

El desarrollo de habilidades de visualización: un experimento de enseñanza de geometría con
estudiantes de básica secundaria de la Institución Educativa San Rafael de Chucurí

Jason Andrés Díaz Suárez

Trabajo de Grado para optar el título de Licenciado en Matemáticas

Directora:

Jenny Patricia Acevedo Rincón

Doctora en Educación

Codirector:

Jorge Enrique Fiallo Leal

Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2026

Dedicatoria

A mi amada July, por su paciencia en los momentos difíciles,
por su amor incondicional y por acompañarme a cumplir este
objetivo.

A mi abuela Elda, por enseñarme que todos los sueños se
pueden lograr cuando se persiguen con pasión y amor.

Agradecimientos

A Dios por darme salud, fortaleza y acompañarme en los momentos de tribulación.

A mis padres y a mi abuela Rosalba, quienes han sido un pilar fundamental en la consecución de este objetivo.

A la profesora Jenny por ser mi guía en la realización de este proyecto, por sus consejos y motivarme en los momentos de adversidad.

Al profesor Jorge Fiallo por su tiempo y disposición para ser parte de este proyecto.

A mi gran amigo Yorman, por su valiosa amistad y los momentos de alegría que compartimos en esta etapa universitaria.

A mis suegros por ayudarme en los momentos que necesité, mi cariño y respeto hacia ellos.

A todos los profesores con quienes he tenido la fortuna de compartir esta etapa académica, por sus enseñanzas, su dedicación y servirme de inspiración para mejorar cada día.

Tabla de Contenido

	Pág.
Introducción	12
1. Aproximación al problema de investigación	14
1.1 Descripción y planteamiento del problema.....	14
1.2. Justificación	17
1.3. Objetivos	19
2. Referentes	20
2.1. Antecedentes	20
2.2. Marco teórico	23
3. Diseño Metodológico.....	30
3.1 Método	30
3.2. Contexto de la investigación.....	31
3.3. Fases de la investigación.....	32
3.3.1. Preparación del experimento.....	32
3.3.2. Experimentación	36
3.3.3. Análisis retrospectivo.....	37
4. Experimento de enseñanza.....	39
4.1. Preparación del experimento.....	39
4.2. Diseño y análisis de la prueba diagnóstica	40
4.3. Análisis del desempeño individual de cada estudiante	44
4.3.1. Tarea 1. Dibujando formas generadas con las piezas del logikubo	46
4.3.2. Tarea 2. Identificación de las piezas del logikubo que conforman un sólido	47

4.3.3. Tarea 3. Piezas del logikubo que se transforman.....	49
4.3.4. Tarea 4. Construye la figura usando tres piezas del logikubo.	50
4.3.5. Tarea 5. Vistas de un objeto tridimensional.....	51
4.3.6. Tarea 6. De lo tridimensional a lo bidimensional.....	52
4.3.7. Tarea 7. Recuerda y construye la figura mostrada en el video	53
4.4. Diseño preliminar del experimento de enseñanza	54
4.4.1. Primera parte.....	55
4.4.2. Segunda parte.....	61
4.4.3. Tercera parte	67
4.4.4. Cuarta parte.....	73
5. Análisis retrospectivo.....	79
5.1. Coordinación óculo-motora	79
5.2. Reconocimiento de las posiciones en el espacio.....	82
5.3. Reconocimiento de las relaciones en el espacio	85
5.4. Identificación visual.....	87
5.5. Conservación de la percepción	88
5.6. Discriminación visual	89
5.7. Memoria visual	90
5.8. Evaluación final	93
6. Conclusiones.....	101
Referencias Bibliográficas	103
Apéndices.....	107

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1. <i>Habilidades de visualización</i>	25
Tabla 2. <i>Tipos de imágenes</i>	29
Tabla 3. <i>Características generales del experimento</i>	32
Tabla 4. <i>Tareas, indicadores y tipos de respuesta de la prueba diagnóstico</i>	40
Tabla 5. <i>Desempeño individual de cada estudiante en la prueba diagnóstica</i>	45
Tabla 6. <i>Sesión 1</i>	55
Tabla 7. <i>Sesión 2</i>	61
Tabla 8. <i>Sesión 3</i>	67
Tabla 9. <i>Sesión 4</i>	74

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1. <i>Resultados pruebas saber 11 matemáticas</i>	16
Figura 2. <i>Resultados de la prueba en grado noveno Quiero Ser, Quiero Saber</i>	17
Figura 3. <i>Tipos de representación plana de un sólido construido con piezas de los logikubos.</i> 27	27
Figura 4. <i>Piezas de los logikubos</i>	28
Figura 5. <i>Experimento de enseñanza</i>	30
Figura 6. <i>Tarea 03 de la prueba diagnóstica</i>	38
Figura 7. <i>Representación isométrica de la tarea 1</i>	47
Figura 8. <i>Identificación de piezas del logikubo</i>	48
Figura 9. <i>Ejemplos de respuestas de la tarea 3</i>	49
Figura 10. <i>Representación tridimensional tarea 4</i>	50
Figura 11. <i>Representación de diferentes vistas de un objeto tridimensional</i>	52
Figura 12. <i>Representación de diferentes vistas del objeto</i>	53
Figura 13. <i>Representación de las posiciones espaciales</i>	54
Figura 14. <i>Letras construidas con las piezas del logikubo</i>	79
Figura 15. <i>Representaciones en el papel de algunas piezas del logikubo</i>	80
Figura 16. <i>Representaciones erróneas de algunas piezas del logikubo.</i>	80
Figura 17. <i>Representación isométrica de la pieza con forma de “T” del logikubo</i>	81
Figura 18. <i>Vistas de la pieza con forma de “Z” usando la estructura en acrílico.</i>	82
Figura 19. <i>Representación bidimensional de dos piezas del logikubo</i>	84
Figura 20. <i>Error de representación de las vistas de la pieza del logikubo color naranja</i>	84
Figura 21. <i>Construcciones realizadas en la segunda sesión del experimento</i>	85

Figura 22. <i>Construcción realizada por un estudiante en la sesión dos</i>	87
Figura 23. <i>Estrategia de solución de identificación visual</i>	88
Figura 24. <i>Estrategia de solución por un estudiante en la sesión tres</i>	89
Figura 25. <i>Error identificado en la habilidad de conservación de la percepción del tamaño</i>	89
Figura 26. <i>Representaciones erróneas de la pieza de color verde del logikubo</i>	90
Figura 27. <i>Estrategia de solución ante una tarea propuesta en la sesión cuatro.</i>	91
Figura 28. <i>Representación plana de construcciones hechas con los logikubos</i>	92
Figura 29. <i>Construcciones realizadas por los estudiantes</i>	93
Figura 30. <i>Representación isométrica de un sofá</i>	94
Figura 31. <i>Vistas obtenidas de la imagen mostrada en la tarea tres</i>	95
Figura 32. <i>Construcciones realizadas con las piezas del logikubo en la tarea cuatro</i>	96
Figura 33. <i>Errores encontrados en la tarea cinco</i>	97
Figura 34. <i>Respuestas de los estudiantes en la tarea cinco</i>	97
Figura 35. <i>Representaciones hechas por los estudiantes en la tarea seis</i>	98

Lista de Apéndices

	pág.
Apéndice A. Prueba diagnóstica	107
Apéndice B. Consentimiento informado.....	110
Apéndice C. Asentimiento informado	111

Resumen

Título: El desarrollo de habilidades de visualización: un experimento de enseñanza de geometría con estudiantes de básica secundaria de la Institución Educativa San Rafael de Chucurí*

Autor: Jason Andrés Díaz Suárez **

Palabras Clave: visualización, *logikubos*, habilidades de visualización, representación, pensamiento espacial.

Descripción:

En esta investigación se reporta un experimento de enseñanza llevado a cabo con 11 estudiantes de grado noveno cuyas edades están comprendidas entre los 14 y 17 años, estos estudiantes han recibido poca formación en geometría en su trayectoria escolar y su desempeño en matemáticas es bajo según los resultados de las pruebas externas. El estudio tiene lugar en la institución educativa San Rafael de Chucurí, sede campo galán, ubicada en el sector rural de Barrancabermeja, Santander. El objetivo de esta investigación fue desarrollar las habilidades de visualización usando como recurso mediador los *logikubos*, para lograr esto, se implementó un experimento de enseñanza ejecutada en cuatro sesiones de clase que incluyen una serie de tareas diseñadas con *Geogebra* y *ThinkerCAD*. Los datos proceden de videograbaciones, notas de campo y respuestas escritas de los estudiantes. Los resultados muestran el potencial de los *logikubos* para mejorar las habilidades de visualización, así como su capacidad para favorecer los procesos de representación y comunicación. También se destaca la importancia de registrar los movimientos corporales, gestos y explicaciones de los estudiantes que permiten complementar sus respuestas escritas y evidenciar sus habilidades de visualización. Por otra parte, la aplicación de la secuencia de actividades ha permitido descubrir las estrategias de solución y errores que cometen los estudiantes frente a los diferentes tipos de tareas. Lo anterior, permite confirmar investigaciones previas entorno a la visualización. Finalmente, se sugieren ajustes al experimento de enseñanza y algunas reflexiones del investigador.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en matemáticas. Directora: Jenny Patricia Acevedo Rincón. Doctora en Educación. Codirector: Jorge Enrique Fiallo Leal. Doctor en Didáctica de la Matemática.

Abstract

Title: The development of visualization skills: A geometry teaching experiment with basic secondary students at Institución Educativa San Rafael in Chucurí *

Author: Jason Andres Diaz Suarez**

Keywords: visualization, *logikubos*, visualization skills, representation, spatial thinking.

Description:

This research reports on a teaching experiment carried out with 11 ninth-grade students aged between 14 and 17. These students have received little training in geometry during their school career and their performance in mathematics is low according to the results of external tests. The study took place at the San Rafael de Chucurí educational institution, Campo Galán campus, located in the rural area of Barrancabermeja, Santander. The objective of this research was to develop visualization skills using Logikubs as a mediating resource. To achieve this, a teaching sequence was implemented in four class sessions that included a series of tasks designed with Geogebra and ThinkerCAD. The data comes from video recordings, field notes, and written responses from students. The results show the potential of logikubos to improve visualization skills, as well as their ability to promote representation and communication processes. The importance of recording students' body movements, gestures, and explanations is also highlighted, as these complement their written responses and demonstrate their visualization skills. Furthermore, applying the sequence has made it possible to discover the solution strategies and errors that students make when faced with different types of tasks. This confirms previous research on visualization. Finally, adjustments to the teaching sequence and some reflections by the researcher are suggested.

* Degree Work

**Science Faculty. Mathematics School. Bachelor's degree in mathematics. Director: Dra. Jenny Patricia Acevedo Rincón. Codirector: Dr. Jorge Enrique Fiallo Leal.

Introducción

Diversos estudios han mostrado que la visualización es considerada una habilidad importante para el desarrollo de tareas geométricas y para el desempeño profesional en áreas que requieren del pensamiento espacial. Las investigaciones centradas en este objeto de estudio han podido demostrar que estudiantes de diferentes edades y algunos profesores en ejercicio pueden presentar necesidades en el desarrollo de dichas habilidades del pensamiento espacial. Estos estudios también reportan que los contextos y los recursos utilizados pueden ser variados como material manipulable, el uso de software y representaciones en el papel. Sin embargo, aunque en la actualidad existe una gran cantidad de programas informáticos de acceso libre que facilitan el proceso de enseñanza de la visualización, en las escuelas rurales aún existe la limitante de acceso a este tipo de los recursos tecnológicos.

Por otra parte, como profesor en ejercicio al tener una experiencia directa en el contexto de aula, he podido observar que los estudiantes tienen dificultades con el reconocimiento y la representación de formas geométricas, así como la manipulación de instrumentos como la regla y el compás. Estas dificultades se han hecho evidentes en los bajos resultados obtenidos por ellos en las diferentes pruebas externas y su bajo desempeño en matemáticas.

A partir de lo anterior, esta investigación busca explorar el efecto que tienen los *logikubos* en la adquisición de las habilidades de visualización de los estudiantes de noveno grado. Tiene como objetivo analizar el desarrollo de estas habilidades a través de una prueba diagnóstica, el diseño, implementación y evaluación del experimento de enseñanza y una prueba final que permita contrastar el progreso de estas habilidades.

Este documento consta de cinco capítulos: en el primero se presenta el planteamiento del problema, en él se describe el problema a investigar tomando como referencia el contexto

internacional, nacional y el caso específico de la institución Educativa San Rafael de Chucurí, la pregunta de investigación, la justificación y finalmente, los objetivos de la investigación. En el segundo, se exponen los antecedentes y el marco teórico. En el tercer capítulo, se presenta la estrategia investigativa utilizada que consiste en un experimento de enseñanza con sus respectivas etapas, además, los instrumentos de recolección y análisis de datos. En el quinto capítulo, se muestra el análisis retrospectivo de la secuencia de actividades del experimento de enseñanza implementado y finalmente las conclusiones obtenidas de la investigación en relación con los objetivos y la respuesta a la pregunta problema.

1. Aproximación al problema de investigación

En este apartado se describen aspectos generales de la visualización espacial, se mencionan algunas áreas de las matemáticas con las que guarda relación y su importancia en otras disciplinas científicas. De forma similar, se expone brevemente las dificultades asociadas con este objeto de estudio en el contexto internacional y nacional. Por último, se muestran los resultados de las pruebas estandarizadas y la experiencia en el quehacer como educador que evidencian necesidad de abordar el problema de investigación.

1.1 Descripción y planteamiento del problema

Muchas actividades que se realizan en la vida cotidiana, como dibujar, trazar en la mente una ruta para llegar a un lugar, recordar la ubicación de objetos personales y armar o desarmar partes de alguna cosa, requieren del uso del pensamiento espacial. Según los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas, se menciona el pensamiento espacial como un proceso cognitivo que permite a las personas actuar con los objetos situados en el espacio, así como construir y manipular representaciones de estos en la mente (2006). En relación con este pensamiento, hay un componente y a menudo olvidado en el currículo de matemáticas: la visualización espacial. Este aspecto del pensamiento espacial tiene una estrecha relación con otras áreas de las matemáticas, como: la geometría, el álgebra y el cálculo; pero también se ha asociado a mejoras en el rendimiento académico en cursos de carreras de ingeniería y física para quienes poseen buenas capacidades espaciales (Gómez et al., 2022).

En el ámbito internacional, algunos estudios internacionales, como por ejemplo, el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMMS) ha resaltado diferencias de género en visualización espacial en problemas que implican manipular mentalmente figuras tridimensionales y reconocer figuras congruentes o semejantes (Moya y Corredor, 2017), así

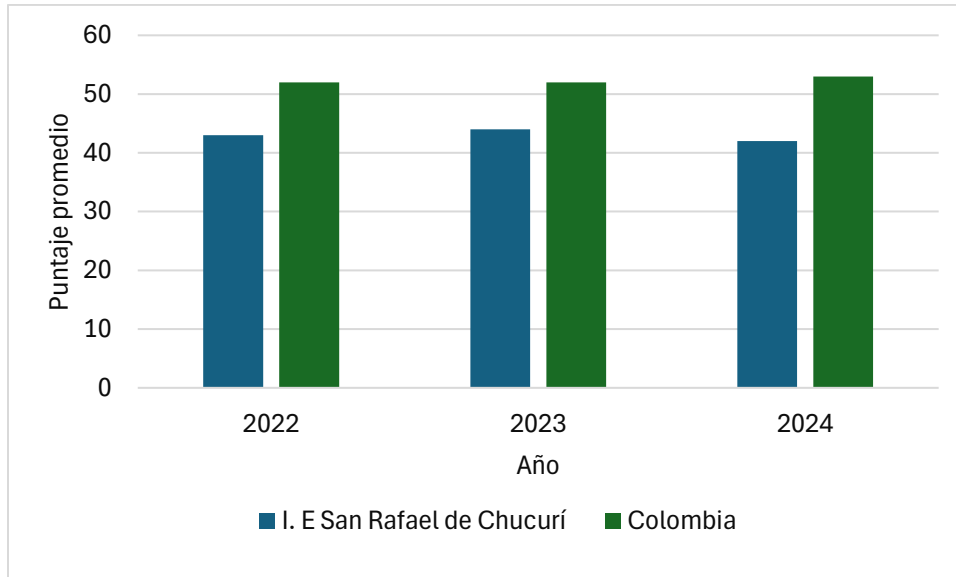
mismo, investigaciones como las de Mitchelmore (1980, como se citó en Gutiérrez, 1998) encontraron dificultades en el dibujo en perspectiva de objetos tridimensionales por estudiantes de secundaria y clasificó estas representaciones en cuatro etapas de acuerdo con su evolución, más adelante estas dificultades fueron confirmadas por Ben Chaim y colegas (1989), quienes registraron además la dificultad para comunicar con éxito información espacial.

En el contexto escolar colombiano, el estudio de conceptos geométricos suele quedar relegado a los últimos periodos del año escolar y a centrar la enseñanza en otros tipos de pensamiento, como el numérico, o en el peor de los casos a no incluirse en el currículo escolar (Ávila, 2019, p. 16). Sumado a ello, una dificultad que también se presenta en la enseñanza de la Geometría en el nivel de secundaria radica en la aplicación y memorización de fórmulas para el cálculo de área y volumen de figuras geométricas. Esta situación afecta de manera negativa al desarrollo del pensamiento espacial, pues es la geometría el contexto próximo para el desarrollo de habilidades como: crear y manipular imágenes mentales, y transformar objetos en el espacio. Un estudio local con características similares como las descritas anteriormente, encontró que las habilidades de visualización espacial pueden ser mejoradas a través de tareas apoyadas por las TIC (Salas et al., 2018).

En el contexto específico de la Institución Educativa San Rafael de Chucurí, una de las múltiples problemáticas que la afectan tiene que ver con el desempeño académico en matemáticas. De acuerdo con el histórico de resultados de las pruebas SABER 11, el puntaje promedio en matemáticas no supera los 50 puntos, ubicándose por debajo de la media nacional, como se referencia en los resultados obtenidos entre los años 2022 y 2024 (Figura 1).

Figura 1

Resultados pruebas saber 11 matemáticas



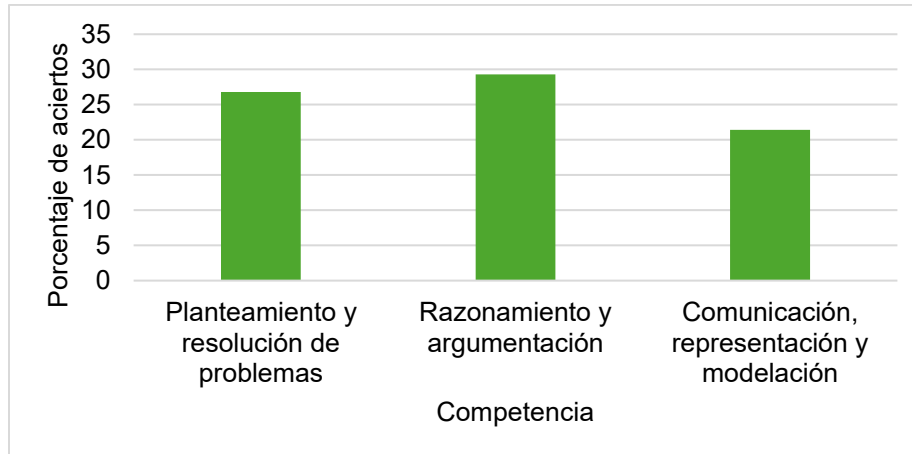
Nota. Adaptación de los datos obtenidos de la plataforma del ICFES.

Estos resultados plantean la necesidad ineludible de alcanzar mejores aprendizajes y niveles de desempeño que tienen que ver con el pensamiento espacial, por ejemplo, reconocer desarrollos planos de una forma tridimensional y viceversa. En ese sentido, la visualización espacial desempeña un rol importante para imaginar cómo una figura tridimensional se transforma en una figura plana (desarrollo).

Posteriormente, en el año 2025 se implementó la evaluación '*Quiero ser, Quiero Saber*' la cual mostró los bajos resultados en los desempeños en matemáticas en grado noveno. En particular, los estudiantes mostraron dificultades en el componente geométrico en tres competencias: planteamiento y resolución de problemas, razonamiento y argumentación, comunicación, representación y modelación. En la siguiente grafica se puede apreciar los resultados obtenidos en esta prueba.

Figura 2

Resultados de la prueba en grado noveno Quiero Ser, Quiero Saber



Nota. Elaboración propia con base en pruebas 2025.

Los datos presentados están alineados con lo que he podido observar en el ejercicio de la práctica docente puesto que a los estudiantes se les dificulta la solución de problemas de matemáticas y comunicar sus ideas de manera escrita o verbal. Así que, teniendo en cuenta que la visualización espacial es una habilidad importante que facilita el razonamiento y la resolución de problemas, su desarrollo podría mejorar el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes.

Por lo anterior, teniendo en cuenta los resultados de las pruebas estandarizadas, la necesidad de fortalecer el pensamiento espacial y las limitaciones en cuanto a la falta de recursos tecnológicos, esta investigación pretende responder: ¿cómo influye el uso de los *logikubos* en el desarrollo de las habilidades de visualización espacial de los estudiantes de noveno grado?

1.2. Justificación

En las últimas décadas, el estudio de la visualización espacial ha despertado el interés de muchos investigadores. Esta motivación en muchos casos se ha concentrado en mejorar habilidades específicas de visualización a través de programas de entrenamiento. Los ambientes

de aprendizaje en los que se han desarrollado estos estudios abarcan: el uso de recursos informáticos, material manipulable y el aprovechamiento del contexto. En cuanto a los participantes, se ha encontrado mejoría en las habilidades de visualización en estudiantes de diferentes niveles de escolaridad e incluso en profesores en formación. Sin embargo, muchas de estas investigaciones rara vez han sido implementadas por el docente a cargo del curso, lo cual limita captar las complejas interacciones entre estudiantes y profesor en un aula real de clases.

Frente a esto, la presente investigación busca aportar al campo de la investigación en educación matemática en relación con la visualización espacial. Para lograr esto, se busca analizar el efecto de los *logikubos* en la adquisición de las habilidades de visualización espacial en un grupo de estudiantes de grado noveno, en un escenario real de aprendizaje, con las particularidades del contexto rural y las limitaciones tecnológicas existentes en la Institución Educativa San Rafael de Chucurí. A partir de los resultados de pruebas estandarizadas y conociendo la escasa formación en geometría recibida por los estudiantes, se conjetura que el nivel de las habilidades de visualización es bajo.

Desde el aspecto del diseño de la investigación, la estrategia experimento de enseñanza desarrollada en el aula de clases y dirigida por el profesor a cargo del curso, permitirá rastrear y documentar el progreso de las habilidades de visualización a través de las producciones verbales, escritas y gráficas por los estudiantes en el desarrollo de cada una de las tareas propuestas. En ese sentido, se pretende aportar el diseño de un experimento ajustado al uso de los *logikubos*.

Por otra parte, esta investigación también apunta a fortalecer el pensamiento espacial de los estudiantes de grado noveno ya que como se menciona en los lineamientos curriculares de matemáticas (1998) un aspecto importante de este tipo de pensamiento es la representación y

comunicación de la información que se percibe de los objetos tridimensionales. En ese sentido el uso del material manipulativo como los *logikubos* les facilitará a los estudiantes conocer las particularidades de cada una de las representaciones planas, expresar sus ideas de manera intuitiva y posteriormente lograr capacidades más elevadas como la abstracción. Este último aspecto, necesario para manipular mentalmente estas representaciones.

Finalmente, este estudio también permitirá mejorar los procesos de representación, comunicación y resolución de problemas los cuales se harán evidentes en el desarrollo de las tareas propuestas en el experimento de enseñanza y que mejorarán el pensamiento matemático.

