

ANILLOS ÉPSILON-FUERTEMENTE GRADUADOS Y COHOMOLOGÍA PARCIAL DE
GRUPOS

JUAN DAVID RUEDA CENTENO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2025

ANILLOS ÉPSILON-FUERTEMENTE GRADUADOS Y COHOMOLOGÍA PARCIAL DE
GRUPOS

JUAN DAVID RUEDA CENTENO

Trabajo de grado para optar al título de
Magíster en Matemáticas

Director
Héctor Edonis Pinedo Tapia
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2025

DEDICATORIA

A mi pareja.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco profundamente a todas las personas que me acompañaron a lo largo de mi maestría. A mi familia y amigos, gracias por comprender cuando necesité tomar distancia y aun así permanecer a mi lado. También expreso mi gratitud a mi director, Héctor Pinedo, por la guía y el apoyo que me brindó durante este proceso. Y, por último, pero nunca menos importante, a mi pareja Natalia, quien, en los momentos en que estuve a punto de rendirme, extendió su mano para evitar que cayera. A todos ustedes, gracias por ser parte esencial de este logro.

CONTENIDO

	pág.
Introducción	8
1. Preliminares	11
1.1. Anillos ϵ -fuertemente graduados	11
1.2. Cohomología Parcial de Grupos	17
1.3. Módulos proyectivos	21
1.4. El grupo y el semigrupo de Picard	29
2. Anillos ϵ-fuertemente graduados y cohomología parcial de grupos	42
2.1. Anillos ϵ -fuertemente graduados que son álgebras de Azumaya	42
2.2. Anillos de matrices graduadas como productos cruzados parciales	53
2.3. Graduación para el anillo de endomorfismos	62
2.4. Una relación entre anillos ϵ -fuertemente graduados, los grupos de cohomología y los grupos de Picard.	73
Bibliografía	81

RESUMEN

TÍTULO: ANILLOS ÉPSILON-FUERTEMENTE GRADUADOS Y COHOMOLOGÍA PARCIAL DE GRUPOS

*

AUTOR: JUAN DAVID RUEDA CENTENO **

PALABRAS CLAVE: ANILLOS GRADUADOS, COHOMOLOGÍA PARCIAL, GRUPO DE PICARD, PRODUCTO CRUZADO PARCIAL.

DESCRIPCIÓN: En este trabajo se estudian las acciones parciales de grupo y su relación con los anillos épsilon-fuertemente graduados. Se parte del concepto clásico de anillos graduados por un grupo, el surgimiento de los anillos fuertemente graduados y, posteriormente, de los anillos épsilon-fuertemente graduados introducidos por Nystedt, Öinert y Pinedo. Paralelamente, se revisa la teoría de acciones parciales de grupo, la cual se originó para avanzar en el análisis de C^* -álgebras y condujo a la definición de productos cruzados parciales y otras construcciones relevantes.

El primer capítulo reúne los preliminares necesarios: caracterizaciones y ejemplos de anillos épsilon-fuertemente graduados, fundamentos sobre acciones parciales y n -cocadenas, así como resultados sobre módulos proyectivos y bimódulos parcialmente invertibles. El siguiente capítulo desarrolla en detalle los resultados del artículo de los profesores Bagio, Pinedo y Martínez, comenzando por las extensiones de Galois para obtener condiciones que caracterizan cuándo los anillos épsilon-fuertemente graduados son álgebras de Azumaya. Luego, se presentan condiciones para que ciertos anillos matriciales sean productos cruzados parciales, y se establece una graduación para el anillo de endomorfismos. Finalmente, el trabajo busca combinar la teoría de anillos épsilon-fuertemente graduados con grupos de cohomología parcial, sucesiones exactas y grupos de Picard, cuyos avances principales se sintetizan en el Teorema 2.4.2.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Doctor en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: EPSILON-STRONGLY GRADED RINGS AND PARTIAL COHOMOLOGY OF GROUPS *

AUTHOR: JUAN DAVID RUEDA CENTENO **

KEYWORDS: GRADED RINGS, PARTIAL COHOMOLOGY, PICARD GROUP, PARTIAL CROSSED PRODUCT.

DESCRIPTION: This work studies partial group actions and their relationship with epsilon-strongly graded rings. We begin with the classical notion of rings graded by a group, highlighting the development of strongly graded rings and, subsequently, the epsilon-strongly graded rings introduced by Nystedt, Öinert, and Pinedo. In parallel, we review the theory of partial group actions, originally developed to advance the study of C^* -algebras and leading to the formulation of partial crossed products and other related constructions.

The first chapter presents the necessary preliminaries: characterizations and examples of epsilon-strongly graded rings, fundamentals on partial actions and n -cocycles, and results concerning projective modules and partially invertible bimodules. The second chapter provides a detailed exposition of the results by Bagio, Pinedo, and Martínez, beginning with Galois extensions to establish conditions under which epsilon-strongly graded rings are Azumaya algebras. Then, sufficient conditions for certain matrix rings to be partial crossed products are presented, together with the construction of a grading on the ring of endomorphisms. Finally, the work aims to combine the theory of epsilon-strongly graded rings with partial cohomology groups, exact sequences, and Picard groups, whose main developments are summarized in Theorem 2.4.2.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Doctor en Matemáticas.

Introducción

A grandes rasgos, un anillo R es graduado por un grupo G si puede descomponerse en subgrupos aditivos, indexados por los elementos de G , de modo que la suma directa de estos subgrupos sea R y, además, se cumpla que $R_g R_h \subseteq R_{gh}$, para todo $g, h \in G$. Un ejemplo claro de esta estructura es graduar el anillo de polinomios sobre un anillo por \mathbb{Z} . Estos anillos graduados desempeñan un papel crucial en la geometría algebraica. Entre ellos, destacan los anillos fuertemente graduados y en 2018, los matemáticos P. Nystedt, J. Öinert y H. Pinedo en el artículo ¹ generalizan este concepto al introducir los anillos épsilon-fuertemente graduados.

Por otro lado, las acciones parciales de grupo son una generalización de las acciones de grupo usuales. Esta noción fue introducida por primera vez por R. Exel en ², con el fin de avanzar en su estudio sobre las C^* -álgebras. A partir de estas acciones se definieron los productos cruzados parciales (ver Definición 2.2.1), los cuales han sido una herramienta en el estudio de las álgebras de grupo graduadas y álgebras de camino de Leavitt (ver ³ y ⁴).

El concepto de acción parcial está muy relacionado a los anillos épsilon-fuertemente graduados, pues dado S , un anillo épsilon-fuertemente graduado por G , podemos definir una acción parcial γ para el centro de S_e (Ver Proposición 1.2.9). En este trabajo de grado abordamos en primer lugar las propiedades fundamentales de estos anillos y, a partir de ellas, la construcción de la acción parcial mencionada. Para este desarrollo, tomamos

-
- ¹ P. NYSTEDT, J. ÖINERT y H. PINEDO. “Epsilon-strongly graded rings, separability and semisimplicity”. En: *Journal of Algebra* 514 (2018), págs. 1-24.
 - ² R EXEL. “Partial actions of groups and actions of inverse semigroups”. En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 126.12 (2021), 3481–3494.
 - ³ M. DOKUCHAEV, R. EXEL y J. SIMON. “Crossed products by twisted partial actions and graded algebras”. En: *Journal of Algebra* 320 (2008), págs. 3278-3310.
 - ⁴ D. GONÇALVES y D. ROYER. “Leavitt path algebras as partial skew group rings”. En: *Communications in Algebra* 42.8 (2014), págs. 3578-3592.

como referencia el trabajo de grado ⁵ y el artículo ¹. Posteriormente, nos centraremos en las propiedades de estos anillos que fueron recientemente desarrolladas en ⁶. En el estudio de estos resultados el grupo y semigrupo de Picard serán una herramienta clave.

Este documento está dividido en dos capítulos. El Capítulo 1 está dedicado a los preliminares. En la Sección 1.1, presentamos las caracterizaciones y ejemplos relevantes para este trabajo sobre anillos épsilon-fuertemente graduados. La Sección 1.2 inicia con la definición de acción parcial y de las n -cocadenas, para así definir los grupos de cohomología asociados a estas acciones. En la Sección 1.3 se introducen los preliminares sobre módulos proyectivos y bimódulos, que serán utilizados en la Sección 1.4, donde se desarrollan las propiedades más relevantes de los bimódulos invertibles y parcialmente invertibles. Finalmente, el capítulo cierra con la Proposición 1.4.9, en la cual se demuestra que cada componente homogénea S_g del anillo épsilon-fuertemente graduado S pertenece al semigrupo de Picard de R .

En las tres primeras secciones del Capítulo 2 se realiza un análisis detallado del artículo ⁶. En la Sección 2.1, se introduce en el concepto de extensiones de Galois, para así establecer una condición suficiente para que los anillos épsilon-fuertemente graduados sean álgebras de Azumaya. Las nociones de producto cruzado parcial y épsilon-producto cruzado, así como su equivalencia, son desarrolladas en la Sección 2.2. Asimismo, se establece una condición suficiente para que el anillo de matrices, $M_n(S)$ sea un producto cruzado parcial. En la Sección 2.3, dado A un anillo G -graduado, se definen los A -módulos graduados y se establece una graduación al anillo de endomorfismos. Luego, dado cualquier R -módulo M , se define el módulo inducido $\text{Ind}_R^A M = A \otimes_R M$, que resulta ser G -graduado. Se concluye esta sección, presentando en el Teorema 2.3.18 una condición suficiente para que $\text{END}_A(\text{Ind}_R^A M)$ sea un producto cruzado parcial.

El último objetivo de esta tesis es combinar los anillos épsilon-fuertemente graduados con los grupos de cohomología parciales, mediante sucesiones exactas y diagramas conmutativos donde aparezcan también grupos de Picard. Los avances obtenidos en

⁵ L. MARTINEZ. "Sobre anillos fuertemente graduados y epsilon-fuertemente graduados". En: *Tesis de Maestría, Universidad Industrial de Santander* (2021).

⁶ D. BAGIO, L. MARTINEZ y H. PINEDO. "Epsilon-strongly graded rings: Azumaya algebras and partial crossed products". En: *Forum Mathematicum* 35 (2023), págs. 1257-1277.

esta investigación se presentan en el Teorema 2.4.2.

1. Preliminares

El objetivo de este capítulo es establecer los antecedentes y fundamentos teóricos necesarios para abordar el estudio de los anillos épsilon-fuertemente graduados, grupos de Picard y cohomología parcial de grupos. A lo largo del trabajo se asumirá que todos los anillos son unitarios y, para un grupo G , se denotará por e a su elemento identidad.

1.1. Anillos épsilon-fuertemente graduados

En esta sección, se presenta el concepto de anillo épsilon-fuertemente graduado. Para esto, comenzaremos definiendo los anillos graduados y fuertemente graduados, con algunas caracterizaciones y ejemplos que nos permiten comprender más a fondo estos conceptos.

Definición 1.1.1. Sean A un anillo y $X, Y \subseteq A$. Denotaremos por XY a la colección de sumas finitas de elementos de la forma xy , donde $x \in X$ y $y \in Y$. Por otra parte, dada una colección $\{A_i\}_{i \in I}$ de subgrupos aditivos de A , diremos que la **suma** $\sum_{i \in I} A_i$ es **directa** si se cumple una (y por tanto todas) de las siguientes condiciones:

- I) $A_i \cap \left(\sum_{j \neq i} A_j \right) = \{0\}$, para todo $i \in I$.
- II) Si $\sum_{i \in I} a_i = 0$ es una suma finita con $a_i \in A_i$, entonces $a_i = 0$ para todo $i \in I$.
- III) Si $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a'_i$ son sumas finitas con $a_i, a'_i \in A_i$, entonces $a_i = a'_i$ para todo $i \in I$.

En este caso la suma se denota por $\bigoplus_{i \in I} A_i$.

Definición 1.1.2. Sean A un anillo y G un grupo. Decimos que A es un anillo G -graduado o simplemente **anillo graduado** (cuando G es claro), si existe una colección $\{A_g\}_{g \in G}$ de subgrupos aditivos de A que cumple:

- I) $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$;
- II) $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para cada $g, h \in G$.

En el caso que $A_g A_h = A_{gh}$, decimos que A es un anillo **fuertemente graduado**.

Ejemplo 1.1.3. Sea A un anillo. Para cada $z \in \mathbb{Z}$, defina una familia de subgrupos de $A[x]$ de la siguiente manera:

$$A[x]_z = \begin{cases} Ax^z & \text{si } z \geq 0, \\ 0 & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

Es claro que $A[x]$ es un anillo \mathbb{Z} -graduado.

También podemos definir el soporte de un anillo G -graduado A como:

$$\text{supp}(A) = \{g \in G \mid A_g \neq 0\}.$$

Por ejemplo, el $\text{supp}(A[x])$ como anillo \mathbb{Z} -graduado es \mathbb{N} .

Proposición 1.1.4. Sean A un anillo G -graduado y $U(A)$ el subgrupo multiplicativo de los elementos invertibles en A . Las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- I) A_e es subanillo de A y $1 \in A_e$;
- II) Sea $g \in G$. Para todo $a \in U(A)$, si $a \in A_g$, entonces $a^{-1} \in A_{g^{-1}}$.

Demostración. Probaremos cada una de las afirmaciones.

- I) Como A_e es un subgrupo aditivo de A , basta probar que A es cerrado bajo el producto. Sean $a, b \in A_e$, sabemos que $ab \in A_e A_e \subseteq A_{e^2}$ y como $e^2 = e$, obtenemos lo deseado. Por otro lado, dado que $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$, existen $a_g \in A_g$ tales que $1 = \sum_{g \in G} a_g$. De esta forma, para cualquier $h \in G$, $a_h = \sum_{g \in G} a_h a_g$. Así, $a_h - a_h a_e = \sum_{g \neq e} a_h a_g$ y como la suma es directa, $a_h a_e = a_h$. Luego,

$$a_e = 1a_e = \sum_{g \in G} a_g a_e = \sum_{g \in G} a_g = 1.$$

- II) Sea $a \in A_g$ un elemento invertible en A . Escribamos $a^{-1} = \sum_{h \in G} a_h$. Así,

$$1 = aa^{-1} = \sum_{h \in G} aa_h \in \sum_{h \in G} A_{gh}.$$

No obstante, $1 \in A_e$. Luego, $1 = aa_{g^{-1}}$ y por ende, $a^{-1} = a_{g^{-1}} \in A_{g^{-1}}$.

□

Presentamos ahora una caracterización de los anillos fuertemente graduados.

Proposición 1.1.5. *Sea A un anillo G -graduado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) A es un anillo fuertemente graduado;
- ii) Existe H un conjunto generador de G tal que $A_h A_{h^{-1}} = A_e$, para todo $h \in H$;
- iii) $1 \in A_g A_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$.

Demostración. Es claro que i implica ii. Veamos que ii implica iii. Sea $g \in G$, como H es un conjunto generador de G existen $h_1, \dots, h_n \in H$ tales que $g = h_1 \cdots h_n$. Note que para cada $1 \leq i \leq n$, se tiene que $A_{h_i} A_{h_i^{-1}} = A_e$, y como $1 \in A_e$, $A_e \subseteq A_{h_i} A_e A_{h_i^{-1}}$. Así, tenemos que

$$A_e \subseteq A_{h_1} A_e A_{h_1^{-1}} \subseteq A_{h_1} A_{h_2} A_e A_{h_2^{-1}} A_{h_1^{-1}} \subseteq \cdots \subseteq A_{h_1} A_{h_2} \cdots A_{h_n} A_{h_n^{-1}} \cdots A_{h_2^{-1}} A_{h_1^{-1}} \subseteq A_g A_{g^{-1}}.$$

Por tanto, $1 \in A_g A_{g^{-1}}$. Finalmente, probaremos que iii implica i. Sean $g, h \in G$, como $1 \in A_g A_{g^{-1}}$, entonces $A_{gh} \subseteq A_g A_{g^{-1}} A_{gh} \subseteq A_g A_h$. Por lo tanto, A es fuertemente graduado. \square

Ejemplo 1.1.6. Sean \mathbb{F} un cuerpo y $A = M_3(\mathbb{F})$. Entonces A es fuertemente \mathbb{Z}_2 -graduado por la siguiente familia:

$$A_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{F} & \mathbb{F} & 0 \\ \mathbb{F} & \mathbb{F} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{F} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbb{F} \\ 0 & 0 & \mathbb{F} \\ \mathbb{F} & \mathbb{F} & 0 \end{pmatrix}.$$

Para demostrarlo, haremos uso del ítem iii de la proposición anterior. Por la Proposición 1.1.4, tenemos que $1_R \in A_0 A_0$ y para ver que $1_R \in A_1 A_1$ note que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definición 1.1.7. Un anillo G -graduado S es llamado **épsilon-fuertemente graduado** si, para cada $g \in G$, se tiene que S_g es un $(S_g S_{g^{-1}}, S_{g^{-1}} S_g)$ -bimódulo unitario.

La siguiente proposición nos presenta una caracterización de los anillos épsilon-fuertemente graduado.

Proposición 1.1.8. *Sea S un anillo G -graduado con $R = S_e$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) S es ϵ -fuertemente graduado por G ;
- ii) Para todo $g \in G$ existe un elemento $\epsilon_g \in S_g S_{g^{-1}}$ tal que para todo $s \in S_g$ se tiene que $\epsilon_g s = s = s \epsilon_{g^{-1}}$;
- iii) $S_g S_{g^{-1}}$ es un ideal con unidad de R tal que para todo $g, h \in G$ se tiene que $S_g S_h = S_g S_{g^{-1}} S_{gh} = S_{gh} S_{h^{-1}} S_h$.

Demostración. Por la definición de bimódulo unitario es claro que i implica ii. Veamos que ii implica iii. Como S es G -graduado se tiene que $R S_g S_{g^{-1}} \subseteq S_g S_{g^{-1}}$ y $S_g S_{g^{-1}} R \subseteq S_g S_{g^{-1}}$, por lo tanto $S_g S_{g^{-1}}$ es un ideal de R . Afirmamos que ϵ_g es la unidad de $S_g S_{g^{-1}}$. En efecto, basta ver que si $x \in S_g$, $y \in S_{g^{-1}}$, entonces $\epsilon_g x y = x y = x y \epsilon_g$. Por el ítem ii, sabemos que $\epsilon_g x = x$ y $y \epsilon_g = y$ y por ende, $(\epsilon_g x) y = x y$ y $x (y \epsilon_g) = x y$. Además, dado que ϵ_g existe se puede concluir que $S_g = S_g S_{g^{-1}} S_g$, para todo $g \in G$. Así, $S_g S_h = S_g S_{g^{-1}} S_g S_h \subseteq S_g S_{g^{-1}} S_{gh}$ y esto muestra que $S_g S_h = S_g S_{g^{-1}} S_{gh}$. Análogamente, se prueba que $S_g S_h = S_{gh} S_{h^{-1}} S_h$.

Por último, veamos que iii implica i. Como S es un anillo G -graduado se tiene que $S_g S_{g^{-1}} S_g \subseteq S_g$ y por lo tanto, S_g es un $(S_g S_{g^{-1}}, S_{g^{-1}} S_g)$ -bimódulo. Para ver que es unitario probaremos que la unidad ϵ_g de $S_g S_{g^{-1}}$ cumple que $\epsilon_g x = x$ y $x \epsilon_{g^{-1}} = x$, para todo $x \in S_g$. Tomando $h = e$ en el ítem iii se tiene que $S_g \subseteq S_g S_e = S_g S_{g^{-1}} S_g$. Esto implica que podemos escribir $x = \sum_{i=1}^n a_i b_i c_i$ con $a_i, c_i \in S_g$ y $b_i \in S_{g^{-1}}$ y así,

$$\epsilon_g x = \sum_{i=1}^n \epsilon_g a_i b_i c_i = \sum_{i=1}^n (\epsilon_g a_i b_i) c_i = \sum_{i=1}^n a_i b_i c_i = x.$$

Análogamente, mostramos que $x \epsilon_{g^{-1}} = x$. □

Por el ítem ii de la Proposición 1.1.8, es claro que todo anillo fuertemente graduado es ϵ -fuertemente graduado. El siguiente ejemplo muestra que no todo anillo ϵ -fuertemente graduado es fuertemente graduado.

Ejemplo 1.1.9. Sean A un anillo con unidad y B un ideal unitario propio de A (por ejemplo,

$A = \mathbb{Z}_6$ y $B = \langle 4 \rangle$). Considere:

$$S = \begin{pmatrix} A & A & B \\ A & A & B \\ B & B & A \end{pmatrix}, S_0 = \begin{pmatrix} A & A & 0 \\ A & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \text{ y } S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & B \\ B & B & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sencillo ver que S es un anillo \mathbb{Z}_2 -graduado. Para ver que es épsilon-fuertemente graduado, usaremos el ítem II de la Proposición 1.1.8. Considere $\epsilon_0 = \text{diag}(1_A, 1_A, 1_A)$ y $\epsilon_1 = \text{diag}(1_B, 1_B, 1_B)$. Es claro que $\epsilon_0 \in S_0 S_0$ y como

$$\begin{pmatrix} 1_B & 0 & 0 \\ 0 & 1_B & 0 \\ 0 & 0 & 1_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_B \\ 1_B & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_B \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_B & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_B \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1_B & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene que $\epsilon_1 \in S_1 S_1$. Además, para cada $s_0 \in S_0$ y $s_1 \in S_1$ se vale que $s_0 = \epsilon_0 s_0 = s_0 \epsilon_0$ y $s_1 = \epsilon_1 s_1 = s_1 \epsilon_1$. Luego, S es épsilon-fuertemente graduado. Por otro lado, si ϵ_1 , que es la unidad de S , perteneciera a $S_1 S_1$, implicaría que $1_A \in B$, lo cual contradice que B es un ideal propio de A . Por ende, S no es fuertemente \mathbb{Z}_2 -graduado.

Presentamos otra caracterización de los anillos épsilon-fuertemente graduados que usaremos con frecuencia en la Sección 2.3.

Proposición 1.1.10. Sea $S = \bigoplus_{g \in G} S_g$ un anillo G -graduado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- I) S es épsilon-fuertemente graduado.
- II) $\text{supp}(S)$ es cerrado bajo inversos y para cada $g \in \text{supp}(S)$, existe un idempotente no nulo $\epsilon_g \in S_g S_{g^{-1}}$ tal que $\epsilon_g s = s = s \epsilon_{g^{-1}}$, para todo $s_g \in S_g$.

Demostración. Supongamos que S es épsilon-fuertemente graduado. Por el ítem III de la Proposición 1.1.8, tenemos que $S_g S_{g^{-1}} S_g = S_g S_e = S_g$, para todo $g \in G$. Luego, si $g \in \text{supp}(S)$, entonces $S_g \neq 0$. La igualdad anterior implica que $S_{g^{-1}} \neq 0$ y por ende, $g^{-1} \in \text{supp}(S)$. Recíprocamente, en el caso de que $g \in \text{supp}(S)$, ya garantizamos por hipótesis la existencia de ϵ_g . Ahora, si $g \notin \text{supp}(S)$, como $\text{supp}(S)$ es cerrado bajo inversos, tenemos que $S_g = 0 = S_{g^{-1}}$ y por lo tanto, definimos $\epsilon_g = 0 = \epsilon_{g^{-1}}$. De esta forma, por la Proposición 1.1.8, S es épsilon-fuertemente graduado. \square

Proposición 1.1.11. Sea S un anillo épsilon-fuertemente graduado por G con $R = S_e$. Los elementos ϵ_g pertenecen al centro de R , para todo $g \in G$.

Demostración. Sea $x \in R$. Note que $\epsilon_g x$ y $x \epsilon_g$ pertenecen a $S_g S_{g^{-1}}$, y como ϵ_g es la unidad de este anillo, se tiene que $\epsilon_g x = (\epsilon_g x) \epsilon_g = \epsilon_g (x \epsilon_g) = x \epsilon_g$. \square

Finalizamos esta sección, con un ejemplo de un anillo épsilon-fuertemente graduado que será de nuestro interés.

Ejemplo 1.1.12. Sea $S = \bigoplus_{g \in G} S_g$ un anillo G -graduado. Tome $n \in \mathbb{N}$ y considere $B = M_n(S)$, el anillo de las matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en S . Note que B es G -graduado con la colección $\{B_g\}_{g \in G}$, donde $B_g = M_n(S_g)$ para todo $g \in G$. Más aún S es épsilon-fuertemente graduado si, y solo si, B es épsilon-fuertemente graduado.

En efecto, dado que $\bigoplus_{g \in G} M_n(S_g) = M_n\left(\bigoplus_{g \in G} S_g\right)$, se tiene que $M_n(S) = \bigoplus_{g \in G} B_g$, y como $S_g S_h \subseteq S_{gh}$, tenemos que $B_g B_h \subseteq B_{gh}$. Ahora, supongamos que S es épsilon-fuertemente graduado. Luego, para cada $g \in G$ existe $\epsilon_g \in S_g S_{g^{-1}}$ tal que $\epsilon_g s = s = s \epsilon_{g^{-1}}$, para todo $s \in S_g$. Dado que $\epsilon_g \in S_g S_{g^{-1}}$ existen $n_g \in \mathbb{N}$, $u_g^{(i)} \in S_g$ y $v_{g^{-1}}^{(i)}$, tales que:

$$\epsilon_g = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} v_{g^{-1}}^{(i)}.$$

Denote por E_{ij} la matriz con 1 en la coordenada (i, j) y 0 en todas las demás. Entonces $u_g^{(i)} v_{g^{-1}}^{(i)} E_{jj} \in B_g B_{g^{-1}}$ y por lo tanto,

$$\epsilon_g E_{jj} = \left(\sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} v_{g^{-1}}^{(i)} \right) E_{jj} = \sum_{i=1}^{n_g} (u_g^{(i)} E_{jj}) (v_{g^{-1}}^{(i)} E_{jj}) \in B_g B_{g^{-1}}.$$

De esta forma,

$$E_g = \epsilon_g I_n = \epsilon_g E_{11} + \cdots + \epsilon_g E_{nn} \in B_g B_{g^{-1}}.$$

Sea $C \in B_g$, note que $E_g C = \epsilon_g I_n C = \epsilon_g C$ y como cada entrada de C pertenece a S_g se tiene que $\epsilon_g C = C$. Análogamente, $C E_{g^{-1}} = C$ y con esto que B es épsilon-fuertemente graduado.

Recíprocamente, para cada $g \in G$, considere $E_g \in B_g B_{g^{-1}}$ que cumple que si $C \in B_g$ entonces $E_g C = C = C E_{g^{-1}}$. Así, defina ϵ_g como la coordenada $(1, 1)$ de E_g .

Afirmamos que $\epsilon_g s = s = s \epsilon_{g^{-1}}$, para todo $s \in S_g$. En efecto, tomando $C = s E_{11} \in B_g$ tenemos que $E_g C = C = C E_{g^{-1}}$ e igualando la coordenada $(1, 1)$ de estas matrices obtenemos que $\epsilon_g s = s = s \epsilon_{g^{-1}}$.

1.2. Cohomología Parcial de Grupos

A continuación exploraremos una generalización del concepto de acción de grupo, conocida como acción parcial de grupo. Esta resultará fundamental para la definición de los grupos de cohomología parcial. Para el desarrollo de esta sección usamos como referencia los artículos ⁷ y ¹.

Definición 1.2.1. Sean G un grupo y X un conjunto. Una **acción parcial** α de G en X es una familia $\{D_g\}_{g \in G}$ de subconjuntos de X y una familia $\{\alpha_g\}_{g \in G}$ de biyecciones $\alpha_g : D_{g^{-1}} \rightarrow D_g$ tales que:

- I) $D_e = X$ y α_1 es la identidad de X ;
- II) $D_{(gh)^{-1}} \supseteq \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$;
- III) $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$, para todo $x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$.

Note que las condiciones II y III implican que la función α_{gh} es una extensión de $\alpha_g \circ \alpha_h$.

En el caso en el que $X = A$ sea un anillo, una acción parcial α de G en A es llamada **acción parcial unitaria** si cada D_g es un ideal de A con unidad y los α_g son isomorfismos de ideales. Denotaremos por 1_g a la unidad de D_g .

