el fin de encontrar una base ortogonal $\{v_1, v_2, v_3\}$ a partir de la base $\{1, x, x^2\}$. Para ello, se considera que $v_1 = 1$, de esta manera

$$v_2 = x_2 - \frac{v_1, x_2}{v_1, v_1} v_1 \quad \text{y} \quad v_3 = x_3 - \frac{v_1, x_3}{v_1, v_1} v_1 - \frac{v_2, x_3}{v_2, v_2} v_2$$

Por tanto, realizando las respectivas cuentas se obtiene que $\left\{1, x, x^2 - \frac{1}{2}\right\}$ es una base ortogonal de \mathbb{P}_2 .

Este es un ejemplo netamente algorítmico, por lo cual se considera que requiere de una concepción objeto de vector por las operaciones que se deben realizar entre estos elementos, una concepción acción de producto interno para ejecutar esta operación según como está definida en el enunciado y una concepción acción de ortogonalidad para desarrollar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt e identificar que estos vectores resultado son ortogonales entre sí y por tanto forman una base ortogonal para este espacio.

5.1.2. Álgebra lineal para estudiantes de ingeniería y ciencias, Del Valle (2011).

5.1.2.1. Estructura general del libro. Este libro de texto está compuesto por seis capítulos principales: Matrices y sistemas lineales, matrices invertibles y determinantes, espacios vectoriales,

espacios con producto interior y espacios normados, transformaciones lineales, valores y vectores propios, y, aplicaciones. Además, incluye dos capítulos adicionales llamados uso de la tecnología y álgebra lineal numérica. Cada capítulo cuenta con diferentes secciones en donde se desarrollan los diversos conceptos del álgebra lineal y una sección dedicada a ejercicios resueltos y ejercicios propuestos.

El concepto de ortogonalidad se desarrolla en dos momentos, el primero en el capítulo 3, donde a lo largo de la sección 1 se define el producto interior en \mathbb{R}^2 y sus propiedades. Más tarde, en el capítulo 4, se dedica toda una sección al estudio de espacios con producto interno y el concepto de ortogonalidad.

5.1.2.2. Presentación y definición del concepto de ortogonalidad. El capítulo 3 inicia con el estudio de \mathbb{R}^2 , donde se definen algunos conceptos importantes tales como producto de un escalar por un vector, norma de un vector, distancia entre vectores y producto interior o escalar; además, de su interpretación geométrica. El concepto de ortogonalidad se desarrolla una vez definido el concepto de ángulo entre vectores, allí se establece que dos vectores son perpendiculares si y solo si su producto punto es cero, además, se generaliza esta idea a \mathbb{R}^n , donde surge la ortogonalidad.

El segundo acercamiento al concepto de ortogonalidad se da en el capítulo 4, donde inicialmente se define y estudian diferentes espacios con producto interior tales como \mathbb{R}^n , el espacio de

las funciones continuas, el espacio de las matrices cuadradas de orden 2, entre otros. Posteriormente, se extiende el concepto de ortogonalidad a un espacio con producto escalar a partir del propio producto interior, tal como se hizo en \mathbb{R}^n . De igual forma, el concepto de ortogonalidad es definido en términos del producto interior nulo de los vectores involucrados, luego de definir el ángulo entre vectores.

Definición del concepto:

En el documento se presentan dos definiciones del concepto de ortogonalidad, la primera de ellas en el capítulo 3 y la segunda en el capítulo 4. Estas definiciones son las siguientes:

1. Dos vectores u y v en \mathbb{R}^n son **ortogonales** (perpendiculares) si

$$u \cdot v = 0;$$

es decir, si el ángulo entre ellos es de 90° . Cuando u y v sean ortogonales lo denotaremos por $u \perp v$.

2. (Ortogonalidad en espacios con producto interno) Se dice que $\vec{u}, \vec{v} \in E$ (espacio con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$) son **ortogonales** (perpendiculares) si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Si \vec{u} y \vec{v} son ortogonales, escribiremos $\vec{u} \perp \vec{v}$.

De igual forma que en el análisis previo, la primera definición corresponde únicamente al espacio de \mathbb{R}^n mientras que la segunda corresponde a cualquier espacio con producto interno.

Asimismo, se considera que las estructuras previas también son las mismas, puesto que está involucrando los mismos conceptos y el mismo tipo de desarrollo.

5.1.2.3. Ejemplos y ejercicios proporcionados por el texto. A continuación se presenta un análisis de los ejercicios resueltos y propuestos por el texto que involucran el concepto de ortogonalidad.

Capítulo 3: Ortogonalidad en \mathbb{R}^n .

- Ejemplo 1: Encontrar la ecuación del plano que es ortogonal al vector $n = (-1, 2, 4)$ y pasa por el punto $u = (2, 1, 1)$.

Se considera que para resolver este tipo de ejercicios basta con realizar acciones sobre los vectores dados y conocer la ecuación que determina el lugar geométrico correspondiente al plano, esto es, $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$, donde (x_0, y_0, z_0) es un punto del plano y es ortogonal al vector $n = (a, b, c)$.

- Ejemplo 2: Encontrar el valor de b talque $(-1, b, 1, -2) \perp u$, donde $u = (-1, 3, 4, -2)$.

En este caso, se considera que un individuo requiere de una concepción Acción del concepto de ortogonalidad teniendo en cuenta el tipo de interpretación algebraica, puesto que es necesario y suficiente que $(-1, b, 1, -2) \cdot u = 0$ para determinar el valor de b .

- Ejemplo 3: Sean $u = (a_1, a_2, a_3)$ y $v = (b_1, b_2, b_3)$ cualquier par de vectores no paralelos de \mathbb{R}^3 . Encontrar el conjunto de vectores $w = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ que son perpendiculares tanto a u como a v .

Este ejercicio requiere de una concepción del proceso del concepto de ortogonalidad puesto que pone en juego establecer relaciones entre dicho concepto y otros conceptos del álgebra lineal, adicionalmente, se debe abordar desde una interpretación netamente algebraica y su respuesta estará dada de igual forma.

Capítulo 4: Espacios con producto interior.

En este capítulo no se encuentran ejemplos o ejercicios propuestos que involucren de manera directa el concepto de ortogonalidad. Sin embargo, se puede evidenciar que si se requiere de su comprensión para otro tipo de problemas tales como encontrar proyecciones o bases ortonormales. En este caso, se considera que para resolver este tipo de ejercicios basta con una concepción de la acción de la ortogonalidad.

5.1.3. Linear algebra, Hoffman & Kunze (1971).

5.1.3.1. Estructura general del libro. Este libro de texto está compuesto por diez capítulos (ecuaciones lineales, espacios vectoriales, transformaciones lineales, polinomios, determinantes, formas canónicas elementales, las formas racional y de jordan, espacios con producto interno, operadores sobre espacios con producto interno y formas bilineales) en los cuales se abordan los conceptos principales de un curso de álgebra lineal y una gran cantidad de ejercicios para cada uno de estos conceptos. En términos de los autores, un curso elemental de álgebra lineal que tome este texto como guía deberá cubrir los capítulos 1, 2, 3, 4, 5 con posibles excepciones de algunas secciones, y concluir con las primeras secciones del capítulo 6 junto con el capítulo 8.

Asimismo, este texto añade un apéndice que introduce y analiza ideas básicas de algunos conceptos y conocimientos previos que un estudiante debe tener para la comprensión de los conceptos propios del álgebra lineal.

5.1.3.2. Presentación y definición del concepto de ortogonalidad. El capítulo comienza definiendo el concepto de producto de interno y espacios con producto interno para luego discutir y definir otros conceptos tales como ángulo, longitud y ortogonalidad.

Definición: Sea α y β vectores en un espacio con producto interno V . Entonces α es ortogonal a β si $(\alpha | \beta) = 0$. Como esto implica que β es ortogonal a α , a menudo simplemente diremos que α y β son ortogonales. Si S es un conjunto de vectores en V , S se denomina **conjunto ortogonal** siempre que todos los pares de vectores distintos en S sean ortogonales. Un **conjunto ortonormal** es un conjunto ortogonal S con la propiedad adicional que $\|\alpha\| = 1$ para cada α en S .

Se puede observar una diferencia en el tratamiento del concepto respecto a los dos libros de texto abordados previamente y es el hecho de que en este caso, no se define primero la ortogonalidad en \mathbb{R}^2 ni tampoco se hace a partir del ángulo entre los dos vectores; al contrario, se presenta el concepto de ortogonalidad para cualquier espacio con producto interno y definido por medio de la operación producto interno. Es decir, se aborda desde lo general hacia lo particular.

5.1.3.3. Ejemplos y ejercicios proporcionados por el texto. Un ejemplo interesante que se menciona es que el vector (x, y) de \mathbb{R}^2 es ortogonal a $(-y, x)$ con respecto al producto interno canónico; puesto que, según la notación del propio texto,

$$((x, y) | (-y, x)) = -xy + yx = 0.$$

Sin embargo, si \mathbb{R}^2 está dotado del producto interno $((x_1, x_2) | (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2$, entonces (x, y) y $(-x, y)$ son ortogonales si, y solo si,

$$y = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{13})x.$$

Se considera que este ejemplo requiere de una concepción Proceso del concepto de ortogonalidad puesto que se involucran dos productos internos en un mismo espacio y se deben determinar las condiciones de los vectores ortogonales según cada producto interno. Un individuo debe ser conciente de que si el producto interno varía, las condiciones que definen los vectores ortogonales también deben variar y que un vector ortogonal según el primer producto interno dado no será ortogonal bajo el nuevo producto interno.

En las siguientes secciones no se encuentran más ejemplos o ejercicios que involucren el concepto de ortogonalidad de forma directa, por tanto, se considera que con una concepción Acción del mismo es posible resolver los ejercicios que lo involucran de manera indirecta, esto es, proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt o proyecciones ortogonales.

5.2. Descomposición Genética Preliminar

5.2.1. Estructuras iniciales. Para la construcción del concepto de ortogonalidad, un individuo debe poseer una concepción Objeto del concepto vector puesto que es necesario que vea a estos elementos como un todo y que pueda establecer operaciones (transformaciones) sobre ellos. En este caso, las operaciones que se realizan sobre los vectores están determinadas por el producto interno definido en el espacio vectorial del cual hacen parte estos vectores (producto punto). Además, es necesario que un individuo sea consciente de la existencia y la forma de un vector en diferentes espacios vectoriales. Por ejemplo, los elementos del espacio vectorial \mathbb{R}^n son n -tuplas de números reales denotados como $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]$.

Por otra parte, se considera que un individuo debe poseer una concepción Proceso de la operación producto interno (producto punto). Usualmente el concepto de ortogonalidad es se presenta en el espacio vectorial \mathbb{R}^n , donde está definido en términos del producto punto o producto escalar, el cual es un caso particular de un concepto más general llamado producto interno. Es importante que un individuo logre generalizar dicha operación y comprenda que ésta puede ser definida en diferentes espacios vectoriales y en diferentes formas incluso en un mismo espacio vectorial pero siempre debe cumplir con ciertas propiedades. Es importante mencionar que no existen investigaciones sobre el concepto de producto interno bajo la perspectiva teórica de APOE.

5.2.2. Construcción del concepto de Ortogonalidad. Con base en el análisis de los tres libros de texto, las construcciones previas anteriormente descritas y la experiencia de los investiga-

dores como estudiantes y profesores, se propone la siguiente descomposición genética preliminar para la construcción del concepto de ortogonalidad.

Este modelo cognitivo parte de la interpretación geométrica de perpendicularidad en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 para dar paso a la construcción del concepto de Ortogonalidad en \mathbb{R}^n .

Acciones Concretas, vectores perpendiculares: esta estructura se caracteriza por las transformaciones que un individuo puede realizar sobre un conjunto de vectores en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 para determinar si son o no perpendiculares. Las Acciones están definidas por el tipo de interpretación (geométrica, numérica o algebraica) que establece cada situación matemática. La tabla 1 plantea de manera puntual el tipo de Acciones que pueden aplicarse sobre una u otra interpretación de vectores en \mathbb{R}^2 .

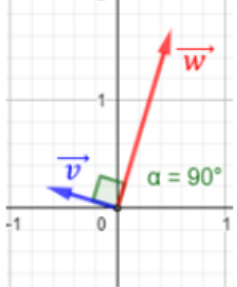
Interpretación geométrica	Interpretación numérica	Interpretación algebraica
 <p data-bbox="297 1465 605 1587">El individuo determina la medida del ángulo comprendido entre los vectores.</p>	<p data-bbox="630 1266 963 1329">¿Los vectores $u = (0, 7)$ y $v = (1, -2)$ son perpendiculares?</p> <p data-bbox="630 1360 963 1497">Las transformaciones en esta interpretación consisten en calcular el producto punto entre los vectores dados.</p>	<p data-bbox="987 1213 1320 1318">Encuentre todos los vectores que son perpendiculares al vector $u = (1, 1)$.</p> <p data-bbox="987 1350 1320 1549">Las Acciones consisten en determinar si dos vectores cuyas componentes involucren alguna variable o lenguaje algebraico son o no ortogonales.</p>

Figura 7. Tipos de Acciones sobre el concepto de ortogonalidad

En el caso de \mathbb{R}^3 , se considera que las Acciones son similares, aunque en mayor medida la

interpretación geométrica se condiciona por el medio (software o papel) en que son presentados los vectores. Es posible que las limitaciones de la representación geométrica de los vectores, genere la necesidad de hacer un tránsito de una interpretación a otra. Esta necesidad de transitar entre las diferentes interpretaciones de los vectores, puede generar el mecanismo de interiorización y dar paso a la construcción de un primer Proceso.

Proceso 1: Cuando un individuo se enfrenta a tareas que implican diferentes tipos de interpretación, puede establecer relaciones entre ellas a tal punto de interiorizar las Acciones relacionadas con cada tipo de interpretación en un Proceso que le permite transitar de una interpretación a otra. Este Proceso surge precisamente de la necesidad de abordar una situación en un contexto diferente al que fue dado inicialmente. Por ejemplo, frente a la siguiente tarea: "Determine si los vectores u, v y w que aparecen en la figura son perpendiculares", un individuo puede requerir definir una escala que le permita dar coordenadas específicas a los vectores para realizar el producto punto y determinar si son o no perpendiculares.

Proceso 2: Esta estructura consiste en generalizar las ideas relacionadas con perpendicularidad en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 hacia \mathbb{R}^n , en donde, la interpretación geométrica desaparece por completo; sin embargo, las ideas allí construidas deben permanecer en la mente del individuo. Por ejemplo, no es posible graficar o imaginar dos vectores perpendiculares en \mathbb{R}^4 , aún así, las relaciones geométricas se conservan, como el hecho de que el ángulo comprendido entre los dos vectores es un ángulo recto.