1.3. Objetivos

El presente estudio pretende *analizar el desarrollo de las habilidades de visualización mediante un experimento de enseñanza con el fin potenciar el pensamiento espacial en los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa San Rafael de Chucurí*. Para esto, se proyectan los siguientes objetivos específicos:

- Identificar las habilidades de visualización y definirlas a través de la revisión de literatura para trazar indicadores que permitan la interpretación de las actividades desarrolladas por los estudiantes en la prueba diagnóstica.
- Desarrollar las habilidades de visualización a través de un experimento de enseñanza que permita mejorar el aprendizaje de la geometría y fortalecer el pensamiento espacial.
- Contrastar las habilidades de visualización evidenciadas por los estudiantes de grado noveno al finalizar el experimento de enseñanza con el fin de interpretar su evolución en el desarrollo de tareas espaciales.

2. Referentes

En este capítulo, se exponen algunos antecedentes relacionados con visualización en lo que respecta a la geometría espacial, para ello se tiene en cuenta dos aspectos: los recursos físicos o tecnológicos que se usan en la investigación y las habilidades de visualización mostradas por los participantes en la solución de las tareas; las cuales servirán de análisis para apoyar o controvertir las conclusiones de este trabajo. Luego, se presenta el marco teórico en el que se incluyen algunos elementos que hacen parte de la visualización espacial y algunas precisiones de los diferentes términos que son utilizados en el campo de la educación matemática para referirse a la visualización.

2.1. Antecedentes

Para la búsqueda de los antecedentes, se realizó una revisión de la literatura relacionada con términos o palabras claves como:

“visualización espacial” “habilidades de visualización”, “habilidades espaciales” “pensamiento espacial”, “razonamiento espacial”, “representación de objetos tridimensionales”. Estas palabras o similares se buscaron en el idioma inglés como: “ <i>visualization</i> ”, “ <i>spatial visualization</i> ”, “ <i>spatial thinking</i> ”, “ <i>spatial ability</i> ”, “ <i>spatial sense</i> ”
--

También, otros aspectos de interés como los recursos utilizados para el diseño de tareas que sirvieran como apoyo para la adaptación con los *logikubos*.

En el campo de la Geometría espacial, Gutiérrez (1996) analizó las habilidades de los estudiantes de primaria para usar diferentes tipos de representaciones planas de sólidos tridimensionales. En un estudio experimental, analiza el proceso de aprendizaje, dificultades y diferencias en el uso de cada tipo de representación plana (perspectiva, isométrica, por niveles, de vistas laterales y de vistas laterales codificadas) con estudiantes de grado segundo, cuarto, sexto y

octavo en tareas propuestas usando multicubos de manera física y en algunos casos en el computador. Sus principales resultados se describen a continuación:

- La *representación por niveles* es una de las más fáciles tanto en las tareas de dibujo como las de construcción en todos los grados analizados.
- La *representación de vistas laterales y laterales codificadas* son más fáciles para las tareas de dibujo que para las de construcción ya que es necesario la coordinación de las tres vistas. En particular, las tareas de dibujo fueron más fáciles de resolver para los estudiantes de grado sexto y octavo que para los estudiantes de grados inferiores ya que ellos presentaron dificultades en la habilidad de percepción figura fondo.
- La *representación isométrica* es difícil en las tareas de dibujo mientras que construir módulos desde este tipo de representación es mucho más fácil que en el caso de vistas laterales. Especialmente, las dificultades en el dibujo para tareas sencillas de representar cubos se observaron en estudiantes de grado segundo y cuarto. Sin embargo, todos los grados tuvieron en un principio dificultades para dibujar este tipo de representación.

En el mismo interés de estudiar la representación plana, en este caso, solamente de vistas ortogonales e isométricas de objetos tridimensionales (Sandoval y Ortiz-Rocha, 2023) a través de un experimento de enseñanza en el que participaron 34 estudiantes con edades entre los 6 y 8 años, diseñan una secuencia de actividades usando material manipulativo concreto para el desarrollo del pensamiento espacial. Las conclusiones de esta investigación muestran acciones de mejoramiento del pensamiento espacial en los niños que se pueden clasificar en: verbales al explicar estrategias de solución en las tareas y no verbales (movimientos del cuerpo) al usar un sistema de referencia, es decir, cambiar el punto de vista del observador para representar, reconocer e interpretar objetos

tridimensionales por medio de representaciones bidimensionales. Por otra parte, también concluyeron que el uso de material concreto favorece la interpretación de representaciones isométricas y ortogonales al igual que el dibujo de estas vistas.

En el contexto colombiano Fiallo y González (2018) usando los *logikubos* y, además, el software *Cubos y Cubos*, diseñan cinco actividades para estudiantes de quinto de primaria, cuyo propósito fue describir las habilidades de visualización que se favorecen al utilizar estos dos recursos. Dentro de las principales conclusiones en este estudio se destaca: diseñar actividades con los *logikubos* con un aumento de dificultad de manera gradual, la importancia en el manejo del vocabulario geométrico adecuado y la dificultad para observar algunas habilidades puestas en juego por los estudiantes ya que muchas de ellas se ejecutan en la mente y no se materializan. Este estudio también sugiere el diseño de actividades en la que los estudiantes deban dibujar las vistas de las construcciones hechas.

En lo que respecta al análisis del conocimiento sobre visualización espacial de maestros en formación (Godino, et al., 2012) aplica un cuestionario con cinco tareas a futuros profesores de educación primaria, encontrando que la gran mayoría de ellos no contesta de manera adecuada a tareas propuestas de libros de texto de primaria y de otras investigaciones. En particular, en relación con el conocimiento común, se encontraron dificultades y errores en dibujar los objetos tridimensionales a partir de sus vistas laterales, identificar desarrollos de un cubo y la interpretación plana de objetos tridimensionales. Por otra parte, en este estudio también se resalta que un profesor de educación primaria debe tener dominio conceptual en las formas de comunicar distintos tipos de representaciones planas de objetos tridimensionales para poder desarrollar en sus estudiantes esta habilidad de visualización. Estas conclusiones tienen concordancia con los

resultados obtenidos por Roura y Ramírez (2021), donde analizaron el sentido espacial de futuros maestros de educación primaria a través de la Prueba de Aptitudes Mentales (PMA) y con una tarea de unir cuadrados para obtener piezas del *tetraminó*. Los resultados de este estudio mostraron que la gran mayoría de profesores obtuvieron un nivel medio de visualización en el test PMA, en cuanto a la solución de la tarea, también se encontró que una gran cantidad de ellos cometieron errores al identificar giros y simetrías.

En una experiencia práctica llevada a cabo con profesores de secundaria Malara (1998) analizó las reacciones, errores, y dificultades cuando ellos resuelven problemas que involucran la habilidad de visualizar sólidos en distintas posiciones, completar representaciones bidimensionales y realizar transformaciones todas estas tareas propuestas en papel isométrico. Como hallazgos importantes en este estudio se puede mencionar: la poca flexibilidad de los profesores al mostrar sus primeros intentos de solución, visualizar un objeto de manera global y transformarlo mentalmente para llevarlo a una determinada posición, coordinar las imágenes parciales de un objeto y dibujar representaciones isométricas.

Por otra parte, en este artículo también se resalta que los dibujos en representación isométrica están por fuera del alcance de los estudiantes de los primeros cursos de primaria y solo es en secundaria cuando la mayoría de los estudiantes aprenden a usar este tipo de representación. Esta dificultad para representar un objeto tridimensional teniendo a la vista el dibujo está relacionado con la habilidad de reconocimiento de posiciones en el espacio y relaciones espaciales.

2.2. Marco teórico

En esta sección se definen las habilidades de visualización propuestas por Del Grande (1990), las cuales servirán de guía para el diseño de tareas del experimento de enseñanza y el

análisis de las respuestas de los estudiantes. Sin embargo, también se presentan diferentes perspectivas de investigadores sobre el concepto de visualización, su evolución a lo largo del tiempo y elementos que se asocian a este objeto de estudio.

La visualización como objeto de estudio en el campo de la educación matemática puede encontrarse en diferentes investigaciones usando otros términos, por ejemplo, visualización espacial, pensamiento espacial, percepción espacial, razonamiento visual, entre otros. No hay una única definición para este concepto. Sin embargo, suele encontrarse el mismo significado usando diferentes términos. Sin el ánimo de ser exhaustivo, se presentan algunas definiciones desde la perspectiva de diferentes autores.

Inicialmente, la percepción espacial o visualización espacial es comprendida como: “un conjunto de habilidades y afirma que los conceptos de geometría pueden ser aprendidos de manera simultánea a través de programas de entrenamiento” (Hoffer, 1977, p. 92). Posteriormente, el pensamiento espacial se concibe como una forma de actividad mental la cual hace posible crear imágenes espaciales y manipularlas cuando se resuelven problemas prácticos y teóricos (Yakinsmanskaya, 1991). Así mismo se encuentran las definiciones de visualización desde la perspectiva de Zimmerman y Cunningham (1991) entendido como el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel o con ayuda de la tecnología) y usar estas imágenes de manera efectiva para el descubrimiento y la comprensión de las matemáticas. Y, desde el punto de vista de la geometría tridimensional para Clements y Battista (1992) la visualización espacial es “la comprensión y desarrollo de movimientos imaginados de objetos en dos y tres dimensiones” (p. 444). Particularmente, profundizando en el estudio de estas habilidades de visualización Del grande (1990) propone siete habilidades (Tabla 1) teniendo gran impacto en el estudio de las matemáticas y la geometría.

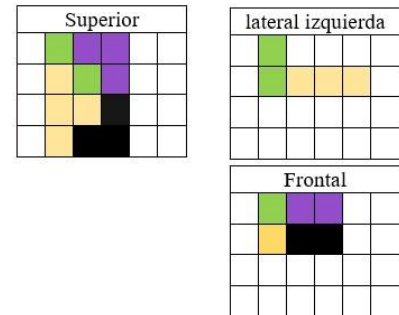
Tabla 1*Habilidades de visualización*

Habilidad	Descripción	Ejemplo
<i>Coordinación ojo motor:</i> es la habilidad para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo.	Unir puntos para trazar una figura, organizar bloques de madera para construir un sólido o usar una regla para dibujar líneas.	
<i>Percepción figura contexto:</i> es el acto visual de identificar una figura específica (el foco) de una imagen (el contexto).	Líneas que se cruzan, figuras ocultas, figuras superpuestas, figuras que se superponen, completar figuras ensamblar figuras, encontrar similitudes y	
<i>Conservación de la percepción, o conservación de la forma y tamaño:</i> es la habilidad para reconocer que un objeto tiene propiedades invariantes tales como tamaño y forma, a pesar de la variabilidad de su apariencia cuando se observa desde diferentes puntos de vista.	Conservación de la forma, conservación del tamaño, la constancia de la forma en relación con la percepción figura- contexto, el tamaño aparente comparado con el tamaño real y la comparación de tamaños de tres o más figuras.	
<i>Percepción de la posición en el espacio:</i> es la habilidad para determinar la relación de un objeto con respecto a otro objeto y con respecto al observador.	Realizar deslizamientos, giros e inversiones, como identificar el movimiento, identificar figuras o imágenes, dibujar figuras o imágenes y trazar patrones usando el movimiento.	<p data-bbox="1063 1549 1484 1648">Dibuja las vistas frontal, lateral y superior de la figura.</p> 

Percepción de las relaciones espaciales: es la habilidad para ver dos o más objetos en relación con uno mismo o entre sí, esta habilidad está estrechamente relacionada con la percepción de la posición en el espacio para algunas tareas.

Relacionar la posición de dos o más objetos, identificar similitudes y diferencias, encontrar el camino más corto a un objetivo, completar una figura, conectar puntos, completar una secuencia y ensamblar partes.

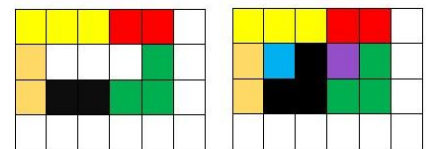
Dadas las siguientes vistas, construye el sólido.



Discriminación visual: es la habilidad para distinguir similitudes y diferencias entre objetos. Mientras que la percepción de la posición en el espacio y la de las relaciones espaciales dependen de la ubicación de un objeto en el espacio, la discriminación visual es independiente de dicha posición.

Identificar pares de objetos que son los mismos, un par de objetos que son diferentes, un objeto que es diferente de los otros y muchos objetos que son los mismo pero diferente de los otros.

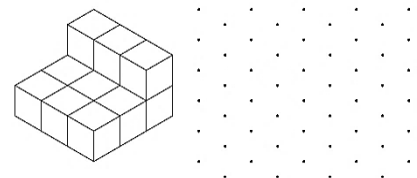
Cuál de las siguientes opciones no corresponden a una vista desde arriba de la siguiente figura:



Memoria visual: Es la habilidad para recordar con precisión un objeto que ya no está a la vista y luego relacionar sus características con otros objetos que están o no a la vista.

Recordar un objeto entre dos o más objetos, un objeto con inversiones o la posición de muchos objetos, dibujar o completar figuras de memoria.

Observa la siguiente imagen durante 30 segundos y luego dibujala en el punteado isométrico.

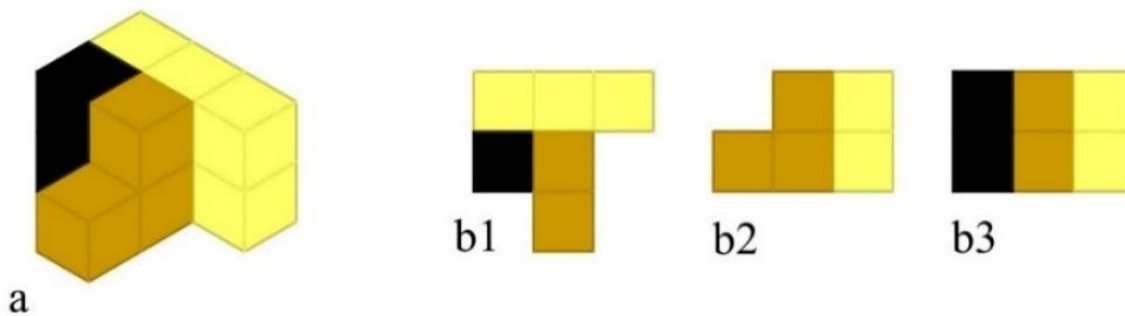


Nota. Diseños usando los programas *ThinkerCAD* y *GeoGebra*. La definición de las habilidades y las respectivas tareas fueron tomadas de Del Grande (1987; 1990).

Teniendo en cuenta que algunas habilidades de visualización implican la representación plana de objetos tridimensionales o de transformar una representación plana a otra, es necesario tener en cuenta la convención usada para cada tipo de representación y de esta manera evitar errores de interpretación y de dibujo de objetos tridimensionales (Parzyz, 1988). Dentro de estos tipos de representación plana de objetos tridimensionales, se pueden mencionar: la representación isométrica y la representación ortogonal o de vistas laterales (Figura 3).

Figura 3

Tipos de representación plana de un sólido construido con piezas de los logikubos



Nota. a) isométrica; b) ortogonal o de vistas múltiples (b1 - superior; b2 - frontal; b3 - lateral izquierdo).

La representación isométrica es un tipo de proyección paralela en la cual los tres ejes cartesianos forman ángulos congruentes de 120° . Para este tipo de dibujo se usa una plantilla que facilita la representación bidimensional de los *logikubos*. La representación ortogonal o de vistas múltiples es un método que representa la forma exacta de un objeto por medio de dos o más vistas y se obtiene mediante proyecciones ortogonales paralelas obteniéndose como resultado vistas del sólido que dependen de la posición del observador. En la representación en perspectiva los objetos se dibujan usando líneas ortogonales que conducen a un punto o varios puntos de fuga.

Tabla 2*Tipos de imágenes*

Imagen	Definición
Concreta	Se constituyen como figurativas de objetos físicos
De patrones	Corresponden a esquemas visuales correspondientes a relaciones abstractas.
De fórmulas	Consiste en la representación mental de fórmulas escritas el tablero o en un libro de texto.
Cinestésicas	Son creadas, transformadas o comunicadas con la ayuda de movimientos físicos
Dinámicas	Se trata de imágenes que se manipulan en la mente

Nota. Información tomada de *visualization in 3- dimensional geometry in search of a framework* (1996).

En este sentido, Bishop (1980, citado en Bishop, 2008) también propone que las imágenes visuales, físicas o mentales que manipulan en la visualización se realiza según dos tipos de procesos: interpretación de información figural (IFI) el cual involucra comprender las representaciones visuales y el vocabulario espacial usado en geometría, gráficos, esquemas y diagramas de todo tipo. Esta habilidad se relaciona con la lectura, comprensión e interpretación de este tipo de información. Finalmente, el procesamiento visual (VP) implica la visualización y traducción de relaciones abstractas e información no figural en términos visuales. También involucra la manipulación y transformación de representaciones visuales e imágenes mentales.

3. Diseño Metodológico

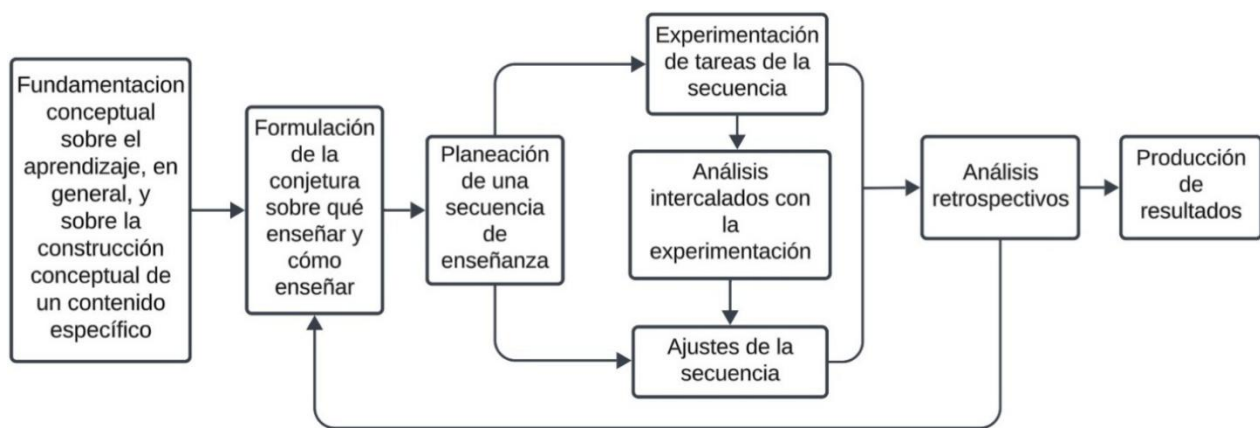
En este capítulo se presenta el proceso de investigación llevado a cabo bajo el enfoque de experimento de enseñanza. Inicialmente, se hace un análisis de las características de la institución educativa y de los participantes. Luego, de manera general se describe el experimento de enseñanza en tres fases: la preparación del experimento, la experimentación y el análisis retrospectivo. Por último, se describen los instrumentos utilizados y las técnicas de recolección de datos.

3.1 Método

El presente estudio se enmarca en un enfoque de investigación cualitativa de diseño, correspondiente a un experimento de enseñanza, el cual consiste en el diseño, implementación y evaluación del experimento de enseñanza cuyo propósito es monitorear y documentar el progreso en los significados construidos por los estudiantes (Camargo, 2021) representada en la Figura 5

Figura 5

Experimento de enseñanza



Nota. Estructura general de un experimento de enseñanza, tomado de Camargo (2021).

Atendiendo lo propuesto por Camargo (2021) el esquema general de un experimento de enseñanza se caracteriza en el estudio la fundamentación conceptual, la formulación de la conjetura y una prueba diagnóstica. Luego, se planea el experimento de enseñanza y el diseño de

actividades con los ajustes derivados de la prueba diagnóstica. Una vez estructurada la etapa anterior, se implementa el experimento de enseñanza en cuatro sesiones. Finalmente, en la etapa del análisis retrospectivo se podrán obtener resultados relacionados con las tareas que favorecen las habilidades de visualización y la forma de dirigir las

3.2. Contexto de la investigación

Este trabajo de investigación se desarrolla con un grupo de estudiantes de grado noveno de la institución Educativa San Rafael de Chucurí, sede campo galán, ubicada en zona rural de la ciudad de Barrancabermeja, Santander. La gran mayoría de estos estudiantes viven en veredas cercanas y otros en zonas aledañas al colegio. En total son 11 estudiantes, 4 hombres y 7 mujeres cuyas edades están comprendidas entre los 14 y 17 años. Ellos han recibido una limitada formación en geometría y presentan dificultades en aritmética, según la observación directa del investigador en calidad de profesor titular del curso. Asimismo, provienen de familias de bajos ingresos económicos que dependen en gran medida de las oportunidades de empleo que ofrecen las empresas del sector hidrocarburos que operan en la zona, así como de otras actividades económicas como la pesca y el cultivo de plátano y limón.

El experimento de enseñanza se llevó a cabo durante el año escolar 2025, en gran medida se desarrolló en la clase de matemáticas con una intensidad horaria de 1 hora y 50 minutos, otras sesiones se realizaron en horario extraescolar. Durante el desarrollo de las sesiones, los estudiantes se organizan por mesas procurando el trabajo independiente al responder cada una de las tareas, pero también permitiendo la interacción comunicativa entre ellos y el profesor como forma de aprendizaje. En general, el rendimiento académico de estos estudiantes es bajo, sus conocimientos previos en geometría son básicos, es decir, tienen dificultades para reconocer algunas figuras geométricas y la enseñanza que han recibido en geometría tridimensional es casi nula.

3.3. Fases de la investigación

Teniendo en cuenta que el objetivo de este estudio es analizar el desarrollo de las habilidades de visualización espacial y el experimento de enseñanza como estrategia de investigación, se plantean tres fases: la preparación del experimento, la experimentación y el análisis retrospectivo de los datos.

3.3.1. Preparación del experimento

En esta etapa se realizó una revisión de la literatura existente relacionada con las habilidades de visualización y los tipos de representación plana de objetos tridimensionales. Esta revisión permitió definir el marco teórico para interpretar y prever las acciones de los estudiantes en el desarrollo de la prueba diagnóstica (Apéndice A), para lo cual se usó un consentimiento informado para padres de familia (Apéndice B) y un asentimiento informado para los menores participantes (Apéndice C). De acuerdo con los datos obtenidos en esta prueba, se diseñó un experimento de enseñanza usando los *logikubos* y organizado en cuatro sesiones. En la siguiente tabla se muestra un resumen de la temporalidad, duración, descripción de las actividades y de los objetivos en cada sesión.