Definición 1.2.2. Sean A un anillo conmutativo, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y α una acción parcial unitaria de G en A . Una **n -cocadena** de G con valores en A es una función $f : G^n \rightarrow A$, tal que $f(g_1, \dots, g_n) \in U(A 1_{g_1} 1_{g_1 g_2} \cdots 1_{g_1 g_2 \cdots g_n})$. Una **0-cocadena** es un elemento de $U(A)$.

Para $n \in \mathbb{N}$, denotamos el conjunto de todas las n -cocadenas por $C^n(G, A)$. Este conjunto es un grupo abeliano con la multiplicación punto a punto.

Definición 1.2.3. (El homomorfismo de cobordos) Dados $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f \in C^n(G, A)$ y $g_1, \dots, g_{n+1} \in G$, considere

$$\delta^n f(g_1, \dots, g_{n+1}) = \alpha_{g_1}(f(g_2, \dots, g_{n+1}) 1_{g_1^{-1}}) f(g_1, \dots, g_n)^{(-1)^{n+1}} \prod_{i=1}^n \sigma(i)^{(-1)^i},$$

⁷ M. DOKUCHAEV y M. KHRYPCHENKO. "Partial cohomology of groups". En: *Journal of Algebra* 427 (2015), págs. 142-182.

donde $\sigma(i) = f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1})$. Además, los inversos se consideran en su ideal correspondiente. Para el caso $n = 0$, si t es un elemento invertible de A , definimos $(\delta^0 t)(g) = \alpha_g(t 1_{g^{-1}}) t^{-1}$, para todo $g \in G$.

Proposición 1.2.4. Para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se tiene que $\delta^n : C^n(G, A) \rightarrow C^{n+1}(G, A)$ es un homomorfismo de grupos tal que $\text{Im } \delta^n \subseteq \text{Ker } \delta^{n+1}$.

Demostración. Ver ⁷, Proposición 1.5. □

Usando la Proposición 1.2.4 podemos introducir la siguiente definición.

Definición 1.2.5. Para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, definimos $Z^n(G, A) = \text{Ker } \delta^n$, el grupo de los n -cociclos parciales; $B^n(G, A) = \text{Im } \delta^{n-1}$, el grupo de los n -cobordos parciales; y $H^n(G, A) = \text{Ker } \delta^n / \text{Im } \delta^{n-1}$, el n -ésimo grupo de cohomología parcial de G con valores en A . Para $n = 0$, definimos $H^0(G, A) = Z^0(G, A) = \text{Ker } \delta^0$.

Ejemplo 1.2.6. Veamos una forma explícita de los primeros grupos de cohomología.

$$\begin{aligned} H^0(G, A) &= Z^0(G, A) = \{t \in U(A) \mid \alpha_g(t 1_{g^{-1}}) = t 1_g, \forall g \in G\}, \\ C^1(G, A) &= \{f : G \rightarrow A \mid f(g) \in U(A 1_g), \forall g \in G\}, \\ B^1(G, A) &= \{f \in C^1(G, A) \mid f(g) = \alpha_g(t 1_{g^{-1}}) t^{-1}, \text{ para algún } t \in U(A)\}, \\ Z^1(G, A) &= \{f \in C^1(G, A) \mid f(gh) 1_g = f(g) \alpha_g(f(h) 1_{g^{-1}}), \forall g, h \in G\}. \end{aligned}$$

Ahora, veamos que a todo anillo épsilon-fuertemente graduado se le puede asociar una acción parcial unitaria.

Sea S un anillo épsilon-fuertemente graduado por G , entonces para cada $g \in G$, existe $\epsilon_g \in S_g S_{g^{-1}}$ que cumple el ítem II de la Proposición 1.1.8. De esta forma, existen $n_g \in \mathbb{N}$, $u_g^{(i)} \in S_g$ y $v_{g^{-1}}^{(i)} \in S_{g^{-1}}$ para cada $i \in \{1, \dots, n_g\}$ tales que $\sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} v_{g^{-1}}^{(i)} = \epsilon_g$. Para cada $g \in G$, fijamos estos elementos y también asumimos que $n_e = 1$ y $u_e^{(1)} = v_e^{(1)} = 1$. Con esto, definamos la función aditiva $\gamma_g : S \rightarrow S$ dada por

$$\gamma_g(s) = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} s v_{g^{-1}}^{(i)},$$

para cada $s \in S$.

Proposición 1.2.7. Sea $g \in G$. Si $r \in Z(R)$, entonces la definición de $\gamma_g(r)$ no depende de la elección de los elementos $u_g^{(i)}$ y $v_{g^{-1}}^{(i)}$.

Demostración. Sean $m_g \in \mathbb{N}$, $a_g^{(j)} \in S_g$ y $b_{g^{-1}}^{(j)} \in S_{g^{-1}}$, para cada $j \in \{1, \dots, m_g\}$ tales que $\sum_{j=1}^{m_g} a_g^{(j)} b_{g^{-1}}^{(j)} = \epsilon_g$. Note que

$$\gamma_g(r) = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} r v_{g^{-1}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n_g} \epsilon_g u_g^{(i)} r v_{g^{-1}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{m_g} a_g^{(j)} b_{g^{-1}}^{(j)} u_g^{(i)} r v_{g^{-1}}^{(i)},$$

y dado que $b_{g^{-1}}^{(j)} u_g^{(i)} \in R$ y $r \in Z(R)$, obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{m_g} a_g^{(j)} r b_{g^{-1}}^{(j)} u_g^{(i)} v_{g^{-1}}^{(i)} = \sum_{j=1}^{m_g} a_g^{(j)} r b_{g^{-1}}^{(j)} \epsilon_g = \sum_{j=1}^{m_g} a_g^{(j)} r b_{g^{-1}}^{(j)}.$$

□

Proposición 1.2.8. Para todo $g, h \in G$ y $r \in Z(R)$, tenemos que $\gamma_g(\gamma_h(r)) = \gamma_{gh}(r)\epsilon_g$.

Demostración. Ver ¹, Proposición 12. □

Proposición 1.2.9. Sean S un anillo ϵ -fuertemente graduado por G y $R = S_\epsilon$. La colección de las restricciones $\gamma = \{\gamma_g : Z(R)\epsilon_{g^{-1}} \rightarrow Z(R)\epsilon_g\}_{g \in G}$ es una acción parcial de G en $Z(R)$, donde sus primeros grupos de cohomología son:

$$C^1(G, Z(R)) = \{f : G \rightarrow Z(R) : f(g) \in U(Z(R)\epsilon_g), \forall g \in G\},$$

$$B^1(G, Z(R)) = \{f \in C^1(G, Z(R)) \mid f(g) = \gamma_g(t)\epsilon_g t^{-1}, \text{ para algún } t \in U(Z(R))\},$$

$$Z^1(G, Z(R)) = \{f \in C^1(G, Z(R)) \mid f(gh)\epsilon_g = f(g)\gamma_g(f(h))\epsilon_g, \forall g, h \in G\}.$$

Demostración. Es claro que para todo $g \in G$, $Z(R)\epsilon_g$ es un ideal de $Z(R)$ con unidad ϵ_g . Veamos que las restricciones γ_g están bien definidas, para todo $g \in G$. Note que si $r \in Z(R)$, entonces

$$\gamma_g(r\epsilon_{g^{-1}}) = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} r \epsilon_{g^{-1}} v_{g^{-1}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} r v_{g^{-1}}^{(i)} \epsilon_g = \gamma_g(r)\epsilon_g.$$

Es decir, solo tenemos que probar que $\gamma_g(r) \in Z(R)$.

Sea $r' \in R$, dado que $v_{g^{-1}}^{(i)} r' \in S_{g^{-1}}$, tenemos:

$$\gamma_g(r)r' = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} r v_{g^{-1}}^{(i)} r' \epsilon_g = \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_g} u_g^{(i)} r v_{g^{-1}}^{(i)} r' u_g^{(j)} v_{g^{-1}}^{(j)}.$$

Además, como $r \in Z(R)$, $v_{g-1}^{(i)} r' u_g^{(j)} \in R$ y $r' u_g^{(j)} \in S_g$, concluimos que la suma anterior equivale a

$$\sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_g} u_g^{(i)} v_{g-1}^{(i)} r' u_g^{(j)} r v_{g-1}^{(j)} = \sum_{j=1}^{n_g} \epsilon_g r' u_g^{(j)} r v_{g-1}^{(j)} = \sum_{j=1}^{n_g} r' u_g^{(j)} r v_{g-1}^{(j)} = r' \gamma_g(r).$$

Luego, $\gamma_g(r) \in Z(R)$. Ahora, probaremos que las restricciones γ_g son un isomorfismo de anillos. Dados $r, r' \in Z(R)$ sabemos que:

$$\gamma_g(r \epsilon_{g-1} r' \epsilon_{g-1}) = \epsilon_g (r r' \epsilon_{g-1}^2) = \gamma_g(r r' \epsilon_{g-1}) = \gamma_g(r r').$$

De esta forma, solo es necesario probar que $\gamma_g(r r') = \gamma_g(r) \gamma_g(r')$. Por definición tenemos:

$$\gamma_g(r r') = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} r r' v_{g-1}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n_g} \epsilon_g u_g^{(i)} r r' v_{g-1}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_g} u_g^{(j)} v_{g-1}^{(j)} u_g^{(i)} r r' v_{g-1}^{(i)},$$

y dado que $r \in Z(R)$ y $v_{g-1}^{(j)} u_g^{(i)} \in R$, concluimos

$$\sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_g} u_g^{(j)} r v_{g-1}^{(j)} u_g^{(i)} r' v_{g-1}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n_g} u_g^{(j)} r v_{g-1}^{(j)} \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} r' v_{g-1}^{(i)} = \gamma_g(r) \gamma_g(r').$$

Así, γ_g respeta la multiplicación. Para mostrar la sobreyectividad de estos homomorfismos, sea $r \in Z(R)$. Note que por la Proposición 1.2.8 tenemos que $\gamma_g(\gamma_{g-1}(r \epsilon_g)) = \gamma_g(\gamma_{g-1}(r)) = \gamma_e(r) \epsilon_g = r \epsilon_g$. Por último, supongamos $\gamma_g(r \epsilon_{g-1}) = 0$, entonces $r \epsilon_{g-1} = r \epsilon_{g-1}^2 = \gamma_e(r \epsilon_{g-1}) \epsilon_{g-1}$ y por la Proposición 1.2.8 esto equivale a $\gamma_{g-1}(\gamma_g(r \epsilon_{g-1})) = 0$. Por ende, $r \epsilon_{g-1} = 0$ y de ahí que, γ_g es inyectiva.

Ahora, sean $g, h \in G$. Probaremos que γ_{gh} es una extensión de $\gamma_g \circ \gamma_h$. Primero mostraremos que si $x \in Z(R) \epsilon_{h-1}$ y $\gamma_h(x) \in Z(R) \epsilon_{g-1}$, entonces $x \in Z(R) \epsilon_{(gh)-1}$. Por la Proposición 1.2.8, tenemos que:

$$x = \gamma_{h-1}(\gamma_h(x)) = \gamma_{h-1}(\gamma_h(x) \epsilon_g) = \gamma_{h-1}(\gamma_h(x)) \gamma_{h-1}(\epsilon_g) = x \gamma_{h-1}(\gamma_{g-1}(1)) = x \gamma_{(gh)-1}(1) \epsilon_{h-1},$$

y como $\epsilon_g \in Z(R)$, de arriba obtenemos que $x = x \epsilon_{h-1} \epsilon_{(gh)-1} = x \epsilon_{(gh)-1}$. De esta forma, $x \in Z(R) \epsilon_{(gh)-1}$.

Con base en lo anterior, solo nos falta probar que para todo $x \in Z(R)\epsilon_{h^{-1}}$, tenemos que $\gamma_g(\gamma_h(x)) = \gamma_{gh}(x)$. Note que $\gamma_g(\gamma_h(x)) = \gamma_{gh}(x)\epsilon_g$ y como $\gamma_{gh}(x)\epsilon_g \in Z(R)\epsilon_{gh}$, sabemos que $\gamma_g(\gamma_h(x)) = \gamma_{gh}(x)\epsilon_g\epsilon_{gh}$. Por otro lado, $\epsilon_g\epsilon_{gh}$ es un elemento de $Z(R)\epsilon_{gh}$ y en consecuencia, tiene preimágen bajo γ_{gh} , la cuál es $\epsilon_{h^{-1}}\epsilon_{(gh)^{-1}}$. De ahí que,

$$\gamma_{gh}(x)\gamma_{gh}(\epsilon_{h^{-1}}\epsilon_{(gh)^{-1}}) = \gamma_{gh}(x\epsilon_{h^{-1}}\epsilon_{(gh)^{-1}}) = \gamma_{gh}(x\epsilon_{(gh)^{-1}}) = \gamma_{gh}(x).$$

Finalmente, a partir de la igualdad $\gamma_g(\epsilon_g) = \epsilon_{g^{-1}}$ y del Ejemplo 1.2.6, podemos determinar los grupos de cohomología parcial para la acción γ . \square

Proposición 1.2.10. Para todo $g \in G$, si $s \in S_g$ y $r \in Z(R)$, entonces

$$\gamma_g(r\epsilon_{g^{-1}})s = sr. \quad (1.1)$$

Demostración. Sean $r \in Z(R)$ y $s \in S_g$, entonces

$$\gamma_g(r\epsilon_{g^{-1}})s = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} r \epsilon_{g^{-1}} v_{g^{-1}}^{(i)} s = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} r v_{g^{-1}}^{(i)} s$$

Como $v_{g^{-1}}^{(i)} s \in S_{g^{-1}}S_g \subseteq R$ y $r \in Z(R)$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} r v_{g^{-1}}^{(i)} s = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} v_{g^{-1}}^{(i)} sr = \epsilon_g sr = sr.$$

\square

1.3. Módulos proyectivos

Antes de adentrarnos en el estudio del grupo y del semigrupo de Picard, revisamos en esta sección los resultados sobre módulos necesarios para la comprensión de este trabajo. Comenzamos recordando los conceptos de bimódulos y duales. Posteriormente, nos enfocamos en los módulos proyectivos y presentamos sus propiedades más relevantes, las cuales servirán de base para las secciones posteriores.

Definición 1.3.1. Sean R un anillo y $(M, +)$ un grupo abeliano. Decimos que M es un R -módulo a izquierda si existe una acción de R en M a izquierda, denotada por rm , tal que:

$$1) (r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m;$$

$$\text{II) } r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2;$$

$$\text{III) } (r_1 r_2)m = r_1(r_2 m);$$

para todos $m_1, m_2 \in M$ y todos $r_1, r_2 \in R$.

Si vale que $1_R m = m$, para todo $m \in M$, decimos que M es un R -**módulo unitario**. En adelante, todos los módulos serán unitarios.

Observación 1.3.2. De manera análoga, definimos un R -módulo a derecha, donde la acción de R sobre M es a la derecha y se denota por mr .

Definición 1.3.3. Sean R y S anillos. Un (R, S) -**bimódulo** es un grupo abeliano $(M, +)$ junto con un acciones de R y S en M tales que M con la acción de R es un R -módulo a izquierda, M con la acción de S es un S -módulo a derecha y se vale la siguiente condición

$$r(ms) = (rm)s,$$

para todo $r \in R, s \in S, m \in M$.

Cuando $R = S$, decimos que M es un R -**bimódulo**.

Definición 1.3.4. Sea P un R -bimódulo. Definimos P^* , el **dual a la izquierda** de P , como el conjunto de los R -homomorfismos a izquierda de P a R . Este grupo abeliano lo podemos dotar de una estructura de R -bimódulo con las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{ccc} r \cdot f : P & \longrightarrow & R & & f \cdot r : P & \longrightarrow & R \\ x & \longmapsto & f(xr) & , & x & \longmapsto & f(x)r \end{array}$$

Similarmente, definimos *P , el **dual a la derecha** de P , como el conjunto de los R -homomorfismos a la derecha de P a R y es un R -bimódulo con las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{ccc} r \cdot f : P & \longrightarrow & R & & f \cdot r : P & \longrightarrow & R \\ x & \longmapsto & rf(x) & , & x & \longmapsto & f(rx) \end{array}$$

Cuando trabajamos exclusivamente con R -módulos a izquierda, se considera únicamente el dual P^* . De manera similar, en el contexto de R -módulos a la derecha, se utiliza el dual *P .

Definición 1.3.5. Un R -módulo a izquierda P es llamado **módulo proyectivo** si para cada epimorfismo $f : M \rightarrow N$ y cada homomorfismo $g : P \rightarrow N$ existe un homomorfismo $h : P \rightarrow M$ tal que $f \circ h = g$.

Presentamos una caracterización de los módulos proyectivos cuya demostración puede consultarse en ⁸, Proposición 2.1.

Proposición 1.3.6. *Sea P un R -módulo a izquierda, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- I) P es proyectivo;
- II) P es sumando directo de un R -módulo libre;
- III) (Lema de la base dual) Existe una colección $\{p_i\}_{i \in I}$ de elementos de P y $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq P^*$ tales que para todo $p \in P$, $(f_i(p))_{i \in I}$ es casi nula y $p = \sum_{i \in I} f_i(p)p_i$.
- IV) Si $f : M \rightarrow P$ es un epimorfismo, entonces la sucesión $0 \rightarrow \text{Ker}(f) \rightarrow M \xrightarrow{f} P \rightarrow 0$ escinde, es decir, $\text{Ker}(f)$ es sumando directo de M .

Diremos que P es un R -módulo a izquierda **proyectivo finitamente generado** (pfg) si P tiene una base dual finita. Esto es equivalente a que P sea sumando directo de un R -módulo libre finitamente generado.

Observación 1.3.7. Cuando P es un R -módulo a la derecha, las nociones de proyectivo y proyectivo finitamente generado se definen de manera similar. En este caso, los homomorfismos y sumandos directos involucrados corresponden a R -módulos a la derecha y el dual que se considera es *P .

Veamos algunas propiedades de los módulos proyectivos finitamente generados.

Proposición 1.3.8. *Sea P un R -bimódulo.*

- I) Si P es pfg a izquierda con base dual $\{p_i, f_i\}_{1 \leq i \leq n}$, entonces P^* es pfg a la derecha con base dual $\{f_i, \varphi_i\}_{1 \leq i \leq n}$ donde

$$\begin{aligned} \varphi_i : P^* &\longrightarrow R \\ f &\longmapsto f(p_i). \end{aligned}$$

- II) Si P es pfg a la derecha con base dual $\{q_i, g_i\}_{1 \leq i \leq n}$, entonces *P es pfg a izquierda con base dual $\{g_i, \psi_i\}_{1 \leq i \leq n}$ donde

$$\begin{aligned} \psi_i : {}^*P &\longrightarrow R \\ g &\longmapsto g(q_i). \end{aligned}$$

⁸ J. BAEZ. "Semigrupo de Picard y acciones parciales". En: *Tesis de Maestría, Universidad Industrial de Santander* (2016).

Demostración. Probaremos cada una de las afirmaciones.

i) Sean $f \in P^*$ y $p \in P$. Entonces para todo $1 \leq i \leq n$,

$$\varphi_i(f \cdot r) = (f \cdot r)(p_i) = f(p_i)r = \varphi_i(f)r.$$

Luego, $\varphi_i \in {}^*(P^*)$. Afirmamos que $\sum_{i=1}^n f_i \cdot \varphi_i(f) = f$. En efecto, sea $p \in P$, entonces

$$\sum_{i=1}^n (f_i \cdot \varphi_i(f))(p) = \sum_{i=1}^n f_i(p)\varphi_i(f) = \sum_{i=1}^n f_i(p)f(p_i) = f \left(\sum_{i=1}^n f_i(p)p_i \right) = f(p).$$

Esto es, $\{f_i, \varphi_i\}_{1 \leq i \leq n}$ es una base dual para P^* como R -módulo a la derecha.

ii) La prueba es análoga a la del ítem anterior.

□

Proposición 1.3.9. Sean M un R -módulo y S un anillo. Si M pfg a izquierda (derecha) como S -módulo y S es pfg a izquierda (derecha) como R -módulo, entonces M es pfg a la izquierda (derecha) como R -módulo.

Demostración. Por hipótesis, existen $n, m \in \mathbb{N}$, K un S -módulo y T un R -módulo tales que $S^n = M \oplus K$ y $R^m = S \oplus T$. De esta forma, $(R^m)^n = S^n \oplus T^n = M \oplus (K \oplus T^n)$ y así, M es sumando directo de un módulo libre finitamente generado. Por lo tanto, M es pfg como R -módulo. □

A continuación, recordaremos la construcción del producto tensorial de módulos. Sean R un anillo, M y N , R -módulos a la derecha y a la izquierda, respectivamente. Sea $\mathbb{Z}[M \times N] = \bigoplus_{(m,n) \in M \times N} \mathbb{Z}(m, n)$. Consideremos S el subconjunto de $\mathbb{Z}[M \times N]$ que tiene los elementos de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n); \\ (m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2); \\ (mr, n) - (m, rn). \end{array} \right.$$

Definición 1.3.10. El grupo $\mathbb{Z}[M \times N]/\langle S \rangle$ es llamado el **producto tensorial** de M y N y se denota por $M \otimes_R N$.

La clase de (m, n) es denotada por $m \otimes n$, la cual es llamada **tensor elemental**. De esta manera, para todo $x \in M \otimes_R N$, existe $t \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x = \sum_{i=1}^t m_i \otimes n_i$.

Ejemplo 1.3.11. Sean m y n primos relativos, entonces $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n = (0)$. Dado que m y n son primos relativos existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $mx + ny = 1$. De esta forma, dado cualquier tensor elemental $a \otimes b \in \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n$, tenemos que

$$a \otimes b = (a(mx + ny)) \otimes b = amx \otimes b + any \otimes b = 0 \otimes b + a \otimes nyb = 0 + a \otimes 0 = 0.$$

Definición 1.3.12. Sean A un grupo abeliano, M y N R -módulos a derecha e izquierda, respectivamente. Una función $f : M \times N \rightarrow A$ es llamada **balanceada** si:

- I) $f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n)$,
- II) $f(m, n_1 + n_2) = f(m, n_1) + f(m, n_2)$,
- III) $f(mrn, n) = f(m, rn)$,

para todos $m, m_1, m_2 \in M, n, n_1, n_2 \in N$ y $r \in R$.

Proposición 1.3.13. (*Propiedad Universal*). Sean A un grupo abeliano, M y N R -módulos a derecha e izquierda, respectivamente. Entonces, dada cualquier función $f : M \times N \rightarrow A$ balanceada existe una única función $f^* : M \otimes_R N \rightarrow A$ tal que $f(m, n) = f^*(m \otimes n)$, para todo $m \in M, n \in N$.

Demostración. Ver ⁸, Teorema 1.7. □

Hasta ahora, el producto tensorial entre módulos solo tiene estructura de grupo abeliano. En la siguiente observación, lo dotaremos de una estructura de módulo.

Observación 1.3.14. En el caso que M sea un (S, R) -bimódulo podemos dotar a $M \otimes_R N$ de una estructura de S -módulo a la izquierda: dado $s \in S$, definamos

$$\begin{aligned} f_s : M \times N &\longrightarrow M \otimes_R N \\ (m, n) &\longmapsto sm \otimes n \end{aligned}$$

Note que f_s es balanceada y por lo tanto, la Proposición 1.3.13 implica que existe un homomorfismo $f_s^* : M \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N$ tal que $f_s^*(m \otimes n) = sm \otimes n$. Luego, podemos definir $s(m \otimes n) = sm \otimes n$. De ahí,

$$s \left(\sum_{i=1}^t m_i \otimes n_i \right) = \sum_{i=1}^t sm_i \otimes n_i.$$

Análogamente, si N es un (R, T) -bimódulo podemos dotar a $M \otimes_R N$ de una estructura de T -módulo a la derecha. De esta forma, si N y M son R -bimódulos entonces $M \otimes_R N$ también.

Observación 1.3.15. La Proposición 1.3.13 establece que, para probar que una función $f : M \otimes_R N \rightarrow A$ está bien definida, basta con verificar que sea balanceada.

La siguiente proposición establece que la propiedad de ser un módulo proyectivo finitamente generado se preserva bajo productos tensoriales.

Proposición 1.3.16. *Sean P y Q R -bimódulos. Si P y Q son pfg como R -módulos a la izquierda (derecha), entonces $P \otimes_R Q$ es pfg como R -módulo a la izquierda (derecha).*

Demostración. Sean P y Q R -módulos pfg como R -módulos a la izquierda. Sean $\{f_i, p_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ y $\{g_j, q_j\}_{j=1,2,\dots,m}$ bases duales de P y Q respectivamente. Tome:

$$\begin{aligned} F_{i,j} : P \otimes_R Q &\longrightarrow R \\ p \otimes q &\longmapsto f_i(pg_j(q)) \end{aligned}$$

Es fácil ver que $F_{i,j}$ es balanceada y por lo tanto, $F_{i,j} \in (P \otimes_R Q)^*$. Además,

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n F_{i,j}(p \otimes q)(p_i \otimes q_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f_i(pg_j(q))(p_i \otimes q_j) = \sum_{j=1}^m pg_j(q) \otimes q_j = \sum_{j=1}^m p \otimes g_j(q)q_j = p \otimes q,$$

para todo $p \in P$ y $q \in Q$. Entonces $\{F_{i,j}, p_i \otimes q_j\}_{i,j}$ es una base dual para $P \otimes_R Q$ como R -módulo a la izquierda y de esta forma, $P \otimes_R Q$ es pfg como R -módulo a la izquierda. La demostración del otro caso es análoga. \square

Presentamos una caracterización de este tipo de módulos.

Teorema 1.3.17. *Sea P un R -módulo a la izquierda proyectivo. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

- i) P es pfg.
- ii) El homomorfismo $\varphi : P^* \otimes_R P \rightarrow \text{End}({}_R P)$ dado por:

$$\varphi \left(\sum_{j=1}^m g_j \otimes q_j \right) (p) = \sum_{j=1}^m g_j(p)q_j$$

es un isomorfismo. Esto es, $P^* \otimes_R P \simeq \text{End}({}_R P)$.

Demostración. Sea P un R -módulo a la izquierda pfg. Por definición, existe $\{p_i, f_i\}_{1 \leq i \leq n}$ base dual de P . Es decir, para todo $p \in P$ tenemos que:

$$p = \sum_{i=1}^n f_i(p)p_i.$$

Veamos que φ es una biyección. Para esto, mostraremos que la función

$$\begin{aligned} \varphi' : \text{End}({}_R P) &\longrightarrow P^* \otimes_R P \\ F &\longmapsto \sum_{i=1}^n f_i \otimes F(p_i) \end{aligned}$$

es la inversa de φ . Sea $F \in \text{End}({}_R P)$ note que

$$\varphi(\varphi'(F))(p) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n f_i \otimes F(p_i)\right)(p) = \sum_{i=1}^n f_i(p)F(p_i) = F\left(\sum_{i=1}^n f_i(p)p_i\right) = F(p).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \varphi'\left(\varphi\left(\sum_{j=1}^m g_j \otimes q_j\right)\right) &= \sum_{i=1}^n f_i \otimes \varphi\left(\sum_{j=1}^m g_j \otimes q_j\right)(p_i) = \sum_{i=1}^n f_i \otimes \sum_{j=1}^m g_j(p_i)q_j = \sum_{i,j} f_i \otimes g_j(p_i)q_j \\ &= \sum_{i,j} f_i \cdot g_j(p_i) \otimes q_j = \sum_{j=1}^m g_j \otimes q_j. \end{aligned}$$

Recíprocamente, sabemos que φ es sobreyectiva y por ende, existe una familia $\{f_i, p_i\}_{1 \leq i \leq n}$ tal que

$$\sum_{i=1}^n f_i p_i = \text{id}_P$$

De esta forma, para todo $p \in P$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^n f_i(p)p_i = p.$$

Esto es, $\{p_i, f_i\}_{1 \leq i \leq n}$ es una base dual finita de P . □

Observación 1.3.18. En el caso de R -módulos a la derecha, el teorema anterior cambia en que P es pfg sí, y solo sí, $P \otimes_R {}^*P \simeq \text{End}(P_R)$.

