PROCESOS DE OBJETIVACIÓN EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO

JOHANNA CAROLINA MARTÍNEZ AVENDAÑO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2016

PROCESOS DE OBJETIVACIÓN EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO

JOHANNA CAROLINA MARTÍNEZ AVENDAÑO

Trabajo de Grado para Optar al Título de
Magíster en Educación Matemática

Directora:
SOLANGE ROA FUENTES
Doctora en Ciencias Especialidad en Matemática Educativa

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2016

DEDICATORÍA

A mi padre, para quien siempre seré su niña consentida

AGRADECIMIENTOS

A Dios, que me ha dado sabiduría, fortaleza y paciencia para seguir adelante en todos los proyectos de mi vida.

A mi familia, por su comprensión y amor incondicional.

A la profesora Solange Roa, por ser una persona excepcional y brindarme la orientación necesaria para la realización de este proyecto.

Al profesor Rodolfo Vergel, por su carisma, profesionalismo y por compartir su sabiduría.

A la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, por darme la oportunidad de participar en espacios académicos para profundizar en aspectos conceptuales y metodológicos de la teoría de la Objetivación.

A mis compañeros de maestría, por tantos gratos momentos compartidos.

A la Institución Educativa Oriente Miraflores, por haberme permitido ser parte de su comunidad educativa.

CONTENIDO

Pág.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

LISTA DE TRANSCRIPCIONES

LISTA DE CUADROS

RESUMEN

TÍTULO: PROCESOS DE OBJETIVACIÓN EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO*

AUTOR: Johanna Carolina Martínez Avendaño**

PALABRAS CLAVE: *Pensamiento Algebraico Temprano, Objetivación, Generalización de patrones*.

DESCRIPCIÓN:

Este estudio se enfocó en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, tomando como fundamento la Teoría Cultural de la Objetivación para identificar y analizar los procesos de objetivación que desarrollan estudiantes de quinto grado de educación básica primaria (10-11 años) en su actividad matemática, considerada como una actividad semiótica, cuando se enfrentan a tareas que implican generalización de patrones figurales y numéricos. Específicamente, esta investigación intenta aportar luces en relación con el rol de los medios semióticos de objetivación en el proceso de lograr una forma estable de conciencia de la manera en que las tareas propuestas pueden ser abordadas algebraicamente. Además, brinda elementos asociados con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar con el fin de generar la reflexión de los docentes de matemáticas, así como vislumbrar formas alternativas de intervención en el aula que pongan de manifiesto el reconocimiento del carácter algebraico que tiene la aritmética.

La metodología adoptada fue una metodología multisemiótica, la cual estudia el papel y la relación de los diferentes recursos semióticos (corporales, lingüísticos, simbólicos) en la producción de significados.

Los resultados de este estudio evidencian que es en la materialidad de la actividad que los estudiantes logran una evolución de los medios semióticos de objetivación movilizados y de los nodos semióticos en la actividad matemática, lo cual les permitió una toma de conciencia de formas algebraicas de pensamiento sobre generalización de patrones.

---

* Trabajo de grado.
** Facultad de Ciencias Exactas. Escuela de Matemáticas. Directora: Ph.D. Solange Roa Fuentes.

ABSTRACT

TITLE: PROCESSES OF OBJECTIFICATION IN THE DEVELOPMENT OF THE EARLY ALGEBRAIC THINKING.*

AUTHOR: Johanna Carolina Martínez Avendaño**

KEY WORDS: *Early Algebraic Thinking, Objectification, Generalization of patterns*.

DESCRIPTION:

This study focused on the development of the early algebraic thinking, taking as a basis the Cultural Theory of Objectification to identify and analyze the processes of objectification that fifth-grade basic education (10-11-year-old students) develops in their mathematical activity, considered as a semiotic activity, when faced with tasks involving generalization of figural and number patterns. Specifically, this research is to guide light in relation to the role of semiotic means of objectification in the process of achieving a stable form of awareness of how the proposed tasks can be addressed algebraically. It also provides elements associated with the teaching and learning of school algebra in order to generate the reflection of Mathematics teachers and glimpse alternative forms of intervention in the classroom that demonstrate the recognition of the algebraic character that arithmetic has.

The methodology adopted was a multi-semiotic methodology, which studies the role and relationship of the different semiotic resources - corporeal, linguistic and symbolic – in the production of meanings.

The result of this study shows that it is in the materiality of the activity that students reach an evolution of the mobilized semiotic means of objectification and semiotic nodes in mathematical activity, which allowed them to an awareness of algebraic forms of thought on generalization of patterns.

* Graduation paper.

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Director: Ph. D. Solange Roa Fuentes.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de ideas algebraicas en los niveles educativos básicos es un tema de creciente interés tanto en propuestas curriculares como en investigación en Educación Matemática (NCTM, 2000; Cai y Knuth, 2011; Vergel, 2015b). Según Cai y Knuth (2011) un desarrollo del pensamiento algebraico temprano podría facilitar a los estudiantes el estudio de conceptos más complejos del álgebra en niveles superiores. Sin embargo, Cai y Knuth (2011) indican que se requiere profundizar en investigación sobre mejores maneras de potenciar el pensamiento algebraico, incluso en temas que han sido tradicionalmente aritméticos.

En este sentido, Radford (2014b) en sus investigaciones muestra que si bien en la escuela "el pensamiento aritmético ha sido asumido como prerrequisito para la emergencia y desarrollo del pensamiento algebraico" (p. 258), es posible en los primeros grados promover en los estudiantes formas elementales de pensamiento algebraico. Además, en otros de sus resultados (Radford, 2010a) reconoce un espacio de una zona conceptual, denominada *zona de emergencia del pensamiento algebraico,* donde los estudiantes de grados elementales pueden empezar a pensar en forma algebraica aún en ausencia de signos alfanuméricos del álgebra. Sin embargo, estos resultados han sido ignorados tal vez por falta de una clara distinción entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico. Así mismo, Cai y Knuth (2011) señalan que los estudiantes de los primeros grados son capaces de pensar algebraicamente al resolver problemas, y que el hecho de trabajar ideas algebraicas puede ayudarlos a desarrollar formas aritméticas y algebraicas de pensar.

Para Vergel (2015b), una forma que ha sido bastante útil en la introducción de las primeras ideas algebraicas es el proceso de generalización, ya que permite a los estudiantes reflejar su pensamiento algebraico, no obstante manifiesta la importancia de continuar investigando el proceso de constitución del pensamiento algebraico temprano. Según Vergel (2015b), tal proceso de constitución del pensamiento algebraico puede darse incluso en ausencia de signos alfanuméricos del álgebra. Del mismo modo, Radford (2014b) expresa que sin desconocer que el simbolismo alfanumérico constituye un poderoso sistema semiótico, el pensamiento algebraico no puede reducirse solamente a la mera notación de símbolos, por lo que podemos observar que para que se dé el proceso de constitución del pensamiento algebraico no necesariamente el estudiante tiene que usar en su actividad matemática signos alfanuméricos. Además, Radford (2010a) afirma que la denotación de la generalización algebraica puede ser realizada a través de una actividad multimodal, en la cual "es importante considerar los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes movilizan cuando trabajan con ideas matemáticas" (Vergel, 2015b, p. 196).

Esta investigación la realizamos desde el enfoque cualitativo, estuvo dirigida a un grupo de estudiantes de grado quinto, seleccionado de la Institución Educativa Oriente Miraflores, de la ciudad de Bucaramanga. En concordancia con el profesor titular del grupo seleccionado realizamos una serie de actividades concebidas desde el enfoque cultural de la objetivación, adoptando una metodología multisemiótica. La metodología multisemiótica, como indica Radford y Sabena (2015), se interesa en la manera en que profesores y estudiantes recurren a diferentes recursos semióticos (corporales, lingüísticos, simbólicos) en los procesos de objetivación, a través de los cuales los estudiantes pueden tomar conciencia de la lógica cultural y significados de pensar y hacer matemáticas.

Este documento está organizado en cinco capítulos: en el primero "*Pensamiento Algebraico Temprano"* presentamos una síntesis de investigaciones relacionadas con la importancia de la inclusión del álgebra en grados elementales. En el segundo capítulo *"La teoría Cultural de la Objetivación"* realizamos una breve descripción y mencionamos algunas características generales de la teoría cultural de la objetivación, y luego presentamos algunos estudios recientes que documentan el proceso de generalización de patrones desde este enfoque teórico. En el tercer capítulo, planteamos los objetivos generales y específicos de nuestra investigación. En el cuarto capítulo "*Metodología"* definimos el método de investigación, el contexto, la población, el diseño metodológico, técnicas e instrumentos que utilizamos, así como el proceso de análisis a priori y a posteriori de las actividades implementadas. Finalmente, en el quinto capítulo "*Conclusiones*" mencionamos los resultados más relevantes del proceso investigativo. Además, presentamos las referencias bibliográficas en que basamos nuestro estudio.

1. PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO

En esta investigación nos apoyamos en diferentes trabajos que han estudiado la inclusión del álgebra en la educación básica recurriendo en particular al estudio de patrones, a través de tareas de secuencias y su proceso de generalización. Primeramente presentamos algunos antecedentes de investigaciones que han estudiado la incorporación del álgebra en la escuela elemental, en aspectos relacionados con la naturaleza del razonamiento algebraico, herramientas que pueden promover el desarrollo de ideas algebraicas y propuestas de enseñanza. Luego, continuamos con la caracterización del proceso de generalización algebraica analizado desde diferentes autores.

1.1 EL ÁLGEBRA TEMPRANA

Las políticas educativas en diferentes documentos, Estándares y Lineamientos Curriculares (Ministerio de Educación Nacional, 1998; 2006), señalan la importancia del desarrollo del pensamiento matemático (*pensamiento numérico, pensamiento espacial, pensamiento métrico, pensamiento variacional y pensamiento aleatorio)* en la actividad matemática. En particular, para el desarrollo del pensamiento variacional sugieren el estudio de patrones desde los primeros niveles educativos, según Vergel y Rojas (2013),

> "…el documento de Estándares se reafirma esta noción de pensamiento variacional como eje fundamental para dar estructura y sentido al aprendizaje del pensamiento algebraico en la escuela, y se muestra cómo el desarrollo del pensamiento variacional se puede potenciar desde los primeros años de la educación básica, centrado en lo que podríamos llamar el estudio de las regularidades y patrones. Podríamos afirmar, por ahora, el pensamiento variacional se entiende como una forma específica de pensar

> matemáticamente, orientada a la construcción de estructuras conceptuales que fundamentan el estudio de la variación y el cambio. Por su parte, el pensamiento algebraico refiere al conjunto de procesos, procedimientos y esquemas que dan forma y sentido al pensamiento variacional". (p.776)

Del mismo modo, esta propuesta curricular sugiere, como dice Radford (2010b), dejar de ver el pensamiento algebraico como una simple materia en el currículo, para plantear diferentes formas de potenciar modos de razonamiento algebraico. Sin embargo, los cursos de álgebra solo inician en la escuela secundaria y son enfocados generalmente al manejo de símbolos alfanuméricos.

En este mismo sentido, Kaput (2000) considera el razonamiento algebraico como una estructura compleja, compuesta por cinco tipos de razonamiento interrelacionados, que se puede desarrollar desde temprana edad. Los cinco tipos de razonamiento abarcan el estudio de generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el estudio de relaciones funcionales, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, y modelado y modelización de fenómenos.

Desde esta perspectiva, Kaput (2000) expresa la necesidad de integrar el álgebra en todos los niveles de escolaridad, especialmente en la escuela elemental donde ha estado ausente. En palabras de Kaput (2000) se trata de una "algebrización del currículo", esto es, la integración del pensamiento algebraico en las matemáticas escolares para empezar a hacer accesible el álgebra a la mayoría de profesores y estudiantes. Para esto, Kaput indica que el profesor debe identificar y nutrir estas raíces del razonamiento algebraico que inicialmente podrían estar expresadas en lenguaje natural, gestos, ritmo en lugar de símbolos alfanuméricos.

1.2 EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN

Para Mason (1999) la generalización es el corazón de las matemáticas, generalización entendida como ver lo particular en la generalidad, así como ver la generalidad en lo particular. Según este autor la capacidad de detectar patrones y expresar generalidad está presente en el individuo desde la primera infancia, capacidades que la escuela debe potenciar. Si bien, sabemos que todos los estudiantes que reciben un curso de álgebra no serán matemáticos, si podemos estar seguros que en algún momento, como plantea el autor, tendrán que resolver situaciones que implican apreciar la generalidad de dichos tópicos, y darle sentido a su realidad.

Mason, Graham, Pimm & Gowar (1985) proponen tres fases en el proceso de generalización: "ver un patrón", que consiste en identificar lo que es común y poder reconocer el patrón; "describir un patrón" consiste en describir la regularidad en lengua natural, así como verificar sus conjeturas; y "registrar un patrón" implica expresar el patrón a través de lenguaje simbólico, dibujos, palabras o una combinación de estas.

La generalización para Azarquiel (1993) es un proceso importante en la actividad matemática, que implica proceso de abstracción elevado,

> "generalizar no es sólo pasar de una colección de casos particulares a una propiedad común, a una expresión que las englobe, ni tampoco es sólo definir, a partir de las propiedades de un objeto. Azarquiel sostiene que también se generaliza cuando se transfieren a una situación propiedades que se cumplen en otra, y, en general, cuando se amplía el ámbito de definición de una ley". (Vergel, 2014, p.21)

Azarquiel (1993) plantea tres fases para el proceso de generalización: ver, describir y escribir. La fase de *ver* consiste en distinguir las características comunes que no varían en la situación; *describir* hace referencia a comunicar en lengua natural la regularidad percibida o proponer conjeturas; y *escribir* implica hallar una expresión en lenguaje simbólico o en lengua natural de la propiedad general que se ha obtenido de la situación.

Para Peirce´s (1960), citado en Rivera (2013), el significado básico de la generalización involucra la construcción de una descripción general que aplica a todos los casos en una colección dada. Según Rivera (2013) generalizar implica tres tipos de razonamiento inferencial: abducción, inducción (razonamiento plausible) y deducción. La abducción es una fuente de ideas originales, implica proponer una hipótesis o una serie de hipótesis que luego se pueda verificar vía inducción; la inducción parte de una afirmación y se prueba en casos específicos; deducción, razonamiento demostrativo, establece la necesidad de una única conclusión válida.

La abducción surge del trabajo sensible de los estudiantes sobre casos particulares, es decir, cuando los estudiantes exploran la característica estable para hallar etapas de la secuencia, ellos conjeturan a partir del patrón que perciben de las etapas de la colección dada. En consecuencia, algunas de estas observaciones plausibles se convertirán en hipótesis, por lo tanto, abducciones.

En la inducción se pone a prueba la inferencia abducida a lo largo de varios casos particulares, a través de este proceso se determina si la hipótesis es verdadera o falsa, incluso se puede corregir anteriores generalizaciones.

La deducción básicamente válida la hipótesis. Según el autor, el tipo de deducción que realicen los estudiantes puede diferir de acuerdo del grado de escolarización. En básica primaria, los estudiantes pueden dar de forma implícita una afirmación deductiva, pero tienden a justificar sus generalizaciones proporcionando una deducción empírica desde la estructura numérica o visual. En secundaria, los estudiantes pueden formular una afirmación deductiva y justifican sus generalizaciones a partir de un argumento estructural empírico, una prueba lógica deductiva, o una prueba de inducción matemática.

Como propuesta didáctica en el aula que se interesa por contribuir en el desarrollo del pensamiento algebraico en edades tempranas presentamos el estudio local de Corredor y Pineda (2014). Nos parece importante para nuestra investigación porque las autoras se interesaron en analizar el proceso de generalización en estudiantes de quinto primaria, el mismo grado en que realizamos nuestro estudio, al estudiar patrones en secuencias numéricas y geométricas, aunque tomaron un enfoque teórico distinto. Para el análisis de los datos recurrieron a las fases propuestas por el grupo Azarquiel (1993): ver, describir y escribir. La metodología de investigación se organizó en tres etapas: prueba diagnóstica, diseño y aplicación de talleres a dos grupos de estudiantes y la última etapa fue de entrevistas a un grupo de cinco estudiantes participantes de las etapas anteriores.

Corredor y Pineda (2014) reportan que la mayoría de estudiantes lograron *ver* y *describir* las secuencias, las dos primeras fases del proceso de generalización, es decir, los estudiantes identificaban las variaciones en una secuencia y podían comunicar verbalmente las variaciones observadas. Sin embargo, los resultados muestran que los estudiantes presentan dificultades en el paso de una fase a otra.

2. LA TEORÍA CULTURAL DE LA OBJETIVACIÓN

En este capítulo nos centraremos en estudiar los principales elementos de la teoría cultural de la Objetivación, así como los componentes y estratos del pensamiento algebraico. Además, analizamos algunas investigaciones que utilizaron elementos teóricos de la objetivación en el estudio del desarrollo del pensamiento algebraico desde las primeras etapas de escolaridad.

2.1 LA TEORÍA DE LA OBJETIVACIÓN

La teoría de la objetivación es una teoría cultural en Educación Matemática que retoma la dimensión ética, estética, y social. Para Radford (2006a) el objetivo de la teoría de la objetivación es intentar dar cuenta de los procesos de enseñanza y aprendizaje, planteándolos como procesos histórico-culturales.

> La teoría de la objetivación postula el objetivo de la Educación Matemática como un esfuerzo político, social, histórico cultural dirigido a la creación de sujetos reflexivos y éticos quienes se posicionan críticamente en discursos y prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente. (Radford, 2014a, pp. 135-136)

En este sentido la educación se concibe de otra manera, es más que sólo aprender algo, es un proceso dialéctico donde el conocimiento va transformando al ser. Por lo tanto, los procesos de enseñanza y aprendizaje no se ven como entidades distintas, sino como una misma actividad, definida como una labor conjunta, un proceso de continuo cambio del ser y el saber. Como consecuencia, Radford (2013b) propone que los esfuerzos de la teoría de la objetivación van encaminados a la comprensión y producción de saberes y de subjetividades en el aula, además de promover aquellas formas de acción pedagógica que pueden llevar a una enseñanza y aprendizaje significativo, es decir, no alienante, en que el sujeto tiene la posibilidad de dar su opinión y posicionarse críticamente. La figura 1 intenta capturar la esencia de esta relación dialéctica entre el ser y el saber dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

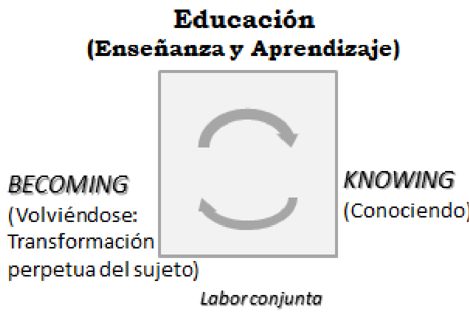


Figura 1. El conociendo y el volviéndose como parte de un mismo proceso que ocurre en la labor conjunta (Radford 2014a, p. 135)

Es dentro de este contexto, en el aula de clase, que se estudian los dos constructos analíticos fundamentales para la teoría de la objetivación: objetivación y subjetivación.

En la teoría de la objetivación el 'conociendo' ('*knowing*') es entendido como un proceso de producción de saberes.

> El "conociendo" ("*knowing*") queda definido como toma de conciencia en el curso de un proceso social, emocional y sensible; es un proceso mediatizado por la cultura material (signos, artefactos, lenguaje, etc.), los sentidos y el cuerpo (a través de gestos, acciones kinestésicas, etc.) (Radford, 2014a, p. 142)

A través de la subjetivación estudiamos el "volviéndose'' ("becoming"), este es concebido como esas formas de cooperación humana en el aula, de modo que el sujeto en tanto proyecto social llega a transformarse al participar en las prácticas sociales propias de su cultura. Este constructo es definido formalmente por Radford (2014a) de manera sucinta como "aquellos procesos mediante los cuales los sujetos toman posición en las prácticas culturales y se forman en tanto sujetos culturales históricos únicos. La subjetivación es el proceso histórico de creación del yo" (p. 142). Para Radford, la subjetivación se refiere a aquellos procesos mediante los cuales los sujetos encuentran otras voces, otros puntos de vista, y pueden dar su opinión y posicionarse críticamente frente a su realidad. En este proceso la cultura le ofrece al individuo modos de actuar, de hablar, de pensar y formas de relacionarse con el mundo,

> "Vivir en una cultura, crecer en ella, implica una práctica especial a través de la cual sensibilidades perceptivas, manuales e intelectuales son desarrolladas. Las categorías conceptuales que la cultura nos ofrece nos capacitan con hábitos de discriminación que afectan la manera con que vemos y actuamos en el mundo" Baxandall (1985, p. 107), citado en Radford (2006a).

Otro aspecto fundamental en la teoría de la objetivación es la categoría de *labor conjunta* o *actividad*. Esta categoría se toma en el sentido de materialismo dialéctico de Hegel, Marx y Leont'ev. Según Radford (2006a), la actividad la podemos entender como un proceso social cuyo propósito es alcanzar un objeto impregnado desde el primer momento de significados culturales y conceptuales.

El objeto de la actividad se alcanza a través de acciones mediatizadas por medios semióticos depositarios de la historia cognitiva (Radford, 2006a). Los medios semióticos de objetivación, de acuerdo con Radford (2003), son esos recursos lingüísticos, gestos, objetos, herramientas y signos que el sujeto usa para lograr una forma estable de conciencia, que le permiten hacer aparentes sus intenciones para organizar sus acciones a través del espacio y el tiempo. Dentro de los medios semióticos, el gesto resulta esencial en los procesos de objetivación, especialmente en estudiantes de grados elementales, donde sus producciones pueden interpretarse mejor a través de su actividad perceptual asociada a su discurso.

> Los gestos son parte de esos medios que permiten a los estudiantes objetivar el saber, es decir, les permiten darse cuenta de los aspectos conceptuales que, debido a su propia generalidad, no pueden ser completamente mostrados en el mundo concreto (Radford, 2005, p. 143).

El estudio del gesto como medio semiótico permite al investigador percibir razonamientos que los estudiantes no han logrado verbalizar o que son imposibles de comunicar a través del discurso.

Desde la perspectiva de la teoría de la objetivación el saber (objeto de conocimiento) no está dado, es pura posibilidad, algo que puede suceder, para que los estudiantes puedan actualizar el saber (singular), debe ser puesto en movimiento. Es precisamente a través de la actividad que los estudiantes encuentran progresivamente y de forma crítica los significados matemáticos constituidos culturalmente. La figura 2 muestra dos relaciones ϕ y θ, la relación ϕ se refiere a la planificación pedagógica de la actividad y la relación θ indica la actualización específica del saber, como producto de la actividad en el aula (Radford, 2015b).

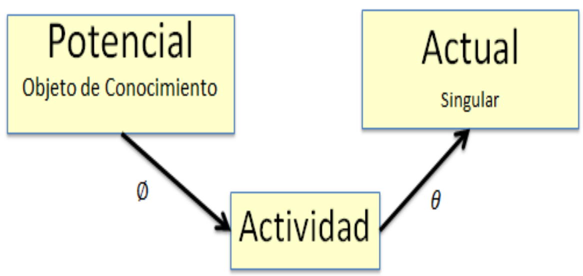


Figura 2. La actividad pone en movimiento lo potencial y lo actualiza o concretiza en un singular (Radford, 2015b, p. 5)

La relación ϕ, diseño o planificación de la actividad nos da una idea de lo que puede llegar a suceder, pero debemos comprender que la actualización de la actividad, la relación θ, es un proceso emergente, desde el punto de vista metodológico es un fenómeno individual y social en evolución que no puede determinarse de antemano (Radford, 2015b). Dado que a través de la actividad los estudiantes toman progresivamente conciencia de significados culturales históricamente constituidos de formas de razonamiento y acción, es decir objetivan el conocimiento, Radford (2015b) establece la actividad como unidad metodológica de análisis.

Las relaciones ϕ y θ se basan en dos elementos clave de la actividad: las formas de colaboración humana y las formas de producción de conocimiento en el aula. En la actividad, las formas de colaboración humana buscan favorecer en los miembros del grupo la constante reflexión y la generación de dinámicas de discusión. De tal manera, que cada estudiante como miembro de su comunidad, de su aula, logre alcanzar unas expectativas, que Radford (2013b) formula en términos de una ética comunitaria:

a) Participan activamente en el espacio público.
b) Muestran una apertura de espíritu en las discusiones y debates.
c) Se muestran solidarios con los otros alumnos.
d) Laboran hacia la constitución de una conciencia crítica. (p. 8)

Además, la dinámica de clase está orientada por tres vectores propuestos por Radford (2013b) para guiar las acciones en las relaciones de producción de saber:

a) Comprometerse en el trabajo conjunto.
b) Asumir responsabilidad hacia los otros miembros.
c) Cuidado del otro. (p. 8)

Durante la actividad, el rol del profesor es fundamental para promover esas formas alternativas de interacción y producción de saber que tengan una visión más comunitaria. La intervención del profesor más que contestar preguntas va encaminada a problematizar para que los estudiantes logren reconocer diferentes elementos de los objetos matemáticos por sí mismos. El rol del profesor se puede entender mejor en la interacción entre estudiantes y entre estudiantes y profesores que ocurre en la zona de desarrollo próximo (Vygotsky, 1988),

> La distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz. (p. 133)

Tal como lo expresa Radford (2010a) vemos cómo el profesor no puede transmitir saberes, pero si puede crear las condiciones de posibilidad para que los estudiantes transformen el objeto de conocimiento en un objeto de conciencia.

Vemos entonces la clase de matemáticas como una actividad, una actividad conjunta entre seres humanos, el profesor y los estudiantes, que se mueve tanto en el plano conceptual como en el plano ético. Es decir, una actividad en la que el estudiante tiene la oportunidad para discutir diferentes interpretaciones del mismo problema, al mismo tiempo que el profesor ofrece espacios para que el estudiante entienda mejor, pueda dar sentido a las soluciones del problema planteado, reconozca y aprecie las ideas de los otros. Es en estas formas de interacción y de cooperación entre los estudiantes que se posibilita la transformación del saber en objeto de conciencia. Al concebir el aprendizaje de las matemáticas como un proyecto social, el papel del estudiante y el profesor cambian. Tanto el estudiante como el profesor son transformados, porque el saber ya no es algo que se transmite o construye, es un proceso en el que el sujeto se posiciona críticamente de las prácticas matemáticas histórico-culturales.