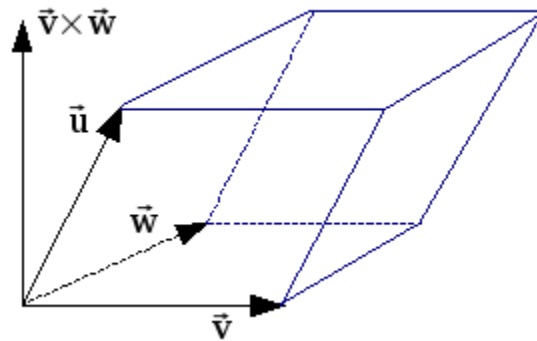


Figura 8. Representación de tres vectores en \mathbb{R}^3

Esta generalización sobre las estructuras permite que el concepto de perpendicularidad también se generalice, ya que en estos nuevos espacios no se cuenta con una interpretación geométrica para resolver tareas. Cualquier situación es analizada de forma numérica o algebraica. De esta manera, se puede determinar si un conjunto de vectores en \mathbb{R}^n es perpendicular por medio de un cálculo numérico o algebraico, que más tarde conducirá al concepto de ortogonalidad.

Proceso de ortogonalidad: Por medio del mecanismo de coordinación entre el Proceso 1 y el Proceso 2, un individuo puede construir un nuevo Proceso. Esto es, reflexionando sobre todas las características geométricas, numéricas o algebraicas que cumplen un par de vectores perpendiculares sin la necesidad de que estos estén definidos de manera concreta. Asimismo, dichas características se conservan en cualquier par de vectores perpendiculares en \mathbb{R}^n , lo que permite tener una visión más amplia sobre el concepto de perpendicularidad para dar paso a la ortogonalidad. Adicionalmente, si el individuo pone en juego estas ideas junto con otros conceptos del Álgebra

Lineal tales como independencia lineal, espacio generado y base puede establecer relaciones entre estos conceptos y el concepto de ortogonalidad; puede reflexionar sobre las implicaciones que genera la ortogonalidad en otros conceptos y establecer relaciones entre dichos conceptos del álgebra lineal, ver figura 8.

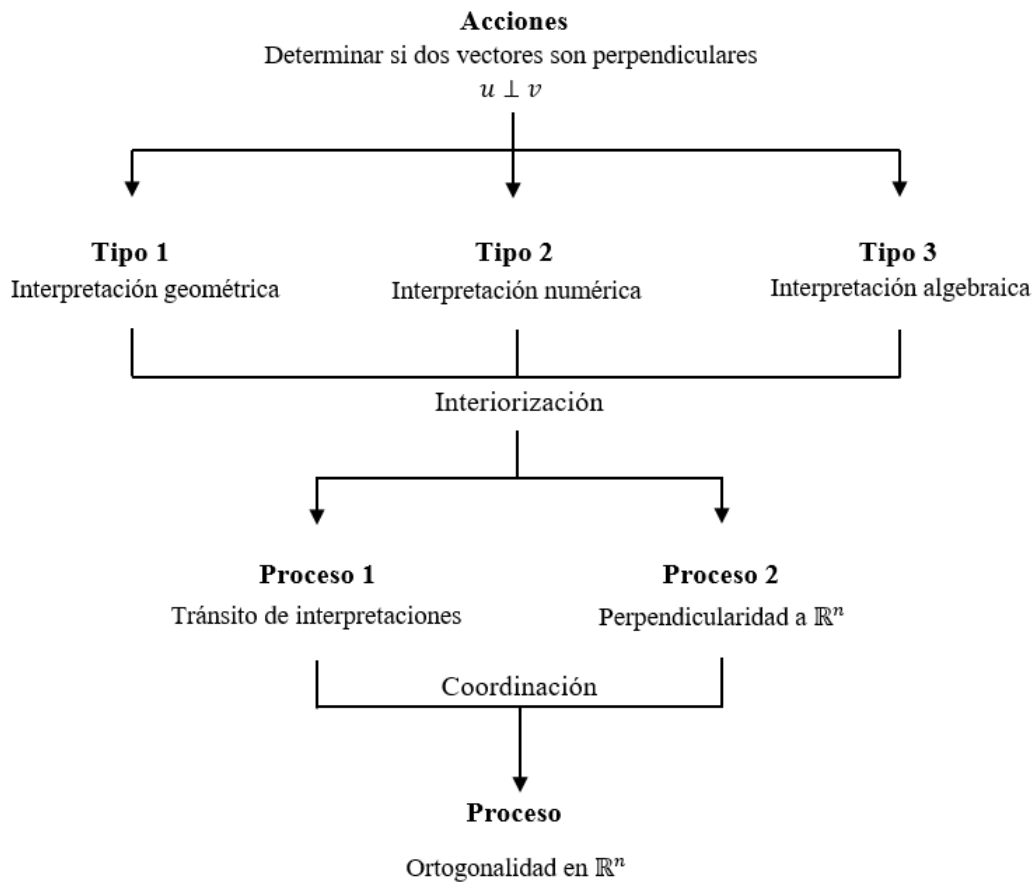


Figura 9. Construcción del Proceso de ortogonalidad.

Se considera que el concepto de perpendicularidad también puede ser generalizado por medio de unas transformaciones que denominamos como *Acciones abstractas*, en donde, a partir

de una estructura Acción de la producto interno, la estructura Proceso de espacio vectorial y la estructura Proceso de ortogonalidad un individuo puede determinar si un conjunto de vectores de un espacio vectorial cualquiera (matrices, funciones, polinomios) es ortogonal. Esta idea se retomará en el capítulo final del documento.

6. Recolección y análisis de datos

En este capítulo se presenta el desarrollo de la tercera componente del Paradigma de Investigación. Se describe de forma detallada cómo se llevó a cabo la implementación de actividades relacionadas al concepto de Ortogonalidad, la implementación de las entrevistas; además, se presenta el análisis a priori de las entrevistas y el análisis a posterior.

6.1. Análisis a priori de la entrevista

En esta sección se presentan las posibles respuestas que pueden ser consideradas por los estudiantes en cada una de las preguntas que conforman la entrevista y las construcciones mentales que pueden generar en dichas respuestas. Asimismo, se describe el objetivo de cada pregunta.

Tarea 1:

De los siguientes conjuntos de vectores, ¿cuáles son perpendiculares entre sí? Justifique su respuesta.

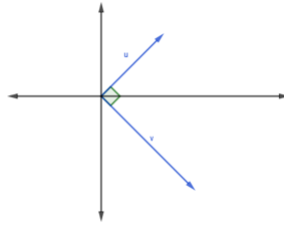
a. $u = (-2, 3)$; $v = (5, 1)$.

b. Vectores dados en GeoGebra:

c. $u = (-1, 2, 1)$; $v = (-2, 0, 2)$; $w = (3, -1, 5)$.

d. Vectores dados en GeoGebra.

e. $u = (4a, -b)$; $v = (2b, 8a)$.



f. $u = (3, -1)$; $v = (-3, -9)$; $w = (2, 6)$.

Solución normativa:

- a. $u \cdot v = (-2, 3) \cdot (5, 1) = -10 + 3 = -7$. Los vectores no son perpendiculares porque el producto punto entre u y v es diferente de cero.
- b. Los vectores u y v son perpendiculares ya que en la representación gráfica se observa que el ángulo entre u y v es de 90° .
- c. Para que los vectores u , v y w sean perpendiculares, debe cumplirse que $u \cdot v = 0$, $u \cdot w = 0$ y $w \cdot v = 0$; entonces,

$$u \cdot v = (-1, 2, 1) \cdot (-2, 0, 2) = 4.$$

$$u \cdot w = (-1, 2, 1) \cdot (3, -1, 5) = 0.$$

$$w \cdot v = (3, -1, 5) \cdot (-2, 0, 2) = 4.$$

Por lo tanto, los vectores u , v y w no son perpendiculares.

- d. Con la ayuda de un software de geometría dinámica es fácil ver que los ángulos entre los vectores u y v , u y w , v y w son rectos.

- e. Realizando el producto entre los vectores se tiene que $u \cdot v = (4a, -b) \cdot (2b, 8a) = 8ab - 8ab = 0$. Por tanto, los vectores u y v son perpendiculares.
- f. Los vectores u , v y w no son perpendiculares dado que pertenecen a \mathbb{R}^2 y en este espacio; a lo más existen dos vectores perpendiculares entre sí.

Análisis teórico:

Esta pregunta está compuesta por cinco ítems en los cuales se busca que los estudiantes determinen si los conjuntos de vectores dados son perpendiculares. Esta pregunta solo involucra vectores en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 ; espacios que son familiares para los estudiantes. Esto con el fin de identificar las transformaciones numéricas, geométricas o algebraicas que los estudiantes realizan sobre los vectores para dar respuesta a la pregunta dada; reflexiones que según el análisis teórico se asocian con la ejecución de Acciones.

En los incisos $a.$, $c.$ y $e.$, se espera que el estudiante realice la operación producto punto para determinar si los vectores son perpendiculares; en particular, en el inciso $c.$, se quiere observar cómo los estudiantes hacen uso de la definición de perpendicularidad en un conjunto de tres vectores definidos en un espacio de dimensión 3. Es importante que los estudiantes tengan una visión algebraica de los vectores en el inciso $e.$, y aunque estos estén dados en términos de variables, puedan determinar si son perpendiculares o no. Este tipo de Acciones requieren de una interpretación de vector relacionada con su forma algebraica.

En los incisos *b.* y *d.*, los vectores están dados de manera geométrica, lo que implica la aplicación de Acciones del tipo 1, es decir el estudiante calcula el ángulo comprendido entre los vectores para determinar si son o no perpendiculares.

Para el inciso *c.*, se le proporciona un archivo en GeoGebra en donde los estudiantes pueden manipular los vectores, esto con el fin de observar si pueden determinar que los vectores dados son perpendiculares a partir de argumentos geométricos o por el contrario, necesitan trabajar con ellos en un contexto numérico.

El objetivo de esta pregunta es identificar las transformaciones asociadas a cada tipo de interpretación (numérica, geométrica y algebraica) que un estudiante puede realizar sobre un conjunto de vectores para determinar si son perpendiculares.

A continuación, se describen algunas de las estrategias que los estudiantes pueden realizar para determinar si los conjuntos de vectores dados son perpendiculares:

- Argumentos algorítmicos: si un estudiante realiza cualquier tipo de operación con los vectores para determinar que los conjuntos de vectores dados son perpendiculares, entonces diremos que el estudiante tiene una concepción Acción del concepto de ortogonalidad. Estas operaciones pueden ser el producto punto entre los vectores; el producto de las pendientes de las rectas que definen los vectores dados; verificación del teorema de Pitágoras; determinar mediante relaciones trigonométricas el ángulo entre los vectores; entre otras que pueden

emerger de la actividad generada por la pregunta.

- Argumentos geométricos: si un estudiante recurre a la interpretación geométrica de los vectores para observar si el ángulo formado entre ellos es recto, diremos que está en una concepción Acción del concepto de ortogonalidad.
- Inspección: si un estudiante no realiza ningún tipo de operación o representación sobre los vectores y puede determinar que son ortogonales, entonces se le pedirá que argumente su respuesta con el fin de determinar su nivel de comprensión del concepto.

Tarea 2:

Sean $A = (4, 6)$, $B = (5, 1)$ y $C = (x, 2x)$ los vértices del triángulo ABC . Encuentre las coordenadas del vértice C de tal forma que el triángulo ABC sea un triángulo rectángulo y el segmento AB sea la hipotenusa.

Solución normativa:

Primero, se deben calcular los vectores AC y BC , esto es,

$$AC = C - A = (x, 2x) - (4, 6) = (x - 4, 2x - 6)$$

$$BC = C - B = (x, 2x) - (5, 1) = (x - 5, 2x - 1)$$

Para que el triángulo ABC sea rectángulo, debe cumplirse que los vectores AC y BC sean perpendiculares. Por ende, se deben encontrar los vectores AC y BC y garantizar que $AC \cdot BC = 0$.

Luego,

$$AC \cdot BC = (x - 4, 2x - 6) \cdot (x - 5, 2x - 1) = 0 \quad (1)$$

$$= (x - 4)(x - 5) + (2x - 6)(2x - 1) = 0 \quad (2)$$

$$= x^2 - 9x + 20 + 4x^2 - 14x + 6 = 0 \quad (3)$$

$$= 5x^2 - 23x + 26 = 0 \quad (4)$$

Resolviendo (4), se obtienen los valores $x_1 = 2$ y $x_2 = 2.6$. Por tanto, las coordenadas de C son: $C_1 = (2, 4)$ o $C_2 = (2.6, 5.2)$.

Análisis teórico:

En esta pregunta los estudiantes deben hacer uso de los tres tipos de Acciones del concepto de ortogonalidad descritas en la descomposición genética preliminar. Se busca que los estudiantes sientan la necesidad de transitar de una interpretación a otra; de tal manera que se pueda determinar cómo hacen uso de cada una de ellas en el momento oportuno. Esta situación matemática no puede ser resuelta solo desde un tipo de Acción, es necesario que los estudiantes identifiquen cuándo deben hacer uso de cada una de ellas. De tal manera que puedan integrar la información que cada una ofrece para dar solución a la pregunta.

Inicialmente se espera que los estudiantes construyan un bosquejo de la situación y ubiquen un punto $C = (x, 2x)$ según la condición dada. Lo importante es que, con la ubicación de este punto

C , los vectores AC y BC deben ser perpendiculares. De tal forma que puedan calcular estos vectores para luego realizar el producto punto entre ellos y determinar los valores de x para los cuales se satisface la condición.

A continuación, se describen algunas de las estrategias que los estudiantes pueden realizar para resolver este problema:

- **Uso de Acciones:** si un estudiante hace uso de los tres tipos de Acciones del concepto de ortogonalidad con el fin de dar solución a la tarea, diremos que el estudiante se encuentra en un nivel intermedio entre la concepción Acción y Proceso del concepto de ortogonalidad; lo cual denominamos como Proceso 1. Por otra parte, si el estudiante resuelve la tarea sin usar argumentos asociados al concepto de ortogonalidad, diremos que el estudiante se encuentra en una concepción Acción de dicho concepto.
- **Inspección geométrica:** dado que los estudiantes podrán hacer uso del software de geometría dinámica GeoGebra, se considera que puede realizar transformaciones sobre el medio con el fin de obtener el vértice solicitado. En ese caso, se les pedirá argumentar sus procedimientos para determinar su nivel de comprensión del concepto de ortogonalidad.
- **No responde:** si el estudiante no puede resolver la tarea de ninguna forma, se le pedirá que reflexione sobre alguna estrategia que tal vez conduzca a su solución. Se considera que este caso no proporciona información valiosa para la investigación.

Tarea 3:

Sea $u = (2, 0, -3)$ y $v = (6, 5, 4)$.

- ¿Los vectores u y v son perpendiculares?
- Encuentre un vector $w \neq 0$ que sea perpendicular tanto a u como a v .
- ¿El conjunto de vectores $S = \{u, v, w\}$ es linealmente dependiente o independiente? Justifique ampliamente su respuesta.
- ¿Es posible encontrar un vector $z \neq 0$ que sea perpendicular a u, v y w al mismo tiempo? Justifique su respuesta.