Corolario 1.3.19. *Sea P un R -bimódulo. Si P es pfg tanto a la izquierda como a la derecha, entonces $\text{End}({}_R P)$ es pfg a la derecha y $\text{End}(P_R)$ es pfg a la izquierda.*

Demostración. Supongamos que P es pfg como R -módulo a la izquierda y a la derecha. Teniendo en cuenta que P es pfg a la izquierda, la Proposición 1.3.8 y el Teorema 1.3.17 implican que P^* es pfg a la derecha y $P^* \otimes_R P \simeq \text{End}({}_R P)$. Además, dado que P es también pfg a la derecha, la Proposición 1.3.16 nos permite concluir que $P^* \otimes_R P$ es pfg a la derecha y por lo tanto, $\text{End}({}_R P)$ es pfg a la derecha. Similarmente mostramos que $\text{End}(P_R)$ es pfg a la izquierda. \square

Finalizamos esta sección definiendo los contextos de Morita y estableciendo una relación con los módulos proyectivos.

Definición 1.3.20. Sean R, S anillos, P un (R, S) -bimódulo, Q un (S, R) -bimódulo y homomorfismos de bimódulos

$$\tau : P \otimes_S Q \rightarrow R \quad , \quad \mu : Q \otimes_R P \rightarrow S$$

tales que

$$\tau(p \otimes q)p' = p\mu(q \otimes p') \quad \text{y} \quad q\tau(p \otimes q') = \mu(q \otimes p)q',$$

para todo $p, p' \in P$ y $q, q' \in Q$. Entonces la sextupla (R, S, P, Q, τ, μ) es llamada un **contexto de Morita**. Si τ y μ son epimorfismos, decimos que el contexto es **estricto**.

Para un ejemplo de contexto de Morita, véase ⁹, página 166.

Proposición 1.3.21. *Sea (R, S, P, Q, τ, μ) un contexto de Morita estricto. Entonces ${}_R P, P_S, S Q, Q_R$ son pfg.*

Demostración. Como τ es sobreyectiva existen $p_i \in P$ y $q_i \in Q$ con $1 \leq i \leq n$ tales que

$$\sum_{i=1}^n \mu(q_i \otimes p_i) = 1_S.$$

Ahora, sea $p \in P$ tenemos que:

$$p = p1_S = \sum_{i=1}^n p\mu(q_i \otimes p_i) = \sum_{i=1}^n \tau(p \otimes q_i) p_i.$$

⁹ N. JACOBSON. *Basic Algebra II: Second Edition*. Dover Books on Mathematics, 2012.

Llamemos f_i a la función de P a R tal que $f_i(p) = \tau(p \otimes q_i)$, para todo $p \in P$ y $1 \leq i \leq n$. Es claro que $f_i \in P^*$ y además,

$$p = \sum_{i=1}^n p_i f_i(p).$$

Así, $\{p_i, f_i\}_{i=1, \dots, n}$ es la base dual finita de ${}_R P$. Luego, P es pfg como R -módulo a la izquierda. Las demostraciones de los otros módulos son análogas. \square

Proposición 1.3.22. *Sean R y S anillos, P un (R, S) -bimódulo y Q un (S, R) -bimódulo tales que $P \otimes_S Q \cong R$ y $Q \otimes_R P \cong S$, como R -bimódulos y S -bimódulos respectivamente. Entonces existen isomorfismos*

$$\iota : P \otimes_S Q \rightarrow R \quad \text{y} \quad \tau : Q \otimes_R P \rightarrow S$$

tales que $(R, S, P, Q, \iota, \tau)$ es un contexto de Morita estricto.

Demostración. Ver ¹⁰, Proposición 2.1.11. \square

1.4. El grupo y el semigrupo de Picard

Esta sección está dedicada a explicar en detalle la construcción del grupo y semigrupo de Picard, los cuales serán fundamentales para el estudio de los anillos épsilon-fuertemente graduados en las Secciones 2.1 y 2.4. A lo largo de esta sección, R denotará un anillo.

Definición 1.4.1. Sea P un R -bimódulo. Decimos que P es un **R -bimódulo invertible** si existe Q R -bimódulo tal que $P \otimes_R Q \simeq R \simeq Q \otimes_R P$ como R -bimódulos.

Definición 1.4.2. Sea P un R -módulo a la izquierda. Diremos que P es un **generador** si existen $n \in \mathbb{N}$, $f_i \in P^*$ y $p_i \in P$ tales que $\sum_{i=1}^n f_i(p_i) = 1_R$.

A partir de las propiedades de los módulos proyectivos, obtenemos una caracterización de los bimódulos invertibles.

Teorema 1.4.3. *Sea P un R -bimódulo. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

- i) P es invertible.

¹⁰ I. ROCHA. “Uma sequencia exata relacionada a uma extensao de aneis e uma representacao parcial”. En: *Tesis de Doctorado, Universidad Sao Paulo* (2017).

II) P es pfg como R -módulo a la izquierda, es un generador y $R \simeq \text{End}({}_R P)$ vía la acción a la derecha de R sobre P .

III) P es pfg como R -módulo a la derecha, es un generador y $R \simeq \text{End}(P_R)$ vía la acción a la izquierda de R sobre P .

Demostración. Probaremos que el ítem I es equivalente al ítem II. Sea P un R -bimódulo invertible. Sabemos que existe Q un R -bimódulo tal que $P \otimes_R Q \simeq R \simeq Q \otimes_R P$. Por la Proposición 1.3.22, existen isomorfismos de R -bimódulos $\iota : P \otimes_R Q \rightarrow R$ y $\tau : Q \otimes_R P \rightarrow R$ tales que

$$\iota(p \otimes q)p' = p\tau(q \otimes p') \quad \text{y} \quad q\iota(p \otimes q') = \tau(q \otimes p)q', \quad \text{para todo } p, p' \in P, q, q' \in Q. \quad (1.2)$$

Por otro lado, como τ es sobreyectiva existen $p_i \in P$ y $q_i \in Q$ con $i = 1, 2, \dots, n$ tales que:

$$\tau \left(\sum_{i=1}^n q_i \otimes p_i \right) = 1_R.$$

Con esto podemos definir

$$\begin{aligned} f_i : P &\longrightarrow R \\ p &\longmapsto \iota(p \otimes q_i) \end{aligned}$$

Como ι es un isomorfismo de R -bimódulos es claro que $f_i \in P^*$, para todo $i = 1, \dots, n$. Veamos que $\{f_i, p_i\}_{i=1, \dots, n}$ es una base dual finita de P . Sea $p \in P$, entonces

$$\sum_{i=1}^n f_i(p)p_i = \sum_{i=1}^n \iota(p \otimes q_i)p_i \stackrel{(1.2)}{=} \sum_{i=1}^n p\tau(q_i \otimes p_i) = p1_R = p.$$

De esta forma, P es pfg como R -módulo a la izquierda. Además, existen $q'_j \in Q$ y $p'_j \in P$ con $j = 1, \dots, m$ tales que

$$\iota \left(\sum_{j=1}^m p'_j \otimes q'_j \right) = 1_R.$$

Así, definimos:

$$\begin{aligned} g_j : P &\longrightarrow R \\ p &\longmapsto \iota(p \otimes q'_j). \end{aligned}$$

Es claro que $g_j \in P^*$. De esta forma,

$$\sum_{j=1}^m g_j(p'_j) = \sum_{j=1}^m \mathfrak{l}(p'_j \otimes q'_j) = 1_R.$$

Por lo tanto, ${}_R P$ es un generador. Por último, considere

$$\begin{aligned} \varphi : R &\longrightarrow \text{End}({}_R P) \\ r &\longmapsto (p \mapsto pr). \end{aligned}$$

Claramente, φ está bien definida. Sea $r \in \text{Ker}(\varphi)$, entonces $pr = 0$, para todo $p \in P$. Note que:

$$r = 1_R r = \mathfrak{r} \left(\sum_{i=1}^n q_i \otimes p_i \right) r = \mathfrak{r} \left(\sum_{i=1}^n q_i \otimes p_i r \right) = 0.$$

Por lo tanto, φ es inyectiva. Ahora, sea $f \in \text{End}({}_R P)$, considere $r = \sum_{i=1}^n \mathfrak{r}(q_i \otimes f(p_i))$. Así,

$$\begin{aligned} (\varphi(r))(p) &= \sum_{i=1}^n p \mathfrak{r}(q_i \otimes f(p_i)) \stackrel{(1,2)}{=} \sum_{i=1}^n \mathfrak{l}(p \otimes q_i) f(p_i) \\ &= f \left(\sum_{i=1}^n \mathfrak{l}(p \otimes q_i) p_i \right) \stackrel{(1,2)}{=} f \left(p \sum_{i=1}^n \mathfrak{r}(q_i \otimes p_i) \right) \\ &= f(p). \end{aligned}$$

Esto es, φ es sobreyectiva y por consiguiente, un isomorfismo. Recíprocamente, por el Teorema 1.3.17 tenemos que $P^* \otimes_R P \simeq \text{End}({}_R P) \simeq R$ por lo que solo nos falta probar que $P \otimes_R P^* \simeq R$. Como P es generador existen $f_i \in P^*$ y $p_i \in P$, con $i = 1, \dots, n$ tales que

$$\sum_{i=1}^n f_i(p_i) = 1_R.$$

Considere

$$\begin{aligned} \mathfrak{l} : P \otimes_R P^* &\longrightarrow R \\ p \otimes f &\longmapsto f(p) \end{aligned}$$

Veamos que \mathfrak{l} es R -bilineal. Dado $r \in R$ tenemos que:

$$\mathfrak{l}((rp) \otimes f) = f(rp) = rf(p) = r\mathfrak{l}(f \otimes p),$$

$$\mathfrak{l}(p \otimes (f \cdot r)) = (f \cdot r)(p) = f(p)r = \mathfrak{l}(p \otimes f)r,$$

para todo $f \in P^*$, $p \in P$. Note que ι es sobreyectiva pues dado $r \in R$ tenemos que:

$$\iota\left(\sum_{i=1}^n rp_i \otimes f_i\right) = \sum_{i=1}^n f_i(rp_i) = r \sum_{i=1}^n f_i(p_i) = r1_R = r.$$

Veamos que ι es inyectiva. Sean $q_j \in P$ y $g_j \in P^*$ con $j = 1, \dots, m$ tales que $\iota\left(\sum_{j=1}^m q_j \otimes g_j\right) = \sum_{j=1}^m g_j(q_j) = 0$. Para cada i y j defina

$$\begin{aligned} \theta_{j,i} : P &\longrightarrow P \\ p &\longmapsto f_i(p)q_j. \end{aligned}$$

Es claro que $\theta_{j,i} \in \text{End}({}_R P)$. Por hipótesis, $\text{End}({}_R P) \simeq R$ vía acción a la derecha, por tanto para cada $\theta_{j,i}$ existe $r_{j,i} \in R$ tal que $\theta(p) = pr_{j,i}$. Así,

$$\sum_{j=1}^m q_j \otimes g_j = \sum_{j=1}^m 1_R q_j \otimes g_j = \sum_{j,i} f_i(p_i) q_j \otimes g_j = \sum_{j,i} \theta_{j,i}(p_i) \otimes g_j = \sum_{j,i} p_i r_{j,i} \otimes g_j = \sum_{j,i} p_i \otimes r_{j,i} \cdot g_j$$

Para cada i fijo, veamos que $\sum_{j=1}^m r_{j,i} \cdot g_j = 0$. Sea $p \in P$, tenemos que

$$\sum_{j=1}^m g_j(pr_{j,i}) = \sum_{j=1}^m g_j(\theta_{j,i}(p)) = \sum_{j=1}^m g_j(f_i(p)q_j) = f_i(p) \sum_{j=1}^m g_j(q_j) = 0.$$

Por lo tanto, $\sum_{j=1}^m q_j \otimes g_j = 0$ y así, $P \otimes_R P^* \simeq R$. Análogamente, se prueba que los ítem I y III son equivalentes. \square

Denotaremos por $\text{Pic}(R)$ al conjunto de las clases de isomorfismos de los R -bimódulos invertibles.

Teorema 1.4.4. *Sea R un anillo con unidad. El conjunto $\text{Pic}(R)$ es un grupo con la operación:*

$$[P][Q] = [P \otimes_R Q],$$

para todo P y Q R -módulos invertibles. Este grupo es llamado el **Grupo de Picard**.

Demostración. Note que la operación está bien definida pues si $P \simeq P'$ y $Q \simeq Q'$, entonces $P \otimes_R Q \simeq P' \otimes_R Q'$. Ahora si P y Q son invertibles, entonces existen P' y Q' sus R -módulos inversos. De esta forma, $(Q' \otimes_R P') \otimes_R (P \otimes_R Q) \simeq R \simeq (P \otimes_R Q) \otimes_R (Q' \otimes_R P')$ y por lo tanto, $P \otimes_R Q$ es un R -bimódulo invertible. El elemento identidad para esta operación es $[R]$ pues $P \otimes_R R$ es isomorfo a P vía $p \otimes r \mapsto pr$. Así, de la definición de $\text{Pic}(R)$ todo

elemento es invertible y por consiguiente, bajo el producto tensorial este conjunto es un grupo. \square

La siguiente definición generaliza el concepto de bimódulo invertible.

Definición 1.4.5. Sea P un R -bimódulo. Diremos que P es **parcialmente invertible** si cumple las siguientes condiciones:

- I) P es pfg como R -módulo a la izquierda y derecha.
- II) Las funciones

$$\begin{array}{ccc} \tau : R & \longrightarrow & \text{End}({}_R P) \\ r & \longmapsto & p \mapsto pr \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} \iota : R & \longrightarrow & \text{End}(P_R) \\ r & \longmapsto & p \mapsto rp \end{array}$$

son epimorfismos.

Denotaremos por $\text{PicS}(R)$ al conjunto de las clases de isomorfismos de los R -bimódulos parcialmente invertibles. Es claro que $\text{Pic}(R) \subseteq \text{PicS}(R)$. Probaremos que este conjunto es un monoide con el producto tensorial. Para esto necesitaremos el siguiente lema.

Lema 1.4.6. Sean P y Q R -bimódulos.

- I) Si P y Q son pfg como R -módulos a la izquierda entonces la función $\eta : P^* \otimes_R Q^* \rightarrow (Q \otimes P)^*$, dada por $\eta(f \otimes g)(q \otimes p) = g(qf(p))$ es un isomorfismo de R -bimódulos.
- II) Si P y Q son pfg como R -módulos a la derecha entonces la función $\eta' : {}^*P \otimes_R {}^*Q \rightarrow ({}^*(Q \otimes P))$, dada por $\eta'(f \otimes g)(q \otimes p) = f(g(q)p)$ es un isomorfismo de R -bimódulos.

Demostración. Probaremos solo el ítem I, pues la prueba del otro ítem es similar. Primero veamos que η está bien definida. Sea $r \in R$, tenemos que:

$$\eta(f \otimes g)(rq \otimes p) = g(rqf(p)) = rg(qf(p)) = r\eta(f \otimes g)(q \otimes p).$$

Luego, $\eta(f \otimes g) \in (Q \otimes P)^*$. Ahora, η es R -bilineal pues dado $r \in R$ tenemos que:

$$\eta(r \cdot f \otimes g)(q \otimes p) = g(q(r \cdot f)(p)) = g(qf(pr)) = \eta(f \otimes g)((q \otimes p)r) = (r \cdot \eta(f \otimes g))(q \otimes p),$$

$$\eta(f \otimes g \cdot r)(q \otimes p) = (g \cdot r)(qf(p)) = g(qf(p))r = (\eta(f \otimes g) \cdot r)(q \otimes p).$$

De esta forma, η es un homomorfismo de R -bimódulos y así solo falta mostrar que es biyectiva. Sean $\{f_i, p_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ y $\{g_j, q_j\}_{j=1,2,\dots,m}$ bases duales de P y Q respectivamente. Veamos que

$$\begin{aligned} \mu : (Q \otimes P)^* &\longrightarrow P^* \otimes_R Q^* \\ F &\longmapsto \sum_{i,j} f_i \otimes g_j \cdot F(q_j \otimes p_i) \end{aligned}$$

es la inversa de η . De hecho, dado $F \in (Q \otimes P)^*$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \eta \left(\sum_{i,j} f_i \otimes g_j \cdot F(q_j \otimes p_i) \right) (q \otimes p) &= \sum_{i,j} (g_j \cdot F(q_j \otimes p_i))(q f_i(p)) = \sum_{i,j} g_j(q f_i(p)) F(q_j \otimes p_i) \\ &= \sum_{i,j} F(g_j(q f_i(p)) q_j \otimes p_i) = \sum_i F(q f_i(p) \otimes p_i) \\ &= \sum_i F(q \otimes f_i(p) p_i) = F(q \otimes p). \end{aligned}$$

Por otro lado, dado $f \otimes g \in P^* \otimes_R Q^*$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(\eta(f \otimes g)) &= \sum_{i,j} f_i \otimes g_j \cdot \eta(f \otimes g)(q_j \otimes p_i) = \sum_{i,j} f_i \otimes g_j \cdot g(q_j f(p_i)) \\ &= \sum_i f_i \otimes \sum_j g_j \cdot g(q_j f(p_i)) = \sum_i f_i \otimes f(p_i) \cdot g \\ &= \sum_i f_i \cdot f(p_i) \otimes g = f \otimes g. \end{aligned}$$

Por lo tanto, μ es la inversa de η . Esto implica que η es un isomorfismo de R -bimódulos. □

Teorema 1.4.7. *Sea R un anillo. El conjunto $\text{PicS}(R)$ es un monoide vía:*

$$[P][Q] = [P \otimes_R Q],$$

para todo $[P], [Q] \in \text{PicS}(R)$. Este conjunto es conocido como **el semigrupo de Picard**.

Demostración. Sean $[P], [Q] \in \text{PicS}(R)$. Por la Proposición 1.3.16, sabemos que $P \otimes_R Q$ es pfg. Dado que P y Q son pfg existen φ_P y φ_Q isomorfismos que cumplen la condición II del Teorema 1.3.17. Considere η la función del inciso I del Lema 1.4.6. Con estas funciones podemos obtener el siguiente diagrama:

Demostración. Llamemos e a la unidad de I . Entonces, $ee = e$ y por lo tanto, e es idempotente. Veamos que $eR = I$. Es claro que $eR \subseteq I$. Ahora, sea $i \in I$ tenemos que $ei = i$ y así, $I \subseteq eR$. De esta forma, $R = eR \oplus (1_R - e)R$ y por consiguiente, I es un sumando directo de R . Luego, I es *pfq*. Por otro lado, dada $f \in \text{End}({}_R I)$ tenemos que $if(e) = f(ie) = f(i)$, para todo $i \in I$, es decir, la acción a la derecha de R sobre I es sobreyectiva. Análogamente, obtenemos el mismo resultado para la acción a la izquierda. \square

Denotamos por $I(R)$ al conjunto de isomorfismos de anillos entre ideales de R . Sean M un R -bimódulo y $\theta : R1_{\theta^{-1}} \rightarrow R1_{\theta}$ en $I(R)$ con $1_{\theta^{-1}}$ y 1_{θ} idempotentes centrales de R . Si $m1_{\theta} = m$ para todo $m \in M$, entonces θ induce una estructura a $M_{\theta} := M$ vía

$$m \cdot r = m\theta(r1_{\theta^{-1}}).$$

Note que M_{θ} sigue siendo R -módulo unitario dado que

$$m \cdot 1_R = m\theta(1_R1_{\theta^{-1}}) = m\theta(1_{\theta^{-1}}) = m1_{\theta} = m.$$

Denotaremos ${}_{id}M_{\theta} := M$ al R -bimódulo M con la operación a la derecha dada por θ y la estructura a la izquierda es la misma que M como R -módulo. Análogamente, podemos definir ${}_{\theta}M_{id}$.

Concluimos esta sección con algunas propiedades de $\text{PicS}(R)$ que utilizaremos en el Capítulo 2.

Proposición 1.4.9. *Sea R un anillo. Las siguientes propiedades se satisfacen:*

- I) *Si $[P] \in \text{PicS}(R)$ se tiene que:*
 - a) *Existe un idempotente $e_1 \in R$ tal que $\text{Ann}(P_R) = e_1R$ y la función $\tau : (1_R - e_1)R \rightarrow \text{End}({}_R P)$ es un isomorfismo de R -bimódulos.*
 - b) *Existe un idempotente $e_2 \in R$ tal que $\text{Ann}({}_R P) = Re_2$ y la función $\iota : R(1_R - e_2) \rightarrow \text{End}(P_R)$ es un isomorfismo de R -bimódulos.*
- II) *Sea P un R -bimódulo. Si existe un R -bimódulo Q , ideales unitarios I, J de R y homomorfismos de bimódulos $\tau : P \otimes_J Q \rightarrow I$ y $\mu : Q \otimes_I P \rightarrow J$ tales que (I, J, P, Q, τ, μ) es un contexto de Morita estricto, entonces $[P] \in \text{PicS}(R)$.*

- III) Sean $[P], [Q] \in \text{PicS}(R)$. Asuma que los idempotentes hallados en el ítem I son centrales. Entonces ${}_R P \simeq {}_R Q$ si, y solo si, existe θ isomorfismo entre ideales de R con $\text{dom}(\theta)$ e $\text{Im}(\theta)$ generados por idempotentes centrales de R y $Q \simeq {}_{id} P_\theta$.
- IV) Sea $\theta : R1_{\theta^{-1}} \rightarrow R1_\theta$ un elemento de $I(R)$ y $M := R1_\theta$, donde $1_{\theta^{-1}}$ y 1_θ son idempotentes centrales de R . Entonces $[{}_{id} M_\theta], [{}_\theta M_{id}] \in \text{PicS}(R)$.
- v) Suponga que S es un anillo épsilon-fuertemente graduado con $R = S_e$. Entonces
- $[S_g] \in \text{PicS}(R)$, para todo $g \in G$.
 - $R\epsilon_g \cong \text{End}(S_{gR})$ vía la acción a la izquierda de $R\epsilon_g$ sobre S_g .

Demostración. Probaremos cada una de las afirmaciones.

- i) Sea $[P] \in \text{PicS}(R)$. Entonces $\tau : R \rightarrow \text{End}({}_R P)$ es un epimorfismo de R -bimódulos. Es claro que el $\text{Ker } \tau = \text{Ann}(P_R)$ y de esta forma, obtenemos la siguiente sucesión exacta de R -bimódulos

$$0 \rightarrow \text{Ann}(P_R) \rightarrow R \xrightarrow{\tau} \text{End}({}_R P).$$

Por el Corolario 1.3.19, la sucesión anterior, considerada como una sucesión de R -módulos a la derecha, escinde. Esto implica que $\text{Ann}(P_R)$ es sumando directo de R como R -módulo a la derecha y así, existe un idempotente e_1 tal que $\text{Ann}(P_R) = e_1 R$. Además, $R = (1_R - e_1)R \oplus e_1 R$ y por lo tanto, $\tau : (1_R - e_1)R \rightarrow \text{End}({}_R P)$ es un isomorfismo de R -bimódulos. De manera similar, utilizando el hecho de que $\text{End}(P_R)$ es proyectivo como R -módulo a la izquierda, se demuestra el otro ítem.

- ii) Por la Proposición 1.3.21 sabemos que los módulos ${}_I P, P_J, {}_J Q$ y Q_I son pfg. Además, I y J son sumandos directos de R y por consiguiente, la Proposición 1.3.9 implica que P y Q son R -módulos pfg tanto a la izquierda como a la derecha. Mostraremos que el homomorfismo:

$$\begin{aligned} \tau : J &\longrightarrow \text{End}({}_I P) \\ j &\longmapsto p \mapsto pj \end{aligned}$$

es una biyección. Como μ es sobreyectiva existen $q_i \in Q, p_i \in P$ tales que

$$1_J = \sum_{i=1}^n \mu(q_i \otimes p_i).$$

Así, si $j \in \text{Ker}(\tau)$, entonces $pj = 0$, para todo $p \in P$. Por lo tanto, $j = 1_I j = \sum_{i=1}^n \mu(q_i \otimes p_i j) = 0$. Por otro lado, dado $f \in \text{End}({}_I P)$ considere $j = \sum_{i=1}^n \mu(q_i \otimes f(p_i))$. Note que para cada $p \in P$, tenemos

$$\begin{aligned} pj &= \sum_{i=1}^n p \mu(q_i \otimes f(p_i)) = \sum_{i=1}^n \tau(p \otimes q_i) f(p_i) = f \left(\sum_{i=1}^n \tau(p \otimes q_i) p_i \right) \\ &= f \left(p \sum_{i=1}^n \mu(q_i \otimes p_i) \right) = f(p). \end{aligned}$$

Así, $\tau(j) = f$, es decir, τ es una biyección. Ahora bien, es claro que $\text{End}({}_R P) \subseteq \text{End}({}_I P)$. Veamos la otra contención. Sean $f \in \text{End}({}_I P)$, $p \in P$ y $r \in R$, entonces $f(rp) = f(r(1_I p)) = r(1_I f(p)) = rf(p)$. Luego, $f \in \text{End}({}_R P)$. De esta forma concluimos que $\tau : R \rightarrow \text{End}({}_R P)$ es un epimorfismo de R -bimódulos. Análogamente, se concluye que $\iota : R \rightarrow \text{End}(P_R)$ también lo es. Por consiguiente, $[P] \in \text{PicS}(R)$.

- III) Sean $[P], [Q] \in \text{PicS}(R)$. Supongamos que ${}_R P \simeq {}_R Q$, entonces existe $h : P \rightarrow Q$ isomorfismo de R -módulos a la izquierda. Defina

$$\begin{aligned} h^* : \text{End}({}_R Q) &\longrightarrow \text{End}({}_R P) \\ f &\longmapsto h^{-1} f h \end{aligned}$$

Veamos que h^* es un isomorfismo de anillos. Sea $f \in \text{End}({}_R Q)$ tal que $(h^{-1} f h)(p) = 0$, para todo $p \in P$. Como h^{-1} es inyectiva, entonces $f(h(p)) = 0$. Ahora, sea $q \in Q$, como h es sobreyectiva existe $p_0 \in P$ tal que $h(p_0) = q$. De esta forma, $f(q) = f(h(p_0)) = 0$, para todo $q \in Q$. Por lo que $f = 0$ y h^* es inyectiva. Para la sobreyectividad, sea $g \in \text{End}({}_R P)$. Tomando $f = h g h^{-1}$, es claro que $h^*(f) = g$ y con esto concluimos lo deseado.