Por lo anteriormente expuesto, la metodología propuesta por la teoría de la objetivación es multisemiótica. En el análisis multimodal se estudia la manera en que profesores y estudiantes movilizan diferentes recursos semióticos (corporales, lingüísticos, simbólicos) en el proceso de objetivación, así como su evolución a través de constructos como: los nodos semióticos, y procesos centrales en la objetivación como iconicidad y contracción semiótica.

Los nodos semióticos de objetivación, definidos por Radford (2003) son segmentos de actividad semiótica de los estudiantes, donde hay una sincronización de los medios semióticos de objetivación (acción lingüística-perceptiva-gestual) a través de los cuales el estudiante puede lograr "una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones" (Radford, 2003, p. 41). Moreno (2014) indica que el estudio detallado de los nodos semióticos emergentes conlleva a un refinamiento y posible evidencia de contracción semiótica. La contracción semiótica según Vergel (2015a), es un proceso de objetivación que se desarrolla cuando el estudiante pasa de un estrato de generalidad a otro. También podemos identificar procesos de iconicidad que son un paso crucial a la generalización, ya que es el proceso a través del cual los estudiantes pueden emplear las experiencias anteriores para orientar sus acciones en una nueva situación (Radford, 2003).

Radford (2015b) sugiere realizar la recolección de datos a través de cuatro técnicas: a) Grabación de video y audio, b) Hojas de trabajos de los estudiantes, c) Trazos en el tablero y d) Notas de capos, (ver descripción en la sección 4.3 técnicas e instrumentos de investigación). Otra técnica interesante en la recolección de datos es la entrevista basada en tareas (Goldin, 2000) utilizada por Vergel (2015a) para identificar elementos que evidencian el pensamiento algebraico en el transcurso de su investigación. La entrevista, como lo señala Goldin:

> … hace posible poner el foco de interés de la investigación más directamente en los procesos del sujeto al enfrentar la tarea matemática, más que sólo en los patrones de las respuestas correctas o incorrectas que ellos producen, por lo tanto hay la posibilidad de ahondar en una variedad de tópicos importantes con más profundidad de la que es posible por otros medios experimentales. (Goldin, 2000, p. 520)

Notamos que este tipo de entrevista, se centra en estudiar los procesos que desarrollan los estudiantes, por lo cual es posible identificar la evolución de los medios semióticos de objetivación y los nodos semióticos en la actividad matemática de los estudiantes. Al mismo tiempo, Goldin (2000) presta especial atención a las tareas planteadas, en las que sugiere realizar un control experimental, donde es importante considerar variables como: el contenido matemático y la estructura; la complejidad y la estructura lingüística y semántica. A continuación presentamos una descripción de los componentes y estratos del pensamiento algebraico.

2.2 ESTRATOS DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Radford (2006a) define el saber algebraico como una síntesis histórica y culturalmente codificada de hacer y de reflexionar en términos analíticos sobre números desconocidos y conocidos. Radford (2014b) describe que el pensamiento algebraico se distingue del pensamiento aritmético en que los términos desconocidos son tratados como conocidos, es decir podemos realizar operaciones como adición, sustracción, multiplicación, etc., entre términos desconocidos o variables. A partir de investigaciones previas (Filloy and Rojano 1989; Filloy, Rojano, y Puig 2007; Kieran 1989) Radford (2014b) establece tres componentes que constituyen el pensamiento algebraico:

> (a) El sentido de *indeterminancia* (objetos básicos como incógnitas, variables y parámetros), aquello como opuesto a la determinancia numérica.
> *(b)* La *analiticidad*, como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos.
> (c) La *designación simbólica* o *expresión semiótica* de sus objetos, esto es, como la manera específica de nombrar o referir los objetos. (Vergel, 2015c, p. 11)

En el caso de la simbolización puede ser entendida de varias formas, como el uso de símbolos alfanuméricos o simbolización a través del lenguaje natural, gestos y otras formas encarnadas de acción de los estudiantes.

Desde esta perspectiva histórico cultural Radford (2010b) propone una tipología de formas de pensamiento algebraico, de acuerdo a los tipos de generalización, generalización pre-simbólica (*factual y contextual*), y generalización *simbólica*. En esta tipología se enfatiza el rol fundamental de los medios semióticos para entender los diferentes tipos de generalización algebraica:

> *Factual*: la generalización factual es una generalización de acciones del sujeto realizadas a nivel concreto sobre objetos particulares. Todas esas acciones son resumidas en un esquema operacional, que le permite al sujeto resolver con éxito cualquier caso particular, la indeterminancia no es en sí objeto de discurso. Los medios semióticos de objetivación movilizados en las generalizaciones factuales constan de descripciones verbales, gestos y actividad perceptual. En las descripciones verbales, los sujetos usan términos demostrativos o deícticos espaciales ("este", "esta", "acá), términos lingüísticos de posición espacial (el siguiente) o adverbios de frecuencia (siempre). Además, los sujetos mediante el ritmo (rol que desempeñan el tono, la entonación, la duración de las palabras, el énfasis en algunos términos) y el movimiento enfatizan o complementan ideas que no han logrado verbalizar.
>
> *Contextual*: al igual que la generalización factual, la generalización contextual es la abstracción de acciones concretas en un esquema operacional. El ritmo y los gestos son desplazados por expresiones genéricas para referirse a objetos abstractos, como "la figura", "la próxima figura", con estos términos lingüísticos genéricos los sujetos buscan expresar generalidad. La indeterminancia es parte del discurso explícito.
>
> *Simbólico*: la generalización simbólica involucra objetos que no tienen características temporales-espaciales, además de no tener acceso a referentes figurativos del objeto. Las operaciones realizadas con objetos, se expresan en signos alfanuméricos.

La caracterización de la generalización algebraica de patrones nos permite entender si las generalizaciones que los estudiantes proponen cuando se enfrentan a tareas de generalización de secuencias figurales o numéricas son de tipo aritmético, estrategias de ensayo y error o si realmente son de tipo algebraico. En la siguiente sección discutimos el proceso de generalización algebraica desde la perspectiva semiótica cultural.

2.3 CARACTERIZACIÓN DE LA GENERALIZACIÓN ALGEBRAICA DE PATRONES

La generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela (Radford, 2010b; Vergel, 2015a). Según Radford, generalizar significa observar algo que va más allá de lo que realmente se ve. Para que se dé el proceso de generalización de patrones no necesariamente el estudiante tiene que involucrar signos alfanuméricos. Radford (2010b) afirma que la denotación de la generalización algebraica puede ser realizada a través de una actividad multimodal. En este sentido podemos ver que tanto para Radford (2010b, 2013b) como para Vergel (2015a) la denotación de la generalización de patrones puede hacerse a través de lo gestual, el lenguaje natural o el simbolismo alfanumérico, incluso combinaciones de estos. Por consiguiente, cuando nos referimos a fórmulas desde la perspectiva semiótica cultural estamos hablando de fórmulas corporeizadas que son "las formulaciones que expresan las generalizaciones de los alumnos pueden componerse de acciones, tales como gestos, ritmos, miradas, palabras, esto es, de formulaciones que se expresan y se despliegan en el espacio y el tiempo" (Vergel, 2015a, p.10).

En particular para el proceso de generalización Radford (2013a) propone una definición del proceso de generalización algebraica de secuencias figurales o numéricas basada en tres elementos: el primero asociado con la percepción por parte de un individuo de una característica común a través de la observación de una colección (por ejemplo, p_1, p_2, p_3, ..., p_k); en el segundo, el individuo debe proponer una ampliación o generalización de dicha característica común o comunalidad a todos los términos posteriores de la secuencia (p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, ...); y como tercero y último, el individuo debe usar esa característica común para deducir una fórmula corporeizada que permita definir cualquier término de la secuencia.

Con el propósito de explicar de manera concisa el proceso de generalización algebraica basado en los tres elementos que propone Radford (2013a) presentamos la figura 3. En ella podemos ver como Radford indica el punto crucial del papel epistemológico de la característica común C extraída del trabajo concreto con casos particulares al convertirse en una hipótesis H, y muestra algunas de las relaciones que se dan en el proceso de generalización de patrones.

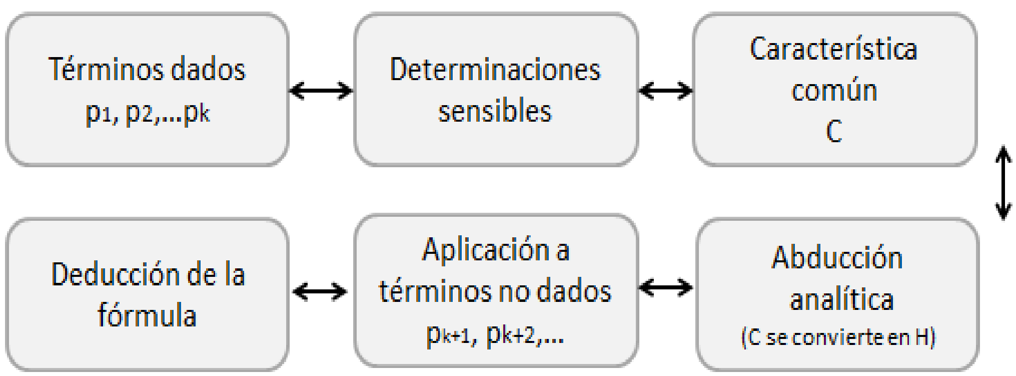


Figura 3. Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales. Radford (2013a, p. 7)

A manera de ejemplo del proceso de generalización de patrones presentamos una secuencia figural (figura 4), que hace parte de la investigación de Vergel (2015a) sobre generalización de patrones con estudiantes de 9 a 10 años.

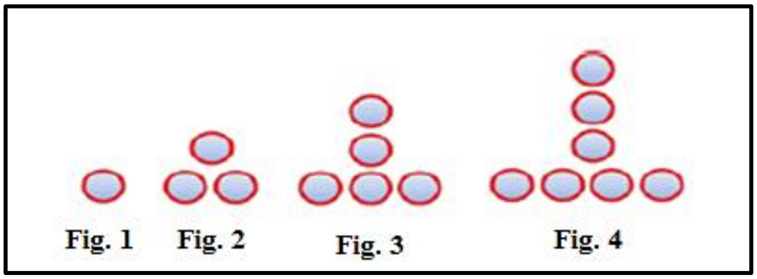


Figura 4. Secuencia figural apoyada por representación tabular (Vergel, 2014, p. 92)

El primer elemento una comunalidad, digamos C, se nota en casos particulares de la secuencia. Este paso requiere una elección entre las semejanzas y diferencias de los términos. Por ejemplo, en el caso de la secuencia figural (figura 4) se debe captar una regularidad que implica la vinculación de dos estructuras diferentes: una espacial y otra numérica. En Vergel (2014) los estudiantes "contaron el número de círculos en las figuras 1, 2, 3 y 4, e identificaron rápidamente que el número de círculos aumentaba en el mismo número cada vez" (p.115), podemos observar que los estudiantes primero se centraron en la dimensión cuantitativa o estructura numérica de los términos de la secuencia.

El segundo elemento es generalizar a todos los términos de la sucesión esa comunalidad C. El carácter común generalizado a los siguientes términos de la secuencia, en palabras de Radford (2013a), es una abducción. Siguiendo con el ejemplo de Vergel (2014) una estudiante, Jenny, objetivó una regularidad para la secuencia (figura 4) al proponer la forma de obtener el número de círculos para la figura 15, donde "establece una relación entre el número de la figura y el número de círculos en la parte horizontal, por un lado, y, por otro, una relación entre el número de círculos horizontales y el número de círculos verticales" (p. 118). Aunque Jenny ha objetivado una regularidad para la secuencia, no la ha podido generalizar para convertirla en abducción, ya que sus acciones estaban operando sobre una figura en particular, la figura 15.

En el último elemento del proceso de generalización, la comunalidad C se convierte en una regla para deducir los elementos de la secuencia que no están siendo percibidos por nuestros sentidos. La expresión directa de los términos de la secuencia requiere la elaboración de una regla, nombrando específicamente los objetos indeterminados. En el caso de Jenny, ella logra construir una fórmula cuando expresa "… tiene 15 círculos abajo y 14 círculos arriba, 29 círculos", pero es una fórmula para casos particulares, ya que la indeterminancia no es objeto de su discurso.

Con relación a estos tres elementos notamos que la generalización de la característica común o abducción a todos los términos de la secuencia es fundamental en el proceso de generalización. Aunque, la abducción no necesariamente nos lleva a una generalización algebraica. Por ejemplo, cuando es utilizada para encontrar sólo los términos subsecuentes, la generalización es aritmética, o cuando el estudiante utiliza procedimientos de ensayo y error para proponer una formula, aún no se puede considerar como generalización algebraica. Para que la abducción sea algebraica, "la abducción será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término" (Radford, 2013b, p.7). En la siguiente sección continuaremos con la revisión de estudios de generalización de patrones desde la teoría de la Objetivación.

2.4 EL ESTUDIO DE GENERALIZACIÓN DE PATRONES DESDE LA PERSPECTIVA SEMIÓTICA-CULTURAL

En el contexto nacional e internacional podemos observar que la investigación en Educación Matemática desde una perspectiva semiótica cultural se ha interesado en el estudio del desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Villanueva, 2012; Lasprilla, 2012; 2014; Gómez, 2013; Chalé, 2013; Moreno, 2014; Vergel, 2014). Este acercamiento teórico ha permitido entender la manera en que los recursos semióticos tales como las acciones, los gestos, los ritmos, las miradas, las palabras emergen como aspectos importantes en la constitución y manifestación del pensamiento matemático. A continuación hacemos una breve descripción de algunos estudios realizados en básica primaria (Villanueva, 2012; Lasprilla, 2012, 2014; Vergel, 2014) y luego pasamos a los estudios realizados en bachillerato (Gómez, 2013; Chalé, 2013; Moreno, 2014).

La investigación de Villanueva (2012) por ejemplo se centra en identificar, describir y analizar los medios semióticos de objetivación emergentes en estudiantes cuando se enfrentan a tareas sobre secuencias figurales. Los sujetos de estudio fueron un grupo focal, conformado por 4 estudiantes de primer grado de básica primaria. El diseño metodológico estuvo basado en la metodología para estudios longitudinales planteada por Radford (2010b), de naturaleza cíclica y compuesta por cuatro fases: diseño de tareas, Implementación de las tareas, análisis de los datos y generación de teoría; la metodología utilizada por la autora sólo difiere en la cuarta fase.

Este estudio reveló que los estudiantes al enfrentarse a tareas de secuencias con material concreto movilizan medios semióticos de objetivación, tales como: señalamientos, inscripciones, gestos indexicales. Además, evidenció dos nodos semióticos, cubrir o descubrir términos y conteo rítmico. Aunque no era objetivo de investigación, también se identificaron procesos de objetivación como la iconicidad y contracción semiótica. Algunos inconvenientes que se presentaron en la investigación estuvieron relacionados con dificultades en la lectura de textos escritos y con la integración durante el trabajo grupal dada la corta edad de los participantes.

Con una población de grado tercero de básica primaria, en edades comprendidas entre 7-8 años, Lasprilla (2012) realizó una investigación cuyo objetivo fue identificar, describir y analizar los medios semióticos de objetivación y los procesos de objetivación que movilizan los estudiantes cuando trabajan tareas de generalización de patrones de secuencias puramente figurales. La investigación se desarrolló en tres sesiones durante su clase de matemáticas, siguiendo el diseño metodológico de Radford (2010b), el cual modificó en cuatro fases: diseño de tareas, implementación de las tareas, selección de datos y análisis e interpretación de los datos. En este estudio se categorizaron las producciones de los estudiantes en los estratos de generalidad propuestos por Radford (2008), factual, contextual y simbólico. La autora encontró que la mayoría de los estudiantes se ubican en estrato factual y contextual, ya que las generalizaciones propuestas dependían del término inmediatamente anterior o estaban relacionadas únicamente con estructura espacial de la secuencia.

Los resultados de esta investigación muestran que el primer medio semiótico de objetivación es el gestual, y que a medida que los estudiantes interactúan en el aula logran movilizar otros medios. También confirma algunos resultados de Radford (2010a), en los que afirma que el pensamiento algebraico emerge desde edades tempranas bajo ciertas condiciones pedagógicas, es decir en la actividad en el sentido de Leont'ev, la actividad vista como un proceso social, con un objetivo claro impregnado de significados culturales alcanzado a través de acciones mediatizadas y no simplemente como una consecuencia de la maduración cognitiva o como algo espontaneo (Radford, 2006a).

Con el ánimo de ahondar en la emergencia de la zona de pensamiento algebraico, Lasprilla (2014) da continuidad a su investigación (Lasprilla, 2012), siguiendo los mismos objetivos y metodología, pero con estudiantes de grado cuarto, en edades entre 9-10 años, de básica primaria, cuando se enfrentan a tareas de generalización en secuencias figurales y numéricas.

En los resultados podemos observar que los estudiantes movilizaron distintos medios semióticos de objetivación como señalamientos, gestos faciales e indexicales, el conteo, tablas y expresiones lingüísticas tales como: "*así, sigue",* además Lasprilla (2014) muestra evidencia del proceso de iconicidad y el proceso de contracción. Aunque la autora encontró resultados similares en cuanto a la categorización de estratos de generalidad, ya que la mayoría de los estudiantes se ubican en estrato factual y contextual. La estrategia más usadas por los estudiantes para proponer sus generalizaciones fue la estrategia de tipo aritmético, por tanto no se logró hacer una distinción clara entre las generalizaciones de tipo aritmético y las generalizaciones de tipo algebraico.

Como la teoría de la objetivación se interesa tanto en el ser como en el saber, la autora recomienda para futuras investigaciones estudiar la manera en que la subjetividad influye en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, para esto propone las siguientes preguntas: ¿de qué manera las actitudes de los estudiantes determinaron el proceso que desarrollaron al abordar las tareas propuestas?, ¿son del agrado de los estudiantes las tareas y metodologías que se emplearon?, ¿la actitud de la profesora en el desarrollo de las tareas influyó en algo sobre los procesos de objetivación presentados?

A nivel nacional encontramos la investigación de Vergel (2014), la cual indaga con detalle y a profundidad las formas de pensamiento algebraico temprano emergentes en estudiantes cuando abordan tareas sobre generalización de patrones. El estudio se llevó a cabo con 15 estudiantes de cuarto y quinto grado de básica primaria, en edades entre 9 -10 años, rescatando la importancia del pensamiento multimodal en la toma de conciencia de los estudiantes de formas de pensamiento algebraico. El autor recurre a tareas de secuencias puramente figurales, puramente numéricas, figurales con apoyo tabular, y numéricas con apoyo tabular, a continuación mostraremos un ejemplo de cada uno de los tipos de secuencias:

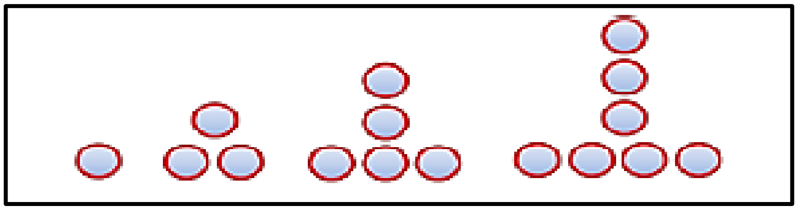


Figura 5. Secuencia puramente figural

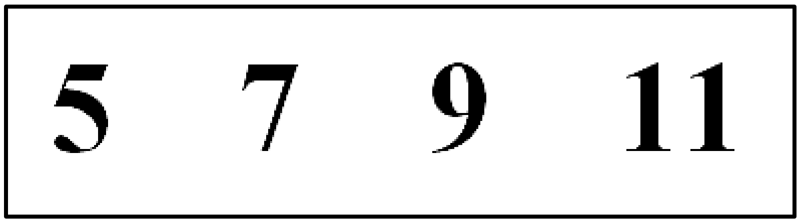


Figura 6. Secuencia puramente numérica

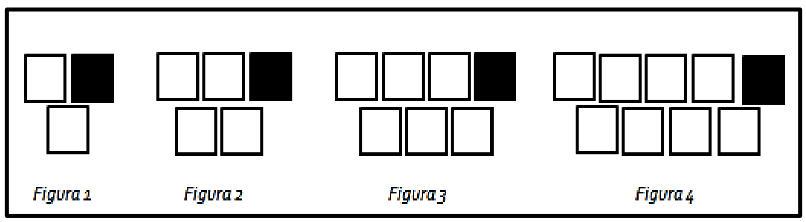


Figura 7. Secuencia figural apoyada por representación tabular

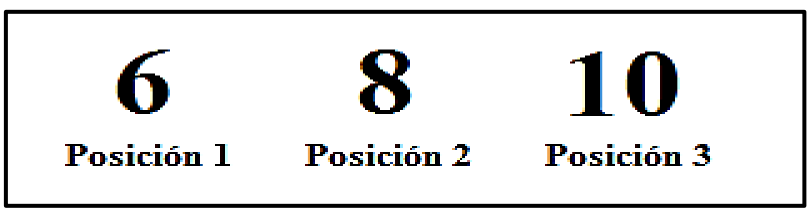


Figura 8. Secuencia numérica apoyada por representación tabular

Algunos de sus resultados "evidencian que las secuencias figurales con apoyo tabular hacen movilizar en los estudiantes formas perceptivas y gestuales que no son movilizadas con la misma intensidad cuando los estudiantes enfrentan tareas sobre secuencias numéricas con apoyo tabular" (Vergel, 2014, p. 181), ya que contribuyen a la articulación de dos tipos de estructuras, la estructura de tipo numérico y la estructura de tipo espacial, fundamentales en el proceso de generalización. Además Vergel (2014), resalta que es en la materialidad de la actividad o evento, que los estudiantes pueden tomar conciencia de la formas de pensamiento algebraico temprano factual y contextual. Además, según Radford (2015a), los resultados de Vergel (2014) nos invitan a comprender mejor la distinción entre generalizaciones de tipo aritmético y generalizaciones de tipo algebraico.

En los estudios realizados en bachillerato, podemos observar que el tipo de secuencias propuestas a los estudiantes son similares a las trabajadas con estudiantes de básica primaria, sólo difieren en que las preguntas tratan de inducir a los estudiantes a plantear sus generalizaciones en una fórmula algebraica. El objetivo del estudio de Moreno (2014), además de identificar los medios semióticos de objetivación, fue analizar su evolución en la actividad matemática, centrándose en la contracción semiótica como proceso de objetivación. Esta investigación se desarrolló en 9 sesiones de trabajo de 70 minutos, en la que participaron 30 estudiantes del grado sexto, 10-12 años, de educación básica secundaria. En el diseño metodológico se adaptó la metodología propuesta por Radford (2010b) para estudios longitudinales y algunos elementos de Arzarello (2006) para el análisis multimodal; en este análisis se tienen en cuenta la relación entre diferentes sistemas semióticos (la percepción, los gestos, el lenguaje natural y símbolos alfanuméricos) movilizados durante la actividad matemática.

La autora reporta una transición de los estudiantes de un estrato de pensamiento algebraico factual hacia uno contextual, a través de la evolución de dos nodos semióticos, denominado por ella "*conteo de lo oculto*" y "*tapar para comparar*", donde se observa el proceso de contracción semiótica. Como recomendación para futuras investigaciones la autora sugiere el análisis de nodos semióticos sociales y su respectiva evolución.

La investigación de Gómez (2013) tuvo objetivos similares a los de la investigación de Lasprilla (2012). En particular adaptó el diseño metodológico de Radford (2010b), pero se desarrolló en el nivel de educación media, con un grupo focal de tres estudiantes de grado décimo Gómez tomó como unidad de análisis el estudio los medios semióticos de objetivación, y como categorías de análisis: el gesto, los señalamientos, las inscripciones, la actividad perceptual, el lenguaje, la contracción semiótica y la iconicidad.

Los resultados de Gómez (2013) reportan que los estudiantes de grado décimo utilizan como medios semióticos de objetivación en el proceso de generalización de secuencias, señalamientos, inscripciones, movimientos corporales, tapan y destapan términos de la secuencia y recursos semióticos lingüísticos como *"el avance", "la figura 0", "la figura que se necesite".* Estos medios semióticos de objetivación, tanto corporales como lingüísticos, en algunas ocasiones fueron movilizados sincrónicamente por los estudiantes, para dar lugar a un nodo semiótico. Además evidenciaron procesos centrales de objetivación en los estudiantes como: la contracción semiótica y la iconicidad.

Chalé (2013) enfatiza el rol de la visualización en la manera como los estudiantes, de nivel medio superior en México, analizan las secuencias de crecimiento visual, y cómo expresan algebraicamente el patrón que subyace en la secuencia. Entre sus resultados nota que los estudiantes transitan entre lo numérico y las representaciones geométricas, lo que les permite dar explicaciones y argumentaciones para llegar a plantear una fórmula. Además, Chalé relaciona los estratos de generalización propuestos por Radford (2010b) con diferentes formas de visualización: visualización de estructuras numéricas relacionada con el estrato de generalización factual, visualización de relaciones contextuales relacionada con el estrato de generalización contextual, y visualización de organizaciones simbólicas relacionada con el estrato de generalización simbólico; las cuales emergen en la actividad matemática de los estudiantes.

A partir de la revisión de las investigaciones anteriormente descritas, vemos que estos estudios ponen en evidencia la necesidad de reconocer que las formas de pensamiento algebraico emergen a través del cuerpo, el movimiento, la ritmicidad, la actividad perceptual; elementos que son puestos en juego en la perspectiva semiótica cultural y que, al parecer, no son considerados en el aula matemáticas regular.

Además, podemos inferir que la teoría de la objetivación brinda diversos elementos para un análisis multimodal del pensamiento algebraico de los estudiantes que posibilitan entender la actividad matemática cuando los estudiantes enfrentan tareas sobre generalización de patrones.

3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS

La revisión de los antecedentes nos permitió considerar la necesidad de potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años de escolaridad, a través del estudio de patrones y su proceso de generalización. También, evidenciamos en algunos estudios la importancia de reconocer que las formas de pensamiento algebraico emergen a través de diferentes medios semióticos tales como gestos, señalamientos, movimientos, actividad perceptual, medios que usualmente no se tienen en cuenta en el aula regular de matemáticas.

