

Conocimiento especializado del futuro profesor que enseña el espacio proyectivo en el
entorno rural

María Fernanda Mejía Barajas

Trabajo de Grado para Optar por el Título de Licenciada en Educación Básica Primaria

Directora

Jenny Patricia Acevedo-Rincón

Doctora en Educación

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias Humanas

Escuela de Educación

Licenciatura en Educación Básica Primaria

Bucaramanga

2024

Dedicatoria

A todos los que enfrentan con valentía la vida.

Mantengan su mente en equilibrio y calma.

Pues en la senda del saber y la educación,

el bienestar mental es nuestro poder.

Agradecimientos

Expreso un eterno agradecimiento a mi familia, cimiento del ser que soy. A mi pareja, por ser mi polo a tierra en lo compartido de nuestras vidas.

A la Universidad Industrial de Santander, por formarme como un ser crítico en contextos académicos, sociales y políticos.

A los profesores que dejaron huella en mi formación profesoral. En especial a mi directora de trabajo de grado, quien me guío por el camino de la investigación; su ejemplo profesional es una de mis motivaciones educativas.

A la institución rural que tuve la fortuna de encontrar, son una representación de lucha por la educación pública, accesible y de calidad para todos.

A los estudiantes del curso de Didáctica de la Matemática I, por acompañarme en este ciclo de aprendizaje profesoral.

Al semillero STEAM+H, por el continuo apoyo en mi carrera educativa como profesora e investigadora.

A mis mascotas, porque su amor incondicional ilumina mis días.

Tabla de Contenido

Introducción	12
Capítulo 1. Problema de investigación	14
1.1. Descripción y planteamiento del problema.....	14
1.2. Justificación	17
1.3. Objetivos generales y específicos	19
Capítulo 2. Marco Teórico	20
2.1. Antecedentes	20
2.2. Planteamientos conceptuales y teóricos	27
Capítulo 3. Método	41
3.1. Descripción del proceso metodológico	42
3.2. Población.....	46
4.1. Técnicas e instrumentos	46
4.1. Interpretación de datos	48
Capítulo 4. Análisis de resultados.....	50
4.1. Hallazgos.....	51
4.1.1. Fase de observación	53
4.1.2. Fase de planeación	68
4.1.3. Fase de inmersión	84
4.1.4. Fase de análisis y reflexión	90

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL FUTURO PROFESOR	5
Capítulo 5. Discusión.....	96
Conclusiones	102
Referencias bibliográficas.....	104
Anexos	114
Apéndices.....	192

Lista de Tablas

Tabla 1. Tendencias hacia la estructuración de TME	37
Tabla 2. Organización de las sesiones del Lesson Study	45
Tabla 3. Técnicas e instrumentos de recolección de información	47
Tabla 4. Resumen de los hallazgos según el modelo MTSK por fases	52
Tabla 5. KMT, tareas: momento de inicio	75
Tabla 6. KMT, tareas: momento de desarrollo	77
Tabla 7. KMT, tareas: momento de cierre	80
Tabla 8. Tareas de los futuros profesores en la inmersión rural	87

Lista de Figuras

Figura 1. Modelo MTSK.....	32
Figura 2. Esquema de fases metodológicas	43
Figura 3. Perspectiva de las figuras tridimensionales.....	53
Figura 4. Registro de representación isométricos	54
Figura 5. Registros de representación ortogonal.....	57
Figura 6. Conocimiento del tópico Espacio Proyectivo.....	58
Figura 7. Esquema de tareas de planeación rural.....	73
Figura 8. Representación de tarea G10	78
Figura 9. Representación de tarea G6	81
Figura 10. Ejecución de la tarea del momento de desarrollo	83
Figura 11. Representación de tarea G5	84
Figura 12. Calificativos sobre la experiencia del Lesson Study	91

Lista de Anexos

Anexo 1. TME G1.....	114
Anexo 2. TME G2.....	122
Anexo 3. TME G3.....	132
Anexo 4. TME G4.....	142
Anexo 5. TME G5.....	150
Anexo 6. TME G6.....	158
Anexo 7. TME G7.....	166
Anexo 8. TME G8.....	171
Anexo 9. TME G9.....	179
Anexo 10. TME G10.....	187

Lista de Apéndices

Apéndice A. Consentimiento informado	192
Apéndice B. Asentimiento informado	193
Apéndice C. TME entorno urbano.....	196
Apéndice D. Rúbrica para evaluar una planeación	204
Apéndice E. TME entorno rural.....	206

Resumen

Título: Conocimiento especializado del futuro profesor que enseña el espacio proyectivo en el entorno rural*

Autor: María Fernanda Mejía Barajas**

Palabras Clave: conocimiento especializado, espacio proyectivo, formación docente, entorno rural

Descripción: La enseñanza de las matemáticas es un concepto investigativo relevante en la comunidad educativa. Su historia, deja entrever que esta práctica pedagógica a menudo se ha enfocado en la memorización de procedimientos y fórmulas, dejando poco espacio para el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes. En el entorno rural, esta situación se agrava aún más debido a la falta de recursos y la descontextualización entre los contenidos académicos y la realidad de los estudiantes. En este contexto, se pretende caracterizar el conocimiento especializado del futuro profesor al diseñar una tarea para la enseñanza del espacio proyectivo en el entorno rural. Para abordar este problema, se utiliza el modelo MTSK (*Mathematics Teaching Specialized Knowledge*) como marco teórico, que describe los diferentes tipos de conocimiento que un profesor debe poseer para enseñar matemáticas de manera efectiva; el pensamiento espacial desde documentos curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional y las particularidades de la educación rural en Colombia. Además, se explora el uso del *Lesson Study* como metodología para la planeación de la enseñanza del espacio proyectivo en el entorno rural. Los resultados obtenidos por cada fase del ciclo son analizados, para posteriormente caracterizar el conocimiento de los temas (KoT) y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) a lo largo de las fases. Se concluye que desde los primeros semestres de a la formación profesoral, los futuros profesores recogen características del conocimiento especializado en matemáticas que mejoran en el transcurso del ciclo gracias al trabajo colaborativo y la constante reflexión sobre la práctica educativa.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias Humanas. Escuela de Educación. Directora: Jenny Patricia Acevedo Rincón. Doctora en Educación

Abstract

Title: Specialized knowledge of the future teacher teaching projective space in the rural environment*

Author: María Fernanda Mejía Barajas**

Key Words: specialized knowledge, projective space, teacher training, rural environment

Description: The teaching of mathematics is a relevant research concept in the educational community. Its history suggests that this pedagogical practice has often focused on the memorization of procedures and formulas, leaving little room for the development of spatial thinking in students. In the rural environment, this situation is even more aggravated due to the lack of resources and the decontextualization between the academic contents and the reality of the students. In this context, the aim is to characterize the specialized knowledge of the future teacher when designing a task for teaching projective space in the rural environment. To address this problem, the MTSK model (Mathematics Teaching Specialized Knowledge) is used as a theoretical framework, which describes the different types of knowledge that a teacher must possess to teach mathematics effectively; spatial thinking from curricular documents proposed by the Ministry of National Education and the particularities of rural education in Colombia. In addition, the use of Lesson Study as a methodology for planning the teaching of projective space in a rural environment is explored. The results obtained for each phase of the cycle are analyzed, to subsequently characterize the knowledge of the topics (KoT) and the knowledge of mathematics teaching (KMT) throughout the phases. It is concluded that from the first semesters of the initial training, future teachers pick up characteristics of specialized knowledge in mathematics that improve over the course of the cycle thanks to collaborative work and constant reflection on educational practice.

* Degree work

** School of Human Sciences. School of Education. Director: Jenny Patricia Acevedo Rincón. PhD in Education

Introducción

La enseñanza de las matemáticas en Colombia ha sido un tema de preocupación constante en la comunidad educativa. Donde la práctica pedagógica a menudo se ha enfocado en la memorización de procedimientos y fórmulas, dejando poco espacio para el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes (Rubio, 2001). La selección de los contenidos para la enseñanza de las matemáticas esta mediado por los modelos tradicionalistas (Villamizar et al., 2012). Para ello, la formación inicial del profesorado resulta de gran relevancia, pues es el momento donde se busca conocer e innovar en las prácticas matemáticas divergentes, desde la transversalidad de los pensamientos y el uso de estrategias innovadoras que promuevan la producción y adaptación de tareas matemáticas significativas para los estudiantes.

Para garantizar la enseñanza de las matemáticas, el (futuro) profesor debe tener un conocimiento profundo y especializado sobre el contenido o saber, por ejemplo, el pensamiento espacial (Carrillo et al., 2018). El dominio del pensamiento espacial implica el conocimiento de conceptos, definiciones y procedimientos entre los tópicos del saber. Al desarrollar este conocimiento, es importante que los (futuros) profesores identifiquen la forma adecuada de enseñar ese saber, a través de estrategias, tareas, actividades, selección de recursos y la movilidad entre los tópicos, en este caso, del pensamiento espacial. Una de las formas de promover el aprendizaje entre los (futuros) profesores son los ciclos de trabajo colaborativo y reflexión sobre las prácticas de enseñanza, ya que dan cuenta de cómo se lleva a cabo las tareas matemáticas escolares (Acevedo-Rincón y Fiorentini, 2017). De esta forma, se pueden realizar adaptaciones a las tareas de acuerdo con las comparaciones contextuales entre la planeación y la aplicación.

De este panorama, surge la necesidad reconocer los elementos que inciden en la formación inicial de los profesores al planear tareas matemáticas sobre el pensamiento espacial

en diferentes contextos, como el rural. Para cumplir con ello, el estudio realiza una revisión de antecedentes acerca de la formación profesoral en los dominios del conocimiento especializado.

Se da paso al referente teórico desde autores de autoridad sobre los tópicos del estudio, para desarrollar la investigación mediante un enfoque cualitativo en la metodología del *Lesson Study*.

Capítulo 1. Problema de investigación

En este capítulo se plantea el fundamento del estudio de investigación, el cual desarrolla en tres momentos. El primero es la descripción y planteamiento del problema, donde se exploran las dimensiones de la investigación y la contextualización en los entornos urbanos y rurales en la formación inicial de profesores. El segundo es la justificación, donde se recoge la importancia que tiene para el ámbito educativo el desarrollo de trabajos investigativos en torno al conocimiento especializado en formación inicial de profesores. Por último, se presentan los objetivos a los que se pretende dar cumplimiento.

1.1. Descripción y planteamiento del problema

Los profesores de cualquier área tienen la responsabilidad de atender las necesidades y potencialidades del estudiantado. De lo contrario, se puede generar una práctica pedagógica descontextualizada que limita el aprendizaje, ya que se ignoran factores como la interacción en el aula, los conocimientos previos, las habilidades cognitivas y el entorno escolar. Autores como Mellado y Chaucono (2015) afirman que uno de los factores más significativos son las clasificaciones del lugar en el que se ubica la institución educativa (urbano o rural), y en consecuencia la zona de formación, que comúnmente coincide con lo urbano, es para la que se forma a los mismos profesores. Por lo tanto, los mismos autores comentan que presupone un proceso complejo el adaptarse a situaciones diferentes a las experimentadas durante la formación, que influyen directamente en el logro de sus estudiantes, como en el caso de las instituciones educativas ubicadas en zonas de bajo estrato socioeconómico, alejadas de la ciudad o incluso fuera de ella.

Desde el Ministerio de Educación Nacional (1998) se reconoce la formación de los niños y jóvenes a partir de unos conocimientos estandarizados que buscan la igualdad en los educandos. Sin embargo, al hablar de las diferentes áreas de conocimiento, las matemáticas se

convierten en una de las más problemáticas debido a que el diseño de los recursos, como los libros de texto, no tienen en cuenta los diferentes contextos sociales de la enseñanza en el país. En este sentido, la formación que recibe el profesor es uno de los factores clave en el proceso de enseñanza y aprendizaje; pues si el profesorado no está capacitado para realizar una adecuada transposición didáctica¹, es posible que el aprendizaje del estudiante no sea potenciado y desarrolle el conocido “temor a las matemáticas”, que se puede desenvolver desde la ansiedad que genera el mismo profesor a la hora de enseñar (Mendías et al., 2011).

Esta ansiedad es una actitud negativa entendida como aquel miedo irracional que dificulta la realización de cálculos y resolución de problemas, pues el sujeto llega a experimentar pánico cuando se le plantea una tarea matemática (Mendías et al., 2011). Como consecuencia, se puede presentar la evitación de la asignatura, lo que genera creencias negativas en torno a ella, acompañado DE un bajo desempeño académico (Burns, 1998). Las creencias en torno a las matemáticas pueden ser forjadas también por los mismos profesores del área; donde se presentan como las actitudes, métodos, estrategias y conceptos que influyen directamente en el logro de sus estudiantes (Carpenter y Fennema, 1992; De Faria, 2008). El impacto que tienen las creencias **hacia** las matemáticas persiste en la práctica profesional docente, donde se generan tendencias de enseñanza como la predilección **hacia** la enseñanza del pensamiento numérico, pues el sistema de creencias que gira alrededor de las matemáticas para los (futuros) profesores se relaciona con números, resolución de problemas y operaciones (adición, sustracción, multiplicación y división) (Rubio, 2001; Hidalgo et al., 2015).

¹ Este concepto es explicado por Chevallard (1991) como el proceso de transformar un saber especializado en un contenido comprensible para la enseñanza a un contexto en particular. Esto, implica la adaptación del conocimiento teórico en un contenido educativo apropiado para los estudiantes.

Aunque las creencias se consolidan con base en las experiencias subjetivas de las personas, es necesario que el futuro profesor diferencie las creencias sobre las matemáticas que tenía como estudiante y las que adquiere en su formación inicial como profesor (Hidalgo et al., 2015). En consecuencia, una de las ramas mayormente olvidadas en las matemáticas es la geometría, pues se ha desplazado hacia el final de los libros texto y planes de clase, para finalmente desaparecer en la Educación Secundaria² (Aguilar, 2008). Progresivamente, se disminuye el protagonismo del pensamiento espacial, y cuando este se incluye en el proceso académico se limita a la enseñanza del espacio euclidiano, es decir, todo lo relacionado con la medición y la geometría bidimensional. Esto trae consigo que las bases del aprendizaje de la geometría no son conocidas ni enseñadas a los profesores en formación, lo que conlleva un ciclo repetitivo de prácticas tradicionalistas donde se enseña el último espacio de la geometría (euclidiano), sin tener en cuenta sus dos antecesores: el espacio topológico y proyectivo (Gysin y Fernández, 2010).

Aunque la topología es uno de los procesos con más énfasis en la Educación Inicial, en los siguientes grados hay un salto al espacio euclidiano, dando por hecho la adquisición de un aprendizaje proyectivo. Esto solo refleja los vacíos de la enseñanza del pensamiento espacial, pues la poca inclusión curricular que se le otorga al desarrollo del reconocimiento del espacio proyectivo en la Educación Básica Primaria implica una descontextualización del conocimiento experimentado por el niño desde su entorno, ya que se obvian las nociones que tiene sobre el espacio, las características y relaciones de los objetos que lo rodean (García et al., 2015). Como resultado, el estudiante puede llegar a niveles superiores de escolaridad sin reconocer conceptos

² El sistema educativo colombiano se compone de: 1) La educación inicial (preescolar) obligatoria para niños menores de seis años. 2) La educación básica (primaria de 1°-5°) (secundaria 6°-9°). 3) La educación media (bachillerato de 10°-11°). 4) La educación superior (universitaria, técnica y tecnológica).

y procedimientos básicos para la constitución de un aprendizaje integral como: ‘enfrente de’ – ‘detrás de’, visualización de objetos desde otros puntos de vista, comprensión de instrucciones para llegar de un lugar a otro (georreferenciación), organización del espacio de escritura en una hoja, entre otros; que son base para la comprensión de conceptos abstractos de la geometría euclidiana como el plano cartesiano, que trabaja el concepto de distancia (Castro, 2004).

De esta forma, este estudio pretende caracterizar el conocimiento especializado del futuro profesor al enseñar el espacio proyectivo en un contexto rural, mediante la adaptación de tareas matemáticas escolares (TME de ahora en adelante) dirigidas principalmente hacia instituciones educativas ubicadas en zonas urbanas. Así surge la pregunta de investigación: ¿Qué elementos del conocimiento especializado del futuro profesor que enseña matemáticas se involucran al diseñar tareas matemáticas escolares para la enseñanza del espacio proyectivo en el entorno rural?

1.2. Justificación

La formación del profesor en la enseñanza del pensamiento espacial es un eje que requiere una perspectiva especializada, donde se construya una nueva relación con los conceptos base a través de una mirada específica desde la didáctica propia. Esto resulta en una necesaria reflexión sobre la articulación entre los conocimientos y las prácticas en el área de matemáticas. La adaptación de TME es una oportunidad de analizar la capacidad que tiene los profesores en formación de la Licenciatura en Educación Básica Primaria para responder a unas necesidades específicas de la zona rural. Esto con el fin de aportar a la discusión y reflexión de las prácticas de enseñar y aprender matemáticas en la Educación Básica Primaria en torno a los fundamentos, campos y desafíos que se encuentran inmersos desde el programa de pregrado de la Licenciatura en Educación Básica Primaria en la Universidad Industrial de Santander.

En este sentido, la exploración didáctica de un concepto matemático poco estudiado en la literatura como el espacio proyectivo resulta clave para el ejercicio con los profesores en formación, porque fomenta la capacidad de resolución de problemas, creatividad y trabajo en equipo; características de todo profesor *de y para* la práctica (Cochram-Smith 1999; Acevedo-Rincón, 2018). Esta forma de asumir la lectura de contextos para la adaptación de la enseñanza plantea la necesidad de desarrollar una investigación adecuada al carácter complejo de la experiencia.

Por ello, resulta relevante realizar una innovación curricular que resignifique las prácticas de enseñanza en geometría. Donde las TME sean desafiantes y acordes a las potencialidades de los estudiantes; pues todo espacio específico (como lo es el rural) debe desarrollar un pensamiento espacial en concordancia con los saberes previos, recursos, infraestructura y el contexto propio de la institución educativa y sus estudiantes. Así, surge la necesidad de trabajar en conjunto con los profesores, donde el trabajo colaborativo fomente la reflexión y discusión de las prácticas de enseñanza en matemáticas.

Los resultados de esta investigación pueden proporcionar información valiosa sobre las fortalezas y debilidades del conocimiento especializado de los (futuros) profesores en este ámbito, lo que a su vez aporta al diseño de estrategias efectivas de formación de profesores en la enseñanza del espacio proyectivo en un contexto rural. Por otra parte, este estudio es relevante para mejorar la calidad de la enseñanza, y en consecuencia del aprendizaje de las matemáticas en las áreas rurales, al identificar los obstáculos y desafíos que enfrentan los profesores en este contexto y proponer soluciones efectivas para superarlos.

Finalmente, una de las características más significativas de la investigación es el resultado de una serie de tareas adaptadas a un contexto rural, sumado a la experiencia de los

futuros profesionales en un nuevo campo. Donde deben leer a los estudiantes y la institución educativa para identificar demandas del contexto rural que puedan ser solventadas desde las matemáticas.

1.3. Objetivos generales y específicos

Esta propuesta tiene por objetivo general: caracterizar el conocimiento especializado del futuro profesor que adapta tareas matemáticas escolares para la enseñanza del espacio proyectivo en el entorno rural. Para ello es necesario:

1. Diseñar tareas para la enseñanza del espacio proyectivo junto a futuros profesores de matemáticas de segundo semestre para el entorno rural.
2. Implementar las tareas para la enseñanza de las matemáticas del espacio proyectivo en una institución oficial del entorno.
3. Analizar la experiencia de adaptación de tareas para la enseñanza de las matemáticas del espacio proyectivo junto a futuros profesores de matemáticas de segundo semestre.

Capítulo 2. Marco Teórico

Para el desarrollo de la investigación es imprescindible construir un panorama teórico-conceptual que permite reconocer categorías de información, análisis y reflexión con respecto al conocimiento especializado del futuro profesor que enseña el espacio proyectivo en el entorno rural. Este ejercicio se desarrolla en dos partes. Primero, los antecedentes que exploran las tendencias del conocimiento del estudio con respecto a los referentes teóricos, objetivos, planteamientos metodológicos y hallazgos sobre el pensamiento espacial en el conocimiento especializado, el *Lesson Study* y los entornos rurales. Segundo, los planteamientos conceptuales y teóricos, que fundamentan la investigación a partir de un recorrido que parte de la constitución del pensamiento espacial y la necesidad de construir un conocimiento especializado en el futuro profesor que enseña matemáticas.