Por hipótesis, sabemos que $[P], [Q] \in \text{PicS}(R)$ así que por el ítem I de esta proposición existen e_P y e_Q idempotentes centrales de R tales que $\text{Ann}(P_R) = R e_P$, $\text{Ann}(Q_R) = R e_Q$,

$$\tau_P : R(1_R - e_P) \rightarrow \text{End}({}_R P) \quad \text{y} \quad \tau_Q : R(1_R - e_Q) \rightarrow \text{End}({}_R Q)$$

son isomorfismos de R -bimódulos. Definamos $\theta : R(1_R - e_Q) \rightarrow R(1_R - e_P)$, dado

por $\theta = \tau_P^{-1}h^*\tau_Q$. Es claro que θ es un biyección de ideales en R que preserva la suma. Sea $t_Q \in R(1_R - e_Q)$. Llamemos $t_P = \theta(t_Q)$, entonces $\tau_P(t_P) = h^*(\tau_Q(t_Q))$. Para simplificar notación escribaremos τ_{t_P} en vez de $\tau_P(t_P)$. Por lo anterior,

$$\tau_{t_Q}h = h\tau_{t_P}.$$

Así,

$$h(x)t_Q = h(xt_P) = h(x\theta(t_Q)), \quad \forall x \in P. \quad (1.3)$$

Con esto probaremos que θ preserva el producto. Sean $t_Q, t'_Q \in R(1_R - e_Q)$, $\theta(t_Q) = t_P$, $\theta(t'_Q) = t'_P$ y $\theta(t_Q t'_Q) = t''_P$. Afirmamos que $t_P t'_P - t''_P \in \text{Ann}(P_R)$. En efecto, sea $x \in P$

$$\begin{aligned} h(x(t_P t'_P - t''_P)) &= h(xt_P t'_P) - h(xt''_P) \stackrel{(1.3)}{=} h(xt_P)t'_Q - h(x)t_Q t'_Q \\ &\stackrel{(1.3)}{=} h(x)t_Q t'_Q - h(x)t_Q t'_Q = 0. \end{aligned}$$

Como h es inyectiva, $x(t_P t'_P - t''_P) = 0$. Esto implica que $t_P t'_P - t''_P \in Re_P \cap R(1_R - e_P) = \{0\}$ y así, $\theta(t_Q)\theta(t'_Q) = \theta(t_Q t'_Q)$. Por otro lado, como $e_P \in \text{Ann}(P_R)$ entonces dado $x \in P$ tenemos que $x(1 - e_P) = x - xe_P = x$. Así, ${}_{id}P_\theta$ es un R -bimódulo unitario. Resta ver que $Q \simeq {}_{id}P_\theta$. Sea $r \in R$,

$$h(x \cdot r) = h(x\theta(r(1 - e_Q))) \stackrel{(1.3)}{=} h(x)r(1 - e_Q) = h(x)r.$$

Por lo tanto, h es un isomorfismo de R -bimódulos entre Q y ${}_{id}P_\theta$. La recíproca es inmediata.

iv) Por hipótesis, M es un ideal unitario de R , y así, el Lema 1.4.8 implica que $[M] \in \text{PicS}(R)$. Veamos que M_θ es pfg. Sea $\{m_i, f_i\}_{i \leq n}$ base dual de M_R . Considere

$$\begin{aligned} \varphi_i : M_\theta &\longrightarrow R \\ m &\longmapsto \theta^{-1}(f_i(m)1_\theta) \end{aligned}$$

para cada $i \leq n$. Note que para todo $m \in M_\theta$ y $r \in R$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\varphi_i(m \cdot r) &= \theta^{-1}(f_i(m\theta(r1_{\theta^{-1}}))1_\theta) = \theta^{-1}(f_i(m)\theta(r1_{\theta^{-1}})1_\theta) \\ &= \theta^{-1}(f_i(m)1_\theta)\theta^{-1}(\theta(r1_{\theta^{-1}})) = \theta^{-1}(f_i(m)1_\theta)r1_{\theta^{-1}} \\ &= \theta^{-1}(f_i(m)1_\theta)r = \varphi_i(m)r.\end{aligned}$$

Luego, $\varphi_i \in {}^*M_\theta$. Mas aún,

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \varphi_i(m) = \sum_{i=1}^n m_i \theta(\theta^{-1}(f_i(m)1_\theta)) = \sum_{i=1}^n m_i f_i(m)1_\theta = \sum_{i=1}^n m_i f_i(m) = m.$$

Entonces, $\{m_i, \varphi_i\}_{i \leq n}$ es base dual de M_θ . Ahora, veamos que $\iota : R \rightarrow \text{End}(M_\theta)$ es un epimorfismo. Como M_R es pfg, entonces $\iota : M \rightarrow \text{End}(M_R)$ es un epimorfismo por lo que basta probar que $\text{End}(M_\theta) = \text{End}(M_R)$. Es claro que $\text{End}(M_R) \subseteq \text{End}(M_\theta)$. Luego, sea $f \in \text{End}(M_\theta)$, entonces

$$f(m\theta(r1_{\theta^{-1}})) = f(m \cdot r) = f(m) \cdot r = f(m)\theta(r1_{\theta^{-1}}) \quad \forall r \in R, \forall m \in M.$$

Como θ es biyectiva, $f(m)s = f(ms)$, para todo $m \in M$ y $s \in R1_\theta$. Así, para todo $r \in R$ tenemos que $f(mr) = f(mr1_\theta) = f(m)r1_\theta = f(m)r$ y por lo tanto, $f \in \text{End}(M_R)$. Por último, veamos que

$$\begin{aligned}\tau : R &\longrightarrow \text{End}({}_R M) \\ r &\longmapsto m \longmapsto m \cdot r\end{aligned}$$

es sobreyectiva. Sea $f \in \text{End}({}_R M)$, como M es pfg como R -bimódulo existe $r \in R$ tal que $f(m) = mr$, para todo $m \in M$. Además, como θ es sobreyectiva, existe $r' \in R$ tal que $\theta(r'1_{\theta^{-1}}) = r1_\theta$ y así,

$$f(m) = mr = mr1_\theta = m\theta(r'1_{\theta^{-1}}) = m \cdot r'.$$

Por consiguiente, $\tau(r') = f$. De esta manera, $[\text{id}M_\theta] \in \text{PicS}(R)$, y análogamente, probamos que $[\theta M_{\text{id}}] \in \text{PicS}(R)$.

- v) a) Como S es épsilon-fuertemente graduado tenemos que $\epsilon_g s = s = s\epsilon_{g^{-1}}$, para todo $s \in S_g$ y así, S_g es un $(R\epsilon_g, R\epsilon_{g^{-1}})$ -bimódulo unitario, para todo $g \in G$. Veamos que la sextupla $(R\epsilon_g, R\epsilon_{g^{-1}}, S_g, S_{g^{-1}}, m_{g,g^{-1}}, m_{g^{-1},g})$ es un contexto de

Morita estricto con

$$\begin{aligned} m_{g,g^{-1}} : S_g \otimes_{R\epsilon_{g^{-1}}} S_{g^{-1}} &\longrightarrow R\epsilon_g \\ x \otimes y &\longmapsto xy \end{aligned}$$

para todo $g \in G$. Note que $m_{g,g^{-1}}$ está bien definida pues $S_g S_{g^{-1}} \subseteq R$ y $xy\epsilon_g = x(y\epsilon_g) = xy$. Por otro lado,

$$m_{g,g^{-1}}(x \otimes y)x' = xyx' = xm_{g^{-1},g}(y \otimes x') \quad \mathbf{y} \quad m_{g^{-1},g}(y \otimes x)y' = yxy' = ym_{g,g^{-1}}(x \otimes y').$$

Luego, dicha sextupla es un contexto de Morita por lo que para ser estricto solo nos falta probar que $m_{g,g^{-1}}$ es sobreyectiva. Sea $g \in G$, como $\epsilon_g \in S_g S_{g^{-1}}$ existen $n_g \in \mathbb{N}$, $u_g^{(i)} \in S_g$ y $v_{g^{-1}}^{(i)}$, tales que:

$$\epsilon_g = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} v_{g^{-1}}^{(i)}.$$

Así, dado $r \in R$ tenemos:

$$m_{g,g^{-1}} \left(\sum_{i=1}^{n_g} r u_g^{(i)} \otimes v_{g^{-1}}^{(i)} \right) = r \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} v_{g^{-1}}^{(i)} = r \epsilon_g.$$

De esta forma, $(R\epsilon_g, R\epsilon_{g^{-1}}, S_g, S_{g^{-1}}, m_{g,g^{-1}}, m_{g^{-1},g})$ es un contexto de Morita estricto y por el ítem III es esta proposición, $[S_g] \in \text{PicS}(R)$, para todo $g \in G$.

b) Sea $g \in G$. Por el ítem 5a), $[S_g] \in \text{PicS}(R)$ y por lo tanto, el ítem 1b) implica que existe $e_2 \in R$ tal que $\text{Ann}({}_R S_g) = R e_2$ y la función $\iota : R(1_R - e_2) \rightarrow \text{End}(S_{gR})$ es un isomorfismo de R -bimódulos. Veamos que $e_2 = 1_R - \epsilon_g$. Es claro que $1_R - \epsilon_g \in \text{Ann}({}_R S_g)$. Ahora, si $r \in R$ tal que $rx = 0$ para todo $x \in S_g$. Entonces

$$r \epsilon_g = \sum_{i=1}^{n_g} r u_g^{(i)} v_{g^{-1}}^{(i)} = 0.$$

De esta forma, $r(1 - \epsilon_g) = r - r \epsilon_g = r$. Esto es, $r \in R(1 - \epsilon_g)$. Así, $\iota : R\epsilon_g \rightarrow \text{End}(S_{gR})$ es un isomorfismo de R -bimódulos.

□

2. Anillos ϵ -fuertemente graduados y cohomología parcial de grupos

Los resultados más importantes de este capítulo, cuyos argumentos hemos desarrollado y completado, corresponden a los Teoremas 2.1.17, 2.2.4, 2.3.18 y 2.4.2. Para precisar estos detalles, consultamos las referencias ¹¹, ¹² y ¹, de las cuales obtuvimos herramientas y nociones relacionadas con las acciones parciales, tales como acciones parciales torcidas, productos cruzados generalizados y representaciones parciales.

2.1. Anillos ϵ -fuertemente graduados que son álgebras de Azumaya

Comenzamos esta sección recordando el concepto de R -álgebras, haciendo énfasis en el centro de estas álgebras y en el concepto de separabilidad, con el objetivo de comprender que significa que un álgebra sea de Azumaya.

Definición 2.1.1. Sea R un anillo conmutativo. Decimos que un anillo A es una R -álgebra si A es un R -módulo y la multiplicación por escalar satisface que:

$$r \cdot (xy) = (r \cdot x)y = x(r \cdot y),$$

para todo $r \in R, x, y \in A$.

Usando la última propiedad, podemos identificar a R en el álgebra A mediante el subanillo $R \cdot 1_A$, y como R es conmutativo, tenemos que $R \subseteq Z(A)$.

Definición 2.1.2. Sea A un anillo. Definimos el anillo opuesto A^O de A como el mismo conjunto A , con la misma operación de suma, pero cuya multiplicación está dada por

$$a \cdot b = ba, \quad \text{para todo } a, b \in A.$$

Es fácil ver que si A es una R -álgebra, entonces su anillo opuesto A^O es también una R -álgebra.

¹¹ M. DOKUCHAEV et al. "Partial generalized crossed products and a seven-term exact sequence". En: *Journal of Algebra* 572 (2021), págs. 195-230.

¹² M DOKUCHAEV e I. ROCHA. *Partial generalized crossed products and a seven term exact sequence (expanded version)*. 2021. URL: <https://arxiv.org/abs/2105.01268>.

Proposición 2.1.3. Sean A, B R -álgebras. Entonces, el producto tensorial $A \otimes_R B$ es una R -álgebra.

Demostración. Como A y B son R -bimódulos, entonces $A \otimes_R B$ es un R -módulo con la acción definida en la Observación 1.3.14. Ahora dotaremos a $A \otimes_R B$ de una estructura de anillo con el producto definido en los tensores elementales por:

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2,$$

y lo extendemos linealmente a todos los elementos de $A \otimes_R B$. La prueba de que esta operación está bien definida puede consultarse en ¹³, Proposición 9.99. Además, note que si $r \in R$, $a_1, a_2 \in A$ y $b_1, b_2 \in B$ tenemos que:

$$r \cdot (a_1 a_2 \otimes b_1 b_2) = (r a_1 a_2) \otimes b_1 b_2 = (r a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (r \cdot (a_1 \otimes b_1))(a_2 \otimes b_2),$$

y análogamente, $r \cdot (a_1 a_2 \otimes b_1 b_2) = (a_1 \otimes b_1)(r \cdot (a_2 \otimes b_2))$. Luego, $A \otimes_R B$ es una R -álgebra. \square

Si A es una R -álgebra, entonces $A \otimes_R A^O$ es una R -álgebra llamada **álgebra envolvente** de A y la denotaremos por A^E .

Proposición 2.1.4. Sea A una R -álgebra, entonces A es un A^E -módulo vía:

$$(a \otimes b)x = axb \tag{2.1}$$

para todo $a, b, x \in A$. Además, la función:

$$\begin{aligned} \mu : A^E &\longrightarrow A \\ a \otimes b &\longmapsto ab \end{aligned}$$

es un epimorfismo de A^E -módulos.

Demostración. En primer lugar, note que

$$(ar \otimes b)x = arxb = axrb = (a \otimes rb)x,$$

para todo $a, b, x \in A, r \in R$. Luego, por la Observación 1.3.15, la operación (2.1) está bien

¹³ J. ROTMAN. *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall, 2002.

definida. Por otro lado, tenemos que

$$(a \otimes b)(x + y) = a(x + y)b = axb + ayb = (a \otimes b)x + (a \otimes b)y,$$

$$((a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2))x = (a_1a_2 \otimes b_2b_1)x = a_1a_2xb_2b_1 = (a_1 \otimes b_1)(a_2xb_2) = (a_1 \otimes b_1)((a_2 \otimes b_2)x).$$

Luego, A es un A^E -módulo a la izquierda. Es claro que μ es un homomorfismo y es sobreyectiva pues $\mu(a \otimes 1_A) = a$. \square

Definición 2.1.5. Sea A una R -álgebra. Decimos que A es **separable** sobre R si la sucesión exacta:

$$0 \rightarrow \text{Ker}(\mu) \rightarrow A^E \xrightarrow{\mu} A \rightarrow 0$$

escinde.

Definición 2.1.6. Una álgebra A sobre un anillo conmutativo R es **Azumaya** si $Z(A) = R$ y A es separable sobre R .

Definición 2.1.7. Sean R un anillo conmutativo y $\alpha = (D_g, \alpha_g)_{g \in G}$ una acción parcial de G en R . El **subconjunto de elementos invariantes de R respecto a α** es

$$R^\alpha = \{r \in R \mid \alpha_g(r1_{g^{-1}}) = r1_g, \text{ para todo } g \in G\}.$$

Además, definimos los siguientes submonoides de $\text{PicS}(R)$:

$$\text{PicS}_{R^\alpha}(R) = \{[P] \in \text{PicS}(R) \mid rp = pr \forall p \in P, r \in R^\alpha\}.$$

$$\text{PicS}_R(R) = \{[P] \in \text{PicS}(R) \mid rp = pr \forall p \in P, r \in R\}.$$

Es fácil mostrar que R^α es subanillo de R y que $\text{PicS}_R(R) \subseteq \text{PicS}_{R^\alpha}(R)$.

Ejemplo 2.1.8. Sean $S = \bigoplus_{g \in G} S_g$ un anillo épsilon-fuertemente graduado con $R = S_e$ conmutativo y γ la acción parcial de G en R definida en la Sección 1.2. Entonces S es una R^γ -álgebra. En efecto, sean $r \in R^\gamma, x \in S$. Escribamos $x = \sum_{g \in G} x_g$, entonces

$$xr = \sum_{g \in G} x_g r \stackrel{(1.1)}{=} \sum_{g \in G} \gamma_g(r \epsilon_{g^{-1}}) x_g = \sum_{g \in G} r \epsilon_g x_g = rx.$$

Así, para todo $r \in R^\gamma, x, y \in S$ tenemos que $r(xy) = (rx)y = x(ry)$. Por lo tanto, S es una R^γ -álgebra.

Proposición 2.1.9. *Sea R un anillo conmutativo. Entonces $\text{PicS}_R(R)$ es un monoide conmutativo, y en el caso de que $S = \bigoplus_{g \in G} S_g$ sea un anillo ϵ -fuertemente graduado con $R = S_e$ conmutativo, tenemos que $[R\epsilon_g] \in \text{PicS}_R(R)$.*

Demostración. Es sencillo ver que si $[P], [Q] \in \text{PicS}_R(R)$, entonces $[P \otimes_R Q] \in \text{PicS}_R(R)$. Veamos que $\text{PicS}_R(R)$ es conmutativo. Esto es, $P \otimes_R Q \simeq Q \otimes_R P$. Tome

$$\begin{aligned} f : P \otimes_R Q &\longrightarrow Q \otimes_R P \\ p \otimes q &\longmapsto q \otimes p. \end{aligned}$$

Note que $f(rp \otimes q) = q \otimes rp = qr \otimes p = r(q \otimes p)$ y $f(p \otimes qr) = qr \otimes p = q \otimes rp = (q \otimes p)r$. Por tanto, f es un homomorfismo de R -bimódulos. Además, es claro que la inversa de esta función es

$$\begin{aligned} Q \otimes_R P &\longrightarrow P \otimes_R Q \\ q \otimes p &\longmapsto p \otimes q. \end{aligned}$$

Luego, f es un isomorfismo de R -bimódulos. De esta forma, $P \otimes_R Q \simeq Q \otimes_R P$. Por último, como $R\epsilon_g$ es un ideal con unidad de R , el Lema 1.4.8 implica que $[R\epsilon_g] \in \text{PicS}(R)$ y como $\epsilon_g \in Z(R)$, concluimos que $[R\epsilon_g] \in \text{PicS}_R(R)$. \square

Definición 2.1.10. Sea G un grupo. Una **representación parcial unitaria** de G a un monoide S es una función $\Phi : G \rightarrow S$ que satisface las siguientes condiciones para todo $g, h \in G$

- I) $\Phi(e) = 1_S$;
- II) $\Phi(g^{-1})\Phi(g)\Phi(h) = \Phi(g^{-1})\Phi(gh)$;
- III) $\Phi(g)\Phi(h)\Phi(h^{-1}) = \Phi(gh)\Phi(h^{-1})$.

Proposición 2.1.11. *Sea $S = \bigoplus_{g \in G} S_g$ un anillo ϵ -fuertemente graduado con $R = S_e$ conmutativo. Entonces la función dada por:*

$$\begin{aligned} \Phi : G &\longrightarrow \text{PicS}(R) \\ g &\longmapsto [S_g] \end{aligned}$$

es una representación parcial unitaria con $\Phi(g)\Phi(g^{-1}) = [R\epsilon_g]$

Demostración. Es claro que $\Phi(e) = [R]$. Veamos que $\Phi(g)\Phi(h) = [\epsilon_g S_{gh}]$. Sea

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} : S_g \otimes_R S_h &\longrightarrow \epsilon_g S_{gh} \\ x \otimes y &\longmapsto \epsilon_g xy \end{aligned}$$

Note que $\mathfrak{m}(S_g \otimes S_h) = \epsilon_g S_g S_h = S_g S_h = \epsilon_g S_{gh}$, por tanto \mathfrak{m} es sobreyectiva. Ahora, sea $\sum_i x_i \otimes y_i \in \text{Ker}(\mathfrak{m})$, entonces $\epsilon_g \sum_i x_i y_i = 0$. Escribamos $\epsilon_g = \sum_j u_g^{(j)} v_{g^{-1}}^{(j)}$. Así,

$$\sum_i x_i \otimes y_i = \sum_i \epsilon_g x_i \otimes y_i = \sum_{i,j} u_g^{(j)} v_{g^{-1}}^{(j)} x_i \otimes y_i = \sum_j u_g^{(j)} \otimes v_{g^{-1}}^{(j)} \sum_i \epsilon_g x_i y_i = 0.$$

Luego, $\Phi(g)\Phi(g^{-1}) = [R\epsilon_g]$ y de esta forma,

$$\Phi(g^{-1})\Phi(g)\Phi(h) = [R\epsilon_{g^{-1}}][S_h] = [R\epsilon_{g^{-1}} \otimes_R S_h] = [\epsilon_{g^{-1}} S_h] = \Phi(g^{-1})\Phi(gh).$$

Análogamente, se muestra que $\Phi(g)\Phi(h)\Phi(h^{-1}) = \Phi(gh)\Phi(h^{-1})$. Por lo que Φ es una representación parcial unitaria. \square

Sean R un anillo y $\Theta : G \rightarrow \text{PicS}(R)$ una representación parcial. Para cada $g \in G$, fijemos un representante Θ_g de las clases de isomorfismos de $\Theta(g) \in \text{PicS}(R)$. Decimos que esta representación es **unitaria**, si para todo $g \in G$, $[\Theta_g][\Theta_{g^{-1}}] = [R1_g]$, donde 1_g es un idempotente central de R . Por ¹², Lema 3.8, existe una familia de isomorfismos de R -bimódulos

$$f^\Theta = \{f_{g,h}^\Theta : \Theta_g \otimes_R \Theta_h \rightarrow 1_g \Theta_{gh} : g, h \in G\}.$$

Dicha familia es llamada un **conjunto factor** para Θ . Bajo estas condiciones definamos $\Delta(\Theta) = \bigoplus_{g \in G} \Theta_g$. Este conjunto es un anillo con la multiplicación definida por:

$$u_g *_{\Theta} u_h = f_{g,h}^\Theta(u_g \otimes u_h) \in 1_g \Theta_{gh},$$

y es llamado un **producto cruzado parcial generalizado** (Ver ¹², Proposición 3.14).

En nuestro contexto, tenemos que para la representación parcial unitaria Φ definida en la Proposición 2.1.11, $\Phi_g = S_g$ y $1_g = \epsilon_g$, para todo $g \in G$. Además, los isomorfismos de R -bimódulos están dados por: $f_{g,h}^\Phi(s_g \otimes s_h) = \epsilon_g s_g s_h$. De esta forma, $s_g *_{\Phi} s_h = \epsilon_g s_g s_h$. Como $\epsilon_g s_g = s_g$, para todo $s_g \in S_g$ tenemos que $s_g *_{\Phi} s_h = s_g s_h$ y por lo tanto, el siguiente resultado.

Lema 2.1.12. Sea Φ la representación parcial unitaria de G en $\text{PicS}(R)$ definida en la Proposición 2.1.11. Entonces $\Delta(\Phi) = S$.

Sea $\alpha = (D_g, \alpha_g)_{g \in G}$ una acción parcial de G en R . A partir de esta acción, en ¹¹, se construyó la representación parcial

$$\begin{aligned} \Phi_0 : G &\longrightarrow \text{PicS}_{R^\alpha}(R) \\ g &\longmapsto [\alpha_{g^{-1}}(D_{g^{-1}})id] \end{aligned}$$

y, $\alpha^* = (X_g, \alpha_g^*)_{g \in G}$, una acción parcial de G en $\text{PicS}_R(R)$.

Definición 2.1.13. Sea α una acción parcial unitaria de G sobre un anillo R . La extensión de anillo $R \supseteq R^\alpha$ es una **extensión parcial de Galois**, si existe un entero positivo m y elementos $x_i, y_i \in R$, $1 \leq i \leq m$ tales que:

$$\sum_{i=1}^m x_i \alpha_g(y_i 1_{g^{-1}}) = \delta_{e,g}, \quad \text{para todo } g \in G.$$

El conjunto $\{x_i, y_i\}_{i=1}^m$ es llamado el sistema de coordenadas de Galois parciales de la extensión $R \supseteq R^\alpha$

Proposición 2.1.14. Supongamos que $R \supseteq R^\alpha$ es una extensión parcial de Galois. Sea $f \in Z^1(G, \alpha^*, \text{PicS}_R(R))$, entonces $f\Phi_0$ es una representación parcial unitaria de G en $\text{PicS}(R)$ y el producto cruzado parcial generalizado $\Delta(f\Phi_0)$ es una R^α -álgebra Azumaya que contiene a R como una subálgebra conmutativa maximal.

Demostración. Ver ¹¹, Proposición 6.3 □

Para el resto de la sección, consideraremos a $S = \bigoplus_{g \in G} S_g$ un anillo épsilon-fuertemente graduado con $R = S_e$, conmutativo, y a γ la acción parcial de G en R definida en la Sección 1.2. A continuación mostraremos en detalle la construcción de Φ_0 y α^* para nuestra acción parcial γ .

Lema 2.1.15. La función

$$\begin{aligned} \Phi_0 : G &\longrightarrow \text{PicS}_{R^\gamma}(R) \\ g &\longmapsto [\gamma_{g^{-1}} R \epsilon_{g^{-1}} id] \end{aligned}$$

es una representación parcial de G que satisface las siguientes propiedades:

1) $\Phi_0(g)\Phi_0(g^{-1}) = [R \epsilon_g];$

$$\text{II) } \Phi_0(g)[R\epsilon_h] = [R\epsilon_{gh}]\Phi_0(g);$$

$$\text{III) } \Phi_0(g)[R\epsilon_{g^{-1}}] = \Phi_0(g) = [R\epsilon_g]\Phi_0(g);$$

$$\text{IV) } \Phi_0(g)\Phi_0(h) = [R\epsilon_g]\Phi_0(gh) = \Phi_0(gh)[R\epsilon_{h^{-1}}];$$

para todo $g, h \in G$.