> La concepción multimodal del pensamiento humano significa el reconocimiento de la inclusión del cuerpo en el acto de conocer. (Vergel, En prensa-1, p. 10)

En estudiantes de grados elementales, uno de los medios semióticos más utilizados es el gesto, por lo cual la actividad matemática de los estudiantes puede entenderse más fácilmente al analizar su actividad perceptual asociada a su discurso. En este sentido, la teoría cultural de la objetivación brinda diversos elementos que contribuyen a entender la emergencia del pensamiento algebraico y posibilita plantear estrategias pedagógicas que potencializan el desarrollo del pensamiento algebraico. Sin embargo, podemos ver que muchos de estos resultados han sido ignorados, tal vez por falta de una clara distinción entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico.

Con este panorama fue nuestro interés aportar evidencias empíricas que contribuyeran a desentrañar las filiaciones y rupturas entre las generalizaciones de tipo aritmético y las generalizaciones de tipo algebraico, ya que las evidencias empíricas y las reflexiones de corte epistemológico sugieren la presencia de una zona en la que las formas de pensamiento aritmético “sofisticado” y algebraico “simple” están muy cerca (Vergel, 2014).

En este estudio asumimos la perspectiva teórica de la objetivación. Desde esta perspectiva semiótica cultural en el estudio de generalización de patrones surge la siguiente pregunta, que asumimos como la pregunta de investigación: ¿Qué procesos de objetivación desarrollan estudiantes de grado quinto de primaria cuando abordan tareas sobre generalización de patrones figurales y numéricos?

3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Con base en la problemática anteriormente expuesta, planteamos el objetivo general y los objetivos específicos de estudio, los cuales impulsaron y dirigieron nuestra investigación.

3.2 OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN

Identificar y analizar los procesos de objetivación que desarrollan estudiantes de grado quinto de primaria cuando abordan tareas sobre generalización de patrones figurales y numéricos.

3.2.1 Objetivos Específicos

- Describir los medios semióticos de objetivación movilizados en la actividad matemática por estudiantes de quinto grado a partir de las tareas sobre generalización de patrones.

- Analizar la evolución de los medios semióticos de objetivación movilizados y de los nodos semióticos en la actividad matemática de estudiantes de quinto grado a partir de las tareas sobre generalización de patrones.

4. MÉTODO

Esta investigación la desarrollamos bajo el enfoque cualitativo. Este enfoque nos permite una rica descripción del fenómeno de estudio para profundizar en la manera en que emergen los procesos de generalización de patrones a medida que evolucionan los medios semióticos de objetivación en los estudiantes, al mismo tiempo que logran una transformación del saber en objeto de conciencia.

4.1 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN Y PARTICIPANTES

La investigación la desarrollamos en la Institución Educativa Oriente Miraflores, ubicada en la ciudad de Bucaramanga, Santander. Esta institución es de carácter oficial, presta servicios educativos a estudiantes de niveles socioeconómicos bajos (0, 1 y 2) en los grados de preescolar, básica primaria, básica secundaria y media, distribuidos en 8 sedes. La educación que se brinda en esta institución se fundamenta en la formación de jóvenes con sentido ético, como ciudadanos competentes para afrontar los desafíos de la sociedad actual.

La población objeto de estudio estuvo conformada por 21 estudiantes, con edades comprendidas entre 10 a 12 años. Estos estudiantes cursaban el último grado de educación básica primaria en la jornada de la mañana de la sede “La Flora”, durante el segundo semestre del año 2015.

4.2 PROCESO METODOLÓGICO

El diseño metodológico adoptado en esta investigación se basa en la metodología multisemiótica, propuesta por Radford (2015b). En esta metodología se realiza un seguimiento a los procesos de objetivación y subjetivación de estudiantes y profesores para dar cuenta de cómo el saber histórico-cultural como pura posibilidad se transforma en objeto de conciencia y de pensamiento. Estos procesos emergen progresivamente y están mediados por la actividad semiótica. Por lo tanto, para entender el proceso de objetivación se requiere un análisis multimodal de la actividad del sujeto en el aula, donde se estudie el rol y la relación entre la actividad perceptual, auditiva, gestual, lingüística y simbólica en la producción de saberes y de subjetividades.

La metodología se compone de cuatro etapas: diseño e implementación de las actividades de clase, recolección y análisis de datos. El siguiente gráfico (figura 9) muestra un esquema de la metodología que siguió esta investigación.

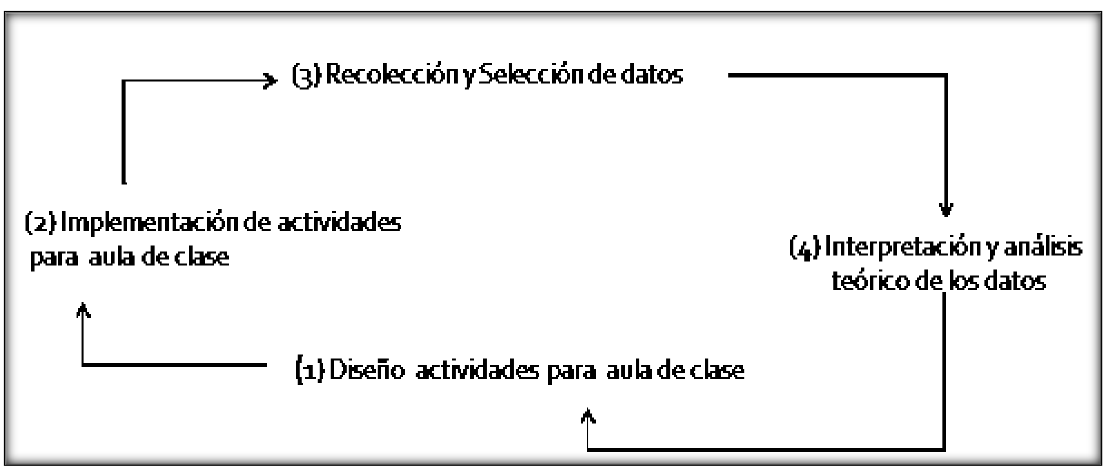


Figura 9. Estructura metodológica multimodal

A continuación realizaremos una descripción de las principales características de cada una de las etapas de la metodología.

4.2.1 Diseño de las actividades para el aula de clase. La primera etapa, diseño pedagógico de las actividades (relación ϕ), tuvo en cuenta los objetivos de currículo; toma como base los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), respecto al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Desde la perspectiva semiótica planteamos como objetivo general de las actividades propuestas la objetivación de formas algebraicas de pensamiento sobre generalización de patrones figurales y numéricos.

Una vez definido el objetivo de las actividades realizamos un proceso de identificación y rediseño de las tareas dada la importancia de la validez de los instrumentos. Seleccionamos 6 tareas avaladas por un equipo de expertos, quienes consideraron posibilitan a los estudiantes movilizar diferentes recursos semióticos, lo cual permite evidenciar formas de pensamiento algebraico. Las tareas 1 y 2 fueron tomadas y rediseñadas de las tareas propuestas en el estudio longitudinal de Rivera (2010), la tarea 3 (es una actividad creada por el grupo de trabajo de "Colombia Aprendiendo, Proyecto Matemática Recreativa") de la Revista de Más Actividades Primaria del mes de septiembre de 2015, y las tareas 4, 5 y 6 de Vergel (2015a), las cuales están basadas en los principios de la teoría cultural de la objetivación.

En el proceso de rediseño para estructurar las actividades seguimos las indicaciones de Radford y Sabena (2015) y Radford (2015b) en las que recomiendan:

- ✓ Selección minuciosa de las preguntas y problemas en cada una las tareas.
- ✓ Tener en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes.
- ✓ Organizar las tareas de tal forma que las primeras preguntas sean asequibles a los estudiantes, con el fin de involucrarlos en la actividad, y poco a poco aumentar su complejidad para profundizar en ideas matemáticas clave.

- ✓ Posibilitar espacios de reflexión crítica e interacción a través de grupos de discusión.
- ✓ Ofrecer momentos de reflexión matemática para que los estudiantes puedan criticar o proponer otras formas de abordar las tareas.
- ✓ Incluir formas de interacción social y colaboración en el salón de clase.

A continuación se presenta el cuadro N°1, donde se muestra el proceso de rediseño de las preguntas que hacen parte de las tareas.

Propósito de la pregunta	Ejemplo de la Pregunta	N° Tarea que incluye este tipo de pregunta
Prologar la secuencia a figuras o términos cercanos.	Dibuja la figura 4 de la secuencia.	**Tarea 1:** ítem 1, 2 **Tarea 2:** ítem 1, 2 **Tarea 3:** ítem 1, 2 **Tarea 4:** ítem 1 **Tarea 6:** ítem 2
Analizar si el estudiante ha objetivado alguna regularidad para encontrar la figura o término relativamente próximo, o tiene que pasar por cada una de las figuras o términos hasta llegar al solicitado.	Dibuja la figura 15 de la secuencia. Explica cómo lo hiciste.	**Tarea 1:** ítem 3 **Tarea 2:** ítem 3 **Tarea 3:** ítem 3 **Tarea 4:** ítem 2
Explicar en lenguaje natural sus producciones	Escribe un mensaje a un compañero indicando cómo podría construir la Figura 25. Luego le explicas cómo podría construir la Figura 100.	**Tarea 1:** ítem 4 **Tarea 2:** ítem 4 **Tarea 3:** ítem 4 **Tarea 4:** ítem 3

Identificar la estructura numérica de los términos o las figuras.	¿Cuántos cuadrados tiene la figura 500? ¿Cómo encuentras ese valor?	**Tarea 1:** ítem 5,7,8 **Tarea 2:** ítem 5 **Tarea 3:** ítem 5, 6, 7
Establecer una correspondencia entre la figura y el número de la figura.	Una figura tiene 1500 cuadrados, ¿A qué número de la figura corresponde?	**Tarea 1:** ítem 6,9 **Tarea 2:** ítem 6, 7 **Tarea 3:** ítem 8, 9 **Tarea 4:** ítem 4,5 **Tarea 6:** ítem 4
Posibilitar al estudiante proponer una generalización que pase de casos particulares a cualquier número de la figura.	Problema del mensaje	**Tarea 3:** ítem 9,10,11 **Tarea 5:** ítem 1 **Tarea 6:** ítem 3, 4
Posibilitar la expresión crítica y reflexiva frente a las producciones escritas de otros.	Analiza el mensaje de otro grupo para determinar si cumple con algunos criterios.	**Tarea 5:** ítem 2,3

Cuadro 1. Diseño de las tareas

Cada tarea está conformada por dos partes, Parte I y Parte II. La Parte I sugiere un trabajo individual, donde se espera que cada estudiante realice una exploración inicial de la secuencia. La Parte II sugiere un trabajo en equipo, desarrollado en pequeños grupos, máximo tres estudiantes, teniendo en cuenta las etapas definidas por Radford (2006a).

Para generar una dinámica de discusión en el diseño de las tareas se plantea la Parte II en dos fases, A y B. En la fase A se retoman las preguntas de la Parte I; se espera que los estudiantes puedan exponer, comparar y confrontar las ideas que analizaron en la exploración inicial; luego cada grupo presenta ante sus compañeros los acuerdos a que han llegado en cada una de las preguntas y exponen la forma en que construyeron las figuras de la secuencia, las diferentes soluciones a las preguntas, incluso se espera que comenten las dificultades presentadas durante la actividad. La fase B consta de algunas preguntas que buscan que los estudiantes logren abstraer y aislar características comunes en los términos de la secuencia para hallar términos remotos, o por lo menos que empiecen a utilizar estrategias de tipo numérico. Al igual que en la fase A, en la fase B la dinámica de discusión es fundamental.

Además, para cada una de las tareas plateamos un objetivo específico (ver sección 4.4, análisis a priori de las actividades), elaboramos una descripción y un análisis a priori de cómo podría desarrollarse la actividad en el aula, basado en los tres elementos del proceso de generalización algebraica definidos por Radford (2013a). El análisis a priori da a los profesores e investigadores una idea de lo que puede ocurrir en clase, pero como menciona Radford (2015b) el proceso de actualización del saber es un evento que no puede ser determinado, por tanto esto se considera como una aproximación de la actividad.

4.2.2 Implementación de las actividades en el aula de clase.

La segunda etapa, implementación de las actividades (relación θ). En esta investigación las actividades en el aula de clase estuvieron dirigidas por el profesor titular del grupo. El papel de la investigadora fue de observadora participante, aunque su participación fue recolectar los datos, en algunos momentos intervino para direccionar la actividad. Por recomendación de Vergel (2015a), las sesiones de clase estuvieron precedidas por reuniones de la investigadora con el profesor titular para reflexionar sobre su posible actuación en las sesiones a la luz de la teoría de la objetivación, por lo menos en sus aspectos básicos. Si bien, el profesor no estaba familiarizado con los principios y conceptos de la teoría de la objetivación, sus actuaciones debían ser de tal naturaleza que posibilitaran entre los estudiantes las discusiones y crearan oportunidades para defender sus puntos de vista, vía al posicionamiento crítico de los sujetos en las prácticas matemáticas. Es en este sentido que enfatizamos en el diálogo permanente entre la investigadora y el profesor titular del curso.

Las actividades estuvieron divididas en cuatro fases, una individual y tres fases de grupo: trabajo en pequeños grupos, intercambio entre ellos y discusiones generales.

Fase individual. Esta fase la implementamos durante el desarrollo de la investigación; dado que la dinámica de grupo cotidiana de los estudiantes no incluye el trabajo en grupo. Tomamos esta fase como una fase de exploración y preparación para que los estudiantes obtuvieran mayor posicionamiento de sus propias ideas. Consideramos importante que los estudiantes iniciaran la actividad tratando de comprender el problema planteado, identificando posibles soluciones y evaluando algunas estrategias.

Trabajo en pequeños grupos. En esta fase se instauraron equipos con un máximo 3 de estudiantes. Con esto buscábamos promover formas de subjetividad, esperando que aparecieran diferentes formas de cooperación en la búsqueda de la solución de los problemas planteados. Esperábamos, como propone Radford (2013b), que cada grupo lograra algunas de las expectativas de una ética comunitaria.

Intercambio entre grupos. Esta fase se realizó con el fin de desarrollar o mejorar las ideas del grupo a partir de la discusión, así como entender otros puntos de vista.

Discusiones generales. Esta última fase se realizaba una vez los grupos terminaban de responder todos los ítems con el propósito de generar discusión e intercambiar ideas. Aunque en la implementación de las actividades el profesor estuvo interactuando constantemente con todos los grupos, conduciendo la discusión a través de la exposición, comparación y confrontación de ideas; la discusión general fue un momento clave, en el cual el profesor pudo profundizar en algunas ideas, que posibilitaron en los estudiantes la elaboración de significados y toma de conciencia de los objetos matemáticos.

En el proceso investigativo se evidenció como el rol del profesor en cierta medida se transformó, por ejemplo, en las primeras sesiones cuando los estudiantes daban una respuesta a unas de las tareas, el profesor no problematizaba la situación. A medida que transcurrieron las sesiones, poco a poco empezó a crear espacios para que los estudiantes discutieran más ampliamente, además de implicar a otros estudiantes que usualmente no participaban.

4.2.3 Recolección y selección de datos.

Para nuestra investigación utilizamos tres de las fases del proceso de recolección de datos propuestas por Radford (2015b): a) Grabación de video y audio, b) Hojas de trabajos de los estudiantes, y c) Notas de campo, (ver descripción en la sección 4.3 técnicas e instrumentos de investigación).

El periodo de recolección de datos se realizó durante cinco semanas consecutivas del cuarto periodo académico. En la etapa de diseño pedagógico se consideró que el trabajo de indagación se podía realizar en 7 sesiones de 80 minutos cada una. Para la implementación de la primera actividad se estimaron tres sesiones de clase, y una sesión para las demás actividades. Al respecto, cabe decir que la planeación varió un poco en la implementación de las actividades, ver cuadro N°2.

Actividad N°	Sesiones estimadas	Sesiones realizadas
Actividad 1	3	2
Actividad 2	1	1
Actividad 3	1	3
Actividad 4	1	1

Actividad 5	1	2
Actividad 6	1	1

Cuadro 2. Sesiones programadas por actividad

En la recolección de información, para entender los procesos de objetivación de los estudiantes, tuvimos especial interés en observar la manera en la que estudiantes y profesores recurrieron a diferentes recursos semióticos, y no sólo a expresiones con signos alfanuméricos. En nuestra investigación logramos observar como los estudiantes, a través de la labor conjunta, movilizaron diferentes recursos semióticos tales como ritmo, señalamientos, gestos indexicales acompañado de expresiones lingüísticas para llegar a una toma de conciencia de la de formas algebraicas de pensamiento sobre generalización de patrones.

Cuando se requirió más profundidad o corroborar hipótesis que surgieron en el transcurso de la investigación se realizaron entrevistas a los estudiantes, teniendo en cuenta las especificaciones de Goldin (2000) para entrevistas basadas en tareas.

Toda la información recolectada la almacenamos en carpetas en el computador de acuerdo a la fecha, en subcarpetas con base en la actividad implementada y por último, en subcarpetas teniendo en cuenta la técnica o instrumento empleado. En su respectiva carpeta fueron guardadas las hojas de trabajo de los estudiantes escaneadas, en otra las notas de campo escaneadas, en otra los videos con su transcripción parcial, así como el material fotográfico asociado a la actividad grabada.

Una vez almacenada toda la información pasamos a un proceso de selección y triangulación de datos. Los criterios de selección de los episodios fueron los principios teóricos, la pregunta y objetivos de investigación. Otro aspecto que resultó importante en la selección de episodios más representativos fue enfocarnos en los grupos que mayor cantidad de recursos semióticos movilizaron en las actividades y que no se cohibían ante la cámara de video.

4.2.4 Análisis de datos.

En esta etapa nos centraremos en el estudio de la actividad como unidad metodológica de análisis. Aunque esta etapa tuvo en cuenta los tres pasos propuestos por Radford (2015b), la selección de datos se desarrolló en la etapa tres, por lo que en la etapa cuatro transcribimos totalmente los videos susceptibles a análisis, y luego nos concentrarnos en el análisis de datos y en refinar el análisis. Este análisis permite en el diseño de posteriores actividades promover acciones pedagógicas y determinar condiciones para un aprendizaje significativo.

En todo el proceso investigativo, pero en especial en el análisis de datos, se tuvo siempre presente el foco teórico y algunos elementos teóricos, “los principios y conceptos de la teoría cultural de la objetivación,… nos permitían discernir y avanzar en el desarrollo de la habilidad de dar sentido a los datos” (Vergel, 2015a, p.87).

Los episodios seleccionados fueron objeto de análisis más profundo, por lo que se organizaron en una tabla con tres columnas. La primera columna indica el número de línea de la transcripción, la segunda columna contiene el cuerpo de la transcripción, incluyendo imágenes, y la tercera columna comprende comentarios interpretativos o notas de campo. La cadencia del diálogo de los estudiantes la insertamos en la transcripción de la segunda columna, indicando las pausas y las vacilaciones verbales con puntos suspensivos, incluyendo interjecciones (ejemplo: eh, um, ¡ah!) y la aparición de gestos fue descrita en corchetes.

Inicialmente elaboramos una descripción del desarrollo de la actividad matemática en el aula basado en los tres elementos del proceso de generalización algebraica definidos por Radford (2013a). Luego, pasamos a categorizar las producciones de los estudiantes de acuerdo a formas de pensamiento algebraico definidas por Radford (2010b): pensamiento algebraico factual, pensamiento algebraico contextual y pensamiento algebraico simbólico. Para facilitar la categorización identificamos las características esenciales de cada forma de pensamiento, así como los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes en los diferentes tipos de generalización (factual, contextual y simbólica). El proceso de categorización también permitió ver la evolución de una forma de pensamiento a otro, ya que está determinada por la evolución tanto de los medios semióticos de objetivación, como la de los nodos semióticos.

La documentación correspondiente al análisis multimodal se presenta detalladamente en la sección 4.5, análisis a posteriori de las actividades.

4.3 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

Al ser esta investigación de tipo cualitativo, las técnicas que utilizamos fueron: la observación, la cual se centró en la actividad de los grupos de estudiantes durante el periodo de intervención en el aula; el diálogo permanente y la entrevista basada en tareas, con el fin de dinamizar las discusiones entre los estudiantes e indagar sobre sus razonamientos durante su actividad matemática.

Los instrumentos para la recolección de la información fueron:

a) **Grabación de video y audio.** Para el registro audiovisual contamos con una cámara de video portátil, que se iba desplazando por cada uno de los grupos para capturar aspectos audiovisuales de las discusiones focalizadas de los grupos que más movilizaban recursos semióticos al intentar solucionar las tareas propuestas. En las discusiones generales realizamos tomas de todo el grupo. Estas condiciones específicas de la investigación requirieron mucha sensibilidad de la investigadora de lo que ocurría en el aula, además de la colaboración de los estudiantes en las indagaciones realizadas por el profesor titular con el fin de ahondar en el rol específico de los argumentos y los gestos a través de los cuales los estudiantes expresaban sus ideas matemáticas.

b) **Hojas de trabajos de los estudiantes**. Cada estudiante recibió las hojas de trabajo, tanto la parte I que era el trabajo individual, como la parte II que era trabajo en grupo. En estas hojas los estudiantes registraron algunos de sus razonamientos y las respuestas a las tareas de la actividad. Aunque Radford (2015b) sugiere que los estudiantes utilicen bolígrafos para facilitar al investigador seguir sus líneas de pensamiento, los estudiantes participantes de esta investigación utilizaron lápices porque así trabajan en su clase de matemáticas regular, incluso es la única asignatura en que se les exige el uso de lápiz y borrador. En la actividad seguimos la idea de Vergel (2015a), la cual indica que en caso que el estudiante no termine la tarea en una sesión se recojan las hojas de trabajo y se entreguen en la siguiente sesión para continuar con la actividad.

c) **Notas de campo**. En la etapa de intervención de aula utilizamos este instrumento para registrar lo que aconteció en el aula, escribimos observaciones, reflexiones, hipótesis e interpretaciones personales de la investigadora, una vez terminada cada sesión.

4.4 ANÁLISIS A PRIORI DE LAS ACTIVIDADES

En la fase de diseño de tareas para la intervención en el aula identificamos y rediseñamos 6 tareas sobre generalización de patrones para estudiantes de educación básica primaria. En todas las tareas proponemos secuencias crecientes de generalización de patrones en contextos figurales o numéricos. En las tareas 1, 2, 3 y 5 proponemos secuencias figurales y en las tareas 4 y 6 secuencias numéricas.

Las tareas 1, 2, 3, 4 tienen preguntas similares. Para la implementación de las tareas los ítems 1, 2, 3 y 4 inicialmente se trabajan individualmente y luego estos mismos ítems se trabajan en equipo. Para la implementación de estas tareas proponemos que del ítem 5 en adelante se trabaje la actividad solamente en equipo. Según Vergel (2015a) el tipo de preguntas propuestas en las tareas 1, 2, 3 posibilita la expresión de los estudiantes en la labor conjunta en el aula, pero también limita "los medios semióticos de objetivación que lograron movilizar estaban tal vez instanciando y estratificando un tipo de pensamiento en particular como el Factual" (p. 93), en este tipo de pensamiento para el estudiante la indeterminancia aún no hace parte de su discurso de manera explícita.

En la implementación de las tareas esperábamos que el estudiante lograra realizar una producción específica de saberes en el proceso de generalización algebraica de secuencias figurales o numéricas, basada en tres elementos definidos por Radford (2013a):

- ✓ Objetiva la característica común.
    - Observa similitudes y diferencias de la secuencia.
    - Identifica la estructura numérica de los términos.
    - Identifica la estructura espacial de los términos, en el caso de ser una secuencia de tipo figural.
    - Evidencia indicios de articular las dos estructuras: numérica y espacial, en el caso de ser una secuencia de tipo figural.
    - Evidencia indicios de una relación entre el número de la figura y el número de partes de la figura, a través de funciones modales.
- ✓ Objetiva la generalización de dicha característica común.
    - Establece propiedades que dependen de las similitudes observadas de los casos particulares.
    - Extrapola la característica común.
    - Propone una abducción o generalización de la característica común.

- ✓ Deduce una fórmula que permita definir cualquier término de la secuencia.
    - Denotación, puede hacerse a través de lo gestual, el lenguaje natural o el simbolismo alfanumérico, o combinaciones de estos.

De acuerdo al tipo de generalización realizada por los estudiantes pudimos categorizar sus producciones en alguna de las formas de pensamiento algebraico: factual, contextual o simbólica. Inicialmente esperábamos que las producciones de los estudiantes se clasificaran en la forma de pensamiento factual, a lo más contextual, por el tipo de tareas que propusimos.

Algunas posibles dificultades que inicialmente consideramos que los estudiantes podrían tener al enfrentarse a tareas que implicaban generalización de patrones fueron las siguientes:

- Dificultad en encontrar semejanzas y diferencias de la secuencia.
- Tender a centrarse solo en utilizar estrategias de tipo numérico.
- Tender a centrarse solo en características espaciales o geométricas.
- Dejarse llevar por la apariencia de los términos.

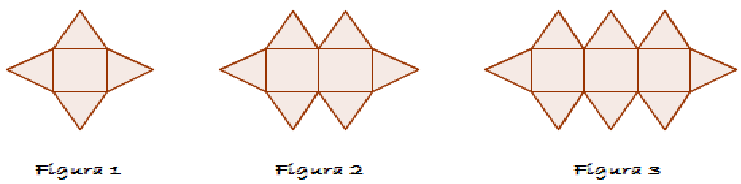
Preguntas de los estudiantes que supusimos podían surgir durante la actividad:

- *¿Qué es una secuencia?*
- *¿Cómo obtengo la siguiente figura?*
- *¿Cómo encontrar similitudes entre figuras totalmente diferentes?*
- *¿Qué debo escribir de explicación de la figura?*

A continuación presentamos la descripción y el análisis a priori de cada una de las actividades.