2.1. Antecedentes

La consolidación de los antecedentes se plantea a partir de la necesidad de recopilar información sobre la incidencia del conocimiento especializado en la formación del profesor, desde metodologías como el *Lesson Study* en la enseñanza del pensamiento espacial en el entorno rural. La búsqueda se realiza en bases de datos como: Scielo, Dialnet, Redalyc, *Scopus* y *Web of Science*; y en buscadores como *Google Académico* y repositorios institucionales.

El rastreo de información se genera a partir de palabras clave como: conocimiento especializado, *Lesson Study*, pensamiento espacial, formación docente y entornos rurales. Los documentos encontrados se organizan en fichas bibliográficas a través de herramientas ofimáticas con el objetivo de ser analizados a partir de tres clasificaciones: (i) conocimiento especializado del (futuro) profesor que enseña el pensamiento espacial, (ii) el *Lesson Study* como metodología para la enseñanza del pensamiento espacial, y, (iii) la enseñanza del pensamiento espacial en el entorno rural.

Cuando se hace referencia al conocimiento especializado la mayoría de los documentos se remiten al enfoque de Carrillo et al., (2018), donde presenta el *Mathematics Teachers Specialised Knowledge* (MTSK, por sus siglas en inglés) desde una figura hexagonal que se subdivide en el conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico matemático (Acevedo-Rincón, 2020; Montes et al., 2019; Liñán y Contreras, 2013; Ortiz y Sandoval, 2018). No obstante, algunas investigaciones mantienen sus referentes teóricos en las bases del anterior modelo, como lo es la propuesta de Ball et al. (2008) en el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MTK, por sus siglas en inglés), el cual guarda algunas características con el enfoque del MTSK con diferentes denominaciones (Barrera et al., 2013). Complementando el aporte teórico-conceptual de los estudios, algunos de ellos consideran el eje disciplinar en sus planteamientos como lo es el pensamiento espacial desde la perspectiva curricular del Ministerio de Educación Nacional (1998) (Acevedo-Rincón, 2020) y el razonamiento espacial como sistema propuesto por Davis et al. (2015) (Ortiz y Sandoval, 2018).

El conocimiento especializado del profesor que enseña el pensamiento espacial es un estudio poco explorado, donde las investigaciones arrojadas se presentan desde metodologías cualitativas de estudio de caso (Acevedo-Rincón, 2020; Ortiz y Sandoval, 2018) y cuantitativas con enfoque descriptivo-interpretativo (Barrera et al., 2013; Liñán y Contreras, 2013). Allí, se observa una predilección por caracterizar, mostrar y estudiar el conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas en el ámbito de la geometría escolar, donde se presenta el modelo como una herramienta para la organización del diseño de tareas y planificación de la enseñanza (Acevedo-Rincón, 2020; Montes et al., 2019; Liñán y Contreras, 2013). Esto, a partir del desarrollo de conceptos como los polígonos (Acevedo-Rincón, 2020; Montes et al., 2019;

Liñán y Contreras, 2013; Barrera et al., 2013) y cuerpos geométricos (Liñán y Contreras, 2013; Barrera et al., 2013; Ortiz y Sandoval, 2018).

Para cumplir el objetivo de estudio, las investigaciones proponen algunas actividades o tareas matemáticas que implican la construcción de modelos tetraédricos (Acevedo-Rincón, 2020); el dibujo de polígonos para plantear preguntas con base en el modelo del conocimiento especializado (Montes et al., 2019); la resolución de preguntas de selección múltiple (Barrera et al., 2013) y el uso de instrucciones para replicar un cuerpo sólido en ausencia del objeto (Ortiz y Sandoval, 2018). Esto presenta diferentes hallazgos y conclusiones respecto a la formación docente, donde se afirma que los profesores conocen una única forma de representación, lo cual implica una reproducción de esta, donde no se tienen en cuenta las características proyectivas del dibujo (Acevedo-Rincón, 2020; Liñán y Contreras, 2013; Barrera et al., 2013). Adicional a esto, el uso del lenguaje formal en términos del pensamiento espacial es insuficiente, por lo que los profesores utilizan palabras ambiguas para referirse a las características de los objetos tridimensionales y sus relaciones topológicas (Ortiz y Sandoval, 2018).

Lo mencionado anteriormente tiene una relación directa con el conocimiento especializado del profesor, porque al hablar de las representaciones hay una correspondencia con algunos subdominios del modelo MTSK como el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), el conocimiento de los temas (KoT) y el conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM) asociado a las representaciones, modelación, resolución de problemas y el lenguaje formal. Las investigaciones concluyen con la necesidad de fortalecer los elementos del conocimiento especializado en la formación docente desde el modelo MTSK (Acevedo-Rincón, 2020; Montes et al., 2019; Liñán y Contreras, 2013; Ortiz y Sandoval, 2018) o

el MTK (Barrera et al., 2013), los cuales ofrecen una alternativa para estructurar el conocimiento matemático y pedagógico y reflexionar sobre el mismo.

La formación de profesores de matemáticas es un campo acogido por metodologías como el *Lesson Study*, donde la planeación en conjunto enriquece el proceso de enseñanza y aprendizaje (Acevedo-Rincón y Martínez-Ravelo, 2019; Acevedo-Rincón y Fiorentini, 2018; Utimura y Curi, 2016; Espantoso et al., 2021; Barbosa y Zapata, 2013; Huerta y Estrella, 2014; Ponce, 2017; Marmolejo et al., 2009). Articulado con el pensamiento espacial, son limitados los estudios que exploran esta rama matemática, pues existe una predilección hacia la comprensión de las prácticas numéricas en la educación. No obstante, las investigaciones que apuestan por esta relación entre el *Lesson Study* y el pensamiento espacial se encuentran en el contexto Latinoamericano, con países como Colombia (Acevedo-Rincón y Martínez-Ravelo, 2019; Barbosa y Zapata, 2013; Marmolejo et al., 2009), Brasil (Acevedo-Rincón y Fiorentini, 2018; Utimura y Curi, 2016), Chile (Huerta y Estrella, 2014; Ponce, 2017) y Uruguay (Espantoso et al., 2021). Esta metodología presupone una tendencia hacia el alcance investigativo, donde se busca presentar el aprendizaje de conceptos geométricos en los estudiantes (Acevedo-Rincón y Martínez-Ravelo, 2019; Utimura y Curi, 2016; Huerta y Estrella, 2014; Ponce, 2017) o analizar el impacto que tiene la planeación en conjunto con futuros profesores (Espantoso et al., 2021; Barbosa y Zapata, 2013; Marmolejo et al., 2009).

Los referentes teóricos-conceptuales de los estudios se inclinan hacia el *Lesson Study* desde autores como Lewis (2002) (Acevedo-Rincón y Martínez-Ravelo, 2019; Acevedo-Rincón y Fiorentini, 2018; Utimura y Curi, 2016; Espantoso et al., 2021), el pensamiento geométrico y las nociones de medidas en documentos curriculares (Acevedo-Rincón y Martínez-Ravelo, 2019; Barbosa y Zapata, 2013; Utimura y Curi, 2016), los supuestos de Van Hiele y Parzysz (Utimura

y Curi, 2016; Barbosa y Zapata, 2013) y teorías del diseño de tareas como la *Teaching for Robust Understanding Project* (Espantoso et al., 2021). Lo anterior, es el sustento del desarrollo de conceptos y nociones como la medición no estandarizada mediante el uso de huellas de animales para el cálculo de distancias (Acevedo-Rincón y Martínez-Ravelo, 2019), el área, perímetro y volumen en las prácticas pedagógicas de matemáticas (Acevedo-Rincón y Fiorentini, 2018), el cálculo del área de superficies con el conteo de cuadrados (Ponce, 2017), las figuras y sólidos geométricos (Acevedo-Rincón y Fiorentini, 2018; Utimura y Curi, 2016; Espantoso et al., 2021; Barbosa y Zapata, 2013) y las nociones topológicas de los profesores en formación (Huerta y Estrella, 2014).

El *Lesson Study* es una metodología con unas fases generales de observación, planificación, implementación y análisis y reflexión (Acevedo-Rincón y Martínez-Ravelo, 2019; Utimura y Curi, 2016; Espantoso et al., 2021; Barbosa y Zapata, 2013; Huerta y Estrella, 2014; Ponce, 2017). Sin embargo, uno de los estudios propone una perspectiva innovadora de la metodología basada en el concepto de Glocalidad de Grimsaeth y Hallas (2015), donde teniendo en cuenta la particularidad del contexto se realizan adaptaciones específicas que respondan a las necesidades del estudio, denominado *Glocal Lesson Study* (Acevedo-Rincón y Fiorentini, 2018). Finalmente, las investigaciones concluyen que esta metodología aplicada en el campo del pensamiento espacial permite planear, reflexionar y analizar las necesidades de enseñanza de una disciplina curricularmente ignorada (Acevedo-Rincón y Martínez-Ravelo, 2019; Acevedo-Rincón y Fiorentini, 2018). Por otra parte, el *Lesson Study* tiene un fuerte potencial en el desarrollo de la formación de profesores, ya que da cuenta del dominio del contenido matemático y didáctico que compete al futuro profesor para la realización de prácticas educativas contextualizadas y reflexivas (Utimura y Curi, 2016; Barbosa y Zapata, 2013; Marmolejo et al.,

2009). Esta metodología, de la mano con el diseño de tareas cognitivamente demandantes permite explorar el contenido matemático, la enseñanza y aprendizaje, la argumentación y la resolución de problemas; las cuales son categorías clave en la formación docente (Espantoso et al., 2021; Ponce, 2017).

Partiendo de la singularidad del contexto, presentada en propuestas metodológicas como el *Glocal Lesson Study* (Acevedo-Rincón y Fiorentini, 2017), es necesario articular la enseñanza del pensamiento espacial en entornos rurales. Este tipo de estudios son mayormente desarrollados en Colombia (Úron et al., 2021; Basto y Triana, 2017; Marín 2013; Mazo 2017) mediante la modalidad de trabajos de investigación en programas de pregrado y posgrado de educación (Basto y Triana, 2017; Marín 2013; Mazo 2017). Las investigaciones se enmarcan desde dos tipos de alcance: diseñar actividades, herramientas o estrategias que posibiliten el aprendizaje de la geometría (Úron et al., 2021; Basto y Triana, 2017; Marín 2013; Mazo 2017) y caracterizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en las escuelas multigrados (Ortiz y Gonzales, 2013). Para ello, prima la metodología cualitativa desde el enfoque de la investigación acción, donde entienden el fenómeno social como algo complejo que requiere una intervención que busca la mejora (Ortiz y Gonzales, 2013; Úron et al., 2021; Basto y Triana, 2017; Mazo 2017).

Todo ello se sustenta teóricamente desde conceptos como el pensamiento espacial, respaldado en documentos curriculares (Mazo, 2017) y autores como Vasco (1998), quien habla de la geometría activa y las transformaciones (Basto y Triana, 2017). Otros estudios hacen referencia en específico a la enseñanza y aprendizaje de la geometría (Úron et al., 2021; Basto y Triana, 2017; Ortiz y Gonzales, 2013) y uso teorías como el modelo Van Hiele a través de los niveles de pensamiento geométrico (visualización, análisis, abstracción, deducción y rigor) y la

noción de espacio de Piaget e Inhelder (1956), los cuales caracterizan los espacios en tres divisiones: topológicos, proyectivos y euclidianos (Marín, 2013).

Las investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento espacial en entornos rurales apuntan a la enseñanza y aprendizaje de conceptos de geometría euclidiana como las mediciones de área, perímetro y volumen desde estrategias como la educación asistida por perros (Úron et al., 2021) y los problemas de geometría aplicados al campo rural mediante la visualización del entorno (Mazo, 2017). Por otra parte, emerge la necesidad de desarrollar conceptos como: el punto, la línea, la simetría, la rotación, el paralelismo, lateralidad, nociones topológicas y el reconocimiento de figuras y cuerpos geométricos, presentados desde el uso de estrategias como la creación de material concreto con los estudiantes como tangram, origami y mándalas (Basto y Triana, 2017; Marín, 2013), el trabajo colaborativo (Ortiz y Gonzales, 2013) y el trabajo con objetos del entorno como cuerpos geométricos (esferas, cilindros, pirámides) (Marín, 2013).

Lo anterior se materializa en la planeación de intervenciones donde se realizan actividades como el dibujo, el arte, la proyección, la medición (Úron et al., 2017) y la argumentación (Ortiz y Gonzales, 2017). Esto se desarrolla a través de modelos de inmersión como el de la Escuela Nueva: actividad básica, cuento pedagógico, actividad práctica y actividades libres (Basto y Triana, 2017) y las fases de Van Hiele (Marín, 2013). Las investigaciones concluyen que existe una realidad que viven las instituciones educativas rurales, las cuales deben ser coherentes con las prácticas educativas del aula de clase, y más aún en el modelo diversificado de Escuela Nueva, donde se contemplan los diferentes grupos de grados en un solo salón (Úron et al., 2021; Marín 2013; Mazo 2017; Ortiz y Gonzales, 2013). Estas, deben ser articuladas con los saberes matemáticos los cuales, gracias a su plasticidad, pueden ser trabajados con otras áreas como la Educación Artística (Basto y Triana, 2017).

A manera de conclusión, este análisis documental permite reconocer una tendencia en la implementación del modelo de Carrillo et al. (2018) sobre el conocimiento especializado del futuro profesor que enseña matemáticas. En su destacado estudio, Carrillo et al. (2018) compila el dominio del conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico-didáctico de las matemáticas; a pesar de esta tendencia, es necesario remarcar que se observa una limitada bibliografía referente al pensamiento espacial. En cuanto al *Lesson Study*, se considera como una metodología adecuada para el ejercicio con futuros profesores, pues su carácter de planeación y reflexión grupal es relevante para el aprendizaje *en y de* la práctica. Algunos estudios que utilizan esta metodología reconocen dentro de sus momentos subdominios del modelo MTSK como el conocimiento de los temas (KoT), sin hacer relación directa con la teoría; lo que abre un camino para la articulación del estudio del conocimiento especializado con la metodología del *Lesson Study*.

Finalmente, se observa que el pensamiento espacial tiene una tendencia hacia la geometría euclidiana, donde el desarrollo de la enseñanza de los espacios topológicos y proyectivos es limitado. Específicamente, este pensamiento en escenarios rurales es un aspecto poco explorado por la academia, lo que reafirma la necesidad de investigar sobre los entornos propios del contexto Latinoamericano como los rurales, los cuales poseen unas necesidades educativas propias, que deben ser solventadas por los (futuros) profesores desde la Educación Básica Primaria.

2.2. Planteamientos conceptuales y teóricos

Desde que el ser humano nace, se encuentra inmerso en un mundo que llega a conocer por medio de la percepción que otorgan los sentidos. Por ello, las primeras experiencias que tiene un infante con su entorno son de tipo espacial, incluso antes de constituir el lenguaje. Pues a

través de la vista y el tacto construye una representación mental del mundo en el que vive (Acevedo-Rincón y Guarneri de Campos de Tebet, 2022).

El pensamiento espacial y los sistemas geométricos constituyen un soporte para la exploración del espacio tridimensional, el cual es mediado por la realidad externa. A pesar de ello, la mayor parte de las experiencias escolares con la geometría no son significativas, pues vienen limitadas desde el contenido de los libros de texto y guías que modelan los objetos y las figuras de manera bidimensional; las cuales finalmente se reducen a representaciones en el plano de la hoja del libro, y en algunas ocasiones se extraen formas del mundo real (Gutiérrez, 1991). En consecuencia, el espacio y las relaciones espaciales son un foco de investigación que constituye el entendimiento interno del infante con el mundo. Entre los aportes de la pesquisa se destacan autores como Francis Boule (2005), que identifica la relación entre el espacio y la geometría; Piaget e Inhelder (1958), los cuales caracterizan el espacio desde rasgos topológicos, proyectivos y euclidianos; y Enrique Castro, quien hace referencia a las habilidades espaciales propias del espacio proyectivo.

Para Boule (2005) el espacio y la geometría componen una relación sin límites, donde es complejo demarcar donde inicia una y termina la otra; aunque la geometría implica necesariamente el espacio, este puede ser estudiado únicamente desde el marco espacial. Así, para el autor la geometría compone los “elementos de Euclides” (nociones de longitud, área, volumen) y el espacio hace referencia a lo implícito (espacio de tres dimensiones), donde se contempla al sujeto como parte de él. De esta manera, autores como Piaget e Inhelder (1958) realizan una clasificación de los espacios según los rasgos topológicos, proyectivos y

euclidianos; en un proceso lineal que avanza acorde a las etapas del desarrollo cognoscitivo del niño³.

En primer lugar, se encuentra el espacio topológico, que se refiere a las nociones adquiridas desde el nacimiento, lo que abarca las propiedades globales de los objetos, por lo que no hay un interés por las medidas, ángulos o alineación de puntos en el espacio. Esta dimensión hace referencia a nociones de proximidad, encerramiento, continuidad y separación (Dienes y Golding, 1967). En segundo lugar, está el espacio proyectivo, donde el estudio del objeto se relaciona con otros, es decir, no se considera un objeto aislado y global sino en relación con diferentes puntos de vista (por ejemplo, ‘enfrente de’ – ‘detrás de’), relacionados con nociones de lateralidad como derecha e izquierda. Una de las habilidades que se destacan en el espacio proyectivo son las transformaciones, las cuales son asociadas al cambio y están presentes en el mundo. Así, Castro (2003) afirma que existen transformaciones que no cambian ni la forma ni el tamaño de un objeto (traslación, rotación y/o simetría). Como hay otras que alteran el tamaño (ampliación y reducción).

Finalmente, el espacio euclidiano hace alusión a nociones básicas como paralelismo y semejanza, los ejes coordenados de referencia horizontales y verticales y los sistemas cartográficos. Esta dimensión tiene relación con la geometría euclidiana, donde se trabajan conceptos de distancia, longitud, ángulos, superficies y volumen (Ochaíta, 1983); los cuales son el eje del pensamiento espacial y los sistemas de medidas en la educación básica primaria. Dentro de cualquiera de estos espacios existe un *macroespacio*, referente a un lugar como la zona de residencia; un *mesoespacio*, que abarca lo globalmente posible a escala humana; y un

³ Piaget (1950) describe el crecimiento cognoscitivo del ser humano en cuatro etapas: 1) sensorio-motriz, 2) preoperacional, 3) operaciones concretas y 4) operaciones formales.

microespacio, el cual es el más pequeño como materiales didácticos o el espacio de una hoja de papel (Boule, 2005).

Aunque en los primeros meses de vida la comprensión del espacio es esencialmente perceptiva y motriz, con el paso del tiempo, el bebé comienza a desarrollar otro tipo de habilidades que le permiten adquirir relaciones pre-proyectivas y pre-euclidianas, afines a las relaciones topológicas elementales (Piaget e Inhelder, 1956). Autores como Acevedo-Rincón y Guarneri de Campos de Tebet (2022), con concepciones como los sólidos, el infante realiza una flexibilización del concepto ya que en primer lugar lo comprende como un objeto ajeno a su cuerpo, pero posteriormente conoce que es una construcción de otras figuras (cuadrados) y que tiene un interior (cerramiento). Lo anterior, significa una construcción simultánea de las figuras proyectivas, resultado de la exploración de las diferentes vistas del objeto, es decir, la perspectiva. La noción de perspectiva data de los 8 a 10 meses de edad, cuando el bebé percibe el movimiento de los objetos y el reconocimiento de las formas a partir de la construcción sensorio-motriz y la coordinación de movimientos controlados por la percepción (Acevedo-Rincón y Guarneri de Campos de Tebet, 2022). Junto a la comprensión de las primeras formas perceptivas (como las líneas y los círculos o cuando empieza a rayar espacios) se empieza a desarrollar las nociones de forma y tamaño que suponen la organización de relaciones proyectivas (Piaget e Inhelder, 1956).

La teoría de Piaget e Inhelder (1956) asume que el niño comienza a desarrollar el espacio proyectivo en la etapa de las operaciones concretas; no obstante, recientemente Davis et al. (2015) han demostrado que desde los tres años los niños se involucran en tareas de toma de perspectiva. Desde este punto, surgen diversas críticas y adaptaciones a la teoría de estos autores, donde afirman que, después de que los niños dominan el espacio topológico, inicia el desarrollo

único de las formas lógicas en el espacio proyectivo, separando la base motriz del conocimiento lógico. Principalmente, se habla de la secuencia lineal que los autores proponen en el desarrollo de los espacios. Aquí, Davis et al. (2015) comentan que el modelo debe ser dinámico y circular, donde se permitan otras alternativas de comprensión del razonamiento espacial en los niños. Esta postura surge de cómo los conceptos, en este espacio, son perceptuales y representativos, lo cual permite que la cognición sea dinámica y centrada en el cuerpo (del niño), por lo que las formas lógicas del conocimiento no pueden apartar de la actividad que es guiada por la percepción (Varela et al., 1991).