Demostración. Sea $g \in G$. Por el ítem IV de la Proposición 1.4.9 se tiene que $[\gamma_{g^{-1}}R\epsilon_{g^{-1}id}] \in \text{PicS}(R)$. Sea $x \in R\epsilon_{g^{-1}}$ y $r \in R^\gamma$, entonces

$$r \cdot x = \gamma_{g^{-1}}(r\epsilon_g)x = r\epsilon_{g^{-1}}x = rx = xr.$$

Esto implica que $[\gamma_{g^{-1}}R\epsilon_{g^{-1}id}] \in \text{PicS}_{R^\gamma}(R)$ y por lo tanto, Φ_0 está bien definida. Probaremos que dicha función es una representación parcial. En primer lugar, γ_e es la identidad de R y por consiguiente, $\Phi_0(e) = [R]$. Por otro lado, queremos mostrar que para todo $g, h \in G$, $\Phi_0(g^{-1})\Phi_0(g)\Phi_0(h) = \Phi_0(g^{-1})\Phi_0(gh)$. Esto es,

$$\gamma_g R\epsilon_{gid} \otimes \gamma_{g^{-1}} R\epsilon_{g^{-1}id} \otimes \gamma_{h^{-1}} R\epsilon_{h^{-1}id} \simeq \gamma_g R\epsilon_{gid} \otimes \gamma_{(gh)^{-1}} R\epsilon_{(gh)^{-1}id}.$$

Para esto, considere la siguiente función:

$$\begin{aligned} \phi_{g,h} : \quad & \gamma_g R\epsilon_{gid} \otimes \gamma_{g^{-1}} R\epsilon_{g^{-1}id} \otimes \gamma_{h^{-1}} R\epsilon_{h^{-1}id} \longrightarrow \gamma_g R\epsilon_{gid} \otimes \gamma_{(gh)^{-1}} R\epsilon_{(gh)^{-1}id} \\ & a_g \otimes b_{g^{-1}} \otimes c_{h^{-1}} \longmapsto a_g \otimes \gamma_{h^{-1}}(b_{g^{-1}}\epsilon_h)c_{h^{-1}} \end{aligned}$$

Esta función está bien definida pues

$$\gamma_h(\gamma_{h^{-1}}(b_{g^{-1}}\epsilon_h)c_{h^{-1}}) = \gamma_h(\gamma_{h^{-1}}(b_{g^{-1}}\epsilon_h))\gamma_h(c_{h^{-1}}) = b_{g^{-1}}\epsilon_h\gamma_h(c_{h^{-1}}) \in R\epsilon_{g^{-1}},$$

y por la propiedad II de acción parcial, $\gamma_h^{-1}(R\epsilon_h \cap R\epsilon_g) \subseteq R\epsilon_{(gh)^{-1}}$. Luego, $\gamma_{h^{-1}}(b_{g^{-1}}\epsilon_h)c_{h^{-1}} \in R\epsilon_{(gh)^{-1}}$. Afirmamos que $\phi_{g,h}$ es un homomorfismo de R -bimódulos. En efecto,

$$\begin{aligned} \phi_{g,h}(r_1 \cdot a_g \otimes b_{g^{-1}} \otimes c_{h^{-1}}r_2) &= \phi_{g,h}(\gamma_g(r_1\epsilon_{g^{-1}})a_g \otimes b_{g^{-1}} \otimes c_{h^{-1}}r_2) \\ &= \gamma_g(r_1\epsilon_{g^{-1}})a_g \otimes \gamma_{h^{-1}}(b_{g^{-1}}\epsilon_h)c_{h^{-1}}r_2 \\ &= r_1 \cdot a_g \otimes \gamma_{h^{-1}}(b_{g^{-1}}\epsilon_h)c_{h^{-1}}r_2 \\ &= r_1 \cdot \phi_{g,h}(a_g \otimes b_{g^{-1}} \otimes c_{h^{-1}})r_2. \end{aligned}$$

Ahora, considere

$$\begin{aligned} \psi_{g,h} : \quad \gamma_g R\epsilon_{g \text{id}} \otimes \gamma_{(gh)^{-1}} R\epsilon_{(gh)^{-1} \text{id}} &\longrightarrow \gamma_g R\epsilon_{g \text{id}} \otimes \gamma_{g^{-1}} R\epsilon_{g^{-1} \text{id}} \otimes \gamma_{h^{-1}} R\epsilon_{h^{-1} \text{id}} \\ a_g \otimes b_{(gh)^{-1}} &\longmapsto a_g \otimes \gamma_h(b_{(gh)^{-1} \epsilon_{h^{-1}}}) \otimes \epsilon_{h^{-1}}. \end{aligned}$$

Note que $\gamma_{h^{-1}}(\gamma_h(b_{(gh)^{-1} \epsilon_{h^{-1}}})) = b_{(gh)^{-1} \epsilon_h} \in R\epsilon_{(gh)^{-1}}$ y por la propiedad II de acción parcial, $\gamma_{h^{-1}}^{-1}(R\epsilon_{h^{-1}} \cap R\epsilon_{(gh)^{-1}}) \subseteq R\epsilon_{g^{-1}}$. Esto es, $\psi_{g,h}$ está bien definida. A continuación comprobaremos que $\psi_{g,h}$ es la inversa de $\phi_{g,h}$. Sean $a_g \in R\epsilon_g$, $b_{g^{-1}} \in R\epsilon_{g^{-1}}$, $c_{h^{-1}} \in R\epsilon_{h^{-1}}$, $b_{(gh)^{-1}} \in R\epsilon_{(gh)^{-1}}$, entonces

$$\begin{aligned} \psi_{g,h}(\phi_{g,h}(a_g \otimes b_{g^{-1}} \otimes c_{h^{-1}})) &= a_g \otimes \gamma_h(\gamma_{h^{-1}}(b_{g^{-1} \epsilon_h})c_{h^{-1} \epsilon_{h^{-1}}}) \otimes \epsilon_{h^{-1}} \\ &= a_g \otimes b_{g^{-1} \epsilon_h} \gamma_h(c_{h^{-1} \epsilon_{h^{-1}}}) \otimes \epsilon_{h^{-1}} \\ &= a_g \otimes b_{g^{-1}} \otimes \epsilon_h \gamma_h(c_{h^{-1} \epsilon_{h^{-1}}}) \cdot \epsilon_{h^{-1}} \\ &= a_g \otimes b_{g^{-1}} \otimes \gamma_{h^{-1}}(\gamma_h(c_{h^{-1} \epsilon_{h^{-1}}}) \epsilon_h) \epsilon_{h^{-1}} \\ &= a_g \otimes b_{g^{-1}} \otimes c_{h^{-1} \epsilon_{h^{-1}}} \\ &= a_g \otimes b_{g^{-1}} \otimes c_{h^{-1}}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \phi_{g,h}(\psi_{g,h}(a_g \otimes b_{(gh)^{-1}})) &= a_g \otimes \gamma_{h^{-1}}(\gamma_h(b_{(gh)^{-1} \epsilon_{h^{-1}}}) \epsilon_{h^{-1}}) \epsilon_{h^{-1}} = a_g \otimes b_{(gh)^{-1} \epsilon_{h^{-1}}} \\ &= a_g \otimes \epsilon_{(gh)^{-1} g} \epsilon_{(gh)^{-1}} b_{(gh)^{-1}} = a_g \otimes \gamma_{(gh)^{-1}}(\epsilon_g \epsilon_{gh}) b_{(gh)^{-1}} \\ &= a_g \otimes \epsilon_g \cdot b_{(gh)^{-1}} = a_g \epsilon_g \otimes b_{(gh)^{-1}} \\ &= a_g \otimes b_{(gh)^{-1}}. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\phi_{g,h}$ es un isomorfismo R -bimódulos. Similarmente, probamos que $\Phi_0(g)\Phi_0(h)\Phi_0(h^{-1}) = \Phi_0(gh)\Phi_0(h^{-1})$. Con esto concluimos que Φ_0 es una representación parcial de G . Probaremos que se cumplen las cuatro propiedades. Sea $g \in G$, considere

$$\begin{aligned} f : \quad \gamma_{g^{-1}} R\epsilon_{g^{-1} \text{id}} \otimes_{\gamma_g} R\epsilon_{g \text{id}} &\longrightarrow R\epsilon_g \\ a_{g^{-1}} \otimes b_g &\longmapsto \gamma_g(a_{g^{-1}})b_g. \end{aligned}$$

Es sencillo ver que f es un homomorfismo de R -bimódulos. Definamos

$$\begin{aligned} h : \quad R\epsilon_g &\longrightarrow \gamma_{g^{-1}} R\epsilon_{g^{-1} \text{id}} \otimes_{\gamma_g} R\epsilon_{g \text{id}} \\ a_g &\longmapsto \epsilon_{g^{-1}} \otimes a_g. \end{aligned}$$

Note que

$$f(h(a_g)) = f(\epsilon_{g^{-1}} \otimes a_g) = \gamma_g(\epsilon_{g^{-1}})a_g = \epsilon_g a_g,$$

$$h(f(a_{g^{-1}} \otimes b_g)) = \epsilon_{g^{-1}} \otimes \gamma_g(a_{g^{-1}})b_g = \epsilon_{g^{-1}} \otimes a_{g^{-1}} \cdot b_g = \epsilon_{g^{-1}} a_{g^{-1}} \otimes b_g = a_{g^{-1}} \otimes b_g.$$

Por lo tanto, h es la inversa de f y así, $[\gamma_{g^{-1}} R\epsilon_{g^{-1}id} \otimes_{\gamma_g} R\epsilon_{gid}] = [R\epsilon_g]$. Es decir, hemos probado la propiedad I. Veamos II. Sean $g, h \in G$. Usando la propiedad anterior y el hecho de que Φ_0 es una representación parcial, obtenemos:

$$\begin{aligned} \Phi_0(g)[R\epsilon_h] &= \Phi_0(g)\Phi_0(h)\Phi_0(h^{-1}) = \Phi_0(gh)\Phi_0(h^{-1}) \\ &= \Phi_0(gh)\Phi_0((gh)^{-1})\Phi_0(gh)\Phi_0(h^{-1}) \\ &= \Phi_0(gh)\Phi_0((gh)^{-1})\Phi_0(g) = [R\epsilon_{(gh)^{-1}}]\Phi_0(g). \end{aligned}$$

Es claro que el ítem III es consecuencia directa del ítem II. Finalmente, probaremos la propiedad IV. Sean $g, h \in G$, entonces:

$$\Phi_0(g)\Phi_0(h) = \Phi_0(g)\Phi_0(g^{-1})\Phi_0(g)\Phi_0(h) = \Phi_0(g)\Phi_0(g^{-1})\Phi_0(gh) \stackrel{I}{=} [R\epsilon_g]\Phi_0(gh).$$

Además, tomando $g = gh$ y $h = h^{-1}$ en la propiedad II, concluimos que $\Phi_0(gh)[R\epsilon_{h^{-1}}] = [R\epsilon_g]\Phi_0(gh)$. \square

Lema 2.1.16. Sea $g \in G$. Considere el ideal $X_g = [R\epsilon_g]\text{PicS}_R(R)$ y la función

$$\begin{aligned} \gamma_g^* : [R\epsilon_{g^{-1}}]\text{PicS}_R(R) &\longrightarrow [R\epsilon_g]\text{PicS}_R(R) \\ [P] &\longmapsto \Phi_0(g)[P]\Phi_0(g^{-1}) \end{aligned}$$

entonces $\gamma^* = (X_g, \gamma_g^*)_{g \in G}$ es una acción parcial de G en el monoide conmutativo $\text{PicS}_R(R)$.

Demostración. Note que dado $a_{g^{-1}} \otimes p \otimes b_g \in \gamma_{g^{-1}} R\epsilon_{g^{-1}id} \otimes P \otimes_{\gamma_g} R\epsilon_{gid}$ y $r \in R$, tenemos que

$$\begin{aligned} r \cdot (a_{g^{-1}} \otimes p \otimes b_g) &= \gamma_{g^{-1}}(r\epsilon_g)a_{g^{-1}} \otimes p \otimes b_g \\ &= a_{g^{-1}} \otimes \gamma_{g^{-1}}(r\epsilon_g)p \otimes b_g \\ &= a_{g^{-1}} \otimes p\gamma_{g^{-1}}(r\epsilon_g) \otimes b_g \\ &= a_{g^{-1}} \otimes p \otimes \gamma_g(\gamma_{g^{-1}}(r\epsilon_g))b_g \\ &= a_{g^{-1}} \otimes p \otimes rb_g = (a_{g^{-1}} \otimes p \otimes b_g)r. \end{aligned}$$

Luego, $\Phi_0(g)[P]\Phi_0(g^{-1}) \in \text{PicS}_R(R)$. Además, de la propiedad I del Lema 2.1.15, tenemos que $[R\epsilon_g]\Phi_0(g)[P]\Phi_0(g^{-1}) = \Phi_0(g)[P]\Phi_0(g^{-1})$ y por lo tanto, la función γ_g^* está bien definida. Por otro lado, dados $[P], [Q] \in X_{g^{-1}}$ tenemos que

$$\gamma_g^*([P][Q]) = \Phi_0(g)[P][R\epsilon_{g^{-1}}][Q]\Phi_0(g^{-1}) \stackrel{I}{=} \Phi_0(g)[P]\Phi_0(g^{-1})\Phi_0(g)[Q]\Phi_0(g^{-1}) = \gamma_g^*([P])\gamma_g^*([Q]).$$

En consecuencia, γ_g^* es un homomorfismo. Probaremos ahora que es una biyección. Sea $[P] \in X_g, [Q] \in X_{g^{-1}}$, entonces

$$(\gamma_g^* \circ \gamma_{g^{-1}}^*)([P]) = \Phi_0(g)\Phi_0(g^{-1})[P]\Phi_0(g)\Phi_0(g^{-1}) \stackrel{I}{=} [R\epsilon_g][P][R\epsilon_g] = [P] \quad \text{y,}$$

$$(\gamma_{g^{-1}}^* \circ \gamma_g^*)([Q]) = \Phi_0(g^{-1})\Phi_0(g)[Q]\Phi_0(g^{-1})\Phi_0(g) \stackrel{I}{=} [R\epsilon_{g^{-1}}][Q][R\epsilon_{g^{-1}}] = [Q].$$

Esto es, $\gamma_{g^{-1}}^*$ es la función inversa de γ_g . Por otro lado, como $\epsilon_e = 1_R$ es claro que $X_e = \text{PicS}_R(R)$ y γ_e^* es la función identidad de $\text{PicS}_R(R)$. Veamos ahora las propiedades II y III de acción parcial. Sean $g, h \in G$. Debemos mostrar que $(\gamma_h^*)^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}}) \subseteq X_{(gh)^{-1}}$, pero como la función $\gamma_{h^{-1}}^*$ es la inversa de γ_h^* es equivalente mostrar que $\gamma_{h^{-1}}^*(X_h \cap X_{g^{-1}}) \subseteq X_{(gh)^{-1}}$. Sea $[P] \in X_h \cap X_{g^{-1}}$, entonces

$$\begin{aligned} \gamma_{h^{-1}}^*([P]) &= \Phi_0(h)[P]\Phi_0(h^{-1}) = \Phi_0(h)[R\epsilon_{g^{-1}}][P]\Phi_0(h^{-1}) \\ &\stackrel{II}{=} [R\epsilon_{(gh)^{-1}}]\Phi_0(h^{-1})[P]\Phi_0(h^{-1}) = [R\epsilon_{(gh)^{-1}}]\gamma_{h^{-1}}^*([P]). \end{aligned}$$

Luego, $\gamma_{h^{-1}}^*([P]) \in X_{(gh)^{-1}}$. Adicionalmente,

$$\begin{aligned} (\gamma_g^* \circ \gamma_h^*)([P]) &= \Phi_0(g)\Phi_0(h)[P]\Phi_0(h^{-1})\Phi_0(g^{-1}) \stackrel{IV}{=} \Phi_0(gh)[R\epsilon_{h^{-1}}][P][R\epsilon_{h^{-1}}]\Phi_0((gh)^{-1}) \\ &= \Phi_0(gh)[P]\Phi_0((gh)^{-1}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, γ_{gh}^* es una extensión de $\gamma_g^* \circ \gamma_h^*$ y así, concluimos la prueba de que γ^* es una acción parcial de G en $\text{PicS}_R(R)$. \square

Probaremos ahora el resultado más importante de esta sección.

Teorema 2.1.17. *Sean S un anillo ϵ -fuertemente graduado por G . Sea γ la acción parcial de G en R definida en la Proposición 1.2.9. Si $R \supseteq R^\gamma$ es una extensión parcial de Galois, entonces S es una R^γ -álgebra Azumaya que contiene a R como una subálgebra conmutativa maximal.*

Demostración. Primero probaremos que $R^\gamma = Z(S)$. Para esto, afirmamos que

$$R = \{s \in S : sr = rs, \forall r \in R\}.$$

En efecto, sea $s \in S$ tal que $sr = rs$, para todo $r \in R$. Escribamos $s = \sum_{g \in G} s_g$, entonces

$$\sum_{g \in G} r s_g = r s = s r = \sum_{g \in G} s_g r \stackrel{(1.1)}{=} \sum_{g \in G} \gamma_g(r \epsilon_{g^{-1}}) s_g.$$

Esto implica que

$$r s_g = \gamma_g(r \epsilon_{g^{-1}}) s_g, \quad \forall g \in G.$$

Por otro lado, $R \supseteq R^\gamma$ es una extensión parcial de Galois. Luego, existen $x_i, y_i \in R$, $1 \leq i \leq m$ tales que

$$\sum_{i=1}^m x_i \gamma_g(y_i \epsilon_{g^{-1}}) = \delta_{e,g}, \quad \text{para todo } g \in G.$$

Así, para cada $g \neq e$

$$s_g = \sum_{i=1}^m x_i y_i s_g = \sum_{i=1}^m x_i \gamma_g(y_i \epsilon_{g^{-1}}) s_g = 0.$$

Por lo tanto, $s = s_e$, esto es, $s \in R$. Dado que R es conmutativo, la otra contención es inmediata. Por la afirmación anterior, $Z(S) \subseteq R$. Luego, si $r \in Z(S)$ entonces para todo $g \in G$, $s_g \in S_g$ se tiene que

$$r \epsilon_g s_g = s_g r \stackrel{(1.1)}{=} \gamma_g(r \epsilon_{g^{-1}}) s_g.$$

Así, el ítem vb) de la Proposición 1.4.9 implica que para todo $g \in G$, $r \epsilon_g = \gamma_g(r \epsilon_{g^{-1}})$ y así, $R^\gamma = Z(S)$. Ahora, definiremos $f \in Z^1(G, \text{PicS}_R(R))$ para así poder usar la Proposición 2.1.14. Del Ejemplo 1.2.6, tenemos que

$$C^1(G, \text{PicS}_R(R)) = \{f : G \rightarrow \text{PicS}_R(R) : f(g) \in U([R \epsilon_g] \text{PicS}_R(R)), \forall g \in G\}$$

$$Z^1(G, \text{PicS}_R(R)) = \{f \in C^1(G, \text{PicS}_R(R)) : f(gh)[R \epsilon_g] = f(g) \gamma_g^*(f(h)[R \epsilon_{g^{-1}}]), \forall g, h \in G\}.$$

Para cada $g \in G$, definimos $M_g = S_g \otimes_{\gamma_g} R \epsilon_{g \text{id}}$. De los ítems IV y va) de la Proposición

1.4.9, tenemos que $[M_g] \in \text{PicS}(R)$. Note que si $s_g \in S_g, r, r' \in R$, entonces

$$\begin{aligned} r s_g \otimes r' \epsilon_g &= \gamma_g(\gamma_{g^{-1}}(r \epsilon_g)) s_g \otimes r' \epsilon_g \stackrel{(1.1)}{=} s_g \gamma_{g^{-1}}(r \epsilon_g) \otimes r' \epsilon_g \\ &= s_g \otimes \gamma_{g^{-1}}(r \epsilon_g) \cdot r \epsilon_g = s_g \otimes \gamma_g(\gamma_{g^{-1}}(r \epsilon_g)) r' \epsilon_g \\ &= s_g \otimes r \epsilon_g r' \epsilon_g = s_g \otimes r' \epsilon_g r. \end{aligned}$$

Luego, $[M_g] \in \text{PicS}_R(R)$ y así, podemos definir $f : G \rightarrow \text{PicS}_R(R)$ por $f(g) = [M_g]$, para cada $g \in G$. De esta forma, tenemos que $M_g \otimes_R R \epsilon_g \cong M_g$, y por tanto, $f(g) \in [R \epsilon_g] \text{PicS}_R(R)$. Además, $f(g) = \Phi(g) \Phi_0(g^{-1})$ y para cada $g, h \in G$ se vale que

$$\begin{aligned} f(g) \gamma_g^*(f(h)[R \epsilon_{g^{-1}}]) &= \Phi(g)(\Phi_0(g^{-1}) \Phi_0(g)) \Phi(h) \Phi_0(h^{-1}) [R \epsilon_{g^{-1}}] \Phi_0(g^{-1}) \\ &= \Phi(g) [R \epsilon_{g^{-1}}] \Phi(h) (\Phi_0(h^{-1}) \Phi_0(g^{-1}) \Phi_0(g)) \Phi_0(g^{-1}) \\ &= \Phi(g) [R \epsilon_{g^{-1}}] \Phi(h) \Phi_0(h^{-1} g^{-1}) \Phi_0(g) \Phi_0(g^{-1}) \\ &= \Phi(g) \Phi(h) \Phi_0(h^{-1} g^{-1}) [R \epsilon_g] \\ &= \Phi(g) \Phi(h) \Phi(h^{-1}) \Phi(h) \Phi_0(h^{-1} g^{-1}) [R \epsilon_g] \\ &= \Phi(gh) [R \epsilon_{h^{-1}}] \Phi_0(h^{-1} g^{-1}) [R \epsilon_g] \\ &= \Phi(gh) (\Phi_0(h^{-1}) \Phi_0(h) \Phi_0(h^{-1} g^{-1})) [R \epsilon_g] \\ &= \Phi(gh) \Phi_0(h^{-1}) \Phi_0(g^{-1}) [R \epsilon_g] \\ &= \Phi(gh) \Phi_0(h^{-1} g^{-1}) [R \epsilon_g] \\ &= f(gh) [R \epsilon_g]. \end{aligned}$$

Tomando $h = g^{-1}$, concluimos que $f(g) \gamma_g^*(f(g^{-1})[R \epsilon_{g^{-1}}]) = [R \epsilon_g]$. Así, $f(g) \in U([R \epsilon_g] \text{PicS}_R(R))$ y por lo tanto, $f \in Z^1(G, \text{PicS}_R(R))$. Finalmente, note que

$$f(g) \Phi_0(g) = \Phi(g) \Phi_0(g^{-1}) \Phi_0(g) = [S_g] [R \epsilon_{g^{-1}}] = [S_g] = \Phi(g).$$

Luego, el Lema 2.1.12 y la Proposición 2.1.14 implican que $S = \Delta(\Phi) = \Delta(f \Phi_0)$ es una R^γ -álgebra Azumaya que contiene a R como una subálgebra conmutativa maximal. \square

2.2. Anillos de matrices graduadas como productos cruzados parciales

Como se mostró en el Ejemplo 1.1.12, $M_n(S)$ es un anillo épsilon-fuertemente graduado mediante la familia $\{B_g\}_{g \in G}$. En esta sección, comenzamos con la noción de acción parcial torcida, para luego introducir el concepto de producto cruzado parcial. Finalmente,

estableceremos condiciones suficientes para que este anillo de matrices sea un producto cruzado parcial.

Definición 2.2.1. Sean G un grupo y R un anillo. Una **acción parcial torcida unitaria** de G en un anillo R es una tripla

$$\alpha = (\{D_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G}, \{\omega_{g,h}\}_{(g,h) \in G \times G}),$$

donde D_g es un ideal de R generado por un idempotente central 1_g de R , $\alpha_g : D_{g^{-1}} \rightarrow D_g$ es un isomorfismo de anillos, $\omega_{g,h} \in U(D_g D_{gh})$, para todo $g, h \in G$, y las siguientes condiciones se satisfacen para todo $g, h, l \in G$:

(P1) $D_e = R$ y α_e es la función identidad de R .

(P2) $\alpha_g(D_{g^{-1}} D_h) = D_g D_{gh}$.

(P3) $\alpha_g \circ \alpha_h(r) = \omega_{g,h} \alpha_{gh}(r) \omega_{g,h}^{-1}$, para cualquier $r \in D_{h^{-1}} D_{(gh)^{-1}}$.

(P4) $\omega_{e,g} = \omega_{g,e} = 1_g$.

(P5) Si $r \in D_{g^{-1}} D_h D_{hl}$, entonces $\alpha_g(r \omega_{h,l}) \omega_{g,hl} = \alpha_g(r) \omega_{g,h} \omega_{gh,l}$.

Esta acción parcial torcida unitaria se denotará por (α, ω) . Adicionalmente, el **producto cruzado parcial unitario** $R \star_{\alpha, \omega} G$ asociado a la acción parcial torcida unitaria (α, ω) es la suma directa $\bigoplus_{g \in G} D_g \delta_g$, donde δ_g es un símbolo formal para cada $g \in G$, con la suma usual y la multiplicación inducida por la regla

$$(r \delta_g)(r' \delta_h) = r \alpha_g(r' 1_{g^{-1}}) \omega_{g,h} \delta_{gh}, \quad (2.2)$$

para todo $g, h \in G$, $r \in D_g$ y $r' \in D_h$.

Note que como los isomorfismos preservan el elemento identidad de cada ideal, la propiedad (P2) implica que

$$\alpha_g(1_h 1_{g^{-1}}) = 1_{gh} 1_g. \quad (2.3)$$

Veamos que efectivamente la multiplicación definida anteriormente es asociativa. Sean $g, h, l \in G$, $a \in D_g$, $b \in D_h$ y $c \in D_l$. Entonces

$$a \delta_g (b \delta_h (c \delta_l)) = a \delta_g (b \alpha_h(c 1_{h^{-1}}) \omega_{h,l} \delta_{hl}) = a \alpha_g(b \alpha_h(c 1_{h^{-1}}) \omega_{h,l} 1_{g^{-1}}) \omega_{g,hl} \delta_{ghl}.$$

Además, $\alpha_h(1_{h^{-1}} c) \in \alpha_h(D_{h^{-1}} D_l) = D_h D_{hl}$ y así, $1_{g^{-1}} b \alpha_h(c 1_{h^{-1}}) \in D_{g^{-1}} D_h D_{hl}$. Luego, (P5)

implica que

$$\begin{aligned}
a\alpha_g(b\alpha_h(c1_{h^{-1}})\omega_{h,l}1_{g^{-1}})\omega_{g,h}l\delta_{ghl} &= a\alpha_g(1_{g^{-1}}b\alpha_h(c1_{h^{-1}}))\omega_{g,h}\omega_{gh,l}\delta_{ghl} \\
&= a\alpha_g(b1_{g^{-1}})\alpha_g(\alpha_h(c1_{h^{-1}})1_h1_{g^{-1}})\omega_{g,h}\omega_{gh,l}\delta_{ghl} \\
&\stackrel{(2.3)}{=} \alpha_g(b1_{g^{-1}})\alpha_g(\alpha_h(c1_{h^{-1}})\alpha_h(1_{(gh)^{-1}}1_{h^{-1}}))\omega_{g,h}\omega_{gh,l}\delta_{ghl} \\
&= a\alpha_g(b1_{g^{-1}})\alpha_g(\alpha_h(1_{h^{-1}}1_{(gh)^{-1}}c))\omega_{g,h}\omega_{gh,l}\delta_{ghl} \\
&\stackrel{P3}{=} a\alpha_g(b1_{g^{-1}})\omega_{g,h}\alpha_{gh}(1_{h^{-1}}1_{(gh)^{-1}}c)\omega_{gh,l}\delta_{ghl} \\
&= a\alpha_g(b1_{g^{-1}})\omega_{g,h}\alpha_{gh}(1_{h^{-1}}1_{(gh)^{-1}})\alpha_{gh}(c1_{(gh)^{-1}})\omega_{gh,l}\delta_{ghl} \\
&\stackrel{(2.3)}{=} a\alpha_g(b1_{g^{-1}})\omega_{g,h}1_g1_{gh}\alpha_{gh}(c1_{(gh)^{-1}})\omega_{gh,l}\delta_{ghl} \\
&= (a\alpha_g(b1_{g^{-1}})\omega_{g,h}\delta_{gh})c\delta_l.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, $a\delta_g(b\delta_h c\delta_l) = (a\delta_g b\delta_h)c\delta_l$.

A lo largo de esta sección, denotamos por $S = \bigoplus_{g \in G} S_g$ a un anillo épsilon-fuertemente graduado y $R = S_e$.

Definición 2.2.2. Un elemento $a_g \in S_g$ es **épsilon-invertible** si existe $b_{g^{-1}} \in S_{g^{-1}}$ tal que $a_g b_{g^{-1}} = \epsilon_g$ y $b_{g^{-1}} a_g = \epsilon_{g^{-1}}$. Si para cualquier $g \in G$, existe un elemento épsilon-invertible en S_g , entonces el anillo S es llamado un **épsilon-producto cruzado**.

Teorema 2.2.3. Sea S un anillo G -graduado. Entonces S es un épsilon-producto cruzado si, y solo si, S es un producto cruzado parcial unitario.