Solución normativa:

- Los vectores son perpendiculares puesto que $u \cdot v = (2, 0, -3) \cdot (6, 5, 4) = 12 + 0 - 12 = 0$.
- Para que w sea ortogonal a u y v , debe cumplirse que $w \cdot u = 0$ y $w \cdot v = 0$. Sea $w = (x, y, z)$, entonces,

$$w \cdot u = (x, y, z) \cdot (2, 0, -3) = 2x - 3z = 0$$

$$w \cdot v = (x, y, z) \cdot (6, 5, 4) = 6x + 5y + 4z = 0$$

De ello que $5y + 13z = 0$. Por tanto, el vector $w = \left(\frac{3}{2}z, -\frac{13}{5}z, z \right)$ es perpendicular a u y v .

- Dado que u, v y w son perpendiculares, entonces son linealmente independientes.

- d. No es posible ya que la dimensión del espacio en el que se encuentran u, v y w es tres, entonces a lo más existen tres vectores perpendiculares entre sí.

Análisis teórico:

En esta pregunta se relaciona el concepto de ortogonalidad con el concepto de independencia lineal. El objetivo es que los estudiantes puedan reflexionar a partir de las preguntas dadas y concluir que un conjunto de vectores ortogonales necesariamente es un conjunto de vectores linealmente independiente; lo cual además puede conducir a establecer relaciones con el concepto de base.

Se espera que los estudiantes reflexionen sobre las ideas geométricas que han construido en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 y los conocimientos estructurados alrededor del concepto de independencia lineal. Por ejemplo, cuándo dos vectores son linealmente independientes o dependientes, geoméricamente hablando. Esto con el fin de que puedan obtener resultados generales para \mathbb{R}^n .

A continuación, se describen algunas de las estrategias que los estudiantes pueden realizar para dar solución a esta tarea:

Los estudiantes pueden calcular el producto punto entre los dos vectores dados para determinar si son o no perpendiculares, lo cual corresponde a una Acción de tipo 2 del concepto de ortogonalidad. Encontrar un vector que sea perpendicular a los dos vectores dados puede ser una dificultad para los estudiantes, más cuando se les pida que justifique por qué su procedimiento

determina un vector perpendicular. Este argumento se puede formular a partir de dos formas; la primera es realizando producto cruz entre los vectores dados y la segunda es encontrar el vector a partir de la definición de ortogonalidad. Los argumentos que utilicen los estudiantes pueden contribuir a determinar en qué nivel de construcción del concepto se encuentran. Si un estudiante requiere de un sistema de ecuaciones lineales (Acciones) para determinar que los tres vectores perpendiculares son linealmente independientes, diremos que se encuentra en una concepción Acción del concepto. Si, por el contrario, un estudiante relaciona lo que ha construido sobre independencia lineal y perpendicularidad para responder la pregunta correctamente sin necesidad de realizar operaciones, puede que el estudiante esté en un nivel Proceso 1, ya que a partir de la interpretación geométrica de los vectores perpendiculares identifica que estos deben ser linealmente independientes.

Un estudiante que reflexione sobre esta situación en \mathbb{R}^n y exprese que un conjunto de vectores allí conserva las mismas características geométricas de \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , ha desarrollado una concepción Proceso 2. Adicionalmente, si coordina el Proceso 1 y 2 para construir un nuevo Proceso, puede concluir que un conjunto de vectores perpendiculares en \mathbb{R}^n es un conjunto linealmente independiente. Si un estudiante no puede responder las preguntas, intentaremos que reflexione a partir de la interpretación geométrica para obtener información relevante respecto a las dificultades asociadas al concepto.

En las preguntas 4 y 5, se busca que el estudiante reflexione sobre la relación entre la

ortogonalidad y otros conceptos del Álgebra Lineal con el fin de integrar dichos conceptos. Adicionalmente, mostrar que la enseñanza de los conceptos del AL, no es independiente y que todos están estrechamente relacionados; comprender este tipo de aspectos y establecer relaciones entre estos conceptos es lo que conlleva a su evolución.

Tarea 4:

Analice y responda cada uno de los siguientes incisos.

- a. Encuentre la ecuación de la recta l que pasa por los puntos $A = (8, 1, 0)$ y $B = (2, -2, 6)$.
- b. Encuentre la ecuación del plano π ortogonal a la recta l y que pasa por el punto A .
- c. Sea $C = (6, 2, -3)$. Encuentre la distancia desde el punto C al plano π .

Solución normativa:

- a. Se tienen como datos dos puntos de la recta, entonces los vectores AB y BA son paralelos a dicha recta. Se elige uno de ellos como vector director, $v = AB = B - A = (-6, -3, 6)$. Además, también se puede tomar cualquiera de los dos puntos dados como punto de paso, por ejemplo A . Entonces la ecuación de la recta está dada por:

$$(x, y, z) = (8, 1, 0) + \alpha(-6, -3, 6), \alpha \in \mathbb{R}$$

- b. Se sabe que el vector $v = (-6, -3, 6)$ es un vector director de l , además, el vector v es ortogonal al plano Π que pasa por el punto $(8, 1, 0)$. De ello que, la ecuación del plano está

dada por:

$$\pi : -6 \cdot x - 3 \cdot y + 6 \cdot z + D = 0. \text{ Si pasa por el punto } A = (8, 1, 0), \text{ entonces}$$

$$= -6 \cdot 8 - 3 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + D = 0$$

$$D = 51$$

Por tanto, $\pi : -6x - 3y + 6z + 51 = 0$.

- c. Para encontrar la distancia desde el punto C al plano π , se debe encontrar la magnitud del vector CD , donde D es el punto sobre π tal que el vector CD es ortogonal al plano π o; lo que es equivalente a calcular magnitud del vector $Proy_{\vec{AB}} \vec{AC}$. Sea $u = AC = C - A = (-2, 1, -3)$ y $v = AB = (-6, -3, 6)$, entonces:

$$proy_v u = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v = \frac{-9}{81} (-6, -3, 6) = -\frac{1}{9} (-6, -3, 6)$$

Por tanto, $proy_v u = -\frac{1}{9} (6, 3, -6)$ y la distancia entre C y π es $\|proy_v u\| = 1$.

Análisis teórico:

Existen algunas fórmulas que permiten la resolución de esta tarea sin necesidad de reflexionar sobre la misma; por ejemplo, la ecuación de una recta, la ecuación de un plano y calcular la distancia de un punto a un plano. Si un estudiante resuelve esta tarea haciendo uso únicamente de estas fórmulas, diremos que se encuentra en una concepción Acción. Por el contrario, si un estudiante

realiza Acciones numéricas, geométricas y algebraicas, y a partir de eso encuentra la distancia entre el punto C y el plano Π , diremos que ha alcanzado una concepción Proceso 1.

Si un estudiante no puede resolver la situación, se le proporcionará una representación geométrica de la situación con el fin de que reflexione sobre ella y pueda establecer alguna estrategia general de resolución e ideas respecto al concepto de ortogonalidad. Esto puede brindar información acerca de cómo un estudiante puede hacer uso de la ortogonalidad para resolver una tarea, aunque no conozca las fórmulas necesarias.

Tarea 5:

Sea $u = (-3, 4)$.

- a. Determine los vectores v que son perpendiculares al vector u .
- b. ¿Cuántos vectores v existen?
- c. Encuentre el $gen\{v\}$ y represéntelo gráficamente.
- d. ¿Qué relación existe entre $gen\{v\}$ y u ?

Solución normativa:

- a. Los vectores $v = (x, y)$ perpendiculares a u son aquellos que cumplan con la condición $u \cdot v =$

0. Luego,

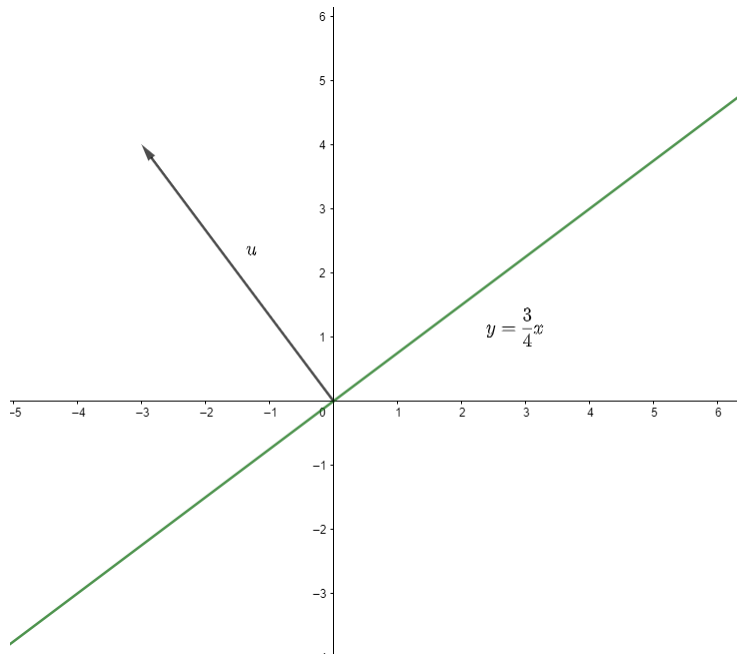
$$\begin{aligned} u \cdot v &= (-3, 4) \cdot (x, y) = 0 \\ &= -3x + 4y = 0 \end{aligned}$$

De donde $y = \frac{3}{4}x$ y por tanto $v = \left(x, \frac{3}{4}x\right)$.

b. Existen infinitos vectores perpendiculares a u .

c. Dado que $\text{gen}\{v\}$ son todas las combinaciones lineales de v , se tiene que $\text{gen}\{v\} = \alpha v$, para

$\alpha \in \mathbb{R}$. En este caso, los vectores están dados por la recta $y = \frac{3}{4}x$.



d. Todos los vectores que pertenecen al generado de v son perpendiculares a u .

Análisis teórico:

Esta pregunta vincula el concepto de espacio generado con el fin de que un estudiante pueda pensar en todos los vectores que son ortogonales a un vector dado; en este caso, una recta. Este tipo de situaciones puede potenciar la construcción del concepto de complemento ortogonal.

Se espera que los estudiantes trabajen a partir de la operación producto punto entre el vector u y v , de esta manera, pueden obtener las condiciones sobre las coordenadas del vector v ; que determina la ecuación de una recta.

A continuación, se describen algunas de las estrategias que los estudiantes pueden realizar para dar solución a esta tarea:

Si un estudiante proporciona vectores particulares ortogonales al vector dado, diremos que está en una concepción Acción del concepto de ortogonalidad. Si el estudiante encuentra la condición general que deben cumplir las componentes de un vector para que sea ortogonal al vector dado, diremos que el estudiante está en una concepción Proceso 1 del concepto de ortogonalidad. Finalmente, un estudiante que pueda establecer relación entre el concepto de ortogonalidad y el concepto de espacio generado en \mathbb{R}^n ; en este caso, cualquier vector que pertenezca al generado de v es ortogonal a u , entonces ha alcanzado una concepción Proceso del concepto de ortogonalidad.

Un estudiante que no pueda resolver la tarea puede brindar información sobre las dificultades asociadas a la construcción del concepto de ortogonalidad.

Tarea 6:

Analice y responda cada uno de los siguientes incisos:

- a. Proporcione dos vectores perpendiculares en \mathbb{R}^2 y realice un bosquejo.
- b. Proporcione dos vectores perpendiculares en \mathbb{R}^3 y realice un bosquejo.
- c. Proporcione dos vectores perpendiculares en \mathbb{R}^5 .
- d. ¿Qué características geométricas existen entre los vectores del inciso c.?
- e. ¿Cuántos vectores perpendiculares entre sí existen en \mathbb{R}^n ?
- f. ¿Qué características existen entre dos vectores perpendiculares en \mathbb{R}^n ?

Análisis teórico:

El objetivo de esta pregunta es analizar cómo los resultados obtenidos en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 pueden ser generalizados para \mathbb{R}^n ; en donde, la interpretación geométrica, numérica o algebraica pueden desaparecer y aún así los estudiantes podrían seguir pensando en vectores perpendiculares que cumplen con ciertas características.

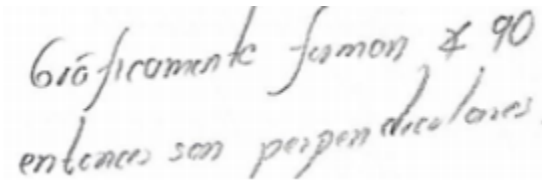
Si un estudiante proporciona ejemplos de vectores ortogonales en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 pero no puede pensar en vectores ortogonales en \mathbb{R}^5 o \mathbb{R}^n y en las características que poseen estos vectores, diremos que evidencia una concepción Acción del concepto de ortogonalidad. En caso contrario,

diremos que está en un nivel intermedio entre la concepción Acción y Proceso, la cual denominamos Proceso 2. Se espera que las respuestas y reflexiones que emerjan de la actividad de los estudiantes, puedan ofrecer información más profunda sobre las características de la estructura Proceso.

6.2. Análisis a posteriori de las preguntas de la entrevista

6.2.1. Acciones sobre Objetos concretos. Los Objetos concretos de los cuales se parte para la realización de Acciones, corresponden a un conjunto de vectores en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 que pueden o no ser perpendiculares. Estos Objetos aparecen como flechas, parejas o triplas ordenadas de números reales particulares.

El problema 1b. y 1d. de la entrevista, por ejemplo, muestra un conjunto de vectores perpendiculares en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 respectivamente, señalando que el ángulo que se forma entre ellos es recto. Los estudiantes concluyen que los vectores son perpendiculares dado que, geoméricamente se forma un ángulo de recto.



Geoméricamente forman un ángulo de 90
entonces son perpendiculares.

Figura 10. Evidencias del trabajo realizado por los estudiantes en la pregunta 1a.

El problema 1a, presenta dos vectores de \mathbb{R}^2 en términos de coordenadas numéricas, el es-

tudiante ES4 continúa con una interpretación geométrica para determinar si los vectores dados son perpendiculares; realiza una representación gráfica de estos vectores para concluir que el ángulo formado entre ellos no es de 90° . Dicha conclusión se obtiene a partir de la percepción visual de la figura construida por él, como se muestra a continuación en la figura 10.

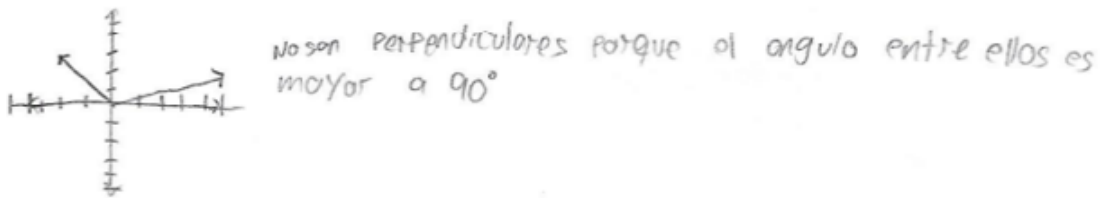


Figura 11. Evidencias del trabajo realizado por ES4 en la pregunta 1a.

Por su parte, la primera opción del estudiante ES1 es calcular el producto punto entre los vectores para verificar si son o no perpendiculares; sin embargo, no tiene la claridad conceptual sobre dicha operación, por lo que recurre a una representación geométrica de los vectores para intentar medir el ángulo formado entre ellos y responder a la pregunta. A continuación, se presenta un fragmento de la transcripción de razonamiento realizado por ES1, en este problema.