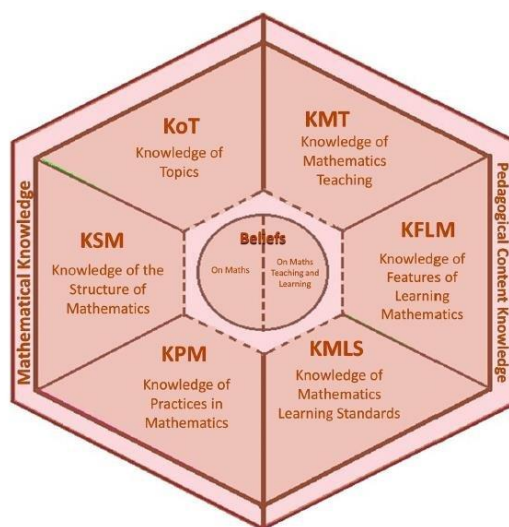
Gracias a los aportes teóricos de los autores se llega a concebir el *Pensamiento Espacial* en documentos curriculares como “el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales” (MEN, 1998, p. 37). Sin embargo, aun cuando el contenido esté organizado curricularmente, no se puede ignorar el papel que cumple el profesor como mediador entre el contenido disciplinar y el estudiante. El profesor, especialmente en la primera infancia y educación básica primaria, tiene la responsabilidad de seleccionar TME que promuevan el desarrollo del pensamiento espacial.

Para asegurar un adecuado aprendizaje, se debe tener en cuenta la enseñanza como parte del *conocimiento especializado* que tienen los profesores sobre el tema para realizar una adecuada transposición didáctica. Donde se hace referencia a un dominio disciplinar y didáctico del pensamiento espacial, el cual debe ser desarrollado desde los programas de formación de

profesores (inicial y continua). En este caso, el modelo MTSK⁴ propuesto por Carrillo et al. (2018) resulta clave para el entendimiento de la formación docente que parte de las creencias, como centro de la figura 1, del conocimiento matemático (MK, por sus siglas en inglés) en la parte izquierda y el conocimiento pedagógico del contenido (PCK, por sus siglas en inglés) a la derecha.

Figura 1.

Modelo MTSK



Nota: El modelo tiene como centro las creencias, las cuales se subdividen en el conocimiento matemático (MK) en la parte izquierda, y el conocimiento pedagógico del contenido (PCK) a la derecha. Las siglas otorgadas a los subdominios son por su nombre en inglés.

La literatura propuesta por Carrillo et al., (2018) afirma que la parte izquierda del modelo hace referencia al conocimiento matemático (MK), el cual es fundamental ya que permite que el profesor enseñe los contenidos de forma adecuada y articulada, donde se pueden validar sus conjeturas matemáticas y la de sus estudiantes. Para ello, se divide el conocimiento matemático

⁴ El modelo del Conocimiento Especializado del Profesor que enseña Matemáticas tiene como fundamento teórico el trabajo de Shulman (1986), quien identificó tres dominios: SMK (conocimiento de la materia), PCK (conocimiento pedagógico del contenido) y CK (conocimiento curricular).

en tres subdominios. En primer lugar, se encuentra el *Knowledge of Topics* (KoT) que se refiere al conocimiento matemático en sí mismo. Se describe la manera en la que el profesor conoce sobre los temas matemáticos que pretende enseñar, lo que implica un conocimiento profundo (o especializado) sobre procedimientos, definiciones, registros de representación, fenomenología y significados, es decir, sus usos y aplicaciones. Así mismo, el profesor debe reconocer el tipo de problemas que se pueden resolver según el contenido matemático y sus respectivos contextos, donde se reconoce la complejidad de los objetos matemáticos en el aula de clases (Carrillo et al., 2018).

En segundo lugar, los autores se presentan el *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM), referente al conocimiento de la estructura matemática. En este se presenta el conocimiento que tiene el profesor sobre las conexiones interconceptuales de los objetos matemáticos. Este subdominio reconoce las conexiones temporales que relacionan el rol que cumple concepto matemático en la evolución y construcción de otros; lo cual se puede asociar a un aumento en complejidad o una simplificación. Este tipo de conexiones permite trazar al profesor un camino de enseñanza en los conceptos al relacionarlos para apoyar la comprensión del estudiantado; o reconocer en un procedimiento que elemento matemático dificulta el aprendizaje de un concepto mayor (Carrillo et al., 2018).

Finalmente, en esta parte los autores concentran el *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM) que implica el conocimiento de la práctica matemática, entendiendo práctica desde el funcionamiento matemático. El conocimiento del profesor sobre esta práctica está asociado con los medios de producción y funcionamiento matemático a partir del demostrar, justificar, argumentar, definir o dar ejemplos; lo que incluye una comprensión lógica de las matemáticas. Este componente hace referencia al saber explorar nuevos conocimientos, donde a

partir del razonamiento realice formas de validación, modelación, resolución de problemas, simbología y utilice el lenguaje formal propio de las matemáticas (Carrillo et al., 2018).

La parte derecha del modelo constituye el conocimiento pedagógico del contenido (PCK), entendido por Carrillo et al., (2018) como una intersección entre la pedagogía y las matemáticas que da lugar las prácticas de enseñanza y aprendizaje. El PCK consta en total de tres subdominios. En primer lugar, el *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM) se refiere al conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas. Aquí el profesor debe antecederse al pensamiento de los estudiantes para construir el conocimiento matemático desde actividades y tareas. Desde el KFLM se tienen en cuenta los estilos de aprendizaje y las diferentes formas en las que el estudiante comprende el contenido matemático; para ello, debe existir un dominio sobre las teorías del aprendizaje, los aspectos emocionales (como, por ejemplo, la ansiedad matemática), las fortalezas y debilidades en el aprendizaje matemático y las formas de interacción que tiene el estudiante con el contenido.

En segundo lugar, los mismos autores presentan el *Knowledge of Mathematics Teachers* (KMT) como aquel conocimiento propio de la enseñanza de las matemáticas. Incluye el conocimiento teórico de la enseñanza de las matemáticas desde teorías de la enseñanza, recursos y materiales didácticos, estrategias, técnicas y tareas. No basta el conocer cómo se utilizan los recursos, sino más bien darle un sentido acorde a la enseñanza a partir de la evaluación crítica del contenido matemático y la estrategia que mejore el aprendizaje de los estudiantes (Carrillo et al., 2018).

Por último, se presenta el *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS), que involucre el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. Entendiendo estándar como un instrumento curricular o no curricular diseñado para medir el aprendizaje del

estudiantado, por lo que puede variar según la institución, región o país. Este subdominio abarca el conocimiento para enseñar matemáticas en cualquier nivel, ya que se comprenden las habilidades específicas curriculares de cada grupo de grados. Por lo tanto, la secuenciación de temas es un aspecto clave que debe conocer y dominar el profesor, pues permite ubicar temas matemáticos retrospectivamente (Carrillo et al., 2018).

En el contexto de la investigación, se considera relevante este marco porque se espera que el futuro profesor desarrolle conocimientos especializados en el pensamiento espacial para enseñar el espacio proyectivo de manera efectiva. En coherencia con el objetivo de investigación, se consideran principalmente tres subdominios: i) el KoT desde los procedimientos, definiciones, propiedades y registros de representación; y, ii) el KMT desde las teorías de enseñanza de las matemáticas, el uso de recursos didácticos, tanto físicos como digitales, y las estrategias, tareas, técnicas y ejemplos.

En el ejercicio docente, resulta ineludible conocer como plantear TME para el nivel académico y contexto escolar. Estas son entendidas como propuestas dirigidas hacia el estudiante, donde desarrolla la actividad matemática con base en los planteamientos del profesor; los cuales llevan un proceso de planeación intencional para el aprendizaje significativo (Moreno y Ramírez, 2016). Para el planteamiento de las tareas matemáticas, autores como Smith y Stein (1998) reconocen que existen una serie de variables que permiten comprender las expectativas de aprendizaje proyectadas según el contexto del estudiantado. Así mismo, los autores identifican como características de las tareas matemáticas escolares el contenido matemático, los objetivos

de aprendizaje, la edad, el contexto, las situaciones, el grado escolar, los niveles de demanda cognitiva⁵ y los conocimientos previos.

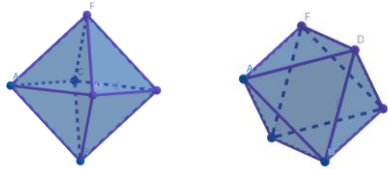
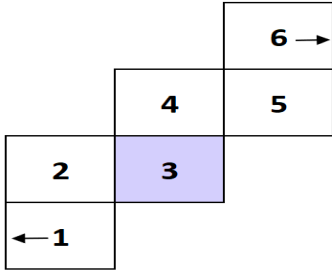
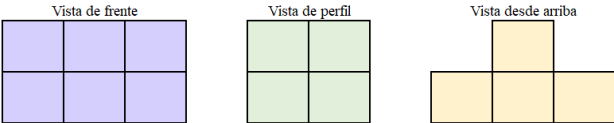
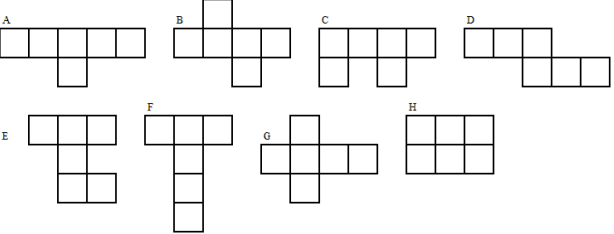
Teniendo en cuenta que las tareas escolares son un planteamiento emergente en las matemáticas, que presuponen los aprendizajes esperados de los estudiantes desde unas acciones planificadas por parte del profesor; resulta necesario rastrear las tendencias que existen en las propuestas de tareas matemáticas del pensamiento espacial. Algunos de los aportes teóricos se resumen en la tabla 1:

Con base en la revisión de tareas matemáticas, se reconocen unos aspectos que incluyen la mayoría de los planteamientos como lo son los cambios de representaciones (planas o tridimensionales), las rotaciones, el plegado y desplegado, la construcción y descomposición de sólidos y el conteo de elementos que componen un cuerpo tridimensional. Así mismo, el tipo de respuesta que se espera por parte de los estudiantes se relaciona con la construcción, el dibujo, la identificación y la respuesta verbal.

⁵ Dificultad en el desarrollo de las tareas matemáticas escolares: i) memorización, ii) procedimientos sin conexión, iii) procedimientos con conexión, iii) hacer matemáticas (Smith y Stein, 1998).

Tabla 1.

Tendencias *hacia* la estructuración de TME

Autores	Tarea	Ejemplo
Clements y Battista (1992)	1. Reproducir figuras basándose en un modelo que se mantiene constantemente a la vista. 2. Imitar figuras a partir de un modelo que se oculta. 3. Recrear una figura después de haber sido sometida a una transformación rígida o un cambio en la perspectiva visual.	
Fischbein (1993)	1. Realizar un dibujo de la figura resultante al desplegar un sólido geométrico. 2. Reconocer la forma tridimensional obtenida a partir de una representación plana. 3. Marcar en el desarrollo las líneas que se alinearían al reconstruir el objeto tridimensional.	
Pittalis, Mousoulides y Christou (2009)	1. Edificar un objeto tridimensional teniendo en cuenta sus vistas 2. Dibujar un objeto tridimensional y analizar las propiedades bidimensionales	
Almodovar y García (2009)	1. Identificar la relación entre los elementos del desplegado y el cubo 2. Con base en las características del cubo, identificar todos los modelos de desplegados posibles que permitan la construcción	

Nota: Tendencias en las tareas matemáticas escolares en la literatura. La tabla incluye los autores de la tarea, el planteamiento y la representación de estas.

Con base en la revisión de tareas matemáticas, se reconocen unos aspectos que incluyen la mayoría de los planteamientos como lo son los cambios de representaciones (planas o tridimensionales), las rotaciones, el plegado y desplegado, la construcción y descomposición de sólidos y el conteo de elementos que componen un cuerpo tridimensional. Así mismo, el tipo de respuesta que se espera por parte de los estudiantes se relaciona con la construcción, el dibujo, la identificación y la respuesta verbal.

Ahora bien, es necesario articular el componente del conocimiento especializado y el pensamiento espacial en el marco contextual de la investigación: la educación rural colombiana. Existe una inequidad en el enfoque territorial que tiene el país en cuanto a la educación por factores sociales, personales, culturales, legales, económicos, étnicos, entre otros. A partir de esto, el Gobierno Nacional propone el Plan de Desarrollo “Prosperidad Para Todos” (2010-2014) que tiene por objetivo mitigar las dificultades que inciden en la calidad y cobertura educativa en entornos urbanos. Esto tiene como base el Programa Fortalecimiento de la Cobertura con Calidad para el Sector Educativo Rural (PER), que de acuerdo con unas fases plantea el diseño de estrategias innovadoras que permitan el acceso a una educación para todos los niños y niñas del país desde el enfoque de la cobertura, calidad, pertinencia y eficiencia. Por ello, junto al Ministerio de Educación Nacional se han construido materiales de trabajo adaptados a las necesidades contextuales territoriales, que pueden ser implementados por los docentes.

Una de las estrategias más relevantes en este plan es la implementación de los modelos educativos flexibles. En el caso de la educación rural y la educación básica primaria se hace referencia a la Escuela Nueva. Este modelo, creado por Victoria Colbert y Oscar Mogollón en Colombia en 1975, se justifica en la propuesta de la UNESCO denominada Escuela Unitaria. Tiene como base los principios del aprendizaje activo a través de un currículo flexible y

adaptable a las características socioculturales del territorio; donde prima el trabajo de la comunidad y la escuela para la formación de seres integrales (Quintero y de Sa, 2018). Una característica de la Escuela Nueva es la modalidad de las aulas multigrados, donde únicamente uno o dos profesores se encargan de los cinco grados que conforman la básica primaria (Villar, 2010).

El profesor es visto como un orientador o facilitador del aprendizaje el cual, mediante una actitud positiva, pone en práctica diferentes innovaciones pedagógicas a través del material de la Escuela Nueva: guías de autoaprendizaje, biblioteca escolar, rincones de trabajo, gobierno escolar, entre otros (Villar, 2010). Las guías didácticas de autoaprendizaje son el principal recurso de esta modalidad, las cuales están constituidas por un conjunto de actividades que conducen al logro de unos objetivos de aprendizaje. El carácter auto instruccional de este material facilita la aplicación para los profesores, los cuales deben atender los diferentes grupos de grados y a los estudiantes con dificultades de aprendizaje (Gómez, 2010). Así, la malla curricular de cada área se encuentra dividida por grados (de primero a quinto), donde se presentan de dos a tres fascículos, formados a su vez por dos o tres unidades de aprendizaje.

Las guías tienen una estructura de trabajo de seis momentos. El primero de ellos es el objetivo de aprendizaje, acorde a las destrezas y habilidades que se pretenden desarrollar. Luego se presenta una actividad básica la cual incluye el contenido básico. Se promueve que sea una búsqueda de contenido donde el estudiante desarrolle habilidades de búsqueda y selección de información por fuera del aula y/o en grupos de trabajo. Posteriormente, se abarca el cuento pedagógico o estudio de caso, el cual es una historia que ejemplifica el contenido relacionado con situaciones de la cotidianidad. En cuarto lugar, se desarrolla una actividad práctica que busca la ejercitación del contenido mediante la práctica para la verificación de aprendizajes. Esto, da

paso a una actividad libre que son un conjunto de actividades que pretenden ampliar el conocimiento por medio de la experimentación de situaciones del contexto del estudiantado; esta responde a la evaluación formativa. Finalmente, se desarrolla la autoevaluación, que verifica el cumplimiento del objetivo de aprendizaje; en esta, no se genera una calificación cuantificable sino una orientación de su aprendizaje (Gómez, 2010).

Ahora bien, existen diferentes análisis en torno al funcionamiento de estas estrategias en la educación rural colombiana como es el Gómez (2010), donde a partir de una construcción sistémica del modelo Escuela Nueva, sus principios del aprendizaje activo y el material de las guías de autoaprendizaje encuentra contradicciones por la utilización de principios conductistas que implican la limitación del aprendizaje en términos de soluciones específicas. A su vez, el autor critica la escasez de bibliografía que tiene en cuenta el Gobierno Nacional para la justificación del autoaprendizaje desde sus principios psicológicos y metodológicos; pues se habla de poblaciones vulnerables por enfoque territorial con unas necesidades especiales que tienen que ser solventadas desde estudios críticos de los problemas reales del entorno rural. La importancia de estas problemáticas en Colombia exige la realización de investigaciones que evalúen las dimensiones del modelo de la Escuela Nueva, donde se tengan en cuenta la reflexión crítica para la consolidación de una educación de calidad para los estudiantes de zonas rurales.

Capítulo 3. Método

La caracterización del conocimiento especializado del futuro profesor implica un abordaje holístico, interactivo, reflexivo y humanista, características propias de la perspectiva cualitativa; que se identifica por ser un conjunto de fenómenos desconcertantes vistos desde diferentes paradigmas, métodos, estrategias y técnicas (Flores et al., 1999). La investigación cualitativa se enfoca en comprender los fenómenos de carácter social, desde un ambiente natural y en coherencia con el contexto (Hernández-Sampieri, 2018). Un actor clave en este proceso es el investigador, el cual debe estar en un constante ejercicio reflexivo; interrogando el sentido de las prácticas sociales que está estudiando. Lo que implica una interrelación entre el investigador y el objeto investigado, pues hay una mutua influencia que debe ser reconocida en el campo (Morales, 2003).

Se analiza el problema por medio del paradigma hermenéutico-interpretativo, descrito por Morales (2003) como una posibilidad de comprender el desarrollo de un fenómeno social; donde es visto como una ciencia subjetiva en el que el investigador tiene la función de descubrir el significado de todas las acciones de la vida social estudiada. Dada la limitación de este tipo de estudio, se afirma que los postulados de una teoría interpretativa son válidos únicamente en un tiempo y espacio determinados. El proceso de una investigación de corte hermenéutico-interpretativo (Arráez et al., 2006) resulta pertinente en el sentido del modo circular en el que se reformula constantemente el ciclo investigativo, lo que permite nuevos aportes que surgen en la realidad.

La investigación se centra en la comprensión del ejercicio de enseñanza de los futuros profesores de la Licenciatura en Educación Básica Primaria de la Universidad Industrial de Santander; por lo que se enmarca en un estudio de caso, definido por Robert Yin (1984) como

una indagación que “investiga un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto real de existencia, cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes y en los cuales existen múltiples fuentes de evidencia que pueden usarse” (p. 23). El caso de estudio es de un grupo de personas que comparte la afinidad hacia la educación mediante el programa de pregrado, donde cursan la actividad académica de Didáctica de la Matemática II, comprendida dentro de un espacio-tiempo determinados.