Actividad 1. El objetivo de esta actividad es introducir a los estudiantes en el desarrollo del proceso de generalización de patrones con secuencias figurales sencillas. Según los resultados de Vergel (2015a), las secuencias figurales con apoyo tabular hacen movilizar en los estudiantes formas perceptivas y gestuales con mayor intensidad que con secuencias numéricas. En este mismo sentido, Azarquiel (1993) explica que los índices geométricos y espaciales de las secuencias figurales permiten al estudiante hallar con más facilidad las características que determinan el patrón.

Considera la secuencia geométrica que se muestra a continuación.



1. Dibuja la Figura 4 de la secuencia.
2. Dibuja la Figura 5 de la secuencia. Explica cómo lo hiciste.
3. Dibuja la Figura 10 de la secuencia. Explica cómo lo hiciste.
4. Escribe un mensaje a un compañero indicando cómo podría construir la Figura 25. Luego le explicas cómo podría construir la Figura 100.
5. ¿Cuántos cuadrados tiene la Figura 500? ¿Cómo encuentras ese valor?
6. Una figura tiene 1500 cuadrados, ¿A qué número de la figura corresponde?
7. ¿Cuántos triángulos tiene la Figura 5?
8. ¿Cuántos triángulos tiene la Figura 100?
9. Santiago propone que una figura de la secuencia está formada exactamente por 19 cuadrados y 39 triángulos. La afirmación de Santiago ¿es verdadera o falsa? En cualquier caso explica tu respuesta.

Figura 10. Tarea 1: Secuencia figural apoyada en representación tabular (Tomada de Rivera 2010, p.55)

Descripción. La tarea 1 (ver figura 10) propone una secuencia figural apoyada en representación tabular que cosiste en un arreglo formado por n cuadrados y $2n + 2$ triángulos, para n = 1, 2, 3,...

Análisis de la actividad. Como la actividad propone situaciones relativamente nuevas para los estudiantes considerábamos que sus producciones se ubicarían en el pensamiento algebraico factual. Los resultados de algunas investigaciones muestran que los estudiantes de básica primaria en sus primeras generalizaciones de patrones inicialmente movilizan formas perceptivas y gestuales que tienden a disminuir en la medida que el estudiante participa en actividades de este tipo. Los recursos semióticos que los estudiantes podrían utilizar en este tipo de tarea son el conteo, gestos, señalizaciones, tabulación, dibujos, expresiones verbales, expresiones escritas en lenguaje natural, entre otras.

En la tarea 1 esperábamos que el estudiante identificara el patrón que permite que se genere los términos de la secuencia figural, es decir, que lograra captar la comunalidad, donde pudiera discriminar las similitudes y diferencias de los términos de la secuencia. En esta secuencia se pueden identificar dos patrones, uno asociado al número de cuadros, que van aumentando uno por cada figura, y otro relacionado con el número de triángulos que van aumentando en dos por cada figura.

Al realizar el proceso de objetivación de la comunalidad suponemos que el estudiante podrá dibujar términos cercanos de la secuencia y explicar la manera en que construyeron las figuras.

Fases del proceso de generalización.

- ✓ Objetiva la característica común.

En el proceso de generalización inicialmente los estudiantes deben fijarse en las similitudes y las diferencias de las figuras dadas atendiendo la estructura espacial y la estructura numérica. Pensábamos que los estudiantes podrían fijarse en la cantidad de cuadrados, en la cantidad de triángulos, en la ubicación de los elementos geométricos que componen la figura, entre otros. Con respecto a la estructura espacial, los estudiantes podrían ver como una fila central de cuadrados con dos triángulos en sus laterales y dos filas de triángulos, una superior y otra inferior, con igual número de elementos; otras posibilidades incluyen ver una fila central de cuadrados rodeados por triángulos o dos filas de triángulos y una de cuadrados con igual número de elementos más un triángulo en el lado izquierdo y otro en el lado derecho. En cuanto a la estructura numérica de la secuencia, para encontrar la comunalidad el estudiante puede utilizar el conteo de los elementos de cada figura, podría darse el caso en que los estudiantes noten que el número de cuadrados varía de una posición a otra aumentando en uno y el número de triángulos varía en dos; esto puede ser evidencia de que han capturado la comunalidad (Vergel, 2015a).

- ✓ Objetiva la generalización de dicha característica común.

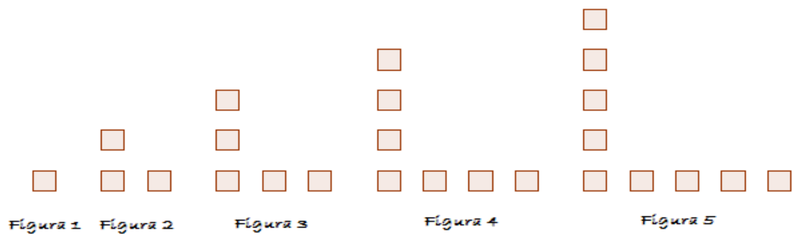
Una vez los estudiantes logran captar esa característica común y aplicarla a términos concretos (para un término de la secuencia) que no están en el campo perceptual, más aún a términos concretos remotos, se puede decir que han logrado una generalización. Para esto el estudiante necesita establecer una relación entre la posición de la figura con la cantidad de cuadrados y con la cantidad de triángulos. Aunque no es claro si es una generalización de tipo aritmético, ya que puede darse a partir de la estrategia de conteo, o una generalización de tipo algebraico, dada a través de una fórmula corporeizada.

- ✓ Deduce una fórmula que permite definir cualquier término de la secuencia.

En esta fase es posible que el estudiante proponga fórmulas en lenguaje natural, por ejemplo: “la figura 10 tiene 10 cuadrados y el doble de triángulos más dos”, “la figura tiene el doble de triángulos que cuadrados más dos”, “hay tantos triángulos en la parte superior como cuadrados, más tantos triángulos en la parte inferior como cuadrados más dos”, o una fórmula incompleta como “el número de triángulos es el doble del número de cuadrados” o “la suma de tantos triángulos en la parte superior como cuadrados, más tantos triángulos en la parte inferior como cuadrados”. Estas son sólo algunas de las fórmulas que pueden surgir de la actividad.

Actividad 2. El objetivo de esta actividad consiste en que los estudiantes a partir del análisis de la estructura de la secuencia describan y extiendan el patrón geométrico de una secuencia.

Considera la secuencia geométrica que se muestra a continuación.



1. Dibuja la Figura 6 de la secuencia.
2. Dibuja la Figura 8 de la secuencia. Explica cómo lo hiciste.
3. Dibuja la Figura 15 de la secuencia. Explica cómo lo hiciste.
4. Escribe un mensaje a un compañero indicando cómo podría construir la Figura 25. Luego le explicas cómo podría construir la Figura 100.
5. ¿Cuántos cuadrados tiene la Figura 500? ¿Por qué?
6. Una figura tiene 1501 cuadrados, ¿A qué número de la figura corresponde?
7. Sebastián plantea una figura para que sea parte de esta secuencia. Para su construcción dice que necesita exactamente 31 cuadrados. La afirmación de Sebastián ¿Es verdadera o Falsa? En cualquier caso explica tu respuesta.

Figura 11. Tarea 2: Secuencia figural apoyada en representación tabular (Tomada de Rivera 2010, p.173)

Descripción. La segunda tarea (ver figura 11), propone una secuencia figural con apoyo tabular, que cosiste en un arreglo en forma de L. Una de las posibles maneras de describirlo sería como un arreglo formado por n cuadrados ubicados horizontalmente y $n-1$ cuadrados ubicados verticalmente o simplemente por $2n-1$ cuadrados, para $n = 1, 2, 3, ...$

Análisis de la actividad. En esta actividad puede prevalecer la aplicación de estrategias aditivas. Por ejemplo los estudiantes pueden centrarse en el conteo de los cuadrados como objetos individuales y no como una agrupación de objetos (Rivera, 2013). Los recursos semióticos a los que podrían recurrir los estudiantes son: palabras, gestos, actividad perceptual, representaciones gráficas, expresiones verbales, expresiones escritas en lenguaje natural, entre otras.

En la actividad 2 esperábamos que el estudiante notara durante el proceso de objetivación de la comunalidad que la figura empieza a tomar forma de L desde el segundo término y mantiene esa misma forma a medida que aumenta el término de la secuencia, aunque aumente su longitud en cada iteración. Al identificar la comunalidad el estudiante puede ver la figura como una agrupación de cuadrados, a los cuales va agregando dos cuadrados en cada paso; o puede ver la figura como composición de una fila y una columna a las que agrega un cuadrado en cada paso.

Fases del proceso de generalización

- ✓ Objetiva la característica común.

En esta actividad es posible que el estudiante tomando conciencia de la estructura espacial, vea la figura compuesta fila y una columna, para luego reconocer la estructura numérico-espacial de la secuencia. En ella los estudiantes pueden notar que en cada paso siempre se aumenta la misma cantidad de cuadrados, en total dos, es decir, uno en la fila y uno en la columna.

- ✓ Objetiva la generalización de dicha característica común.

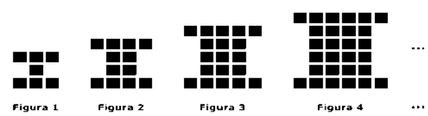
Considerábamos que probablemente los estudiantes lograrían identificar la relación entre el número de término con la cantidad de cuadrados que conforman la figura, y así lograrían extrapolar una generalización para determinar el número de cuadros que conforman la figura sin tener la necesidad de representar gráficamente el término 8 o el término 15.

- ✓ Deduce una fórmula que permite definir cualquier término de la secuencia.

En esta fase pensábamos podrían surgir algunas fórmulas a partir de la labor conjunta que implicaran la relación entre el número de término con la cantidad de cuadrados que conforman la figura, tal como: “para hallar la figura 8, primero hallamos la cantidad de cuadrados en cada fila, en la fila horizontal hay 8 cuadrados que es el mismo número que indica la posición de la figura y luego en la fila vertical son 7 cuadrados que es el mismo que indica la posición menos uno, luego el total de cuadrados de la figura 8 se obtiene sumando los dos valores hallados” o “el número de cuadrados de la figura 8 es igual al doble del número de la posición que ocupa menos uno”.

Actividad 3. Esta actividad va orientada a posibilitar que el estudiante proponga una generalización de patrones que implique plantear estrategias aditivas y multiplicativas.

Observa la siguiente secuencia formada por cuadrados unitarios.



1. Dibuja la Figura 5 de la secuencia.
2. Dibuja la Figura 7 de la secuencia. Explica cómo lo hiciste.
3. Dibuja la Figura 15 de la secuencia. Explica cómo lo hiciste.
4. Escribe un mensaje a un compañero indicando cómo podría construir la Figura 25. Luego le explicas cómo podría construir la Figura 100.
5. ¿Cuántos cuadrados unitarios tiene la Figura 4?
6. ¿Cuántos cuadrados unitarios tiene la Figura 5? ¿Por qué?
7. ¿Cuántos cuadrados unitarios tiene la Figura 250? ¿Por qué?
8. Una figura tiene 964 cuadrados, ¿A qué número de la figura corresponde?
9. Salomé utiliza el siguiente método para saber por cuántos cuadrados unitarios está formada cada figura:
   Figura 1: 1 × 1 + 2 x (1 + 2) = 1 + 2 × 3 = 1 + 6 = 7
   Figura 2: 2 × 2 + 2 × (2 + 2) = 4 + 2 × 4 = 4 + 8 = 12
   Figura 3: 3 × 3 + 2 × (3 + 2) = 9 + 2 × 5 = 9 + 10 = 19
   Explica el método de Salomé.
10. Completa los renglones correspondientes a las Figuras 5 y 6, según el método de Salomé. Figura 5: 5 × ___ + ___ × (___ + 2) = 25 + 2 × 7 = 25 + 14 = ___
    Figura 6: ___ × ___ + 2 × (6 + ___) = ___ + ___ × ___ = ___ + ___ = ___
11. Utiliza el método de Salomé para determinar por cuántos cuadrados unitarios está formada la Figura 8.

Figura 12. Tarea 3: Secuencia figural apoyada en representación tabular

Descripción. La tarea 3 (ver figura 12), propone una secuencia figural con apoyo tabular, que cosiste en una arreglo en forma de letra I, formado por una fila superior con $n + 2$ cuadrados unitarios, una fila inferior con $n + 2$ cuadrados unitarios y un arreglo central formado por n^2 cuadrados unitarios o $n(n + 2) + 4$ cuadrados, para $n = 1, 2, 3, \ldots$

Análisis de la actividad. En esta actividad los estudiantes deben prestar mucha atención a la agrupación de los cuadrados, esperábamos que ellos tendieran a dibujar todas las figuras de las etapas anteriores.

En la actividad pensábamos que posiblemente los estudiantes relacionaran diversos elementos semióticos perceptivos, quinesiológicos, gestuales, simbólicos y verbales.

Fases del proceso de generalización.

- ✓ Objetiva la característica común.

En este caso una de las posibles maneras en la que los estudiantes perciban la figura es que apoyados en la estructura espacial vean la figura dividida en dos filas, una superior y otra inferior, y un arreglo central en forma de cuadrado. Luego, es posible que noten que hay un aumento de un cuadrado tanto a la fila superior como a la fila inferior, además que en el arreglo central el número de cuadrados corresponde a un número cuadrado, luego esperábamos usaran estrategias multiplicativas.

- ✓ Objetiva la generalización de dicha característica común.

En esta fase es posible que los estudiantes tomen conciencia de la relación que existe entre la posición y el número total de cuadrados de la figura apoyados en la estructura espacial, al percibir la figura divida en dos filas y un arreglo central que tienen distintos patrones de crecimiento. Esta relación les podría ayudar a hallar términos remotos que no podrían dibujar fácilmente.

✓ Deduce una fórmula que permite definir cualquier término de la secuencia.

Esperábamos que los estudiantes construyeran fórmulas denotadas a través de sus gestos y palabras que pudieran aplicar a términos particulares. Por ejemplo: “para hallar el término 7, se suma dos veces 7, luego a ese resultado se le agrega 4 y por último se suma el producto de multiplicar 7 por sí mismo”.

Actividad 4. Esta actividad busca establecer un acercamiento de los estudiantes a secuencias de tipo numérico e indagar sobre el tipo de recursos semióticos que movilizan cuando las analizan.

Considera la secuencia numérica que se muestra a continuación

2	**5**	**8**
Término 1	Término 2	Término 3

1. ¿Cuáles son los números correspondientes a los Términos 4, 5 y 6 de la secuencia?
2. ¿Cuál es el número que corresponde al Término 15? Explica cómo lo hiciste.
3. ¿Cuál es el número que corresponde al Término 100? Explica cómo procediste para encontrar la respuesta.
4. ¿A qué Término corresponde el número 803? Explícale a un compañero(a) con todos los detalles la manera como procediste para encontrar tu respuesta.
5. Un niño piensa en el número 903. ¿Pertenece este número a la secuencia dada? Explica por qué sí o por qué no.
6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a clase, donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para saber o calcular rápidamente el número que corresponde al Término 8275.

Figura 13. Tarea 4: Secuencia numérica apoyada en representación tabular

Descripción. La tarea 4 (ver figura 13), propone una secuencia numérica con apoyo tabular, que se genera a partir del término general $3n - 1$ para $n = 1,2,3. ..$

Análisis de la actividad. En esta actividad se introducen las secuencias numéricas por tanto los estudiantes ya no cuentan con el apoyo de elementos geométricos-espaciales como en las tareas anteriores en que se trabaja con secuencias figurales, luego esperábamos que recurrieran a estrategias de conteo. Para identificar la comunalidad de la secuencia los estudiantes pueden plantear estructuras aditivas al establecer relaciones entre números consecutivos realizando operaciones aritméticas, y así identificar el aumento de 3 de un número al siguiente.

En esta actividad considerábamos que los estudiantes movilizarían diferentes recursos semióticos tales como señalización, conteo, tabulación, expresiones en lenguaje natural, entre otras, pero no con las misma intensidad que al enfrentar tareas con secuencias figurales (Vergel, 2015a).

Fases del proceso de generalización.

- ✓ Objetiva la característica común.

Esta tarea cuenta solamente con la estructura numérica, por lo que considerábamos que los estudiantes centrarían su atención en la dimensión aritmética. Esperábamos que identificaran que los términos aumentan la misma cantidad, en este caso su incremento es 3, y pudieran utilizarlo para hallar los términos 4, 5 y 6 de la secuencia. Una de las posibles estrategias para abordar la tarea es el conteo, donde pueden obtener un término al aumentar en 3 al número de la posición anterior.

- ✓ Objetiva la generalización de dicha característica común.

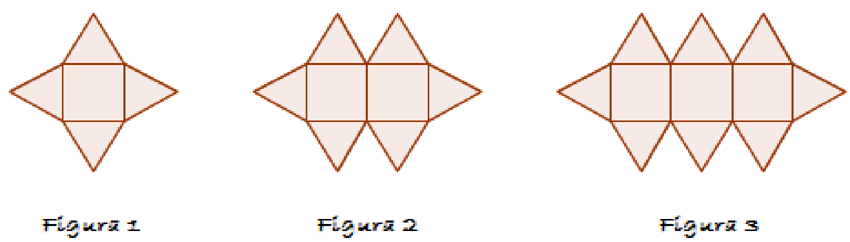
Una vez los estudiantes logran identificar la comunalidad entre los números de la secuencia, es importante que establezcan una relación entre la posición y el número que ocupa dicha posición para calcular cualquier término, no solo términos consecutivos de la secuencia.

✓ Deduce una fórmula que permita definir cualquier término de la secuencia.

En esta etapa considerábamos que los estudiantes podrían plantear fórmulas en lenguaje natural tal como: “para hallar el siguiente término le sumamos 3”.

Actividad 5. Esta actividad busca que los estudiantes identifiquen y usen la indeterminancia algebraica de manera analítica.

Recuerda la secuencia de la tarea 1.



1. El profesor Nelson tiene una bolsa y dentro de ella introduce varias tarjetas, cada una con un número. Cada uno de estos números corresponde a una de las figuras de la secuencia anterior. El saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre, asegurándose de que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta. El profesor Nelson quiere que el sobre sea enviado a la profesora Piedad con un mensaje que será introducido en el sobre junto con la tarjeta que contiene el número de la tarjeta. Este mensaje debe explicar a la profesora Piedad cómo calcular rápidamente el número de cuadrados y triángulos que corresponde al número de la tarjeta.

2. Intercambia el mensaje con otro grupo antes de ponerlo en su respectivo sobre.

3. Analiza el mensaje del otro grupo para determinar si cumple con los siguientes criterios:
   - El mensaje es claro.
   - El mensaje permitiría a la profesora Piedad calcular rápidamente el número de cuadrados y triángulos que corresponde al número de la tarjeta.
   - El mensaje es convincente.
   - El mensaje está bien redactado.

Figura 14. Tarea 5: Secuencia numérica apoyada en representación tabular

Descripción. La quinta tarea (ver figura 14), propone el Problema del Mensaje a partir de la secuencia figural que propone la tarea 1.

Análisis de la actividad. Consideramos substancial el Problema del Mensaje porque resultados de importantes investigaciones revelan que le permite al estudiante una evolución de un tipo de pensamiento a otro. Según Vergel (2014) “el Problema del Mensaje posibilitó que los estudiantes finalmente nombraran la indeterminancia de manera analítica y que la volvieran objeto de discurso” (p.91), como podemos observar los estudiantes pasaron de un pensamiento algebraico factual a un pensamiento algebraico contextual.

Vergel (2015a) indica que en el Problema del Mensaje es fundamental identificar una persona real que sea estimada por los estudiantes para lograr los resultados esperados. En esta investigación se identificó a la profesora Piedad, una profesora admirada y respetada por sus estudiantes por su trabajo en el área de español. Esperábamos que cuando los estudiantes escribieran el mensaje a la profesora Piedad, sintieran la necesidad de escribirlo de una manera especial, donde explicarán con detalle y con un lenguaje apropiado cómo esta persona puede calcular rápidamente el número de cuadrados y triángulos que corresponde al número de la tarjeta

Fases del proceso de generalización.

- ✓ Objetiva la característica común.

Al tratarse de la misma secuencia que en la tarea 1, consideramos que los estudiantes tendrían presente la comunalidad identificada en el trabajo previo.

- ✓ Objetiva la generalización de dicha característica común.

Para plantear una generalización que le permita calcular rápidamente el número de cuadrados y triángulos que corresponde al número de la tarjeta el estudiante necesita establecer una relación entre la posición de la figura con la cantidad de cuadrados y con la cantidad de triángulos.

- ✓ Deduce una fórmula que permita definir cualquier término de la secuencia.

En la tarea 5 la indeterminancia algebraica está explícitamente dada, por lo que esperábamos los estudiantes nombraran la indeterminancia a través de alguna expresión semiótica, y dieran pautas para operar sobre ella teniendo en cuenta el trabajo realizado en la primera tarea. Algunas de las posibles fórmulas que consideramos los estudiantes podrían plantear fueron: “el número de posición de la figura indica el número de cuadrados y el número de triángulos de las filas superior e inferior, más un triángulo a lado izquierdo y otro al dado derecho”; “el número de la tarjeta es igual al número de cuadrados y es el doble del número de triángulos, no hay que olvidar sumar dos triángulos que van a los lados”.

Actividad 6. Esta actividad al igual que la actividad anterior tiene como propósito que los estudiantes identifiquen y usen la indeterminancia algebraica de manera analítica, pero en secuencias numéricas. Además, esperábamos indagar sobre los medios semióticos que movilizan los estudiantes en ausencia del apoyo tabular en una secuencia numérica.

Ahora considera la siguiente secuencia numérica

5	**7**	**9**	**11**

1. ¿Cuál consideras es el primer término de la secuencia anterior?, ¿por qué?
2. ¿Cuál es el término siguiente?
3. El profesor Nelson tiene una urna y dentro de ella introduce varias tarjetas, cada una marcada con un número. Cada uno de estos números corresponde a uno de los términos de la secuencia anterior. Él saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre, asegurándose que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta. El profesor Nelson quiere que se escriba un mensaje a la profesora Piedad que será introducido en el sobre junto con la tarjeta, explique cómo calcular rápidamente el número que corresponda a ese término.
4. Ahora, el profesor Nelson hace lo mismo que en el punto anterior, pero esta vez cada uno de los números corresponde a uno de los números de la secuencia. Escribe un mensaje la profesora Piedad en donde le expliques cómo calcular rápidamente el término que corresponde al número marcado en la tarjeta.

Figura 15. Tarea 6: Secuencia puramente numérica

Descripción. La tarea 6 (ver figura 15), propone una secuencia puramente numérica, que se genera a partir del término general $2n + 3$ para $n = 1,2,3, \ldots$

Análisis de la actividad. En esta actividad también se aborda el problema del mensaje, pero con una secuencia numérica para estudiar los recursos semióticos que movilizan los estudiantes al enfrentarse a secuencias que no tienen apoyo tabular ni una estructura espacial. Es muy probable que los estudiantes durante la actividad hallen la comunalidad de la secuencia del mismo modo que en la actividad 4, recurriendo a una estrategia de conteo. Sin embargo, en esta tarea no aparece etiquetado el orden de cada uno de los términos por lo que pueden presentarse algunas dificultades. Por ejemplo Moreno (2014), al analizar este tipo de situaciones concluye que los estudiantes no tomaron conciencia de la importancia de identificar el primer término de la secuencia, por tanto la autora recomienda usar tabulación para encontrar la posible secuencia.

Los medios semióticos que esperábamos los estudiantes movilizaran en la actividad fueron: la señalización, el conteo, la tabulación, aunque como lo reporta Vergel (2015b) no serán movilizados con la misma intensidad que en secuencias con estructura espacial.

Fases del proceso de generalización.

- ✓ Objetiva la característica común.

Los estudiantes pueden notar la comunalidad en los términos, al comparar pueden determinar que los números "consecutivos" van aumentando en 2; además pueden utilizar este incremento para hallar los siguientes términos, por lo menos términos cercanos.

- ✓ Objetiva la generalización de dicha característica común.

En esta fase es posible que en los estudiantes surja una toma de conciencia de la relación entre el número de la posición y el número que ocupa dicha posición para calcular términos no consecutivos de la secuencia, lo que luego posiblemente permitirá una generalización algebraica.

- ✓ Deduce una fórmula que permita definir cualquier término de la secuencia.

Considerábamos que los estudiantes pueden llegar a construir fórmulas denotadas a través de su acción multimodal, gestos y discurso que se pueden aplicar a términos particulares, por ejemplo: “para el hallar el siguiente término, se aumenta en 2 el número del término anterior” o “para hallar el término que indica la tarjeta debemos sumarle 3 al doble del número que está en la tarjeta”.

4.5 ANÁLISIS A POSTERIORI DE LAS ACTIVIDADES

Dentro de la teoría de la objetivación se toma como unidad de análisis *la actividad*, por lo cual se hizo una observación cuidadosa de los videos para identificar los episodios donde fue más evidente la toma de conciencia de los estudiantes cuando abordaban tareas sobre generalización de patrones figurales y numéricos. Para entender esa toma de conciencia se requiere de un análisis multimodal donde se estudie el papel y la relación entre las acciones perceptivas, actividad auditiva, gestos, ritmo, lenguaje, signos matemáticos, en general. Es por eso que realizamos un seguimiento de la actividad multimodal de los estudiantes y profesores.

El análisis multimodal permitió apreciar la evolución de los medios semióticos de objetivación movilizados y de los nodos semióticos, incluso se pudieron identificar procesos de objetivación como iconicidad y contracción semiótica.

Para el análisis de datos, una vez identificados los episodios más destacados se organizaron en una tabla con tres columnas. La primera columna indica el número de línea de la transcripción, la segunda contiene el cuerpo de la transcripción, incluyendo imágenes, y la tercera columna comprende comentarios interpretativos o notas de campo.

Para entender los diálogos es importante puntualizar el tipo de codificación de registro usada en la documentación de la actividad. En las transcripciones de los videos presentados; para identificar cada estudiante asignamos un nombre diferente para proteger su verdadera identidad y para los grupos conformados utilizamos un código $G_{A,}$ $G_{B,}$ $G_{C,}$… Para la numeración de las líneas la notación utilizada es L_1, L_2, L_3…, cada línea indica la intervención de un individuo y se vuelve a iniciar con la numeración cuando se cambia de tarea. En el cuerpo de la transcripción el discurso verbal de los participantes está escrito en cursiva y el discurso no verbal entre corchetes "[ ]", los puntos suspensivos "…" son utilizados para indicar pausas en el lenguaje hablado y "[…]" los puntos suspensivos entre corchetes indican la omisión de algunas palabras o líneas (notación similar a la usada por Vergel, 2014). Las transcripciones en lo posible están acompañadas por imágenes de los participantes o de las producciones de los estudiantes de sus hojas de trabajo.