Tabla 3

Características generales del experimento

Evento/Fecha	Duración	Descripción	Objetivos
Prueba diagnóstica/ 21-05-25	1 hora y 50 minutos	Aplicación de la prueba diagnóstica	• Identificar las habilidades de visualización que usan los estudiantes ante las tareas propuestas, estrategias de

			solución, dificultades, errores o fortalezas.
1ª sesión/ 10-09-25	1 hora y 50 minutos	Realizar construcciones con las piezas de los <i>logikubos</i> , representarlas en la cuadrícula isométrica y dibujar sus vistas.	<ul style="list-style-type: none"> • Representar en perspectiva isométrica objetos tridimensionales (<i>logikubos</i>) en el plano bidimensional (hoja con cuadrícula isométrica). • Representar las vistas de objetos tridimensionales (<i>logikubos</i>) desde diferentes posiciones en el plano bidimensional.
Ajustes de la secuencia/ 15-09-25	1 hora	Revisión de la implementación de la sesión uno.	<ul style="list-style-type: none"> • Revisar la actividad matemática mostrada por los estudiantes • Verificar conjeturas o plantear otras nuevas • Realizar ajustes al experimento de enseñanza.
2ª sesión/ 16-09-25	1 hora y 50 minutos	Realizar construcciones con los <i>logikubos</i> a partir de una o más vistas dadas, identificar piezas	<ul style="list-style-type: none"> • Representar en perspectiva isométrica objetos tridimensionales (<i>logikubos</i>) en el plano bidimensional (hoja con cuadrícula isométrica). • Identificar y comparar objetos tridimensionales ocultos en una figura.

		ocultas en una figura y representar construcciones hechas en la cuadrícula isométrica	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretar representaciones planas de objetos tridimensionales.
		Manipular mentalmente las piezas del <i>logikubo</i> , representarlas en la cuadrícula isométrica	<ul style="list-style-type: none"> • Transformar mentalmente las piezas del <i>logikubo</i> y las representa en la cuadrícula isométrica. • Identificar y comparar objetos tridimensionales ocultos en una figura. • Representar en perspectiva isométrica objetos tridimensionales (<i>logikubos</i>) <en el plano bidimensional (hoja).
3 ^a sesión/ 18-09-25	1 hora y 50 minutos	completar figuras, identificar piezas del <i>logikubo</i> usadas en figuras, dibujar vistas y favorecer el proceso de comunicación entre pares. Todo lo anterior sin	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretar representaciones planas de objetos tridimensionales.

		disponer de las piezas del <i>logikubo</i> .	
Ajustes del experimento de enseñanza dos y tres 22-09-25	1 hora	Revisión de la implementación de las sesiones dos y tres.	<ul style="list-style-type: none"> • Revisar la actividad matemática mostrada por los estudiantes. • Verificar conjeturas o plantear otras nuevas. • Realizar ajustes al experimento de enseñanza.
4ª sesión 23-09-25	1 hora y 50 minutos	Manipular mentalmente las piezas del <i>logikubo</i> , representarlas en la cuadrícula isométrica completar figuras, identificar piezas del <i>logikubo</i> usadas en figuras, dibujar vistas y favorecer el proceso de comunicación entre pares. Todo lo	<ul style="list-style-type: none"> • Transformar mentalmente las piezas del <i>logikubo</i> y las representa en la cuadrícula isométrica. • Identificar y comparar objetos tridimensionales ocultos en una figura. • Representar en perspectiva isométrica objetos tridimensionales (<i>logikubos</i>) en el plano bidimensional (hoja). • Interpretar representaciones planas de objetos tridimensionales.

		anterior sin	
		disponer de las	
		piezas del <i>logikubo</i> .	
Prueba final	1 hora y 50 25-09-25 minutos	Aplicación de la prueba de evolución de habilidades de visualización	• Contrastar las habilidades de visualización mostradas en la prueba diagnóstico.

3.3.2. Experimentación

Una vez planeada la secuencia de actividades sigue su implementación y la selección de los instrumentos para la recolección de información. En esta etapa, una vez finalizada cada sesión, se realiza un análisis acerca las interacciones observadas en clase y de las respuestas de los estudiantes. Este análisis se hará en las reuniones entre el autor de este proyecto y la directora del trabajo de grado. Esto permitirá comparar los resultados obtenidos con las conjeturas inicialmente planteadas y realizar ajustes a las actividades. Lo anterior, tiene como propósito brindar a profesores en ejercicio un experimento de enseñanza evaluado y mejorado para el desarrollo de las habilidades de visualización en sus clases de geometría y el potencial de los *logikubos* como facilitador de la adquisición de estas habilidades.

De acuerdo con el objetivo de esta investigación, hay un interés importante en registrar lo que los estudiantes y profesor dicen o hacen, por lo tanto, los instrumentos utilizados son videgrabaciones de las clases, transcripciones de audio y fotos para evaluar el aprendizaje y tomar decisiones en el curso del experimento. Sin embargo, también se dispone de otros materiales para

el análisis como las hojas de trabajo de los estudiantes y las notas de campo de lo observado en las clases.

3.3.3. Análisis retrospectivo

Esta fase consiste en el análisis de lo sucedido durante el experimento de enseñanza, estos sucesos tienen que ver con imprevistos de la clase y con la confirmación o reformulación de conjeturas planteadas en cada sesión del experimento de enseñanza. Para llevar a cabo esto, se analizan las videograbaciones para apoyar las respuestas escritas o verbales de los estudiantes, las acciones mostradas en las hojas de trabajo, las notas de campo y fotos tomadas durante el desarrollo del experimento. De igual forma, se comparan los resultados con los obtenidos en otros estudios y se describe la evolución de las habilidades de visualización de cada estudiante.

3.4. Instrumentos y técnicas de recolección de datos

Teniendo en cuenta la naturaleza cualitativa de un experimento de enseñanza y el interés por analizar inicialmente el estado de las habilidades de visualización y su evolución durante el desarrollo del experimento, a continuación, se detalla cada uno de los instrumentos utilizados y la forma en que serán usados en la presente investigación

Videograbaciones. Se trata de grabaciones de audio y video con dispositivos móviles como un celular, el propósito de este instrumento es enriquecer las respuestas escritas de los estudiantes y de las interacciones verbales entre estudiantes y profesor. De igual forma, captar momentos de la clase que pueden pasar desapercibidos y sirvan como fuente de análisis para la investigación.

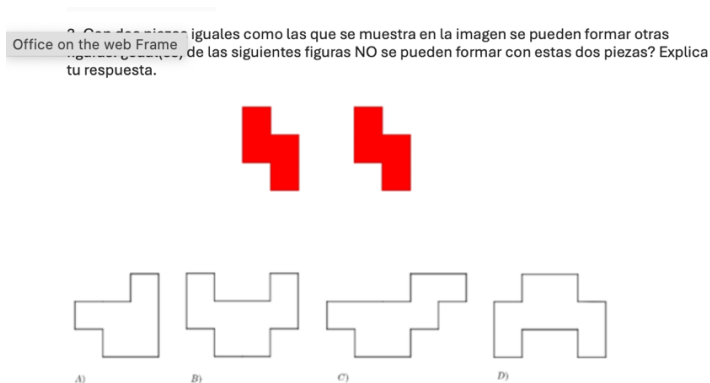
Notas de campo. Consiste en un registro escrito de lo que ocurre en cada sesión del experimento de enseñanza, estos registros pueden ser descripciones de las emociones de los estudiantes cuando resuelven las tareas propuestas, dudas o dificultades recurrentes que confirmen

o refuten las conjeturas planteadas. En este instrumento también se pueden registrar otros detalles que se pudieran olvidar con la mera observación.

Prueba diagnóstica. Para la prueba diagnóstica se diseñaron siete (7) preguntas en las cuales se esperaba obtener tres tipos de respuesta: escrita, gráfica o de construcción. En cada pregunta, se establecieron unos indicadores para evaluar la habilidad de visualización mostrada por los estudiantes (Figura 6). Las respuestas obtenidas en este diagnóstico fueron organizadas en carpeta de forma digital por estudiante para su posterior análisis.

Figura 6

Tarea 03 de la prueba diagnóstica



Nota. La tarea evalúa las habilidades de identificación visual, discriminación visual y conservación de la percepción.

TinkerCAD. Es un programa de diseño 3D y con otras funcionalidades que requiere de acceso a internet para su funcionamiento. Este programa será usado para el diseño de algunas tareas en el experimento de enseñanza y como recurso para el desarrollo de las habilidades de visualización. Cabe resaltar que este programa no será usado por los estudiantes por dificultades con el acceso a internet en el colegio, la disponibilidad de los computadores y las habilidades tecnológicas de los estudiantes.

4. Experimento de enseñanza

En este capítulo se describe la estructura general del experimento de enseñanza. Este inicia con la revisión de la literatura sobre las habilidades de visualización la cual sirve como base para la formulación de la conjetura. En segundo lugar, se diseña la prueba diagnóstica y se analizan los datos derivados de su implementación. A partir de estos resultados, se planea un experimento de enseñanza, que posteriormente se implementa, analiza y ajusta. Finalmente, se hace un análisis retrospectivo de los resultados obtenidos en el experimento de enseñanza.

4.1. Preparación del experimento

En esta fase, se realizó una revisión de la literatura sobre trabajos de investigación relacionados con el desarrollo de habilidades de visualización, esto con el propósito de prever situaciones de la clase o tipos de respuestas que se pudieran presentar durante el desarrollo del experimento. Esta revisión también permitió definir el marco teórico para interpretar las respuestas de los estudiantes y el diseño de tareas del experimento de enseñanza. A partir de esto y teniendo en cuenta uno de los objetivos de la investigación, se diseñó y aplicó una evaluación diagnóstica con siete tareas para identificar las habilidades de visualización de los estudiantes.

Una vez conocido el estado de las habilidades de visualización de los estudiantes, se diseñó una trayectoria hipotética de aprendizaje con los objetivos y las conjeturas de las respuestas de los estudiantes, esta trayectoria se compone del experimento de enseñanza dividida en cuatro sesiones, cada sesión contiene de tres a cuatro tareas desarrolladas durante las clases de matemáticas. En la siguiente tabla se muestra un resumen de la descripción de los objetivos y las actividades realizadas en cada sesión, la duración y temporalidad de cada una.

4.2. Diseño y análisis de la prueba diagnóstica

El diseño de la prueba diagnóstica tuvo en cuenta las siete habilidades de visualización propuestas por Del Grande (1990). Para el diseño de las tareas se usó el software *GeoGebra*, *ThinkerCAD* y los *logikubos*. Algunas de estas tareas se diseñaron tomando como referencia las actividades propuestas en el taller con *logikubos* propuesto por el grupo de investigación EDUMAT y otras de autoría propia.

En cada una de las tareas propuestas se plantearon las posibles habilidades que se podrían manifestar y los indicadores que pudieran dar evidencia de esto (Apéndice A). Por limitaciones con el espacio físico del salón de clases, se conformaron dos grupos para el desarrollo de la prueba y cada uno tuvo un tiempo de 1 hora para la realización.

La Tabla 4 muestra preguntas planteadas en la prueba diagnóstica con sus respectivos indicadores para analizar las respuestas de los estudiantes.

Tabla 4

Tareas, indicadores y tipos de respuesta de la prueba diagnóstico

Item	Tarea	Indicador	Código	Respuesta
1	<i>Dibujando formas generadas con las piezas del logikubo.</i> La tarea consiste en dibujar un sólido que está	Coordinación motriz de los ojos: Dibuja el sólido mostrado en la figura coordinando el movimiento de los ojos con la mano.	COOR	Gráfica

	compuesto por dos piezas del <i>logikubo</i> .		
		Identificación visual:	
	Identificación de las piezas del <i>logikubo</i> que conforman un sólido. En esta tarea se les entrega a los estudiantes un sólido compuesto por varias piezas del <i>logikubo</i> en las que sus piezas están ocultas por un solo color.	Identifica las piezas del <i>logikubo</i> que componen el sólido.	IDEN
2		Conservación de la percepción: Cuenta los cubos que componen la figura en su totalidad para elegir las piezas necesarias.	CON
		Reconocimiento de relaciones espaciales: comprende cómo se relaciona las piezas entre sí para formar el sólido.	RECRE
	<i>Piezas que se transforman.</i>	Identificación visual: reconoce en las figuras mostradas las piezas originales, aunque se hayan rotado, trasladado o reflejado.	IDEN
3	A partir de dos piezas iguales se muestran varias figuras que podrían formarse. Sin embargo, una de ellas no	Conservación de la percepción: reconoce que las piezas mantienen su forma y tamaño aunque se hayan girado o trasladado.	CON
			Mixta

	se puede construir con esas piezas.	Discriminación visual: compara las formas que se pueden generar a partir de dos piezas iguales.	DIS	
		Identificación visual: Identifica las piezas del <i>logikubo</i> usadas en la tarea.	IDEN	
	<i>Construye la figura usando tres piezas del logikubo.</i>	Reconocimiento de las relaciones espaciales: Comprende cómo se relacionan las piezas entre sí para formar el sólido.	RECRE	Construcción
4	La tarea consiste en dadas tres piezas del <i>logikubo</i> construir el sólido mostrado en la figura.	Reconocimiento de posiciones en el espacio: reconoce la ubicación de cada pieza en la posición correcta.	RECPO	
	<i>Vistas de un objeto tridimensional.</i>	Reconocimiento de posiciones en el espacio:		
5	Se tienen diferentes vistas de un sólido el cual se debe construir usando las piezas del <i>logikubo</i> .	Reconoce que las piezas del <i>logikubo</i> están en la posición correcta (arriba, abajo, derecha, izquierda, etc) a partir de las vistas dadas.	RECPO S	Construcción

		Reconocimiento de relaciones espaciales:		
		Interpreta las vistas dadas y comprende cómo se relacionan para formar el sólido.	RECRE	
		Coordinación motriz de los ojos:		
		construye el sólido usando las vistas dadas como guía.	COOR	
	<i>De lo tridimensional a lo bidimensional.</i> La tarea consiste en interpretar las vistas de sólido desde diferentes posiciones,	Reconocimiento de posiciones en el espacio: interpreta las vistas del sólido desde diferentes posiciones.	RECPO S	
6	comprender como se relacionan las piezas del <i>logikubo</i> y dibujar las vistas superior, frontal y lateral izquierdo.	Reconocimiento de relaciones espaciales: Comprende cómo se relacionan las piezas del <i>logikubo</i> en el espacio.	RECRE	Gráfica
		Coordinación motriz de los ojos:		
		Dibuja las vistas del sólido desde diferentes posiciones.	COOR	
7	<i>Recuerda y construye el perro mostrado en el video.</i>	Memoria visual: Recuerda las piezas del <i>logikubo</i> que conforman el perro sin tener el video a la vista por segunda vez.	MEMO R	Escrita y construcción

Los estudiantes observan un video en el que se muestra un perro Reconocimiento de las relaciones construido con algunas espaciales: Construye el perro RECRE piezas del *logikubo*. Estas usando las piezas del *logikubo*. piezas se pueden identificar en el video.

Nota. La tabla muestra las Tareas, indicadores y tipos de respuesta de la prueba diagnóstica que permiten clasificar la participación de los estudiantes en cada una de las actividades propuestas.

Para evidenciar las habilidades descritas en la tabla anterior para cada una de las tareas, se analizaron videgrabaciones y se hicieron registros fotográficos, según el tipo de respuesta que se esperaba en cada una de las tareas de la prueba diagnóstica. En el caso de algunas tareas de construcción, se decidió complementar el registro fotográfico con las explicaciones verbales de los estudiantes.

4.3. Análisis del desempeño individual de cada estudiante

Para el análisis del desempeño individual en la prueba diagnóstica, se asignó un código a cada estudiante: los hombres fueron identificados como H1 a H4 y las mujeres como M1 a M6. En la siguiente tabla se presenta el desempeño de cada estudiante en cada una de las tareas, así como las habilidades evidenciadas. En ella, se utilizó el símbolo (✓) para indicar la presencia de acciones que demostraron la habilidad correspondiente, (*) para señalar las tareas que no fueron respondidas y x para aquellas que no se lograron responder correctamente.

Tabla 5

Desempeño individual de cada estudiante en la prueba diagnóstica

Estudiante	Tarea 1		Tarea 2		Tarea 3			Tarea 4		Tarea 5			Tarea 6			Tarea 7			
	Habilidad		Habilidad		Habilidad			Habilidad		Habilidad			Habilidad			Habilidad			
	COOR	IDEN	CON	RECRE	IDEN	CON	DIS	IDEN	RECRE	RECPO	RECPO ^c	RECPO ^c	RECRE	COOR	RECPO ^c	RECPO ^c	RECRE	COOR	MEMO ^r
M1	✓	x	x	x	✓	✓	✓	*	*	*	*	*	*	*	x	x	x	x	x
M2	x	*	*	*	✓	✓	✓	✓	✓	✓	*	*	*	*	*	*	*	x	x
M3	✓	x	x	x	x	x	x	*	*	*	*	*	*	*	x	x	x	x	x
M4	✓	x	x	x	x	x	x	*	*	*	*	*	*	*	x	x	x	x	x
M5	✓	x	x	x	✓	✓	✓	x	x	x	*	*	*	*	x	x	x	x	x
M6	x	x	x	x	✓	✓	✓	x	x	x	*	*	*	*	x	x	x	x	x
H1	✓	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	*	*	*	*	*	*	*	x	x
H2	✓	x	x	x	✓	✓	✓	x	x	x	*	*	*	*	x	x	x	✓	✓
H3	✓	x	x	x	✓	✓	✓	x	x	x	*	*	*	*	x	x	x	✓	✓
H4	✓	x	x	x	✓	✓	✓	x	x	x	x	x	x	x	*	*	*	✓	✓

De la tabla anterior, se puede concluir que la mayoría de los estudiantes pudieron completar con éxito las tareas T1 y T3 las cuales consistían en replicar un dibujo en la plantilla isométrica y en identificar la figura que no se podía armar a partir de dos piezas dadas. Sin embargo, es importante mencionar que aquellos estudiantes que completaron la T1 lo hicieron tras varios intentos. Por el contrario, las tareas donde más se presentaron dificultades de resolver fue en las T2, T5 y T6. En el primer caso, los estudiantes intentaron de muchas maneras construir la figura sin antes analizar cuáles podrían usar en la construcción.

En las T5 y T6 las dificultades se manifestaron en la falta de habilidad para establecer una relación entre la representación plana de un sólido y su construcción, también en dibujar las vistas de un sólido especialmente de las caras ocultas. En cuanto a las diferencias de género, en la T1 las mujeres tuvieron más dificultades en replicar el dibujo al trazar líneas paralelas y orientar correctamente las direcciones de las líneas, ellas también se tardaron más en resolver esta tarea que los hombres.

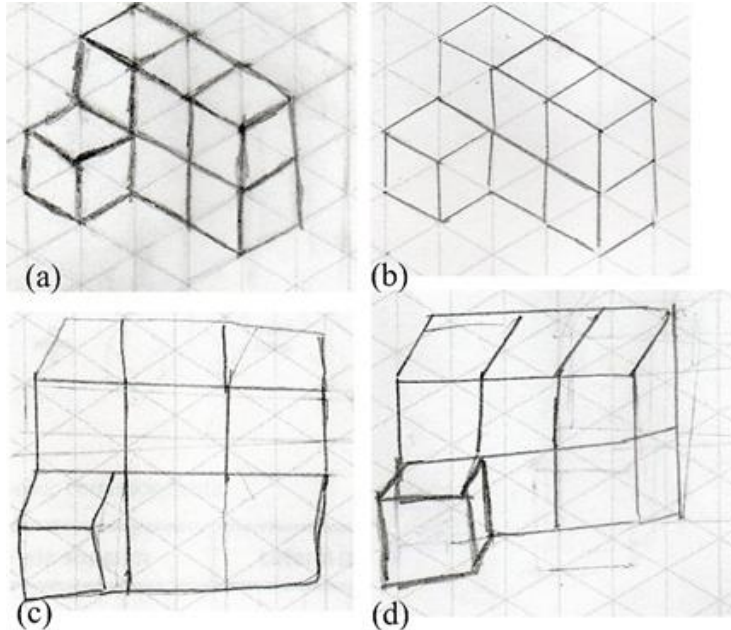
Sin embargo, se puede afirmar que todos son conscientes de la incorrección de sus dibujos y que la falta de técnica les ocasiona sensación de frustración. Por otra parte, en la T7 los hombres demostraron mayor habilidad en memoria visual, al recordar las piezas usadas en la construcción y la posición de cada una de ellas.

4.3.1. Tarea 1. Dibujando formas generadas con las piezas del logikubo

En esta tarea se pudo observar que en un principio los estudiantes tuvieron dificultades con dibujar el sólido que se les presentaba. Estas dificultades fueron sensaciones de frustración a través de afirmaciones como “no soy capaz”, “me está quedando mal”, “esto está muy difícil”, sin embargo, poco a poco pudieron superar estas dificultades (Figura 7)

Figura 7

Representación isométrica de la tarea 1



Nota. Tras varios intentos de hacer y rehacer sus dibujos (Figura 7a y 7b) la gran mayoría de los estudiantes culminó con éxito esta tarea, pero dos de ellos no lograron resolverla correctamente (Figura 7c y 7d). A pesar de esto, hay que mencionar que la gran mayoría de los estudiantes tuvo dificultades en coordinar las direcciones de los segmentos paralelos que integran la representación plana del sólido.

4.3.2. Tarea 2. Identificación de las piezas del logikubo que conforman un sólido

Esta tarea fue una de las más complejas de resolver para los estudiantes ya que todos la respondieron incorrectamente. Incluso, algunos estudiantes no contestaron esta tarea. Ellos disponían de los *logikubos* para que intentaran realizar la construcción y, de esta manera facilitar la explicación de sus respuestas (Figura 8).

Figura 8*Identificación de piezas del logikubo*

- (a) las piezas no encajan por mas que la moeva
- (b) Pues se forma con el cubo azul ya que tiene las patitas y la cabeza
- (c) No la pude armar por mas que movi las fichas y NO en cababan
- (d) la pieza azul es la que encaja con la imagen ya que es algo similar

Nota. 8.a. Error relacionado con la habilidad de reconocimiento de relaciones espaciales. 8.b. Error relacionado con la habilidad de discriminación visual 8.c. Error relacionado con la habilidad de reconocimiento de relaciones espaciales 8.d. Error relacionado con la habilidad de discriminación visual

La dificultad radicó en que aparecían tres piezas del *logikubo* cubiertas por un color, esto ocasionó que los estudiantes no las identificaran fácilmente y, en consecuencia, tuvieron inconvenientes al construir la figura. En particular, ellos tuvieron dificultades con las habilidades de identificación visual y reconocimiento de las relaciones espaciales, esto se puede evidenciar en las respuestas de la (Figura 8a y 8c). También se observó dificultad con la habilidad conservación de percepción del tamaño y discriminación visual ya que algunos explicaban que la pieza azul del *logikubo* tenía una forma similar (figura 8b y 8d).

4.3.3. Tarea 3. Piezas del logikubo que se transforman

Dadas dos piezas iguales, los estudiantes debían decidir cuál(es) figuras no se podían formar con ellas. La estrategia utilizada por algunos estudiantes fue mover, voltear o girar la pieza roja del *logikubo* y ubicarlas en la posición que se les mostraba en la imagen (Figura 9c y 9e).

Figura 9

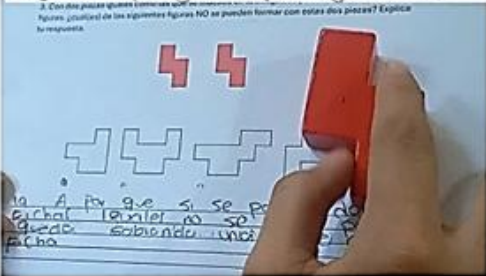
Ejemplos de respuestas de la tarea 3

(a) La opción A no encaja por que es muy pequeña la figura

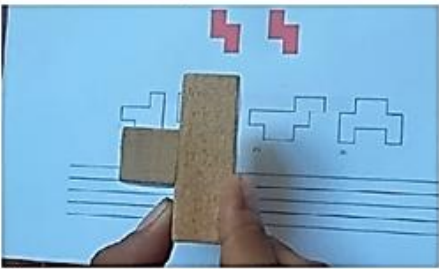
(b) La D por que no tiene el espacio para acomodarla la B tampoco coordina con la pieza en cambio la C y la d si se puede armar

(c) Yo con de varias formas los triángulos todos se pueden hacer excepto la figura A. no se puede formar con los dos triángulos

(d) Las figuras B y D no se pueden formar con las imágenes de arriba



(e)



(f)

Nota. 9.a. Respuesta correcta 9.b. Respuesta incorrecta. 9.c. Justificación escrita para resolver la tarea tres. 9.d. Respuesta incorrecta 9.e. Estrategia de solución usando la pieza roja. 9.f. Estrategia de solución usando la pieza con forma de “T” que no se mencionaba en la pregunta.