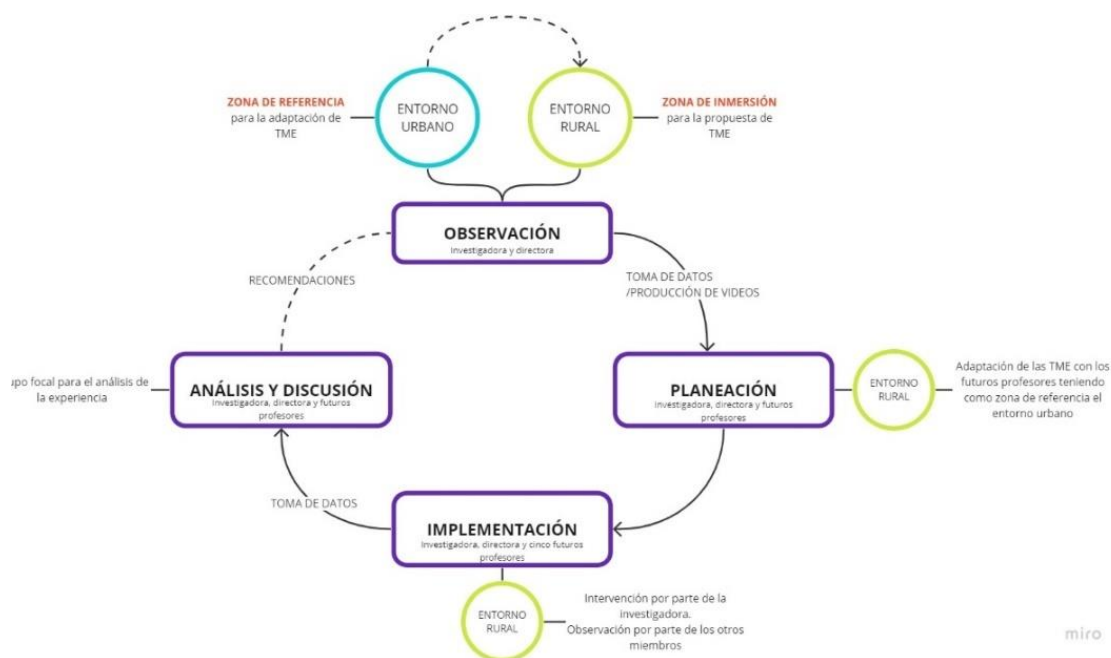
3.1. Descripción del proceso metodológico

El principal referente metodológico del estudio es el *Lesson Study* propuesto por autores como Lewis y Tsuchida (1998); Murata y Takahashi (2002); Fernández y Yoshida (2004). El cual está basado en un contexto, orientado por la práctica, centrado en el aprendizaje del estudiantado, basado en la colaboración entre profesores y en miras hacia la investigación (Murata, 2011). Esta metodología se utiliza para comprender aspectos curriculares y nuevos enfoques de enseñanza que mejoren el aprendizaje mediante la planeación e investigación colaborativa. El *Lesson Study* funciona para mejorar la práctica en el aula, promocionar una demanda de cambio, conectar la práctica con unos objetivos educativos que nutran la enseñanza en el aula (Lewis y Tsuchida, 1998); pues en este modelo no solo el estudiante resulta beneficiado, ya que el profesor (o profesor en formación) llegan a conocer nuevas formas de enseñar (Murata y Takahashi, 2002). Dado el origen global del modelo de *Lesson Study* en Japón, emerge la necesidad de aterrizar la metodología en un marco local que tenga en cuenta la diversidad cultural escolar del entorno en el que se desarrolla el modelo. Por ello, surge una perspectiva propuesta por Acevedo-Rincón y Fiorentini (2017) denominada “Glocal” del *Lesson Study*, basada en un modelo que incluye ideas globales puede particularizarse si se tienen en cuenta las necesidades culturales propias del contexto local.

Durante el ciclo de *Lesson Study* se plantea la adaptación de tareas para la enseñanza de las matemáticas, entendidas como una propuesta que implica una actividad (del estudiante) frente a las matemáticas, mediante una planeación (profesor) como instrumento de aprendizaje (Moreno y Ramírez, 2016). Esto, se caracteriza desde una tríada entre estudiante-profesor-contenido, donde existen factores como la coherencia, el propósito y las limitaciones del aprendizaje, y la dificultad en el desarrollo de la TME (Acevedo-Rincón y Ramos-Rodríguez, 2022). Con base en la metodología del *Lesson Study* descrita por Lewis y Tsuchida (1998) se propone un ciclo de *Glocal Lesson Study* donde se presentan los cuatro momentos principales, acompañados de unas zonas de referencia (entorno urbano y rural); con el fin de atender a la particularidad propia del contexto rural colombiano (Figura 2).

Figura 2.

Esquema de fases metodológicas



Nota: El esquema es construido en colaboración con la directora de investigación J. Acevedo-Rincón. Este parte de la observación de una zona de referencia en contraste con la zona de inmersión; con el fin de realizar comparaciones y adaptaciones del modelo Glocal de *Lesson Study* (Acevedo-Rincón y Fiorentini, 2017). Pasa hacia una planeación adaptada al entorno rural,

la implementación de las tareas para la enseñanza de las matemáticas y finaliza en un análisis y discusión con el grupo de futuros profesores, del cual surgen recomendaciones para la continuación del ciclo.

En coherencia con el ciclo del *Lesson Study*, las fases de la investigación están mediadas por los cuatro momentos propuestos en la figura 2, con el fin de abarcar dos entornos diferentes (urbano y rural) para realizar la planeación de TME que permitan reconocer los conocimientos especializados del grupo de futuros profesores. Las fases son:

1). *Observación*, donde se consideran las metas de enseñanza y aprendizaje según el contexto y los saberes previos del estudiantado. Es importante contar con una observación conjunta por parte de los profesores para que compartan sus perspectivas sobre el objeto de estudio. En este caso, la observación se divide en dos partes (urbana y rural). Mientras que la zona urbana se limita a ser un eje de referencia mediante el desarrollo de TME; en la ruralidad, se busca observar el contexto de los estudiantes (intereses, factores socioeconómicos, escuela nueva, recursos físicos) en miras de estudiar el siguiente momento. Así mismo, la observación implica un reconocimiento del conocimiento matemático sobre el tema del espacio proyectivo (KoT) que tienen los futuros profesores, con el fin de correlacionar el dominio del tema sobre la forma de enseñanza.

2). *Planeación*, aquí se debe evaluar la fase de observación y, mediante una discusión grupal, se planifica una lección de aprendizaje basada en unos objetivos de aprendizaje generales. En esta fase no se busca planear una lección perfecta, sino probar un método de enseñanza en un contexto real para estudiar cómo aprenden los estudiantes. Para la ejecución del segundo momento, se trabaja con profesores en formación del grupo de Didáctica de la Matemática II de la Licenciatura en Educación Básica Primaria de la Universidad Industrial de Santander, donde a través del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor que Enseña Matemáticas

(MTSK) se busca que los futuros profesores adapten TME para la ruralidad sobre el espacio proyectivo, que comúnmente son desarrolladas en zonas urbanas (zona de referencia).

3). *Implementación*, donde el investigador desarrolla la lección y una parte del grupo de futuros profesores realiza observación no participante y recopilan datos sobre la enseñanza, aprendizaje y desarrollo de los estudiantes.

4). *Análisis y discusión*, donde finalmente se hace un ejercicio de reflexión de la lección, en el que cada futuro profesional aporta significativamente a la experiencia de enseñanza desde tu perspectiva de planeador y observador. Así, se nutre la lección y se plantean recomendaciones para la continuación del ciclo, si así se desea (Murata, 2011).

El ciclo del *Lesson Study* se desarrolla durante seis sesiones de clase con los futuros profesores, para un total de 18 horas (Tabla 2).

Tabla 2.

Organización de las sesiones del Lesson Study

Sesión de clase	Fecha	Duración
<i>Observación</i> . Reconocimiento del entorno urbano y KoT de los futuros profesores	24/08/2023	90 minutos
<i>Observación</i> . Reconocimiento del entorno rural y MTSK de los futuros profesores	31/08/2023	90 minutos
<i>Planeación</i> . Trabajo en grupo sobre las ideas iniciales	07/09/2023	90 minutos
<i>Planeación</i> . Trabajo en grupo para la consolidación de una planeación	14/09/2023	90 minutos
<i>Intervención</i> en la Escuela Rural	21/09/2023	90 minutos
<i>Análisis y discusión</i> sobre el proceso	05/10/2023	90 minutos

Nota: Las sesiones del ciclo de *Lesson Study* tuvieron una duración aproximada de 90 minutos, ya que es el tiempo estipulado para la actividad académica de Didáctica de la Matemática I.

Las sesiones de clase cuentan con el acompañamiento de la profesora de la actividad académica (directora del trabajo de investigación). Las dos primeras sesiones obedecen al momento de observación, con el fin de realizar un reconocimiento del entorno urbano y rural. Las siguientes dos sesiones hacen parte de la planeación de las TME, realizadas en trabajo colaborativo. El cuarto encuentro se realiza en la institución oficial del entorno rural con el fin de desarrollar la implementación de las tareas; para finalmente, realizar una última sesión de análisis y discusión sobre la apropiación que tienen los futuros profesores sobre el tema de enseñanza: espacio proyectivo.

3.2. Población

El muestreo cualitativo está orientado hacia un contexto particular no probabilístico, que no busca generalizar resultados, sino más bien profundizar en la comprensión de fenómenos (Hernández-Sampieri, 2018). Para este estudio, se trabajó con una muestra de casos teniendo en cuenta la perspectiva fenomenológica del objetivo, el cual busca caracterizar el conocimiento especializado de un grupo de futuros profesores. Los participantes del estudio son los treinta y cinco estudiantes hombres y mujeres entre los diecisiete y veintidós años de segundo semestre que cursan en 2023-II la actividad académica de Didáctica de la Matemática I de la Licenciatura en Educación Básica Primaria en la Universidad Industrial de Santander, los cuales confirman su participación voluntaria con la firma del consentimiento y asentimiento informado (Apéndice A y B).

4.1. Técnicas e instrumentos

Las técnicas cualitativas aluden a procedimientos particulares de recolección de información durante el proceso investigativo. En ellas, se sintetiza y materializa la experiencia de

investigación con el fin de obtener los datos que permitan un adecuado ciclo de trabajo⁶. Para la caracterización del conocimiento especializado del futuro profesor a partir del ciclo del *Lesson Study*, resulta pertinente organizar unas técnicas e instrumentos que respondan a las fases de investigación, y a su vez, se delimiten a los participantes según el rol que cumplen en cada momento (Tabla 3).

Tabla 3.

Técnicas e instrumentos de recolección de información

Fase	Técnica	Instrumento	Rol
Observación	Observación participante	Registro de clase	Investigadora y directora
		Registro de enseñanza del conocimiento especializado	Investigadora y futuros profesores
Planeación e implementación	Taller investigativo	TME	Investigadora y futuros profesores
	Observación participante	Notas de campo	Futuros profesores
Análisis y discusión	Grupo focal	Guía de aspectos a discutir	Investigadora y futuros profesores

Nota: La tabla describe la coherencia horizontal entre las fases, técnicas, instrumentos y roles dentro del proceso investigativo.

La observación investigativa es un trabajo en conjunto de todos los sentidos, donde se busca explorar y describir entornos según el objetivo de estudio (Hernández-Sampieri, 2018). Para ello, se deben tener en cuenta aspectos como la interacción entre estudiantes, los recursos, la comunidad educativa y los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esta observación es de carácter participativo, donde el observador puede tener una participación pasiva, moderada o completa (Hernández-Sampieri, 2018), el registro de observación se realizó mediante grabaciones para su posterior transcripción. Posteriormente, se da paso a la planeación e implementación de un taller investigativo, el cual es un espacio que permite de nuevos conocimientos, donde se puede

⁶ Todos los resultados de la investigación se encuentran organizados con herramientas ofimáticas.

vivenciar y reflexionar sobre el desarrollo de las competencias del estudiante (Gonzales, 1987); el cual se desarrolla con el apoyo de las tareas para la enseñanza de las matemáticas. Finalmente, para el análisis y discusión de información se desarrolla un grupo focal, el cual busca generar un espacio de interacción natural que propicie la conversación, donde se genera una discusión (basada en la guía de aspectos discutir) respecto a la experiencia de campo donde todos los puntos de vista son válidos siempre y cuando estén sustentados desde argumentos (Martínez, 1999). Durante las sesiones de grabación para realizar la respectiva transcripción, la cual nos permite, por medio de un análisis narrativo, codificar teóricamente la práctica de enseñanza (Flick, 2007).

4.1. Interpretación de datos

La categorización implica en primer lugar una familiarización con la información que se pretende analizar, en este caso, las transcripciones de los trabajos grupales y el grupo focal realizados con los futuros profesores. A partir de esto, se constituye en tres momentos: la codificación abierta, que asigna categorías a los datos seleccionados, donde frase por frase o párrafo por párrafo se encuentran categorías emergentes respecto a la comprensión general del contenido; la codificación axial, que integra las categorías en conceptos a partir de un razonamiento deductivo, donde se pretende encontrar relaciones emergentes entre categorías y se relacionan con la teoría investigada; y la codificación selectiva, la cual busca reconocer una categoría central, desarrollar una teoría mediante los hallazgos del análisis o validar una teoría en un nuevo contexto (Flick, 2007).

En esta investigación, resulta relevante el análisis narrativo de datos en la medida de caracterizar los tópicos del conocimiento especializado que tienen los futuros profesores al planear y adaptar tareas que permiten el aprendizaje contextual en entornos rurales. A partir de

las transcripciones, se establecen categorías generales emergentes que se van agrupando para obtener unas categorías fundamentadas desde la información proporcionada por la investigación, como por la teoría encontrada. A partir de ello, se buscan relaciones entre las categorías para establecer conexiones que permitan la comprensión del conocimiento especializado. Para finalmente, validar el modelo MTSK como el conocimiento que deben tener los futuros profesionales educativos.

Capítulo 4. Análisis de resultados

El ciclo de *Lesson Study* presenta el flujo de procesos investigativos de observación, planeación, inmersión y análisis. Se parte de la observación de una zona de referencia (institución educativa oficial) con el objetivo de reconocer la influencia del contexto urbano en el desarrollo de tareas para la enseñanza de las matemáticas (Apéndice C) con estudiantes del grupo de grados de cuarto y quinto de básica primaria. Los resultados sobre el aula de clases, la interacción entre estudiantes, los conocimientos matemáticos previos y el desarrollo de las tareas son presentados a los futuros profesores con el fin de: (i) analizar las tareas presentadas a los estudiantes en la institución urbana, y (ii) comparar el contexto urbano en el que se desarrollan las tareas con el rural.

En cuanto a la zona de inmersión, se trata de una Institución Educativa multigrado, ubicada en un entorno rural para el que planean los futuros profesores. Por lo que resulta necesario observar las dinámicas sociales, contextuales y educativas de la escuela. En esta observación se llevan a cabo dos visitas a la institución educativa a cargo de la investigadora, donde por medio de la revisión de recursos educativos y diálogo con las docentes se elabora un diagnóstico socioeducativo para presentarle a los futuros profesores. La enseñanza de las matemáticas se presenta a partir de libros de textos gubernamentales compuesto por guías didácticas de autoaprendizaje. El contenido matemático hace referencia al pensamiento numérico con sus operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división), los cuales son aplicados en los contextos más allegados a la población, como el uso del dinero al comprar el mercado. Tal y como afirma Gómez (2010) el material proporcionado por el gobierno requiere de mejoras donde el proceso no se limite en términos de respuestas específicas; no obstante, es claro que el aprendizaje que tienen los estudiantes es gracias al labor profesoral que realiza su práctica en condiciones de vulnerabilidad.

4.1. Hallazgos

Este apartado hace alusión a la caracterización de los resultados de cada fase del *Lesson Study* principalmente según los subdominios del conocimiento de los temas (KoT) y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT). Sin embargo, durante la lectura de los resultados pueden ser reconocidos otros subdominios que los futuros profesores dominan en su práctica. El análisis de la información se realiza mediante un análisis narrativo de los datos, los cuales se contrastan con la teoría encontrada en el estudio. Se correlacionan las creencias y aplicaciones de los futuros profesores en su planeación de la enseñanza del espacio proyectivo. Para así, interpretar los resultados acordes a la experiencia práctica y los estudios teóricos (Tabla 4). Aunque el estudio se centra en el reconocimiento de dos subdominios del modelo MTSK (KoT y KMT), en el transcurso se reconocen otras características a los que los futuros profesores hacen alusión, por lo que se tienen en cuenta en la presentación de resultados.

Tabla 4.*Resumen de los hallazgos según el modelo MTSK por fases*

Fases	Hallazgo	Subdominio	Categorías asociadas al subdominio
Observación	Tarea de representación	KoT	Propiedades. Registros de representación
		KoT	Definiciones
		KSM	Conexiones basadas en el incremento de la complejidad
	Evaluación de planeación	KPM	Formas de validación y demostración. Uso del lenguaje formal
		KFLM	Teorías de aprendizaje matemático. Formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático
		KMT	Recursos didácticos. Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
		KMLS	Resultado de aprendizaje esperado
Planeación	Ideas de planeación	KoT	Propiedades. Fenomenología y aplicaciones. Procedimientos
		KMT	Recursos didácticos. Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
	Planeaciones rurales	KMT	Recursos didácticos. Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
Inmersión	Notas de campo	KoT	Definiciones y propiedades. Fenomenología y aplicaciones
		KMT	Teorías para la enseñanza de las matemáticas. Recursos didácticos. Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
Análisis y discusión	Conversatorio	KoT	Definiciones y propiedades
		KMT	Teorías para la enseñanza de las matemáticas. Recursos didácticos. Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
		KSM	Conexiones basadas en el incremento de la complejidad
		KFLM	Forma de interacción de los estudiantes con el contenido matemático

Nota: La tabla recoge los principales subdominios identificados en el ciclo de *Lesson Study* de los futuros profesores.

4.1.1. Fase de observación

En un semestre anterior, los futuros profesores cursaron la actividad académica de Pensamiento Matemático I con la misma profesora de la actividad académica actual que, en coherencia con la línea de las matemáticas, se basa en el aprendizaje del pensamiento métrico-espacial, donde uno de los temas es el espacio proyectivo. Para caracterizar el conocimiento matemático que manifiestan los futuros profesores al proponer tareas, el día 24 de agosto del 2023 se desarrolla una tarea matemática (Figura 3) que consiste en representar una figura compuesta por seis cubos desde el punto del observador. Esta tarea ha sido propuesta de manera similar anteriormente durante la actividad académica por la profesora del curso.

Figura 3.

Perspectiva de las figuras tridimensionales



Nota: La tarea matemática desarrollada por los futuros profesores es una adaptación de una tarea de la planeación para el entorno urbano.

El desarrollo de la tarea presenta como característica del KoT las propiedades del conocimiento matemático de los futuros profesores, las cuales se encuentran en los procesos que enuncian, como los principios o teoremas, las demostraciones y conceptos básicos como el punto, la recta y el segmento que se pueden formalizar desde sus características (Liñán et al., 2016). Para definir las propiedades se tiene que identificar el registro de representación

desarrollado por los futuros profesores, el cual contempla la representación de un proceso de visualización. Estos registros se presentan en dos vertientes: isométrico y ortogonal.

Las representaciones realizadas por los futuros profesores, en su mayoría, son isométricas (Figura 5), estas proyecciones hacen parte del conjunto de las representaciones axonométricas, definidas como una forma de dibujo plano sobre objetos tridimensionales con la característica de graficas de tres ejes ortogonales (Rojas et al., 2021). Esto significa que para que un futuro profesor dibuje un registro isométrico debe dominar las proyecciones ortogonales (KSM, conexiones basadas en la simplificación) (Gutiérrez, 1998). Los registros isométricos presentan conceptos relacionadas con la estructuración del tema, expresados por Rojas et al (2021) en elementos geométricos, solidos, vistas y tres ejes a 120° o dos ejes a 30° de la horizontal (KoT, propiedades). En cuanto a los elementos geométricos, todas las representaciones de la figura 5 denotan que los futuros profesores tienen conocimiento de algunos elementos básicos geométricos como el punto, el plano y el volumen (Figura 4).

Figura 4.

Registro de representación isométricos

Figura 4a

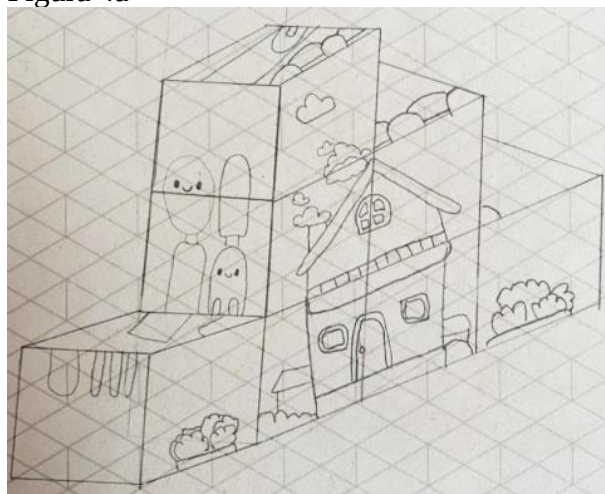
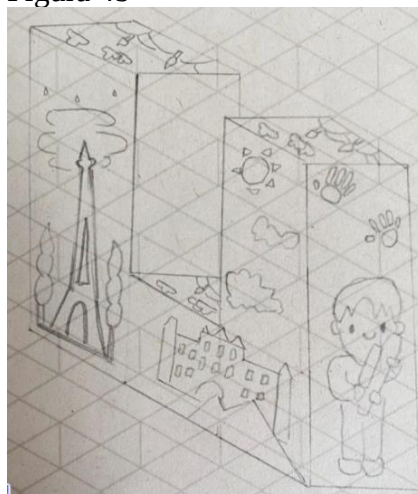


Figura 4b



Nota: Representaciones de las figuras tridimensionales elaboradas por los futuros profesores con cuadrícula isométrica superpuesta por la investigadora.