Las sesiones se desarrollaron con pequeños grupos establecidos libremente con el fin de promover formas de subjetividad. Esperábamos que en cada grupo se diera el ambiente propicio que facilitara la aparición de diferentes formas de cooperación en la búsqueda de la solución de las tareas planteadas. Consideramos que el trabajo en equipo puede favorecer la reflexión y la generación de dinámicas de discusión. Una vez los grupos de trabajo se instauraron, por motivos de disciplina el profesor titular decidió que los grupos se mantuvieran hasta finalizar la intervención en el aula.

Actividad 1. Aunque el tema de patrones fue nuevo para los estudiantes se evidenciaron procesos de objetivación, a través de los cuales los estudiantes capturaron la lógica cultural y empezaron a familiarizarse con las formas de acción y pensamiento históricamente constituidos (Radford, 2006a). En el diseño de la actividad 1, (ver secuencia en la figura 16), se tenían previstas tres sesiones de clase, pero sólo fueron necesarias 2 para el desarrollo de la actividad.

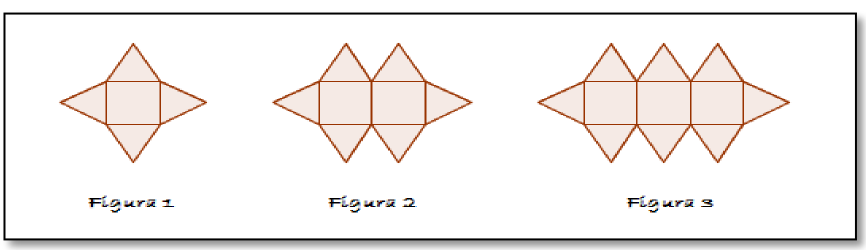


Figura 16. Secuencia figural, tarea 1

Para responder a los ítems los estudiantes recurrieron a estrategias numéricas y sus generalizaciones se expresaron en un nivel concreto (en este caso el nivel concreto es el numérico, determinar la cantidad de cuadrados). La articulación de diferentes medios semióticos de objetivación (como gestos, ritmo, dibujos, signos y discurso) fue clave para que los estudiantes a través de la actividad expresaran sus razonamientos durante el proceso de generalización. Presentamos algunos diálogos correspondientes a la segunda sesión de actividad desarrollada a partir de la tarea 1.

El siguiente diálogo se centra en la labor conjunta realizada por el grupo G_A, donde la estudiante Mariana explica a Ángela, su compañera de grupo, la forma de obtener la cantidad de cuadrados para la figura 10.

L_1	*Mariana: La quinta secuencia [señala con su mano el ítem b de la tarea 1] o sea tienen que hacer… como acá es la primera [voltea la hoja para indicar con su lápiz la figura 1] y tiene un rect… un cuadro no más, acá como son cinco [vuelve a la segunda hoja para señalar con su lápiz cada uno de los cuadrados que conforman la figura 5] tiene que tener cinco cuadros…y ya.* 	Uso de la expresión semiótica “acá” como deíctico espacial (gesto como señalamientos).
L_2	*Mariana: Y acá va a ser lo mismo…[indica con el lápiz la figura 5]*	En esta producción la expresión “va a ser lo mismo” es una función generativa del lenguaje.

L_3	*Mariana: Mire la d…* *[Lee con cuidado el ítem d de la tarea 1] Dibuje la secuencia diez y explica cómo lo hiciste.* *O sea tienen que ser diez [señala cada uno de los diez cuadrados] cuadros: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez cuadros y tenemos que explicar la secuencia…* 	Ritmo y movimientos como medios semióticos de objetivación. También se observa que el grupo recurre a la estrategia de "conteo" como otro medio semiótico de objetivación.
L_4	*Ángela: La secuencia.*	
L_5	*Mariana: Y hacer lo de arriba que son los rectángulos y ya…[hace un desplazamiento con la mano indicando los triángulos que ha dibujado en la figura]* 	

Transcripción 1. Actividad 1, grupo G_A

En el diálogo, al interior del grupo $G_{A,}$ podemos observar que la estudiante Mariana explica a su compañera de grupo Ángela, la manera como puede proceder en la construcción de la figura 10. Para esto recurre a una articulación entre su expresión verbal, gestos y señalamientos que realiza con sus manos y con su lápiz. En la construcción de la figura 10, que es una figura cercana, Mariana a través de la observación de la colección dada identifica algunas de las características comunes: el tipo de figuras geométricas que conforman cada término, la ubicación espacial de estas y la relación entre el número de la figura y la cantidad de cuadrados que la conforman.

En la línea 1, la expresión "*acá como son cinco… tiene que tener cinco cuadros…y ya*" contiene el deíctico espacial "*acá*" que indica algo visualmente alcanzable y las palabras "tiene que tener" sugieren obligatoriedad de una regularidad, es decir, la estudiante hace énfasis en la igualdad entre el número de la figura con el número de cuadrados que la componen. Luego en la línea 2, la expresión *"acá va a ser lo mismo…"* la consideramos una función generativa del lenguaje, ya que sugiere que Mariana ha objetivado una regularidad para la secuencia, y que es aplicable a otros términos cercanos, incluso pasa de la figura 5 a la figura 10 sin necesidad de pasar por cada una de las etapas intermedias.

Una de las estrategias a las que recurre Mariana para responder al ítem 3 es el conteo, en la línea 3, con la expresión *"…o sea, tienen que ser diez cuadros: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez cuadros…*" vemos que Mariana señala cada cuadrado correspondientes a la figura 10 mientras los cuenta uno a uno, por lo que inferimos que ha objetivado una relación del número de la figura con el número de cuadrados que la componen. El ritmo y los movimientos presentes en el conteo de Mariana crean una cadencia que juegan el mismo rol que las funciones generativas del lenguaje. Según Radford (2003) estos gestos le permiten al individuo enfatizar y complementar los razonamientos que expresa en sus interacciones.

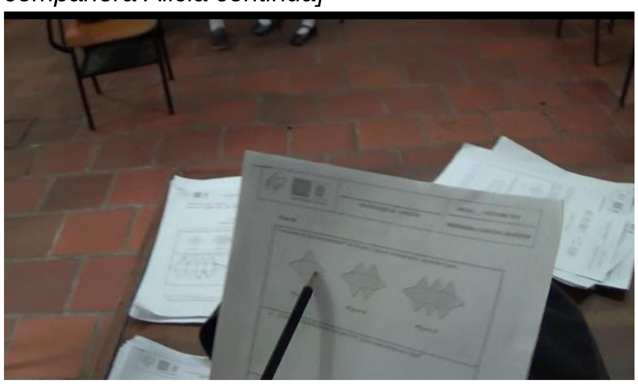
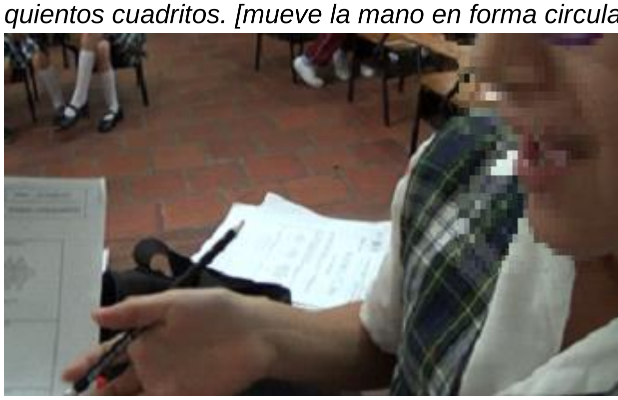
En cuanto a los triángulos de la figura 10 en el diálogo no hay una completa explicación verbal de su estructura espacial. Aunque en la línea 5 del diálogo con la expresión "*y hacer lo de arriba que son los rectángulos y ya…"* podemos notar que los señalamientos hechos por Mariana dan a entender la idea que la estudiante intenta expresar, la cual inferimos que es dibujar triángulos no rectángulos tal como ella dice, además expresa la ubicación espacial de los triángulos, cuando señala la parte superior e inferior en la figura.

En las explicaciones de Mariana se puede apreciar que sus acciones se encuentran en el pensamiento factual, aunque Mariana logró plantear una generalización de la característica común que le permite hallar términos remotos de la secuencia, esta sólo fue utilizada para encontrar términos subsecuentes. Además, vemos que la relación que propone está operando en casos particulares como son la figura 1, la figura 5 y la figura 10, la indeterminancia aún no hace parte explicita de su discurso.

Por otro lado, notamos que el trabajo en pequeños grupos favoreció formas de cooperación y de interacción en la producción del saber. Se evidencia que en los miembros del grupo empieza a emerger la responsabilidad por el otro, esto se puede inferir por el intenso esfuerzo que hace Mariana para comunicar sus ideas a su compañera Ángela, con el fin de ayudarla a tomar conciencia de una manera en que se pueden construir las figuras 5 y 10. La construcción de las figuras deja de ser un compromiso individual para ser un compromiso grupal.

A partir de la pregunta *¿cuántos cuadrados tiene la figura 500?, ítem 5,* se indagó al grupo G_B sobre la manera en que hallaron ese valor. A continuación se presenta la conversación que se desarrolla con la profesora Carolina y las estudiantes Alicia, Laura, Jennyfer y Saray.

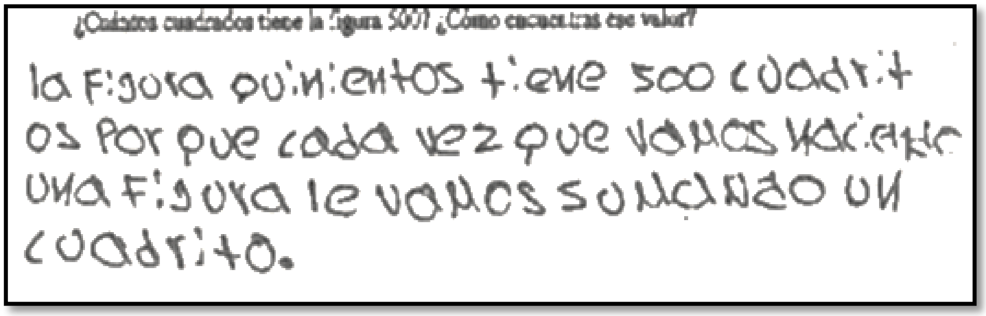
L_6	*Profesora Carolina: Habías dicho Jennifer, ¿cuántos cuadrados tiene la figura quinientos?*	
L_7	*Jennyfer: Sí, quinientos*	
L_8	*Profesora Carolina: ¿Por qué?*	
L_9	*Saray: Cuadrados.*	
L_{10}	*Jennyfer: Porque son quinientos.*	

L_{11}	*Alicia: Porque cada vez que va pasando otra figura le vamos sumando un cuadrito más [mueve la mano en forma circular]* 	Uso movimientos circulares como medios semióticos de objetivación para indicar acciones que se continúan repitiendo.
L_{12}	*Laura: Como acá dice que es la figura uno, entonces un cuadrito… [señala las figuras 1 y 2 de la secuencia a medida que va hablando de cada una de ellas, su compañera Alicia continua]* 	Uso de deícticos espaciales “acá” para indicar términos visualmente alcanzables.
L_{13}	*Alicia: La figura uno, entonces un cuadrito, y la figura dos, le vamos a dibujar dos cuadritos, y cada vez le vamos sumando un cuadrito más, entonces la figura 500 tiene quientos cuadritos. [mueve la mano en forma circular]* 	

Transcripción 2. Actividad 1, grupo G_B

En este episodio podemos observar como las estudiantes del grupo $G_{B,}$ al comunicar sus ideas a la profesora, movilizan diferentes recursos semióticos tales como señalamientos, gestos indexicales acompañados de expresiones lingüísticas para denotar que han logrado identificar características de la estructura espacial y numérica de los cuadrados que conforman las figuras. En el diálogo Alicia, en la línea 11, con la expresión "…*cada vez que va pasando otra figura le vamos sumando un cuadrito más*" observamos que Alicia a identificado un patrón de crecimiento en términos cuantitativos, es decir, describe un incremento de un cuadrado a la figura a medida que el número que indica su posición aumenta.

Al asociar el movimiento circular que realiza Alicia con su discurso verbal, línea 11 "*Porque cada vez que va pasando otra figura le vamos sumando un cuadrito más*" y las expresiones de la línea 13 *"la figura uno entonces un cuadrito y la figura dos, le vamos a dibujar dos cuadritos y cada vez le vamos sumando un cuadrito más, entonces la figura 500 tiene quientos cuadritos*", podemos interpretar que ha identificado la comunalidad y la expresa como un aumento que continua consistentemente, incluso para figuras que no están en su campo perceptual. A partir de esta generalización basada en un esquema aditivo, sumar de uno en uno, hallar figuras remotas implicaría un largo proceso, por lo tanto no le permite deducir una fórmula para hallar cualquier figura de la secuencia, según Radford (2003) se trata de una generalización de tipo aritmético. En la figura 17 se muestra la producción del grupo G_B, donde podemos apreciar como a través del trabajo conjunto logra expresar por escrito la manera en que ha objetivado la característica común en la secuencia.


¿Cuántos cuadrados tiene la figura 500? ¿Cómo encontraste ese valor?

la figura quinientos tiene 500 cuadrit
os por que cada vez que vamos haciendo
una figura le vamos sumando un
cuadrito.

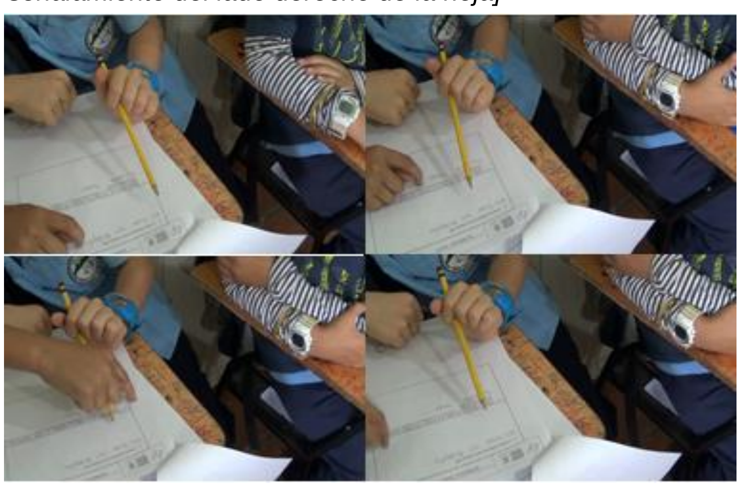
Figura 17. Producción del grupo G_B, ítem 5 Tarea 1

En la expresión de la línea 13, también podemos inferir que estas expresiones semióticas evidencian indicios de la identificación de una relación funcional, pues Alicia percibe que el número del término es igual al número de cuadrados que conforman la figura, lo que le permite deducir que la figura 500 tendría 500 cuadrados sin realizar operaciones extensas. En la actividad matemática de Alicia podemos identificar una sincronización de diferentes medios semióticos de objetivación, tales como su discurso, el ritmo y los movimientos de sus manos, lo cual se constituye en un nodo semiótico, ya que le permiten lograr “una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones” (Radford, 2003, p. 41).

Aunque el grupo expresa una generalización de la comunalidad de la secuencia y logra extenderla a figuras lejanas, sus acciones siguen operando en figuras específicas. La indeterminancia en sí no hace parte de su discurso, pero aparece a través de ejemplos concretos, tampoco se expresa de manera explícita el carácter operatorio de lo indeterminado, pero podríamos ver en sus generalizaciones una analiticidad intuida o proto-analiticidad (Vergel, 2015a). Por lo tanto, es posible afirmar que el grupo ha logrado plantear dos generalizaciones, una generalización de tipo aritmético, asociada a un esquema aditivo, sumar de uno en uno, y otra generalización de tipo factual, asociada a la relación percibida entre el número de la figura y el número de cuadrados que la conforman.

En el trabajo conjunto que realiza el grupo G_B existe un alto nivel de compromiso en la producción del saber, esto se refleja en muchas de sus acciones, por ejemplo, en el diálogo cada una de las integrantes aporta ideas para dar a entender mejor la generalización que han planteado para la secuencia. Incluso, cuando Laura señala con su lápiz los términos dados en la hoja de trabajo vemos que Alicia retoma el discurso verbal para explicar el significado de ese movimiento.

Para mostrar el trabajo movilizado por los estudiantes para responder al ítem 8 de la tarea 1, tomamos un fragmento de diálogo del grupo G_C que surgió a medida que se discutía sobre la pregunta *¿Cuántos triángulos tiene la figura 100?*

L_{14}	*Sebastián: Mire…* *¿Cuántos triángulos tiene la figura 100? Cien por un lado [señala con su mano la parte superior de la hoja], cien por el otro [señala con su mano la parte inferior de la hoja] y dos de los dos lados [señala el lado izquierdo de la hoja, seguido del señalamiento del lado derecho de la hoja]* 	En la imagen de la izquierda se muestra la secuencia de señalamientos que realizan dos miembros del grupo C para dar respuesta al número de triángulos de la figura 100.
L_{15}	*Erick: Ciento dos [acompaña con señalamientos con su lápiz los movimientos que su compañero Sebastián realiza con su mano]*	

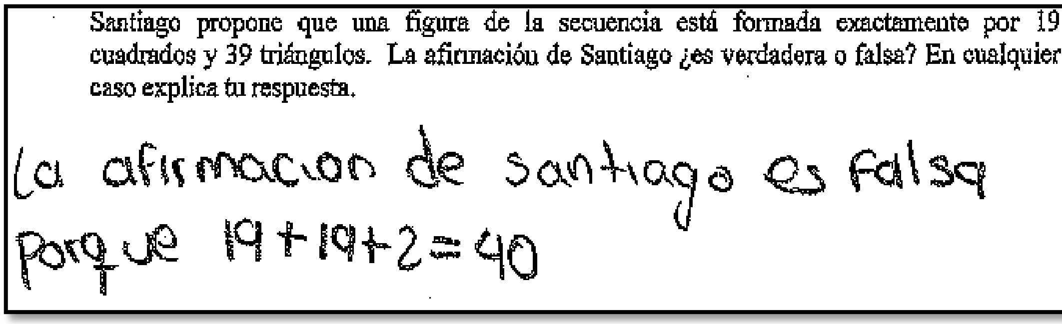
		
L_{16}	*Santiago: Ciento dos triángulos*	

Transcripción 3. Actividad 1, grupo G_C

En el diálogo anterior se presenta una imagen en la línea 14, esta imagen muestra la movilización de gestos indexicales que realizan dos miembros del grupo G_C para mostrar la manera en que han objetivado la estructura espacial de los triángulos de las figuras de la secuencia. A partir de los gestos de los estudiantes inferimos que ellos perciben la figura dividida en dos filas, una superior y una inferior, y dos triángulos laterales. En la expresión de Santiago "…*cien por un lado, cien por el otro y dos de los dos lados*" notamos que los estudiantes han objetivado una comunalidad en la estructura numérica, además evidencian indicios que han articulado con la estructura espacial y la numérica al describir la figura 100 formada por la suma de 100 triángulos en la parte superior, más 100 triángulos en la parte inferior, más dos que están a los lados de la figura.

Al igual que los grupos anteriores, el grupo G_C plantea una abducción de la característica común y logra extrapolarla a términos lejanos de la secuencia. Sin embargo, se puede considerar una generalización de tipo factual, ya que sus acciones solamente están operando en objetos a nivel concreto, en este caso el nivel concreto es numérico (figura 100).

En la siguiente figura se presenta la producción del grupo G_B en respuesta al último ítem de la tarea 1.


Santiago propone que una figura de la secuencia está formada exactamente por 19 cuadrados y 39 triángulos. La afirmación de Santiago ¿es verdadera o falsa? En cualquier caso explica tu respuesta.

la afirmacion de santiago es falsa porque 19+19+2=40

Figura 10. Producción del grupo G_B, ítem 9 Tarea 1

El esquema operacional propuesto por el grupo G_B deja entre ver la forma como los estudiantes evidencian indicios de la articulación de la estructura numérica con la estructura espacial de la figura, 19 triángulos en la parte superior, 19 triángulos en la parte inferior y 2 triángulos ubicados a los lados. Este esquema operacional es una generalización de acciones numéricas que permanece en un nivel concreto, revela indicios de la relación que los estudiantes perciben entre el número de cuadrados y el número de triángulos de cada fila.

En general, en la tarea 1 las producciones evidencian que la mayoría de los estudiantes logró prolongar la secuencia sin mayores inconvenientes, ya que construyeron figuras cercanas tales como la figura 4, 5 y 10. También podemos ver que la mayoría de los grupos logró comunicar verbalmente la regularidad objetivada para construir las figuras, pero no fue igual en la comunicación escrita. En las hojas de trabajo se pudo ver el alto nivel de dificultad al comunicar sus argumentos de forma escrita; sólo algunos grupos describen la manera de construir las figuras lejanas de la secuencia sin sentir la necesidad de dibujarlas. Todas las generalizaciones propuestas por los estudiantes se aplicaron a objetos a nivel concreto, generalizaron sus acciones en esquemas operacionales para casos particulares. De hecho, sus generalizaciones comprometían siempre referentes figurativos del objeto.

Actividad 2. En cuanto a la planeación inicial, la actividad se desarrolló sin ninguna modificación, incluso se cumplió en el tiempo programado. A continuación se presentan algunos episodios correspondientes a la actividad desarrollada a partir de la tarea 2. Después de la implementación de la tarea 1 los estudiantes se mostraron más familiarizados con este tipo de situaciones, lo que permitió que identificaran y analizaran con más facilidad las características perceptuales de la configuración de la segunda secuencia (ver figura 18).

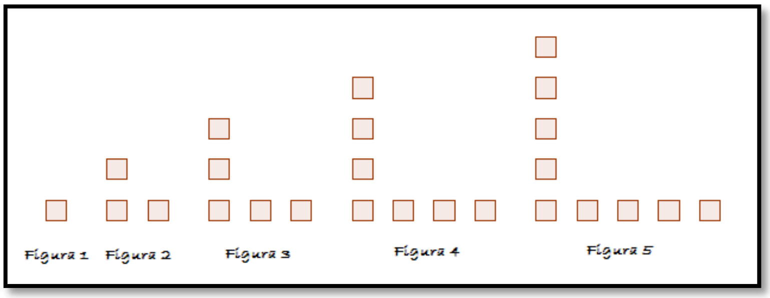


Figura 18. Secuencia figural, tarea 2

Durante la primera parte de la actividad las indagaciones de los profesores se enfocaron en las ideas que estaban surgiendo en cada grupo sobre la manera de cómo prolongar la secuencia a figuras cercanas. Acudimos al trabajo del grupo G_D para presentar los medios movilizados por los estudiantes.

L_1	*Profesor Nelson: ¿Cómo construyeron la figura seis?*	
L_2	*María: Seis cuadritos pequeños [señala con su lapíz la figura cinco de la secuencia, para apoyarse en las figuras dadas], por ahí de un centímetro, horizontal [desliza su lapíz en forma horizontal sobre el espacio corespondiente a la figura 6 de su hoja de trabajo] y verticalmente [desliza su lapíz de manera vertical sobre el espacio corespondiente a la figura 6 de su hoja de trabajo], y hacerlo en forma de L [desliza su lapíz simulando trazar una L].*	

		
L_3	*Profesor Nelson: Saray, y tú ¿cómo harías la figura seis?*	
L_4	*Saray: Como ella dijo.* 	
L_5	*Profesora Carolina: Entonces, ¿qué dijo tu compañera?*	
L_6	*Saray: [Se ríe…] Ella dijo que uno puede hacer seis cuadritos de este lado [señala con su lapíz la columna de la figura seis en su hoja de trabajo], ¡acá no! [señala nuevamente la columna] y cinco acá [señala la fila] porque acá ya está el otro [señala e cuadrado que une la fila y la columna].* 	Uso reiterativo de deícticos espaciales.

Transcripción 4. Actividad 2, grupo G_D

De la actividad perceptual y diálogos del anterior episodio del grupo G_D evidenciamos algunos indicios de que las estudiantes han articulado las estructuras espacial y numérica de la secuencia. Como grupo han llegado a acuerdos alrededor de la construcción de la figura 6. En el diálogo, las estudiantes expresan lecturas parecidas de las determinaciones sensibles de la figura, de lo que inferimos que las estudiantes conciben la forma de la figura como una letra "L" y dividieron la estructura espacial en una fila y una columna, en la que la columna tiene un cuadrado más que la fila. Desde la teoría de la objetivación no se consideran las expresiones de Saray como una imitación de lo expresado por su compañera María. Aunque Saray llega a una toma de conciencia de la construcción de la figura apoyándose tanto en el discurso de María, como en sus movimientos gestuales que hace con el lápiz sobre la hoja de trabajo. Es en la actividad, en el trabajo conjunto, donde Saray puede verbalizar sus razonamientos para explicar la figura y avanzar hasta llegar a justificar el por qué la fila debe tener un cuadrado menos.

En los medios semióticos de objetivación usados por los estudiantes para proponer sus generalizaciones factuales encontramos expresiones lingüísticas y signos que emergen como aspectos importantes en la toma de conciencia para manifestar su pensamiento en la actividad matemática. Podemos observar el grupo G_E:

L_7	*Profesora Carolina: ¿Me puedes explicar cómo hallaste el número de cuadrados que tiene la figura 6?*	
L_8	*Oscar: Cinco cuadrados arriba y cinco para acá, y se pone un cuadrito en la mitad para que una los seis y los otros seis [señala con su índice la fila incluyendo el cuadrado que los une y luego la columna incluyendo de nuevo el cuadrado que los une] y así sucesivamente, con la figura 8, pero la figura 8 es con más cuadrados, [continua con la siguiente página y señala un espacio vacío] solo que con más*	Uso de función generativa del lenguaje en la expresión "y así sucesivamente".

	cuadritos y la figura 15 con más. 	
L_9	*Profesora Carolina: […] Entonces la figura 7 ¿cuántos cuadrados tiene?*	
L_{10}	*Oscar: […] Tendría 13.*	
L_{11}	*Profesora Carolina: Explícame…*	
L_{12}	*Oscar: […] En la figura 7 serían 13, porque se ponen 6 cuadrados horizontales y 6 verticales y uno que los une a los dos para que sean 7 y 7.*	

Transcripción 5. Actividad 2, grupo G_E

En este episodio observamos que los estudiantes del grupo G_E han percibido la comunalidad de diferente forma al grupo G_D. Oscar describe la estructura espacial de la figura dividida en dos filas con la misma cantidad de cuadrados unidos por un cuadrado central. Presentamos la producción de Oscar, en la figura 19, en sus hojas de trabajo para ilustrar como ha objetivado la característica común.