En esta tarea se observaron las habilidades de identificación visual pues encontraron las piezas dadas “ocultas” dentro de las opciones de respuesta, conservación de la percepción del

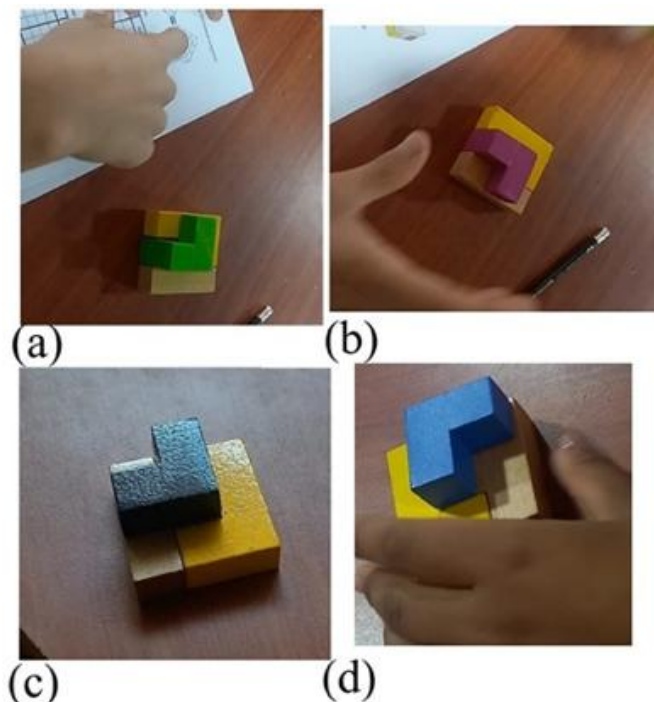
tamaño con frases como “es muy pequeña”, “no tiene el espacio” (Figura 9a y 9b) o usaban descripciones verbales como “falta este pedazo” y discriminación visual pues hacían comparaciones entre las opciones de respuesta. Uno de ellos usó la estrategia de dibujar la pieza sobre las representaciones dadas. También se observó dificultades con la comprensión de lectura ya que se estaba preguntando por la figura que no se podía armar con las dos piezas iguales y eligieron las que se podían armar (Figura 9d) otros utilizaron piezas del *logikubo* distintas a las del enunciado (Figura 9f).

4.3.4. Tarea 4. Construye la figura usando tres piezas del *logikubo*.

Pocos estudiantes resolvieron correctamente esta tarea, la dificultad estaba en que una de las piezas del *logikubo* necesaria para la construcción parecía ser la de color negro, sin embargo, al realizar la construcción no coincidía con lo que se mostraba en la construcción (Figura 10).

Figura 10

Representación tridimensional tarea 4



Uno de los estudiantes pudo notar esto y a través de preguntas guiadas por el profesor se dio cuenta que había otra forma de solucionar esta tarea usando la pieza de color morada (Figura 10a y 10b). En esta tarea se pudieron observar dificultades de identificación visual y del reconocimiento de posiciones y relaciones espaciales ya que al no identificar correctamente una de las tres piezas no se pudo realizar la construcción que se pedía (Figura 10c y 10d).

4.3.5. Tarea 5. Vistas de un objeto tridimensional

Solo un estudiante intentó resolver esta tarea, pero en general todos tuvieron dificultades con la interpretación de las tres vistas dadas y en consecuencia con la construcción del sólido.

Esto muestra carencia en las habilidades de coordinación del movimiento con los ojos, de reconocimiento de posiciones en el espacio en relación con el observador y de reconocimiento de relaciones espaciales. Lo siguiente es un dialogo entre estudiante y profesor durante un intento de solución a la tarea:

Profesor: Esa vista, ¿cuál es?

Estudiante: Lateral izquierdo. Si le quito esta parte de aquí (Figura 11a) , se nota el cuadrito que está acá (señala la vista lateral izquierda de la hoja y la Figura 11b)

Profesor: Sí, ¿y las otras vistas?

Estudiante: Me toca hacerlas

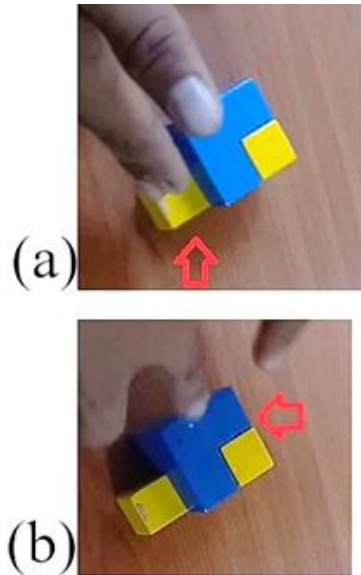
Profesor: ¿No pertenecen a la misma figura?

Estudiante: Yo creo que sí, no lo he intentado, pero de todas formas ya lo voy a hacer.

De la conversación se concluye que hay confusión en la interpretación de vistas como si cada vista perteneciera a una figura diferente. Por lo tanto, es necesario incluir en el experimento de enseñanza las técnicas para interpretar las diferentes vistas de un objeto tridimensional.

Figura 11

Representación de diferentes vistas de un objeto tridimensional

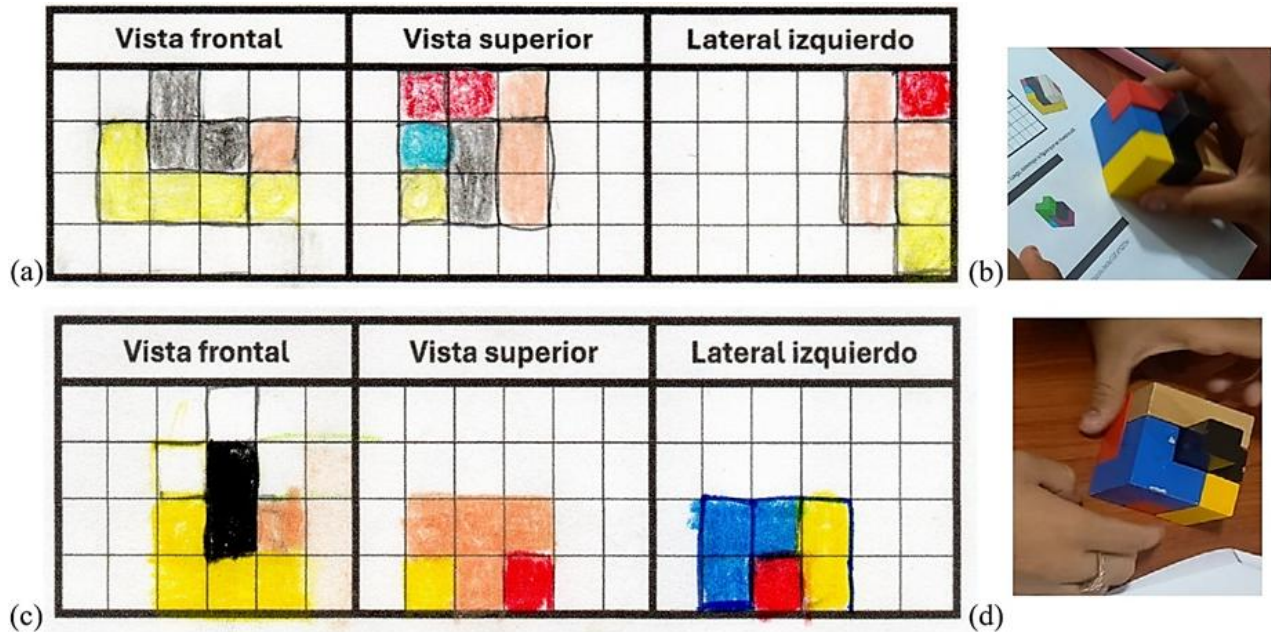


Nota. Movimientos de las manos para apoyar la explicación de la tarea 5.

4.3.6. Tarea 6. De lo tridimensional a lo bidimensional

Esta tarea consistía en que, a partir de una figura tridimensional representada en forma bidimensional (en la hoja) los estudiantes debían dibujar tres de sus seis posibles vistas. Una de las habilidades puestas en juego en esta tarea era el reconocimiento de posiciones en el espacio pues debían visualizar la posición correcta de las piezas y la forma como se conectaban entre sí, lo cual está relacionado con la habilidad de reconocimiento de relaciones espaciales.

Sin embargo, todos los estudiantes que resolvieron esta tarea recurrieron a la estrategia de construir la figura usando las piezas del *logikubo* y, a partir de ella, dibujar las vistas.

Figura 12*Representación de diferentes vistas del objeto*

Nota. La mayoría de los estudiantes cometieron errores al dibujar al menos una de las vistas una vez realizada la construcción (figura 12a y 12b) y algunos no resolvieron esta tarea. También se observó errores en la construcción y en consecuencia en el dibujo de las vistas (figura 12c y 12d).

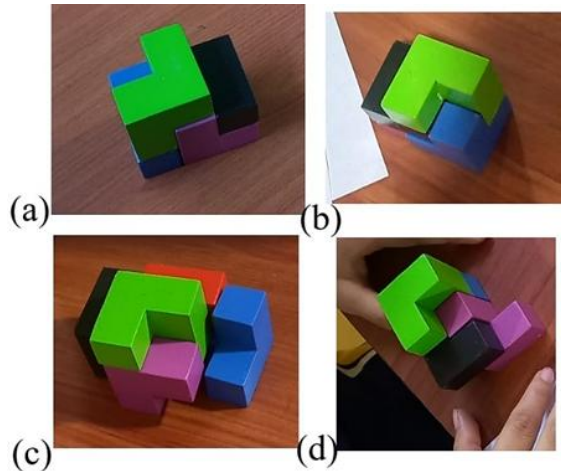
4.3.7. Tarea 7. Recuerda y construye la figura mostrada en el video

Los estudiantes prestaban atención al video en el que se mostraba una figura construida con algunas piezas del *logikubo* desde diferentes vistas.

Este video tenía una duración de 50 segundos y fue reproducido dos veces. Ellos debían analizar la posición de cada pieza, recordar cuáles eran y la forma en la que estaban conectadas. Pocos estudiantes mostraron habilidad de memoria visual al elegir correctamente las piezas del *logikubo* por su forma o color,

Figura 13

Representación de las posiciones espaciales



Nota. El de reconocimiento de posición y relaciones espaciales para saber de qué forma estaban conectadas y la posición de cada una de ellas (Figura 13a y 13b). Otros solamente recordaron las piezas por su color, pero tuvieron inconvenientes en realizar la construcción (Figura 13c y 13d).

4.4. Diseño preliminar del experimento de enseñanza

Una vez implementada la prueba diagnóstica, se tomó como referencia las habilidades de visualización mostradas por los estudiantes para el diseño del experimento de enseñanza. Este diseño se compone de cuatro sesiones, cada una contiene objetivos de aprendizaje según las habilidades de visualización a desarrollar y un conjunto de actividades que se dividen en tres momentos. En la primera parte de la clase, se les presenta una actividad retadora a los estudiantes la cual busca la motivación por el aprendizaje, observar estrategias de solución y poner a prueba sus habilidades de visualización. En la segunda parte, se utilizan diferentes recursos de enseñanza como los *logikubos*, *Geogebra* y *TinkerCAD* para orientar el desarrollo de la clase. Finalmente, la última tarea busca el trabajo independiente de los estudiantes, sin embargo, después ellos podrán compartir sus soluciones de manera verbal con sus compañeros de clase y profesor.

4.4.1. Primera parte

En esta primera parte se propone con el fin de desarrollar las habilidades de visualización mostradas en la Tabla 3. La sesión inicia con el reto de construir la letra “J” y otras letras con las piezas del *logikubo*. En la segunda, se explica el uso de la cuadrícula isométrica para dibujar construcciones hechas con las piezas del *logikubo* con el apoyo de *GeoGebra*. También, en este momento de la clase los estudiantes mueven con libertad las piezas del *logikubo* y las representan en el papel. Luego, eligen una de las siete piezas del *logikubo* y representan sus vistas. Por último, para la evaluación del aprendizaje se dibuja la letra “J” con sus respectivas vistas. En caso tal de que los estudiantes tengan dificultades con la identificación de vistas, se cuenta con una estructura en acrílico en la que se insertan las piezas del *logikubo* o las construcciones hechas con ellas para facilitar la representación de las vistas.

Tabla 6

Sesión 1

Título: representando las piezas de los *logikubos* en la cuadrícula isométrica y sus vistas: dos formas de comprender lo que vemos.

Objetivos de aprendizaje:

- Representar en perspectiva isométrica objetos tridimensionales (*logikubos*) en el plano bidimensional (hoja con cuadrícula isométrica).
 - Representar las vistas de objetos tridimensionales (*logikubos*) desde diferentes posiciones en el plano bidimensional.
-

Materiales

- *Logikubos*
 - *Geogebra*
 - Reglas
 - Escuadras
-

• Hoja con cuadrícula isométrica

Momento	Tiempo	Acciones	Habilidades	Respuesta
Inicio	20 min	<ul style="list-style-type: none"> • Ensamblar piezas del <i>logikubo</i>. • Mover, rotar o girar piezas del <i>logikubo</i> • Recordar formas de las letras 	<ul style="list-style-type: none"> • Memoria visual • Reconocimiento de posiciones en el espacio • Reconocimiento de relaciones espaciales 	Construcción
			<ul style="list-style-type: none"> • Trazar segmentos en la cuadrícula isométrica. • Unir puntos con líneas verticales, horizontales o inclinadas. • Contar cubos que componen las piezas del <i>logikubo</i> • Comparar la forma y tamaño de las piezas del <i>logikubo</i>. • Mover, rotar o girar piezas del <i>logikubo</i> • Dibujar vistas de las piezas del <i>logikubo</i> 	
Desarrollo	60 min			Gráfica Verbal

Cierre	30 min	<ul style="list-style-type: none">• Mover, rotar o girar piezas del <i>logikubo</i>• Trazar segmentos en la cuadrícula isométrica.• Unir puntos con líneas verticales, horizontales o inclinadas.• Dibujar vistas de las piezas del <i>logikubo</i>.	<ul style="list-style-type: none">• Coordinación ojo motriz.• Reconocimiento de posiciones en el espacio.• Reconocimiento de relaciones espaciales	Gráfica
--------	--------	---	--	---------

Momento 1: inicio de la clase

La clase inicia con el reto para los estudiantes de construir la letra “J” usando las piezas del *logikubo*.

Instrucción: Con las piezas del *logikubo* puedes construir muchas formas como animales, objetos o letras. Construye la letra “J” usando las piezas del *logikubo*. ¿Puedes crear otras letras usando las piezas del *logikubo*?

-
- | | |
|------------|--|
| Conjeturas | <ul style="list-style-type: none">• Los estudiantes tendrán dificultades para representar en la hoja con cuadrícula isométrica las distintas posiciones de las piezas del <i>logikubo</i>.• Los estudiantes tendrán dificultades para identificar y trazar líneas paralelas.• Los estudiantes confunden los cubos que conforman las piezas del <i>logikubo</i> con cuadrados.• Algunos estudiantes confundirán las vistas de las piezas de los <i>logikubos</i> ya que no tienen en cuenta la posición del observador respecto al objeto tridimensional.• Algunos estudiantes representarán vistas distintas a las que se piden, tendrán dificultades para visualizar las caras ocultas. |
|------------|--|

Momento 2: desarrollo de la clase

- ¿Qué entiendes por el término isométrico?
- ¿Cómo podemos dibujar un cubo en la cuadrícula isométrica?
- Dibuja las siete piezas del *logikubo* al menos en dos posiciones distintas en el espacio disponible.

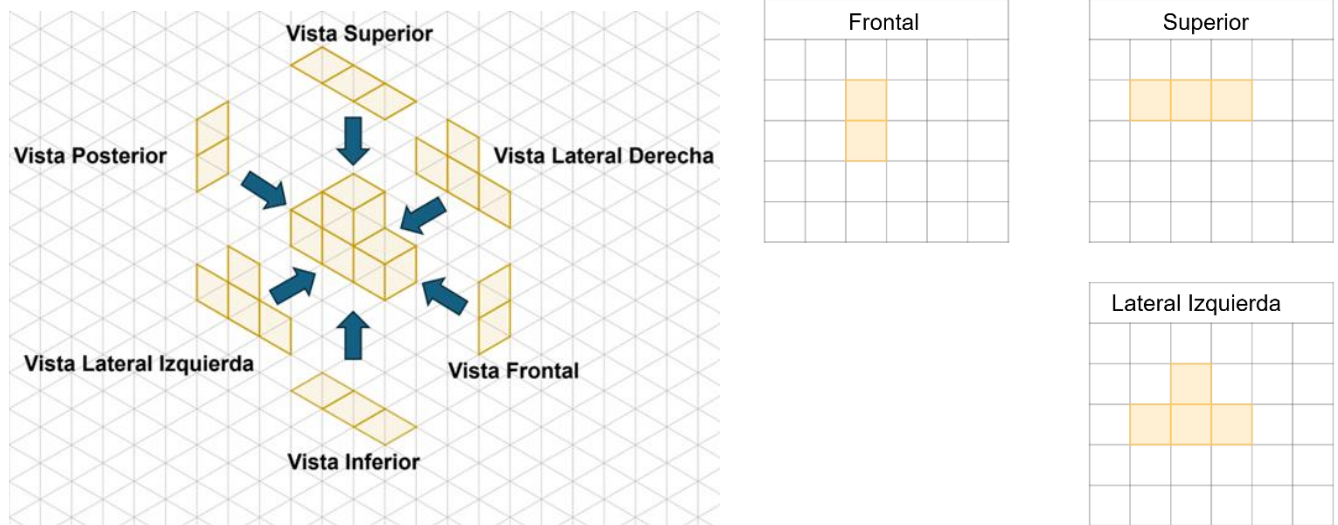
En esta parte de clase se hacen algunas preguntas de términos que requieren ser conocidos por los estudiantes y deben ser clarificados por parte del profesor, como, por ejemplo: isometría, isométrico, representación, vértices, líneas paralelas, caras.

Preguntas orientadoras

- ¿Qué entiendes por las vistas de un objeto?
- ¿Crees que las vistas de un objeto dependen de la posición del observador?



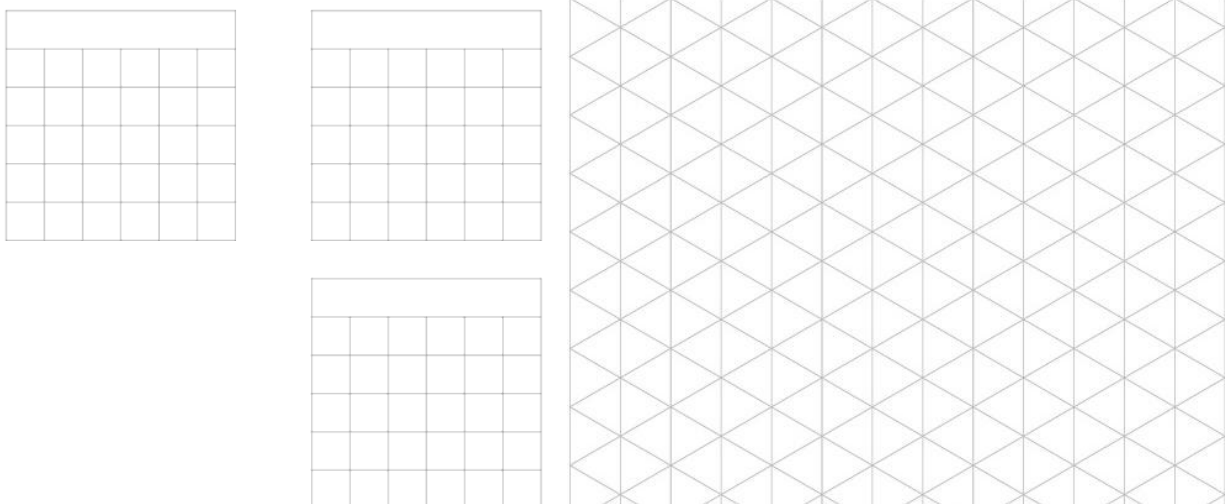
Instrucción: Elige una de las piezas del *logikubo*, y representa sus diferentes vistas. Analiza el siguiente ejemplo:



Momento 3: cierre de la clase

Una vez terminada la práctica de dibujar los *logikubos* y sus vistas se les pide a los estudiantes que recuerden el reto planteado en el primer momento y pongan a prueba sus aprendizajes.

Instrucción: Dibuja en la cuadrícula isométrica la letra “J” y luego representa sus vistas.



4.4.2. Segunda parte

En esta segunda parte, además de reforzar algunas habilidades trabajadas en la sesión anterior, se incluyen tareas que permitan desarrollar las habilidades que se muestran en la tabla. La sesión inicia con el reto de a partir de una, luego con dos vistas dadas realizar la construcción de la figura con las piezas del *logikubo*. Después, deben encontrar las vistas faltantes y darse cuenta de la necesidad de hacer que las tres vistas coincidan. En la segunda parte, el estudiante descubre las piezas faltantes que han sido usadas en los diseños y deben representar sus vistas. Por último, con un nivel mayor de dificultad, se evalúa la capacidad de los estudiantes para identificar en una construcción las piezas del *logikubo* ocultas por el color y de comparar sus construcciones con la forma de la imagen mostrada en la tarea.

Tabla 7

Sesión 2

Título: Identificando y comparando formas en construcciones hechas con los *logikubos*.

Objetivos de aprendizaje:

- Representar en perspectiva isométrica objetos tridimensionales (*logikubos*) en el plano bidimensional (hoja con cuadrícula isométrica).
 - Identificar y comparar objetos tridimensionales ocultos en una figura.
 - Interpretar representaciones planas de objetos tridimensionales.
-

Materiales

- *Logikubos*
 - Reglas
 - Escuadras
-

- Hoja con cuadrícula isométrica

Momento	Tiempo	Acciones	Habilidades de visualización	Tipos de respuesta
Inicio	20 min	<ul style="list-style-type: none"> • Ensamblar piezas del <i>logikubo</i>. • Mover, rotar o girar piezas del <i>logikubo</i> • Dibujar vistas faltantes • Comparar similitudes y diferencias entre las vistas 	<ul style="list-style-type: none"> • Coordinación ojo motriz • Discriminación visual • Reconocimiento de posiciones en el espacio • Reconocimiento de relaciones espaciales 	Construcción Gráfica Verbal
Desarrollo	60 min	<ul style="list-style-type: none"> • Ensamblar piezas del <i>logikubo</i>. • Mover, rotar o girar piezas del <i>logikubo</i> • Identificar piezas del <i>logikubo</i> que componen una figura. • Comparar similitudes y diferencias entre las piezas del <i>logikubo</i>. • Dibujar vistas faltantes 	<ul style="list-style-type: none"> • Coordinación ojo motriz • Percepción figura contexto • Discriminación visual • Reconocimiento de relaciones espaciales • Reconocimiento de posiciones en el espacio 	Construcción Gráfica

		<ul style="list-style-type: none"> • Ensamblar piezas del <i>logikubo</i>. • Mover, rotar o girar piezas del <i>logikubo</i> • Trazar segmentos en la cuadrícula isométrica. • Unir puntos con líneas verticales, horizontales o inclinadas. • Dibujar vistas de una figura construida • Contar cubos que componen una figura. • Identificar piezas del <i>logikubo</i> que componen una figura. 	<ul style="list-style-type: none"> • Coordinación ojo motriz. • Conservación de la percepción • Percepción figura Construcción contexto. Gráfica • Reconocimiento de posiciones en el espacio. • Reconocimiento de relaciones espaciales
Cierre	30 min		

Conjeturas

- Los estudiantes tendrán dificultades para identificar las piezas ocultas en la figura construida.
 - Dificultades para armar la misma figura usando diferentes piezas del *logikubo*.
-

- Algunos estudiantes solo coordinan una vista de la construcción y no se dan cuenta de la necesidad de que las tres vistas coincidan.
- Los estudiantes tendrán dificultades para comparar el tamaño de las piezas del *logikubo* con los que se muestran en las imágenes de las actividades.

Momento 1: inicio de la clase

La clase inicia con el reto de construir figuras con los *logikubos* a partir de una vista y luego a partir de dos. La intención de esta actividad consiste en que los estudiantes se den cuenta de la necesidad de integrar todas las vistas para poder construir una única figura.