Demostración. Supongamos que S es un épsilon-producto cruzado. Para cada $g \in G$, fijamos un elemento épsilon invertible $s_g \in S_g$ con $t_{g^{-1}} \in S_{g^{-1}}$, su respectivo inverso. Asumimos que $s_e = t_e = 1_R$. Definimos $D_g = S_g S_{g^{-1}} = R\epsilon_g$ y $1_g = \epsilon_g$. Además, considere la función $\alpha_g : D_{g^{-1}} \rightarrow D_g$, dada por $\alpha_g(r\epsilon_{g^{-1}}) = s_g r t_{g^{-1}}$. Esta función está bien definida, pues dados $r, r' \in R$ tales que $r\epsilon_{g^{-1}} = r'\epsilon_{g^{-1}}$ tenemos que

$$s_g r t_{g^{-1}} = s_g r \epsilon_{g^{-1}} t_{g^{-1}} = s_g r' \epsilon_{g^{-1}} t_{g^{-1}} = s_g r' t_{g^{-1}}.$$

Ahora, considere $\alpha_g^{-1} : D_g \rightarrow D_{g^{-1}}$, dada por $\alpha_g^{-1}(r\epsilon_g) = t_{g^{-1}} r s_g$. Note que si $r \in R$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha_g(\alpha_g^{-1}(r\epsilon_g)) &= \alpha_g(t_{g^{-1}} r s_g) = s_g t_{g^{-1}} r s_g t_{g^{-1}} = \epsilon_g r \epsilon_g = r\epsilon_g, \\
\alpha_g^{-1}(\alpha_g(r\epsilon_{g^{-1}})) &= \alpha_g^{-1}(s_g r t_{g^{-1}}) = t_{g^{-1}} s_g r t_{g^{-1}} s_g = \epsilon_{g^{-1}} r \epsilon_{g^{-1}} = r\epsilon_{g^{-1}}.
\end{aligned}$$

Luego, para cada $g \in G$, α_g es una biyección. Es claro que α_g preserva la suma y además, si $r, r' \in R$, entonces

$$\alpha_g(rr'\epsilon_{g^{-1}}) = s_g r r' t_{g^{-1}} = s_g r \epsilon_{g^{-1}} r' t_{g^{-1}} = s_g r t_{g^{-1}} s_g r' t_{g^{-1}} = \alpha_g(r \epsilon_{g^{-1}}) \alpha_g(r' \epsilon_{g^{-1}}).$$

Por lo tanto, α_g es un isomorfismo de anillos. Sean $g, h \in G$. Definimos $\omega_{g,h} = s_g s_h t_{(gh)^{-1}}$. Como $\omega_{g,h} \in R$ y $\omega_{g,h} = \epsilon_g \omega_{g,h} \epsilon_{gh}$, tenemos que $\omega_{g,h} \in D_g D_{gh}$. Veamos que dicho elemento es invertible en este ideal. En primer lugar, el elemento identidad de $D_g D_{gh}$ es $\epsilon_g \epsilon_{gh}$, por lo que definimos $v_{g,h} = s_g h t_{h^{-1}} t_{g^{-1}} \in D_g D_{gh}$. De esta forma,

$$\begin{aligned} \omega_{g,h} v_{g,h} &= s_g s_h t_{(gh)^{-1}} s_g h t_{h^{-1}} t_{g^{-1}} = s_g s_h \epsilon_{(gh)^{-1}} t_{h^{-1}} t_{g^{-1}} = s_g s_h t_{h^{-1}} t_{g^{-1}} \\ &= s_g \epsilon_h t_{g^{-1}} = \alpha_g(\epsilon_h \epsilon_{g^{-1}}) = \epsilon_g \epsilon_{gh}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{g,h} \omega_{g,h} &= s_g h t_{h^{-1}} t_{g^{-1}} s_g s_h t_{(gh)^{-1}} = s_g h t_{h^{-1}} \epsilon_{g^{-1}} s_h t_{(gh)^{-1}} = s_g h t_{h^{-1}} s_h t_{(gh)^{-1}} \\ &= s_g h \epsilon_{h^{-1}} t_{(gh)^{-1}} = \alpha_{gh}(\epsilon_{h^{-1}} \epsilon_{(gh)^{-1}}) = \epsilon_{gh} \epsilon_g. \end{aligned}$$

Luego, $\omega_{g,h}$ es invertible y $\omega_{g,h}^{-1} = v_{g,h}$. Ahora, veamos que se cumple la condición (P1). Como $\epsilon_e = 1$, tenemos que $D_e = R$. Además, $s_e = t_e = 1$ y por lo tanto, $\alpha_e = id_R$. Veamos que para todo g, h tenemos que $\alpha_g(D_{g^{-1}} D_h) = D_g D_{gh}$. Note que

$$\alpha_g(D_{g^{-1}} D_h) = s_g D_{g^{-1}} D_h t_{g^{-1}} = s_g S_{g^{-1}} S_g S_h S_{h^{-1}} t_{g^{-1}} \subseteq S_g S_{g^{-1}} S_{gh} S_{(gh)^{-1}} = D_g D_{gh}.$$

Para la otra contención, sean $r \epsilon_g r' \epsilon_{gh} \in D_g D_{gh}$. Entonces $t_{g^{-1}} r \epsilon_g \in S_{g^{-1}} S_g S_{g^{-1}}$ y $r' \epsilon_{gh} s_g \in S_{gh} S_{(gh)^{-1}} S_g$. Adicionalmente,

$$S_{g^{-1}} S_g S_{g^{-1}} S_{gh} S_{(gh)^{-1}} S_g \subseteq D_{g^{-1}} S_h S_{h^{-1}} = D_{g^{-1}} D_h.$$

Por consiguiente, $t_{g^{-1}} r \epsilon_g r' \epsilon_{gh} s_g \in D_{g^{-1}} D_h$. Así,

$$\alpha_g(t_{g^{-1}} r \epsilon_g r' \epsilon_{gh} s_g) = s_g t_{g^{-1}} r \epsilon_g r' \epsilon_{gh} s_g t_{g^{-1}} = \epsilon_g r \epsilon_g r' \epsilon_{gh} \epsilon_g = r \epsilon_g r' \epsilon_{gh}.$$

Con lo que concluimos la prueba de (P2). Probaremos (P3). Sea $r \in D_{h^{-1}} D_{(gh)^{-1}}$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\alpha_g(\alpha_h(r)) &= s_g s_h r t_{h-1} t_{g-1} = s_g s_h r \epsilon_{(gh)^{-1}} t_{h-1} t_{g-1} = s_g s_h \epsilon_{(gh)^{-1}} r t_{h-1} t_{g-1} \\
&= s_g s_h t_{(gh)^{-1}} s_{gh} r t_{h-1} t_{g-1} = \omega_{g,h} s_{gh} r \epsilon_{(gh)^{-1}} t_{h-1} t_{g-1} \\
&= \omega_{g,h} s_{gh} r t_{(gh)^{-1}} s_{gh} t_{h-1} t_{g-1} = \omega_{g,h} \alpha_{gh}(r) s_{gh} t_{h-1} t_{g-1} \\
&= \omega_{g,h} \alpha_{gh}(r) \omega_{g,h}^{-1}.
\end{aligned}$$

Para mostrar (P4). Recordemos que $s_e = 1$, luego, $\omega_{e,g} = s_e s_g t_{g-1} = \epsilon_g$ y $\omega_{g,e} = s_g s_e t_{g-1} = \epsilon_g$. Antes de probar (P5), note que $S_g = D_g s_g$. En efecto, sea $x \in S_g$, entonces $x = x \epsilon_{g-1} = x t_{g-1} s_g \in D_g s_g$. Recíprocamente, sea $r \epsilon_g s_g \in D_g s_g$, entonces $r \epsilon_g s_g = r s_g \in R S_g \subseteq S_g$. De esta forma, obtenemos que

$$S = \bigoplus_{g \in G} S_g = \bigoplus_{g \in G} D_g s_g. \quad (2.4)$$

Más aún, afirmamos que si $s = \sum_{g \in G} r_g s_g$ con $r_g \in D_g$, entonces los elementos r_g son únicos. De hecho, supongamos que $r_g s_g = r'_g s_g$ con $r_g, r'_g \in D_g$. Así, $r_g s_g t_{g-1} = r'_g s_g t_{g-1}$ y como $\epsilon_g = s_g t_{g-1}$ es el elemento identidad de D_g , obtenemos que $r_g \epsilon_g = r'_g \epsilon_g$, esto es, $r_g = r'_g$. Ahora, si tomamos $r \in D_g, r' \in D_h$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
(r s_g)(r' s_h) &= r s_g \epsilon_{g-1} r' s_h = r s_g r' \epsilon_{g-1} s_h = r s_g r' t_{g-1} s_g s_h \\
&= r s_g r' t_{g-1} s_g s_h t_{(gh)^{-1}} s_{gh} = r \alpha_g(r' \epsilon_{g-1}) \omega_{g,h} s_{gh}.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$(r s_g)(r' s_h) = r \alpha_g(r' \epsilon_{g-1}) \omega_{g,h} s_{gh}. \quad (2.5)$$

Con esto tenemos las herramientas para probar (P5). Sea $r \in D_{g^{-1}} D_h D_l$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha_g(r \omega_{h,l}) \omega_{g,h} s_{gh} &= \epsilon_g \alpha_g(r \omega_{h,l} \epsilon_{g-1}) \omega_{g,h} s_{gh} \stackrel{(2.5)}{=} (s_g)(r \omega_{h,l} s_{hl}) \stackrel{(2.3)}{=} s_g(r \alpha_h(\epsilon_{h-1} \epsilon_l) \omega_{h,l} s_{hl}) \\
&\stackrel{(2.5)}{=} s_g(r s_h s_l) = (s_g r s_h) s_l \stackrel{(2.5)}{=} (\alpha_g(r \epsilon_{g-1}) \omega_{g,h} s_{gh}) s_l \\
&\stackrel{(2.5)}{=} \alpha_g(r) \omega_{g,h} \alpha_{gh}(\epsilon_l \epsilon_{(gh)^{-1}}) \omega_{gh,l} s_{gh} \stackrel{(2.3)}{=} \alpha_g(r) \omega_{g,h} \epsilon_{gh} \epsilon_{gh} \omega_{gh,l} s_{gh} \\
&= \alpha_g(r) \omega_{g,h} \omega_{gh,l} s_{gh}.
\end{aligned}$$

Por la unicidad en la descomposición en $\bigoplus_{g \in G} D_g s_g$, se sigue (P5) de lo probado anteriormente. Por consiguiente, (α, ω) es una acción parcial torcida unitaria. Finalmente, de (2.4) y (2.5) se tiene que S es el producto cruzado parcial unitario asociado a esta

acción.

Recíprocamente, supongamos que $S = \bigoplus_{g \in G} D_g \delta_g$ es un producto cruzado parcial unitario. Note que S es un anillo G -graduado pues, para cada $g \in G$, podemos tomar $S_g = D_g \delta_g$ y de esta forma, se sigue de (2.2) y del hecho que $\omega_{g,h} \in D_{gh}$ que $S_g S_h \subseteq S_{gh}$. Por otro lado, es sencillo ver que $S_g S_{g^{-1}} = D_g \delta_e$ y así, para cada $g \in G$, definimos $\epsilon_g = 1_g \delta_e$. Por ende, dado cualquier $r \in D_g$ usando (P1) y (P4) tenemos que

$$(1_g \delta_e)(r \delta_g) = 1_g \alpha_e(r 1_e) \omega_{e,g} \delta_g = 1_g r 1_e \delta_g = r \delta_g,$$

$$(r \delta_g)(1_{g^{-1}} \delta_e) = r \alpha_g(1_{g^{-1}}) \omega_{g,e} \delta_g = r 1_g \delta_g = r \delta_g.$$

Así, S es épsilon-fuertemente graduado por G . Por último, para cada $g \in G$, afirmamos que $s = 1_g \delta_g$ es épsilon-invertible. Considere $t = \alpha_{g^{-1}}(\omega_{g,g^{-1}}^{-1}) \delta_{g^{-1}} \in S_{g^{-1}}$. Entonces

$$st = 1_g \delta_g \alpha_{g^{-1}}(\omega_{g,g^{-1}}^{-1}) \delta_{g^{-1}} = 1_g \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\omega_{g,g^{-1}}^{-1})) \omega_{g,g^{-1}} \delta_e = 1_g \omega_{g,g^{-1}}^{-1} \omega_{g,g^{-1}} \delta_e = 1_g \delta_e = \epsilon_g.$$

Por otro lado, usando (P5) con $g = g^{-1}$, $h = g$, $l = g^{-1}$ y $r = 1_g$ obtenemos que

$$\alpha_{g^{-1}}(1_g \omega_{g,g^{-1}}) \omega_{g^{-1},e} = \alpha_{g^{-1}}(1_g) \omega_{g^{-1},g} \omega_{e,g^{-1}}.$$

No obstante, tenemos que $\omega_{g^{-1},e} = 1_{g^{-1}} = \omega_{e,g^{-1}}$, y $\alpha_{g^{-1}}(1_g) = 1_{g^{-1}}$. De esta forma, concluimos que

$$\alpha_{g^{-1}}(\omega_{g,g^{-1}}) = \omega_{g^{-1},g}. \quad (2.6)$$

Retomando,

$$\begin{aligned} ts &= \alpha_{g^{-1}}(\omega_{g,g^{-1}}^{-1}) \delta_{g^{-1}} 1_g \delta_g = \alpha_{g^{-1}}(\omega_{g,g^{-1}}^{-1}) \alpha_{g^{-1}}(1_g) \omega_{g^{-1},g} \delta_e = \alpha_{g^{-1}}(\omega_{g,g^{-1}})^{-1} \omega_{g^{-1},g} \delta_e \\ &\stackrel{(2.6)}{=} \omega_{g^{-1},g}^{-1} \omega_{g^{-1},g} \delta_e = 1_g \delta_e. \end{aligned}$$

Por lo tanto, S es un épsilon-producto cruzado. □

Considere el conjunto $\text{Comp}(S) = \{[S_g] : g \in G\}$. Por el ítem va) de la Proposición 1.4.9, tenemos que $\text{Comp}(S) \subseteq \text{PicS}(R)$. Por otro lado, dado cualquier $\theta : R 1_{\theta^{-1}} \rightarrow R 1_{\theta} \in I(R)$, el ítem iv de la misma proposición implica que $[\text{id}(R 1_{\theta})_{\theta}] \in \text{PicS}(R)$. Considere $I_u(R)$ el subsemigrupo de $I(R)$ conformado por los isomorfismos entre ideales unitarios de R . Por lo anterior, tenemos la función $\omega : I_u(R) \rightarrow \text{PicS}(R)$, definida por $\omega(\theta) = [\text{id}(R 1_{\theta})_{\theta}]$. A

continuación, presentamos una caracterización de los épsilon-productos cruzados.

Teorema 2.2.4. *Las siguientes afirmaciones se tienen:*

- i) *Sean $g \in G$ y $s_g \in S_g$ tales que existen $u_{g^{-1}}, v_{g^{-1}} \in S_{g^{-1}}$ que cumplen que $s_g u_{g^{-1}} = \epsilon_g$ y $v_{g^{-1}} s_g = \epsilon_{g^{-1}}$. Entonces $u_{g^{-1}} = v_{g^{-1}}$ y por consiguiente, s_g es épsilon-invertible.*
- ii) *Para cada $g \in G$, los siguientes enunciados son equivalentes:*
 - a) *Existe un elemento épsilon-invertible en S_g .*
 - b) *Existe un isomorfismo de R -módulos a la izquierda entre S_g y $R\epsilon_g$.*
 - c) *Existe una función $\theta : R\epsilon_{g^{-1}} \rightarrow R\epsilon_g \in I_u(R)$ tal que $S_g \simeq_{id} (R\epsilon_g)_\theta$ como R -bimódulos.*
- iii) *Sea $H(S)$ el conjunto de los elementos homogéneos no nulos de S . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
 - a) *S es un épsilon-producto cruzado.*
 - b) *Existe una función $\kappa : G \rightarrow H(S)$ tal que $\kappa(g) \in S_g$ y $R\kappa(g) = S_g = \kappa(g)R$, para todo $g \in G$.*
 - c) *$\text{Comp}(S) \subseteq \text{Im}(\omega)$.*
 - d) *Existe una función $\nu : G \rightarrow I_u(R)$ tal que $S_g \simeq_{id} (R1_{\nu(g)})_{\nu(g)}$ como R -bimódulos, para todo $g \in G$.*

Demostración. Veamos cada uno de los enunciados.

- i) Sea $g \in G$, entonces $v_{g^{-1}} s_g u_{g^{-1}} = v_{g^{-1}} \epsilon_g = v_{g^{-1}}$, pero a su vez, $v_{g^{-1}} s_g u_{g^{-1}} = \epsilon_{g^{-1}} u_{g^{-1}} = u_{g^{-1}}$. Por lo tanto, $u_{g^{-1}} = v_{g^{-1}}$.
- ii) Veamos que a) implica b). Para cada $g \in G$, fijemos $s_g \in S_g$ un elemento épsilon-invertible. Considere la función $f : R\epsilon_g \rightarrow S_g$, dada por $f(r\epsilon_g) = r s_g$. Es claro que esta función está bien definida y es un homomorfismo de R -módulos a la izquierda. Ahora, si suponemos que $r s_g = 0$, entonces por hipótesis existe $t_{g^{-1}} \in S_{g^{-1}}$ el inverso de s_g . Así, $r s_g t_{g^{-1}} = 0$, esto es, $r \epsilon_g = 0$. Por lo tanto, f es inyectiva. Para la sobreyectividad, dado $x \in S_g$, tenemos que $x \epsilon_{g^{-1}} = x$ y como $t_{g^{-1}} s_g = \epsilon_{g^{-1}}$, concluimos que $f(x t_{g^{-1}} \epsilon_g) = x$. Luego, f es un isomorfismo.

Ahora, mostraremos que b) implica que c). Recordemos que $[S_g], [R\epsilon_g] \in \text{PicS}(R)$

y por lo tanto, el ítem I de la Proposición 1.4.9 implica que existen idempotentes $e_1, e_2 \in R$ tales que $e_1R = \text{Ann}((S_g)_R)$ y $e_2R = \text{Ann}((R\epsilon_g)_R)$. Afirmamos que $\text{Ann}((S_g)_R) = R(1 - \epsilon_{g-1})$. En efecto, si $r \in R$ tal que $xr = 0$ para todo $x \in S_g$. Entonces

$$\epsilon_{g-1}r = \sum_{i=1}^{n_g} u_{g-1}^{(i)} v_g^{(i)} r = 0.$$

De esta forma, $r(1 - \epsilon_{g-1}) = r - \epsilon_{g-1}r = r$. Esto es, $r \in R(1 - \epsilon_{g-1})$. La otra contención es clara al igual que $\text{Ann}((R\epsilon_g)_R) = R(1 - \epsilon_g)$. Así, $e_1 = 1 - \epsilon_{g-1}$ y $e_2 = 1 - \epsilon_g$ son centrales y consecuentemente, podemos usar el ítem III de la Proposición 1.4.9 para concluir que existe $\theta \in I_u(R)$ tal que $\text{dom}(\theta) = R\epsilon_{g-1}$, $\text{Im}(\theta) = R\epsilon_g$ y $S_g \simeq_{id} (R\epsilon_g)\theta$.

Para finalizar la prueba de este inciso, veamos que $c)$ implica $a)$. Por hipótesis, existe $\mu_g : id(R\epsilon_g)\theta \rightarrow S_g$ isomorfismo de R -bimódulos. Considere $s_g = \mu_g(\epsilon_g)$. Esto implica que

$$S_g = \mu_g(R\epsilon_g) = Rs_g,$$

pero a su vez,

$$S_g = \mu_g(R\epsilon_g) = \mu(\epsilon_g R) = s_g \theta(R\epsilon_{g-1}) = s_g R\epsilon_g.$$

Luego, $Rs_g = s_g R\epsilon_g$. Así, $R\epsilon_g = S_g S_{g-1} = s_g R\epsilon_g S_{g-1} \subseteq s_g S_{g-1}$. Como $\epsilon_g \in R\epsilon_g$, por lo anterior, existe $u_{g-1} \in S_{g-1}$ tal que $\epsilon_g = s_g u_{g-1}$. Similarmente, $R\epsilon_{g-1} = S_{g-1} S_g = S_{g-1} R s_g \subseteq S_{g-1} s_g$ y así, existe $v_{g-1} \in S_{g-1}$ tal que $v_{g-1} s_g = \epsilon_{g-1}$. Se sigue del ítem I de esta proposición, que s_g es épsilon-invertible.

III) Probaremos que los ítems a) y b) son equivalentes. Supongamos que S es un épsilon-producto cruzado. Para cada $g \in G$, fijamos $s_g \in S_g$ un elemento épsilon-invertible. Definamos la función $\kappa : G \rightarrow H(S)$, dado por $\kappa(g) = s_g$, para cada $g \in G$. Llamemos t_{g-1} al inverso de s_g , entonces dado $x \in S_g$ tenemos que $x = x\epsilon_{g-1} = xt_{g-1}s_g$. Luego, $S_g \subseteq R\kappa(g)$ y como $s_g \in S_g$, se sigue la otra contención. Análogamente, se prueba que $S_g = \kappa(g)R$. Recíprocamente, supongamos que existe $\kappa : G \rightarrow H(S)$ con las condiciones mencionadas. Veamos que para cada $g \in G$, $\kappa(g)$ es invertible. Por hipótesis,

$$\epsilon_g \in S_g S_{g-1} = \kappa(g) R S_{g-1} = R \kappa(g) S_{g-1}.$$

Por lo tanto, existen $r \in R, t \in S_{g^{-1}}$ tales que $\kappa(g)rt = \epsilon_g$. Llamamos $u_{g^{-1}} = rt \in S_{g^{-1}}$, entonces $\kappa(g)u_{g^{-1}} = \epsilon_g$. Similarmente, probamos que existe $v_{g^{-1}} \in S_{g^{-1}}$ tal que $v_{g^{-1}}\kappa(g) = \epsilon_{g^{-1}}$. De esta forma, el resultado se sigue una vez más, del ítem 1.

Es claro que $d)$ implica $c)$. En la otra dirección, como $\text{Comp}(S) \subseteq \text{Im}(\omega)$, para todo $g \in G$, podemos fijar $\theta_g \in I_u(R)$ tal que $S_g \simeq_{id} {}_{id}(R1_{\theta_g})_{\theta_g}$. De este modo, definimos la función $\nu : G \rightarrow I_u(R)$ por $\nu(g) = \theta_g$ y concluimos lo deseado. Con esto $c)$ y $d)$ son equivalentes. Ahora, supongamos que se vale $a)$, entonces para cada $g \in G$, existe un elemento épsilon-invertible en S_g . Por el ítem 2c), podemos definir la función ν . Luego, $a)$ implica $d)$.

Finalizamos esta prueba mostrando que $d)$ implica $b)$. Por hipótesis, para cada $g \in G$, existe $\mu_g : {}_{id}(R1_{\nu(g)})_{\nu(g)} \rightarrow S_g$ isomorfismo de R -bimódulos. Así, definimos $\kappa : G \rightarrow H(S)$ por $\kappa(g) = \mu_g(1_{\nu(g)})$. Note que si $x \in S_g$, como μ_g es sobreyectiva, existe $r \in R$, tal que $x = \mu_g(r1_{\nu(g)}) = r\mu_g(1_{\nu(g)}) = r\kappa(g)$. Por ende, $S_g \subseteq R\kappa(g)$. Por otro lado, para cada $r \in R$,

$$1_{\nu(g)} \cdot r = 1_{\nu(g)}\nu(g)(r1_{\nu(g)^{-1}}) = \nu(g)(r1_{\nu(g)^{-1}}) = r\nu(g)(1_{\nu(g)^{-1}}) = r1_{\nu(g)}.$$

Esto implica que $\kappa(g)R = \mu_g(1_{\nu(g)})R = \mu_g(1_{\nu(g)} \cdot R) = \mu_g(R1_{\nu(g)}) = R\mu_g(1_{\nu(g)}) = R\kappa(g)$. Claramente, $R\kappa(g) \subseteq S_g$ y así, $R\kappa(g) = S_g = \kappa(g)R$.

Concluimos esta sección, aplicando los Teoremas 2.2.3 y 2.2.4 al anillo $M_n(S)$.

Corolario 2.2.5. *Sea n un entero positivo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- I) $M_n(S)$ es un producto cruzado parcial,
- II) $M_n(S)$ es un épsilon-producto cruzado,
- III) Existe una función $\nu : G \rightarrow I_u(M_n(R))$ tal que $M_n(S_g) \simeq_{id} {}_{id}(M_n(R)1_{\nu(g)})_{\nu(g)}$ como R -bimódulos,
- IV) Existe una función $\kappa : G \rightarrow H(M_n(S))$ tal que $\kappa(g) \in M_n(S_g)$ y

$$M_n(R)\kappa(g) = M_n(S_g) = \kappa(g)M_n(R),$$

para todo $g \in G$.

□

2.3. Graduación para el anillo de endomorfismos

A lo largo de esta sección, G denota un grupo, $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ un anillo graduado y $R = A_e$. Hemos visto que los anillos pueden ser graduados por un grupo; ahora veremos que los módulos sobre anillos graduados también pueden ser graduados.

Definición 2.3.1. Sea M un A -módulo. Diremos que M es un **módulo graduado** si existe una colección $\{M_g\}_{g \in G}$ de subgrupos de M que cumple:

- i) $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$;
- ii) $A_g M_h \subseteq M_{gh}$.

En el caso que $A_g M_h = M_{gh}$, decimos que M es un **módulo fuertemente graduado**. Además, un submódulo N de M es un **submódulo graduado** si

$$N = \bigoplus_{g \in G} (N \cap M_g).$$

Ejemplo 2.3.2. Sean M y N , A -módulos graduados. Es fácil ver que la suma directa $M \oplus N$ con la graduación $\bigoplus_{g \in G} M_g \oplus N_g$, es también un A -módulo graduado. Además, si M y N son A -bimódulos, el producto tensorial, $M \otimes_A N$ es un módulo graduado con

$$(M \otimes_A N)_g = \bigoplus_{h \in G} M_{gh} \otimes_A N_{h^{-1}}, \forall g \in G.$$

Sean M y N , A -módulos G -graduados y $\phi : M \rightarrow N$ un homomorfismo de R -módulos tal que $\phi(M_g) \subseteq N_g$, para cada $g \in G$. Este tipo de homomorfismo es llamado un **homomorfismo graduado**. Además, decimos que $M \simeq N$ (como **módulos graduados**) si existe un isomorfismo de módulos $f : M \rightarrow N$ que preserva la graduación. Denotamos por \mathcal{C} a la categoría cuyos objetos son los A -módulos a la izquierda graduados y cuyos morfismos son los homomorfismos graduados, que denotaremos por $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, N)$.

Ejemplo 2.3.3. Sean $N \in \mathcal{C}$ y N' un sumando directo graduado no nulo de N . Entonces las funciones proyección $\pi_{N'} : N \rightarrow N'$ e inclusión $\iota_{N'} : N' \rightarrow N$ son homomorfismos graduados. Por lo tanto, podemos definir el siguiente homomorfismo graduado no nulo:

$$\epsilon_{N'} := \iota_{N'} \circ \pi_{N'}. \tag{2.7}$$

Sean $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ y $N = \bigoplus_{g \in G} N_g$ objetos en \mathcal{C} . Para cada $l \in G$, denotamos por $M(l)$ a la l -suspensión a la izquierda de M , esto es, $M(l) := \bigoplus_{g \in G} M_{gl}$. Es claro que $M(l)$ es un módulo G -graduado. Además, definimos

$$\text{Mor}_A(M, N)_l = \{f \in \text{Mor}_A(M, N) : f(M_g) \subseteq N_{gl}, \text{ para todo } g \in G\}.$$

Los homomorfismos que pertenecen a $\text{Mor}_A(M, N)_l$ son llamados **homomorfismos graduados de grado l** . Afirmamos que $\sum_{l \in G} \text{Mor}_A(M, N)_l$ es la suma directa de grupos aditivos. En efecto, sean $f_l \in \text{Mor}_A(M, N)_l$ tales que $\sum_{l \in G} f_l = 0$. Fijemos $g \in G$. Sea $m \in M_g$, entonces

$$0 = \sum_{l \in G} f_l(m) \in \sum_{l \in G} N_{gl},$$

como la suma de los N_{gl} es directa, $f_l(m) = 0$, para todo $l \in G$. Dado que $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$, concluimos que $f_l = 0$. De esta forma, podemos definir

$$\text{MOR}_A(M, N) := \bigoplus_{l \in G} \text{Mor}_A(M, N)_l.$$

Por otro lado, es fácil ver que $\text{Mor}_A(M, N)_l = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, N(l)) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M(l^{-1}), N)$, para todo $l \in G$. Así, podemos definir

$$\text{END}_A(M) := \text{MOR}_A(M, M) = \bigoplus_{l \in G} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, M(l)).$$

Establecemos que $uv = v \circ u$, para todo $u, v \in \text{END}_A(M)$. Note que si $u \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, M(l))$ y $v \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, M(h))$, entonces para cualquier $g \in G$,

$$(v \circ u)(M_g) \subseteq v(M_{gl}) \subseteq M_{glh}.$$

Luego, $uv \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, M(lh))$ y así, $\text{END}_A(M)$ es un anillo G -graduado con la suma usual y la multiplicación definida anteriormente.

A continuación, se define el concepto de divisibilidad entre módulos graduados, con el objetivo de estudiar las propiedades que posee la graduación anteriormente definida en $\text{END}_A(M)$.

Definición 2.3.4. Sean $M, N \in \mathcal{C}$. Decimos que N **divide** a M si es isomorfo a un

sumando directo graduado de $M^{(n)}$, para algún $n \in \mathbb{N}$. En este caso, escribimos $N | M$ y cuando, también sucede que $M | N$, escribimos $M \sim N$.