ES1: Yo creo que, pues, o sea, cuando hablábamos de perpendiculares, hablábamos de ortogonalidad, ¿No? Sería decir que el producto punto entre ellos me diera cero, ¿O era uno?

E: ¿Uno o cero?

ES1: Uno, creo.

E: Entonces si da uno, ¿qué sucede?

ES1: Son perpendiculares. [El estudiante procede a hacer una representación gráfica de los vectores].

ES1: Yo diría que no son ya que, si los grafico, no me da un ángulo de 90° .

E: Basada en tu percepción, crees que ese ángulo no es de 90° .

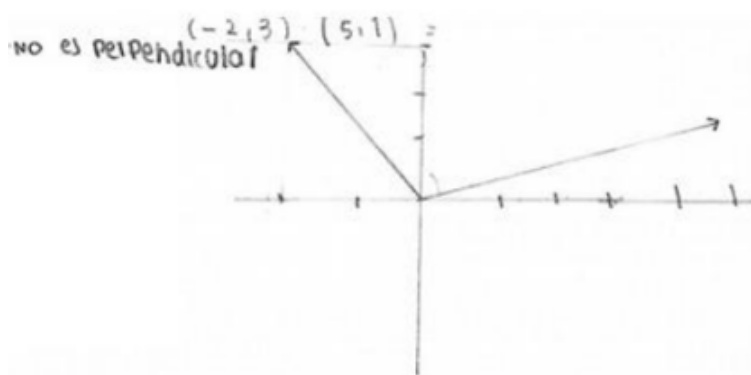


Figura 12. Evidencias del trabajo realizado por ES1 en la pregunta 1a.

ES1: Si, aunque también puede influir que no tomé tan exacta las divisiones de la recta.

E: ¿Entonces dirías que no son perpendiculares?

ES1: Yo diría que no, estos no son perpendiculares. [El estudiante intenta medir el ángulo con su transportador mientras responde].

Como se aprecia en el extracto de la entrevista de ES1, las Acciones sobre las formas numéricas de los vectores para calcular el producto punto, no la llevan a una conclusión determinante sobre si los vectores son o no perpendiculares. Por tanto, regresa a la representación gráfica de los vectores en el plano, que resulta como un Objeto concreto dentro de su razonamiento. Es importante destacar que esta estudiante busca establecer una relación entre las formas gráficas y numéricas de los vectores. ES1 ha estructurado una forma de pensar sobre la perpendicularidad, que le señala que no es suficiente con su percepción visual de la representación gráfica de los vectores; esto se refleja cuando asegura que: “? también puede influir que no tomé tan exacta las divisiones de la recta?”. Este es un razonamiento que consideramos debe caracterizar el mecanismo de interiorización.

En el caso del estudiante ES5, a pesar de realizar la misma representación geométrica de los vectores, podemos ver cómo la utiliza para establecer relaciones trigonométricas y demostrar que los vectores dados no son perpendiculares:

ES5: ¿Puedo armar un triángulo rectángulo con los vectores?

E: Si puedes, sí.

ES5: ¿Puedo usar calculadora?

E: Sí, ¿qué intentas hacer?

ES5: Yo sé que para que sean perpendiculares tiene que haber un ángulo de 90° entre los dos vectores, entonces estoy intentando hallar este ángulo $[\alpha]$ y este otro ángulo $[\theta]$ y si la suma da 90° serían perpendiculares.

E: Entiendo.

ES5: Estos no serían perpendiculares.

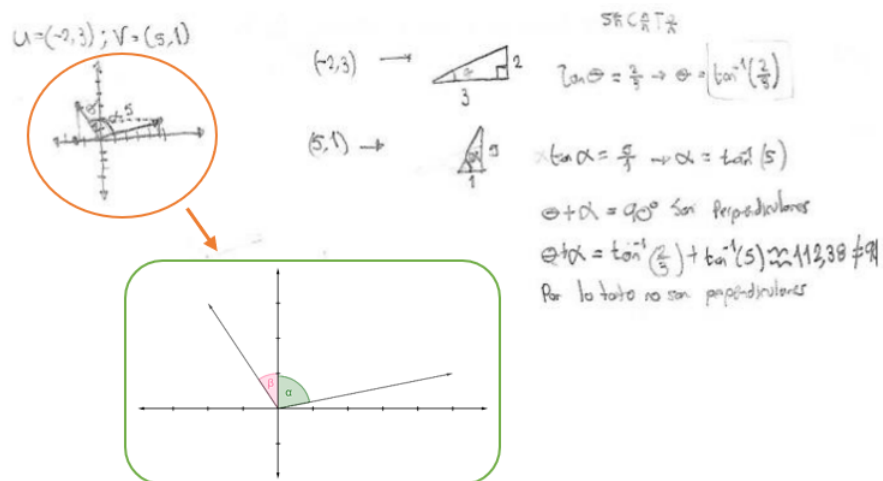


Figura 13. Evidencias del trabajo realizado por ES5 en la pregunta 1a.

El trabajo realizado por los estudiantes ES1 y ES4 muestra una concepción Acción determinada por su intuición sobre la medida del ángulo entre los vectores. ES1 y ES4 evidencian una limitante, dado que no incluyen otro tipo de argumento para validar las interpretaciones de la forma en que aparecen los vectores. En contraste, ES5 como puede verse en la transcripción de su

entrevista, acude a razonamientos trigonométricos para encontrar el ángulo entre los vectores, lo cual permite evidenciar que, para él, su percepción visual no es suficiente para dar una respuesta. Sin embargo, su resultado también es prueba de una concepción Acción determinada por las transformaciones sobre los vectores para verificar la no perpendicularidad. Lo cual estaba previsto en el análisis a priori ya que esta pregunta no busca indagar más allá de una concepción Acción.

Podemos ver cómo este argumento de la percepción visual es de suma importancia para los estudiantes y está presente como un recurso clave a la hora de resolver una tarea. En la pregunta 2, se observa que algunos estudiantes intentan ?acomodar? el punto C de tal forma que cumpla con la condición dada, esto es, formando un triángulo rectángulo, según su percepción. Luego, verifican si ese punto si hace que se cumpla la condición para darlo como respuesta definitiva o descartarlo, según sea el caso. A continuación, se presentan algunos fragmentos de las entrevistas con los estudiantes ES4 y ES3.

ES4: Yo probaría con $x = 2$.

E: ¿Por qué?

ES4: Haciéndolo gráficamente creo que ese podría ser el valor. Entonces $C = (2,4)$, para probar que eso esté bien hallaría AC y BC y el producto punto debería ser cero. Si, ese es C .

E: ¿Cumple con las condiciones del problema?

ES4: Si, eso forma un ángulo de 90° , sería un triángulo rectángulo y AB sería la hipotenusa.

E: ¿Cómo llegaste a ese $x = 2$?

ES4: Con la gráfica, tenía que ser un número que y siempre fuera el doble de x , entonces mire ese punto y me pareció que cuadraba.

E: Si por observación no hubiera identificado ese punto, ¿Qué harías?

ES4: De pronto esto mismo [producto punto], pero conservando las x , intentando despejar la x al igualar a 0.

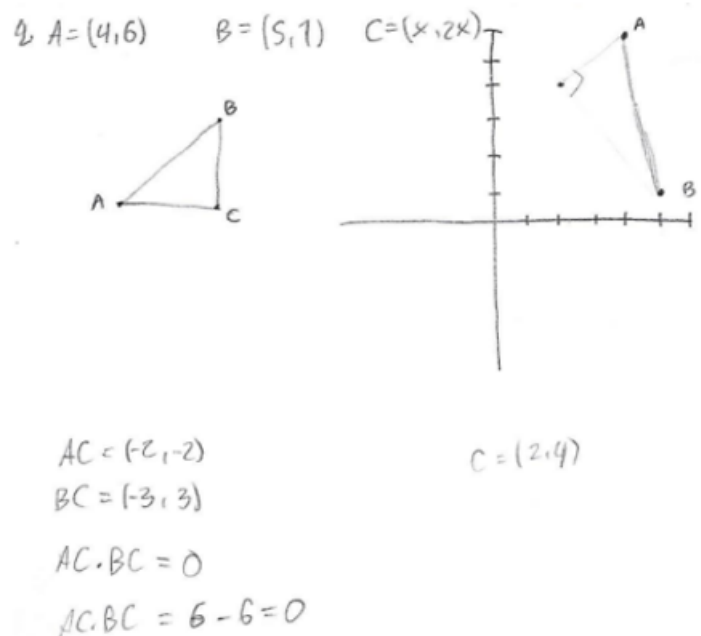


Figura 14. Evidencias del trabajo realizado por ES4 en la pregunta 2.

La estudiante ES3, por su parte, muestra un razonamiento similar:

ES3: De pronto si ubico el punto C y hago el producto punto entre el vector CA y CB , de pronto si $C = (2, 4)$ y conozco a A y B , pero no conozco los vectores.

E: ¿Qué pasaría si haces el producto punto entre esos vectores?

ES3: Que sea cero.

E: ¿Y si no te da cero?

ES3: Si no me da cero entonces esa no es la coordenada.

E: ¿Y qué harías entonces?

ES3: De pronto buscar otra que me cumpla esta condición, de pronto un $(1, 2)$.

E: ¿Buscándolo a ojo?

ES3: Sí.

[?]

ES3: Y si hago el producto punto, daría cero. Entonces esa coordenada si sería la correcta. En este caso los vectores son perpendiculares, entonces ahí está el triángulo rectángulo.

[?]

E: Si no te hubiese dado cero, ¿entonces intentarías buscar otro punto y harías el mismo proceso?

ES3: Creo que sería muy tedioso, intentaría buscarlo de otra manera.

E: ¿De qué manera?

ES3: Es que sin tener a C ? Pues hacer lo mismo que hice acá, pero usando $(x, 2x)$ y de ahí despejo a x al igualar el producto punto a cero y hallar la coordenada.

E: ¿Y crees que funcionaría?

ES3: Debería.

Consideramos que se recurre a este camino como primera opción debido al uso de variables en las componentes del punto C , esta forma de abordar el problema se lleva a cabo con el fin de evitar o evadir el trabajo con las variables. Sin embargo, es claro que, una vez resuelta la tarea los estudiantes reconocen que el proceso puede llegar a ser tedioso y plantean que se puede abordar de manera general, siguiendo los mismos pasos pero trabajando con la variable x , lastimosamente, no se evidencia ningún resultado de este tipo. Es importante destacar la relación de triángulo rectángulo, perpendicularidad y producto punto que los estudiantes ES4 y ES3 logran establecer a partir de la información solicitada; sin embargo, el hecho de pensar en un vector con coordenadas específicas y un método de “ensayo y error” para resolver la tarea es evidencia de una concepción Acción.

En la pregunta 3b., los estudiantes intentan construir un vector w tal que sea perpendicular a los otros dos vectores dados. Como se describió desde un principio en el análisis a priori, este problema puede ser resuelto de dos formas ES4: usando producto cruz o usando producto punto; opciones que fueron consideradas por los estudiantes, sin embargo, evidenciamos la carencia conceptual de los estudiantes, concepciones erróneas sobre el producto cruz o simplemente recordar que genera un vector perpendicular sin saber el porqué y sin saber aplicarlo los conduce nuevamente a su percepción visual o inspección por ensayo y error. A continuación, se muestran algunas

de sus respuestas frente a esta tarea:

ES1: Hay una forma de encontrarlo, ¿No?, ¿Hacerlo con la matriz aumentada o algo así, para hallar otro vector?

E: ¿Crees que podrías encontrar un vector que sea perpendicular a los dos dados? [luego de varios minutos]. ¿Acá estabas intentando hacerlo al tanteo?, Es decir, ¿Intentando que sea perpendicular a uno y luego ver que también es perpendicular al otro?

ES1: Sí, es que yo recuerdo que hay una forma de hacerlo, pero en este momento no sé.

ES2: Estoy confundido, recordé algo que había leído del producto cruz, que decía que, si se hacía entre dos vectores, eso generaba un vector perpendicular a ellos. Pienso que, si hago el producto cruz entre dos vectores, eso me daría un vector perpendicular a ambos, y como ya sé que u y v son perpendiculares, entonces ya serían perpendiculares entre todos. Pero no recuerdo cómo se calcula. Es que tengo la duda porque también recuerdo que el producto cruz da un número, tengo ese choque de ideas, tengo la idea que acabé de mencionar, pero también de que el resultado es un número porque según recuerdo el producto cruz es como hallar un determinante, entonces eso me daría un número. Pero también recuerdo que es lo de $i, -j$ y k , entonces también podría hacer el producto y que me dé un vector, pero creería que eso está mal. Tengo un choque de ideas. Otra forma sería hacerlo a punta y prueba, o sea, intentar con un vector que yo mismo vea y hacer que sea perpendicular a ambos. Está complicado, hay mucho para probar. Creo que de esta forma es más complicado.

E: ¿Se podría hacer de esa forma?

ES2: Si se puede encontrar, pero sería como muy demorado y muy poco eficiente porque uno tiene que pensar en una condición y la otra y si cambia un número entonces cambiar el otro valor, entonces es muy complicado de hacer de esa forma. Entonces ese sería el problema en la b, sigo pensando en el producto cruz, en que me produce otro vector que es perpendicular a ellos, diría que estoy un 70% seguro que ese es el camino, pero no recuerdo muy bien, no recuerdo si lo que estoy pensando es correcto.

ES3: El inciso b lo puedo con producto cruz.

E: ¿Por qué?

ES3: Porque si yo hago el producto cruz entre dos vectores me da otro vector que es perpendicular a esos dos vectores.

E: ¿Siempre genera un vector perpendicular?

ES3: Sí.

E: ¿Por qué?

ES3: No sé, pero es perpendicular... No recuerdo cómo se calcula el producto cruz.

ES4: Lo hice por inspección, lo primero en lo que me fijé es que la segunda componente del vector u es cero, así que no importa lo que coloque en la segunda componente del vector w , solo lo va a afectar la primera y la última. De ahí concluí que la primera componente debía ser 3 y la segunda 2, de esta manera el producto punto me daría 0. Después, el producto punto

entre v y w también debía ser cero, así que haciendo los cálculos encontré el valor de la segunda componente para que me diera 0.

En los incisos 1c y 1f, se generaron discusiones con algunos estudiantes por el hecho de usar del producto punto o producto cruz para determinar si un conjunto de tres vectores es perpendicular.

A continuación, aparecen algunas de las reflexiones realizadas por los estudiantes.

ES2: Para el c., pienso que habría que hacer? Un producto cruz y el producto cruz me diría si los vectores son perpendiculares entre ellos, es decir, si hago producto cruz entre los tres? pero no recuerdo qué tendría que dar el resultado. Me sé el concepto, pero no recuerdo muy bien el resultado que me tendría que dar para que me diga que son ortogonales.

ES3: En el caso del c., podría hacer el producto cruz entre dos vectores y me tendría que dar el tercero.

ES4: En el c. tengo que usar lo del producto, pero no recuerdo cuál de los dos es, creo que es producto punto y creo que tiene que dar cero porque ya en \mathbb{R}^3 no se puede apreciar bien si son perpendiculares.