1. Dada la siguiente vista superior construye una figura que coincida con ella. Luego, representa las vistas faltantes.

Frontal	Superior	Lateral izquierdo

¿Puedes construir otra figura con la misma vista superior? ¿Qué ocurre con la vista frontal y lateral izquierda?

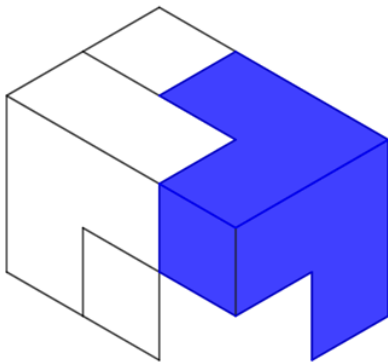
Una figura se ha construido con las piezas del *logikubo* y se ha obtenido las siguientes vistas.

Descubre la vista faltante.

Frontal					Superior					Lateral izquierdo				

Momento 2: desarrollo de la clase

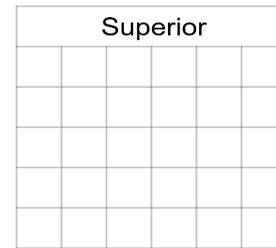
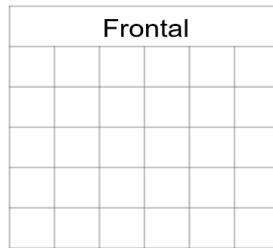
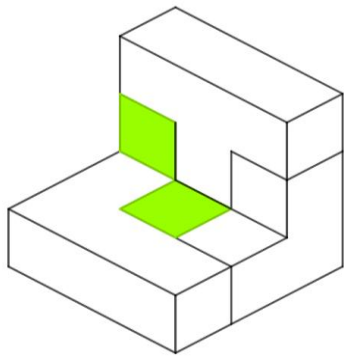
Se han construido las siguientes figuras con las piezas del *logikubo*, descubre las piezas faltantes y construye las figuras.



Frontal				

Superior				

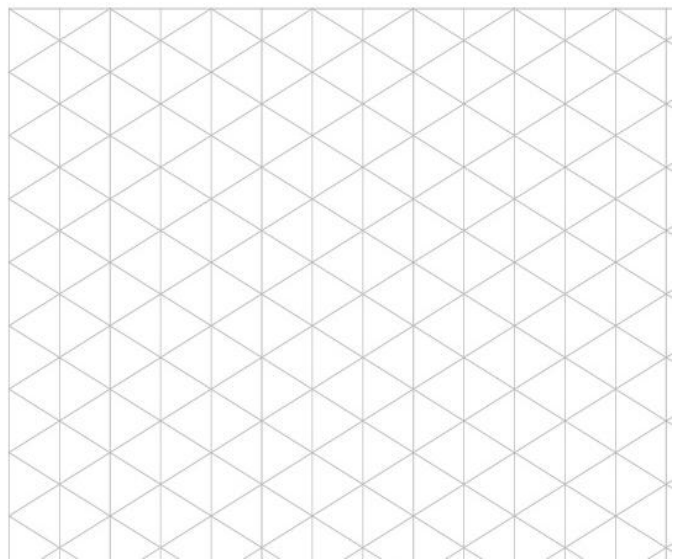
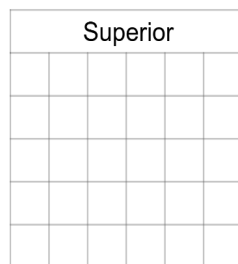
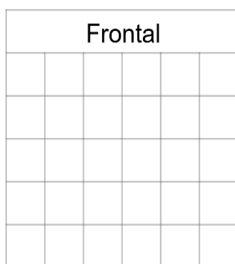
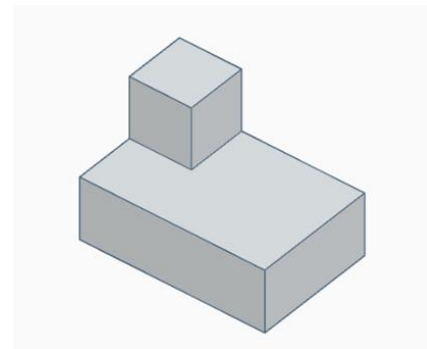
Lateral Izquierda				



Momento 3: cierre de la clase

Con dos piezas del *logikubo* se ha construido la siguiente figura.

Encuentra las dos piezas utilizadas y constrúyela. Luego, dibújala en el espacio indicado, colorea cada pieza del *logikubo* y representa sus vistas.



4.4.3. Tercera parte

En esta parte del experimento se pone a prueba la habilidad de memoria visual y otras que se han practicado en las sesiones anteriores. Los estudiantes ya no tienen a la vista las piezas del *logikubo* y deben recordarlas para manipularlas mentalmente y luego representarlas en el papel. Por esta razón, la primera actividad consiste en dar algunas pistas de las piezas del *logikubo* que los estudiantes deben completar. Luego, se les pide a los estudiantes encontrar otra pieza del *logikubo* que ha sido utilizada para construir una figura. Una vez hecho esto, deben dibujarla y representar sus vistas. Por último, se les da libertad a los estudiantes para que de manera independiente dibujen una figura usando dos o más piezas del *logikubo*, la actividad finaliza con un trabajo en parejas en la que comparten sus dibujos y cada uno construye lo dibujado por el otro.

Tabla 8

Sesión 3

Título: Recordando las piezas del *logikubo* para dibujar y construir figuras.

Objetivos de aprendizaje:

- Transformar mentalmente las piezas del *logikubo* y las representa en la cuadrícula isométrica.
 - Identificar y comparar objetos tridimensionales ocultos en una figura.
 - Representar en perspectiva isométrica objetos tridimensionales (*logikubos*) en el plano bidimensional (hoja).
 - Interpretar representaciones planas de objetos tridimensionales.
-

Materiales

- Reglas
 - Escuadras
-

Momento	Tiempo	Acciones	Habilidades de visualización	Tipos de respuesta
Inicio	20 min	<ul style="list-style-type: none"> • Recordar la forma, tamaño y color de las piezas del <i>logikubo</i>. • Trazar segmentos en la cuadrícula isométrica. • Unir puntos con líneas verticales, horizontales o inclinadas. • Identificar las piezas del <i>logikubo</i>. • Completar figuras en la cuadrícula isométrica • Comparar la forma y tamaño de las piezas del <i>logikubo</i>. • Mover, rotar o girar piezas del <i>logikubo</i> mentalmente 	<ul style="list-style-type: none"> • Memoria visual • Coordinación ojo motor • Percepción figura contexto • Discriminación visual 	Gráfica

Desarrollo 60 min	<ul style="list-style-type: none"> • Recordar la forma, tamaño y color de las piezas del <i>logikubo</i>. 		
	<ul style="list-style-type: none"> • Ensamblar piezas del <i>logikubo</i> mentalmente. 		
	<ul style="list-style-type: none"> • Mover, rotar o girar piezas del <i>logikubo</i> mentalmente 	<ul style="list-style-type: none"> • Memoria visual • Coordinación ojo 	
	<ul style="list-style-type: none"> • Trazar segmentos en la cuadrícula isométrica. 	<ul style="list-style-type: none"> • Conservación de la 	
	<ul style="list-style-type: none"> • Unir puntos con líneas verticales, horizontales o inclinadas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Percepción figura contexto. 	Gráfica
	<ul style="list-style-type: none"> • Dibujar vistas de una figura construida 	<ul style="list-style-type: none"> • Discriminación visual • Reconocimiento de 	
	<ul style="list-style-type: none"> • Contar cubos que componen una figura. 	<ul style="list-style-type: none"> • Posiciones en el espacio. • Reconocimiento de 	
	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar piezas del <i>logikubo</i> que componen una figura. 	<ul style="list-style-type: none"> • Relaciones espaciales 	
	<ul style="list-style-type: none"> • Comparar la forma y tamaño de las piezas del <i>logikubo</i> 		

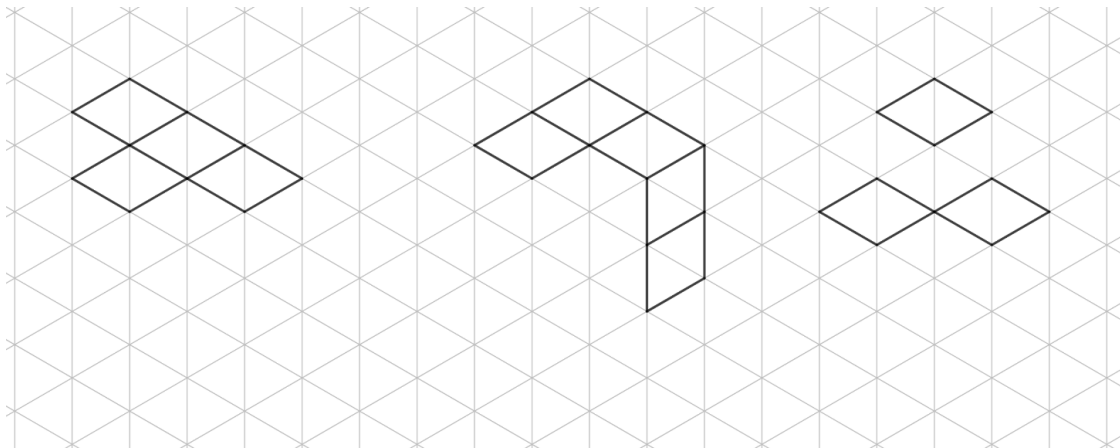
		<ul style="list-style-type: none"> • Recordar la forma, tamaño y color de las piezas del <i>logikubo</i>. • Ensamblar piezas del <i>logikubo</i> mentalmente. • Mover, rotar o girar piezas del <i>logikubo</i> mentalmente • Trazar segmentos en la cuadrícula isométrica. • Unir puntos con líneas verticales, horizontales o inclinadas. • Identificar piezas del <i>logikubo</i> que componen una figura. • Comparar la forma y tamaño de las piezas del <i>logikubo</i> 	<ul style="list-style-type: none"> • Memoria visual • Coordinación ojo motriz. • Percepción figura contexto. • Discriminación visual • Reconocimiento de relaciones espaciales 	<p>Gráfica Construcción</p>
Cierre	30 min			

Conjeturas • Los estudiantes tienen dificultades para manipular mentalmente las piezas del *logikubo*.

-
- Los estudiantes tienen dificultades para recordar algunas piezas del *logikubo*, especialmente las más complejas, como por ejemplo las piezas de color verde y morado
 - Los estudiantes tendrán dificultades para identificar piezas del *logikubo* y completar figuras.
 - Al no tener a la vista las piezas del *logikubo*, los estudiantes tendrán dificultades para dibujarlas en la cuadrícula isométrica.
 - Algunos estudiantes solo coordinan una vista de la construcción y no se darán cuenta de la necesidad de que las tres vistas coincidan.
-

Momento 1: inicio de la clase

Identifica las piezas del *logikubo* que están incompletas y termina de representarlas, luego colorea.

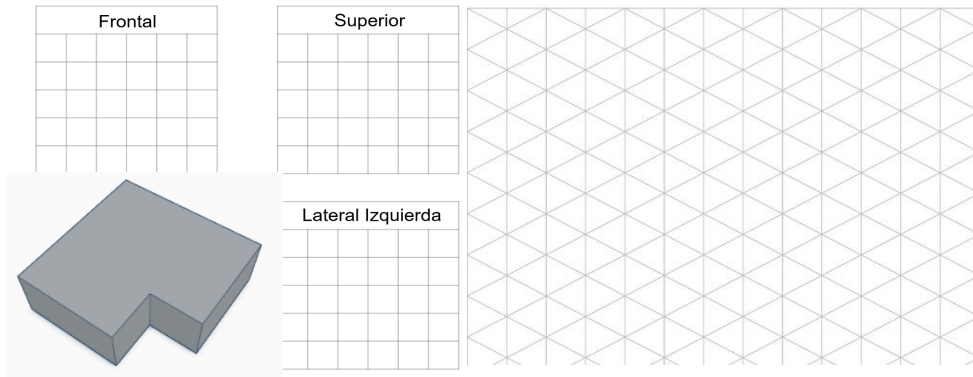


Momento 2: desarrollo de la clase

La siguiente figura se ha construido con las piezas del *logikubo*, una de ellas es la pieza amarilla, descubre la otra pieza faltante. Luego, dibújala y representa sus vistas frontal, superior y lateral izquierda en el espacio indicado.

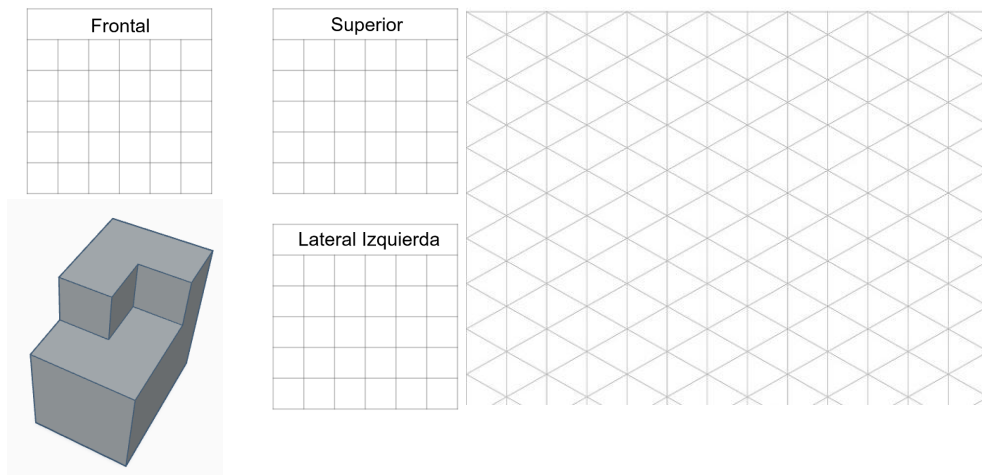
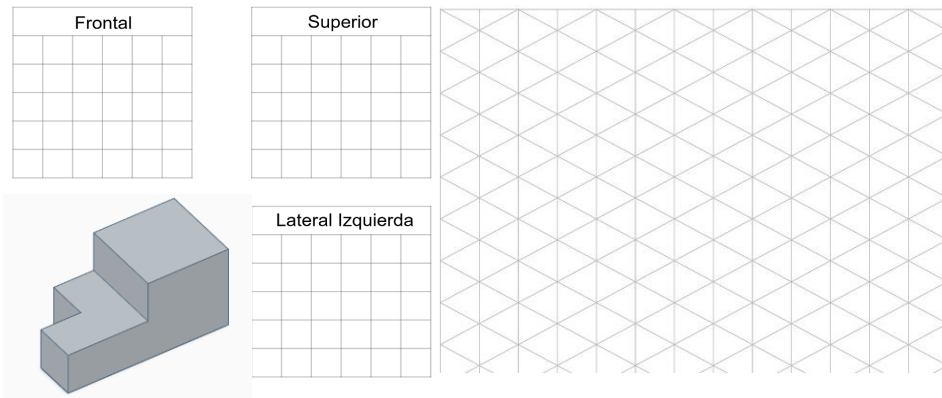
La siguiente figura se ha construido con las piezas del *logikubo*, descubre las piezas utilizadas.

Luego, dibújala y representa sus vistas frontal, superior y lateral izquierda en el espacio indicado.



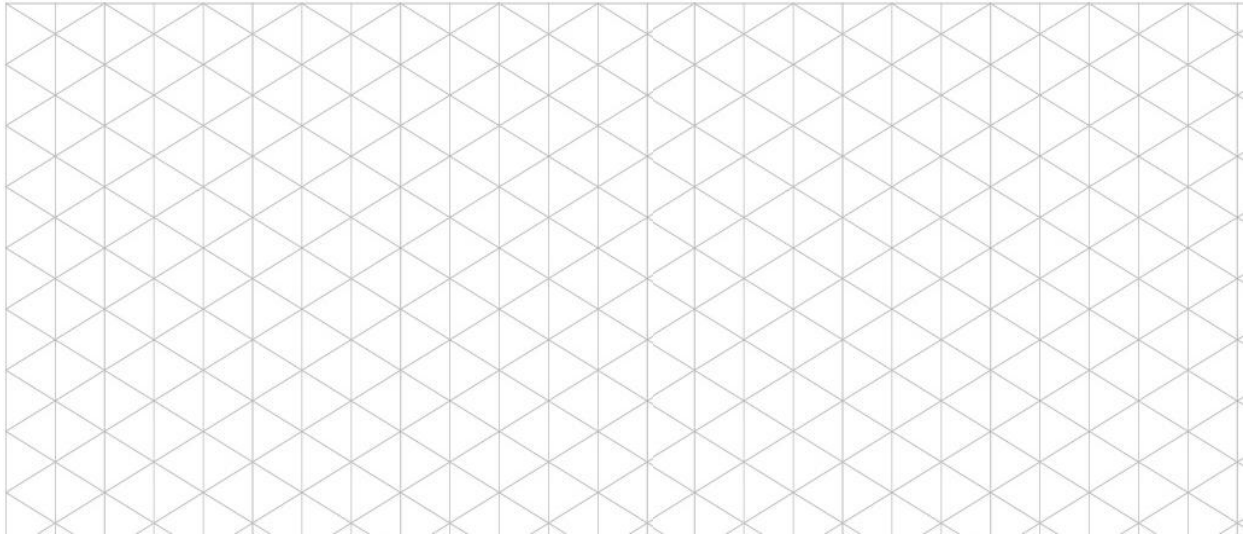
Pregunta orientadora

¿Puedes construir la misma figura usando una o más piezas distintas?



Momento 3: cierre de la clase

Recuerda las piezas del *logikubo*, selecciona dos o más de ellas y dibuja una figura. Luego, pídele a tu compañero que construya la figura que has dibujado.

**4.4.4. Cuarta parte**

Esta última parte tiene como propósito seguir entrenando la habilidad de memoria visual y otras que han sido practicadas en las sesiones anteriores. En la primera pregunta, se espera que los estudiantes identifiquen con qué otras piezas del *logikubo* puede construirse la misma figura. Una vez realizada esta tarea, los estudiantes ya no tienen a la vista los *logikubos* y se espera que elijan una de ellas y realicen reflexiones a partir de un eje de simetría. Con ello, se espera que se acerquen intuitivamente a conceptos de geometría como simetría, equidistancia y paralelismo. Finalmente, la sesión termina con un video en el que se muestra por unos segundos una figura construida con piezas del *logikubo*. Ellos deben recordar cuáles son y las posiciones de cada una de ellas para construirla.

Tabla 9*Sesión 4*

Título: Manipulando mentalmente las piezas de los *logikubos* para comunicar lo que recordamos.

Objetivos de aprendizaje:

- Transformar mentalmente las piezas del *logikubo* y las representa en la cuadrícula isométrica.
 - Identificar y comparar objetos tridimensionales ocultos en una figura.
 - Representar en perspectiva isométrica objetos tridimensionales (*logikubos*) en el plano bidimensional (hoja).
 - Interpretar representaciones planas de objetos tridimensionales.
-

Materiales

- Reglas
 - Escuadras
 - Video
-

Momento	Tiempo	Acciones	Habilidades de visualización	de Tipos de respuesta
Inicio	20 min	<ul style="list-style-type: none"> • Recordar la forma, tamaño y color de las piezas del <i>logikubo</i>. • Trazar segmentos en la cuadrícula isométrica. • Unir puntos con líneas verticales, horizontales o inclinadas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Memoria visual • Coordinación motor • Percepción figura contexto • Discriminación visual 	<ul style="list-style-type: none"> ojo Gráfica figura

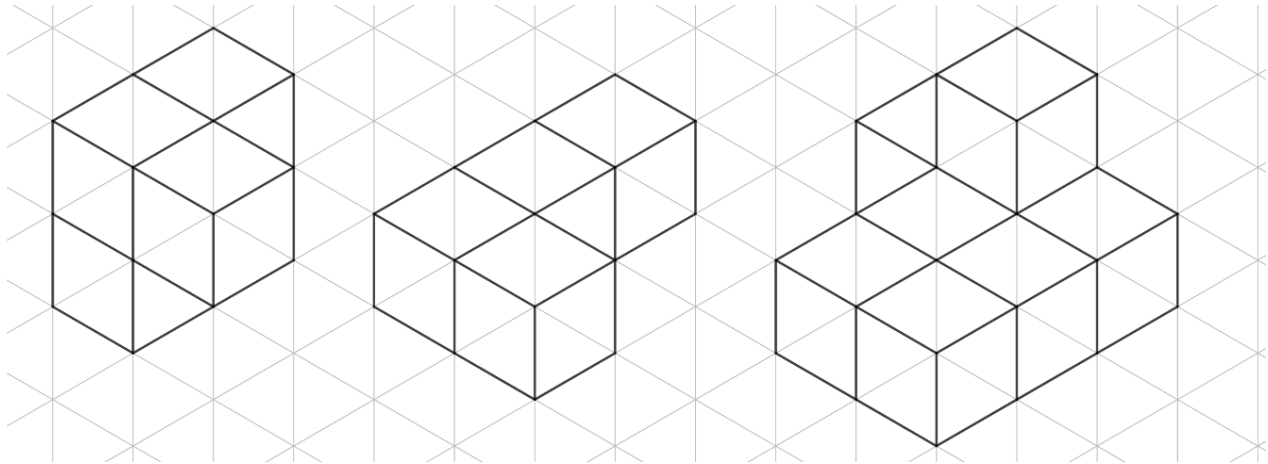
	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar las piezas del logikubo. • Completar figuras en la cuadrícula isométrica • Comparar la forma y tamaño de las piezas del <i>logikubo</i>. <p>Mover, rotar o girar piezas del <i>logikubo</i> mentalmente</p>	
	<ul style="list-style-type: none"> • Recordar la forma, tamaño y color de las piezas del <i>logikubo</i>. • Ensamblar piezas del <i>logikubo</i> mentalmente. • Mover, rotar o girar piezas del <i>logikubo</i> mentalmente 	<ul style="list-style-type: none"> • Memoria visual • Coordinación ojo motriz. • Conservación de la percepción
Desarrollo 60 min	<ul style="list-style-type: none"> • Trazar segmentos en la cuadrícula isométrica. • Unir puntos con líneas verticales, horizontales o inclinadas. • Completar vistas de una representación 	<ul style="list-style-type: none"> • Percepción figura contexto. • Discriminación visual • Reconocimiento de posiciones en el espacio. <p>Gráfica</p>

		<ul style="list-style-type: none"> • Contar cubos que componen una figura. • Identificar piezas del <i>logikubo</i> que componen una figura. • Comparar la forma y tamaño de las piezas del <i>logikubo</i> 	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocimiento de relaciones espaciales 	
			<ul style="list-style-type: none"> • Memoria visual 	
		<ul style="list-style-type: none"> • Recordar la forma, tamaño y color de las piezas del <i>logikubo</i>. 	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocimiento de posiciones en el espacio. 	
Cierre	30 min	<ul style="list-style-type: none"> • Ensamblar piezas del <i>logikubo</i>. • Mover, rotar o girar piezas del <i>logikubo</i> mentalmente. 	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocimiento de relaciones espaciales 	Construcción

- Conjeturas**
- Los estudiantes tienen dificultades para manipular mentalmente las piezas del *logikubo*.
 - Los estudiantes tienen dificultades para recordar algunas piezas del *logikubo*, especialmente las más complejas, como por ejemplo las piezas de color verde y morado.
 - Al no tener a la vista las piezas del *logikubo*, los estudiantes tendrán dificultades para dibujarlas en la cuadrícula isométrica.
 - Los estudiantes harán construcciones diferentes a las que se piden a partir de las vistas dadas.
-

Momento 1: inicio de la clase

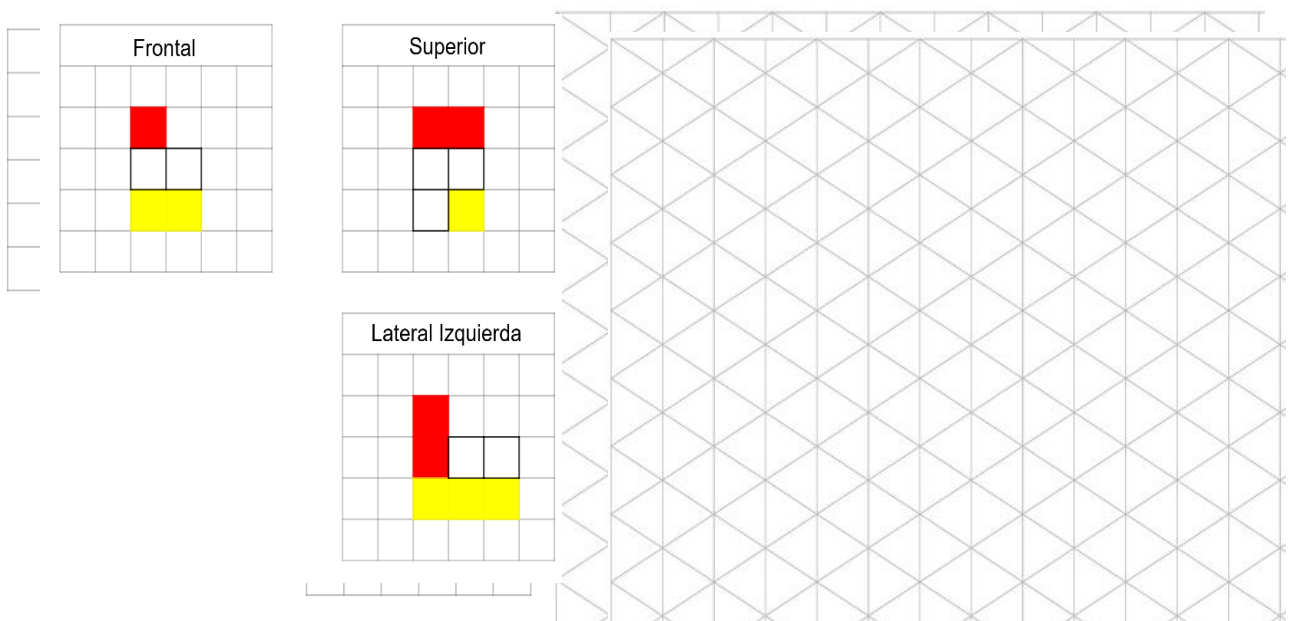
Con dos piezas del *logikubo* puede construirse la siguiente figura. ¿con cuáles otras dos piezas pueden construirse la misma figura?