Proposición 2.3.5. *Sean $M, N \in \mathcal{C}$. Entonces $N | M$ si, y solo si, existen homomorfismos graduados $f_1, \dots, f_n : M \rightarrow N$, $g_1, \dots, g_n : N \rightarrow M$ tales que*

$$\sum_{i=1}^n f_i \circ g_i = id_N.$$

Demostración. Supongamos que $N | M$. Por definición, existen $n \in \mathbb{N}$, $S \leq M^{(n)}$, sumando directo graduado tales que $S \simeq N$. Entonces existe $h : N \rightarrow S$ isomorfismo graduado. Para cada $1 \leq i \leq n$, definimos

$$g_i : N \rightarrow M, \text{ dada por } g_i = \pi_i \circ \iota_S \circ h,$$

$$f_i : M \rightarrow N, \text{ dada por } f_i = h^{-1} \circ \pi_S \circ \iota_i.$$

Como todos los homomorfismos involucrados son graduados, concluimos que f_i y g_i también son graduados. De esta forma,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f_i \circ g_i &= \sum_{i=1}^n h^{-1} \circ \pi_S \circ \iota_i \circ \pi_i \circ \iota_S \circ h = h^{-1} \circ \pi_S \circ \left(\sum_{i=1}^n \iota_i \circ \pi_i \right) \circ \iota_S \circ h \\ &= h^{-1} \circ \pi_S \circ id_{M^{(n)}} \circ \iota_S \circ h = id_N. \end{aligned}$$

Recíprocamente, definamos

$$\begin{aligned} g : N &\longrightarrow M^{(n)} \\ x &\longmapsto (g_1(x), \dots, g_n(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : M^{(n)} &\longrightarrow N \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^n f_i(x_i). \end{aligned}$$

Considerando a $M^{(n)}$ con la graduación del Ejemplo 2.3.2, tenemos que f, g son homomorfismos graduados y $(f \circ g)(x) = x$. Así, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{g} M^{(n)} \rightarrow M^{(n)}/\text{Im}(g) \rightarrow 0,$$

que escinde. Por lo tanto, $\text{Im}(g) \simeq N$ es sumando directo de $M^{(n)}$. Luego, $N | M$. \square

Lema 2.3.6. *Sea $M \in \mathcal{C}$. Entonces $M \mid M(l)$, para todo $l \in G$ si, y solo si, $M \sim M(l)$, para todo $l \in G$.*

Demostración. Supongamos que $M \mid M(l)$, para todo $l \in G$. Sea $l \in G$, por hipótesis $M \mid M(l^{-1})$. De la Proposición 2.3.5 existen $f_1, \dots, f_n : M(l^{-1}) \rightarrow M$, $g_1, \dots, g_n : M \rightarrow M(l^{-1})$ homomorfismos graduados tales que $\sum_{i=1}^n f_i \circ g_i = id_M$. No obstante, $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(M(l^{-1}), M) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, M(l))$, $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, M(l^{-1})) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M(l), M)$ y $id_M = id_{M(l)}$. Luego, la misma proposición nos permite concluir que $M(l) \mid M$. Por lo tanto, $M \sim M(l)$. \square

Presentamos condiciones suficientes y necesarias para que $\text{END}_A(M)$ sea fuertemente graduado.

Teorema 2.3.7. *Sea $M \in \mathcal{C}$. Entonces $\text{END}_A(M)$ es fuertemente graduado si, y solo si, $M \sim M(l)$, para todo $l \in G$.*

Demostración. Supongamos que $B = \text{END}_A(M)$ es fuertemente graduado. Sea $l \in G$. Por la Proposición 1.1.5, $id_M \in B_l B_{l^{-1}}$, para todo $l \in G$. Luego, existen $v_i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, M(l))$, $u_i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M(l), M)$ tales que

$$id_M = \sum_{i=1}^n v_i u_i = \sum_{i=1}^n u_i \circ v_i.$$

Por la caracterización de divisibilidad, $M \mid M(l)$. El lema anterior implica que $M \sim M(l)$, para todo $l \in G$. La recíproca, es también consecuencia de la Proposición 2.3.5. \square

Ahora, queremos estudiar cuando $\text{END}_A(M)$ es épsilon-fuertemente graduado. La siguiente proposición será de gran utilidad para este fin.

Proposición 2.3.8. *Sean $M, N \in \mathcal{C}$ y N' un sumando directo graduado no nulo de N . Considere el homomorfismo $\epsilon_{N'}$ definido en (2.7). Entonces para $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, N)$ (respectivamente $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(N, M)$) las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- I) $\epsilon_{N'} \circ f = f$ (respectivamente $g \circ \epsilon_{N'} = g$).
- II) $\text{Im } f \subseteq N'$ (respectivamente $\text{Ker } \epsilon_{N'} \subseteq \text{Ker } g$).
- III) Existe $f' \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, N')$ tal que $f = \iota_{N'} \circ f'$ (respectivamente existe $g' \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(N', M)$ tal que $g = g' \circ \pi_{N'}$).

Demostración. Supongamos III. Entonces $\epsilon_{N'} \circ f = \epsilon_{N'} \circ \iota_{N'} \circ f' = \iota_{N'} \circ f' = f$ y $g \circ \epsilon_{N'} = g' \circ \pi_{N'} \circ \epsilon_{N'} = g' \circ \pi_{N'} = g$. Luego, tenemos I. Ahora, es claro que I implica II. Por último, veamos que II implica III. Asumamos que $\text{Im } f \subseteq N'$. Considere $f' = \pi_{N'} \circ f$ y así, $\iota_{N'} \circ f' = \iota_{N'} \circ \pi_{N'} \circ f = f$. Por otro lado, supongamos que $\text{Ker } \epsilon_{N'} \subseteq \text{Ker } g$. Es sencillo verificar que $N = N' \oplus \text{Ker } \epsilon_{N'}$. Luego, dado $n \in N$, escribimos $n = n' + m$ con $n' \in N', m \in \text{Ker } \epsilon_{N'}$ y como $\text{Ker } \epsilon_{N'} \subseteq \text{Ker } g$, concluimos que $g(n) = g(n')$. Por lo tanto, podemos considerar la restricción $g' : N' \rightarrow M$ y de ahí que, $g = g' \circ \pi_{N'}$. \square

Presentamos un ejemplo de un anillo de endomorfismos que es ϵ -fuertemente graduado.

Ejemplo 2.3.9. Sea \mathbb{K} un cuerpo. Entonces \mathbb{K} posee la siguiente \mathbb{Z} -graduación trivial:

$$\mathbb{K}_0 = \mathbb{K}, \quad \mathbb{K}_n = \{0\}, \quad \text{para todo } n \neq 0.$$

Considere $V = \mathbb{K}^3$, el \mathbb{K} -espacio vectorial con la siguiente \mathbb{Z} -graduación,

$$V_{-1} = \mathbb{K} \times \{0\} \times \{0\}, \quad V_0 = \{0\} \times \mathbb{K} \times \{0\}, \quad V_1 = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{K}, \quad V_n = \{0\}, n \notin \{-1, 0, 1\}.$$

Es claro que $\text{supp}(\text{END}_{\mathbb{K}}(V)) = \{\pm 2, \pm 1, 0\}$ y por lo tanto, es cerrado bajo inversos. A continuación, definimos ciertos endomorfismos de V . Sean $(x, y, z) \in V$, entonces:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= id_V, & \epsilon_1(x, y, z) &= (x, y, 0), & \epsilon_2(x, y, z) &= (x, 0, 0), \\ \epsilon_{-1}(x, y, z) &= (0, y, z), & \epsilon_{-2}(x, y, z) &= (0, 0, z), & u_{-1}(x, y, z) &= (y, z, 0) . \\ u_{-2}(x, y, z) &= (z, 0, 0), & v_1(x, y, z) &= (0, x, y), & v_2(x, y, z) &= (0, 0, x). \end{aligned}$$

Es fácil verificar que $u_{-i} \in \text{END}_{\mathbb{K}}(V)_{-i}$ y $v_i \in \text{END}_{\mathbb{K}}(V)_i$, para todo $i \in \{1, 2\}$. Luego, podemos definir

$$\epsilon_i = u_{-i} \circ v_i = v_i u_{-i} \in \text{END}_{\mathbb{K}}(V)_i \text{END}_{\mathbb{K}}(V)_{-i}, \quad (2.8)$$

$$\epsilon_{-i} = v_i \circ u_{-i} = u_{-i} v_i \in \text{END}_{\mathbb{K}}(V)_{-i} \text{END}_{\mathbb{K}}(V)_i, \quad (2.9)$$

para cada $i \in \{1, 2\}$. Además, para $i = 1, 2$, tenemos que

$$\text{Ker } \epsilon_i \subseteq f_i, \quad \text{Im } f_i \subseteq \epsilon_{-i}, \quad \forall f_i \in \text{END}_{\mathbb{K}}(V)_i,$$

$$\text{Ker } \epsilon_{-i} \subseteq f_{-i}, \quad \text{Im } f_{-i} \subseteq \epsilon_i, \quad \forall f_{-i} \in \text{END}_{\mathbb{K}}(V)_{-i}.$$

Por lo tanto, la Proposición 2.3.8 implica que $\epsilon_i f = f = f \epsilon_{-i}$, para todo $i \in \{\pm 2, \pm 1, 0\}$.

Luego, la Proposición 1.1.10 nos permite concluir que $\text{END}_{\mathbb{K}}(V)$ es épsilon-fuertemente graduado. Más aún, por las ecuaciones (2.8) y (2.9), es un épsilon-producto cruzado.

Definición 2.3.10. Sean $M, N \in \mathcal{C}$. Decimos que N **semidivide** a M si existe un sumando directo graduado no nulo N' de N tal que $N' \mid M$, $\epsilon_{N'} \circ f = f$ y $g \circ \epsilon_{N'} = g$, para todo $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, N)$, $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(N, M)$. Lo anterior es denotado por $N \mid_{sd} M$ y en el caso en que también tengamos que $M \mid_{sd} N$, escribimos $N \sim_{sd} M$.

El siguiente resultado proporciona una caracterización de cuándo un sumando directo graduado no nulo de N divide al módulo M .

Proposición 2.3.11. Sean $M, N \in \mathcal{C}$ y N' un sumando directo graduado no nulo de N . Entonces $N' \mid M$ si, y solo si, existen homomorfismos graduados $f_1, \dots, f_n : M \rightarrow N$, $g_1, \dots, g_n : N \rightarrow M$ tales que

$$\sum_{i=1}^n f_i \circ g_i = \epsilon_{N'}.$$

Demostración. Supongamos que $N' \mid M$. Entonces por la Proposición 2.3.5, existen homomorfismos graduados $f'_1, \dots, f'_n : M \rightarrow N'$, $g'_1, \dots, g'_n : N' \rightarrow M$ tales que

$$\sum_{i=1}^n f'_i \circ g'_i = id_{N'}.$$

Considere $f_i = \iota_{N'} \circ f'_i$ y $g_i = g'_i \circ \pi_{N'}$, para cada $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, f_i y g_i son homomorfismos graduados y se tiene que

$$\sum_{i=1}^n f_i \circ g_i = \sum_{i=1}^n \iota_{N'} \circ (f'_i \circ g'_i) \circ \pi_{N'} = \epsilon_{N'}.$$

Recíprocamente, para cada $1 \leq i \leq n$, considere $g'_i = g_i \circ \iota_{N'}$ y $f'_i = \pi_{N'} \circ f_i$. Así,

$$\sum_{i=1}^n f'_i \circ g'_i = \sum_{i=1}^n \pi_{N'} \circ (f_i \circ g_i) \circ \iota_{N'} = \pi_{N'} \circ \epsilon_{N'} \circ \iota_{N'} = id_{N'}.$$

La Proposición 2.3.5 implica que $N' \mid M$. □

Lema 2.3.12. Sean $M \in \mathcal{C}$ y $H \subseteq G$ cerrado bajo inverso. $M \mid_{sd} M(l)$, para todo $l \in H$ si, y solo si, $M \sim_{sd} M(l)$, para todo $l \in H$.

Demostración. Sea $l \in H$. Por hipótesis, $l^{-1} \in H$ y por lo tanto, $M \mid_{sd} M(l^{-1})$. Esto quiere decir, que existe M' sumando directo graduado no nulo de M tal que $M' \mid M(l)$,

$\epsilon_{M'} \circ f = f$ y $g \circ \epsilon_{M'} = g$, para todo $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M(l^{-1}), M)$, $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, M(l^{-1}))$. Así, $M'(l)$ es un sumando directo graduado no nulo de $M(l)$ y como $\epsilon_{M'} = \epsilon_{M'(l)}$, $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(M(l^{-1}), M) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, M(l))$ y $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, M(l^{-1})) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M(l), M)$, lo anterior implica que $M(l) \mid_{sd} M$. Por consiguiente, $M \sim_{sd} M(l)$. \square

Teorema 2.3.13. *Sea $M \in \mathcal{C}$. Entonces $B = \text{END}_A(M)$ es un anillo épsilon-fuertemente graduado si, y solo si, $M \sim_{sd} M(l)$, para todo $l \in \text{supp}(B)$.*

Demostración. Supongamos que B es épsilon-fuertemente graduado. Por la Proposición 1.1.10, $\text{supp}(B)$ es cerrado bajo inversos y para todo $l \in \text{supp}(B)$, existe $\epsilon_l \in B_l B_{l^{-1}}$ idempotente no nulo tal que

$$u = \epsilon_l u = u \circ \epsilon_l, \quad v = v \epsilon_l = \epsilon_l \circ v, \quad \forall u \in B_l, v \in B_{l^{-1}}. \quad (2.10)$$

Como $\epsilon_l \in B_l B_{l^{-1}}$, existen $u_i \in B_l = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, M(l))$, $v_i \in B_{l^{-1}} = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M(l), M)$ tales que

$$\epsilon_l = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \sum_{i=1}^n v_i \circ u_i. \quad (2.11)$$

Además, el hecho de que ϵ_l sea un endomorfismo idempotente de M implica que $M = M' \oplus M''$, con $M' = \text{Im } \epsilon_l$ y $M'' = \text{Ker } \epsilon_l$. Afirmamos que $\epsilon_l = \epsilon_{M'}$. En efecto, sea $m \in M$. Escribamos $m = x + y$, con $x \in M'$, $y \in M''$, entonces existe $z \in M$ tal que $\epsilon_l(z) = x$. Luego,

$$\epsilon_l(m) = \epsilon_l(x) = \epsilon_l^2(z) = \epsilon_l(z) = x = \epsilon_{M'}(m).$$

Como M' es un sumando directo graduado no nulo de M , la ecuación (2.11) implica que $M' \mid M(l)$. Así, de (2.10) tenemos que $M \mid_{sd} M(l)$. Puesto que $\text{supp}(B)$ es cerrado bajo inverso, usamos el lema anterior para concluir que $M \sim_{sd} M(l)$, para todo $l \in \text{supp}(B)$.

Recíprocamente, sea $l \in \text{supp}(B)$. Por hipótesis, $M \mid_{sd} M(l)$. Luego, existe M' sumando directo graduado no nulo de M tal que $M' \mid M(l)$ y,

$$\epsilon_{M'} \circ u = u, \quad v \circ \epsilon_{M'} = v, \quad \forall u \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M(l), M), v \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, M(l)). \quad (2.12)$$

Por la Proposición 2.3.11, existe $n \in \mathbb{N}$ y homomorfismos graduados $u_i : M(l) \rightarrow M$, $v_i : M \rightarrow M(l)$ tales que

$$\sum_{i=1}^n u_i \circ v_i = \epsilon_{M'}.$$

Así, podemos definir, $\epsilon_l := \epsilon_{M'} \in B_l B_{l-1}$. Como $\epsilon_l \neq 0 \in B_l B_{l-1}$, concluimos que $B_{l-1} \neq \{0\}$ y por consiguiente, $\text{supp}(B)$ es cerrado bajo inversos. La ecuación (2.12) implica que $\epsilon_l u = u = u \epsilon_{l-1}$, para todo $u \in B_l$. Por ende, la Proposición 1.1.10 nos permite concluir que B es un anillo épsilon-fuertemente graduado. \square

Sea M un R -módulo, entonces el **módulo inducido** de M es $A \otimes_R M$ se puede G -graduar por la familia

$$(A \otimes_R M)_g = A_g \otimes_R M,$$

para todo $g \in G$. Este módulo inducido lo denotaremos por $\text{Ind}_R^A M$. Por simplicidad, en ocasiones en que la notación resulte demasiado cargada, escribiremos N en vez de $\text{Ind}_R^A M$. Para el siguiente resultado, necesitaremos notación extra. Para cada $l \in G$, considere el conjunto

$$\text{supp}_l(A) = \{g \in G \mid (g, gl) \in \text{supp}(A) \times \text{supp}(A)\}.$$

Además, definamos

$$N^{(l)} := \bigoplus_{g \in \text{supp}_l(A)} A_{gl} \otimes_R M, \quad N_{(l)} := \bigoplus_{g \in \text{supp}_l(A)} A_g \otimes_R M.$$

Es claro que $N_{(l)}$ es un submódulo graduado de N y como $N^{(l)} = N_{(l)}_{(l)}$, tenemos que $N^{(l)}$ es submódulo graduado de $N_{(l)}$.

Proposición 2.3.14. *Sea M un R -módulo. Suponga que $N^{(l)} \simeq N_{(l)}$ como módulos graduados, para todo $l \in \text{supp}(C)$. Entonces $C = \text{END}_A(\text{Ind}_R^A M)$ es épsilon-fuertemente graduado.*

Demostración. Veamos primero que $\text{supp}(C)$ es cerrado bajo inversos. Sea $l \in \text{supp}(C)$. Entonces, existe un elemento no nulo $u \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(N, N_{(l)}) = C_l$. Por lo tanto, para algún $g \in \text{supp}(A)$, tenemos que

$$\{0\} \neq u(A_g \otimes_R M) \subseteq A_{gl} \otimes_R M.$$

Esto implica que $g \in \text{supp}_l(A)$ y por lo tanto, $\pi_{N^{(l)}} : N_{(l)} \rightarrow N^{(l)}$ es no nula. Adicionalmente, por hipótesis existe $f : N^{(l)} \rightarrow N_{(l)}$ isomorfismo graduado. De esta forma, $\iota_{N_{(l)}} \circ f \circ \pi_{N^{(l)}}$ es un elemento no nulo de $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(N_{(l)}, N) = C_{l^{-1}}$. Luego, $l^{-1} \in \text{supp}(C)$. Por

otro lado, considere $\iota_{N(l)} \circ f^{-1} \circ \pi_{N(l)} \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(N, N(l)) = C_l$. Así,

$$\iota_{N(l)} \circ f \circ \pi_{N(l)} \circ \iota_{N(l)} \circ f^{-1} \circ \pi_{N(l)} = \iota_{N(l)} \circ \pi_{N(l)}.$$

Por ende, definimos $\epsilon_l := \epsilon_{N(l)} \in C_l C_{l-1}$. Ahora, sea $u \in C_l$. Afirmamos que $\text{Ker } \epsilon_l \subseteq \text{Ker } u$. Sea $x \in \text{Ker } \epsilon_l$, entonces podemos escribir $x = \sum_{g \notin \text{supp}_l(A)} x_g$, con $x_g \in N_g$. Esto implica que para cada $g \notin \text{supp}_l(A)$, $u(x_g) \in N_{gl} = \{0\}$ y por tanto,

$$u(x) = \sum_{g \notin \text{supp}_l(A)} u(x_g) = 0.$$

Es decir, $x \in \text{Ker } u$ y así, se tiene el ítem II de la Proposición 2.3.8. Luego, podemos usar el ítem III de la misma proposición, para concluir que $\epsilon_l u = u \circ \epsilon_l = u$. Finalmente, veamos que $\text{Im } u \subseteq N_{(l-1)}$. Sea $y \in \text{Im } u$, entonces existe $x \in N(l^{-1})$ tal que $u(x) = y$. Escribamos $x = \sum_{g \in G} x_{gl^{-1}}$, con $x_{gl^{-1}} \in N_{gl^{-1}}$. Note que si $g \notin \text{supp}_{l-1}(A)$, entonces $N_g = \{0\}$ y como $u(x_{gl^{-1}}) \in N_g$, tenemos que

$$y = u(x) = \sum_{g \in \text{supp}_{l-1}(A)} u(x_{gl^{-1}}).$$

Luego, $y \in N_{(l-1)}$. No obstante, $u \in C_l = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(N(l^{-1}), N)$ y así, podemos usar el ítem I de la Proposición 2.3.8 para concluir que $u \epsilon_{l-1} = \epsilon_{l-1} \circ u = u$. Finalmente, la Proposición 1.1.10 implica que C es ϵ -fuertemente graduado. \square

En la última parte de esta sección, queremos caracterizar cuando $\text{END}_A(M)$ es un producto cruzado parcial. Empezamos con la siguiente definición.

Definición 2.3.15. Sean $M, N \in \mathcal{C}$. Decimos que M y N son **ϵ -similares** si existen sumandos directos graduados no nulos M' de M , N' de N y morfismos $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, N)$ y $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(N, M)$ tales que

$$f \circ g = \epsilon_{N'}, \quad g \circ f = \epsilon_{M'}, \quad \epsilon_{N'} \circ u = u = u \circ \epsilon_{M'} \quad v \circ \epsilon_{N'} = v = \epsilon_{M'} \circ v, \quad (2.13)$$

para todo $u \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, N)$ y $v \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(N, M)$.

Teorema 2.3.16. Sean $M \in \mathcal{C}$ y $B = \text{END}_A(M)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1) B es un ϵ -producto cruzado.

II) B es un producto cruzado parcial.

III) $\text{supp}(B)$ es cerrado bajo inversos y además, M y $M(l)$ son ϵ -similares, para todo $l \in \text{supp}(B)$.

Demostración. Del Teorema 2.2.3, tenemos que los ítems I y II son equivalentes. Veamos que I implica III. Como B es un anillo ϵ -fuertemente graduado tenemos de la Proposición 1.1.10 que $\text{supp}(B)$ es cerrado bajo inversos. Sea $l \in \text{supp}(B)$. Entonces existe un elemento ϵ -invertible $f_l \in B_l = \text{Mor}_{\mathcal{G}}(M, M(l))$ y por lo tanto, existe $h_{l^{-1}} \in B_{l^{-1}} = \text{Mor}_{\mathcal{G}}(M(l), M)$ tal que $f_l h_{l^{-1}} = \epsilon_l$ y $h_{l^{-1}} f_l = \epsilon_{l^{-1}}$. Tome los siguientes sumandos directos graduados no nulos $M' = \text{Im } \epsilon_l$ y $N' = \text{Im } \epsilon_{l^{-1}}$ de M y $M(l)$, respectivamente. Al igual que en la demostración del Teorema 2.3.13, tenemos que $\epsilon_{M'} = \epsilon_l$ y $\epsilon_{N'} = \epsilon_{l^{-1}}$. Por consiguiente,

$$u = u\epsilon_{l^{-1}} = \epsilon_{N'} \circ u, \quad u = \epsilon_l u = u \circ \epsilon_{M'},$$

$$v = v\epsilon_l = \epsilon_{M'} \circ v, \quad v = \epsilon_{l^{-1}} v = v \circ \epsilon_{N'},$$

para todo $u \in B_l, v \in B_{l^{-1}}$. Esto es, M y $M(l)$, son ϵ -similares. Por último, probaremos que III implica I. Sea $l \in \text{supp}(B)$ y suponga que M y $M(l)$ son ϵ -similares. Entonces existen sumandos directos graduados no nulos M'_l de M y M''_l de $M(l)$ y, morfismos $f_l \in B_l$ y $h_{l^{-1}} \in B_{l^{-1}}$ que satisfacen (2.13). Definiendo $\epsilon_l = \epsilon_{M'_l}$, se sigue de la Proposición 1.1.10 que B es un anillo ϵ -fuertemente graduado. Además, para $l \in \text{supp}(B)$, $f_l \in B_l$ es un elemento ϵ -invertible y si $l \notin \text{supp}(B)$, tenemos que $l^{-1} \notin \text{supp}(B)$ y por ende, $\epsilon_l = 0$ pertenece a B_l y es trivialmente un elemento ϵ -invertible. \square

Ejemplo 2.3.17. Sea $B = \text{END}_{\mathbb{K}}(V)$, el ϵ -producto cruzado considerado en el Ejemplo 2.3.9. Por el Teorema 2.3.16, tenemos que B es un ejemplo de un anillo de endomorfismos que es un producto cruzado parcial.

Concluimos esta sección, presentando una condición suficiente para que el anillo de endomorfismos del módulo inducido sea un producto cruzado parcial.

Sea M un R -módulo. Diremos que M es un módulo G -invariante si $A_g \otimes_R M \simeq M$ como R -módulos, para todo $g \in \text{supp}(A)$.

Teorema 2.3.18. *Sea M un R -módulo G -invariante. Entonces*

$$C = \text{END}_A(\text{Ind}_R^A M)$$

es un producto cruzado parcial.

Demostración. Primero probaremos que C es épsilon-fuertemente graduado. Como M es G -invariante, tenemos que para todo $g \in \text{supp}_l(A)$,

$$A_{gl} \otimes_R M \cong M, \quad A_g \otimes_R M \cong M.$$

Es decir, las componentes homogéneas de $N_{(l)}$ y $N^{(l)}$ son isomorfas y por lo tanto, $N^{(l)} \simeq N_{(l)}$ como módulos graduados. Luego, la Proposición 2.3.14 implica que C es épsilon-fuertemente graduado con $\epsilon_l = \iota_{N_{(l)}} \circ \pi_{N_{(l)}}$, para cada $l \in \text{supp}(C)$. Ahora, probaremos que C es un producto-épsilon cruzado. Sea $g \in \text{supp}(A)$. Por hipótesis, existen isomorfismos

$$\phi_g : A_g \otimes_R M \rightarrow M.$$

Luego, para cada $g, h \in \text{supp}(A)$, podemos considerar el siguiente isomorfismo de R -módulos:

$$\phi_{g,h} : A_g \otimes_R M \rightarrow A_h \otimes_R M := \phi_h^{-1} \circ \phi_g,$$

cuya inversa es $\phi_{g,h}^{-1} = \phi_{h,g}$. De esta forma, para cada $l \in \text{supp}(C)$, definimos

$$\Phi_l = \sum_{g \in \text{supp}(A)} \phi'_{g,l},$$

donde

$$\phi'_{g,l} = \begin{cases} \iota_{N_{gl}} \circ \phi_{g,gl} \circ \pi_{N_g} & \text{si } g \in \text{supp}_l(A), \\ 0 & \text{si } g \notin \text{supp}_l(A). \end{cases}$$

Es claro que $\Phi_l \in C_l = \text{Mor}_C(N, N^{(l)})$. Afirmamos que Φ_l es épsilon-invertible. En efecto, considere

$$\Phi_l^{-1} = \sum_{gl \in \text{supp}(A)} \phi'_{gl,l^{-1}} \in C_{l^{-1}}.$$

Entonces, dado $x = \sum_{g \in \text{supp}(A)} a_g \otimes m \in N$ tenemos que

$$\Phi_l(x) = \sum_{g \in \text{supp}_l(A)} \phi_{g,gl}(a_g \otimes m) = \sum_{g \in \text{supp}_l(A)} (\phi_{gl}^{-1} \circ \phi_g)(a_g \otimes m).$$

Por lo tanto,

$$\Phi_l^{-1}(\Phi_l(x)) = \sum_{g \in \text{supp}_l(A)} (\phi_g^{-1} \circ \phi_{gl})(x) = \sum_{g \in \text{supp}_l(A)} a_g \otimes m = \epsilon_l(x).$$

Es decir, $\Phi_l \Phi_l^{-1} = \Phi_l^{-1} \circ \Phi_l = \epsilon_l$. Similarmente, $\Phi_l^{-1} \Phi_l = \epsilon_{l^{-1}}$. Para $l \notin \text{supp}(C)$, $\epsilon_l = 0$ es un elemento épsilon-invertible. Así, el Teorema 2.3.16 implica que C es un producto cruzado parcial. \square

2.4. Una relación entre anillos épsilon-fuertemente graduados, los grupos de cohomología y los grupos de Picard.

Sean S un anillo épsilon-fuertemente graduado y $R = S_e$. Recordemos los grupos de cohomología definidos en la Proposición 1.2.9

$$C^1(G, Z(R)) = \{f : G \rightarrow Z(R) : f(g) \in U(Z(R)\epsilon_g), \forall g \in G\},$$

$$B^1(G, Z(R)) = \{f \in C^1(G, Z(R)) \mid f(g) = \gamma_g(t)\epsilon_g t^{-1}, \text{ para algún } t \in U(Z(R))\}, \quad (2.14)$$

$$Z^1(G, Z(R)) = \{f \in C^1(G, Z(R)) \mid f(gh)\epsilon_g = f(g)\gamma_g(f(h))\epsilon_g, \forall g, h \in G\}, \quad (2.15)$$

$$H^1(G, Z(R)) = \frac{B^1(G, Z(R))}{Z^1(G, Z(R))}.$$

Proposición 2.4.1. Sean S un anillo épsilon-fuertemente graduado y $R = S_e$. Considere

$$\text{Pic}^{gr}(S) = \{[P] \in \text{Pic}(S) : P \text{ es un } S\text{-bimódulo graduado}\},$$

$$\text{Pic}_S(R) = \{[P] \in \text{Pic}(R) : [P] = [Q_e], \text{ para algún } [Q] \in \text{Pic}^{gr}(S)\}.$$

Entonces, $\text{Pic}^{gr}(S)$ y $\text{Pic}_S(R)$ son subgrupos de $\text{Pic}(S)$ y $\text{Pic}(R)$, respectivamente.