ES5: Este está más difícil para graficar, ¿Cómo era la ecuación? la de producto punto, producto cruz? Era producto punto entre dos vectores, ¿no?

Finalmente, a partir de la discusión y sus propias reflexiones, todos concluyen que deben usar el producto punto entre las posibles parejas de vectores para determinar si todo el conjunto es perpendicular. A continuación, se muestra de manera específica el razonamiento desarrollado por

ES2:

ES2: En este momento me falla si la regla para el producto cruz es que sean vectores en \mathbb{R}^3 o que hayan tres vectores, me falla la memoria.

E: ¿Estás pensando en usar el mismo argumento del inciso c.? [El estudiante inicialmente está reflexionando sobre el producto cruz entre los vectores, pero ahora contempla realizar el producto punto].

ES2: Sí, aunque también podría hacerlo de la forma más larga, por decirlo así, o más eficiente como yo pensaría que sería capaz de hacerlo. Que sería hacer el producto punto entre u y v , u y w , v y u , v y w , w y v y, w y u . Y asegurarme que todos den cero, y si alguno no me da cero puedo decir que no son perpendiculares entre sí.

E: En ese caso trabajarías con el producto punto, ¿eso quiere decir que ahora el producto punto si funciona para ver si los vectores son perpendiculares entre sí? Porque antes me habías dicho que el producto punto no servía.

ES2: Si, pero creo que pensándolo bien si podría hacerlo también de esa forma. Borraría lo que dije antes y afirmarí a esto, que con realizar estos productos punto y si todas me dan cero, entonces son perpendiculares entre ellos.

Tal y como se describe en el análisis a priori, el objetivo de esta serie de preguntas es identificar las transformaciones asociadas a cada tipo de interpretación: numérica, geométrica y algebraica que un estudiante puede realizar sobre un conjunto de vectores para determinar si son o no perpendiculares. Es importante destacar en este punto que las formas algebraicas, representaron un mayor nivel de complejidad en el trabajo realizado por los estudiantes y por tanto se presentan con lo que hemos llamado 'Estructura intermedia' entre las Acciones y el Proceso.

Las Acciones que los estudiantes ejecutan sobre los vectores varían dependiendo del tipo de interpretación que se aborde, puede ser numérica o geométrica; sin embargo, todas las Acciones apuntan a la búsqueda del ángulo que se forma entre los vectores, es decir, si este ángulo es de 90° o no. Un aspecto importante que se evidencia a lo largo de todas las entrevistas es la falta de claridad sobre los conceptos: producto cruz, ángulo entre vectores y producto punto. Consideramos que las estructuras de un individuo no pueden evolucionar si no posee las construcciones necesarias y conocimientos previos adecuados, por ejemplo, los estudiantes intentan memorizar si el resultado de uno u otro producto debe ser 0 o -1 , pero no asocian esto por ejemplo con la expresión que permite calcular el ángulo θ entre los vectores u y v , esto es, $\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$.

6.2.2. Estructura intermedia entre la Acción y el Proceso. Consideramos la existencia de una estructura intermedia entre la Acción y el Proceso dado que algunos estudiantes muestran evidencias de estar encaminados hacia la construcción de la estructura Proceso, pero no han logrado interiorizar las Acciones. Podemos observar que existen limitaciones sobre los conceptos o sobre las mismas Acciones que no permiten evolucionar las estructuras.

El problema 1e. involucra el uso de vectores generales de \mathbb{R}^2 , es decir, las coordenadas de los vectores están dadas en términos de variables, inicialmente lo llamamos en la descomposición genética preliminar como Acciones de tipo 3, Interpretación algebraica. Consideramos que esto hace parte de una estructura más avanzada que la Acción, esta permite la interiorización de Acciones, al considerar incluso vectores en \mathbb{R}^2 de la forma (x,y) . La interiorización permite que el estudiante estructure la noción de vector general en espacios como \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 que más tarde conducirá a una generalización del espacio.

Frente a esta tarea, el estudiante ES2 por ejemplo, sospecha basado en su percepción visual, que los vectores dados pueden ser perpendiculares para algunos valores específicos de a y b . Para encontrar estos valores de a y b , procede a calcular el producto punto entre los vectores e igualar a cero, obteniendo como resultado una expresión algebraica; sin embargo, a partir de esto no logra determinar si los vectores son perpendiculares o no, según él, debido al uso de variables.

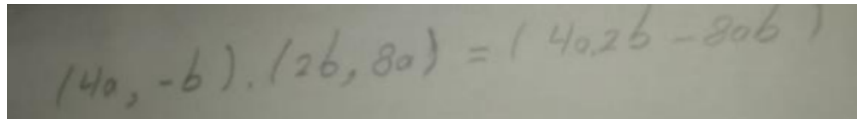
ES2: Yo creo que estos sí son (refiriéndose a los vectores del inciso e) porque me parece que, a simple vista, sin calcular nada, pareciera que pueden existir un a y b que se ajusten a los parámetros para que el producto punto me de cero.

E: ¿Y eso se cumpliría solo para algunos valores o para todos los valores?

ES2: No, únicamente para algunos valores porque tendría que ser a y b que hagan que el producto punto entre ellos me de cero.

E: ¿Y si quisiéramos saber esos valores?

ES2: Realizar el producto punto e igualar a cero y luego despejar.



$$(4a, -b) \cdot (2b, 8a) = (4a \cdot 2b - 8ab)$$

Figura 15. Evidencias del trabajo realizado por ES2 en la pregunta 1e.

ES2: Resulta más complicado de lo que pensé porque? por decirlo así las b no están ordenadas, o sea, acá una a multiplicada por una b , entonces ya resulta como más complicado, entonces no sé cómo hacerlo.

E: ¿Entonces no sabrías decir si los dos vectores son perpendiculares o no?

ES2: No, no sabría decirlo.

E: ¿Consideras que es porque los vectores están dados en términos de a y b ?

ES2: Si porque con términos que uno no sabe es más complicado hacer las cosas y llegar a una conclusión.

De la misma forma, el estudiante ES4 intenta encontrar los valores de a y b para que los vectores sean perpendiculares, lo cual hace a partir de ?ensayo y error?; es decir, asigna valores específicos para las variables a y b y con base en el producto punto verifica si son o no perpendiculares.

ES4: Yo pondría que, si a y b son cero se cumple.

E: Si a y b son cero, ¿Cómo serían los vectores u y v ?

ES4: Serían cero y cero.

E: ¿Y cómo se podría interpretar que el vector cero y el vector cero son perpendiculares?

ES4: No me imagino cómo hacerlo.

E: ¿Qué pasa si a y b toman valores diferentes de cero? ¿Ya no se cumple?

ES4: Si, debería haber algún número real que sí. Con el uno también se cumple. Creo que cuando a y b son iguales se cumple.

E: ¿Cómo concluyes eso?

ES4: Porque cuando lo hago con el 0 me da, cuando lo hago con el 1 también, con el 2 también. Siempre da cero, si lo hago con 3 también. Entonces supongo que sigue así.

E: ¿Por qué cree que solo se cumple cuando son iguales?

ES4: Porque empecé a probarlo y me dio.

Por otra parte, las reflexiones evidenciadas por el estudiante ES5 son muy interesantes, nuevamente nos encontramos con que parte de la idea de encontrar valores específicos o parámetros para las variables a y b que están determinados por el producto punto entre los vectores. El problema de ES5, al igual que ES2, radica en la conclusión final a partir de la expresión algebraica; en este caso argumenta que depende de los valores que tome a y b , inicialmente piensa que alguna de las variables debe ser cero, luego que deben ser iguales, para finalmente concluir que no importa qué valores tomen ya que se cumple para cualquier valor real. Es importante mencionar que para llegar a esta conclusión, ES5 asigna diferentes valores específicos a las variables a y b para ver que se cumple la condición y convencerse a sí mismo de su resultado.

Otro aspecto para destacar de ES5 es su necesidad de demostrarlo de manera general, manifiesta que:

ES5: Lo que no sabría bien es cómo demostrar eso porque como lo hice es para un valor en específico, la gracia sería mostrarlo en general, pero no se me ocurre como hacerlo. Yo sí sé que se debe hacer en forma general, sino no sería válido en un parcial, estoy seguro, pero no se me ocurre cómo hacerlo para cualquier término, no sé.

ES5 retoma la tarea intentando buscar una forma general de demostrar la perpendicularidad de los vectores a lo que, debido a su falta de claridad sobre los conceptos relacionados, finalmente concluye que estos vectores no son perpendiculares.

ES5: Sigo pensando en el ejercicio anterior, creo que no es para cualquier valor entre a y b , solamente para valores positivos, pero no sé cómo demostrarlo ahí porque si cambia el signo ya daría diferente, creo. Una de esas sería probar con un montón de números de todo tipo, negativos y positivos y ver si da cero.

E: ¿Tendría que hacer todo eso?

ES5: Es que eso es lo que me da rabia, a mí no me gusta hacerlo así, a mí me gusta hacerlo en general, pero no sé cómo hacerlo en general, no se me ocurre cómo.

E: ¿La respuesta que diste antes no es suficiente?

ES5: Está incompleta.

E: ¿Qué concluyes ahora?

ES5: Que a y b valen cero porque solamente me dice que mire si los dos vectores son perpendiculares, no me está diciendo que se le van a dar valores en ningún momento, entonces el valor de a y el valor de b ya están establecidos.

E: ¿Qué vectores serían entonces?

ES5: El vector $(0,0)$ y $(0,0)$.

E: ¿Esos vectores son perpendiculares?

ES5: Pues no sé la verdad, el vector $(0,0)$ yo no lo veo como un vector porque no tiene una magnitud, es un punto; pues no lo veo como un vector porque es $(0,0)$, no sería un vector. Bueno sí, le dicen vector nulo, ¿no? El nul de v o el nul de u . Creo que matemáticamente hablando si se ven como vectores, pero geoméricamente hablando no porque no poseen una magnitud, su magnitud es nula.

E: Entiendo, ¿Qué concluyes al final?

ES5: No son perpendiculares.

ES1	ES3
$(4a, -b)(2b, 8a)$ $\begin{matrix} 8ab - 8ab = 0 \\ 8ab = 8ab \end{matrix}$	$e) (4a, -b); v = (2b, 8a)$ $8ab - 8ab = 0.$ <p>A partir de la operación, como se cumple la igualdad, se puede decir q' son perpendiculares.</p>

Figura 16. Evidencias del trabajo realizado por los estudiantes en la pregunta 1e.

Inicialmente se había considerado que, para resolver esta tarea de manera exitosa, se debía poseer una concepción Acción; sin embargo, se evidencia que esta pregunta no se encuentra al mismo nivel de las anteriores y requiere de algo más que una Acción para su respuesta. El hecho

de involucrar variables dentro de las componentes de los vectores hace que su dificultad sea aún mayor, tanto que pone en conflicto los conocimientos previos de los estudiantes y no les es posible concluir a partir del resultado obtenido en el producto punto.

Creemos que esto es una limitación sobre la concepción de los vectores que no permite interiorizar las Acciones en un Proceso. No poder visualizar un vector general con componentes (x,y) o como una "flecha" en el espacio hace que los estudiantes tengan una visión reducida del concepto de vector y por ende del concepto de ortogonalidad.

En la pregunta 3b., el estudiante ES5 implementa el uso de variables en un vector general de \mathbb{R}^3 para resolver la tarea. ES5 muestra una estructura más avanzada que sus compañeros al pensar en buscar el vector de forma general y no dando valores específicos a sus componentes hasta que cumplan las condiciones. A continuación se muestra su razonamiento:

ES5: Haría lo mismo pero dándole variables a w porque yo sé que w está en \mathbb{R}^3 , por lo tanto, tiene tres componentes. De ahí sería hacer lo mismo que acá [producto punto], que el producto punto entre u y w sea igual a cero y que para v también sea igual a cero y de ahí despejar los valores para x , y y z que puede tomar w , aunque ahí me daría infinitas soluciones, creo que me daría infinitas soluciones, voy a hacerlo.

E: ¿Por qué crees que te daría infinitas soluciones?

ES5: Es que veo que hay tres incógnitas y solo dos vectores, al despejarlos creo que me quedaría una variable en función de las otras, por eso creo que es infinitas.

E: ¿A partir de eso podrías encontrar un vector perpendicular?

ES5: Si, tendría infinitas soluciones y podría darle un valor y me lo restringe las otras dos variables y sí, encontraría un vector.

También podemos observar esta limitación que tienen los estudiantes al requerir o involucrar el uso de variables en vectores bajo una interpretación en la pregunta 4a. Los estudiantes no

$$\begin{aligned}
 w &= (x, y, z) \rightarrow w \cdot u = (2x + 9y - 3z) = 0 \rightarrow 2x - 3z = 0 \rightarrow x = \frac{3z}{2} \\
 w &= \left(\frac{3z}{2}, 0, z\right) \quad w \cdot v = (6x + 9y + 4z) = 0 \rightarrow 6\left(\frac{3z}{2}\right) + 9y + 4z = 0 \\
 &\rightarrow 9z + 9y + 4z = 0 \quad 13z + 9y = 0 \rightarrow y = -\frac{13z}{9} \\
 w &= \left(\frac{3z}{2}, -\frac{13z}{9}, z\right) \rightarrow \left[\frac{3}{2}, -\frac{13}{9}, 1\right]
 \end{aligned}$$

Figura 17. Evidencias del trabajo realizado por ES5 en la pregunta 1b.

pueden representar todos los vectores perpendiculares a un vector dado mediante una expresión algebraica. Por ejemplo, el estudiante ES4 piensa únicamente en vectores particulares:

ES4: ¿Acá tengo que encontrar un vector que sea perpendicular a u ?

E: La idea sería encontrar la característica de esos vectores para que sean perpendiculares a u .

ES4: Este es un vector perpendicular a u [$v = (4, 3)$].

E: ¿Podría darme otro vector diferente a ese?

ES4: Lo que pasa es que saldrían infinitos, pero serían paralelos, yo podría decir el vector $(2, 1.5)$ o $(8, 6)$.

E: ¿Por qué cree que esos son perpendiculares a u ?

ES4: Porque? gráficamente yo tengo esto [ver gráfico], el primer vector que yo hallé es perpendicular a u y todos los que sean paralelos a él también son perpendiculares a u .

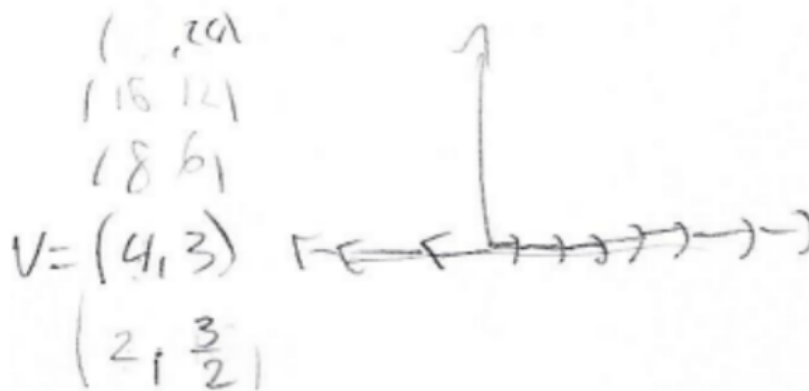


Figura 18. Evidencias del trabajo realizado por ES4 en la pregunta 4a.