**Pregunta orientadora**

¿Puedes usar otras dos piezas del *logikubo* para construir la misma figura?

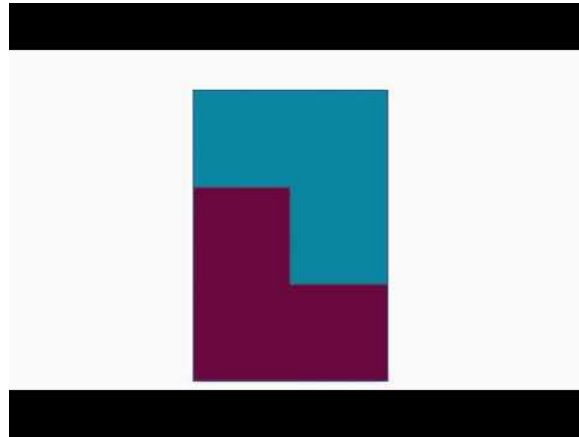
Momento 2: desarrollo de la clase

Dadas las siguientes vistas de una construcción hecha con las piezas del *logikubo*, representa esta construcción en la cuadrícula isométrica.



Momento 3: cierre de la clase

Los estudiantes observan por unos segundos un video con una figura construida con las piezas del *logikubo*. Luego, deben recordar la posición de cada una de las fichas y reconstruirla.



Video alojado en: <https://www.youtube.com/embed/CW1bf9IXsf4?feature=oembed>

5. Análisis retrospectivo

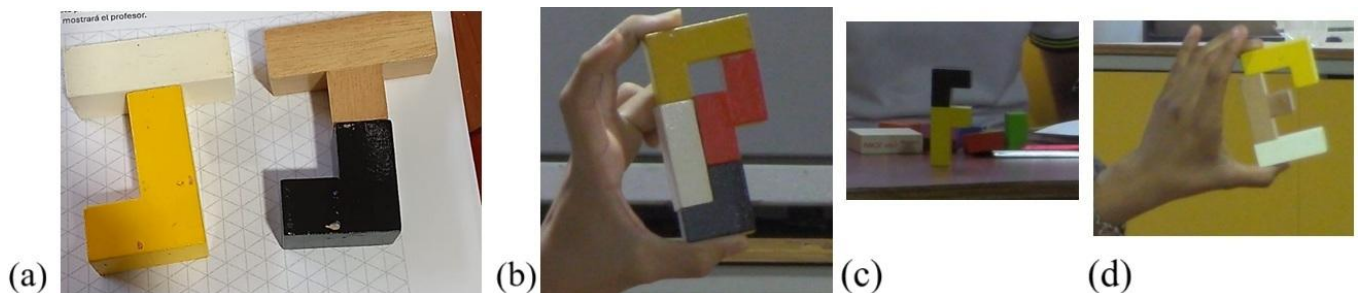
En este apartado serán presentados los análisis correspondientes a cada una de las habilidades durante el desarrollo de las cuatro clases propuestas para el experimento de enseñanza.

5.1. Coordinación óculo-motora

El entrenamiento de esta habilidad inicia con la implementación de la primera parte del experimento. La primera tarea consistía en construir la letra “J”, estas representaciones externas eran guiadas por las imágenes mentales asociadas con la forma de la letra y de la habilidad para manipular las piezas del *logikubo*, en la figura 14a. se muestran dos formas de construir la letra “J”. Cuando se les pidió a los estudiantes construir otras letras con las piezas del *logikubo*, construyeron las letras “P”, “F” y “e” como se puede observar en la figura 14b, 14c y 14d.

Figura 14

Letras construidas con las piezas del logikubo



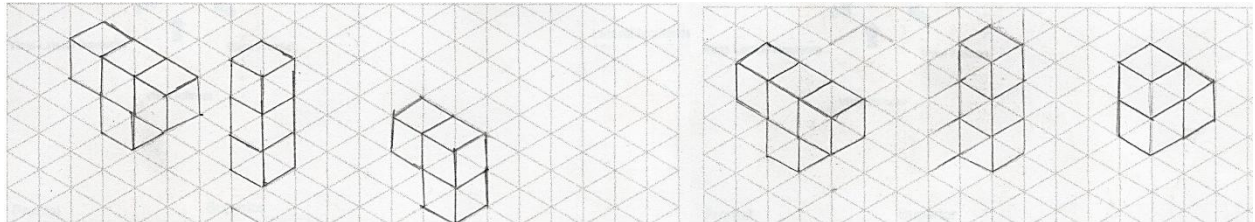
Nota. 14.a. Diferentes maneras de construir la letra “J”. *14.b.* letra “P” construida por estudiante 1, (14.c.) letra “F” construida por estudiante 2, (14.d) letra “e” construida por estudiante 3.

En general, esta tarea no fue difícil para la gran mayoría de los estudiantes y les permitió relacionar las piezas individuales con las letras del abecedario, al decir que, la pieza roja tiene la forma de la letra “Z”, la amarilla tiene forma de “L” y la café tiene forma de “T”. Debido a que algunos estudiantes estaban organizados en parejas tomaron piezas del *logikubo* de sus compañeros para construir otras letras como la “O”.

La siguiente tarea fue representar en la cuadrícula isométrica las piezas del *logikubo* en distintas posiciones. Los estudiantes no presentaron mayor dificultad en la representación de las piezas de color negro, blanco y café. Mientras las observaban, los estudiantes trazaron segmentos verticales, horizontales y oblicuos de los bordes de cada una de las piezas con la ayuda de la regla. En la figura 15 se muestran algunas representaciones hechas por dos estudiantes.

Figura 15

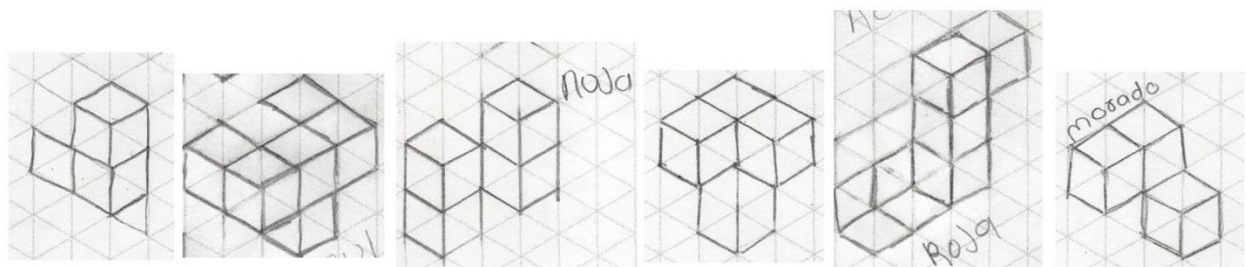
Representaciones en el papel de algunas piezas del logikubo



Algunos estudiantes decidieron no usar la regla y, en cambio, valerse de la disposición de las líneas para representar las piezas. Una dificultad encontrada en algunos estudiantes fue la representación de las piezas compuestas por cuatro cubos como es el caso de las de color azul, roja, morada y verde. En la Figura 16 se muestran algunas representaciones hechas por los estudiantes.

Figura 16

Representaciones erróneas de algunas piezas del logikubo.



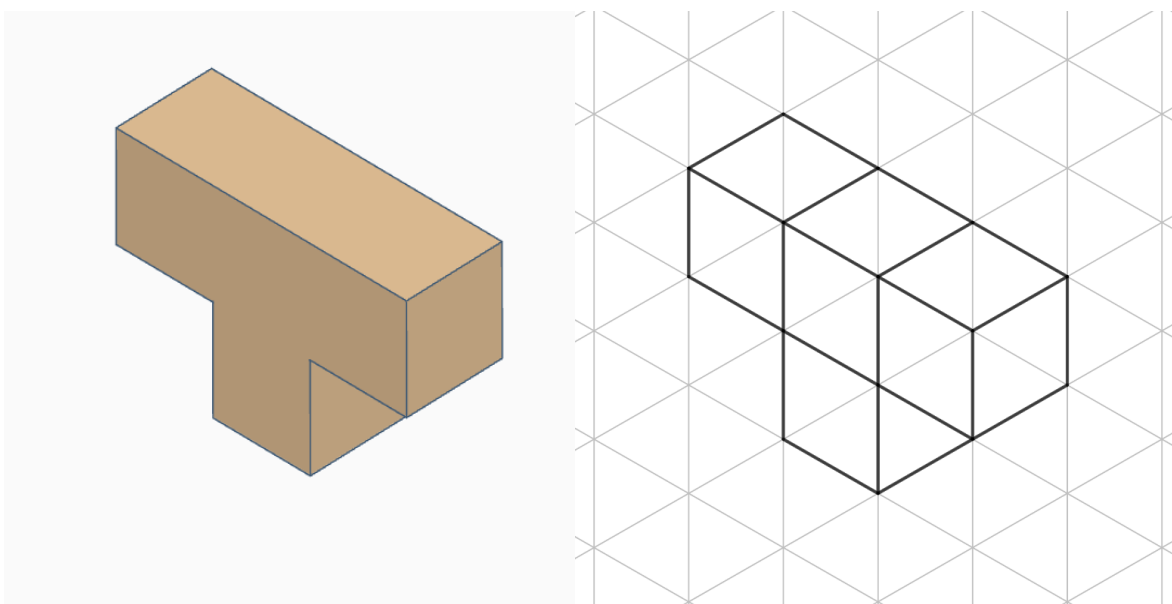
También se puede apreciar las representaciones de los intentos fallidos de los estudiantes al dibujar las piezas que estaban viendo, según lo observado durante el desarrollo de la sesión,

ellos eran conscientes de la incorrección de sus dibujos. Los errores encontrados fueron en la representación de las caras ocultas y en la coordinación de la posición de los cubos.

Ante la dificultad encontrada con la representación de estas piezas, se utilizó la opción de vista isométrica en *Geogebra* en su versión *offline* y una imagen descargada de *ThinkerCAD*. Lo anterior debido a que en el colegio la señal de internet es intermitente. En la figura 17 se puede apreciar una imagen descargada desde el programa y su representación en la cuadrícula isométrica, esto con el propósito de ayudar a los estudiantes a representar las piezas de los *logikubos*.

Figura 17

Representación isométrica de la pieza con forma de “T” del logikubo



La estrategia utilizada para orientar a los estudiantes en sus representaciones fue elegir una de las caras de la pieza y empezar a dibujar los cubos que la componen. Sin embargo, algunos fueron capaces de hacer sus representaciones individualmente.

5.2. Reconocimiento de las posiciones en el espacio

Esta habilidad se observó en tareas en las cuales los estudiantes debían manipular las piezas del *logikubo* al moverlas, girarlas o voltearlas para luego representarlas en el papel. Por otra parte, esta habilidad también fue necesaria en tareas en la que los estudiantes debían cambiar de posición para obtener las vistas de una construcción hecha con los *logikubos*.

Una de las tareas consistió en que los estudiantes debían colocar las piezas del *logikubo* en una posición fija para representarlas en la cuadrícula isométrica y, a partir del ejemplo mostrado en la hoja guía, obtenían las vistas que se pedían. Antes del desarrollo de esta tarea se explicó la necesidad de establecer un punto de referencia y el cambio de posición del observador. Durante esta explicación se utilizó una estructura en acrílico como se muestra en la figura 18.

Figura 18

Vistas de la pieza con forma de "Z" usando la estructura en acrílico.



Este recurso fue utilizado para orientar un diálogo entre estudiantes y profesor como se detalla a continuación.

Profesor: Esta es la pieza roja, si ustedes se paran justo al frente de ella ¿qué van a observar?

Estudiante 1: Sería la vista frontal

Profesor: ¿Cuántos cuadrados observarían?

Estudiante 1: Dos cuadrados

Profesor: En cambio, si lo miro desde esta posición ¿cuántos cuadrados observarían?

Estudiante 1: Hay cuatro

Profesor: Y si lo mirara desde atrás ¿cuántos cuadrados observarían?

Estudiante 1: También cuatro

Profesor: ¿Y si lo miro desde acá?

Estudiante 1: Hay dos

Profesor: ¿Y si lo miro desde la parte superior?

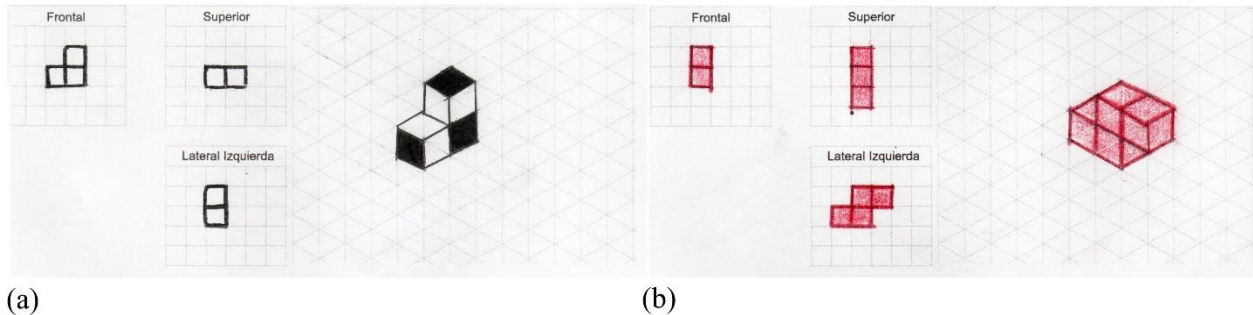
Estudiante 1: Hay dos

Profesor: ¿Hay dos?

Estudiante 2: Hay uno

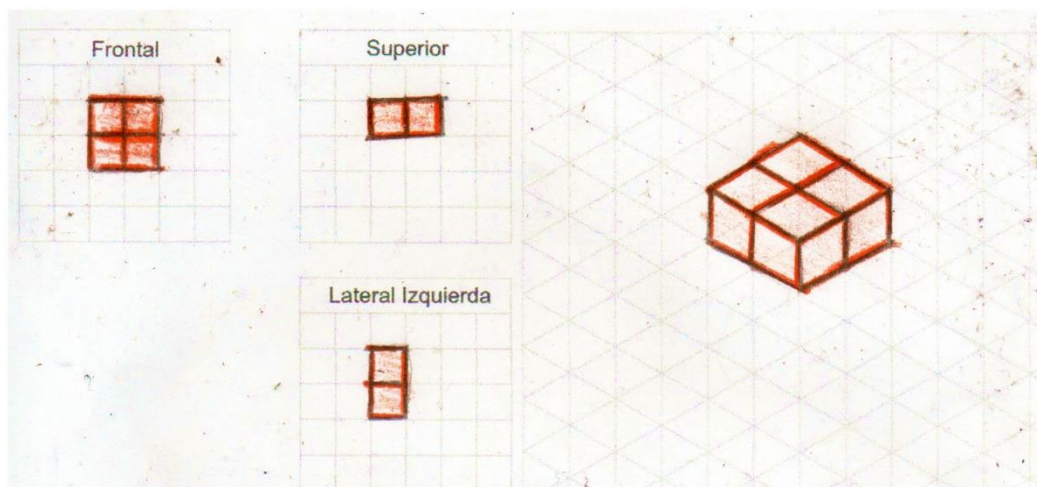
Estudiante 1: La estudiante se acerca a la estructura en acrílico y exclama ¡ahh! Hay tres.

Después de esta interacción comunicativa, los estudiantes desarrollaron de manera individual una tarea en la que se pedía elegir una de las piezas del *logikubo* y representar las vistas frontal, superior y lateral izquierda. Debido a que se presentaron errores en la representación de las vistas ocasionados por el cambio de posición desde la cual se observaban las piezas, se hizo énfasis en la imagen de la hoja guía y la necesidad de ubicar las piezas del *logikubo* en la misma posición que la representación hecha en la hoja. En la siguiente imagen se muestra la representación bidimensional de la pieza negra y roja.

Figura 19*Representación bidimensional de dos piezas del logikubo*

Nota. 19.a. Vistas de la pieza color negro 19.b. Vistas de la pieza color rojo

Teniendo en cuenta la necesidad de seguir reforzando esta habilidad, se añadieron más ejercicios de este tipo para que los estudiantes estuvieran más familiarizados con la obtención de las vistas de las otras piezas del *logikubo*. Un error encontrado fue que una de las estudiantes no tuvo en cuenta la representación hecha en la hoja y, en cambio, obtuvo las vistas desde el objeto físico en una posición diferente al de la hoja, este error se muestra en la figura 20.

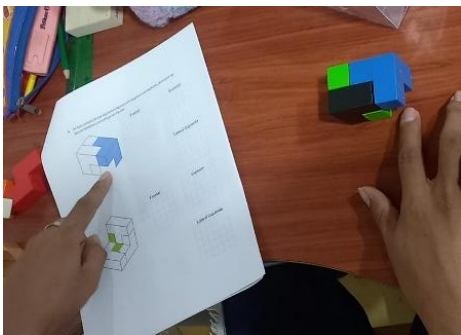
Figura 20*Error de representación de las vistas de la pieza del logikubo color naranja*

5.3. Reconocimiento de las relaciones en el espacio

Esta habilidad se puso en juego en tareas que implicaban construcciones con las piezas del *logikubo*, la interpretación de vistas ortogonales y la representación en el papel de las construcciones hechas con los *logikubos*. En el desarrollo de la primera sesión, las acciones realizadas por los estudiantes fueron ensamblar, juntar o unir piezas para formar letras. Como ya se había mencionado anteriormente, este tipo de tareas no presentó mayor dificultad para los estudiantes. En la segunda sesión, los estudiantes desarrollaron tareas en las que se pedía construir lo que se mostraba en una imagen, este cambio de dimensión, en un principio les causó inconvenientes para completar la tarea. Estos inconvenientes estuvieron relacionados con la posición de las piezas de *logikubo* y su relación al unirse con las otras. Cuando se le preguntó a uno de los estudiantes si la construcción realizada era la misma a la mostrada en la imagen, fue conciente de su error y procedió a corregirlo. En la figura 21 se muestran las construcciones realizadas por dos estudiantes en esta tarea.

Figura 21

Construcciones realizadas en la segunda sesión del experimento



En el desarrollo de esta tarea se escucharon expresiones como: “la pieza verde va al lado”, “la pieza verde tapa lo del frente” y “la pieza verde va en la mitad”. En la siguiente tabla se muestra el diálogo con un estudiante cuando se le pidió que explicara como había hecho la construcción.

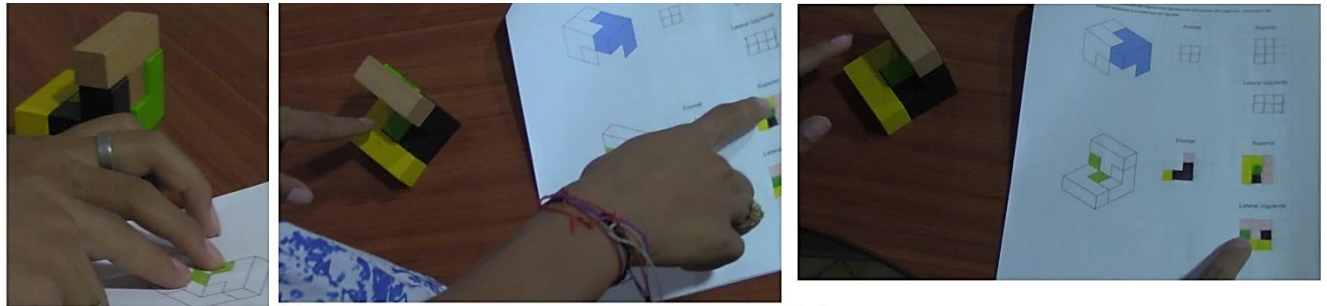
- Estudiante Primero, miré la ficha amarilla, bueno... no la amarilla, pero si miré la forma y supe que era la amarilla, la acomodé como estaba en la imagen, después miré la otra que estaba al lado y era la negra, acá se puede ver los dos verdes (figura 22a) y ya se sabía que era la verde, entonces la acomodé (mueve la construcción realizada) y en la parte de arriba es la café y nos dio la figura exactamente.
- Profesor ¿cómo obtuvo las vistas? ¿qué hizo para sacar las vistas?
- Estudiante Organizando las fichas
- Profesor ¿Cómo se posicionó usted para obtener las vistas?
- Estudiante Me quedé así como estoy, señala con su mano la dirección de la construcción, la organicé así como está en la imagen, no las moví ni nada
- Profesor ¿y luego que hizo?
- Estudiante La dibujé mirando la vista frontal, que es esta (señala con su mano)
- Profesor ¿esa es la frontal? ¿cómo hizo para obtener la vista superior?
- Estudiante Sí, me paré, miré la café que serían tres, la verde del medio (figura 22b) , la negra que está al lado y la amarilla debajo). En la lateral izquierda está la “T” (figura 22c) , la verde de este lado, la negra de este lado y la amarilla que va de lado.

En esta tarea se ha podido experimentar que los estudiantes comprenden la relación que hay entre las piezas del *logikubo* en las construcciones, a través de expresiones como “ al lado” “arriba”, “debajo” y que tanto el movimiento del cuerpo como de las manos es muy importante para apoyar sus explicaciones. En las tareas que se pedía a los estudiantes realizar construcciones

a partir de las vistas dadas, se observaron errores relacionados con el posicionamiento del cuerpo para obtener las vistas.