Demostración. Por el Ejemplo 2.3.2, es claro que $\text{Pic}^{gr}(S)$ es un subgrupo de $\text{Pic}(S)$. Ahora, si $[P] \in \text{Pic}_S(R)$ y $[P'] \in \text{Pic}_S(R)$, entonces existe $[Q], [Q'] \in \text{Pic}^{gr}(S)$, tales que $[P] = [Q_e]$ y $[P'] = [Q'_e]$. Afirmamos que $(Q \otimes_S Q')_e \cong Q_e \otimes_R Q'_e$. En efecto, por el Ejemplo 2.3.2 $(Q \otimes_S Q')_e = \sum_{g \in G} Q_g \otimes_S Q'_{g^{-1}}$. Considere $\iota : Q_e \otimes_R Q'_e \rightarrow (Q \otimes_S Q')_e$

la inclusión. Recordemos que para cada $g \in G$, existen $u_{g^{-1}}^{(i)} \in S_{g^{-1}}, v_g^{(i)} \in S_g$ tales que $\epsilon_{g^{-1}} = \sum_{i=1}^{n_{g^{-1}}} u_{g^{-1}}^{(i)} v_g^{(i)}$. Así, podemos considerar la función $\rho : (Q \otimes_S Q')_e \rightarrow Q_e \otimes_R Q'_e$, definida cada $q \in Q_g, q' \in Q'_{g^{-1}}$ por

$$\rho(q \otimes_S q') = \sum_{i=1}^{n_{g^{-1}}} q u_{g^{-1}}^{(i)} \otimes_R v_g^{(i)} q'.$$

Para verificar que ρ está bien definida, debemos ver que no dependen de la descomposición de $\epsilon_{g^{-1}}$. Supongamos que $\epsilon_{g^{-1}} = \sum_{j=1}^{n'_{g^{-1}}} a_{g^{-1}}^{(j)} b_g^{(j)}$, entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_{g^{-1}}} q u_{g^{-1}}^{(i)} \otimes_R v_g^{(i)} q' &= \sum_{i=1}^{n_{g^{-1}}} q \epsilon_{g^{-1}} u_{g^{-1}}^{(i)} \otimes_R v_g^{(i)} q' \\ &= \sum_{i=1}^{n_{g^{-1}}} q \left(\sum_{j=1}^{n'_{g^{-1}}} a_{g^{-1}}^{(j)} b_g^{(j)} \right) u_{g^{-1}}^{(i)} \otimes_R v_g^{(i)} q' \\ &= \sum_{i=1}^{n_{g^{-1}}} \sum_{j=1}^{n'_{g^{-1}}} q a_{g^{-1}}^{(j)} \otimes_R b_g^{(j)} u_{g^{-1}}^{(i)} v_g^{(i)} q' \\ &= \sum_{j=1}^{n'_{g^{-1}}} q a_{g^{-1}}^{(j)} \otimes_R b_g^{(j)} \sum_{i=1}^{n_{g^{-1}}} u_{g^{-1}}^{(i)} v_g^{(i)} q' \\ &= \sum_{j=1}^{n'_{g^{-1}}} q a_{g^{-1}}^{(j)} \otimes_R b_g^{(j)} \epsilon_{g^{-1}} q' \\ &= \sum_{j=1}^{n'_{g^{-1}}} q a_{g^{-1}}^{(j)} \otimes_R b_g^{(j)} q'. \end{aligned}$$

Por ende, la función ρ está bien definida. Es claro que ι es un monomorfismo. Resta ver

que es sobreyectiva. Para esto, sean $q \in Q_g, q' \in Q'_g$, entonces

$$\begin{aligned}
\iota(\rho(q \otimes_S q')) &= \iota \left(\sum_{i=1}^{n_{g-1}} qu_{g-1}^{(i)} \otimes_R v_g^{(i)} q' \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n_{g-1}} qu_{g-1}^{(i)} \otimes_S v_g^{(i)} q' \\
&= \sum_{i=1}^{n_{g-1}} q \otimes_S u_{g-1}^{(i)} v_g^{(i)} q' \\
&= q \otimes_S \epsilon_{g-1} q' = q \otimes_S q'.
\end{aligned}$$

Así, hemos probado que ι es un isomorfismo. De esta forma, $[P \otimes_R P'] = [Q_e \otimes_R Q'_e] = [(Q \otimes_S Q')_e]$ y por lo tanto, $\text{Pic}_S(R)$ es un subgrupo de $\text{Pic}(R)$. \square

Para cualquier automorfismo σ de S , denotamos por σS a S considerado como (S, S) -bimódulo, con la acción a la izquierda dada por $s' \cdot s = \sigma(s')s$ y la acción a la derecha dada por el producto usual de S . Esta última sección está dedicada a mostrar una conexión entre los grupos de cohomología parcial y los grupos de Picard definidos anteriormente. Para esto, debemos definir algunos grupos complementarios:

$$\begin{aligned}
\text{Inn}(R) &= \{\sigma \in \text{Aut}(R) \mid \sigma(r) = trt^{-1}, \text{ para algún } t \in U(R)\}, \\
\text{Inn}_S(R) &= \{\sigma \in \text{Inn}(S) \mid \sigma(s) = tst^{-1}, \text{ para algún } t \in U(R)\}, \\
\text{Aut}^{gr}(S) &= \{\sigma \in \text{Aut}(S) \mid \sigma(S_g) \subseteq S_g, \text{ para todo } g \in G\}, \\
\text{Aut}_S(R) &= \{\sigma \in \text{Aut}(R) \mid \sigma \text{ puede ser extendido a } h \in \text{Aut}^{gr}(S)\}.
\end{aligned}$$

En ¹⁴, Proposición 4.2, los autores presentan un diagrama conmutativo que relaciona los grupos anteriormente mencionados, bajo la hipótesis de que el anillo S es fuertemente graduado. A continuación, mostramos los avances obtenidos al considerar el caso más general en el que S es épsilon-fuertemente graduado.

Teorema 2.4.2. *Sea S un anillo épsilon-fuertemente graduado. Entonces existe un*

¹⁴ A. DEL RIO y J. HAEFNER. "Actions of Picard Groups and Graded Rings". En: *Journal of Algebra* 218.2 (1999), págs. 573-607.

diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 1 & & 1 & & 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
1 & \rightarrow & B^1(G, Z(R)) & \xrightarrow{\alpha_1} & \text{Inn}_R(S) & \xrightarrow{\beta_1} & \text{Inn}(R) \rightarrow 1 \\
& & \downarrow \iota_1 & & \downarrow \iota_2 & & \downarrow \iota_3 \\
1 & \rightarrow & Z^1(G, Z(R)) & \xrightarrow{\alpha_2} & \text{Aut}^{\text{gr}}(S) & \xrightarrow{\beta_2} & \text{Aut}_S(R) \rightarrow 1 \\
& & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_3 \\
1 & \rightarrow & H^1(G, Z(R)) & \xrightarrow{\alpha_3} & \text{Pic}^{\text{gr}}(S) & \xrightarrow{\beta_3} & \text{Pic}_S(R) \rightarrow 1 \\
& & \downarrow & & & & \\
& & 1 & & & &
\end{array}$$

con las filas y columnas sucesiones exactas, donde para cualquier $c \in Z^1(G, Z(R))$, tenemos que $\alpha_2(c) : S \rightarrow S$, $\alpha_2(c)(s_g) = c(g)s_g$, para todo $g \in G$, $s_g \in S$. Además, α_1 es la restricción de α_2 a $B^1(G, Z(R))$; $\alpha_3(\bar{c}) = [\alpha_2(c)S]$; β_1 y β_2 son restricciones; y $\beta_3([P]) = [P_e]$ para cualquier $P \in \text{Pic}^{\text{gr}}(S)$. Finalmente, π_1 es la proyección canónica; $\pi_2(\sigma) = [\sigma S]$; $\pi_3(\sigma) = [\sigma R]$; y los homomorfismos verticales, denotados por ι , son inclusiones.

Demostración. En la primera parte de esta demostración, mostraremos que todas las funciones involucradas están bien definidas y son homomorfismos. Comenzamos con α_1 .

Sea $c \in B^1(G, Z(R))$, entonces por (2.14), existe $t \in U(Z(R))$ tal que $c(g) = \gamma_g(t)\epsilon_g t^{-1}$, para cada $g \in G$. Luego, para cada $s_g \in S_g$

$$\alpha_1(c)(s_g) = c(g)s_g = \gamma_g(t)\epsilon_g t^{-1}s_g = t^{-1}\gamma_g(t)s_g \stackrel{(1.1)}{=} t^{-1}s_g t.$$

Esto implica que $\alpha_1(c)(s) = t^{-1}st$, para todo $s \in S$ y por lo tanto, $\alpha_1(c) \in \text{Inn}_R(S)$. Es decir, α_1 está bien definida. Ahora, si $c \in Z^1(G, Z(R))$, entonces para cualesquiera $s_g \in S_g$ y $s_h \in S_h$, tenemos que

$$\alpha_2(c)(s_g s_h) = c(gh)s_g s_h \stackrel{(2.15)}{=} c(g)\gamma_g(c(h))s_g s_h \stackrel{(1.1)}{=} c(g)s_g c(h)s_h = \alpha_2(c)(s_g)\alpha_2(c)(s_h).$$

Esto implica que $\alpha_2(c)$ es un homomorfismo de anillos de S . Considere $\lambda(c) : S \rightarrow S$, definida para cada $g \in G$ y $s_g \in S_g$ por $\lambda(c)(s_g) = c(g)^{-1}s_g$. Así,

$$(\alpha_2(c) \circ \lambda(c))(s_g) = \alpha_2(c)(c(g)^{-1}s_g) = c(g)c(g)^{-1}s_g = \epsilon_g s_g = s_g,$$

$$(\lambda(c) \circ \alpha_2(c))(s_g) = \lambda(c(g)s_g) = c(g)^{-1}c(g)s_g = \epsilon_g s_g = s_g.$$

Esto implica que $\lambda(c)$ es la inversa de $\alpha_2(c)$. Por lo tanto, $\alpha_2(c) \in \text{Aut}(S)$ y además, $\alpha_2(c)(S_g) = c(g)S_g \subseteq RS_g \subseteq S_g$. Luego, $\alpha_2(c) \in \text{Aut}^{gr}(S)$.

Para probar que α_3 está bien definida, supongamos que c, c' son 1-cociclos cohomologos. Entonces existe $f \in B^1(G, Z(R))$ tal que $c(g) = f(g)c'(g)$, para todo $g \in G$. Por (2.14), existe $t \in U(Z(R))$ tal que $c(g) = \gamma_g(t)t^{-1}c'(g)$. Considere

$$\begin{aligned} \varphi : \alpha_2(c)S &\longrightarrow \alpha_2(c')S \\ s &\longmapsto ts \end{aligned}.$$

Entonces para $s_g \in S_g, s_h \in S_h$ vale que

$$\begin{aligned} \varphi(s_g \cdot s_h) &= \varphi(\alpha_2(c)(s_g)s_h) = tc(g)s_g s_h \\ &= t\gamma_g(t)t^{-1}c'(g)s_g s_h = tt^{-1}\gamma_g(t)c'(g)s_g s_h \\ &\stackrel{(1.1)}{=} c'(g)s_g ts_h = \alpha_2(c')(s_g)\varphi(s_h) = s_g \cdot \varphi(s_h), \end{aligned}$$

y $\varphi(s_g s_h) = ts_h s_g = \varphi(s_h)s_g$. Además, es sencillo ver que

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \alpha_2(c')S &\longrightarrow \alpha_2(c)S \\ s &\longmapsto t^{-1}s \end{aligned}$$

es la inversa de φ . Por lo tanto, φ es un isomorfismo de bimódulos y dado que claramente es graduada, concluimos que $[\alpha_2(c)S] = [\alpha_2(c')S]$.

Es claro que $\text{Inn}_R(S) \subseteq \text{Aut}^{gr}(S)$ y $\text{Inn}(R) \subseteq \text{Aut}_S(R)$; luego, ι_2 y ι_3 están bien definidas. Ahora, veamos π_2 . Sea $\sigma \in \text{Aut}(S)$, queremos ver que $[\sigma S] \in \text{Pic}(S)$. Considere $\psi : {}^\sigma S \otimes {}^{\sigma^{-1}}S \rightarrow S$, dada por $\psi(s_1 \otimes s_2) = \sigma^{-1}(s_1)s_2$. Note que

$$\psi(s_1 s \otimes s_2) = \sigma^{-1}(s_1)\sigma^{-1}(s)s_2 = \psi(s_1 \otimes \sigma^{-1}(s)s_2) = \psi(s_1 \otimes s \cdot s_2),$$

para cada $s, s_1, s_2 \in S$. Por ende, ψ está bien definida. Comprobemos que efectivamente ψ sea un homomorfismo de bimódulos

$$\psi(s \cdot s_1 \otimes s_2) = \sigma^{-1}(\sigma(s))\sigma^{-1}(s_1)s_2 = s\sigma^{-1}(s_1)s_2 = s\psi(s_1 \otimes s_2),$$

$$\psi(s_1 \otimes s_2 s) = \sigma^{-1}(s_1) s_2 s = \psi(s_1 \otimes s_2) s.$$

Note que definiendo $\psi^{-1} : S \rightarrow {}^\sigma S \otimes {}^{\sigma^{-1}} S$ por $\psi(s) = \sigma(s) \otimes 1_S$, para cada $s \in S$ tenemos que

$$\psi^{-1}(\psi(s_1 \otimes s_2)) = \sigma(\sigma^{-1}(s_1)) \sigma(s_2) \otimes 1_S = s_1 \otimes \sigma(s_2) \cdot 1_S = s_1 \otimes \sigma^{-1}(\sigma(s_2)) 1_S = s_1 \otimes s_2.$$

Además, es claro que $\psi(\psi^{-1}(s)) = s$ y por consiguiente, ψ es un isomorfismo de S -bimódulos. Lo que implica que ${}^\sigma S$ es un bimódulo invertible. Por último, como $\sigma \in \text{Aut}^{gr}(S)$, tenemos que $\sigma(S_g) = S_g$ y por lo tanto, $S_g \otimes S_h \subseteq S_{gh}$. En consecuencia, $[\sigma S] \in \text{Pic}^{gr}(S)$.

Similarmente, dado $\sigma \in \text{Aut}_S(R)$, por lo hecho en π_2 , $[\sigma R] \in \text{Pic}(R)$. Más aún, si $\sigma' \in \text{Aut}^{gr}(S)$ es la extensión entonces $[\sigma' S] \in \text{Pic}^{gr}(S)$ y $[\sigma' S_e] = [\sigma R]$. Luego, $[\sigma R] \in \text{Pic}_S(R)$ y así, π_3 está bien definida. Es claro que β_1, β_2 están bien definidas y todas las funciones anteriormente mencionadas son homomorfismos de grupos.

Finalmente, veamos β_3 es un homomorfismo. Dado $[P] \in \text{Pic}^{gr}(S)$, probaremos que $[P_e] \in \text{Pic}(R)$. Tenemos que existen $[Q] \in \text{Pic}^{gr}(S)$ y $\mu : P \otimes_S Q \rightarrow S, \tau : Q \otimes_S P \rightarrow S$, isomorfismos de S -bimódulos graduados. Como en la demostración de la Proposición 2.4.1 tenemos que $(P \otimes_S Q)_e \cong P_e \otimes_R Q_e$. Además, μ, τ son isomorfismos graduados y por lo tanto, $(P \otimes_S Q)_e \cong S_e = R$ y $(Q \otimes_S P)_e \cong S_e = R$. De esta forma, lo anterior implica que $P_e \otimes_R Q_e \cong R$ y $Q_e \otimes_R P_e \cong R$. Luego, $[P_e] \in \text{Pic}(R)$. Con esto garantizado es claro que $[P_e] \in \text{Pic}_S(R)$. Note que $(P \otimes_S Q)_e \cong P_e \otimes_R Q_e$ también implica que

$$\beta_3([P][Q]) = \beta_3([P \otimes_S Q]) = [(P \otimes_S Q)_e] = [P_e][Q_e].$$

Esto es, β_3 es un homomorfismo de grupos. La conmutatividad del diagrama es inmediata de las definiciones de los homomorfismos involucrados.

En esta segunda parte, demostraremos que las columnas forman sucesiones exactas. De la Proposición 1.2.4 es claro que la primera columna es una sucesión exacta. Veamos que la sucesión

$$1 \rightarrow \text{Inn}_R(S) \xrightarrow{\iota_2} \text{Aut}^{gr}(S) \xrightarrow{\pi_3} \text{Pic}^{gr}(S)$$

es exacta. Es claro que ι_2 es inyectiva. Mostraremos que $\text{Inn}_R(S) = \text{Ker } \pi_3$. Sea $\sigma \in$

$\text{Inn}_R(S)$, entonces existe $t \in U(R)$ tal que $\sigma(s) = tst^{-1}$, para todo $s \in S$. Considere la siguiente función

$$f: \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & {}^\sigma S \\ s & \longmapsto & ts \end{array}.$$

Es sencillo ver que f es un isomorfismo de S -bimódulos graduados y por lo tanto, $[S] = [{}^\sigma S]$. Esto es, $\sigma \in \text{Ker } \pi_2$. Recíprocamente, sea $f: S \rightarrow {}^\sigma S$ un isomorfismo de S -bimódulos graduados. Entonces f^{-1} es también un homomorfismo graduado y por ende,

$$f(1_S)f^{-1}(1_S) = f(1_S f^{-1}(1_S)) = f(f^{-1}(1_S)) = 1_S, \quad f^{-1}(1_S)f(1_S) = f(1_S f^{-1}(1_S)) = 1_S.$$

Luego, $f(1_S)$ es un elemento invertible. Además, dado que $1_S \in R$ y f es graduada, concluimos que $f(1_S) \in U(R)$. Por otro lado, sea $s \in S$, entonces

$$f(1_S)s = f(s) = f(s1_S) = s \cdot f(1_S) = \sigma(s)f(1_S).$$

Esto implica que $\sigma(s) = f(1_S)sf(1_S)^{-1}$ y así, $\text{Ker } \pi_2 \subseteq \text{Inn}_R(S)$. Análogamente, mostramos que la columna 3 es una sucesión exacta.

En esta última parte, resta probar que las filas son sucesiones exactas. Es claro que β_1, β_2 y β_3 son epimorfismos. Veamos que la fila 1 es exacta. En primer lugar, afirmamos que α_1 es inyectiva. En efecto, sea $c \in \text{Ker } \alpha_1$, entonces para todo $g \in G$, $s_g \in S_g$ tenemos que

$$\epsilon_g s_g = s_g = \alpha_1(c)s_g = c(g)s_g. \quad (2.16)$$

Luego, el ítem vb) de la Proposición 1.4.9 implica que $\epsilon_g = c(g)$, para todo $g \in G$. Luego, α_1 es inyectiva. Ahora, probaremos que $\text{Im } \alpha_1 = \text{Ker } \beta_1$. Sea $\lambda \in \text{Ker } \beta_1$, entonces $\lambda(r) = r$, para todo $r \in R$. Además, recordemos que existe $t \in U(R)$ tal que $\lambda(s) = tst^{-1}$, para todo $s \in S$. Luego, $r = trt^{-1}$, para todo $r \in R$. Esto es, $t \in Z(R)$. Considere $c \in B^{-1}(G, Z(R))$ dado por $c(g) = \gamma_g(t^{-1})\epsilon_g t$, para cada $g \in G$. Entonces,

$$\alpha_1(c)(s_g) = c(g)s_g = \gamma_g(t^{-1})ts_g = t\gamma_g(t^{-1})s_g \stackrel{(1.1)}{=} ts_g t^{-1}, \quad \forall g \in G, \forall s_g \in S_g.$$

En consecuencia, $\alpha_1(c) = \lambda$. Recíprocamente, sea $c \in B^1(G, Z(R))$, entonces existe

$t \in U(Z(R))$ tal que $c(g) = \gamma_g(t)\epsilon_g t^{-1}$. Así,

$$\beta_1(\alpha_1(c))(r) = \alpha_1(c)(r) = c(e)r = \gamma_e(t)t^{-1}r = tt^{-1}r.$$

Por consiguiente, $\alpha_1(c) \in \text{Ker } \beta_1$. De esta forma, hemos probado que la fila 1 es exacta.

La inyectividad de α_2 se obtiene mediante un argumento análogo al utilizado para α_1 . Veamos que $\text{Im } \alpha_2 = \text{Ker } \beta_2$. Sea $c \in Z^1(G, Z(R))$. Entonces por (2.15) tenemos que $c(e)\epsilon_e = c(e)\gamma_e(c(e))\epsilon_e$. Lo que implica que $c(e) = 1$ y así, $\alpha_2(c)(r) = c(e)r = r$, para todo $r \in R$. Recíprocamente, sea $\sigma \in \text{Ker } \beta_2$, entonces $\sigma(r) = r$, para todo $r \in R$. Sea $g \in G$, escribamos $\epsilon_g = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} v_{g^{-1}}^{(i)}$, con $u_g^{(i)} \in S_g, v_{g^{-1}}^{(i)} \in S_{g^{-1}}$. Para cada $g \in G$, defina

$$c(g) = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} \sigma^{-1}(v_{g^{-1}}^{(i)}).$$

Sea $s_g \in S_g$. Entonces como σ^{-1} es sobreyectiva, existe $x_g \in S_g$ tal que $\sigma^{-1}(x_g) = s_g$. Así,

$$c(g)s_g = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} \sigma^{-1}(v_{g^{-1}}^{(i)})s_g = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} \sigma^{-1}(v_{g^{-1}}^{(i)}x_g) = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} v_{g^{-1}}^{(i)} x_g = x_g = \sigma(s_g). \quad (2.17)$$

Por otro lado, es claro que $c(g) \in R$ y $c(g)\epsilon_g = c(g)$. Note que dado $r \in R, s_g \in S_g$

$$c(g)rs_g = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} \sigma^{-1}(v_{g^{-1}}^{(i)}rx_g) = \epsilon_g rx_g = rx_g = r\sigma(s_g) \stackrel{(2.17)}{=} rc(g)s_g.$$

Una vez más, por el ítem vb) de la Proposición 1.4.9, lo anterior implica que $rc(g) = c(g)r$ y por lo tanto, $c(g) \in Z(R)\epsilon_g$. Defina $c'(g) = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} \sigma(v_{g^{-1}}^{(i)})$. Por lo hecho anteriormente, tenemos que $c'(g) \in Z(R)$ y $\sigma^{-1}(s_g) = c'(g)s_g$. Luego,

$$\epsilon_g s_g = \sigma(\sigma^{-1}(s_g)) = \sigma(c'(g)s_g) = c(g)c'(g)s_g.$$

Como se vale para todo $g \in G$ y todo $s_g \in S_g$, concluimos que $c(g)c'(g) = \epsilon_g$, para todo $g \in G$. De esta forma, hemos probado que $c \in C^1(G, Z(R))$. Resta ver que $c \in Z^1(G, Z(R))$. Para esto, sean $g, h \in G, s_g \in S_g$ y $s_h \in S_h$. Entonces

$$c(g)\gamma_g(c(h))\epsilon_g s_g s_h \stackrel{(1.1)}{=} c(g)s_g c(h)s_h = \sigma(s_g)\sigma(s_h) = \sigma(s_g s_h) = c(gh)s_g s_h.$$

Luego, $c(g)\gamma_g(c(h))\epsilon_g = c(gh)$, para todo $g, h \in G$. La ecuación (2.17) implica que $\alpha_2(c) = \sigma$ y por tanto, $\text{Ker } \beta_2 \subseteq \text{Im } \alpha_2$.

Por último, veamos que la tercera fila es exacta. Empezamos probando que α_3 es inyectiva. Sea $\text{cls}(c) \in \text{Ker } \alpha_3$. Entonces $\alpha_2(c) \in \text{Inn}_R(S)$ y por ende, existe $t \in U(R)$ tal que $\alpha_2(c)(s) = tst^{-1}$, para todo $s \in S$. Por otro lado, como la fila 2 es exacta, $\alpha_2(c) \in \text{Ker } \beta_2$ y por lo tanto, la ecuación anterior implica que $t \in Z(R)$. Así, para cada $g \in G$, $s_g \in S_g$ tenemos que

$$c(g)s_g = ts_g t^{-1} \stackrel{(1.1)}{=} t\gamma_g(t^{-1})s_g = \gamma_g(t^{-1})ts_g.$$

Una vez más, el ítem vb) de la Proposición 1.4.9 implica que $c \in B^1(G, Z(R))$ y por consiguiente, α_3 es inyectiva. Es sencillo ver que $\text{Im } (\alpha_3) \subseteq \text{Ker } (\beta_3)$. La otra contención permanece aún sin demostración, siendo este el único aspecto pendiente en nuestro resultado. □

Bibliografía

- BAEZ, J. “Semigrupo de Picard y acciones parciales”. En: *Tesis de Maestría, Universidad Industrial de Santander* (2016) (vid. págs. 23, 25).
- BAGIO, D., L. MARTINEZ y H. PINEDO. “Epsilon-strongly graded rings: Azumaya algebras and partial crossed products”. En: *Forum Mathematicum* 35 (2023), págs. 1257-1277 (vid. pág. 9).
- DEL RIO, A. y J. HAEFNER. “Actions of Picard Groups and Graded Rings”. En: *Journal of Algebra* 218.2 (1999), págs. 573-607 (vid. pág. 75).
- DOKUCHAEV, M., R. EXEL y J. SIMON. “Crossed products by twisted partial actions and graded algebras”. En: *Journal of Algebra* 320 (2008), págs. 3278-3310 (vid. pág. 8).
- DOKUCHAEV, M. y M. KHRYPCHENKO. “Partial cohomology of groups”. En: *Journal of Algebra* 427 (2015), págs. 142-182 (vid. págs. 17, 18).
- DOKUCHAEV, M e I. ROCHA. *Partial generalized crossed products and a seven term exact sequence (expanded version)*. 2021. URL: <https://arxiv.org/abs/2105.01268> (vid. págs. 42, 46).
- DOKUCHAEV, M. et al. “Partial generalized crossed products and a seven-term exact sequence”. En: *Journal of Algebra* 572 (2021), págs. 195-230 (vid. págs. 42, 47).
- EXEL, R. “Partial actions of groups and actions of inverse semigroups”. En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 126.12 (2021), 3481–3494 (vid. pág. 8).
- GONÇALVES, D. y D. ROYER. “Leavitt path algebras as partial skew group rings”. En: *Communications in Algebra* 42.8 (2014), págs. 3578-3592 (vid. pág. 8).
- JACOBSON, N. *Basic Algebra II: Second Edition*. Dover Books on Mathematics, 2012 (vid. pág. 28).

MARTINEZ, L. “Sobre anillos fuertemente graduados y epsilon-fuertemente graduados”. En: *Tesis de Maestría, Universidad Industrial de Santander* (2021) (vid. pág. 9).

NYSTEDT, P., J. ÖINERT y H. PINEDO. “Epsilon-strongly graded rings, separability and semisimplicity”. En: *Journal of Algebra* 514 (2018), págs. 1-24 (vid. págs. 8, 9, 17, 19, 42).

ROCHA, I. “Uma sequencia exata relacionada a una extensao de aneis e una representacao parcial”. En: *Tesis de Doctorado, Universidad Sao Paulo* (2017) (vid. pág. 29).

ROTMAN, J. *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall, 2002 (vid. pág. 43).