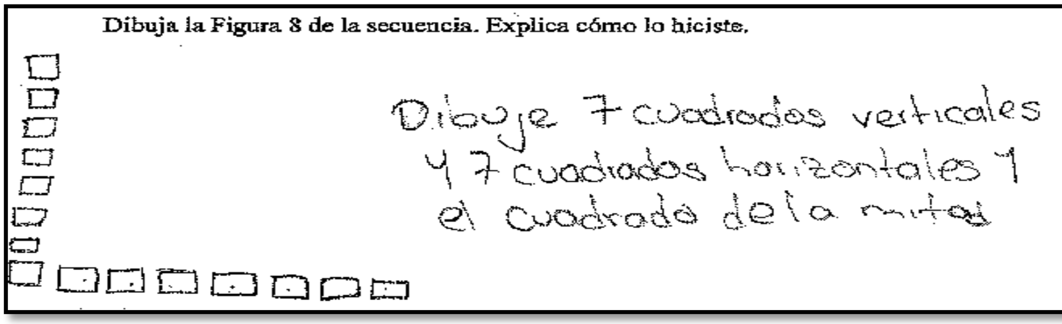
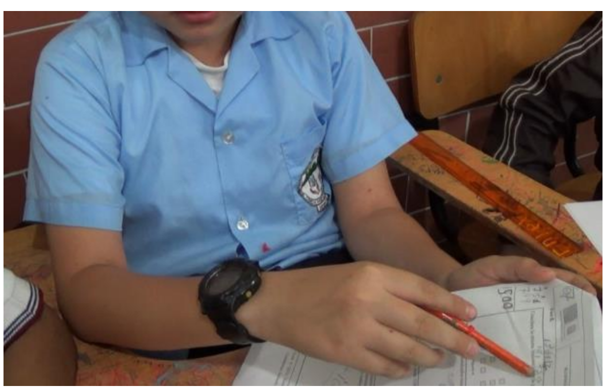


Figura 19. Producción de Oscar, ítem 2 Tarea 2

En la línea 8 en la expresión "c*inco cuadrados arriba y cinco para acá"* el deíctico "acá" indica la ubicación espacial de los cuadrados, algo visualmente posible para Oscar, algo que en la interacción con el grupo con sus gestos da a entender a sus compañeros. En la línea 8 y 12 con las expresiones "*cinco cuadrados arriba y cinco para acá, y se pone un cuadrito en la mitad para que una" y "6 cuadrados horizontales y 6 verticales y uno que los une"* deducimos que Oscar asocia el número de la figura con la cantidad de cuadrados de la fila y la columna, en notación simbólica podríamos expresarla como la suma de $(n-1)+(n-1)+1$, para $n=1,2,3$ ..., lo que le permite a Oscar determinar el número de cuadros que conforman la figura sin hacer una representación gráfica. Esta relación es verificada por el mismo estudiante para la figura 6 con la expresión "…*seis y los otros seis…"* y para la figura 7 con la expresión *"para que sean 7 y 7".*

En el diálogo anterior también podemos ver como Oscar recurre en la línea 8 a la expresión "y así sucesivamente" para describir la generalización de sus acciones, esta función generativa del lenguaje tal como lo señala Radford (2003) hace posible describir procedimientos y acciones que pueden ser llevadas a cabo en forma reiterativa. Oscar utiliza la abducción de la característica común para proporcionar el número de cuadrados que componen cualquier figura, pero es utilizada sólo para hallar figuras particulares (figura 6, figura 7, figura 8), la indeterminancia y la analiticidad son expresadas a través de ejemplos concretos, por lo que podemos decir que la generalización de Oscar es una generalización de tipo factual.

En el Ítem 6 intentábamos profundizar en las generalizaciones de la comunalidad ya usadas por los estudiantes al pedir el proceso inverso en relación a los ítems anteriores. Para esto se dio el número de cuadrados que componen la figura para que ellos hallaran el correspondiente número que determina la posición de la figura. El siguiente fragmento concierne a la discusión del mismo grupo G_E, pero alrededor de este ítem.

L_7	*Profesor Nelson: Me pueden explicar cómo hallar el número de término de la figura que tiene 1501 cuadrados.*	
L_8	*David: Como aquí tiene mil quinientos un cuadrados [recorre con su lápiz el ítem 6]*	
L_9	*Oscar: Y acá, pregunta sobre el número de la figura.*	
L_{10}	*David: Entonces a mil quinientos uno lo dividimos en dos, nos dio…*	
L_{11}	*Oscar: Setecientos cincuenta*	
L_{12}	*David: Entonces sumamos setecientos cincuenta más setecientos cuarenta y nueve y no nos dio. Entonces le sumamos uno [señala insistentemente las operaciones que realizó a un lado de su hoja de trabajo] y nos dio lo que estaba aquí.* 	*El grupo usa estrategias numéricas para responder a las preguntas.*
L_{13}	*Oscar: Los mil quinientos uno, entonces es la figura setecientos cincuenta y uno.*	

Transcripción 6. Actividad 2, grupo G_E

En este episodio el profesor indaga el trabajo conjunto del grupo G_E, específicamente sobre la manera como los estudiantes llegan a una toma de conciencia del inverso de la relación entre el número de cuadrados que componen la figura y el número de la figura. En la actividad observamos que los estudiantes no tuvieron mayores problemas en determinar el número de la figura, pero se observó que replantearon el esquema operacional de la relación entre el número de la figura y el número de partes de la figura, que describimos anteriormente $(n-1)+(n-1)+1$, por un esquema distinto que podríamos escribir en notación simbólica como $n+n-1$. Aunque los dos esquemas planteados se refieren al mismo objeto, no se refieren al objeto de la misma manera (Radford 2003). Las generalizaciones de acciones que proponen los estudiantes representan dos formas diferentes de percibir las características de la secuencia. Sin embargo, con el segundo esquema operacional observamos que a los estudiantes se les facilitó plantear operaciones inversas, como dividir por dos el número de cuadrados y luego sumar uno, para hallar el número de la figura.

Actividad 3. Inicialmente se había programado una sesión de clase de una hora y veinte minutos para el desarrollo de la tarea 3, pero fueron necesarias dos sesiones más. Una de las explicaciones a esta situación es el detalle con el que los estudiantes dibujan cada uno de los cuadrados, además la secuencia aumenta rápidamente de un término al siguiente (ver figura 20), por lo que la construcción incluso de figuras cercanas requiere de mucho espacio y tiempo.

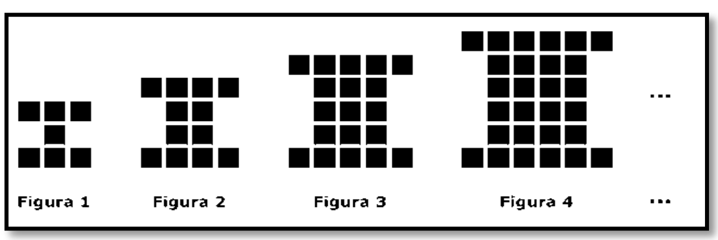


Figura 20. Secuencia figural, tarea 3

En uno de los pequeños grupos, G_{C}, un estudiante explica el trabajo de grupo respecto a los primeros ítems de la tarea.

L_1	*Profesor Nelson: ¿Cómo hallaste la figura 5 de la secuencia?*	
L_2	*Pedro: Pues, la figura 1 empieza con tres cuadritos [señala con su mano fila superior de la figura 1], la figura 2 le aumenta uno así [señala con su mano la fila superior de la figura 2 y aleja su mano hacia la derecha], la figura 3 le aumenta otro y así…* 	Ritmo y movimiento juegan el rol de función generativa del lenguaje.
L_3	*Profesor Nelson: No te entendí casi, indica con el lapicero y me vas explicando. La figura uno…*	
L_4	*Pedro: La figura uno empieza con tres cuadritos, la dos llevaría cuatro, aumenta de a un cuadrito y así llega hasta la figura 4, entonces aquí nos piden que hagamos la figura 5.*	
L_5	*Profesor Nelson: Y ¿Cómo la hiciste?*	
L_6	*Pedro*: *Pues dependiendo de los cuadros que hay aquí [indica con su lápiz la figura 4], acá hay seis entonces la figura 5 tendría otro más, serían 7, siete para acá [desliza el lápiz en forma horizontal] y siete hacia abajo [señala la parte central de la figura].*	
L_7	*Profesor Nelson: ¿Y si le digo dibuje la figura 6 de la secuencia que dibujaría?*	

L_8	*Pedro: Pues…esto… eh… la misma figura, pero con ocho cuadritos hacia allá [mueve la mano de izquierda a derecha] y ocho hacia abajo [mueve la mano de arriba abajo]*	
L_9	*Profesor Nelson: Y si fuera la diez.*	
L_{10}	*Pedro: Pues… doce cuadritos hacia allá y doce hacia acá [desplaza su lápiz en forma horizontal y luego vertical en su hoja de trabajo]*	

Transcripción 7. Actividad 3, grupo G_C

Pedro luego de un largo tiempo de trabajo conjunto con su grupo percibe la figura dividida en dos filas, una superior y otra inferior, y un arreglo central, e identifica el patrón de crecimiento para las filas superior e inferior, pero podemos ver en el episodio que Pedro en sus expresiones verbales y en su actividad perceptual en la construcción de las figuras omite por completo el arreglo central. La estrategia aditiva de Pedro vincula un término al siguiente con un incremento de un cuadrado en la fila superior que se repite en la fila inferior. Este esquema de abstracción no le permite a Pedro describir verbalmente como cualquier término de la secuencia puede ser generado. La generalización obtenida depende de los movimientos que realiza Pedro con sus manos a medida que comenta su estrategia numérica, por lo que su generalización es de tipo aritmético. En la línea 2, en la afirmación de Pedro "*la figura 1 empieza con tres cuadritos, la figura 2 le aumenta uno así, la figura 3 le aumenta otro y así…" tanto* el movimiento circular como la expresión "y así" juegan el rol de funciones generativas del lenguaje para indicar que sus acciones pueden llevarse a cabo en forma iterativa.

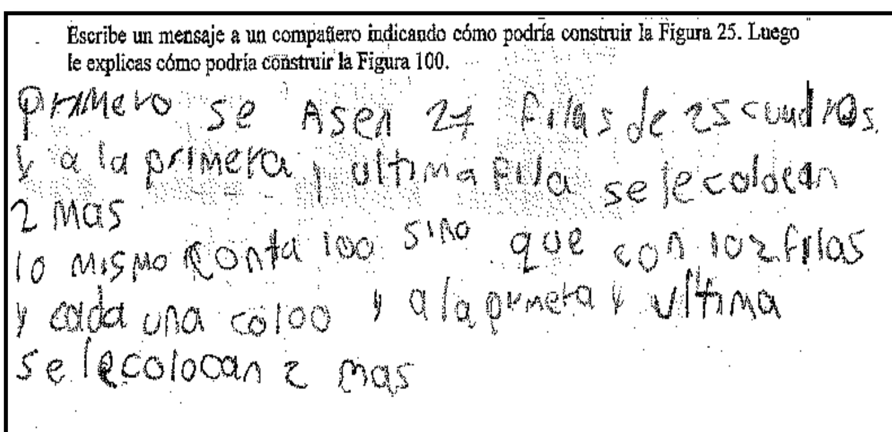
La intervención del profesor en el anterior episodio tiene la intención de persuadir a Pedro para que replantee su estrategia, por lo cual le pregunta insistentemente sobre términos sucesivos y luego unos no tan cercanos. Durante la actividad de clase sobre los primeros ítems, se pudo evidenciar en otro de los pequeños grupos, grupo G_E, como aparece una forma diferente a la prevista en el análisis a priori para la configuración espacial de la figura.

L_{11}	*Profesor Nelson: ¿Cómo podemos hallar la cantidad de cuadrados de la figura 4?*	
L_{12}	*David: Pues 4 por 6 más 4.*	
L_{13}	*Profesor Nelson: 4 por 6…4 por 6…*	
L_{14}	*David: Si, 4 por 6 es 24 más 4*	
L_{15}	*Oscar: Es 28*	
L_{16}	*Profesor Nelson: 4 por 6, o sea 4 por 6…4 [señala la figura 4]*	
L_{17}	*David: Mire, uno, dos, tres, cuatro… [señala los cuadros de la fila inferior] y a este lado tiene seis [señala los cuadrados de la columna] pues 24, y después contamos los 4 cuadrados [indica con su lápiz los cuadrados de los extremos superior e inferior al mismo tiempo que su compañero Oscar]* 	Conteo como medio semiótico par objetivar la comunalidad de la secuencia.
L_{18}	*Oscar: Si, luego se le suman esos cuatro cuadrados.*	
L_{19}	*Profesor Nelson: Bueno, entonces ¿Cuántos cuadrados tiene la figura 5?*	
L_{20}	*David: Cinco,7 por 5, 35 más 4, 39*	
L_{21}	*Profesor Nelson:… Y la figura 6.*	
L_{22}	*Oscar: …6 por 8…, 48 y 4 son… 52 [David repite al mismo tiempo las operaciones]*	
L_{23}	*Profesor Nelson:… Y entonces la figura 250.*	
L_{24}	*David: 250 por 252 [escribe a un lado de su hoja de*	

	trabajo 250x252]…	

Transcripción 8. Actividad 3, grupo G_E

En este episodio Oscar y David describen su proceso de objetivación de la generalización de la comunalidad. En el trabajo conjunto de la comprensión del objeto, Oscar y David fijan su atención en la cantidad de cuadrados unitarios que constituyen cada uno de los términos y en las formas geométricas que se crean al agrupar los cuadrados, ellos perciben un rectángulo con cuadrados unitarios en cada uno de sus extremos. En la líneas 16, 17, 20, 22 y 24 con las expresiones "4 por 6", "*Mire, uno, dos, tres, cuatro… y a este lado tiene seis pues 24, y después contamos los 4 cuadrados", "6 por 8" y "7 por 5" y "250 por 252"* se deducimos que David y Oscar apoyados en la estructura espacial de la figura proponen una estrategia de conteo que expresa indicios de una relación entre la posición y el número total de cuadrados, la cual podemos simbolizar como $n(n+2)+4$ con $n = 1, 2, 3, ...$ Esta relación les permite a los estudiantes encontrar fácilmente tanto figuras cercanas como figuras lejanas, pero permanece en el nivel concreto, por lo que podríamos decir que se trata de una generalización de tipo factual. En la figura 21 se muestra la producción de David donde expresa de forma escrita la forma en que ha objetivado la característica común de la secuencia para figuras lejanas.


Escribe un mensaje a un compañero indicando cómo podría construir la Figura 25. Luego le explicas cómo podría construir la Figura 100.

Primero se Asen 24 Filas de 25 cuadros.
y a la primera y ultima Fila se le colocan
2 mas
lo mismo con la 100 sino que con 102 Filas
y cada una co 100 y a la pmera y ultima
se le colocan 2 mas

Figura 21. Producción de David, ítem 6 Tarea 3

A nivel grupal en la actividad 3 se sugirió a los estudiantes construir las figuras en el respaldo de las hojas de trabajo porque los espacios diseñados para esta actividad fueron insuficientes. Todos los estudiantes lograron construir figuras cercanas y expresar en lengua natural sus generalizaciones sobre casos particulares.

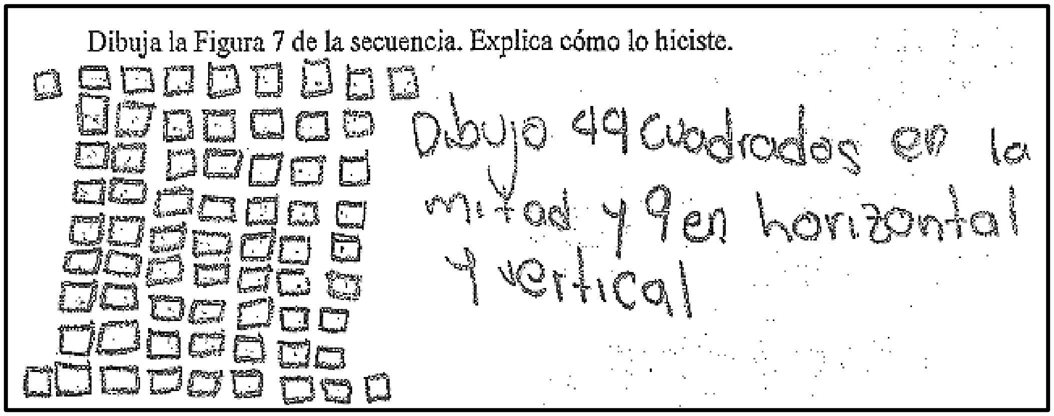


Figura 22. Producción de Alicia, ítem 4 Tarea 3

Por otro lado, los estudiantes tuvieron muchas dificultades para responder los ítems 9, 10, 11, donde se proponía evaluar el método de Salomé, una estudiante ficticia. El método de Salomé es una estrategia operacional que intenta que los estudiantes tomen conciencia de una posible generalización de la secuencia a partir de su estructura espacial, percibiendo la figura constituida por dos filas con igual número de cuadrados, una superior y otra inferior, y un arreglo central que está formando un cuadrado. Aunque la mayoría de los estudiantes percibió la figura tal y como la describimos anteriormente, incluso hallaron términos lejanos con un método similar, el hecho de llenar espacios incompletos no fue una tarea familiar para ellos y pocos lograron responder estos ítems.

Actividad 4. La actividad se desarrolló en una sesión tal como se tenía previsto gracias a que los estudiantes en un proceso de iconicidad lograron extrapolar algunas de las características trabajadas en secuencias figurales a las secuencias numéricas (ver secuencia numérica, figura 23).

Figura 23. Secuencia numérica, tarea 4

En el siguiente episodio se muestra la manera en que los estudiantes movilizan diferentes medios semióticos en la actividad conjunta alrededor de la tarea 4, específicamente en un momento cuando el profesor se acerca a ver el trabajo del grupo G_E.

L_1	*Profesor Nelson: ¿Qué hiciste para responder el primer ítem?*	
L_2	*David: Pues yo sumaba de a 3 y me di cuenta que aquí, 1x3=3, y se le quita 1, da 2. Luego, 3x2= 6, y se le quita 1, es igual a 5. Después, 3x3=9, y se le quita 1, da 8, y así… [indica con su lápiz el número con su correspondiente término]* 	*Uso de deícticos espaciales "aquí" y función generativa del lenguaje "y así…"*
L_3	*Profesor Nelson: Entonces el término 4, ¿cuál sería?*	
L_4	*David: 11. Porque 3 por 4, 12, menos uno, 11.*	

L_5	*Profesor Nelson: Y ¿el término 5?*	
L_6	*David: Igual, 3 por 5,15, menos 1, 14.*	
L_7	*Profesor Nelson: Y ¿el término 6?*	
L_8	*David: 3 por 6,18, menos 1, 17.*	

Transcripción 9. Actividad 4.a, grupo G_E

En la conversación podemos observar como David, a través de la labor conjunta con su profesor, moviliza algunos recursos semióticos tales como señalamientos acompañado de expresiones lingüísticas para llegar a explicarle a su profesor la manera en que ha tomado conciencia de la regularidad de la secuencia numérica y la aplicación de esta comunalidad para determinar cualquier término.

En este episodio deducimos que David con la expresión L_2 *“Pues yo sumaba de a 3 y me di cuenta que aquí 1por 3 es 3, a tres se le quita 1, 2, 3 por 2, 6, se le quita 1, 5, 3 por 3, 9, se le quita 1, 8, y así…”* ha dejado un lado una estrategia aditiva que vincula un término con el siguiente para reemplazarla por una estrategia multiplicativa que relaciona el número del término con el número de la secuencia.

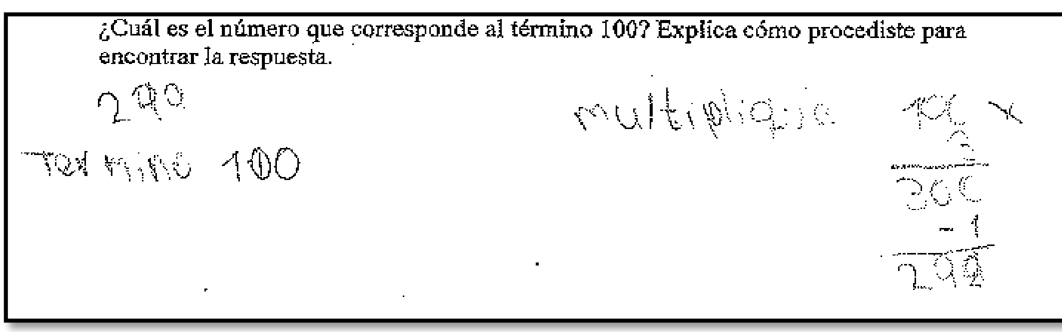


Figura 24. Producción del grupo G_E, ítem 3 Tarea 4

La generalización que David ha objetivado descansa sobre esquemas operacionales, en la figura 24 se ve este esquema en forma sintetizada. Podemos considerar la generalización de David una generalización factual, porque consiste en la generalización de acciones numéricas en forma de un esquema numérico. Tanto su acción perceptiva, como sus expresiones lingüísticas durante el señalamiento del número que indica la posición con su el correspondiente término, son acciones y movimientos desplegados en espacio y en tiempo que involucran objetos visibles o potencialmente visibles para el estudiante. Esta actividad perceptual sobre la colección dada ha hecho aparente a David el patrón que le permite determinar cualquier término de la secuencia. Si bien se aprecia una fórmula corporeizada que vincula su actividad perceptual con su expresión verbal y escrita, y que potencialmente puede proporcionar el valor de cualquier término, la indeterminancia y la analiticidad aún no están explícitas en su discurso.

Al interior del grupo G_E podemos observar formas de interacción y cooperación entre los individuos. Los estudiantes logran posicionarse ante su discurso, allí surge una reflexión del trabajo comunitario que los lleva a cooperar entre sí y a discutir sobre las posibilidades y limitaciones de las generalizaciones propuestas.

L_8	*Oscar: Mire… [Él se dirige a Carlos, inicia su discurso señalando con su mano el número y su correspondiente término]. Se multiplica tres por uno… tres por uno, ¿cuánto da?... Da tres, menos uno… sería dos. Entonces así quedaría el término uno y así sucesivamente.*	*Uso de funciones generativas del lenguaje: "y así sucesivamente"*
L_9	*Carlos: [Se mantienen en silencio, pero asintiendo con su cabeza]*	
L_{10}	*David: Carlos lo hace así sumando, de tres en tres, por eso no es capaz de hacer los largos.*	

		
L_{10}	*Oscar: Es que con la multiplicación también se puede hacer, y así es más fácil.*	
L_{11}	*David: En los pequeños se puede hacer sumando [señala los términos de la colección dada], en los grandes ya toca hacerlos con la multiplicación.*	
L_{12}	*Oscar. Si como el de 15 y el del 100.*	

Transcripción 10. Actividad 4.b, grupo G_E

David y Oscar tratan de persuadir a su compañero Carlos de las limitaciones prácticas de su estrategia para hallar términos lejanos de la secuencia, aunque reconocen que su estrategia aditiva (ver figura 25) funciona bastante bien para hallar cualquier término, podría tardar demasiado tiempo hallar términos lejanos.

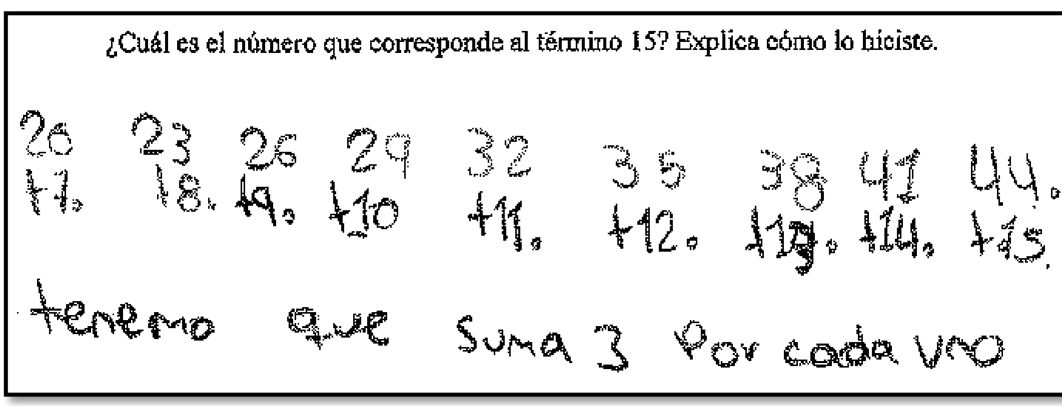


Figura 25. Producción de Carlos, ítem 2 Tarea 4

A decir verdad, el grupo G_E inicialmente usó la estrategia de aumentar en tres cada término, pero pronto la abandonó en búsqueda de nuevas posibilidades que les permitieran determinar rápidamente los términos lejanos.

Resulta interesante en este episodio ver como David y Oscar por su responsabilidad de llevar a Carlos a una toma de conciencia de relacionar el número de la posición con el término de la secuencia empezaron a analizar sus procesos de objetivación. La responsabilidad entre los grupos es un vector fundamental en las relaciones de producción de saber, la entendemos como "una sensibilidad que nos hace conectar con el otro y poder leer signos de incomprensión matemática, frustración, ansiedad, etc., para poder tenderle una mano y ayudarlo" (Radford, 2013b, p. 8).