Figura 22

Construcción realizada por un estudiante en la sesión dos



(a)

(b)

(c)

Nota. Expresiones gestuales de un estudiante para apoyar su explicación en una tarea de construcción

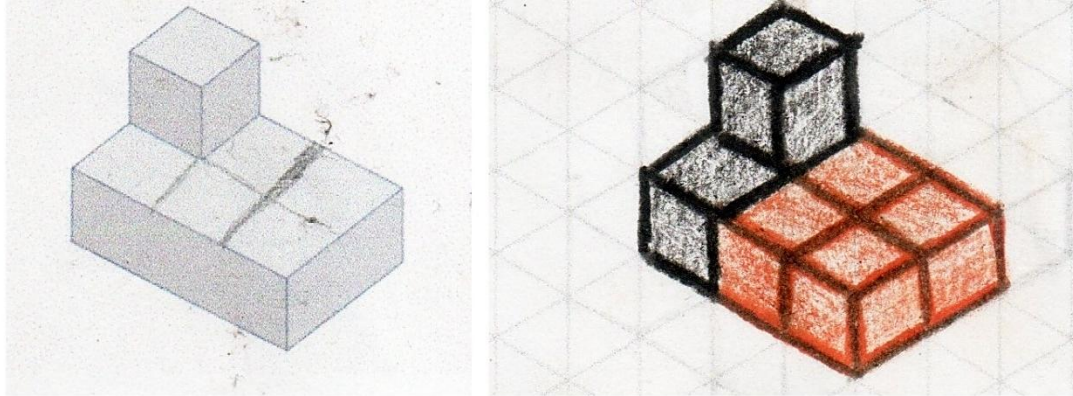
5.4. Identificación visual

En este tipo de tareas se observó facilidad para identificar piezas del *logikubo* cuando se mostraban imágenes en representación isométrica de construcciones hechas con tres o cuatro piezas cuyas caras eran visibles por su forma, y especialmente, cuando estas piezas no quedaban ocultas por otras. Cuando los estudiantes tenían a la vista las piezas del *logikubo*, ellos empezaban a manipularlas hasta construir la figura mostrada en la hoja guía.

La situación fue de mayor dificultad cuando los estudiantes no disponían de los *logikubos* y se les mostraba imágenes de construcciones conformadas por dos, tres o cuatro piezas y estaban camufladas por un color. Este tipo de tareas solo pudo ser resuelta por los estudiantes cuando se les presentaba la imagen de una construcción con dos piezas del *logikubo* o en aquellas en las que la altura era de dos cubos. La estrategia observada en estos casos fue que los estudiantes empezaban a trazar líneas sobre la imagen para asociar las formas resultantes con las piezas del *logikubo*. En la Figura 23 se muestra esta estrategia.

Figura 23

Estrategia de solución de identificación visual



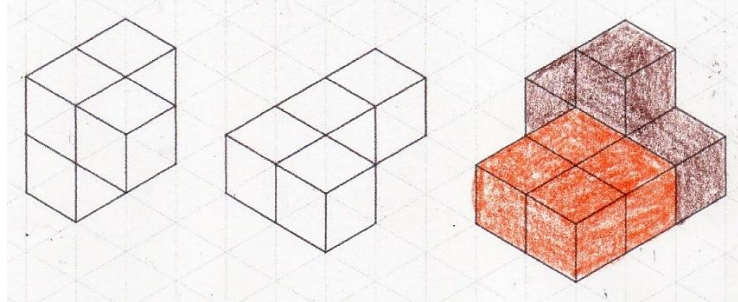
A medida que se usaban más de dos piezas del *logikubo* y las construcciones mostradas en las imágenes tenían más de dos cubos de altura, los estudiantes intentaron aplicar esta misma estrategia, pero no les funcionó debido a la gran cantidad de cubos que quedaban ocultos. En aquellas tareas en las que se les pedía identificar y completar las piezas individuales del *logikubo*, los estudiantes tuvieron confusiones con la pieza morada y verde.

5.5. Conservación de la percepción

Esta habilidad se puso a prueba cuando a los estudiantes se les mostraba una imagen en representación isométrica compuesta por cubos y ellos eran capaces de identificar las piezas del *logikubo* que podían usarse para construir esa misma figura aunque uno o más cubos pudieran verse parcialmente. Las estrategias utilizadas en este tipo de tareas fueron manipular mentalmente las piezas del *logikubo* hasta hacerlas coincidir con la forma de la imagen mostrada o contar la cantidad de cubos en la hoja guía y asociarlos a la cantidad de cubos que conforman cada pieza del *logikubo*. En la siguiente figura se muestra la solución de una estudiante en este tipo de tareas.

Figura 24

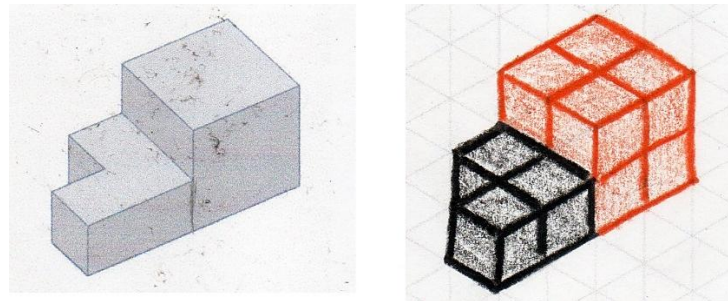
Estrategia de solución por un estudiante en la sesión tres



Un error presente en esta habilidad fue representar en el papel una figura similar en su forma, pero en relación con el tamaño era diferente teniendo en cuenta la cantidad de cubos que conformaban la figura en su totalidad. Este error se muestra en la figura 25.

Figura 25

Error identificado en la habilidad de conservación de la percepción del tamaño



Cuando se le preguntó al estudiante por la cantidad de cubos que conformaban la pieza naranja, él dudaba de la cantidad, esto ocasionó que respondiera incorrectamente esta tarea.

5.6. Discriminación visual

Esta habilidad se evidenció en la primera sesión cuando los estudiantes comparaban las formas y tamaños de algunas piezas del *logikubo*, por ejemplo, entre la pieza negra y amarilla expresaban que la pieza negra tenía forma de “L más corta” que la amarilla, una estudiante

mencionaba que la pieza verde y morada eran iguales, sin embargo, ninguno de ellos expresó que una era el reflejo de la otra pero que al rotarlas no eran iguales.

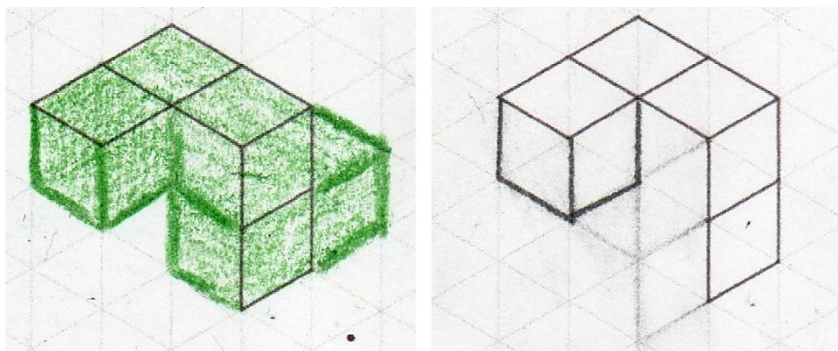
En las tareas de construcción se hizo énfasis en que la letra “J” se podía construir con diferentes piezas y en algunos casos lo que cambiaba era el total de cubos que conformaban la letra. Este tipo de tareas ayuda a que los estudiantes se den cuenta que una misma figura puede ser construida con diferentes piezas del *logikubo*.

5.7. Memoria visual

En el tipo de tareas que requerían poner a prueba esta habilidad, los estudiantes encontraron mayor grado de dificultad y expresaron la necesidad de volver a observar las piezas del *logikubo*. A pesar de esto, se les animó a enfrentar el desafío de realizar las tareas presentadas en la sesión tres y cuatro. Una de las conjeturas confirmadas fue la facilidad para representar piezas como las de color café y azul, y la dificultad para representar otras más complejas por la forma como es el caso de la pieza verde, en la figura 26 se muestran representaciones hechas por los estudiantes cuando se les pidió que identificaran y completaran las piezas del *logikubo* que se mostraban en la imagen.

Figura 26

Representaciones erróneas de la pieza de color verde del logikubo

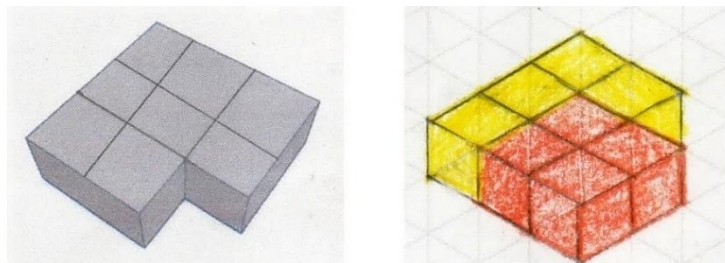


Una de las posibles causas que se atribuyen a este error de representación se debe a que la gran mayoría de los estudiantes, evitaron en la primera sesión, la representación en la cuadrícula isométrica de las piezas del *logikubo* color verde y morado en diferentes posiciones.

Cuando se les pidió a los estudiantes que identificaran y representaran en la cuadrícula isométrica las piezas del *logikubo* usadas en construcciones que se mostraban en una imagen, una de las estrategias observadas fue empezar a representar pieza por pieza y juntarlas hasta coincidir con la imagen mostrada. Por otra parte, también se encontró que una estrategia utilizada consistía en trazar sobre la imagen segmentos que le permitiera identificar la forma de las piezas del *logikubo* y luego pasar a representar en la hoja.

Figura 27

Estrategia de solución ante una tarea propuesta en la sesión cuatro.



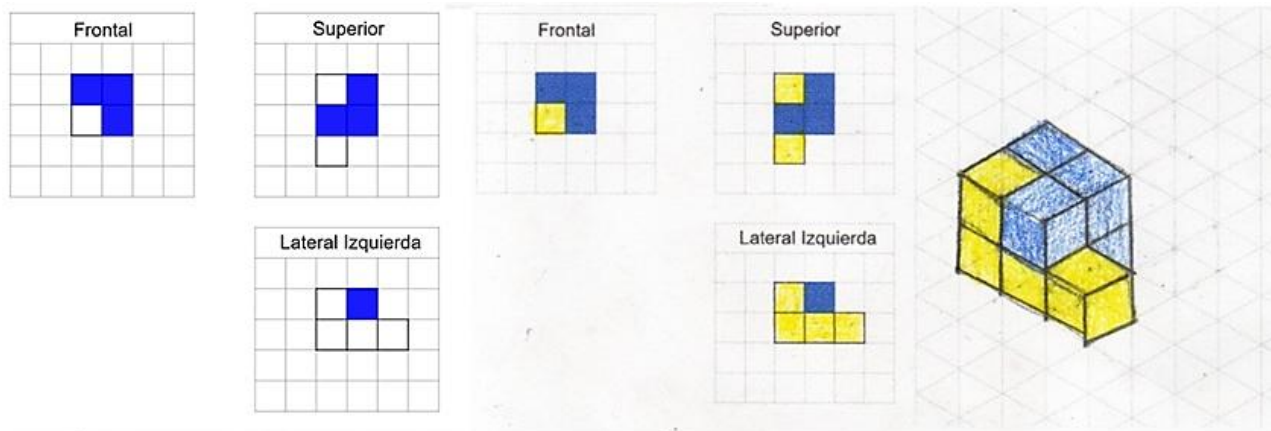
Sin embargo, esta estrategia solo les funcionó a los estudiantes cuando las construcciones no se formaban con tantas piezas del *logikubo* y se podía contar la cantidad de cubos que conformaban la construcción. En general, para las tareas que requerían identificar y representar tres o más piezas del *logikubo* usadas en construcciones, los estudiantes no pudieron desarrollarlas.

En la sesión cuatro, a los estudiantes se les mostraba las vistas frontal, superior y lateral izquierda de una construcción hecha con dos piezas del *logikubo*, la dificultad en esta tarea era que a una de las piezas no se le mostraba el color en sus vistas. Esta solo pudo ser resuelta por una de las estudiantes, aquí la estrategia observada fue comenzar a dibujar una de las vistas en la

cuadrícula isométrica e identificar por la forma la pieza faltante. En la Figura 28 se muestra la solución ante la tarea propuesta.

Figura 28

Representación plana de construcciones hechas con los logikubos

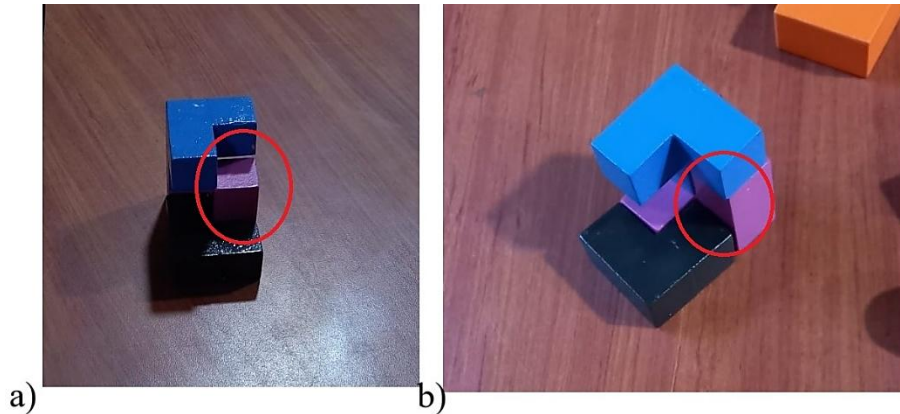


Cuando se presentó el mismo tipo de tareas con un mayor nivel de dificultad, en las que se daban las vistas con tres o más piezas del *logikubo*, los estudiantes no pudieron resolverlas correctamente. Se observaron errores de coordinación entre las vistas dadas y representación en la cuadrícula isométrica, esto se debe a la dificultad de representar caras ocultas.

Para el cierre de la clase, los estudiantes observaron durante unos segundos un video de una construcción hecha con tres piezas del *logikubo*. Ellos no tenían los *logikubos* de manera física, estos fueron entregados después de observar el video. La intención de la actividad era analizar la posición de cada una de las piezas y luego realizar la construcción. A pesar de que en esta tarea se utilizaron pocas piezas del *logikubo*, uno de los estudiantes no pudo resolverla correctamente. En la figura 29a se observa la posición incorrecta de la pieza color morado y negra, y en la 29b, una construcción correcta según lo mostrado en el video.

Figura 29

Construcciones realizadas por los estudiantes



5.8. Evaluación final

Tras la implementación del experimento de enseñanza, se diseñó una prueba final con el propósito de evaluar el desarrollo de las habilidades de visualización. Esta prueba estaba conformada por siete tareas las cuales debían ser resueltas de manera individual. En la primera parte, los estudiantes respondieron tareas cuya respuesta esperada era de construcción o representación con la ayuda de los *logikubos*. En la segunda parte, el tipo de respuesta esperada en las tareas era igual pero esta vez sin utilizar los *logikubos*.

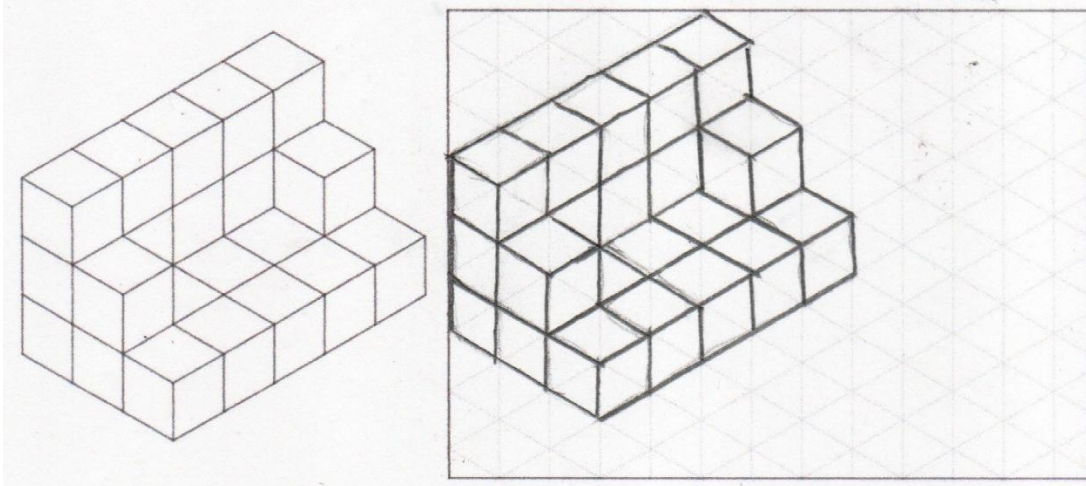
Para la aplicación de la prueba se seleccionaron tres estudiantes, esta selección se hizo por la cercanía del lugar donde vivían con la institución educativa. Esta decisión se debió a que, con el resto del grupo, se presentaron dificultades relacionadas con la deserción escolar y con la inasistencia a clases.

Tarea 1. Representación isométrica de un sofá. En esta tarea se les pedía a los estudiantes representar en la cuadrícula isométrica un sofá construido con siete piezas del *logikubo*, ellos mostraron mayor confianza y mejor tiempo de ejecución en esta tarea. Sin embargo, los estudiantes cometieron errores al coordinar la dirección de ciertos segmentos con la ayuda de la regla. Esto se

debió a que los estudiantes encontraron mayor facilidad al seguir las líneas de la cuadrícula isométrica. En la figura 30 se muestra la respuesta de uno de los estudiantes

Figura 30

Representación isométrica de un sofá



Ante lo anterior, se puede afirmar que las dificultades no solo se presentan al unir puntos en el punteado isométrico, sino también al alinear la dirección de los segmentos en una cuadrícula isométrica con la ayuda de la regla.

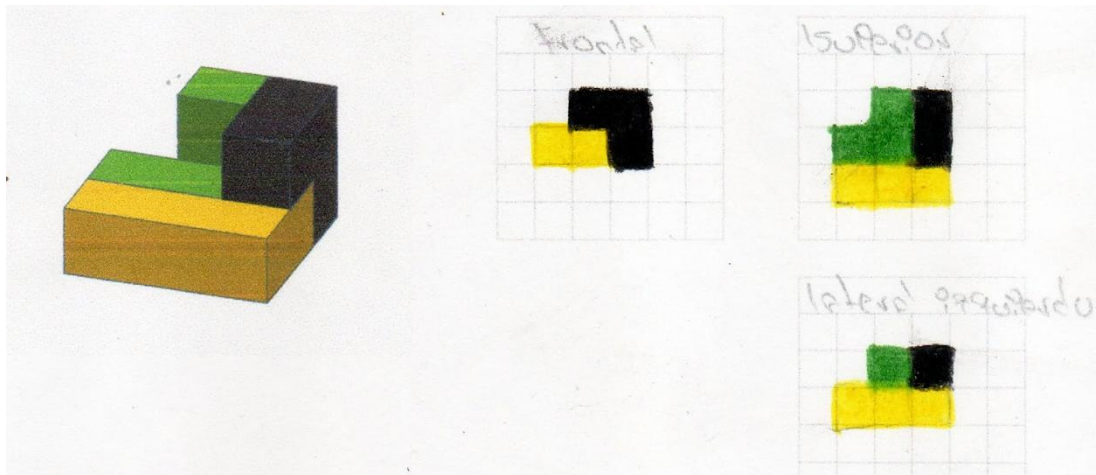
Tarea 2. Identificación de las piezas del logikubo que conforman una figura cubierta por un color. Esta tarea no pudo ser resuelta por ninguno de los estudiantes, por más que lo intentaron no identificaron las piezas del *logikubo* utilizadas en la construcción. En este tipo de tareas en las que se muestra una imagen de una construcción con tres o más piezas del *logikubo* cubiertas por un color, representan una gran dificultad para los estudiantes. En particular cuando estas construcciones tienen más de dos cubos de altura. En este tipo de tareas se pone a prueba en gran medida, las habilidades de identificación visual y el reconocimiento de relaciones espaciales.

Tarea 3. Obteniendo las vistas de una figura construida con los logikubos. La habilidad presente en esta tarea fue el reconocimiento de las posiciones en el espacio pues los estudiantes

debían fijar un punto referencia en relación con la figura construida, y a partir de ahí, cambiar de posición para obtener las vistas. También se observó la habilidad de reconocimiento de relaciones espaciales pues a pesar de que en esta tarea no se pedía realizar la construcción, al tener los *logikubos* disponibles, ellos decidieron utilizarlos y apoyarse de este recurso para estar más seguros de sus respuestas. En la figura 31 se muestra la respuesta de un estudiante en esta tarea.

Figura 31

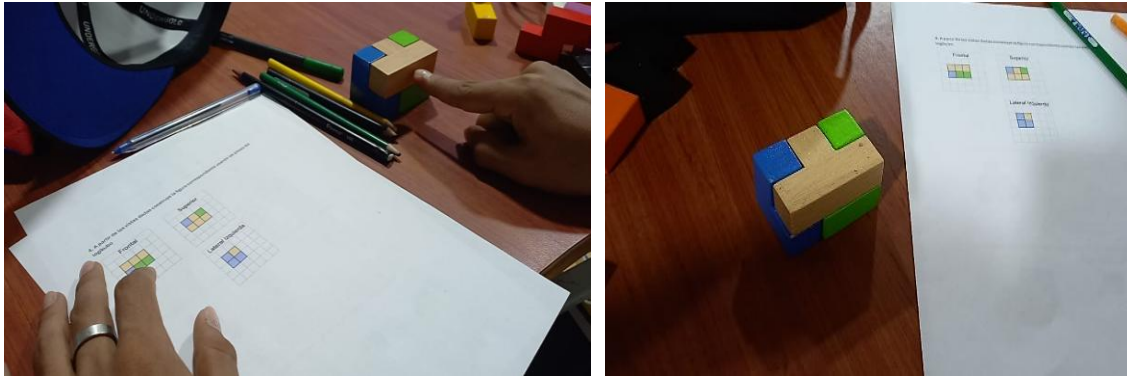
Vistas obtenidas de la imagen mostrada en la tarea tres



Tarea 4. De las vistas a la figura construida. Los estudiantes construyeron la figura que se pedía a partir de las tres vistas dadas, normalmente comenzaban por una de las vistas, y a partir de ahí, se paraban del puesto para cambiar de posición y así verificar las otras dos. Ellos eran conscientes de la necesidad de coordinar las tres vistas y no tuvieron dificultades en resolver esta tarea. Además de la habilidad de reconocimiento de posiciones en el espacio, pusieron a prueba su habilidad óculo motora y la habilidad de reconocimiento de relaciones espaciales. En la figura 32 se muestran las construcciones hechas por los estudiantes.