E: ¿Y cómo podría mencionar todos los vectores perpendiculares a u ? Es lo que dice el inciso a., encuentre todos los vectores perpendiculares. **ES4:** No sé cómo escribirlo, pienso que es como el doble del anterior? No, no sé.

Por su parte, el estudiante ES2 define un vector cualquiera (x,y) y procede a calcular el producto punto entre este y el vector dado e igualando a cero, sin embargo, no puede concluir nada a partir del resultado obtenido.

ES2: Como me piden los vectores v , lo haría de forma general.

$$(-3, 4) \cdot (x, y) = -3x + 4y = 0$$

$$4y = 3x$$

Figura 19. Evidencias del trabajo realizado por ES2 en la pregunta 4a.

ES2: No sé qué puedo hacer con eso. **E:** Si te preguntara solo por uno, ¿cuál me darías? **ES2:** Uno solo de manera particular, sería el vector $(4, 3)$. **E:** ¿Cómo lo obtuviste? **ES2:** Al tanteo. **E:** ¿Y si te pido otro? [Hace cuentas en la calculadora]. **ES2:** Estaba pensando en que la condición fuera cualquier vector $(3x, 4y)$ pero no me cumple.

El estudiante ES3 realiza el mismo procedimiento que ES2, con la diferencia que establece la relación entre estos dos vectores y proporciona una expresión algebraica para todos los vectores perpendiculares al vector dado, evidenciando así que no solo puede realizar Acciones bajo cualquier tipo de interpretación, sino que también puede generar conclusiones a partir de los resultados obtenidos, producto de la interiorización de estas Acciones.

ES3: De pronto que el x de los vectores tenga $\frac{4}{3}$ de y . **E:** ¿Ahí estaría representados todos los vectores que son perpendiculares a u ? **ES3:** Si, porque si planteamos la condición del producto punto y multiplico normal y despejo, x va a tener esa forma y v tendría esa forma.

$(-3, 4) \rightarrow$ $\underbrace{(-3, 4)(x, y) = 0.}_{\text{P.P.}}$ $\rightarrow \left(\frac{4}{3}y, y \right); y \in \mathbb{R}$
 $-3x + 4y = 0.$
 $4y = 3x$
 $x = \frac{4}{3}y$

Figura 20. Evidencias del trabajo realizado por ES3 en la pregunta 4a.

6.2.3. Estructura Proceso de ortogonalidad. Consideramos que los estudiantes que han logrado una concepción Proceso de ortogonalidad poseen una visión más general y abstracta de este concepto. Estos estudiantes pueden reflexionar sobre Acciones realizadas y pensar en la relación de perpendicularidad para cualquier conjunto de vectores, sean particulares o de manera general en cualquiera de los espacios de \mathbb{R}^n .

El problema de la pregunta 3d. consiste en encontrar un cuarto vector en \mathbb{R}^3 que sea perpendicular a 3 vectores conocidos y perpendiculares entre sí. Esta, que en principio parece una pregunta simple, tiene como objetivo indagar la comprensión del concepto de ortogonalidad y las implicaciones que este puede generar; es decir, la idea es estudiar si las Acciones aplicadas a un conjunto de vectores han sido interiorizadas. La estudiante ES3 manifiesta que:

ES3: No es posible, pasa lo mismo que hablábamos ahorita sobre \mathbb{R}^2 [pregunta 1f], es decir en \mathbb{R}^2 tengo dos ejes y esos dos ejes siempre van a ser perpendiculares, si yo trazo otro vector perpendicular tendría que trazar otro eje. Si yo estoy en \mathbb{R}^3 y tengo 3 vectores perpendiculares y quiero hallar otro vector tendría que trazar otro eje.

Anteriormente, en la pregunta 1f, ES3 ya había presentado un argumento similar al actual, cuando se le proporcionan 3 vectores en \mathbb{R}^2 y se le pide que determine si son perpendiculares:

ES3: ¿Cómo pueden ser perpendiculares entre sí si viven en \mathbb{R}^2 ? [realiza una representación gráfica de los vectores]. Según la gráfica, puede que entre dos si sean, pero con el otro ya no.

Y en \mathbb{R}^2 creo que no se puede que tres vectores sean perpendiculares entre sí? porque siempre vamos a tener uno paralelo a otro.

ES3 refleja ideas claras respecto a la dimensión del espacio y la cantidad de vectores perpendiculares entre sí en dicho espacio. Por otra parte, el estudiante ES5 proporciona una reflexión más profunda y establece relaciones con otros conceptos del álgebra lineal para dar una respuesta aún más clara.

ES5: Yo sé que esos tres vectores me generan \mathbb{R}^3 y son linealmente independientes y son base de \mathbb{R}^3 , son generadores de cualquier otro vector de \mathbb{R}^3 y por lo tanto generan \mathbb{R}^3 . Pero si yo voy a buscar otro vector que me genere \mathbb{R}^3 no lo encuentro, porque en \mathbb{R}^3 solo puede haber tres vectores que generen \mathbb{R}^3 ; si yo voy a buscar un vector z entonces tengo que buscar otra dimensión.

Parece que este resultado obtenido por ES5 es producto de sus reflexiones a lo largo de la entrevista y las preguntas planteadas puesto que en su respuesta a la pregunta 1f. no se ve reflejado este tipo de razonamientos, él concluye que los tres vectores dados en \mathbb{R}^2 no son perpendiculares a partir de Acciones realizadas sobre los mismos sin tomar en cuenta los otros conceptos previamente mencionados tales como: dimensión del espacio, cantidad de vectores, independencia lineal o base.

También creemos que la evolución sobre el concepto de vector o espacio vectorial permite la evolución misma sobre el concepto de perpendicularidad, generalizándolo al concepto de ortogonalidad. Se ha evidenciado cómo los estudiantes tienen arraigado el pensamiento geométrico, siempre intentando medir o encontrar el ángulo entre un par de vectores para determinar si son o no perpendiculares. Sin embargo, este pensamiento se va transformando cuando ya no visualizan

de manera concreta el ángulo entre los vectores, el no poder representar gráficamente los vectores porque estos están dados de manera general o ubicarse sobre un espacio cuya representación gráfica no es posible de imaginar, genera una gran dificultad en ellos. Alcanzar este grado de abstracción sobre los conceptos involucrados es lo que consideramos que define la estructura Proceso de ortogonalidad. Es necesario realizar ese tránsito de lo concreto a lo abstracto, independizarse de la interpretación geométrica o numérico puesto que no siempre puede estar presente y acercarse a la definición de ortogonalidad, donde la única forma de saber si un par de vectores cualesquiera es perpendicular es a través del producto punto.

Evidenciamos que este pensamiento arraigado sobre lo concreto puede llegar a ser un obstáculo para los estudiantes, ver a los vectores siempre en términos de coordenadas con valores específicos o como flechas no permite interiorizar las Acciones que realizan sobre ellos y dar paso a una evolución de sus estructuras. Asimismo, es indispensable generalizar las características establecidas entre un par de vectores de \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 hacia \mathbb{R}^n , donde la visualización de estas características desaparece, pero no hace que se dejen de cumplir.

En la tarea 5 se cuestiona sobre la perpendicularidad en \mathbb{R}^n , se muestra a continuación algunas de las reflexiones hechas por el estudiante ES5:

E: Piensa en dos vectores perpendiculares en \mathbb{R}^2 , ¿En qué piensas?

ES5: Si, me los imagino gráficamente, es más fácil verlo así.

E: Ahora piensa en dos vectores perpendiculares en \mathbb{R}^5 .

ES5: Pues gráficamente ya no tiene mucho sentido ponerse a pensar porque materialmente no podemos representar \mathbb{R}^5 .

E: ¿Pueden existir dos vectores perpendiculares en \mathbb{R}^5 ?

ES5: Yo supongo que sí, aunque no conozco \mathbb{R}^5 supongo que sí.

E: ¿Cómo garantizarías que esos vectores son perpendiculares?

ES5: Pues? sería matemáticamente, ya no lo puedo ver geoméricamente.

E: ¿Qué harías?

ES5: Pues igual como yo parto del hecho de que son dos vectores, sería buscar su independencia lineal o su ángulo.

E: ¿Su independencia lineal o su ángulo?

ES5: Podría ser cualquiera de las dos.

E: ¿Entonces si tú descubres que los vectores son linealmente independientes automáticamente serían perpendiculares?

ES5: Sí.

E: ¿Y si no?

ES5: Es que el ángulo no es que nos represente como tal que dos vectores son linealmente independientes, pero es otra forma de verlo, es como de la forma geométrica porque uno dice que dos vectores son perpendiculares entre sí y una de sus características es que tienen que tener 90° , pero viéndolo en lo geométrico. Si lo vemos en una dimensión que no es posible realizar una gráfica, uno supone que deben tener 90° pero no llegaría a estar cien por ciento seguro de eso.

Notamos que hay una limitación debido a su fuerte inclinación por lo geométrico, parece que intenta nuevamente construir representaciones gráficas en su mente para dar una explicación o cuestionar sus conocimientos, pero es consciente de que esto no se puede hacer en espacios superiores a \mathbb{R}^3 . Por otra parte, hay quienes prefieren no pensar en este tipo de espacios o cómo se desarrollarían los conceptos allí, por ejemplo, el estudiante ES4 manifiesta:

ES4: Pues yo nunca hablaría de \mathbb{R}^5 porque para mí eso no existe, si fuera por mí no hablaría de \mathbb{R}^5 o \mathbb{R}^4 , solo hasta \mathbb{R}^3 , pero en clase se ven ejercicios que se hacen con el producto punto. Se me hace muy difícil pensar porque los ángulos es algo que se ve, se me hace complejo pensar en un ángulo en algo que no sé cómo es, pero pues? debería ser de 90° .

Esta exploración sobre las concepciones de los estudiantes respecto al concepto de perpendicularidad en \mathbb{R}^n no se estudió en las demás tareas. Consideramos que es importante plantear situaciones que indaguen sobre el nivel de abstracción y comprensión del concepto por parte de los estudiantes, por ejemplo:

- a. *Demuestre que si $u + v$ y $u - v$ son ortogonales en \mathbb{R}^n , entonces $\|u\| = \|v\|$.*

Esta tarea puede evidenciar si un estudiante posee una concepción de ortogonalidad puesto que requiere del trabajo con vectores definidos de forma general en \mathbb{R}^n y del uso del concepto para llegar a la conclusión deseada. Como se ha mostrado anteriormente, no es suficiente solo saber aplicar el producto punto entre los vectores e igualar a cero, sino que es necesaria una comprensión más profunda para poder concluir a partir de estas acciones.

7. Conclusiones

7.1. Descomposición genética refinada

El análisis que guía el desarrollo de esta investigación toma en cuenta la aplicación de Acciones sobre Objetos concretos para dar paso a la construcción de estructuras abstractas. En álgebra lineal los objetos concretos han sido definidos principalmente a través de la representación geométrica de vectores como flechas (en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3), rectas, planos o regiones del plano. Dada la potencia visual que ofrece dicha forma de comprender un vector o un conjunto de vectores y las variaciones que se realizan sobre ellos por ejemplo a través de una transformación lineal, estudiantes, profesores y autores de libros de texto, consideran este como un buen acercamiento para iniciar la construcción de diversos conceptos del álgebra lineal (González y Roa-Fuentes, 2017; Uicab y Oktaç, 2006; Sierpinska, Dreyfus y Hillel, 1999). Sin embargo, como resultado de esta investigación es posible afirmar que si bien la relación de perpendicularidad que se desarrolla inicialmente a partir de la medida del ángulo definido entre dos objetos (rectas, vectores, rectas y vectores, planos y vectores) es considerada como la base para el desarrollo de la noción de ortogonalidad, ésta puede resultar problemática si la noción de ángulo entre dos vectores u y v no evoluciona, la cual dependerá de la evolución de la noción de producto punto.

Inicialmente el producto punto entre dos vectores se define como la magnitud de la proyección del primer vector sobre el segundo por la norma del segundo, esto es $u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre u y v . Existe una fórmula alternativa para calcular el producto punto

que no depende de conocer el ángulo entre los vectores; a partir de la ley del coseno se halla una relación del producto punto que depende exclusivamente de las componentes de los vectores. Esta fórmula es de suma importancia puesto que, si no se establece, no se podría generalizar el producto punto al no tener una forma de medir el ángulo entre los vectores por medios físicos cuando $n > 3$. Adicionalmente, se puede deducir la fórmula para calcular el ángulo entre dos vectores a partir de la relación geométrica inicial, la cual es válida solo en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 ; sin embargo, el concepto de ángulo entre vectores se puede extender a \mathbb{R}^n con $n > 3$.

Dos objetos (rectas, segmentos, vectores) son perpendiculares si el ángulo que se forma entre ellos es de 90° , es lo que la matemática elemental le ha enseñado a todo individuo; sin embargo, comprender el concepto de ortogonalidad requiere que esta idea trascienda. Muchos conceptos básicos del álgebra lineal desarrollados geoméricamente en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 pueden generalizarse a cualquier espacio de \mathbb{R}^n haciéndolos evolucionar y desarrollando un nivel de abstracción en el individuo puesto que no existe una forma física de trabajar en estos espacios. El hecho de que la noción de ángulo evolucione no significa que no se pueda calcular el ángulo entre dos vectores de \mathbb{R}^n con $n > 3$, al contrario, implica que esto es posible aún si en estos espacios no existe una forma física de definir cualquier tipo de geometría. De esta manera, si evolucionan conceptos básicos tales como vector, ángulo y producto punto también lo hará el concepto de perpendicularidad.

En la descomposición genética preliminar que se propuso en esta investigación, se habían considerado tres tipos de Acciones: geométricas, numéricas y algebraicas; es decir, realizar trans-

formaciones sobre vectores descritos en cualquier tipo de interpretación para determinar si son o no perpendiculares. Se creía que trabajar con vectores dados de forma general (por ejemplo, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) era igual que hacerlo con vectores sobre el plano cartesiano (presentados como flechas) o con vectores de componentes numéricas. Sin embargo, con base en los resultados del análisis de datos evidenciamos que esto requiere un nivel de abstracción de los conceptos involucrados, que implican más que una Acción; por tanto, incluimos un estado intermedio entre la concepción Acción y Proceso. Dado que los estudiantes pueden pensar en la perpendicularidad entre dos vectores; sin embargo, se evidenció que aún en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , no todos pueden determinar cuándo dos vectores u y v cualesquiera son perpendiculares, establecer condiciones sobre una variable para que dos vectores sean perpendiculares o definir un conjunto infinito de vectores perpendiculares a otro. En la figura 20 se define este estado intermedio solo a través de dos tipos geométrica asociado a la perpendicularidad y numérica donde se destaca el trabajo sobre la operación producto punto. La construcción del proceso de ortogonalidad está determinado por la experiencia de los estudiantes de tipo 1 y 2 con diferentes vectores en diversos espacios vectoriales. Por ejemplo, el espacio de polinomios de grado menor o igual a n , el espacio de matrices, el espacio de funciones. Analizar por ejemplo, una vez definido un producto interno, que dos funciones pueden o no ser ortogonales.