A nivel de todo el grupo, los estudiantes rápidamente identificaron un patrón de crecimiento para la secuencia, donde cada término aumenta 3, de manera que en la mayoría de las producciones vemos que los estudiantes recurren a estrategias aditivas para hallar términos consecutivos y términos lejanos. Las secuencias numéricas al no contar con elementos geométricos-espaciales, tal como lo señala Vergel (2015a) parecen provocar un trabajo de generalización basado en las relaciones entre números.

Al comparar la actividad de la tarea 4 con la actividades anteriores se hace aún más evidente que el trabajo con secuencias figurales "propulsa una articulación de las estructuras espacial y numérica, lo cual constituye un aspecto importante del desarrollo del pensamiento algebraico" (Vergel, 2015b, p. 208). Las actividades con secuencias figurales contribuyeron para que los estudiantes relacionaran índices espaciales-numéricos, y mostraran indicios de identificar una relación entre la figura y su correspondiente término, lo cual posibilitó plantear aducciones analíticas.

Actividad 5. La actividad se desarrolló en tres sesiones, se prolongó un poco más de lo previsto, porque se tuvo que reducir el tiempo de cada sesión a 45 minutos por eventos institucionales. Esta actividad requería que los estudiantes escribieran un mensaje a la profesora Piedad sobre cómo calcular rápidamente el número de cuadrados y triángulos para cualquier número de figura de la secuencia trabajada en la actividad 1. El problema del mensaje como dice Radford (2003) introduce dos nuevos elementos. El primer elemento es el encuentro con el *Otro*, otro genérico, alguien que no pertenece al grupo. Para el desarrollo de la actividad se contó con el apoyo de la profesora Piedad, quien desde el área de español contribuyó con la lectura y crítica constructiva de los mensajes. El segundo, es el elemento matemático, un objeto abstracto que se incluye en el discurso de los estudiantes, lo que implica un alto nivel de abstracción.

Durante la actividad los grupos extrajeron de una urna las tarjetas con un número oculto, y se les hizo entrega de hojas de papel en blanco y un sobre de carta. El hecho de escribirle a la profesora Piedad, quien estaba dispuesta a leer sus producciones y quien está cualificada para corregir la redacción del mensaje, realmente motivó a los estudiantes a escribir con detalle y asumir una posición crítica y reflexiva frente a sus compañeros, respecto a las condiciones que les exigía la tarea. Entregar un objeto concreto, como es la tarjeta con un número oculto, pretendía provocar en los estudiantes la toma de conciencia de la existencia de un objeto matemático desconocido, aunque muchas veces no se pueda percibir alguna de sus representaciones a través de nuestros sentidos.

A nivel grupal, como la secuencia figural ya se había trabajado previamente en la actividad 1, a los estudiantes se les facilitó dar ejemplos concretos de la manera en que la profesora Piedad debía proceder para calcular rápidamente el número de cuadrados y triángulos que correspondían a términos particulares de la secuencia. En un principio estuvo bien, pero la tarea no consistía sólo en dar ejemplos, por lo cual el profesor tuvo que intervenir en cada uno de los grupos para hacerlos tomar conciencia de la función de la tarjeta con el número oculto en la actividad. La mayor dificultad de la tarea 5 radicó precisamente en eso, la inclusión de objetos abstractos a la actividad matemática de los estudiantes. Ellos no conocían el número de la tarjeta y debían describir la manera de operar con ese número desconocido siguiendo las reglas de formación de la secuencia.

Nombrar lo desconocido o indeterminado fue una actividad extraña, pocos estudiantes lo lograron. Algunos estudiantes simplemente siguieron ignorando la tarjeta, otros intentaron ver el número oculto a través de la luz y un grupo al ver que era prácticamente imposible la técnica anterior rompió el adhesivo que ocultaba el número. A continuación presentamos algunos episodios representativos y la producción de María del grupo G_D.

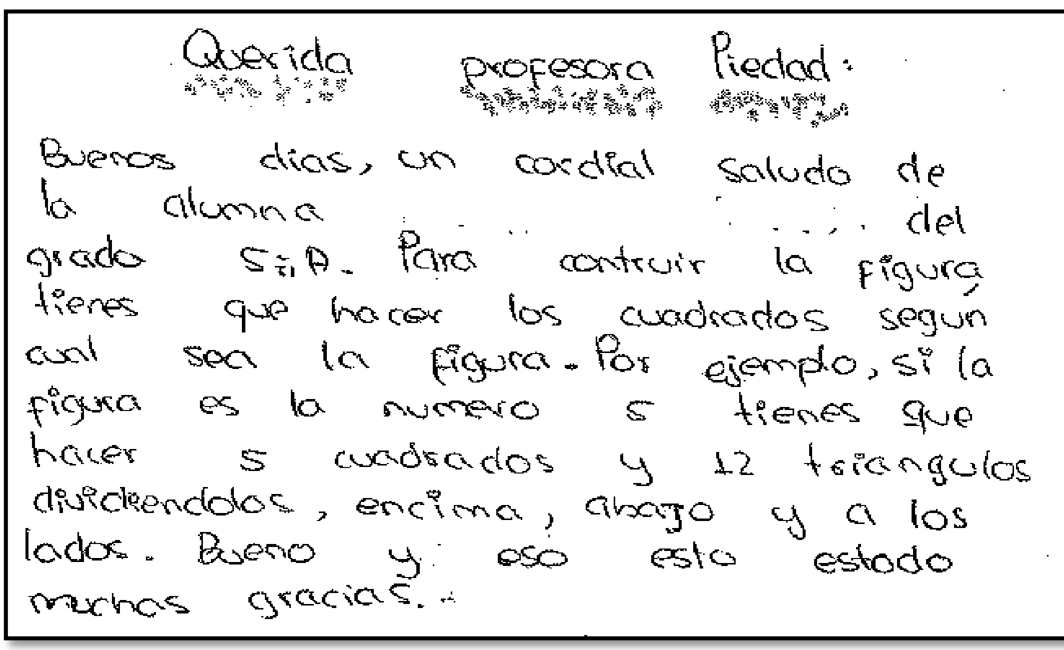

Querida profesora Piedad:
Buenos dias, un cordial saludo de
la alumna . . . . del
grado 5ºA. Para contruir la figura
tienes que hacer los cuadrados segun
cual sea la figura. Por ejemplo, si la
figura es la numero 5 tienes que
hacer 5 cuadrados y 12 triangulos
dividendolos, encima, abajo y a los
lados. Bueno y eso esto estado
muchas gracias.

Figura 26. Producción de María, ítem 1 Tarea 5

A partir de la producción de María (ver figura 26) inferimos de la expresión "*Para construir la figura tienes que hacer los cuadrados según cual sea la* *figura*" que la estudiante evidencia indicios de una relación funcional entre el número de la figura y cuadrados que la conforman. En esa frase también podemos apreciar el trabajo sobre objetos indeterminados, pues la cantidad de cuadrados está sujeta a una figura desconocida. El carácter operatorio de la indeterminancia consideramos está explícito en la expresión semiótica "*hacer los cuadrados según cual sea la figura*", que establece una igualdad entre el número de cuadrados y el número en la tarjeta, igualdad que se hace más compresible a través del ejemplo que da. Sin embargo, el mensaje está incompleto, porque al final se centra en la descripción de la ubicación espacial y la estructura numérica de los triángulos de una figura en concreto, la figura 5.

Como una segunda parte de la actividad, después de que cada grupo escribió su mensaje, se realizó un intercambio de las producciones antes de poner cada carta en su respectivo sobre. El intercambio de mensajes buscaba que los estudiantes analizaran el trabajo de sus compañeros teniendo en cuenta (Radford, 2013b):

- El mensaje es claro.
- El mensaje permite a la profesora Piedad calcular rápidamente el número de cuadrados y triángulos que corresponde al número de la tarjeta.
- El mensaje es convincente.
- El mensaje está bien redactado.

L_1	*Profesor Nelson: ¿Cómo generalizamos entonces?*	
L_2	*Profesora Carolina: Para que el mensaje nos sirva para cualquier número en la tarjeta.*	
L_3	*David: Pues el mensaje está bien… [Desliza su mano por la hoja de trabajo] hasta la parte de triángulo.*	El movimiento refuerza las intenciones de su discurso.
L_4	*Profesor Nelson: Bueno, por ejemplo y si el número fuera mil.*	

	Profesora Carolina: Pero… ¿cómo escribirían el mensaje?	
L_5	*Miguel: Serían 1000 cuadrados y 2002 triángulos.*	
L_6	*Oscar: Serían 1000 cuadrados y 2002 triángulos, mil arriba, mil abajo y dos a los lados [une sus manos y las mueve en el aire arriba, abajo y luego las separa].*	Articulación de recursos semióticos de objetivación como el discurso, ritmo y gestos en la construcción de significados.
L_7	*Profesora Carolina: Pero… cómo hacen para escribir el mensaje si no saben qué número es, porque puede ser cualquier número en la tarjeta.*	
L_8	*David: Pues, se hace el número de cuadrados…se hace el…cómo es… [Pone su mano derecha sobre su cabeza]… ayúdeme Oscar… se hace el número de cuadrados según el número.* 	La interacción entre miembros del grupo
L_9	*Oscar: Si [asiente con la cabeza]*	
L_{10}	*Profesora Carolina: ¿Según el número de qué?*	
L_{11}	*Oscar: El número de la figura.*	
L_{12}	*David: De la secuencia.*	

Transcripción 11. Actividad 5, grupo G_E

En el episodio anterior, en L_5 y L_6 podemos ver la facilidad con la que Oscar y Miguel responden la pregunta que el profesor formuló para el caso particular de la figura 1000. Además, los estudiantes muestran claridad en la estrategia para calcular apropiadamente el número de cuadrados y de triángulos de figuras particulares de la secuencia. Avanzando en la conversación, en L_8 y L_{11} con las expresiones "*…se hace el número de cuadrados según el número…", "El número de la figura"* apreciamos como se desplaza el trabajo con figuras específicas, en este caso la figura 1000, para hablar de "*el número de la figura*", términos lingüísticos con los que los estudiantes designan el número desconocido que contiene la tarjeta, para verbalizar la generalidad objetivada. Identificamos en la actividad matemática del grupo un proceso de contracción semiótica en sus expresiones, se ve claramente un nuevo nivel de abstracción. Los estudiantes pasan de una generalización factual, donde trabajan con figuras a nivel concreto, a una generalización contextual, donde trabajan con formas reducidas de expresión. Como puede verse el problema del mensaje posibilitó designar la indeterminancia. En este caso, la indeterminancia en la producción de los grupos está representada por la expresión semiótica "número de la figura", y su analiticidad, es decir, la forma de operar con esos números desconocidos por la expresión *"… se hace el número de cuadrados según el número…",* que establece evidencias de una relación de igualdad entre "cualquier número" de figura y el número de cuadrados que la componen. Sin embargo, no podemos desconocer que esta nueva generalización está apoyada en las acciones concretas y de las estrategias aritméticas realizadas previamente por los estudiantes.

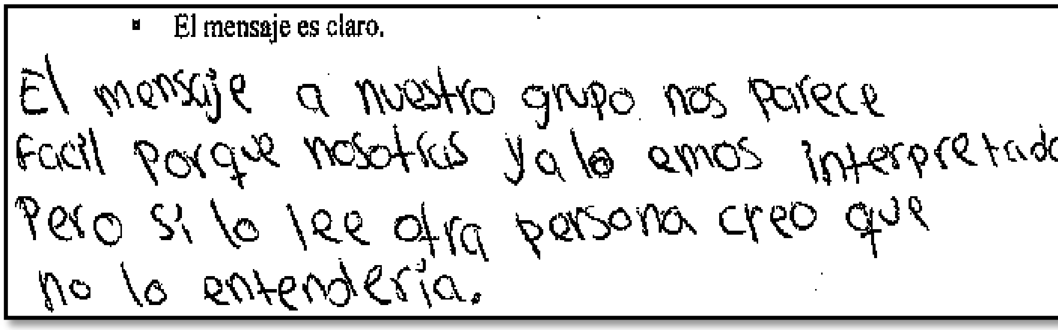
El análisis del siguiente episodio muestra un espacio en el que los estudiantes pueden expresarse libremente de forma crítica y reflexiva frente a las producciones de sus compañeros. Los comentarios siempre estuvieron enfocados en que las descripciones matemáticas dadas permitieran a la destinataria realizar correctamente el cálculo de cuadrados y triángulos de la figura.

L_{13}	*Profesor Nelson: Ya que leyeron el mensaje de sus compañeros, ¿el mensaje es claro para hallar el número de triángulos de cualquier figura?*	
L_{14}	*Saray: Más o menos.*	*Mensaje del grupo*

		*evaluado:* *Querida profesora Piedad para hacer la figura 20, tenemos que hacer 20 cuadrados y 20 triángulos en la parte de arriba y 20 triángulos en la parte de abajo, en la parte izquierda del primer cuadrado un triángulo y en la parte derecha del último un triángulo.*
L_{15}	*Alejandra: El mensaje es claro. Nosotras escribimos el mensaje a nuestro grupo, nos parece fácil porque nosotras ya lo hemos hecho, interpretarlo, pero si lo lee otra persona creemos que no lo entendería.*	
L_{16}	*Profesor Nelson: […] Este mensaje le permite a una persona, en este caso a la profesora Piedad, ¿hallar el número de triángulos de cualquier número de figura?… […] ¿Si la profesora Piedad lo lee entiende de una vez?*	
L_{17}	*Saray: Si ella ya lo ha hecho, pues claro que entendería, pero si fuera la primera vez, yo creo que no.*	
L_{18}	*Profesor Nelson: El mensaje que leyó es convincente, es completamente valedero, le hace falta agregarle algo más.*	
L_{19}	*María: Pues decir que los cuadrados son consecutivos, porque dice ahí que hacer 20 cuadrados, pero no dice que son consecutivos entonces uno puede hacer un cuadrado acá otro cuadrado acá [mueve las mano indicando varios puntos sobre su escritorio]*	*Uso de deícticos espaciales "acá".*

Transcripción 12. Actividad 5, grupo G_D

El hecho de escribir a un destinatario que no es parte de su grupo exige ponerse en el lugar de esa persona y analizar la claridad en el lenguaje, ya que los estudiantes no pueden recurrir a gestos como en la comunicación cara a cara, en la que se hacen más clara las intenciones del emisor, al interpretar su lenguaje corporal.


- El mensaje es claro.

El mensaje a nuestro grupo nos parece
Facil porque nosotros ya lo emos interpretado
Pero si lo lee otra persona creo que
no lo entenderia.

Figura 27. Producción del grupo G_D, ítem 3.a Tarea 5

En la figura 27, vemos que las estudiantes reconocen que la comunicación escrita demanda de ellos un nivel de claridad y profundidad, en donde no es suficiente con entender la solución del problema, sino saberla comunicar. En la línea 19, María señala la importancia de explicar aspectos geométricos, atributos que algunos estudiantes ignoraron por centrarse en la estructura numérica.

En este episodio se quiere mostrar la importancia de una comunicación asertiva cuando los estudiantes interactúan en el aula. Desde nuestro enfoque teórico se busca promover formas alternativas que tengan una visión más comunitaria, en la que los estudiantes puedan vivenciar valores como el respeto, la solidaridad, la tolerancia y la cooperación. Es decir, que los estudiantes aprendan “a estar con otros, abrirse a la comprensión de otras voces y otras conciencias, en pocas palabras, a ser-con-otros” (Radford, 2006a).

Actividad 6. La actividad se desarrolló en una sesión. Esta actividad permitió a los estudiantes reflexionar y analizar el proceso de generalización en secuencias numéricas (ver secuencia figura 28), así como usar la indeterminancia algebraica de manera analítica.

5 7 9 11

Figura 28. Secuencia numérica, tarea 6

Al iniciar la actividad se presentó una discusión sobre el primer ítem, donde participaron todos los pequeños grupos. La mayoría de los estudiantes no estuvo de acuerdo con el primer término, la opinión estaba dividida, algunos estudiantes decían: "*El primer término es el uno, porque 1 más 2, es tres; 3 más 2, es cinco y continua así la secuencia*", otros estudiantes les refutaban diciendo: "*Es tres, porque si a 5 le quitamos 2, es tres*" y otros estudiantes decían: "*Es cinco, porque es el número más pequeño de la secuencia*".

Por consiguiente, el profesor consideró oportuno intervenir para que los estudiantes expusieran sus ideas y posiblemente llegaran a un acuerdo. Inicialmente el profesor copió las tres secuencias que los estudiantes le dictaban, luego evocó algunas de las secuencias que anteriormente habían trabajado. En un proceso de iconicidad, los estudiantes empezaron a identificar en forma progresiva las diferencias y similitudes entre la secuencia numérica de la tarea 4, que cuenta con apoyo tabular, y las nuevas secuencias, para identificar el primer término en todas las secuencias.

Finalmente, el grupo acordó el número "5" como primer término por ser el menor número, pero entre sus argumentos en ningún momento se habló de elegir el número "5" como primer término por ser el primer número a la izquierda, tal vez porque todas las secuencias tanto figurales como numéricas trabajadas anteriormente eran crecientes.

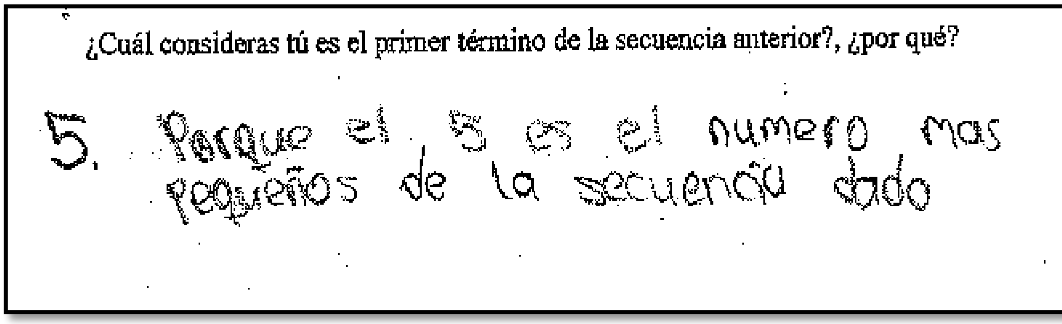


Figura 29. Producción del grupo G_C, ítem 1 Tarea 6

Para continuar con el desarrollo de la actividad el profesor sugirió a todos los grupos realizar una tabla como recurso semiótico para establecer correspondencia entre los términos y los números de la secuencia. La construcción de la tabla constituyó un artefacto cultural, ya que desempeñó un rol esencial en la mediatización y materialización el pensamiento. Mediante la tabla, ver ejemplo figura 30, observamos que los estudiantes lograron establecer un orden en la secuencia y percibir el patrón que la generaba.

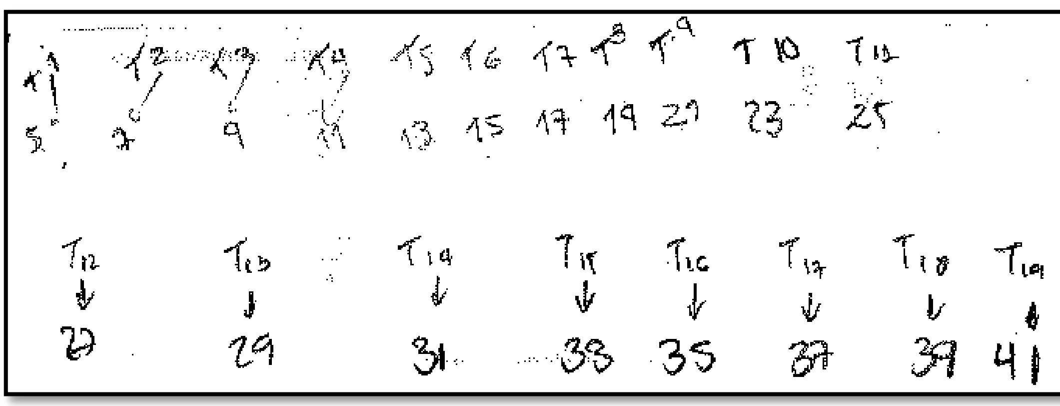
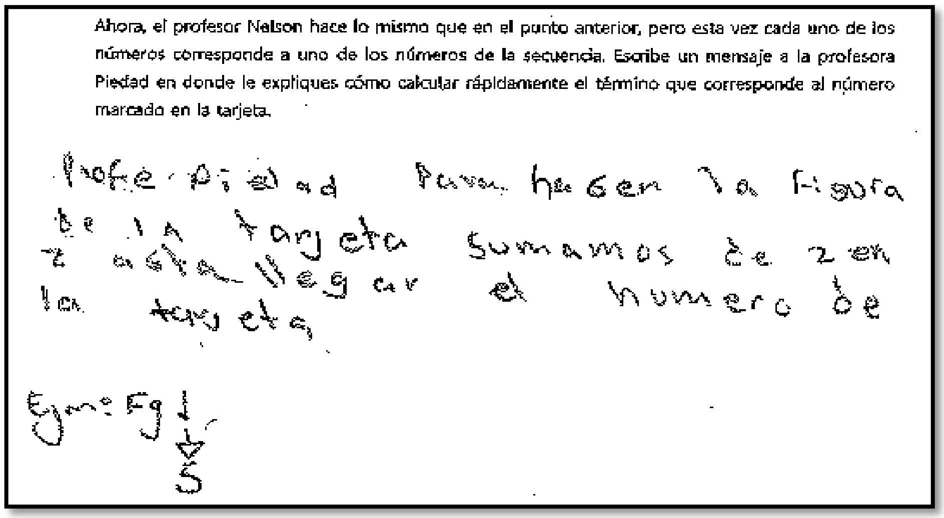


Figura 30. Producción del grupo G_B, ítem 2 Tarea 6

Como se ve en las explicaciones al primer ítem, algunos de los estudiantes ya habían notado a partir de los números dados en la secuencia un incremento en 2 de cada término respecto al siguiente. Cabe señalar que luego de construir la tabla, la mayoría de los estudiantes contestó correctamente al segundo ítem, incluso continuaron extendiendo la secuencia a términos cercanos como en las actividades anteriores (ver figura 30), aunque la tarea no lo requería. Luego, los estudiantes generalizaron la comunalidad identificada al resto de los términos. Una de las generalizaciones propuestas estuvo basada en un esquema aditivo, sumar de dos en dos, lo que implica un largo proceso para hallar términos lejanos.



Ahora, el profesor Nelson hace lo mismo que en el punto anterior, pero esta vez cada uno de los números corresponde a uno de los números de la secuencia. Escribe un mensaje a la profesora Piedad en donde le expliques cómo calcular rápidamente el término que corresponde al número marcado en la tarjeta.

Profe. Piedad para hacen la Figura de la tarjeta sumamos de 2 en 2 asta llegar el numero de la tarjeta

Ejm: Fg 1 → 5

Figura 31. Producción del grupo G_E, ítem 4 Tarea 6

En la producción del grupo G_E, si bien la respuesta no es correcta, porque hay una confusión del número en la tarjeta como término y como número de la secuencia, lo interesante de esta producción es analizar la generalización de los estudiantes basada en un esquema aditivo (ver figura 31), que de acuerdo con Radford (2003) es una generalización de tipo aritmético. La identificación de la comunalidad es un paso esencial, pero no es suficiente ya que el estudiante debe llegar a proponer una abducción analítica que luego le permita deducir una fórmula.

En cuanto al tercer ítem, los estudiantes movilizaron diferentes recursos semióticos en la actividad conjunta para responder a la solicitud de escribir un mensaje a la profesora Piedad que le permitiera calcular rápidamente un número de la secuencia para un término desconocido. En uno de los pequeños grupos, G_C, un estudiante llamó a la profesora Carolina para explicarle su razonamiento.

L_1	*Pedro: Esta secuencia es como estaba allá [señala con su lápiz el tablero], el término uno es cinco, así como estaba allá.*	
L_2	*Profesora Carolina: Sí…*	
L_3	*Pedro: Entonces yo encontré algo, término 8 [indica con su lápiz el número uno], 8 por 2 dieciséis más tres 19, es lo que daría aquí, así es como yo lo hago [señala su hoja de trabajo]. Ahora 9 por 2, el término 9, entonces lo multiplico por dos y luego le sume tres… 9 por 2, 18, más tres 21.* 	*Indicios de una relación entre el número de la posición y el término.*
L_4	*Profesora Carolina: Um… […] y ¿el siguiente?*	
L_5	*Pedro: Siempre se multiplica por dos aquí el número del término…[señala con su lápiz de abajo hacia arriba como indicando el número de la posición y su correspondiente término, luego desliza su mano sobre la secuencia].*	*Uso de la función generativa del lenguaje: "siempre"* *La expresión "número de término" se refiere a cualquier posición de un término de la secuencia*

Transcripción 13. Actividad 6, grupo G_C

En el episodio se observa que Pedro considera importante aclararle a la profesora que se trata de la secuencia escrita en el tablero, la secuencia de la tarea 6 donde el primer término es el número "5", porque al iniciar la actividad su grupo quería agregar el número "3" a la secuencia. En la línea 3, con la expresión "*Entonces yo encontré algo, término 8, 8 por 2 dieciséis más tres, 19, es lo que daría aquí, así es como yo lo hago. Ahora 9 por 2, el término 9,* *entonces lo multiplico por dos y luego le sume tres…9 por 2, 18, más tres 21*” Pedro explica su esquema operacional, mediante el cual hace evidente que ha objetivado la comunalidad de la secuencia y evidencia indicios de una relación funcional entre los números que indican la posición en la secuencia y su correspondiente término. En notación simbólica podríamos expresar esta relación como $2n + 3$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, este esquema le permite a Pedro determinar fácilmente cualquier término de la secuencia. El adverbio de frecuencia “siempre” que aparece en la línea 5 es una función generativa del leguaje, que Pedro reafirma con su movimiento corporal, tanto sus expresiones como el hecho de deslizar su mano sobre la secuencia es un intento para mostrar que su estrategia operativa puede extenderse a todos los términos de la secuencia. La generalización de Pedro basada en sus acciones numéricas puede extenderse al resto de los términos, aparece en un principio a nivel de números concretos, pero al final de la conversación en L5, la indeterminancia aparece en su discurso mediante la expresión semiótica “el número de término” por lo que nos referimos a una generalización contextual.

Si bien, ya se había discutido sobre el primer término y se había llegado a un acuerdo, el grupo G_C continuó insistiéndole al profesor que querían trabajar con la secuencia 1, 3, 5, 7,…, que ellos propusieron al iniciar la clase.