Sin embargo, se conciben dificultades en la representación de las líneas rectas paralelas de las figuras 4a. Las líneas paralelas se caracterizan por formar el mismo ángulo cuando se cruzan con otra línea, pero entre ellas no se cruzan. Esto se visualiza fácilmente gracias a la cuadrícula isométrica superpuesta, que demuestra cómo las líneas inician con un mismo grado de inclinación y finalizan con diferentes ángulos (tienden a cerrarse o abrirse al finalizar los trazos). Estudios como los de Gutiérrez (1998) y Acevedo-Rincón (2009) caracterizan los registros de representación sobre cuerpos geométricos en estudiantes de primaria y secundaria afirman que los dibujos que tienen mejores resultados son realizados en hojas con cuadrícula. Esto sucede porque la cuadrícula representa un marco de referencia para la coordinación de líneas y permite la ubicación de los vértices del sólido sobre los puntos de la trama isométrica (Gutiérrez, 1998).

Aunque los futuros profesores trabajen las representaciones sobre hojas blancas y con cuadrículas isométricas, el dibujo en hojas en blanco siempre presupone un reto para las personas ya que implica dificultades conceptuales, como la comprensión de las teorías de los ángulos y el uso del espacio, como las técnicas, asociadas a las técnicas de dibujo (Gutiérrez, 1998).

El dibujo isométrico tiene una teoría asociada a los grados de inclinación de los cubos del dibujo. Para que un dibujo cumpla la característica de perspectiva isométrica debe tener dos ejes a 30° de la horizontal y el tercer eje es vertical a 90° . O en su defecto, los ángulos formados entre el plano de proyección y los tres ejes miden 120° . Esta teoría se limita con los futuros profesores al uso de la hoja isométrica como guía de los trazos. Por lo que se superpone una cuadrícula sobre las representaciones en hoja en blanco que realizaron en el aula de clases en un semestre anterior. Como se visualiza en la figura 4a y 4b, ninguna de las representaciones cumple a cabalidad con esta condición. Esto afecta la visualización en perspectiva de las figuras, por lo que a simple vista puede parecer desproporcional o sin profundidad. No obstante, la figura 4b

tiene un adecuado acercamiento a una representación isométrica, ya que conserva el paralelismo en la mayoría de las líneas verticales y horizontales.

Si bien los futuros profesores han trabajado construcciones con tres tipos de hojas: blanca, isométrica y cuadriculada; los factores asociados a estos resultados pueden ser por el desconocimiento de la composición de la hoja isométrica, donde solo se limitaron a representar dibujos sobre ella siguiendo sus líneas, sin identificar los grados de inclinación o el paralelismo de las rectas (KoT, propiedades). A partir de las reflexiones de Gutiérrez (1998) se puede deducir que representar un cuerpo geométrico en una hoja en blanco aún presupone un reto para los futuros profesores, pues de reconocer estas propiedades, estos harían uso de instrumentos de medición como escuadras y transportadores que les permita validar los trazos y la isometría de la figura.

Por otra parte, una menor proporción del grupo de futuros profesores (cinco) realizan registros de representación ortogonales sobre la tarea. Un punto clave en este análisis es que en ninguna de estas hojas (Figura 6) se especifica a qué tipo de representación hace referencia; por lo que se clasifica como ortogonal porque es una de las representaciones vistas el semestre anterior y su figura solo atiende a un eje.

La representación de proyecciones ortogonales hace referencia al procedimiento (KoT) de sólido a vistas, donde se extraen las vistas de las caras de una figura tridimensional (Rojas et al., 2021). Para esta tarea, la instrucción plantea que se represente el sólido desde la vista del observador, por lo que el presunto entendimiento de este grupo de futuros profesores se limita al dibujo de una sola vista, o el intento de proyectar una vista superior (Figura 6b). En cualquiera de los dos casos, no se puede dar por cumplida la representación de las ortogonales ya que esta hace la referencia a mínimo tres vistas: frontal, lateral y superior.

Figura 5.*Registros de representación ortogonal*

Figura 6a

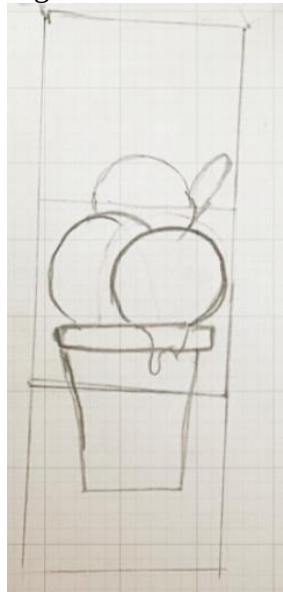
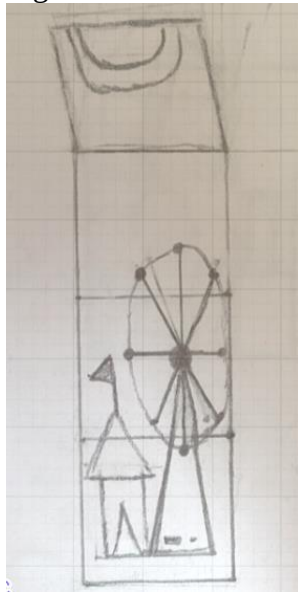


Figura 6b



Nota: Representaciones de las figuras tridimensionales elaboradas por los futuros profesores con cuadrícula mayor y menor superpuesta por la investigadora.

Los elementos geométricos necesarios para la representación ortogonal son el punto y las líneas paralelas y perpendiculares. Al igual que los futuros profesores que realizaron proyecciones isométricas, este grupo de Figuras (6a y 6b) presenta dificultad en el trazo de las líneas paralelas, pues no cumplen el mismo grado de inclinación. Esto puede suceder por la complejidad de enfrentarse a una hoja sin cuadrícula y la falta de instrumentos de dibujo como el transportados, la regla y las escuadras, que permiten una medición más exacta de los trazos.

Es posible reconocer que el conocimiento de los temas (KoT) en el espacio proyectivo tiene unos conocimientos mínimos alcanzables que los futuros profesores deben dominar, los cuales están expuestos en la figura 6.

Figura 6.*Conocimiento del t pico Espacio Proyectivo*

Nota: El esquema es un resumen de la Teoría de Piaget sobre el desarrollo del Conocimiento Espacial (1947).

De acuerdo con los resultados de los futuros profesores, el espacio proyectivo comprende un dominio de habilidades y conceptos propios de las matemáticas que guardan relación con otros tópicos (KSM). Este modelo reconoce que el aprendizaje del espacio comienza en el componente topológico, después pasa al espacio proyectivo en tres aspectos que se deben dominar: perspectiva de objetos aislados, coordinación de perspectivas, relación entre operaciones proyectivas y euclidianas, para posteriormente complementarse con el componente euclidiano. La tarea propuesta para los futuros profesores engloba la tercera meta: relación entre operaciones proyectivas y euclidianas; pues el reto implica unos conocimientos de la geometría euclidiana como los ángulos, el volumen, las líneas; con la característica de la perspectiva de un grupo de objetos con respecto al punto de vista del observador.

Como parte del ejercicio práctico de la fase de observación y conocimiento de los entornos, los futuros profesores emiten un juicio valorativo, según una rúbrica (Apéndice D), de la planeación de tareas para la enseñanza de las matemáticas por parte de la investigadora. Esta rúbrica tiene como aspectos a evaluar las categorías correspondientes al modelo MTSK (conocimiento de los tópicos, estructura de las matemáticas, práctica matemática, características del aprendizaje de las matemáticas, enseñanza de las matemática y estándares de aprendizaje de las matemáticas) por lo cual los futuros profesores deben identificar si el elemento descrito se encuentra o no en la planeación y justificar por qué. Estas justificaciones presentan las creencias que tiene esta población sobre prácticas matemáticas de enseñanza y aprendizaje en el aula de clases.

En primer lugar, se presentan el *conocimiento de los tópicos*, donde se expone que existen definiciones y procedimientos claros dentro de las tareas. La categoría de definiciones se cumple, según la mayoría de los grupos de futuros profesores (de ahora en adelante G#); estos, asocian las definiciones a la explicación clara y precisa de conceptos (G1, G7, G9), manejo adecuado de términos (G2), introducción de temas (G8) y retroalimentación de conocimientos previos. Otro grupo de futuros profesores comenta que “Se evidencia una clara explicación en el tema que íbamos a abordar con *ejemplos sencillos* que un niño podría comprender” (G7). Este tipo de afirmaciones son relevantes ya que confirman la transposición del saber enseñado a uno aprendido, donde los ejemplos hacen parte del conocimiento matemático en la práctica. Los ejemplos, aunque no son contemplados explícitamente en el modelo MTSK, es una acción que requiere un dominio temático que permita la imaginación de escenarios donde este sea aplicable (Liñán et al., 2016).

Otros dos grupos de futuros profesores no están de acuerdo con el cumplimiento de este aspecto: “Yo personalmente sería un poco más *explícita al momento de plasmar la definición matemática* al ejercicio de aprendizaje” (G5). El comentario denota una preocupación por la falta de claridad en la definición matemática en la planeación. Esto puede implicar que estos futuros profesores creen que es importante que los conceptos matemáticos se presenten de una manera más explícita y detallada para que los estudiantes los comprendan mejor. Así mismo, la creencia de este grupo puede estar relacionada con la necesidad de una enseñanza más rigurosa y específica en matemáticas.

Otro grupo comenta que “Primero se deberían *explicar y repasar teóricamente los conceptos* antes de llevarlos a la práctica” (G3). La principal preocupación es que consideran necesario explicar y repasar teóricamente los conceptos antes de llevarlos a la práctica. Lo que puede significar que estos futuros profesores creen en una metodología de enseñanza que enfatiza una sólida comprensión teórica de los conceptos matemáticos antes de aplicarlos en ejercicios prácticos.

Estas concepciones aterrizan la definición matemática a la organización de los momentos de enseñanza en el aula de clases, donde la definición prima desde la enseñanza teórica de la misma. El modelo de enseñanza (KMT) que parte de un concepto o definición, ejemplos y práctica es una organización tradicionalista, desligada a la vida real del estudiante (Villamizar et al., 2012). Esta creencia puede ser resultado de los aprendizajes matemáticos que los futuros profesores tuvieron en la escuela, pues debido a su corto tiempo de la formación inicial su modelo más reciente de enseñanza es el de sus profesores en el bachillerato.

En cuanto a los procedimientos, el modelo MTSK plantea el cómo, cuándo, por qué y resultado como subcategorías para el seguimiento del procedimiento (KoT). Por su parte, los

futuros profesores comentan que la planeación cumple con un debido procedimiento ya que hay un cómo se realiza (G8, G9, G6) por qué se hace (G2) y cuáles son los posibles resultados del entendimiento de los estudiantes (G8). Es decir, justifican el cómo desde la aplicación de conocimientos en el procedimiento; no obstante, falta explicitar dentro de las tareas. Realizarse este tipo de preguntas presupone una conexión con las propiedades que tiene el conocimiento matemático, al igual que un reconocimiento de las estrategias usadas para aproximarse al concepto (Liñán et al., 2016).

En segundo lugar, se encuentra el *conocimiento de la estructura de las matemáticas* que, en este caso, hace alusión a las conexiones entre las tareas basadas en el incremento de la complejidad. La mayoría de los futuros profesores afirman que este aspecto se cumple pero no justifican el por qué sin escribir nuevamente la descripción del aspecto a evaluar. Solo dos grupos de futuros profesores escriben: “Si porque ella se explica y tiene un alto conocimiento del entorno y aprendizaje donde están los estudiantes como niños de cuarto y quinto grado” (G8). Los futuros profesores conciben que el nivel de conocimiento que un docente tenga sobre los estudiantes es causalidad de crear esos enlaces entre tareas. Esto se da no solo conociendo al estudiantado, sino también los grados en los que se encuentran, pues el profesor identifica los conocimientos y habilidades matemáticas que tienen los estudiantes y los que se esperan desarrollar. Por otra parte, el G9 comenta que esto se debe a que: “Se crea una conexión por el contenido basado en el contexto y las actividades realizadas” (G9). Es decir, se atribuye el aumento de la complejidad en las tareas de la planeación en el entorno urbano al contenido contextual, que es el desarrollo de conceptos abstractos en situaciones de la vida cotidiana de los estudiantes (Burner, 1998). Esto implica que debe profundizarse en los conceptos matemáticos abstractos (KoT) para saber cómo aterrizarlos a problemas contextuales del estudiantado.

En tercer lugar se presenta el *conocimiento de la práctica matemática*, donde el lenguaje formal hace referencia a situaciones donde es necesario que los estudiantes utilicen conceptos propios del tema. Aunque la mayoría de los futuros profesores afirman que se cumple este aspecto, justifican el uso del lenguaje formal desde el rol profesoral: “...siempre será necesario hacer uso del lenguaje formal, ya sea para dar la explicación de una temática o actividad...” (G1). Este comentario sugiere que el lenguaje formal es esencial en ciertos contextos ya que tiende a ser más claro y preciso para enseñar temáticas en matemáticas pues hace referencia de un concepto en específico para evitar malentendidos. Por otra parte, el G5 comenta que “Se tiene en cuenta que es necesario utilizar estrategias y un vocabulario entendible para los niños sin dejar de lado el uso correcto de términos matemáticos” (G5); lo que implica que para ellos la enseñanza parte de un discurso adaptado para los estudiantes que llegue al entendimiento de los términos matemáticos, para así promover el lenguaje formal. Aunque el aspecto del conocimiento de la práctica matemática hace referencia a cómo las tareas propuestas en la planeación promueven el uso del lenguaje formal en los estudiantes, las reflexiones de los futuros profesores relacionan el lenguaje formal en las prácticas de enseñanza y aprendizaje.

La validación y demostración de las tareas se refiere al proceso de verificar la precisión y la corrección del conocimiento matemático presentado. La mayor parte de los grupos de futuros profesores se limitan a expresar que esto es posible gracias al material de la clase (G1, G2, G8, G9) pero no hacen referencia a la forma en la que se puede validar que el resultado del estudiante es acertado. Un grupo de futuros profesores, aunque no explicitan cómo validar, si comentan que: “De igual forma me gustaría que fuese un poco más claro el respaldo matemático” (G5). Esta afirmación refleja la necesidad de una justificación matemática más sólida en las tareas matemáticas. Esto trae como consecuencia que la planificación no es lo suficientemente clara en

torno a los conceptos o temas matemáticos (espacio proyectivo). Por ello, resulta necesario revisar la planificación del entorno urbano desde la estructuración de los objetivos hasta el contenido matemático de las tareas. Finalmente, las apreciaciones de los futuros profesores permiten reconocer que aunque no conozcan la forma de validar ese tema en concreto saben que debe tener una base o respaldo matemático que permita comprobar las tareas.

En cuarto lugar se encuentra como aspecto a evaluar el conocimiento de las *características del aprendizaje de las matemáticas* con tres categorías: teorías de aprendizaje, interacción con el contenido y fortalezas y debilidades del aprendizaje matemático. Con respecto a las teorías de aprendizaje matemático solo tres grupos comentan sobre este aspecto. Uno de ellos afirma que más que una teoría los estudiantes “...llegan a respaldar sus argumentos haciendo uso de vivencias previas...” (G1), donde se habla más de una interacción del estudiante con el contenido matemático (KFML) que de una teoría de aprendizaje que respalda el contenido matemático. Otros futuros profesores comentan que “...se tiene como aprendizaje matemático el sistema de coordenadas y relaciones con el espacio, los objetos tridimensionales con sus componentes y propiedades”, donde se hace referencia a conceptos, definiciones o temas (KoT). Se puede inferir de estos dos casos que los futuros profesores no tienen claridad sobre teorías de aprendizaje matemático, las cuales tratan la manera en la que se aprende el contenido matemático, es decir, comprender que procesos cognitivos subyacen de la práctica matemática (Ahmed, 2011).

Sin embargo, un grupo de estudiantes afirma que la planeación **si** cuenta con una teoría de aprendizaje matemático: “Es la teoría de Piaget (conocimiento espacial)” (G2). Esta justificación es precisamente la justificación del contenido matemático y la forma en la que los niños la aprenden. La teoría de Piaget e Inhelder (1956) sobre el desarrollo del espacio parte de

las nociones topológicas y progresa hasta el aprendizaje del espacio euclidiano. Estos autores presentan cómo el niño aprende nociones de lateralidad y como progresan hasta la comparación de proyecciones y la medición geométrica (Piaget e Inhelder, 1956).

Ahora bien, sobre la interacción del estudiante con el contenido matemático la mayoría de los futuros profesores afirman que esta condición se cumple, y solo uno de ellos justifica que esto se denota por la descripción del paso a paso en la planeación (G2). Por el contrario, un grupo de futuros profesores comentan que esta categoría no se cumple porque la docente no tiene en cuenta la forma en la que los estudiantes reaccionan ante las tareas (G8). Este grupo realiza una conexión con un aspecto no mencionado del KFLM y son los aspectos emocionales que surgen del aprendizaje de las matemáticas. Estos pueden hacer referencia a la “ansiedad matemática” (Mendías et al., 2011) o a los aspectos de motivación, interés y expectativa de las matemáticas (Carrillo et al., 2018), que se manifiesta, como afirma el grupo, en la participación de los estudiantes.

Finalmente, se establece una categoría que afirma la existencia de una clasificación que permite identificar las fortalezas y debilidades que tienen los estudiantes con respecto al aprendizaje matemático. Todos los futuros profesores establecen que **sí** se cumple este aspecto y lo justifican de diferentes formas. Dos grupos comentan que esto se debe a la clasificación de las respuestas esperadas por niveles de comprensión (total, medio o nulo, de acuerdo con el formato de planeación propuesto por Acevedo-Rincón, 2017) (G2, G6), que efectivamente permiten categorizar el aprendizaje del estudiante en un nivel para estimar la retroalimentación que requiere y así conseguir un adecuado aprendizaje matemático. Por otra parte, se comenta que se tiene que cuenta que todos los estudiantes tienen diferentes formas de aprendizaje, lo que hace referencia a la interacción que tiene un estudiante con el contenido matemático (KFLM). Otro

grupo de futuros profesores comenta que las tareas se pueden reconocer como “... relativamente fáciles...” (G3). Esta es una interpretación del contenido matemático de los estudiantes desde la postura del profesorado, es decir, no se tiene en cuenta la experiencia matemática que tiene un estudiante de primaria en comparación con un estudiante de pregrado. Esto lo confirma un estudio realizado por Hernández y Lizarde (2016) al concluir que un grupo de futuros profesores tiene una correlación entre el nivel de dificultad que asume el docente sobre un tema, como la dificultad que cree que tendrá un estudiante sobre el mismo conocimiento. Es decir, la complejidad que el futuro profesor tenga sobre un tema asume que es la misma que tendrá su estudiante.

En quinto lugar se presenta el tópico del *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* el cual tiene en cuenta cuatro categorías: materiales y recursos, situación de aprendizaje, adecuación de las tareas y objetivos de planeación. Con respecto a los materiales y recursos todos los futuros profesores afirman que son pertinentes y accesibles por su facilidad de uso y la facilitación de la docente al llevar el material (G2, G6, G8). Entendiendo que para que un recurso sea pertinente, el docente debe tener en cuenta cuatro características: objetivos pretendidos, los contenidos a trabajar, las características de los estudiantes y del contexto físico, y estrategias didácticas. Los futuros profesores comprenden la relevancia de la selección de recursos para la enseñanza de las matemáticas.

Por otra parte, la situación de aprendizaje tiene que ver con el contexto de los estudiantes y la relación que se le da con el contenido matemático. Para la planeación que se evalúa, la situación de aprendizaje contempla las manifestaciones artísticas; no obstante, ningún grupo de futuros profesores hace referencia a ello, pues se limitan a seleccionar que sí cumple pero no comentan porqué.

Ahora bien, la adecuación de las tareas tiene en cuenta que: sean del nivel de los estudiantes, sean pertinentes con el contexto, promuevan la exploración y sean variadas. Todos los futuros profesores afirman que estas categorías se cumplen en la planeación; sin embargo, solo tres comentan que esto sucede porque (i) se tienen en cuenta muchos factores socioeconómicos (G8), (ii) son creativas (G2) y (ii) refuerzan los conocimientos previos pero que hace falta una retroalimentación para el entendimiento total del tema (G4). Autores como Moreno y Ramírez (2016); Smith y Stein (1998) argumentan que hay una serie de factores que inciden en el planteamiento de las tareas matemáticas como lo son el contenido matemático, la acción que debe realizar el estudiante, la respuesta que se espera sobre la acción, la finalidad, los materiales y recursos, la dificultad de la acción, la situación de aprendizaje y el tiempo de duración. Los futuros profesores reconocen las situaciones personales y sociales y la reflexión sobre los procesos matemáticos atendidos en la retroalimentación. Sin embargo, existen otros como: el mismo contenido matemático, la dificultad del procedimiento y las conexiones conceptuales, que los futuros profesores aún no reconocen.