Se considera que esta generalización de perpendicularidad en \mathbb{R}^n es lo que define la estructura Proceso del concepto de ortogonalidad. Un individuo con una concepción Proceso de ortogonalidad puede pensar en dos o más vectores cualesquiera perpendiculares entre sí o que forman un ángulo recto aún cuando esto es imposible de visualizar, dado que no existe una forma definida

por la comunidad matemática. Es decir, podrá determinar si dos vectores u y v son ortogonales sin importar cómo y dónde estos estén definidos. Adicionalmente, puede reflexionar sobre características o implicaciones de la ortogonalidad que le permiten establecer resultados sin la necesidad de realizar Acciones sobre los vectores; por ejemplo, que un conjunto de n vectores en \mathbb{R}^m no puede ser ortogonal si $n > m$ o que un conjunto ortogonal de vectores es linealmente independiente.

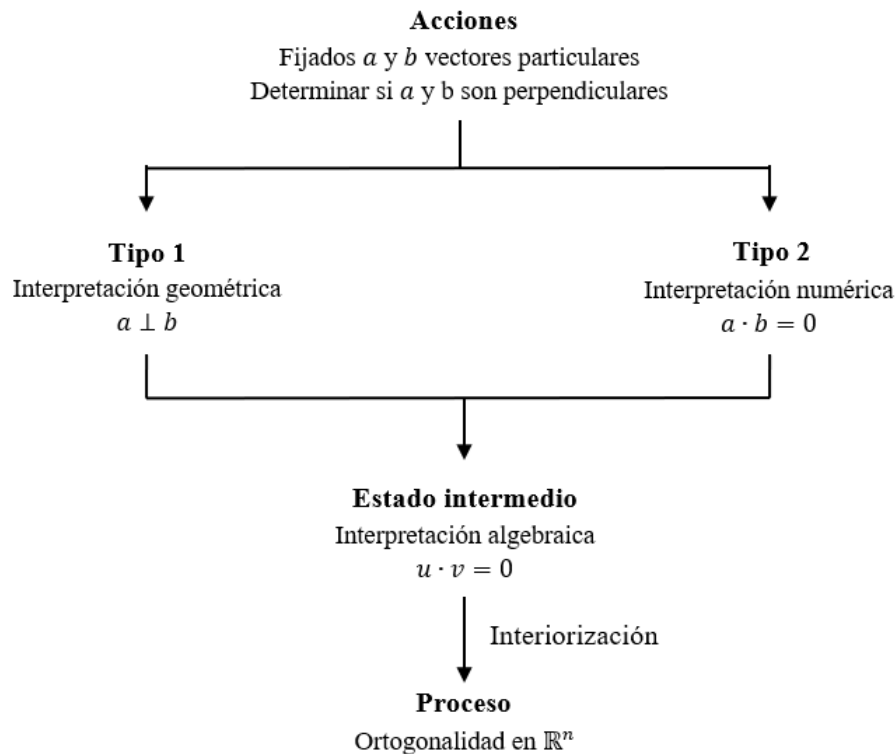


Figura 21. Descomposición genética refinada de ortogonalidad.

Dada la complejidad del concepto y su reducida participación dentro de un curso de álgebra lineal I es difícil estudiar la estructura Objeto o Esquema en los estudiantes. Sin embargo, se considera que la estructura Objeto tiene que ver con involucrar otros conceptos, donde el uso de la ortogonalidad toma un papel secundario pero necesario para responder o demostrar tareas

asociadas a dichos conceptos. A continuación presentamos tres tareas en las cuales creemos que la ortogonalidad puede ser vista como un todo en un nivel elemental, es decir, considerando únicamente el espacio de \mathbb{R}^n .

- a. Si v_1, v_2, \dots, v_n es un conjunto ortogonal de vectores distintos de cero en \mathbb{R}^n , demuestre que este conjunto es linealmente independiente.
- b. Sea W un subespacio de \mathbb{R}^n y de dimensión n . Sea $\beta_1 = w_1, w_2, \dots, w_p$ una base ortogonal de W y $\beta_2 = v_1, v_2, \dots, v_q$ una base ortogonal para W^\perp .
 - a) ¿Por qué $w_1, w_2, \dots, w_p, v_1, v_2, \dots, v_q$ es un conjunto ortogonal? Justifique.
 - b) ¿Por qué el conjunto del inciso a., genera a \mathbb{R}^n ?
 - c) Demuestre que $\dim W + \dim W^\perp = n$.
- c. Sea $w = (-3, 5)$ y $z = (x, y)$.
 - a) Describa algebraica y geoméricamente todos los vectores z que son ortogonales a w .
 - b) Muestre que el conjunto de todos los vectores ortogonales a w es un subespacio de \mathbb{R}^2 .

En cada una de estas tareas es necesario comprender el concepto de ortogonalidad y hacer uso de su definición de manera constante para poder responder las preguntas planteadas; en algunos momentos se debe tener presente la visión general del problema y las implicaciones del concepto de ortogonalidad (encapsulación) para buscar la respuesta, sin embargo, también es necesario volver a la ortogonalidad de manera específica (desencapsulación) para aplicar su definición

y saber de qué manera contribuye a la solución. Consideramos que la evolución de esta estructura está estrechamente relacionada con el desarrollo de otros conceptos del álgebra lineal y conceptos subyacentes al de ortogonalidad tales como proyección ortogonal, bases ortogonales, conjuntos ortonormales, matrices ortogonales, subespacios ortogonales, complemento ortogonal, entre otros.

Todos los elementos abordados hasta este momento comprenden el desarrollo del concepto de ortogonalidad en \mathbb{R}^n , como ya se ha resaltado en varias ocasiones, este concepto aún puede evolucionar cuando otros conceptos lo hacen. En este caso, daremos algunas ideas relacionadas a la construcción del concepto de ortogonalidad en un espacio vectorial con producto interno V , es decir, la descomposición genética previamente descrita correspondería a un caso particular de la descomposición genética propuesta a continuación.

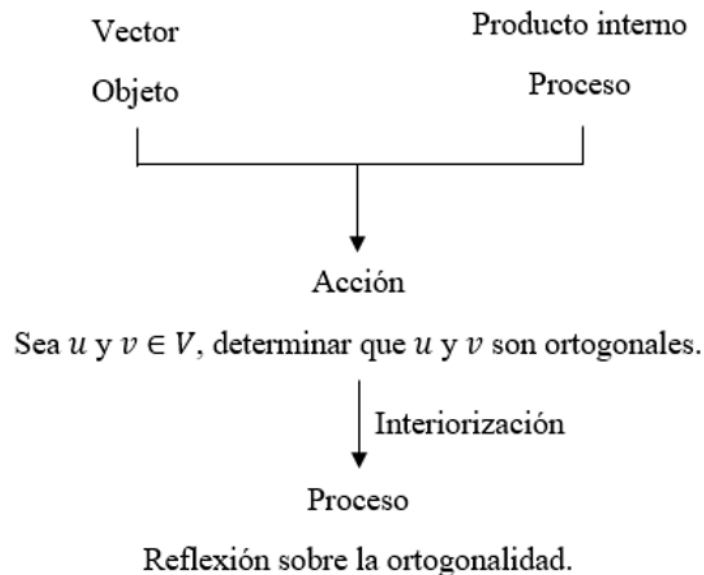


Figura 22. Descomposición genética general del concepto de ortogonalidad.

Para la construcción del concepto de ortogonalidad en un espacio vectorial con producto interno V son necesarias algunas construcciones previas, el concepto de vector como Objeto y el concepto de producto interno como Proceso. La concepción Objeto de vector permite visualizar a los vectores como elementos de un espacio vectorial cualquiera con los cuales se pueden realizar transformaciones u operaciones; la estructura Proceso de producto interno es fundamental puesto un individuo debe ser consciente de que no toda operación establecida entre dos vectores es un producto interno, es decir, un producto interno debe cumplir con unas propiedades y además, se puede definir de diferentes formas.

La concepción Acción del concepto de ortogonalidad tienen que ver con la capacidad del individuo para determinar si un par o un conjunto de vectores es ortogonal, lo cual dependerá del producto interno dado y de la aplicación de la definición de ortogonalidad de manera general; esto es u y v son ortogonales si $\langle u, v \rangle = 0$. A diferencia de la descomposición genética para \mathbb{R}^n , no consideramos que las Acciones se producen en diferentes tipos de interpretación, puesto que las representaciones geométricas ya no tienen el mismo nivel de validez cuando el espacio vectorial cambia; respecto a la interpretación algebraica, aún creemos que requiere algo más que una Acción por la dificultad de involucrar vectores de forma general y uso de variables, hecho que pudimos evidenciar en \mathbb{R}^n .

Un aspecto que consideramos importante destacar es que parece que no todas las Acciones son de un mismo tipo, es decir, existen algunas Acciones que, ya sea por los conceptos previos

necesarios o los conceptos involucrados son más complejas que otras; estas Acciones las denominamos previamente como Acciones abstractas. A continuación se presentan tres situaciones en donde, pese a que la pregunta o el objetivo de la tarea es el mismo, se evidencia que las Acciones requeridas para responder no son iguales.

- a. Sean los vectores $u = (-2, 3)$ y $v = (5, 1)$ en \mathbb{R}^2 . Determine si u y v son ortogonales.
- b. Sean A y $B \in M_{22}$ con el siguiente producto interno

$$\langle A, B \rangle = tr(A) + tr(B).$$

Si $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$, determine si A y B son ortogonales.

- c. Determine si las funciones $f = x$ y $g = 3x - 2$ en $C[0, 1]$ son ortogonales con el producto interno usual en este espacio.

La estructura Proceso está asociada a la reflexión e interiorización de estas Acciones, sin embargo, dada la naturaleza del concepto matemático estudiado, encontramos que no hay una forma posible de determinar, salvo en algunos casos particulares que tienen que ver con la dimensión del espacio, si un par o un conjunto de vectores es ortogonal sin antes calcular el producto interno entre ellos. Por este motivo, consideramos que esta estructura está relacionada con la reflexión sobre el concepto de ortogonalidad y la construcción de conjuntos ortogonales o productos internos que permitan que dos vectores sean ortogonales; esto se refleja en las siguientes situaciones:

a. Sea el espacio vectorial

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Con el producto interno denifido por $\langle A, B \rangle = tr(AB^t)$. Determine un conjunto ortogonal a partir del vector:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b. Sea $u = (2, 1)$ y $v = (-3, 4)$, encuentre un producto interno tal que u y v sean ortogonales.

La estructura Objeto parece más compleja que las demás puesto que se debe buscar una forma en la cual la ortogonalidad pueda ser vista como un todo y además, se puedan establecer operaciones o transformaciones con este concepto. Por este motivo, consideramos necesario realizar nuevas investigaciones empíricas de tal manera que se cuente con mayor información para describir el mecanismo de encapsulación y por tanto esta estructura. Con base en nuestra investigación, creemos que esta estructura puede estar definida por las implicaciones o usos de la ortogonalidad, esto permitiría visualizar a la ortogonalidad como un todo y realizar nuevas transformaciones con este concepto (la ortogonalidad aplicada en conceptos subyacentes o derivados de este tales como proyección ortogonal, bases ortogonales, matrices ortogonales, subespacios or-

togonales, complemento ortogonal, etc.). Con el fin de ejemplificar este punto, tomaremos como referencia uno de los problemas planteados anteriormente: Considere el siguiente producto interno en \mathbb{R}^2 , $\langle u, v \rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2$ y sean $w = (-3, 5)$ y $z = (x, y)$.

- a. Describa algebraica y geoméricamente todos los vectores z que son ortogonales a w .
- b. Muestre que el conjunto de todos los vectores ortogonales a w es un subespacio de \mathbb{R}^2 .

Para el inciso a., sea $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, los vectores w y z deben ser ortogonales, esto es, $\langle w, z \rangle = 0$, de donde $\langle (-3, 5), (x, y) \rangle = 2(-3)x + 3(5)y = -6x + 15y = 0$, de donde la recta $y = \frac{6}{15}x$ describe todos los vectores ortogonales al vector w . Por otra parte, para el inciso b., debemos probar que se cumplen las dos propiedades de cerradura, la suma y multiplicación por un escalar. Sea S el conjunto de todos los vectores perpendiculares a w , entonces:

- a. Sea u y v que pertenecen a S , entonces $\langle w, u \rangle = 0$ y $\langle w, v \rangle = 0$; por propiedades del producto interno se tiene que $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle = 0 + 0 = 0$.
- b. Sea u que pertenece a S y α que pertenece a \mathbb{R} , veamos que αu también pertenece a S . Se tiene que $\langle w, u \rangle = 0$ y por propiedades del producto interno $\langle w, \alpha u \rangle = \alpha \langle w, u \rangle = \alpha 0 = 0$.

El concepto de ortogonalidad visto como un todo nos permitió encontrar y describir el conjunto de vectores ortogonales a un vector dado; aplicar nuevamente el concepto de ortogonalidad de manera “interna”, sobre los elementos de este conjunto, nos permitió probar que dicho conjunto es un subespacio de \mathbb{R}^2 . La definición del concepto de ortogonalidad por sí sola no nos dice suficiente frente a una tarea, es por ello que cuando se ponen en juego otros conceptos, debemos ser

conscientes de las implicaciones, usos o el papel que toma el concepto de ortogonalidad.

Respecto al Esquema, se sabe que es una colección coherente de construcciones relacionadas con el concepto y sus niveles de evolución están determinados por las relaciones que un estudiante logra establecer con otros conceptos. Por lo tanto, creemos que la evolución de los conceptos vector, espacio vectorial y producto interno permitirá la evolución del concepto de ortogonalidad y ampliará la visión y abstracción que los estudiantes tienen sobre el concepto de interés. De esta manera, un estudiante podría pensar en la ortogonalidad, sus características, relaciones establecidas y conceptos subyacentes a este en cualquier espacio vectorial con un producto interno particular.

7.2. Implicaciones didácticas

Durante nuestra investigación pudimos constatar que existen diversas formas de desarrollar un primer curso de álgebra lineal, en particular, encontramos que existen 4 posibles opciones de programas para este curso que tienen algunos temas propuestos como obligatorios y otros como opcionales; sin embargo, cada docente es autónomo para escoger el enfoque que le quiera dar a su curso siempre y cuando cumpla con los contenidos mínimos del mismo. El desarrollo del concepto de ortogonalidad es uno de estos temas opcionales y solo se aborda de manera amplia en ninguno de los programas; claramente elegir una u otra postura a la hora de estudiar un concepto podría limitar o ampliar la construcción del mismo. Es por ello que consideramos importante tener presente todos los posibles caminos que permitan la construcción del concepto matemático en cuestión y

cuál favorecerá su comprensión.

Esta variedad de posturas también se evidenció en el análisis de libros de textos, donde cada autor propone y desarrolla conceptos de una forma específica. Respecto al tratamiento del concepto de ortogonalidad se observó que tanto Poole como Del Valle tuvieron un acercamiento similar; desde lo particular (ortogonalidad en \mathbb{R}^2) hacia lo general (ortogonalidad en \mathbb{R}^n y otros espacios vectoriales). Por otra parte, el texto de Hoffman & Kunze se propone iniciar desde lo general para luego dar ejemplos particulares en diferentes espacios vectoriales; parte de la definición más amplia de ortogonalidad, dada en términos del producto interno y no del producto punto, lo cual es poco usual en un curso de álgebra lineal I, pero que consideramos vale la pena profundizar.