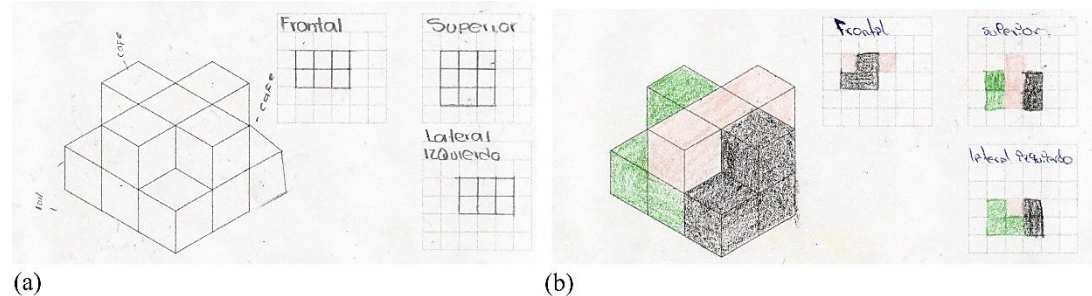
Figura 32

Construcciones realizadas con las piezas del logikubo en la tarea cuatro



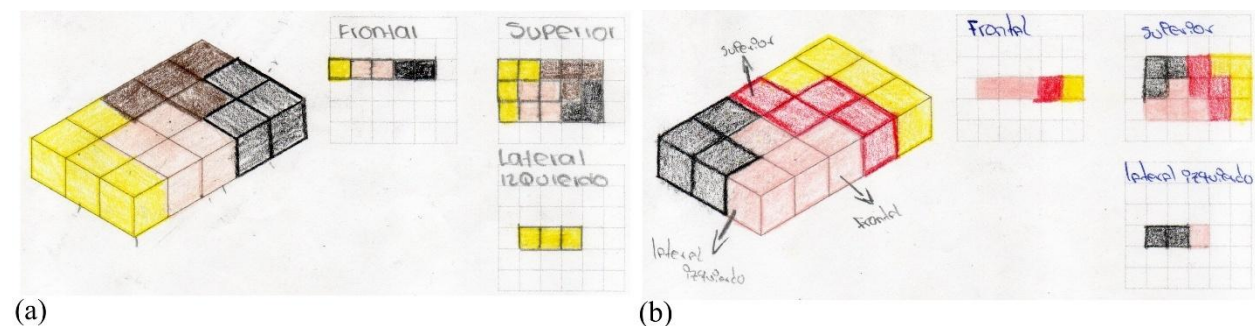
Tarea 5. Construyendo figuras iguales con las piezas del logikubo. En esta tarea los estudiantes tenían un poco más de libertad ya que ellos disponían de las piezas del logikubo para construir dos figuras iguales, algunos recordaron la construcción de las letras realizadas en la primera sesión y decidieron reconstruirlas. En esta tarea, ellos pusieron a prueba sus habilidades de memoria visual y de discriminación visual ya que ellos debían comparar la forma y el tamaño de ambas construcciones. Cuando se les preguntó por qué consideraban que las figuras eran iguales ellos comenzaban a contar los cubos en cada figura y hacían énfasis en la forma para justificar sus soluciones.

Tarea 6. Identificando las piezas del logikubo y obteniendo las vistas de una figura. En esta tarea los estudiantes ya no disponían de las piezas del *logikubo* lo cual aumentaba el nivel de dificultad. La tarea se dividía en dos partes, en la primera, los estudiantes debían identificar las piezas del *logikubo* que componían la imagen mostrada y luego obtener tres vistas que ya se habían trabajado antes en el experimento de enseñanza. La dificultad radicaba en que había caras de las piezas y cubos ocultos. En la figura 33 se muestra la solución propuesta por los estudiantes.

Figura 33*Errores encontrados en la tarea cinco*

Nota. **33.a.** Solución propuesta por el estudiante 1. **33.b.** Solución propuesta por el estudiante 2, se observa confusión con la pieza color verde y morado.

Sin embargo, en la segunda parte, la imagen mostraba una figura construida con un mayor número de piezas y los estudiantes pudieron resolverla correctamente. En la figura 34 se puede observar las diferentes soluciones en esta tarea.

Figura 34*Respuestas de los estudiantes en la tarea cinco*

Nota. (a) y (b) muestra las habilidades de identificación visual y conservación de la percepción.

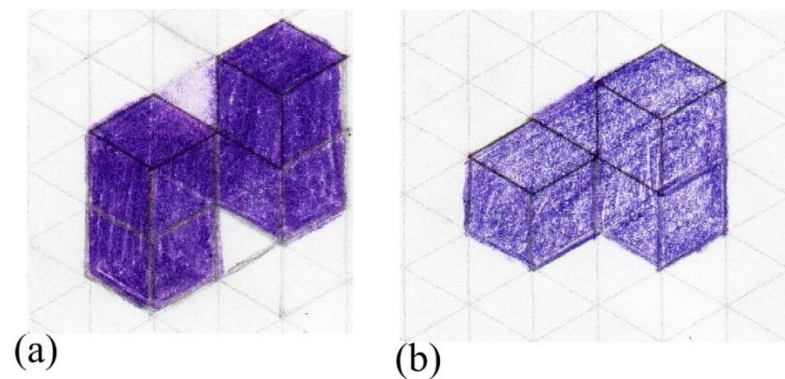
Aunque en ambas tareas se necesitaba poner en juego las habilidades de identificación visual al centrar la atención en las características de las piezas y de la conservación de la percepción para reconocer el tamaño y forma de las piezas. Aquí también pudieron mostrar las habilidades de reconocimiento de posiciones en el espacio para obtener las vistas según lo mostrado en el

desarrollo de ambas tareas, ellos mostraron mejor desempeño en aquella que mostraba una figura construida de un cubo de altura.

Tarea 7. Completando las formas de las piezas del logikubo. La tarea consistía en completar la representación isométrica en la hoja guía, en ella se podían ver algunas caras de las piezas color amarillo, morado y rojo del *logikubo*. Los estudiantes pudieron completar correctamente la pieza roja, amarilla y solo uno de ellos pudo identificar y representar correctamente la pieza morada. En la figura 35 se muestran las representaciones hechas por los estudiantes en esta tarea.

Figura 35

Representaciones hechas por los estudiantes en la tarea seis



Nota. **35.a.** Representación errónea de la pieza color morado. **35.b.** Representación correcta de la pieza de color morado.

En esta tarea se pudo observar deficiencias en la memoria visual ya que en la representación interna de esta pieza del *logikubo* no había claridad en su forma como se aprecia en la figura 35.a. Sin embargo, ocurre lo contrario en la Figura 35.b pues el estudiante demuestra habilidad en memoria visual, discriminación visual al diferenciarla de la pieza verde y coordinación ojo mano para representar en la cuadrícula isométrica.

En síntesis, durante el desarrollo del experimento de enseñanza se ha podido comprobar la efectividad de los *logikubos* como recurso mediador en el mejoramiento de las habilidades de visualización. Esta mejora fue gradual y diferenciada desde la individualidad de cada estudiante en el que influyeron los factores afectivos (mediados por el estado de ánimo) y la disponibilidad de materiales. Asimismo, este recurso ha permitido el diseño de una gran cantidad de tareas adaptadas con diferentes niveles de dificultad y según la habilidad a desarrollar, sin embargo, casi siempre se trata de la combinación de dos o más habilidades. En ese sentido, las tareas implementadas inicialmente deben permitir la manipulación del material físico para que los estudiantes realicen sus construcciones y representaciones en el papel; luego, con un mayor nivel de dificultad, ellos puedan enfrentarse a tareas que exijan la manipulación mental de las piezas del *logikubo*.

Desde la perspectiva teórica de las habilidades de visualización propuestas por del Grande (1987) y con la implementación de la prueba diagnóstica se evidenció el bajo nivel en las habilidades de visualización de los estudiantes. De esta prueba, se pudo comprobar las dificultades que tienen los estudiantes en la interpretación plana de figuras tridimensionales y viceversa, incluso en algunos estudiantes puede presentarse inconvenientes para coordinar ciertos segmentos al replicar la representación isométrica de una figura. Este hecho sugiere que no se trata de un asunto trivial y no puede enseñarse en cualquier nivel educativo, pues requiere de un grado de comprensión del espacio, y un diseño puntual de tareas adecuadamente diseñadas.

El desarrollo de las habilidades de visualización se ha llevado a cabo en un escenario real de clases usando los *logikubos*. Las tareas para lograr esto han sido: construir figuras con las piezas del *logikubo* a partir de su representación plana, dibujar la representación plana de cada una de las piezas del *logikubo* y de figuras construidas con ellas, interpretar representaciones bidimensionales

de figuras tridimensionales y observar videos de construcciones hechas con los *logikubos*. Todas estas tareas con y sin el uso del material manipulable. En el transcurso del experimento se pudo observar progreso en las habilidades, mayor independencia en el desarrollo de las tareas y un mejor uso del lenguaje geométrico. Sin embargo, puede presentarse que los estudiantes recurren a diferentes acciones como el lenguaje informal, movimiento de manos y gestos para objetivar sus explicaciones. Cuando los estudiantes presentaron inconvenientes con el desarrollo de ciertas actividades se reaccionó de manera adecuada orientando la clase con diferentes recursos de geometría dinámica, como GeoGebra, o, también, con los mismos *logikubos*.

Las tareas en las que se pedía dibujar la representación plana de todas las piezas del *logikubo* en diferentes posiciones, así como el dibujo de construcciones con dos o más piezas, favorecieron las habilidades de coordinación óculo motora y reconocimiento de relaciones espaciales. Integrar en este tipo de tareas la representación plana de vistas permitió mejorar la habilidad de reconocimiento de posiciones en el espacio. Sin embargo, pueden seguirse presentando dificultades dependiendo del nivel de dificultad de la figura. Preguntarles a los estudiantes por las diferencias en cuanto a la forma y tamaño de cada una de las piezas del *logikubo* favoreció la apropiación de representaciones internas, esto mejoró las habilidades de conservación de la percepción, discriminación visual y les permitió a los estudiantes encontrar con mayor facilidad piezas del *logikubo* ocultas en construcciones mostradas en el papel lo cual también indica una mejora en la habilidad de identificación visual

Las representaciones planas de construcciones mostradas en el papel en el que aparecen varias piezas del *logikubo* cubiertas por un color fueron de gran dificultad para los estudiantes, especialmente, de aquellas que superan los dos cubos de altura. Este tipo de tareas exige un alto nivel de la habilidad de identificación visual y de conservación de la percepción.

6. Conclusiones

En este apartado se presentan las conclusiones en relación con la pregunta de investigación, los objetivos del proyecto, los aportes de este estudio en el campo de la educación matemática, y finalmente, las recomendaciones y limitaciones para futuras investigaciones.

Los datos recolectados y analizados dan respuesta a la pregunta de investigación: ¿cómo influye el uso de los *logikubos* en el desarrollo de las habilidades de visualización espacial de los estudiantes de noveno grado? A partir de la identificación de las habilidades de visualización y su definición a través de la revisión de literatura, lo cual permitió sintetizar los indicadores de interpretación de las actividades desarrolladas por los estudiantes en la prueba diagnóstica. Además, el desarrollo de las habilidades de visualización se logró a través de un experimento de enseñanza que permitió mejorar el aprendizaje de la geometría y fortalecer el pensamiento espacial. Y finalmente, se realizó el contraste las habilidades de visualización evidenciadas por los estudiantes de grado noveno, en dos momentos clave: al inicio del experimento, y, al finalizar el experimento de enseñanza con el fin de interpretar su evolución en el desarrollo de tareas espaciales.

Se describe en este trabajo de investigación, el efecto positivo del uso de material concreto en el desarrollo de las habilidades de visualización a través de una secuencia de actividades planeadas, implementadas y evaluadas en un ambiente de enseñanza real. Este experimento no pretende mostrar generalizaciones a partir de las habilidades estudiadas, por el contrario, el método de enseñanza y su diseño está sujeto a ser mejorado para futuras investigaciones o utilizar tareas que pueden ser un buen punto de partida para aplicar en otros contextos educativos (rurales o urbanos), que pretendan desarrollar habilidades de visualización en los estudiantes, lo cual se considera un aporte a la Educación Matemática. Además, se pudo establecer que este tipo de

estrategias también apunta a mejorar el desempeño, incluso en aquellos estudiantes con bajo rendimiento académico y escasa formación en geometría con el fin de fortalecer su pensamiento espacial.

Este trabajo contó con limitaciones frente: los altos precios de adquisición de los *logikubos*, la falta de infraestructura tecnológica en la institución educativa y en consecuencia la baja competencia tecnológica de los estudiantes. Adicionalmente, la deserción escolar y la inasistencia a clases dificultó monitorear el progreso de la totalidad de los estudiantes. Por otra parte, desde el punto de vista práctico, hubo dificultades con administrar gran cantidad de información con proyección de video y escrita de los estudiantes, lo cual era considerado como indispensable para complementar los análisis. Finalmente, se considera pertinente ajustar el actual diseño propuesto donde se involucren otros tipos de representaciones planas.

Referencias Bibliográficas

- Ávila, O. (2019) Aprendizaje significativo en geometría para el grado octavo. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
<https://repositorio.uptc.edu.co/server/api/core/bitstreams/f5390693-be7a-496d-9e31-0b23ba8354af/content>
- Barrantes, M., López, M. y Fernández, M. A. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. PNA, 9(2), 107-127. [<http://hdl.handle.net/10481/34157>]
- Ben-Chaim, D. & Lappan, G. & Houang, R. (1989). Adolescents' ability to communicate spatial information: Analyzing and effecting students' performance. Educational Studies in Mathematics. 20. 121-146. DOI: 10.1007/BF00579459.
https://www.researchgate.net/publication/226440669_Adolescents'_ability_to_communicate_spatial_information_Analyzing_and_effecting_students'_performance
- Bishop A. (2008). Spatial Abilities and Mathematics Education- A review.
https://www.researchgate.net/publication/226067440_Spatial_Abilities_and_Mathematics_Education_-_A_Review
- Camargo, L. (2021). Estrategias de investigación cualitativa en educación matemática.
<http://hdl.handle.net/20.500.12209/17880>.
- Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In Grouws, D. A. (1992). Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, pp. 420-464. Cuellar, H. (2004). Jugando y aprendiendo con el logikubo. Memorias del sexto encuentro colombiano de matemática educativa.
<https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/jugando-y-aprendiendo-con-el-logikubo/>

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic teacher*, 37(6), 14-20.

Gamboa, R. y Ballester, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista electrónica Educare* 14(2), 125-142.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5414933>.

Gómez, H.C., Martín, J.M. y Valencia, B.K. (2022). Entrenamiento basado en realidad aumentada para mejorar habilidades espaciales y rendimiento académico en estudiantes de ingeniería. *Digital Education Review*. <https://doi.org/10.1344/der.2022.41.306-322>.

González, P. y Fiallo, J. (2018). Material manipulativo y tecnológico: una herramienta pedagógica para el fortalecimiento de las habilidades de visualización espacial.
https://repository.unab.edu.co/bitstream/handle/20.500.12749/2553/2018_Articulo_Gonzalez_Parra_Diana_Carolina.pdf?sequence=2

Gonzato, M., Godino, J. y Contreras, J. (2011). Evaluación de conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales de maestros en formación. Universidad de Granada, 383-392.
<https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/evaluacion-de-conocimientos-sobre-la-visualizacion-de-objetos-tridimensionales-en-maestros-en-formacion/>

Gutierrez, A. (1996). Children's ability for using different plane representations of space figures. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia, 33-42.
https://www.researchgate.net/publication/237730007_Children's_ability_for_using_different_plane_representations_of_space_figures

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA*. 3. 193-220.

https://www.researchgate.net/publication/279437262_Las_representaciones_planas_de_cuerpos_3-dimensionales_en_la_ensenanza_de_la_geometria_espacial

Jaime, Adela & Gutiérrez, Angel. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. 71-89.

https://www.researchgate.net/publication/321978519_Investigacion_sobre_estudiantes_con_alta_capacidad_matematica

Malara, N. A. (1998). Acerca de las dificultades que tienen los profesores de secundaria para visualizar y representar objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, 11(3),54-68.

<https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/acerca-de-las-dificultades-que-tienen-los-profesores-de-secundaria-para-visualizar-y-representar-objetos-tridimensionales/>

Montgomery, M. & Shulte, A. (1987). Learning and teaching geometry K-12. National Council Of Teachers of Mathematics.

<https://archive.org/details/learningteaching00lind/page/n5/mode/2up>

Moreno Martel, M. D. (2016). El uso de la visualización en una clase de matemáticas. El Guiniguada, (9), 385–392.

<https://ojsspdc.ulpgc.es/ojs/index.php/ElGuiniguada/article/view/690>

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*.

Roura, R. y Ramírez, R. (2021). Sentido espacial en futuros maestros. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González Astudillo, M. T. y Carrillo D. (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXIV (pp. 537 – 544) Valencia: SEIEM.

<https://seiem.es/docs/actas/24/Comunicaciones/537.pdf>

Salas, F., Baena, I. y Miranda Sánchez, R. (2018). Desarrollo de las habilidades de visualización espacial a partir de tareas apoyadas en herramientas TIC. Universidad de Antioquia.

<http://hdl.handle.net/10495/12302>

Sandoval, I. y Ortiz-Rocha, A. (2023). Representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales y su relación con el desarrollo del razonamiento espacial en edades tempranas (6-8 años). *Perfiles educativos*, 45(180), 71-90.

<https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2023.180.60709>

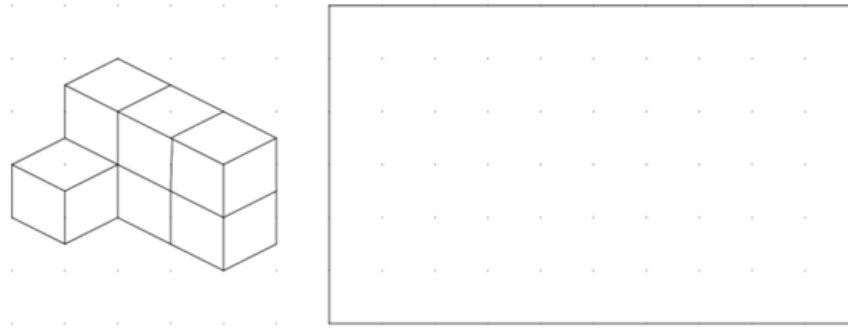
Uclés, R. (2013). Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático. Granada:

Universidad de Granada, 62 p. <http://hdl.handle.net/10481/23889>

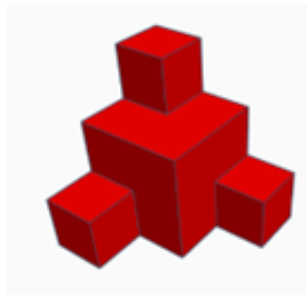
Apéndices

Apéndice A. Prueba diagnóstica

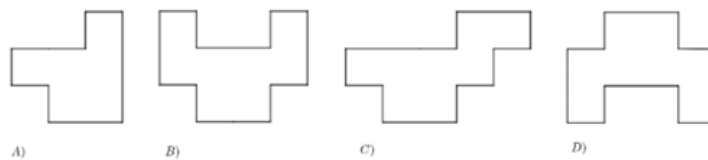
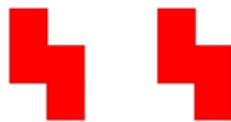
1. Con dos de las piezas del logikubo se ha construido la siguiente figura. Dibújala en el espacio suministrado para esto.



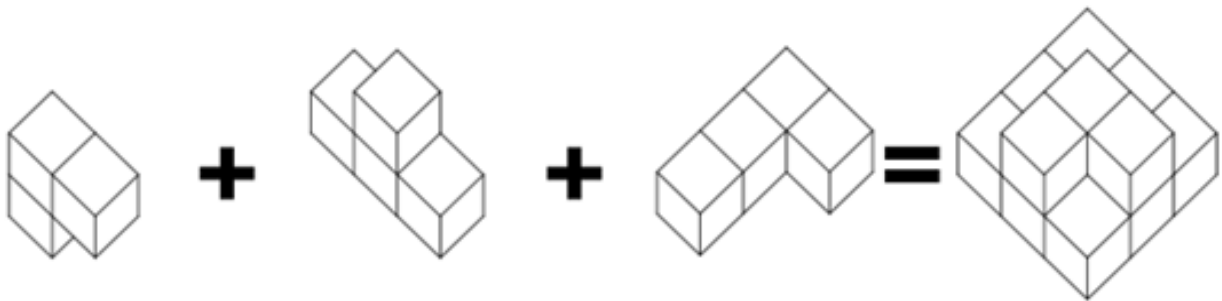
2. ¿Con cuáles piezas del logikubo se ha formado la siguiente figura? Explica tu elección.



3. Con dos piezas iguales como las que se muestra en la imagen se pueden formar otras figuras. ¿cuál(es) de las siguientes figuras NO se pueden formar con estas dos piezas? Explica tu respuesta.



4. Construye el sólido teniendo en cuenta las piezas del *logikubo* mostradas en la siguiente figura.



5. A partir de las vistas construye el sólido correspondiente.

Vista frontal					Vista superior					Lateral izquierdo				
		■	■	■		■	■	■				■	■	
		■	■	■		■	■	■				■	■	

6. Dibuja la vista frontal, superior y lateral izquierdo del siguiente sólido.



Vista frontal					Vista superior					Lateral izquierdo				

7. Observa atentamente el siguiente video. Luego, construye la figura que se muestra allí.



Nota. [Fotografía], Autodesk, 2023, TinkerCAD (<https://www.tinkercad.com/>). Alojado en:
<https://youtu.be/syCOFxMQDYw>

Apéndice B. Consentimiento informado

*Universidad industrial de Santander
Facultad de ciencias- Escuela de matemáticas
Licenciatura en matemáticas*

Yo _____ identificado con cédula de ciudadanía número: _____ de _____, padre, madre o acudiente del estudiante _____ doy mi consentimiento para que participe de las actividades del proyecto: “*El desarrollo de habilidades de visualización: un experimento de enseñanza de geometría con estudiantes de básica secundaria de la Institución Educativa San Rafael de Chucurí*” desarrollado por: Jason Andrés Díaz Suárez estudiante del programa de licenciatura en matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, dirigido por la profesora Jenny Patricia Acevedo Rincón, PhD y codirigido por el profesor Jorge Enrique Fiallo Leal, PhD. El objetivo de esta investigación es: *Analizar el desarrollo de las habilidades de visualización mediante un experimento de enseñanza con el fin potenciar el pensamiento espacial en los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa San Rafael de Chucurí.*

Asimismo, autorizo para que el material producido durante esta investigación, tales como: cuestionarios, entrevistas, talleres y videgrabaciones, entre otros posibles, que sean recolectados durante el desarrollo del presente proyecto sirvan única y exclusivamente para fines educativos y de publicación del documento de tesis.

He sido informado(a) de que la participación de mi hijo(a) en este trabajo de investigación no generará ningún gasto para nosotros, ni recibiré remuneración alguna por los resultados derivados de esta investigación, ya que son exclusivamente resultados académicos.

También se me ha explicado además que no estoy obligado a participar de esta actividad y que, por tanto, si así lo decido, puedo retirarme en cualquier momento sin que exista ningún tipo de repercusión negativa por ello. Sumado a esto, soy consciente de que los resultados de esta investigación serán confidenciales y que por tanto el nombre de mi hijo(a) no será divulgado bajo ninguna circunstancia.

Firmo esta autorización de manera libre, consciente y voluntaria a los _____ días del mes de _____ de _____.

Firma del padre, madre o acudiente: _____

Cédula de ciudadanía: _____ de _____

Apéndice C. Asentimiento informado

Hola, mi nombre es Jason Andrés Díaz Suárez, soy estudiante del programa de licenciatura en matemáticas de la Universidad Industrial de Santander y quiero invitarte a participar en esta investigación que se llama:

“El desarrollo de habilidades de visualización un experimento de enseñanza de geometría”.

Uno de los propósitos de esta investigación es ayudarte a desarrollar las habilidades de visualización a través de la enseñanza. Para lograrlo, es importante tu participación en el proyecto mediante tus respuestas a las actividades propuestas. En algunos momentos de la investigación se realizarán videgrabaciones las cuales serán analizadas únicamente por el autor de este proyecto y su director(a) de trabajo de grado. Sin embargo, es importante aclarar que por ningún motivo se mostrará tu rostro. No te preocupes por tus notas, esta investigación no afectará tu calificación en matemáticas, ni para bien ni para mal.

Tus padres o acudiente ya dieron el permiso para que participes de este proyecto, pero tú también decides si quieres hacerlo o no. Y si más adelante cambias de opinión, puedes dejar de participar sin ningún problema.

¿Te gustaría participar? Si quieres participar debes marcar con una “X” donde dice si y escribir tu nombre. Si no quieres participar basta con que dejes el espacio indicado en blanco.

Si acepto participar: _____

No acepto participar: _____

Firma del estudiante: _____ **Documento:** _____