L_5	*Profesor Nelson: Acá, los niños van a trabajar esta secuencia 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15… [Escribe la secuencia en la hoja de trabajo de los estudiantes]… término 1, termino 2,…, término 8.* 	

L_6	*Pedro: Término 2, término 3…, término 8. [Repite al mismo tiempo con el profesor. Luego toma el lápiz y su hoja de trabajo].* *Bueno, entonces aquí yo hice esto, siempre voy a multiplicar por dos, 2 por 2, 4, menos 1 da 3. Tres por 2, 6, menos uno 5.* 	*Esquema operacional y uso de funciones generativas del lenguaje "siempre".*
L_7	*Profesor Nelson. Bien, y ahora el término 4*	
L_8	*Pedro: 4 por 2, 8, menos uno 7. Cinco por dos, diez, menos uno 9. Y así sucesivamente… [Desplaza rápidamente la mano sobre la secuencia]…todos.*	
L_9	*Profesor Nelson: y entonces el término carita feliz, ¿cómo es…?*	El profesor usa como recurso lingüístico el término "carita feliz" para referirse a cualquier término de la secuencia.
L_{10}	*Pedro: Ahí si no sé profesor… El término carita feliz…pues el término carita feliz por dos… [Sonríe al profesor] y le resto uno.*	*La indeterminancia hace parte del discurso de Pedro.*

		
L_{11}	*Profesor Nelson: Y aquí cómo lo harías, [Indica la secuencia propuesta de la tarea 6]*	
L_{12}	*Pedro: Ahí, pues en ese… el término carita, pues… multiplico por dos, carita por dos más tres… y ya.*	*Generalización contextual de la secuencia 5, 7, 9, 11…*

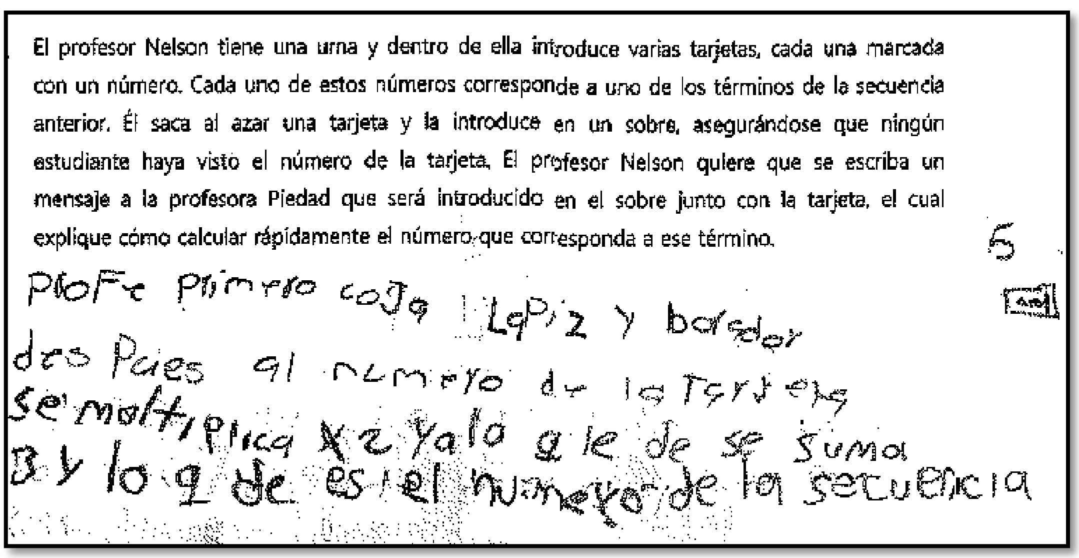
Transcripción 14. Actividad 6, grupo G_C

En la discusión es claro que Pedro reconoce la secuencia *1, 3, 5, 7,…* como una secuencia diferente, tiene un primer término distinto, aunque compartan el mismo patrón. Para plantear indicios de una relación funcional de la nueva secuencia, identificamos un proceso de iconicidad, ya que Pedro apoya sus razonamientos en la generalización que ha objetivado en la secuencia anterior, secuencia de la tarea 6. En la línea 6, con la expresión "…*siempre voy a multiplicar por dos, 2 por 2, 4, menos 1 da 3. Tres por 2, 6, menos uno 5…"* Pedro le explica al profesor su esquema operacional para la nueva secuencia, inferimos indicios de una relación funcional que ha objetivado a través de sus acciones numéricas, la cual podemos notar en lenguaje simbólico como $2n-1$ para $n=1,2,3,\ldots$

En el diálogo en la línea 6 y 8 hay un constante uso de funciones generativas del lenguaje como: "siempre", "así sucesivamente" y "t*odos",* acompañadas de movimientos que intentan reforzar la idea que el esquema abstraído puede aplicarse a términos que se escapan de su alcance perceptual, pero continúan en el nivel concreto numérico. En ese momento, aprovechando las circunstancias el profesor sugiere al grupo pensar en cualquier término, por lo cual recurre a un término que llama “carita feliz”. El profesor con el recurso lingüístico “carita feliz” intenta llevar a los estudiantes a un proceso de iconicidad, aprovechar la experiencia previamente adquirida con el problema del mensaje de la tarea 5 y con algunas actividades matemáticas familiares para los estudiantes, las criptoaritméticas (propuestas en el Calendario Matemático[1]), para que los estudiantes nombraran la indeterminancia.

En este proceso, Pedro logró verbalizar su fórmula corpórea, donde la indeterminancia está representada por la expresión semiótica “término carita feliz” y el carácter operatorio de lo indeterminado por “*el término carita feliz por dos… y le resto uno*”. En este episodio podemos ver la manera en que el razonamiento de Pedro evoluciona hacia formas más estables de reflexión algebraica a través de la actividad matemática.

Alrededor del trabajo conjunto en el ítem 3 presentamos en la figura 32 la producción escrita de otro de los pequeños grupos.


El profesor Nelson tiene una urna y dentro de ella introduce varias tarjetas, cada una marcada con un número. Cada uno de estos números corresponde a uno de los términos de la secuencia anterior. Él saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre, asegurándose que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta. El profesor Nelson quiere que se escriba un mensaje a la profesora Piedad que será introducido en el sobre junto con la tarjeta, el cual explique cómo calcular rápidamente el número que corresponda a ese término.

5

Profe primero cojo lapiz y borador
dos paies al numero de la tarjeta
se multiplica x 2 y a lo q le de se suma
3 y lo q de es el numero de la secuencia

Figura 32. Producción del grupo G_E, ítem 3 Tarea 6

[1] El Calendario Matemático es un material didáctico desarrollado por el grupo Colombia Aprendiendo desde el Enfoque de Planteamiento y Resolución de Problemas a través del trabajo de un problema cada día.

En la producción del grupo G_E se nombra la indeterminancia con la expresión semiótica "*número de la tarjeta*" introducida en la actividad anterior del mensaje, y se expresa la analiticidad o carácter operatorio de lo indeterminado con la expresión "*al número de la tarjeta se multiplica por 2 y a lo que le dé, se suma 3*".

Respecto al último ítem, en el que se pide escribir un mensaje a la profesora Piedad, con las mismas condiciones del ítem anterior, que le permita calcular el término correspondiente a un número de la secuencia. A continuación se muestra la producción de David, miembro del grupo G_E

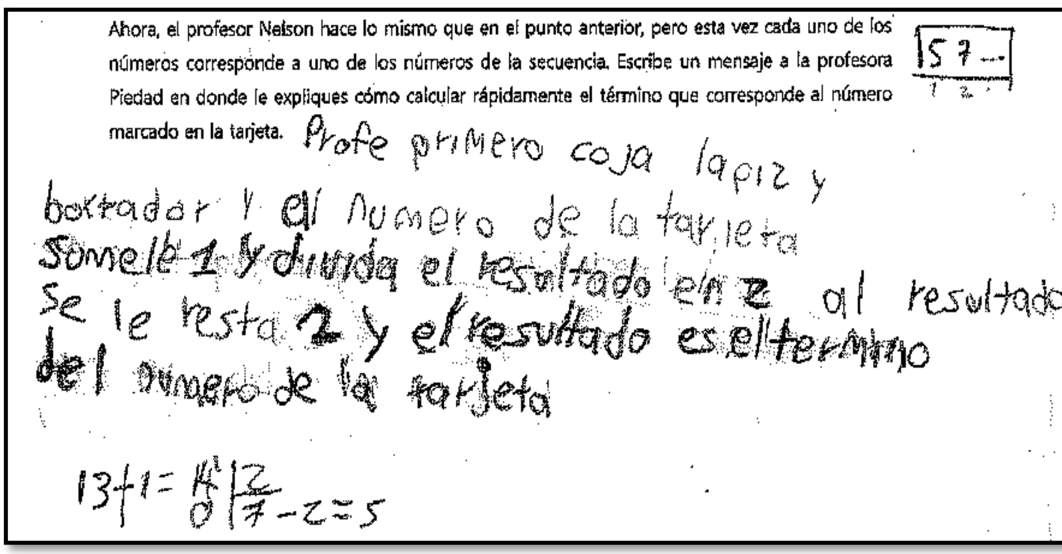

Ahora, el profesor Nelson hace lo mismo que en el punto anterior, pero esta vez cada uno de los números corresponde a uno de los números de la secuencia. Escribe un mensaje a la profesora Piedad en donde le expliques cómo calcular rápidamente el término que corresponde al número marcado en la tarjeta.

Figura 33. Producción del grupo G_E, ítem 4 Tarea 6

Al igual que en el ítem 3, el grupo G_E nombra la indeterminancia con la expresión semiótica "*número de la tarjeta*". Al examinar el esquema de acciones numéricas sobre objeto indeterminado vemos que el carácter operatorio se expresa "*al número de la tarjeta súmele 1 y divida el resultado en 2, al resultado se le resta 2, y el resultado es el término".*

En las producciones anteriores se muestra como el problema del mensaje, en este caso adaptado para la tarea 6, funcionó como dice Vergel (2015a) como elemento clave en la actividad matemática, creando la posibilidad de nombrar la indeterminancia y permitiendo la emergencia de formas de pensamiento algebraico más complejas. Los estudiantes dejaron de hablar de términos específicos como en la generalización factual (por ejemplo: término 1, término 2, término 3), para hablar de cualquier término “carita feliz” y “número de la tarjeta”. La incorporación de la indeterminancia en el discurso de los estudiantes tuvo un papel crucial en la evolución del pensamiento factual hacia el contextual.

5. CONCLUSIONES

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos en el proceso investigativo en torno a la identificación y análisis de los procesos de objetivación que desarrollan estudiantes de grado quinto de primaria cuando abordan tareas sobre generalización de patrones figurales y numéricos.

Los constructos centrales de la objetivación, la iconicidad y la contracción semiótica, se documentaron mediante el análisis multimodal. La identificación y descripción de la evolución de los medios semióticos, de los nodos semióticos, así como la categorización de las generalizaciones permitieron analizar el desarrollo de estos dos procesos. El proceso de iconicidad fue crucial para que los estudiantes plantearan sus generalizaciones, ya que mediante este proceso los estudiantes pudieron emplear experiencias anteriores para orientar sus acciones en nuevas actividades. Por ejemplo, en la actividad 6 mediante el proceso de iconicidad, algunos estudiantes aprovecharon la experiencia previa adquirida en el problema del mensaje para usar la indeterminancia algebraica de manera analítica en secuencias numéricas. Por otro lado, mediante el proceso de contracción semiótica los estudiantes lograron un nivel más profundo de conciencia. Por ejemplo, en las primeras actividades observamos que la indeterminancia aparecía a través de ejemplos concretos de una figura en particular, y a medida que los estudiantes participaron en las actividades lograron un nuevo nivel de abstracción, donde la indeterminancia fue nombrada y tratada analíticamente.

El análisis de episodios evidencia que las representaciones semióticas no son suficientes para explicar los procesos de objetivación de los sujetos en el complejo proceso educativo. De hecho, durante la actividad en la producción de saberes los estudiantes recurrieron a diferentes recursos semióticos que incluyen además del discurso, la actividad perceptual del sujeto. Sin desconocer que el discurso es crucial en la actividad, ya que todo lo que decimos es relevante, reconocemos la importancia de muchas expresiones no verbales (lenguaje corporal, gestos, expresiones faciales, tono de voz) que permiten la mediatización y la materialización del pensamiento matemático.

Durante la implementación de las actividades observamos como los estudiantes, a través de la labor conjunta, movilizaron diferentes recursos semióticos tales como el ritmo, señalamientos, gestos indexicales, lenguaje natural con expresiones que contenían deícticos espaciales (acá, este) o funciones generativas del lenguaje (siempre, así sucesivamente) para llegar a una toma de conciencia de las formas algebraicas de pensamiento sobre generalización de patrones.

Tal como lo reporta Lasprilla (2014), gestos como los señalamientos y movimientos corpóreos fueron importantes para que los estudiantes lograran hacer evidentes algunas ideas matemáticas. Durante las actividades los estudiantes frecuentemente señalaban con su dedo índice términos consecutivos para comunicar la identificación del patrón de generalización o señalaban el número de la posición de un término con su correspondiente término para evidenciar indicios de una relación entre estos. Por ejemplo, el caso de David en la actividad 4, su acción perceptiva como son sus expresiones lingüísticas durante el señalamiento del número de posición del término con el correspondiente término, son acciones y movimientos desplegados en espacio y en tiempo que le permiten a David relacionarlas de alguna manera, y a partir de la identificación de lo común proponer una fórmula corporeizada que potencialmente puede proporcionar el valor de cualquier término. El otro gesto usual en los estudiantes fue el movimiento con las manos en forma circular para comunicar que sus acciones podían llevarse a cabo sobre términos que no estaban en su alcance perceptual, por nombrar algunos ejemplos, el episodio de Alicia en la actividad 1 y el episodio de Pedro en la actividad 3.

Otros medios semióticos, reportados tanto por Lasprilla (2014) como por Moreno (2014), que movilizaron los estudiantes durante las actividades fueron el conteo y el uso de tablas de valores. En el conteo, los estudiantes recurrieron a este medio semiótico para reforzar sus percepciones visuales de las partes que conforman la figura con la estructura numérica de estás, o para contar con sus dedos el aumento identificado de un término a otro. El uso de tablas de valores constituyó un artefacto cultural, ya que mediante la tabla la mayoría de los estudiantes en la actividad 6 logró establecer un orden en la secuencia y percibir el patrón que la generaba.

Los resultados del análisis también nos permitieron observar que con la implementación de las actividades se logró generar dinámicas de discusión en el aula, lo cual contribuyó a que los estudiantes identificaran patrones, conjeturaran a partir de una colección dada de términos de una secuencia, argumentaran sus conjeturas, y expresaran sus generalizaciones. Además, se promovió la integración de estudiantes que usualmente no participaban en las discusiones generales.

En un principio se categorizaron las producciones de los estudiantes de acuerdo a las formas de pensamiento algebraico propuestas por Radford (2010b): pensamiento algebraico factual, pensamiento algebraico contextual y pensamiento algebraico simbólico. Durante las cuatro primeras actividades ubicamos a todos los estudiantes en el pensamiento algebraico factual. Entre los medios semióticos utilizados por los estudiantes en los procesos de objetivación para proponer sus generalizaciones factuales encontramos gestos, conteo, movimientos, ritmo, expresiones lingüísticas y signos que emergieron como aspectos importantes en la toma de conciencia. En la actividad 5 y 6 se pudo inferir que el trabajo conjunto contribuyó en la evolución de los medios semióticos de objetivación movilizados y de los nodos semióticos en la actividad matemática de los estudiantes, así como en la utilización de expresiones clave para referirse a objetos genéricos, por lo que algunas producciones las clasificamos en el pensamiento algebraico contextual.

De acuerdo a lo anterior, podemos decir que las tareas 1, 2, 3 y 4 posibilitaron a los estudiantes a través de la labor conjunta el análisis y la reflexión de diferentes estrategias para resolver el tipo de preguntas planteadas. Sin embargo, los resultados de la implementación de las actividades con este tipo de tareas confirman lo que esperábamos desde el análisis a priori, que las producciones de los estudiantes se clasifican en el pensamiento factual. Aunque, en el diseño se tuvo en cuenta que las preguntas poco a poco aumentaran su complejidad, todas están indagando sobre términos particulares por lo que "los medios semióticos de objetivación que lograron movilizar estaban tal vez instanciando y estratificando un tipo de pensamiento en particular como el Factual" (Vergel, 2014, p. 93). En términos generales, en los ítems 1 y 2 de las tareas los estudiantes lograron percibir la comunalidad para prolongar la secuencia a figuras o términos subsecuentes, la mayoría de ellos recurrió a la estrategia de conteo. Al ir avanzando en los ítems, los estudiantes empezaron a buscar otro tipo de estrategias al evaluar que estrategias como el conteo precisan mucho tiempo para hallar términos o figuras no tan cercanas, por lo que otra de las estrategias fue la estrategia de tipo multiplicativo.

En el análisis de la actividad 4 (actividad donde se trabaja con una secuencia numérica) constatamos algunos de los resultados de la investigación de Vergel (2015a) que señalan que el trabajo con secuencias figurales "propulsa una articulación de las estructuras espacial y numérica, lo cual constituye un aspecto importante del desarrollo del pensamiento algebraico" (Vergel, 2015, p. 208). En cuanto a las generalizaciones propuestas por los estudiantes en las primeras actividades se aplicaron a objetos a nivel concreto, sus generalizaciones reposan sobre esquemas operacionales para casos particulares. La indeterminancia aparece, a través de ejemplos concretos, en un término particular, así como el carácter operatorio de lo indeterminado, por lo que estaríamos hablando de una analiticidad intuida o proto-analiticidad en sus generalizaciones (Vergel, 2015a).

Como dijimos anteriormente en las dos últimas actividades algunas de las producciones de los estudiantes las categorizamos en el pensamiento algebraico contextual. A diferencia de las actividades 1, 2, 3 y 4, el problema del mensaje introduce dos nuevos elementos, el encuentro con el *Otro* genérico y el objeto matemático abstracto, creando la posibilidad de nombrar la indeterminancia y permitiendo la evolución de medios semióticos de objetivación, así como nodos semióticos que llevaron a los estudiantes a formas de pensamiento algebraico más complejas, en este caso a un estrato de pensamiento contextual. A partir de la implementación de las actividades los estudiantes hicieron uso de recursos lingüísticos como “término carita feliz” o “número de tarjeta” para denotar lo desconocido, para hablar de generalidad, sin presionarlos a usar símbolos alfanuméricos. Crear esa necesidad de nombrar lo indeterminado llevó a los estudiantes a evolucionar hacia formas más estables de reflexión algebraica a través de la actividad matemática.

Durante la actividad evidenciamos que en el proceso de generalización de patrones la mayoría de los estudiantes identificó algún patrón para hallar términos particulares subsecuentes, por lo que inferimos logró objetivar la comunalidad de las secuencias. También, observamos que la mayoría de estudiantes que logró aplicar dicha comunalidad para hallar términos remotos relacionaban el número de la posición del término con su correspondiente término. La tercera fase, deducir una fórmula, la mayoría de los estudiantes expresó sus fórmulas en lenguaje natural y a través de la actividad perceptual. Sin embargo, en sus producciones se pudo inferir que para ellos la comunicación escrita tiene un alto nivel de complejidad, ya que la mayoría dejó en blanco los espacios o se limitaron a dar ejemplos de algunos términos en los ítems en los que se pedía escribir en lengua natural un mensaje para un compañero donde expresaran la forma de hallar un término en particular.

Por otro lado, notamos que en el proceso investigativo la dinámica de clase se transformó al concebir al profesor y al estudiante como seres humanos que están siendo formados a unas formas de ser y de saber. El trabajo en pequeños grupos favoreció formas de cooperación y de interacción en la producción del saber. Se evidenció que los miembros del grupo logran posicionarse ante su discurso y empiezan a emerger vectores éticos como la cooperación, la responsabilidad y el cuidado del otro, por ejemplo, el intenso esfuerzo que hace Mariana para comunicar sus ideas a su compañera Ángela, con el fin de ayudarla a tomar conciencia de una manera en que se pueden construir las figuras 5 y 10; cuando Saray se apoya en los medios semióticos que ha movilizado María para llegar a justificaciones sus razonamientos; o cuando David y Oscar analizan la producción de Carlos para ayudarlo a replantear una estrategia que le permitiera hallar fácilmente figuras lejanas.

Finalmente, observamos que las concepciones del profesor sobre el pensamiento algebraico tales como "*el pensamiento algebraico es cuando los estudiantes pueden reemplazar numeritos por letras*", asociadas a la manipulación de signos alfanuméricos, aún persisten. Por tanto, consideramos esencial que el profesor continué su formación sobre aspectos teóricos y metodológicos, así como experiencias desde la perspectiva semiótica cultural que le permitan comprender que "el desarrollo del pensamiento algebraico puede tener lugar mucho antes de la aparición de dicho tipo de signos" Rojas y Vergel (2013, p. 763).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking, 267-299.

Azarquiel, Grupo. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.

Cai, J., y Knuth, E. (2011). Early Algebrization: A Global Dialogue From Multiple Perspectives. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag.

Chalé, S. (2013). *El desarrollo del pensamiento algebraico: la visualización en el caso de los patrones.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Goldin, G. (2000). A scientific perspectives on structured, task-based interviews in mathematics education research (pp. 517-545). En A. Kelly & R. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*. New Jersey London: LEA, publishers.

Gómez, J. (2013*). La generalización de patrones de secuencias "figurales y numéricas: Un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de grado décimo*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá-Colombia.

Corredor, A. y Pineda, M. (2014). *Proceso de Generalización: Una Perspectiva de Estudiantes de Básica Primaria*. Tesis de Licenciatura en Matemáticas no publicada, Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*: National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Dartmouth, MA.

Lasprilla, A. (2012). *Medios Semióticos de Objetivación que Emergen en Estudiantes de Tercero de Básica Primaria en Torno una Tarea de Generalización de Patrones Figurales*. Trabajo de especialización no publicada. Universidad Francisco José de Caldas. Bogotá-Colombia.

Lasprilla, A. (2014). *Generalización de Patrones de Secuencias Figurales y Numéricas: Un Estudio de los Medios Semióticos de Objetivación y Procesos de Objetivación en Estudiantes de 9 y 10 años.* Tesis de maestría no publicada. Universidad Francisco José de Caldas. Bogotá-Colombia.

Mason, J., Graham A., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). Routs to roots of algebra. The Open University Press, Great Britain.

Mason, J. (1999). La incitación del estudiante hacia el uso de su capacidad natural para expresar generalidad: Las secuencias de Tunja [Provoking students to use their natural power to express generality: Tunja sequences] *Revista EMA*, 4(3), 232-247.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas.* Recuperado de Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas.: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Moreno, P. (2014*). La contracción semiótica como proceso de objetivación en estudiantes de grado sexto en el campo del pensamiento algebraico.* Tesis de maestría no publicada. Universidad Francisco José de Caldas. Bogotá-Colombia.

National Council of Teachers of Mathematics (2000) *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: Author.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37 -70.

Radford, L. (2005). Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of Objectification. In Helen L. Chick, Jill L. Vincent (Eds.): *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1. Melbourne. University of Melbourne, pp. 143-145.

Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* número especial sobre semiótica, cultura y pensamiento matemático (editores invitados: L. Radford & B. D'Amore), pp. 267-299.

Radford, L (2006b). Algebraic thinking and the Generalization of Patterns: A semiotic perspective, *PME-NA, 1*, pp. 2-21.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts*. ZDM Mathematics Education, 40*, 83-96.

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective*. Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2010c). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities, *For the Learning of Mathematics*, *30*(2), 2-7.

Radford, L. (2012). On the development of Early algebraic thinking. *PNA, 6*(4), 117-133.

Radford, L. (2013a). En torno a tres problemas de la generalización. En Rico, L., Cañadas, M.C., Gutiérrez, J., Molina, M. & Segovia, I. (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemáticas. Homenaje a Encarnación Castro (pp.3-12).* Granada, España: Editorial Comares.

Radford, L. (2013b). Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza: hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. In A. Ramirez y Y. Morales (Eds). *Memorias del I Congreso de Educación*

Matemática de América Central y El Caribe. Santo Domingo, República Dominicana, November 6-8, 2013. Plenary Lecture.

Radford, L. (2014a). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 132- 150.

Radford, L. (2014b). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26*, 257-277.

Radford, L. (2015a). Introduction: The phenomenological, epistemological, and semiotic components of generalization. *PNA, 9*(3), 129-141.

Radford, L. (2015b). Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 8(18), 547-567.

Radford, L. y Sabena, C. (2015). The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach. Dordrecht: *Springer, Advances in Mathematics Education*, 157-182.

Rivera, F. (2010). Second grade students´ preinstructional competence in patterning activity. In M. Pinto & T. Kawasaki (Eds.), *Proceeding of the 34th conference of the International Group for the Psychology of Matematics Education (PME)* (Vol. 4, pp. 81-88). Belo Horizante, Brazil:PME.

Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics: Psychological and Pedagogical Considerations*. Dordrecht, Holanda: Springer.

Rojas, P. & Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. *Revista Científica*, *Edición especial*, 760-766.

Vergel, R. (2014). *Formas de Pensamiento Algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años).* Tesis doctoral no publicada. Universidad Francisco José de Caldas. Bogotá-Colombia.

Vergel, R. (2015a). Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria: aspectos a considerar. Bogotá, Colombia: Editorial UD.

Vergel, R. (2015b). Generalización de Patrones y formas de Pensamiento Algebraico Temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

Vergel, R. (2015c). ¿Cómo emerge el pensamiento algebraico? El caso del pensamiento factual. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 68, 9-17*.*

Vergel, R. (En prensa-1). La generalización de patrones como actividad semiótica en estudiantes de educación primaria. Educación *Matemática.*

Villanueva, J. (2012). *Medios Semióticos de Objetivación Emergentes en Estudiantes de Primer Grado Escolar cuando se enfrentan a Tareas sobre Secuencias Figurales*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá-Colombia.

Vygotski, L. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. México:Grijalbo. Trad. de la versión inglesa, *Mind in Society: The development of higher psycholgical processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press. La Habana:Ed. Científico-Técnica.