También pudimos observar que en muchas ocasiones, tanto en libros de texto como en cursos de álgebra lineal I el tratamiento del concepto de ortogonalidad puede llegar a ser muy superficial y automático; definido únicamente como sinónimo de perpendicularidad, sin profundizar mucho al respecto y mecanizado a través de la operación producto punto, idea que permanece en la mayoría de los estudiantes debido a los clásicos y repetitivos ejercicios a los que estamos acostumbrados. Con base en esta investigación, vimos que conocer la definición de ortogonalidad y aplicar el producto punto entre vectores no es suficiente para resolver algunas tareas y no garantiza la comprensión del mismo. Por este motivo, es importante replantear la enseñanza en general de cada concepto desarrollado con el fin de mejorar su construcción.

Consideramos que tanto la entrevista como los resultados acá presentados pueden ser refinados a través de otras investigaciones. Diseñar situaciones matemáticas ricas no es una tarea sencilla, sin embargo, debemos reflexionar sobre la gran variedad de actividades que existen y usualmente estamos llevando al aula de clase con el fin de que estas actividades permitan una evolución en las concepciones que los estudiantes tienen sobre determinados conceptos y de esta manera, desarrollar una mejor comprensión sobre éstos. Por tanto, se recomienda considerar cada una de las preguntas que se proponen en esta entrevista y mejorarlas; por ejemplo, creemos que una situación matemática donde sea necesario establecer otras operaciones y otros conceptos relacionados al de ortogonalidad permitiría evidenciar y construir estructuras más complejas.

7.3. Reflexiones para futuras investigaciones

Los resultados obtenidos en esta investigación pueden ser los primeros aportes al estudio de algunos conceptos que aún no han sido considerados de manera directa tales como ortogonalidad o producto interno; por tanto, creemos que se debe investigar y profundizar más sobre estos temas que juegan un papel importante dentro del álgebra lineal. Claramente el camino propuesto en la descomposición genética refinada para la construcción del concepto de ortogonalidad puede ser mejorado en gran manera a partir de futuras investigaciones, sería interesante poner a prueba este modelo cognitivo teniendo en cuenta las consideraciones didácticas y generando preguntas profundas que inviten a la reflexión, abstracción y relación con otros conceptos, de esta manera se podría refinar y estudiar con más detalle la evolución de las estructuras.

Es necesario continuar con el estudio del concepto de ortogonalidad con el objetivo de dar información más detallada sobre cada estructura, especialmente las estructuras Objeto y Esquema. Inicialmente no nos atrevimos a dar una descripción sobre lo que implica la comprensión del concepto en estos niveles debido a la complejidad de este; en la descomposición genética refinada mencionamos algunas ideas sobre esta estructura y lo que podría hacer un estudiante con este tipo de concepción. Recomendamos estudiar la construcción del concepto de ortogonalidad en estudiantes avanzados que hagan parte de cursos posteriores tales como un segundo curso de álgebra lineal o un curso de álgebra lineal de maestría en matemáticas, así podría generarse un nuevo camino que involucre el concepto en su máximo nivel de comprensión. En los anexos se encuentran algunas preguntas que pueden contribuir en cada caso.

También se recomienda tener en cuenta la perspectiva observada en el libro de texto de Hoffman y Kunze, la cual involucra un tratamiento general del tema y luego particularizarlo con diversos ejemplos en diferentes espacios vectoriales. Creemos que es algo difícil de llevar a cabo puesto que rompe con la tradicionalidad de los cursos de álgebra lineal e implica desarrollar un nivel más alto de abstracción sobre los conceptos; esto también implicaría profundizar primero sobre construcciones previas necesarias, por ejemplo, se requeriría de una concepción Objeto de vector, una concepción Proceso de espacio vectorial y una concepción Proceso de producto interno. Por otra parte, pensamos que este camino también puede tener algunas ventajas; vimos que los estudiantes estaban limitados debido a su fuerte inclinación por las representaciones geométricas o el ángulo entre los vectores, lo cual generaba dificultades en el proceso de generalización y abstrac-

ción.

Finalmente, es importante generar espacios de reflexión y discusión sobre las ideas que para el profesor pueden parecer triviales o que los estudiantes temen preguntar, por ejemplo, notamos que para los estudiantes no es fácil pensar en los espacios de \mathbb{R}^n cuando $n > 3$, mucho menos cuando sus nociones geométricas son cuestionadas en este tipo de espacios. También creemos conveniente llegar a discutir las nociones de ortogonalidad y qué significa o implica este concepto sobre otros espacios vectoriales tales como el espacio de matrices, polinomios y funciones continuas; donde simplemente se hace uso de la definición de un producto interno particular, sin embargo, podemos tomar como referencia las nociones construidas en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 . La geometría del espacio euclidiano todavía puede guiarnos aquí, aun cuando no se puedan visualizar las cosas de la misma forma (Poole, 2011).

Referencias Bibliográficas

- Appova, A. and Berezovski, T. (2013). Commonly identified students' misconceptions about vectors and vectors operations. *In The Proceedings of RUME 16*, 2:23–32.
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., and Weller, K. (2014). Apos theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education.
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Mathews, D., and Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *In Research in collegiate mathematics education*. Citeseer.
- Bagley, S. and Rabin, J. (2013). Computational thinking in linear algebra. *In The Proceedings of RUME 16*, 1:65–75.
- Bagley, S. and Rabin, J. M. (2016). Students' use of computational thinking in linear algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2(1):83–104.
- Caglayan, G. (2018). Coordinating analytic and visual approaches: Math majors' understanding of orthogonal hermite polynomials in the inner product space $p_n(\mathbb{R})$ in a technology-assisted learning environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, 52:37–60.
- Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., and Porter, A. D. (1993). The linear algebra curriculum study group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, 24(1):41–46.

- Dreyfus, T. and Hillel, J. (1998). Reconstruction of meanings for function approximation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3(2):93–112.
- Dubinsky, E. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In *Advanced mathematical thinking*, pages 95–126. Springer.
- Gueudet-Chartier, G. (2004). Should we teach linear algebra through geometry? *Linear algebra and its applications*, 379:491–501.
- Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. In *On the teaching of linear algebra*, pages 177–189. Springer.
- Hillel, J. and Dreyfus, T. (2005). What's a best fit? construction of meaning in a linear algebra session. In *Meaning in mathematics education*, pages 181–203. Springer.
- Kú, D., Trigueros, M., and Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría apoe. *Educación matemática*, 20(2):65–89.
- Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de pirie y kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría apoe. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 6(3):221–278.
- Oktaç, A., Trigueros, M., and Vargas, X. N. (2006). Understanding of vector spaces—a viewpoint from apos theory. In *CD-ROM Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics*. Turkish Mathematical Society Istanbul.

- Parraguez, M. and Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of apos theory. *Linear algebra and its applications*, 432(8):2112–2124.
- Roa-Fuentes, S. and Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 13(1):89–112.
- Roa-Fuentes, S. and Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría apoe. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 15(2):199–232.
- Salgado, H. and Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría apoe. *Educación matemática*, 26(3):75–107.
- Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In *On the teaching of linear algebra*, pages 209–246. Springer.
- Sierpinska, A., Dreyfus, T., and Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: The case of linear transformations. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1):7–40.
- Sierpinska, A., Nnadozie, A., and Oktaç, A. (2002). A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra. Retrieved May, 2:2011.
- Stewart, S. and Thomas, M. (2011). Thinking about the teaching of linear algebra. *CULMS Newsletter*, 2:29–35.

Trigueros, M. and Oktaç, A. (2005). La théorie apos et l'enseignement de l'algèbre linéaire. In *Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 10, pages 157–176.

Trigueros, M., Oktaç, A., and Manzanero, L. (2007). Understanding of systems of equations in linear algebra. In *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, volume 5, pages 2359–2368.

Uicab, R. and Oktaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica: proyecto conacyt 2002-c01-41726s. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(3):459–490.

Apéndices

Apéndice A. Programa de álgebra lineal I

1. Preliminares: Principio de inducción matemática: Aplicaciones. Sucesiones recursivas coeficientes binomiales y el teorema del binomio. El campo de los Números complejos: representación geométrica, potencias y raíces Complejas. Teorema Fundamental del álgebra.
2. n como espacio vectorial y como espacio euclidiano: Vectores geométricos. Vectores y coordenadas. Suma de vectores, producto de un vector por un escalar, producto escalar de vectores, producto vectorial y proyecciones. Rectas y planos en el espacio.
3. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales: Sistemas de ecuaciones lineales. Solución general de un sistema de ecuaciones lineales. Álgebra de matrices. Operaciones elementales entre filas. Matrices equivalentes por filas. Matrices escalonadas reducidas por filas. Matrices invertibles. Matrices elementales. Algoritmo para encontrar la inversa de una matriz cuadrada.
4. Determinantes: Ampliación del concepto de volumen. Cálculo de determinantes por diagonalización. Fórmula del producto y sus consecuencias. Fórmulas de expansión para calcular determinantes. Determinante de la transpuesta. Regla de Cramer.

Apéndice B. Programa de álgebra lineal II

1. Espacios vectoriales: Definición y propiedades elementales. Subespacios. Dependencia e independencia lineal. Bases y dimensión. Ejemplos de espacios de dimensión infinita. Coordenadas. Cambio de base.
2. Espacios con producto interno: Producto interno. Ortogonalidad. Bases ortonormales. Procesos de ortogonalización de Gram-Schmidt. Complemento ortogonal. Proyección de un vector sobre un subespacio. Método de los mínimos cuadrados.
3. Transformaciones Lineales: Transformaciones lineales. Núcleo, imagen y rango. Álgebra de operadores lineales. Teorema de la dimensión. Aplicaciones geométricas. Representación matricial de transformaciones lineales.
4. Valores y vectores propios: Valores y vectores propios. Polinomio característico. Diagonalización y vectores propios. Polinomio minimal y característico de operadores lineales. El teorema de Cayley-Hamilton.

Apéndice C. Entrevista para álgebra lineal II

1. Sea $V = C[-1, 1]$ el conjunto de las funciones continuas en el intervalo $[-1, 1]$ en \mathbb{R} con el producto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

- a) Muestre que el conjunto $\{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\}$ no es ortogonal.
- b) Muestre que $f_1(t) = t$ y $f_2(t) = t^2$ son ortogonales y verifique el Teorema de Pitágoras para $f_1(t) = t$ y $f_2(t) = t^2$.
- c) Calcule la proyección de t^5 sobre t . Haga un bosquejo de los gráficos de t^5 y $\text{proy}_t t^5$ en el mismo sistema de coordenadas.
- d) Escriba a t^5 como una suma de dos polinomios ortogonales $p_1(t)$ y $p_2(t)$ siendo $p_1(t)$ un múltiplo escalar de t .

2. Sea $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in M_{22} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ y $V = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{22} : c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

Demuestre que $M_{22} = U \oplus V$; es decir:

- a) $U \cap V = \{0\}$.
- b) $M_{22} = U + V$, (**Sugerencia:** Pruebe que cualquier matriz de 2×2 se puede escribir como la suma de una matriz de U y una matriz de V).

3. Sea $u = (2, 6)$ y $v = (7, 1)$. Escriba u como la suma de dos vectores ortogonales, uno en $\text{gen}\{v\}$ y el otro ortogonal a v . ¿Es posible escribir cualquier vector en \mathbb{R}^2 de esta misma forma?
4. Sea W un subespacio de un espacio vectorial V con producto interno y de dimensión n . Sea $\beta_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ una base ortogonal de W , y $\beta_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ una base ortogonal para W^\perp .
- a) ¿Por qué $\{w_1, \dots, w_p, v_1, \dots, v_q\}$ es un conjunto ortogonal? Justifique.
- b) ¿Por qué el conjunto del inciso a) genera a V ? Justifique.
- c) Demuestre que $\dim W + \dim W^\perp = n$.
5. Considere el producto interno $\langle u, v \rangle = 4u_1v_1 + 5u_2v_2$.
- a) Describa algebraica y geoméricamente todos los vectores $z = (x, y)$ que son ortogonales a $w = (-3, 5)$.
- b) Muestre que el conjunto de todos los vectores ortogonales a w es un subespacio de \mathbb{R}^2 .

Apéndice D. Entrevista para Maestría en Matemáticas

1. Sea $M_{3 \times 3}$ el espacio vectorial de las matrices de 3×3 dotado con el producto interno:

$$(A, B) = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} a_{ij} b_{ij},$$

$$\text{donde } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}.$$

a) Si $V = \{A \in M_{3 \times 3} : A \text{ es simétrica}\}$ y $W = \{A \in M_{3 \times 3} : A \text{ es antisimétrica}\}$, muestre que $W = V^\perp$.

b) Muestre explícitamente que si $A \in M_{3 \times 3}$, entonces $A = B + C$, donde $B \in V$ y $C \in W$.

Concluya así que toda matriz se puede escribir como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

(Una matriz A es simétrica si $A^T = A$ y una matriz A es antisimétrica si $A^T = -A$.)

2. Sea $T : V \rightarrow W$ un isomorfismo. Si $(\cdot | \cdot)_V$ es un producto interior en V , demuestre que

$$(w_1 | w_2)_W = (v_1 | v_2)_V,$$

define un producto interior sobre W , donde $T(v_1) = w_1$ y $T(v_2) = w_2$.

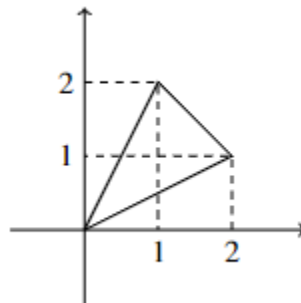
3. Sean $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$ y $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\}$. ¿Existe un producto interno en \mathbb{R}^2 tal que $H = L^\perp$? En general, si H y L son subespacios de \mathbb{R}^n tales que $\dim(H) + \dim(L) = n$, entonces ¿existe un producto interno en \mathbb{R}^n tal que $H = L^\perp$? ¿Qué condiciones deben cumplir H y L para que exista un producto interno donde $H = L^\perp$? Argumente ampliamente sus respuestas. (**Sugerencia:** Use el punto anterior.)
4. Sea $(|)$ el producto interior en \mathbb{R}^2 definido por

$$((x, y)|(a, b)) = 5xa - 4xb - 4ya + 5yb.$$

Demuestre que el triángulo representado en la figura, es un triángulo rectángulo. Calcule la longitud de cada lado y verifique el Teorema de Pitágoras; es decir

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

donde a y b representan la longitud de los catetos y c la longitud de la hipotenusa.



5. Sea P_2 el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a 2, junto con el producto

interno $(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.

- a) Encuentre una base ortogonal de $W = \{p(x) \in P_2 : p(0) = p(1)\}$.
- b) Encuentre W^\perp .
- c) Calcule el polinomio en W más cercano a $f(x) = x - 2x^2$.