Todos los futuros profesores afirman que la planeación tiene en cuenta objetivos de aprendizaje, algunos de ellos justifican que: “La planeación está bien construida, contando con un orden y objetivo esperado en cada actividad relacionada al contenido matemático, sobre todo en las respuestas esperadas al considerar todo tipo de posible escenario al planear la temática” (G1). Es relevante que en la corta formación que llevan estos estudiantes reconozcan la lógica de un objetivo y su relación con el contenido disciplinar, pues esto les permite tener claridad sobre el planteamiento de la tarea y reconocer el progreso que tiene el estudiante en su aprendizaje. Otros futuros profesores comentan que: “Los objetivos se logran de manera general, no con todos los alumnos pero sí con la mayoría, faltaría evaluar que factor influyo en esto para poder

mejorarlo en un futuro” (G9). Acá, ya relacionan el objetivo con los resultados de la sesión de clase y reflexionan sobre la posibilidad de evaluar que influyó, de manera que pueda mejorarse.

Finalmente, se expone el aspecto del *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas*, el cual dentro de la rúbrica plantea que se tiene en cuenta que las tareas permiten la evaluación y seguimiento de los aprendizajes. Todos los grupos de futuros profesores comentan que esta condición se cumple y solo seis de ellos justifican que se debe a la formulación y organización de los momentos (G2, G5, G6, G7, G8, G9). En este sentido, los futuros profesores identifican que la base del seguimiento y la evaluación de las tareas es la organización de los momentos de planeación. Por lo que, si los momentos son coherentes y cohesivos en el contenido matemático, los estudiantes tienen un aprendizaje progresivo que puede evaluarse de acuerdo con los objetivos propuestos para cada momento.

Adicionalmente, un grupo comenta que la actividad que permite la evaluación y seguimiento es la del dibujo (G6). Es decir que los futuros profesores reconocen que se llega a una tarea en concreto que permite evaluar el aprendizaje de los estudiantes. Lo anterior hace referencia a la evaluación sumativa (Giné, 2004), donde se reconoce que el final de un proceso educativo conlleva una evaluación de todos los saberes de esa etapa. Sin embargo, tener esa creencia implica que el futuro profesor centra la mirada principalmente en el producto (conocimiento matemático), dejando de lado el proceso de aprendizaje (habilidades, desarrollo cognitivo matemático, actitudes, saberes previos). Este aspecto por evaluar contiene poca especificación sobre la conexión entre tareas o el propósito que permite la evaluación; no obstante, hay nociones de que la organización de los momentos es clave para dar un seguimiento al aprendizaje matemático.

A pesar de haber dado la claridad de justificar las respuestas, muchos tópicos no fueron justificados y uno de los grupos (G10) solo selecciono las respuestas, sin otorgar comentarios. Durante las dos sesiones de observación, los futuros profesores expresan emociones positivas sobre la experiencia de planeación, debido a que se les presenta “un escenario real para el desarrollo de prácticas de enseñanza” (G1). Esto es ciertamente el aprendizaje significativo (Ausbel, 1983), pues se tienen en cuenta los conocimientos previos de los futuros profesores y la relevancia de la planeación de tareas en su desarrollo profesoral. Aunque este grupo de futuros profesores de básica primaria no tienen experiencias previas en el componente de la enseñanza y la práctica, la línea matemática tiene una coherencia entre las actividades académicas de Pensamiento Matemático y Didáctica de la Matemática, acordes a los lineamientos curriculares colombianos. En consecuencia, este grupo tuvo un semestre de estudio y profundización sobre el pensamiento espacial (KoT); por lo que se espera un dominio de conceptos, procedimientos y aplicaciones en torno al espacio proyectivo.

4.1.2. Fase de planeación

Después de realizar un ejercicio de reconocimiento de la zona de referencia (urbana) en la que se desarrollan normalmente las tareas para la enseñanza de las matemáticas; los futuros profesores estudian el entorno rural y la escuela de inmersión, para así poder llegar al momento de planeación. Teniendo en cuenta que son estudiantes de segundo semestre de la Licenciatura en Educación Básica Primaria, el aprendizaje pedagógico hasta el momento se limita a los saberes y experiencias que les ha otorgado cada una de las actividades académicas. Sin embargo, es importante desde los primeros semestres existan aproximaciones a campos educativos reales, ya que se apoya la formación inicial con el enriquecimiento de la variedad de contextos escolares que pueden encontrar al finalizar su pregrado.

Para el comienzo de esta fase, los futuros profesores realizaron como trabajo colaborativo (Extra-clase) la estructuración o modificación de tareas matemáticas que promuevan el desarrollo del espacio proyectivo. En la sesión de la actividad académica (31 de agosto del 2023), se les otorgan un espacio para que en equipos de trabajo compartan sus trabajos y en un muro virtual escriban las ideas para cada momento de la clase: inicio, desarrollo y cierre.

Para el momento de inicio, la mayoría de los grupos describen tareas relacionadas con lateralidades desde la generación de instrucciones (G1, G4, G5, G9, G10) y preguntas sobre un juego (G7, G8). Estas ideas son acordes a la planeación de referencia, donde se presentaba la danza como una estrategia para el reconocimiento del manejo sobre el espacio topológico; no obstante, era un enlace con el espacio proyectivo al trabajar las reflexiones y presentarlo como introducción a las perspectivas. Las ideas propuestas por esos grupos de futuros profesores se limitan a la coordinación de lateralidad, sin establecer conexiones con el espacio proyectivo.

Otra de las ideas para el momento de inicio es la explicación de conceptos básicos de ubicación espacial (sin mencionar cuales son) (G4) y de las figuras tridimensionales (G6); al igual que la reproducción de videos explicativos sobre la proyección de sombras (G3). Estas prácticas de inicio de sesión se pueden clasificar como tradicionalistas, pues no tienen en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes y reproducen un patrón de aprendizaje basado en la explicación para luego llegar a la práctica (Villamizar et al., 2012).

Dado que el momento del desarrollo es el más explicado por los futuros profesores, se procede a realizar una revisión de la escritura por grupos de trabajo. En primer lugar, el G1 plantea un viaje imaginario en la mente de los niños, donde exploren un espacio. Esta tarea se limita a planteamientos topológicos y no ofrece soportes sobre el aprendizaje de los estudiantes, ya que solo les piden imaginar ciertos espacios como las montañas. Por su parte, el G2 plantea

un collage de perspectivas (KMT, recurso didáctico físico), donde a partir de recortes de paisajes rurales los estudiantes construyan un espacio teniendo en cuenta las proporcionalidades (KoT, procedimientos). Los futuros profesores comentan que durante la actividad se trabaja el concepto de proporcionalidades (KoT, definiciones) y lo conectan a la vida real observando el paisaje rural de la escuela.

En cuanto al G3, mantienen como eje articulador el trabajo con las sombras donde proponen tres tareas (KMT). Primero se describe una exploración del ángulo de las sombras proyectadas por diferentes objetos. Esta actividad tiene su énfasis en el espacio euclidiano, donde la medición es una de sus características. En segundo lugar, se expone una tarea que se basa en la proyección de las sombras de un objeto en un mural, las cuales son pintadas por los estudiantes. Esta propuesta es interesante ya que relaciona contenidos del espacio proyectivo; sin embargo, aún no desarrolla el procedimiento que debe tener (KoT). Por último, presentan una carrera de sombras, donde los estudiantes deben acercar o alejar objetos y obtener la sombra más grande. Es un complemento creativo para tarea anterior, pero falta reconocer las características del aprendizaje que desarrolla este tipo de estrategias.

Otro grupo de futuros profesores comenta que: “para el desarrollo de la clase aplicaremos un juego interactivo acompañado de un ejemplo práctico acordes al tema gallina ciega” (G4) (KMT). Esta idea no otorga mayor explicación sobre el juego y su relación con el tema de la clase. Por parte del G5, se expone que en el momento de desarrollo se pretende jugar a la rayuela (KFLM, estrategias) para explorar la ubicación espacial. Este juego promueve el desarrollo de conceptos topológicos como -al lado de-, -a la izquierda-, etc. Por lo que sería apropiado tenerlo en cuenta como una tarea de apertura o cierre, aumentando su complejidad.

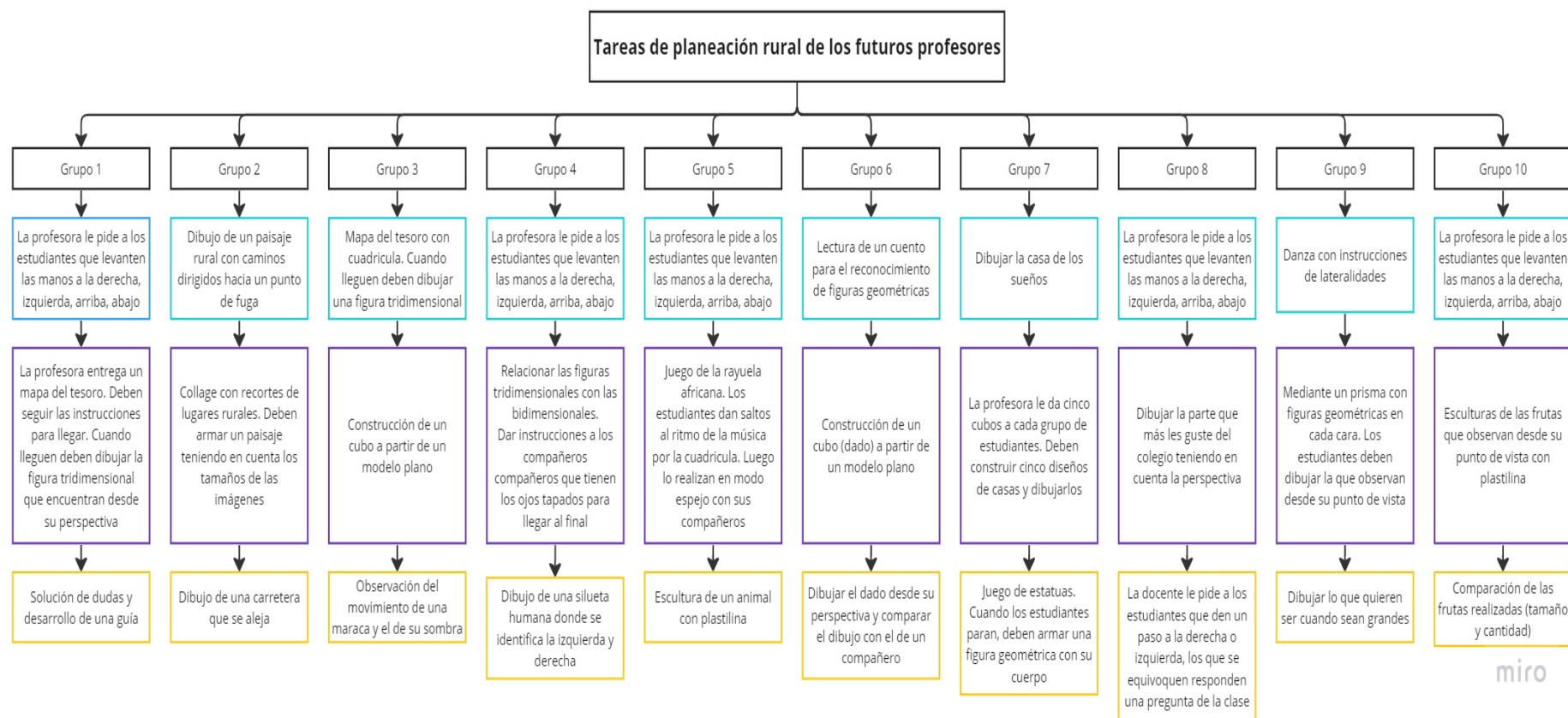
En cuanto al G6, se expone que por medio de una plantilla de un plegable que simule un dado (KFLM, recursos físicos) se arme y se observe como una “figura plana” se convierte en una tridimensional. Hasta la descripción que presentan los futuros profesores, la tarea carece de procedimiento (KoT), pues no expresa el cómo, cuándo y por qué de la actividad. Ahora bien, el G8 propone que los estudiantes se movilicen a un espacio abierto y se formen grupos de cuatro, donde cada uno se haga a espaldas del otro y dibujen lo que observan desde su perspectiva. Aunque es una tarea que relaciona el espacio proyectivo, la zona puede llegar a ser muy amplia para que los estudiantes aterricen la atención en detalles que marcan la perspectiva del espacio.

Los futuros profesores del G9, presentan una tarea que tiene como centro un prisma rectangular que en las caras refleja diferentes figuras geométricas (KMT, recursos físicos), los estudiantes se organizan alrededor del objeto para describir y comparar lo que observan. Para que esta tarea sea enmarcada en el desarrollo de la clase, debe poner en práctica un conocimiento aprendido, por lo que se debe aterrizar la actividad a un procedimiento (KoT). Finalmente, el G10 describe una idea de trabajo sobre las perspectivas (KoT, definición), donde se presentan unos objetos organizados y los estudiantes describen lo que pueden ver y los moldean en plastilina. Esta opción de representación para los estudiantes puede ser una alternativa más interesante de realizar, al tratarse de objetos manipulables.

Para el momento de cierre solo seis grupos plantearon ideas de tareas, las cuales se limitan a: (i) la socialización de la sesión de clases (G1, G2), sin explicitar el procedimiento del momento (KoT); (ii) las preguntas sobre el contenido visto en clase (G1, G4, G5), sin exponer cuales serían los interrogantes que plantearían para los estudiantes; (iii) tareas relacionadas con el espacio proyectivo, en este caso, el G3 continua con la línea de las sombras y describe una actividad en donde los estudiantes relacionan el sonido de unas campanas con la sombra que

proyecta y el G4 continua con la tarea de la construcción de dados, donde este se pone en el centro del salón y los estudiantes describen lo que observan desde diferentes puntos de vista.

Una vez socializadas las ideas de todos los grupos de futuros profesores, se deja como trabajo independiente la elaboración de tareas para la enseñanza de la matemática en los tres momentos de la clase (Figura 7), atendiendo a las necesidades del contexto rural (Anexo 1-10). Para la revisión de las tareas se tiene en cuenta algunos de los aspectos mencionados por los autores Smith y Stein (1998): contenido matemático, situación de aprendizaje, los objetivos propuestos, el reconocimiento de los conocimientos previos y la adaptación al contexto; así como el uso adecuado y pertinente de recursos didácticos (KMT). Esto permite el análisis de las tareas para la enseñanza de las matemáticas (KMT) desde la categorización de los aspectos mencionados anteriormente, los cuales permiten la revisión de la coherencia lineal entre los momentos propuestos en la planeación. El primer momento es el de inicio (Tabla 5), el cual hace referencia a la presentación del conocimiento matemático mediante la relación con los conocimientos previos que tienen los estudiantes.

Figura 7.*Esquema de tareas de planeación rural*

Nota: El esquema describe las tareas que plantean los diez grupos de futuros profesores. Debajo del número del grupo está el recuadro de inicio en azul, después el durante en morado y el último recuadro es el cierre en amarillo.

La categorización de las tareas demuestra que, para el primer momento, los futuros profesores tienen en cuenta el contenido matemático relacionado con lateralidades (G1, G3, G4, G5, G8, G9, G10), atendiendo a las propiedades (KoT) del espacio topológico, el cual es la base de las proyecciones desde el entendimiento de los lados del cuerpo y sus posiciones (Piaget e Inhelder, 1956).

La mayoría de los grupos realizan una adaptación a la actividad presentada en la zona de referencia, disminuyendo la complejidad a la reproducción de instrucciones de lateralidades. En coherencia con el modelo de aprendizaje de los autores Piaget e Inhelder (1956), es adecuado activar los conocimientos previos que tienen los estudiantes sobre el espacio y llevarlos a las nociones proyectivas desde los movimientos corporales.

En cuanto al G2, comienzan con definiciones (KoT) relacionadas con el espacio proyectivo como el punto de fuga y la perspectiva mediante el dibujo de líneas que convergen en caminos (profundidad). Otros dos grupos comienzan la sesión con tareas que involucran el reconocimiento de las figuras geométricas a través del cuento (G6) y los escenarios imaginarios como el dibujo de una casa ideal (G7). El desarrollo de las tareas que involucran el espacio proyectivo desde el inicio de la sesión resulta adecuado, en la medida en que relacionan los conocimientos previos que tienen los estudiantes con las propiedades del concepto matemático (KoT), para estos casos se presentan dos vertientes: la profundidad en las perspectivas desde los paisajes rurales y el trabajo con las figuras geométricas. Resulta imprescindible conectar con una situación de aprendizaje contextual a los estudiantes, de forma que para ellos lo que van a aprender tenga un significado (Ausubel, 1983).

Tabla 5.*KMT, tareas: momento de inicio*

Grupos de futuros profesores	Contenido matemático	Situación de aprendizaje	Acción/Respuesta	Recursos
G1	Lateralidad (arriba, abajo, derecha e izquierda)	Presentación de estudiantes	Movimientos corporales	Ninguno
G2	Punto de fuga y perspectiva	Paisaje rural	Dibujo	Obras artísticas
G3	Lateralidad (arriba, abajo, derecha e izquierda)	Escenario imaginario: mapa del tesoro	Movimientos corporales Dibujo de una figura geométrica	Figuras geométricas
G4	Lateralidad (arriba, abajo, derecha e izquierda)	Presentación de estudiantes	Movimientos corporales	No hay
G5	Lateralidad (arriba, abajo, derecha e izquierda)	Presentación de estudiantes	Movimientos corporales	No hay
G6	Figuras bidimensionales	No hay	Descripción verbal de las figuras vistas en un cuento	Cuento
G7	Figuras geométricas	Escenario imaginario: casa de los sueños	Dibujo libre de una casa	Hojas
G8	Lateralidad (arriba, abajo, derecha e izquierda) Espacio topológico	No hay	Movimientos corporales Organización de objetos	Objetos
G9	Lateralidad (arriba, abajo, derecha e izquierda)	Bailarines	Movimientos corporales	Música
G10	Lateralidad (arriba, abajo, derecha e izquierda)	No hay	Movimientos corporales	No hay

Nota: La tabla representa la categorización de las tareas propuestas por los futuros profesores para el momento del inicio. Los aspectos tienen en cuenta teorías sobre las tareas matemáticas para la escolaridad.

Para ello, algunos grupos utilizan como excusa la presentación de los estudiantes para iniciar la sesión (G1, G4, G5), otro grupo mantiene la resignificación de las manifestaciones artísticas como la danza (G9) y dos grupos plantean escenarios imaginarios con el fin de “promover la motivación de los estudiantes” (G3, G7). No obstante, algunos de los futuros profesores no tienen en cuenta la situación de aprendizaje de los estudiantes, lo que se puede interpretar como una enseñanza del contenido por intereses ajenos al de los estudiantes (G6, G8, G10).

El segundo momento de la clase obedece al desarrollo (Tabla 6), donde se busca establecer esas relaciones con el nuevo conocimiento matemático. El contenido matemático que los futuros docentes seleccionan para la enseñanza del espacio proyectivo denota el conocimiento de los temas (KoT) que ellos tienen sobre el tema a enseñar. La mayoría de los grupos reconocen las figuras bidimensionales y tridimensionales como un concepto matemático propio del espacio proyectivo, por lo que esperan que los estudiantes construyan cuerpos tridimensionales (G3, G6), describan características de las figuras (G4, G9) y construyan con el uso de cubos casas para el dibujo de ellas (G7) (Figura 8).

Este tipo de tareas, a excepción de la última, no incluyen procedimientos matemáticos, donde se desarrolle la capacidad de razonar y resolver problemas en coherencia con el nivel educativo de los estudiantes (Smith y Stein, 1998). Aunque las figuras tridimensionales pueden ser utilizadas para el aprendizaje del espacio proyectivo, resultan ser solo un medio para explorar otros conceptos.

Tabla 6.*KMT, tareas: momento de desarrollo*

Grupos	Contenido matemático	Situación de aprendizaje	Acción/Respuesta	Recursos
G1	Perspectiva	Escenario imaginario	Seguimiento de instrucciones sobre la orientación espacial. Dibujo de un objeto desde diferentes perspectivas	Objetos tridimensionales
G2	Profundidad y distancia	Paisaje rural	Recortar y pegar imágenes de diferentes tamaños	Collage
G3	Figuras tridimensionales	No hay	Construcción de figura tridimensional a partir de un plegable	Plegables
G4	Figuras bidimensionales, tridimensionales y ubicación espacial	No hay	Descripción verbal de figuras bidimensionales y tridimensionales. Movimientos corporales	Fichas de figuras
G5	Lateralidad	No hay	Movimientos corporales	Rayuela
G6	Figuras tridimensionales	No hay	Construcción de figura tridimensional a partir de un plegable	Plegables
G7	Figuras tridimensionales	Escenario imaginario	Construcción de casas con cinco cubos y dibujo de estas	Cubos
G8	Perspectivas	Paisaje rural	Dibujo de alguna parte del colegio Descripción verbal de la orientación espacial de ese dibujo	Hojas
G9	Figuras tridimensionales	No hay	Descripción verbal de las características de las figuras tridimensionales	No hay
G10	Perspectivas	Frutas del entorno	Escultura de las frutas atendiendo al tamaño, perspectiva y vista de ellas	Plastilina

Nota: La tabla representa la categorización de las tareas propuestas por los futuros profesores para el momento del desarrollo. Los aspectos tienen en cuenta teorías sobre las tareas matemáticas para la escolaridad

El segundo concepto mayor tratado por los futuros profesores es el de perspectiva. El G1 propone una tarea en la que los estudiantes siguen instrucciones para llegar a unos objetos que deben dibujar desde diferentes puntos de vista. En cuanto al G10, plantean como tarea organizar frutas de la región de diferentes tamaños con el fin de que los estudiantes hagan esculturas de plastilina de las frutas que visualicen (Figura 9). Otros conceptos del espacio proyectivo desarrollados por futuros profesores son los de profundidad y distancia (G2), donde buscan que los estudiantes exploren la diferencia de tamaños según la cercanía del objeto en la construcción de un collage. Estos grupos, tienen como propósito que los estudiantes tengan la necesidad de interpretar la tarea para llegar a su resolución (Smith y Stein, 1998).

Figura 8.

Representación de tarea G10

Figura 9A

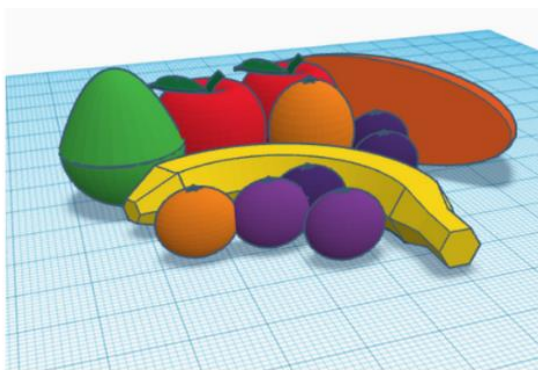


Figura 9B



Nota: Representación en el software *Tinkercad* de la investigadora sobre la tarea para el momento del desarrollo propuesta por el grupo 10. La figura 9A corresponde a la ubicación de las frutas sobre una mesa y la 9B la perspectiva que tiene un estudiante sobre las frutas desde su asiento.

Aunque el G8 reconoce como concepto central del espacio proyectivo la perspectiva, la actividad puede ser muy amplia la instrucción de dibujar cualquier parte del colegio, por lo que no se garantiza que existan evidencias contundentes del aprendizaje de los estudiantes.

Adicionalmente, uno de los grupos mantiene como contenido matemático la lateralidad, que es la

presencia o dominio de los lados del cuerpo (especialmente derecho e izquierdo); lo que puede denotar que no hay un dominio del conocimiento del tema espacio proyectivo (KoT), pues este contenido hace referencia a nociones topológicas. Por último, es notable que en el momento del desarrollo los escenarios de aprendizaje disminuyen, pues solo se tienen en cuenta dos escenarios imaginarios (G1, G7), y dos relacionados con el contexto rural (G2, G10). El último momento de la clase corresponde al cierre (Tabla 7), el cual realiza una síntesis del conocimiento matemático. Para ello, se espera que los futuros profesores desarrollen tareas que verifiquen los conocimientos del espacio proyectivo.

Las tareas propuestas para el cierre de la sesión son las que tienen una menor especificación, donde solo tres grupos presentan una situación de aprendizaje referente al entorno rural (G1, G2, G10); no obstante, una de ellas no se puede corroborar debido a que se menciona que el material es una guía de preguntas sobre el espacio proyectivo pero no se anexa ningún recurso (G1).

Tabla 7.*KMT, tareas: momento de cierre*

Grupos	Contenido matemático	Situación de aprendizaje	Acción/Respuesta	Recursos
G1	Espacio proyectivo	Entorno cotidiano	Descripción escrita. No se puede evidenciar debido a que no especifican el recurso	Guía
G2	Punto de fuga, profundidad y distancia	Paisaje rural	Dibujo de un camino	Material de arte
G3	Movimiento de los objetos	No hay	Descripción verbal del movimiento del objeto y la sombra	Objetos que generen sonido y linternas
G4	Lateralidad de una silueta Reconocimiento de figuras bidimensionales y tridimensionales	No hay	Dibujar una silueta del cuerpo humano. Identificar la derecha e izquierda del cuerpo. Dibujar dos figuras bidimensionales y dos tridimensionales	Hojas
G5	Objetos tridimensionales	No hay	Construcción de un animal en plastilina Descripción verbal de la actividad	Plastilina
G6	Perspectivas	No hay	Dibujo de un dado desde la perspectiva del observador	Dado
G7	Figuras bidimensionales	No hay	Movimientos corporales de una figura bidimensional	Música
G8	No se puede evidenciar	No hay	Respuesta verbal a las preguntas	Tarjetas de preguntas
G9	No hay	Profesiones	Dibujo de una profesión	Hojas
G10	Tamaños	Frutas del entorno	Descripción verbal de la diferencia entre las esculturas	No hay

Nota: La tabla representa la categorización de las tareas propuestas por los futuros profesores para el momento del cierre. Los aspectos tienen en cuenta teorías sobre las tareas matemáticas para la escolaridad.

Los conocimientos referenciados en estas tareas se inclinan hacia el reconocimiento de las figuras bidimensionales y tridimensionales (G4, G5, G7). Según la instrucción de la TME, no se garantiza el aprendizaje del espacio proyectivo ya que se limitan a la descripción de las características de las figuras y la diferencia entre ellas. Por otra parte, tres grupos de futuros profesores reconocen como conceptos del espacio proyectivo (KoT) el tamaño (G10), la profundidad, el punto de fuga (G2) y las perspectivas (G6) (Figura 10); donde se realizan vínculos conceptuales asociados a las tareas trabajadas en los momentos previos de la clase.

Figura 9.

Representación de tarea G6

Figura 10A

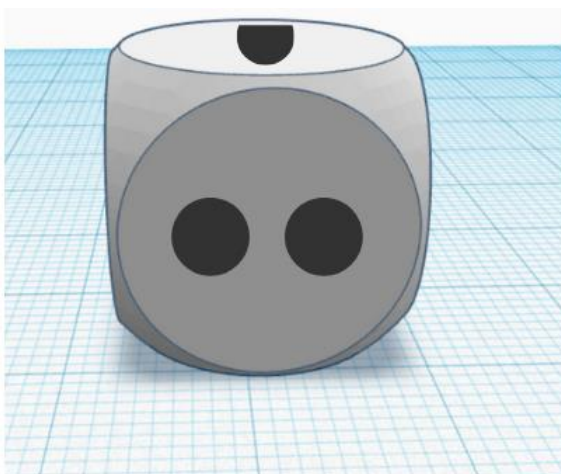
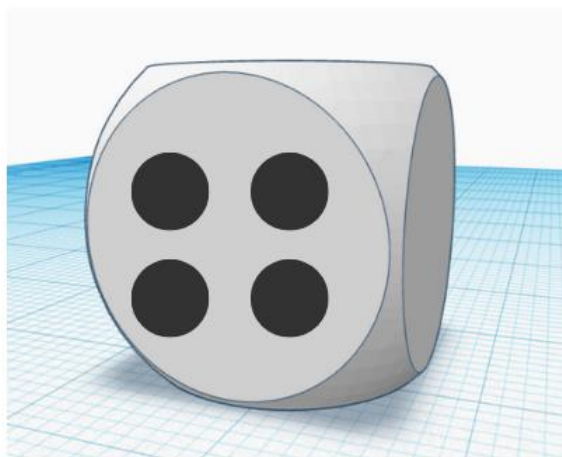


Figura 10B



Nota: Representación de la investigadora sobre la tarea propuesta para el momento del cierre por el grupo 6. La tarea describe la observación de un cubo desde diferentes puntos de vista (Figura 10A) para posteriormente realizar un dibujo desde la perspectiva del observador (Figura 10B).

A partir de la revisión de planeaciones, los futuros profesores escogen las tareas más adecuadas, con mediación de la investigadora, para condensarlas en una planeación de clase para el entorno rural (Apéndice F). En primer lugar, para el momento de inicio se seleccionan tareas dinámicas que promuevan la motivación de los estudiantes. La primera de ellas es tomada del G4, donde usan como estrategia lúdica el “tingo, tingo, tango”, que consiste en pasar dos pelotas

por todo el salón, los estudiantes que quedan con las pelotas deben levantarse para que uno de ellos presente al otro ante la clase; luego, debe comentar hacia qué dirección está ubicado su compañero (derecha o izquierda). Sin embargo, se realiza una adaptación a la última parte con el fin de evaluar los conocimientos previos de los estudiantes respecto a la perspectiva; por lo que ahora el estudiante que presenta realiza una posición creativa con su cuerpo y el compañero debe imitar la figura. La profesora y los otros compañeros del curso deben revisar si las posiciones de los cuerpos de los dos estudiantes son iguales (posición de manos, pies y ubicación del cuerpo).

La segunda tarea es de expresión corporal tomada del G7. En la planeación del grupo, la tarea se contempla en el momento de cierre; no obstante, los futuros profesores concluyen que es una dinámica que puede funcionar mejor al comienzo de la sesión. Esta consiste en un juego de las estatuas, donde los estudiantes seleccionan su música favorita y bailan en parejas hasta que la canción pare, en ese momento la profesora dice el nombre de una figura geométrica y los estudiantes deben imitarla con su cuerpo. Se busca que la profesora motive a los estudiantes a realizar diferentes representaciones y luego compararlas entre sí, retomando nociones de perspectiva y lateralidades.

Para el momento del desarrollo, se seleccionan dos tareas que desarrollan conceptos propios del espacio topológico del G10 y G6. La primera tarea consiste en separar el grupo en dos, cada uno tiene en frente una mesa con frutas de diferentes tamaños para que los estudiantes recreen con plastilina las frutas que ven desde su posición (Figura 11). Posteriormente, se ponen en una mesa todas las frutas en plastilina y se comparan los tamaños y cantidades de las esculturas realizadas por los estudiantes de la escuela rural.

Figura 10.

Ejecución de la tarea del momento de desarrollo



Nota: Resultado de un estudiante de la Escuela Rural sobre la tarea del momento del desarrollo propuesta por el G10

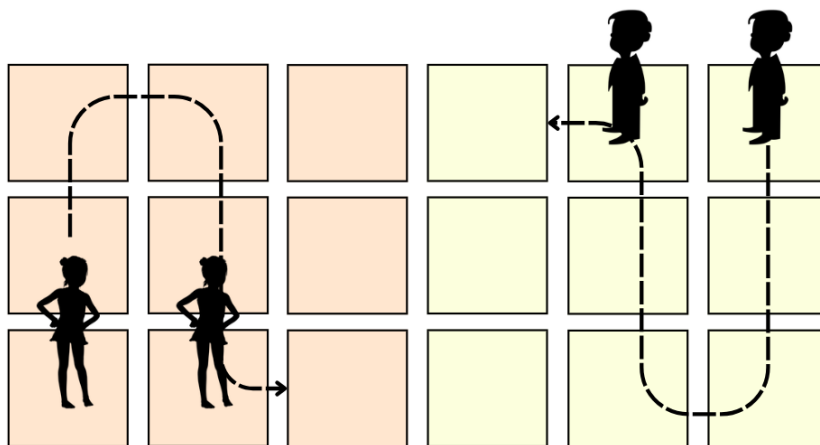
Para la segunda tarea, los estudiantes deben armar un cubo a partir de una plantilla bidimensional para recordar la composición de los objetos tridimensionales. Una vez el cubo esta armado se realiza la adaptación de ubicar números del uno al seis en cada cara (como un dado); para saber que el número quedó bien posicionado, los estudiantes deben reconocer cual es el opuesto y sumar los números de ambas caras, el resultado debe ser siete. Cuando los dados están contruidos, los estudiantes dibujan en una hoja de papel el dado desde una posición diferente. Al final, se busca comparar que los estudiantes comparen sus representaciones y consoliden el concepto de perspectiva.

El cierre de la sesión se trabaja desde una tarea por fuera del aula de clases propuesta por el G5. La tarea se basa en el juego de la rayuela africana, donde los estudiantes deben seguir un patrón de saltos para llegar al final sin chocar con el compañero que viene en frente (Figura 12).

Esta tarea fue seleccionada por los futuros profesores con el fin de dinamizar la clase y poner en práctica las nociones de lateralidades y reflexiones del espacio proyectivo.

Figura 11.

Representación de tarea G5



Nota: Representación de la investigadora sobre la tarea para el momento del cierre propuesta por el grupo 5

Se reconoce que los futuros profesores tienen preferencia hacia las tareas basadas en juegos, ya que tienen la creencia de que estas motivan a los estudiantes en su aprendizaje. Adicional a esto, se identifica que estos tienen dificultad para aumentar la dificultad del tema ya que se limitan a las nociones o conocimientos previos de los estudiantes, por lo que se les tiene que incentivar a ir más allá y realizar conexiones conceptuales.

4.1.3. Fase de inmersión

El 21 de septiembre del 2023 se acude al entorno rural para la aplicación de la planificación final, con el objetivo de que los futuros profesores identifiquen la relación entre la teoría y la práctica de las tareas planeadas. Para ello, se cuenta con la observación no participante de un grupo (cuatro futuros profesores), donde la investigadora toma el rol de profesora en el aula de clases. Debido a que la escuela rural es multigrado, se organiza un salón con los

dieciocho estudiantes de cuarto y quinto de primaria para el desarrollo de la clase. La experiencia es llevada a cabo mientras que los futuros profesores toman notas de campo sobre la puesta en práctica de las tareas planeadas. El resto del grupo de los futuros profesores realizan una feria matemática en la cancha de la institución educativa, donde desarrollan una de las tareas que planearon con los estudiantes del grado preescolar, primero, segundo y tercero (UIS, 2023).

Los registros escritos por los futuros profesores denotan características del modelo MSTK, en los componentes del conocimiento de los tópicos (KoT) y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT). En primer lugar, en el conocimiento de los tópicos o temas matemáticos (KoT) se hace referencia a las propiedades, fenomenología y aplicaciones del espacio proyectivo en la descripción del aprendizaje mediante las tareas: “En cuanto al espacio proyectivo: algunas naranjas estaban más grandes que los bananos, al igual que algunas manzanas” (Observador 1). En esta afirmación, el futuro profesor identifica el tamaño como una propiedad del espacio proyectivo, donde reconoce que al moldear las frutas más grandes o pequeñas es una forma de aplicar este concepto. Por otra parte, el observador 2 comenta que:

Además de esto se le pedía a uno de los alumnos que con su cuerpo hiciera una posición y la otra persona la imitaba tanto en acción como posición, esto ayudo a los niños a identificar si estando *modo ´espejo´* se observa de la misma manera esta acción, la mayoría de los alumnos de ambos cursos lograron identificar si el alumno que está realizando la acción estaba bien o mal en el tema de posición, después de esto la docente procede a realizar preguntas acerca del tema de *espacio proyectivo*.

En este caso, el futuro profesor reconoce la reflexión como una propiedad del espacio proyectivo, el cual se denota mediante la aplicación de posiciones corporales. Además de esta propiedad, se identifica la perspectiva como un concepto del pensamiento proyectivo. Al igual

que el observador 1, este comenta que: “se observa que algunos alumnos hacían sus figuras más grandes y otros más pequeñas, la docente procedió a explicar el por qué algunas figuras tienen distintos tamaños”, donde el tamaño es una propiedad del tema de la clase. Los otros dos observadores mencionan que el tema central de la actividad académica es el espacio proyectivo; sin embargo, no realizan definiciones, ni reconocen aplicaciones concretas del tema.

En cuanto al conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), todos los observadores comentan que la sesión de clase tuvo en cuenta la relación de los conocimientos previos con el nuevo conocimiento matemático. Esto hace parte de una teoría de enseñanza denominada “constructivismo” y en las matemáticas autores como Guirles y Ramón (2002); Muñoz (2020) afirman que el aprendizaje se construye desde las experiencias y conocimientos previos de los estudiantes, donde el profesor cumple un papel de mediador al promover la acción matemática desde la práctica autónoma. Una de las claves del trabajo constructivista en el aula de matemáticas es la “racionalidad, ajuste y renovación de contenidos matemáticos” (Guirles y Ramón, 2002, p. 116), donde se afirma que se debe promover la matemática del espacio, pues el desarrollo de la visión, orientación y representación espacial son aspectos claves para la alfabetización matemática.

Tabla 8.*Tareas de los futuros profesores en la inmersión rural*

Tarea	Ejecución	Observaciones de los futuros profesores
Tingo tingo tango	Con ayuda de un marcador rojo y azul se realiza el juego del tingo-tingo-tango entre los estudiantes. Al comienzo, los estudiantes se mostraron tímidos pero con el apoyo de los compañeros realizaron las figuras y sus imitaciones.	<i>Observador 1:</i> “Al inicio de la actividad hubo un poco de confusión a la hora de imitar la posición del compañero de clase, puesto a que lo realizaban de manera contraria, el compañero que debían imitar estaba mirando a mano izquierda y la niña miraba a la derecha en vez de la izquierda para que la imitación sea igual. Los niños fueron bastantes críticos y detallista puesto que querían que quedara totalmente perfecto, que los brazos quedaran exactos etc.” <i>Observador 2:</i> “Se le pedía a uno de los alumnos que con su cuerpo hiciera una posición y la otra persona la imitaba tanto en acción como posición, esto ayudo a los niños a identificar si estando modo ‘espejo’ se observa de la misma manera esta acción, la mayoría de alumnos de ambos cursos lograron identificar si el alumno que está realizando la acción estaba bien o mal en el tema de posición, después de esto la docente procede a realizar preguntas acerca del tema de espacio proyectivo , esto ayudo a la identificación de conocimientos previos de ambos cursos, inmediatamente la docente realizó una explicación del porque en ocasiones los alumnos realizaban la posición en forma espejo” <i>Observador 3:</i> “. En este ejercicio los estudiantes estuvieron muy comprometidos al estar al tanto del lenguaje corporal de sus otros compañeros, comparando ambas e identificando de manera detallada cada diferencia, incluso sin hacerles hincapié en que también debían tener en cuenta la posición, los estudiantes expresaban que las figuras no eran las mismas porque uno de los dos compañeros dirigía su mirada hacia otro punto; fueron tan detallistas que uno de los estudiantes comentó "no es la misma figura porque el codo no está lo suficientemente doblado", fue bastante curioso ese aporte.”
Estatuas	Los estudiantes debatieron sobre la música que querían escuchar para realizar la tarea. Luego, bailaron animados y al parar hicieron las figuras. Como todos tienden a hacer la misma	<i>Observador 1:</i> “Luego debían de bailar y cuando parara la música, los debían realizar la figura geométrica que la maestra indicada, la mayoría de los niños reconocían y lograban hacer la figura geométrica con los brazos, y buscaron múltiples maneras de realizar la figura sin embargo a la hora de hacer un rombo más o menos un 15% de los niños no sabían que figura era.” <i>Observador 2:</i> “Con esta actividad se buscaba que los alumnos identificaran que, aunque realizaran las figuras de distintas maneras los demás podían identificar la figura

	figura, se anima a que realicen propuestas diferentes y los estudiantes se animan a crear figuras con todo su cuerpo y después compararlas con sus compañeros.	desde distintas perspectivas (atrás/ adelante). Acá pude identificar que algunos alumnos captaron la idea e instrucción de manera clara y a otros les costaba un poco más” <i>Observador 3:</i> “Se observa que los estudiantes conocían a cabalidad todas las figuras propuestas por la maestra, debido a que todos las representaban de inmediato sin dificultad o duda alguna, esto produjo que se dieran representaciones o perspectivas bastante interesantes. En general, se cumplió con el propósito de la actividad y los estudiantes aportaron al correcto desarrollo de esta.”
Frutas en plastilina	El grupo se divide en dos (cuarto y quinto), en frente de cada uno se pone una mesa con frutas de diferentes tamaños. Se les pide que con la plastilina moldeen únicamente las frutas que ven desde su posición. Cuando terminan, se ponen todas las frutas y se les pregunta ¿por qué algunas se ven más grandes que otras? Y ¿por qué hay mayor cantidad de unas frutas y menor de otras?	<i>Observador 1:</i> “Dos niños resaltaron puesto que acabaron en unos 3 minutos y acertaron en la representación. Tres niños lograron captar unos detalles muy específicos: Etiqueta que tenía la manzana, bananos con las manchas cafés, la naranja con manchas verdes y amarillas, realizaron la mesa donde se encontraban las frutas, uva de color negro (ya que la percibían más negra que morada). Algunos utilizaron otros elementos como el lápiz para ponerle textura a las frutas de plastilina. Algunos niños también realizaron cosas peculiares: Manzana de color verde (ya que con la roja hicieron un corazón), bananos de color azul, hicieron uvas de más, ya que aseguraban que ahí estaban, aunque no las vieran. (vieron cuando la profe las puso). En cuanto al espacio proyectivo: Algunas naranjas estaban más grandes que los bananos, al igual que algunas manzanas” <i>Observador 2:</i> “cada alumno procedió a realizar el trabajo, se observa que algunos alumnos hacían sus figuras más grandes y otros más pequeñas, la docente procedió a explicar el por qué algunas figuras tienen distintos tamaños. Con esta actividad siento que los algunos alumnos comprendieron muy bien el tema de perspectiva y el por qué desde diferentes posiciones se observa distintos objetos, por otro lado, los alumnos de cuarto grado no identificaban el orden, la posición o el número de las frutas que veía, observe que algunos decidían hacer otras figuras y no la actividad requerida.” <i>Observador 3:</i> “Esto conllevó a que los niños comenzarán a decir diferentes cantidades de frutas, debido a su posición, de hecho, un niño dijo esa respuesta, planteando que no podían ver ciertas frutas por la manera en la que estaban ubicados” <i>Observador 4:</i> “La curiosidad por parte de los niños resaltó demasiado, al ver las frutas iniciaron con sus preguntas. La combinación de los dos grados dificulta la explicación por parte del docente, ya que se le explicó y retroalimentó primero a los de grado quinto, y al momento de realizar las mismas preguntas al grado cuarto, los estudiantes del grado

		superior las respondían, impidiendo que los del grado cuarto reconocieran y exploraran en sus saberes para responder”
Dados	Se le entrega a cada estudiante un molde de cubo para armar. Cada uno de ellos realiza automáticamente la construcción mientras la profesora habla y pregunta sobre las características de la figura. Cuando está construido, se comprueba que los números del dado están bien posicionados, por lo que se realiza la explicación de los opuestos y se comienzan a hacer sumas en el tablero.	Observador 1: “En esta los niños debían de armar un cubo, doblando y pegando las pestañas blancas hacia adentro, 2 niños comenzaron a doblar las pestañas y eso antes de dar las indicaciones, 3 niños acabaron a los 5 minutos, hubo un niño que no pudo terminar la actividad pues el tiempo no fue suficiente para él, le costó mucho trabajo.” Observador 2: “con esto ellos lograban identificar que si frente a ellos el cubo mostraba 1 del lado opuesto se debería encontrar el número 6 para, al final, sumar 7; y así sucesivamente. Con esta actividad siento que ellos afianzaron bastante el tema de manera muy sencilla y práctica.” Observador 3: “Los niños captaron muy bien en qué consistía la actividad, tanto que luego de algunos ejemplos, ellos daban la solución de forma unánime. Con esta dinámica el grupo se organizó muy bien, fueron productivos y dedicados con el desarrollo de su dado, sumado a que hubo una comprensión bastante eficaz siendo producto del compromiso, dedicación y apoyo realizado por la maestra”
Rayuela africana	Esta tarea se encuentra en la cancha del colegio. Los estudiantes salen y los futuros profesores de ese grupo dirigen la actividad. Con ayuda de la música, realizan un modelado para explicar la secuencia de los saltos. Posteriormente, los estudiantes empiezan a pasar uno por uno. Después aumenta la complejidad con más estudiantes de cada lado.	Observador 1: “En la rayuela los resultados obtenidos se esperaban pues esta actividad se producen muchas confusiones: Algunos niños se saltaban los cuadros Saltaban muy rápido y no mantenían el ritmo requerido No captaban lo que debían de hacer, en un momento de la actividad cuando se equivocaron y terminaron de frente, se iban a empujar para ver cual avanzaba en la rayuela.” Observador 2: “se llevó a los alumnos a la cancha donde se desarrollaron distintas actividades donde los niños recurrían a: Coordinación, presaberes y saberes de geometría, conocimientos directos aprendidos en la clase desarrollada momentos antes, explorar cada stand, y en cada uno de ellos realizar esas mini actividades acerca del tema que es espacio proyectivo.”

Nota: La tabla contiene la descripción de las tareas seleccionadas por los futuros profesores y los comentarios realizados por los observadores no participantes.

Otra subcategoría mencionada por los observadores son los recursos didácticos: “El material didáctico y una buena planificación son de suma esencialidad para el desarrollo de cada clase” (Observador 2). Acá el futuro profesor reconoce el papel esencial de la selección e implementación de recursos didácticos, los cuales son un factor base para la implementación de prácticas educativas significativa (Gorotiza, 2020)

Finalmente, el subdominio de las estrategias (KMT) es mencionado por los futuros profesores; no obstante, este se limita a la identificación de estrategias pedagógicas y de gestión de aula, como: la selección de la música favorita de los estudiantes, el “tingo tingo tango” y el apoyo individual y colectivo de la profesora.

4.1.4. Fase de análisis y reflexión

Para el cierre del ciclo de *Lesson Study*, se realiza una sesión de reflexión en torno a la experiencia de planeación y práctica en el entorno rural. Para ello, los futuros profesores que observaron el desarrollo de la clase socializan como se llevó a cabo cada una de las tareas; estas descripciones coinciden con las notas de campo realizadas en la inmersión (ver fase de Inmersión 4.1.2.). Posteriormente, cada grupo de futuros profesores comparte sus experiencias al tener contacto con los estudiantes de la escuela rural (Figura 13), donde califican la práctica como “increíble” ya que les ayuda a familiarizarse con el entorno de un aula real (G1, G3, G5, G6, G10) y los hizo caracterizar de mejor manera a los estudiantes y su aprendizaje, pues identifican que “a los niños les interesaban más las actividades dinámicas” (G4, G2), por lo que algunos de los futuros profesores tienen que realizar adaptaciones a las tareas aumentando o disminuyendo la complejidad de estas.

contextuales y en torno al cuerpo, es decir, no deben estar separadas de la percepción. No se puede negar que los recursos digitales son un apoyo para el proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula de clases; sin embargo, lo provechoso del campo rural es el espacio real, donde los conceptos y habilidades matemáticas como el espacio proyectivo se aterrizan al contexto sociocultural del estudiantado para convertirse en aprendizaje significativo.

Otro aspecto mencionado por los futuros profesores son “los conocimientos previos de los niños” (G2, G4, G5). Los conocimientos previos pertenecen a la teoría del constructivismo (KMT, teorías de la enseñanza de las matemáticas), donde se hace referencia a la necesidad de reconocer lo que saben los estudiantes para relacionar el aprendizaje con un nuevo saber y su contexto. Esto implica que los futuros profesores reconocen la importancia de poner al estudiante como el centro del aprendizaje, el cual tiene unos saberes experienciales que son la conexión a nuevos conocimientos.

Adicional a esto, se menciona el “respeto por el ritmo de aprendizaje” (G3), donde se describe la interacción que existe entre el estudiante, el profesor y el contenido matemático (KMT, tareas). La referencia que toma este grupo de futuros profesores es una característica de las tareas matemáticas, ya que existe una triada entre el estudiante, el profesor y la tarea (Ramos-Rodríguez et al., 2019). Esto supone que el grupo de futuros profesores tienen consciencia de que el ritmo de aprendizaje de los estudiantes implica el reconocimiento de otros factores de enseñanza.

En segundo lugar, se pregunta *¿cuáles son los desafíos conceptuales a los que se enfrentaron al momento de planear tareas matemáticas?*, donde se identifican seis categorías de respuestas. Una de ellas es la dificultad de las tareas (G1, G5, G8), donde los futuros profesores comentan que “quedamos cortas en eso y nos extendimos en actividades de seguir instrucciones

básicas” (G5). Respecto a esto, la literatura explica que para considerar una tarea significativa, debe partir de los sentidos y contenidos ya conocidos por los estudiantes, es decir los conocimientos previos, y así progresar hacia tareas que impliquen un reto, donde la dificultad aumente gradualmente (Moreno y Ramírez, 2016). Este grupo de futuros profesores reconocen que las tareas que implican la acción de “seguir instrucciones” son de un bajo nivel de exigencia, y que al realizar esto numerosas veces limitaron la dificultad del aprendizaje de los estudiantes (KMT, tareas).

Así mismo, los futuros profesores reconocen que se les dificulta tener una secuencia u orden lógico al crear tareas matemáticas (KMLS) (G1, G3, G7), pues estos facilitan la organización de la enseñanza para el profesor que puede ir “de lo macro a lo micro” (G7) (KSM). Es decir, partir de las estructuras propias de las matemáticas para llegar a conceptos particulares de esta, bien desde el conocimiento del tema (KoT) hacia la forma de enseñarlo (KSM) o realizar conexiones intraconceptuales (ir del KoT al KSM) (Liñán, 2016). El presentar las matemáticas “de lo macro a lo micro” implica que estas tienen una estructura. Esto emerge una relación entre los estándares para la enseñanza de las matemáticas (KMLS) con la estructura propia de las matemáticas. Así, los futuros profesores reconocen que la macroestructura de las matemáticas debe tomarse por partes, y que es necesario reconocer sus conexiones (KSM) (Cayo et al., 2023).

Adicional a esto, los futuros profesores manifiestan que una de las dificultades es la “evaluación del conocimiento, crear tareas auténticas y enriquecedoras para realizar de manera satisfactoria una evaluación que nos demuestre el aprendizaje de cada uno de los estudiantes” (G1). Al reconocer que existe una secuencia, donde se dificulta tener claridad sobre ese orden; también se reconoce que es complejo monitorear cada parte de la tarea (G1, G6). La evaluación y

verificación del aprendizaje es una de las características de las tareas matemáticas (KMT) ya que emiten una acción y una respuesta que puede ser evaluada (Gonzato et al., 2011).

Finalmente, un solo grupo de futuros profesores reconocen que la construcción de conceptos (KoT) es “complicado”, ya que deben retomar lo aprendido con mayor destreza para poder enseñarlo (G1). Tal afirmación reconoce la necesidad del conocimiento especializado que debe tener un profesor de matemáticas para la organización del proceso de enseñanza y aprendizaje (Liñán, 2016).

Por último, se pregunta *¿qué modificarían de la planeación final colectiva para mejorar la enseñanza y el aprendizaje del espacio proyectivo?* Los futuros profesores identifican que se deben tener en cuenta todos los niveles de dificultad “desde el más básico hasta el más complejo” (G1) para poder potenciar la comprensión del espacio proyectivo (G1, G2, G4). En relación con teorías sobre las tareas matemáticas (KMT). Esto implica un reconocimiento de los futuros profesores sobre su conocimiento especializado en las conexiones entre el tema y otros temas asociados al contenido matemático.

Otro aspecto reconocido por los futuros profesores son los recursos didácticos (KMT) (G3, G6, G9), pues afirman que estos se pueden convertir en “distractores”. Investigaciones como la de Gorotiza (2020) afirman que el uso de los recursos didácticos en matemáticas fomenta el aprendizaje, pues se tiene en cuenta factores como la motivación de los estudiantes. La incidencia de estos recursos recae en la forma en la que se llevan al aula de clases, pues en el caso de los juguetes no se juega para aprender matemáticas sino que jugando se aprende matemáticas.

Sobre este momento de análisis y reflexión de la experiencia, se puede concluir que los futuros profesores tienen en cuenta factores del MTSK asociados tanto a la enseñanza (por la

necesidad de plantear las tareas) como al aprendizaje desde el rol del estudiantado. Esto puede representar una ventaja ya que pueden prever la interacción y las emociones relacionadas con las matemáticas de un estudiante; no obstante, es necesario fortalecer el papel del rol profesoral desde el análisis conceptual de las tareas y las formas de desarrollar la enseñanza en el aula de clases.

Capítulo 5. Discusión

El modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) es un modelo que condensa la información del conocimiento especializado de un profesor para su posterior enseñanza en el aula de clases. Es así, como resulta necesario plantear interrogantes como: ¿qué elementos del conocimiento especializado del futuro profesor que enseña matemáticas se involucran al diseñar una tarea para la enseñanza del espacio proyectivo en el entorno rural?

Para esto, es necesario comprender que el modelo está compuesto por el conocimiento matemático (MK) y la forma de enseñanza (PCK). De estos dominios, subyacen subdominios de los cuales se analizan dos: el conocimiento de los tópicos (KoT) y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT). Aunque el análisis de la experiencia con los futuros profesores se centra en estas dos categorías, en la caracterización de su conocimiento especializado emergen otros subdominios que hacen énfasis en el aprendizaje de las matemáticas (KFLM), las estructuras matemáticas (KSM) y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

Con respecto al conocimiento de los tópicos (KoT), se evidencia que al comienzo del ciclo del *Lesson Study* los futuros profesores representan dos tipos de registros para el dibujo de cuerpos geométricos: ortogonal e isométrico. En cada uno de ellos, identifican propiedades geométricas básicas como el punto, la recta y el segmento. No obstante, tiene dificultades en el dibujo de los registros, bien sea por una falta de apropiación sobre teorías matemáticas como las líneas paralelas, los ángulos, los grados de inclinación o los tipos de registros que utilizan; o en contraparte, por una ausencia de instrumentos de dibujo como las escuadras, el compás y el transportador (Gutiérrez, 1998).

Para los futuros profesores, una categoría relevante en la práctica de enseñanza de las matemáticas es el dominio de las definiciones, concebidas como explicaciones claras y concisas

de los conceptos matemáticos. Se tiene la creencia de que estas deben ser enseñanzas de forma explícita y detallada antes de entrar en la práctica o ejercitación matemática. Lo anterior, obedece a una enseñanza de corte tradicional, donde la sesión de clase tiene un esquema predeterminado que acata unos roles: el profesor que tiene el conocimiento del tema, por lo que en primer momento el debe instruir a los alumnos sobre lo no conocido; y los alumnos, los cuales solo pueden poner en práctica lo explicado explícitamente por el profesor (Villamizar et al., 2012).

Al momento de comenzar la planeación, los futuros profesores identifican algunas propiedades del tema (espacio proyectivo) como las proporcionalidades; sin embargo, carecen del reconocimiento de procedimientos, es decir, no explican cómo, por qué o cuándo se desarrolla una tarea. Esto implica que los futuros profesores se limitan a la descripción del contenido matemático, pero no revisan la finalidad de este o las estrategias que pueden ser útiles para el desarrollo de la tarea (Liñán et al., 2016).

En la inmersión de campo, los futuros profesores identifican más propiedades del espacio proyectivo como lo son el tamaño, la reflexión y la perspectiva. Es posible que el ejercicio de planeación implica que los futuros profesores profundizan en el conocimiento del tema nuevamente (Liñán et al., 2016). Otra tentativa es el trabajo grupal que ofrece el ciclo del *Lesson Study*, ya que los futuros profesores tienen la oportunidad de leer y comentar otros trabajos. Esto potencializa el conocimiento que se tiene y promueve la búsqueda de nuevas relaciones del conocimiento en el tema del espacio proyectivo. Finalmente, en la fase de análisis y discusión los futuros profesores afirman que la planeación de tareas matemáticas implica un trabajo en la construcción de conceptos, pues debe existir un mayor dominio del tema por parte del profesorado para realizar conexiones con las formas de enseñanza y los conocimientos previos y posteriores a la temática (Carrillo et al., 2018). Esta reflexión resulta importante ya que los

futuros profesores comprenden la necesidad del conocimiento especializado y su relación con otros subdominios para mejorar las prácticas de enseñanza y aprendizaje.

En cuanto al conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) los futuros profesores reconocen que es necesario hacer uso de recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas, donde la selección que se hace debe tener en cuenta el contexto del estudiantado, en este caso un entorno rural. Por parte de las tareas matemáticas, los futuros profesores recalcan que es necesario hacer uso de tareas contextuales que tengan en cuenta los factores socioeconómicos de los estudiantes, sean creativas y refuercen los conocimientos previos. Hacer referencia a los conocimientos previos demuestra que los futuros profesores empiezan a concebir una teoría del aprendizaje matemático constructivista (Guirles y Ramón, 2002).

Para la fase de planeación, se inicia con la descripción de las ideas que pueden resultar en tareas matemáticas. Cada idea debe responder a un momento de la clase: inicio, desarrollo y cierre. Para el inicio, los futuros profesores presentan tareas basadas en el seguimiento de instrucciones de lateralidad, explicación de la temática o proyección de videos explicativos sobre la temática. Esto puede representar que el grupo que esté cursando los inicios de la educación profesoral tiene ideas constructivistas sobre el aprendizaje de las matemáticas; no obstante, en este momento son más fuertes las creencias tradicionales de la enseñanza apegadas a las experiencias del colegio.

Para el desarrollo, se presentan nuevas ideas como los viajes imaginarios en el espacio, collage de perspectivas, trabajo con sombras, juegos con instrucciones, construcción de figuras tridimensionales, dibujo de espacios abiertos, reconocimiento de figuras bidimensionales. Si bien no todas las ideas responden a las demandas cognitivas del momento del desarrollo; es una adecuada aproximación a la enseñanza del espacio proyectivo para este grupo de futuros

profesores, los cuales, por dinámicas curriculares, no habían concebido ideas de prácticas de enseñanza matemática en el semestre anterior. Para el cierre, se retoman ideas de socialización del tema, preguntas sobre la clase y algunos trabajos de espacio proyectivo como el trabajo con sombras o la construcción de figuras tridimensionales.

Para el momento de planear concretamente las tareas, los futuros profesores mantienen las ideas del momento de inicio. No obstante, es el momento donde más tienen en cuenta las situaciones de aprendizaje. Esta carencia de tareas innovadoras para los momentos de inicio puede estar relacionadas con la falta del conocimiento de los saberes previos de los estudiantes; pues si bien ellos reconocen que es importante tenerlo en cuenta, resulta complejo ponerlo en práctica en el desarrollo de las tareas acordes a momentos de la clase (Guirles y Ramón, 2002).

El desarrollo es el momento con mayor variedad de propuestas, pues las tareas reconocen la importancia del uso de los recursos. La mejora de las tareas en el momento del desarrollo puede estar relacionada a la concepción que tienen los futuros profesores sobre las prácticas de enseñanza. Pues en el primer semestre es posible que tuvieran experiencias con actividades concisas para enseñar algún tema como ejercicio práctico de la clase, es decir, se restringen a la cúspide del aprendizaje de los estudiantes (el desarrollo de la sesión) (Espinoza-Freire, 2018). Para el momento del cierre, los futuros profesores demuestran que tienen falencias en la verificación del aprendizaje, pues se limitan a comprobarlo por medio de preguntas de la clase o guías de trabajo (las cuales no se presentan).

En la inmersión, los futuros profesores reconocen nuevamente la importancia de tener en cuenta los conocimientos previos, asociados a la teoría del constructivismo en matemáticas. Así mismo, retoman la importancia de usar recursos didácticos, ya que en la actividad académica visualizan que motivan y facilitan la comprensión de la temática (Gorotiza, 2020).

Posteriormente, estos describen estrategias de gestión de aula como el seguimiento profesoral, el uso de la música y juegos como el “tingo tingo tango”. No obstante, no describen estrategias asociadas a la enseñanza de las matemáticas. La literatura expone que las estrategias se agrupan en tres ejes transversales: disciplinar, objeto o área específica; pedagógico, sobre la práctica docente y sociocultural, con la mirada del contexto (Espinoza-Freire, 2018). Desde esta perspectiva, los futuros profesores identifican estrategias pedagógicas y socioculturales; pero no reconocen el eje disciplinar (matemático) que tienen las tareas en el aula de clases.

Finalmente, en el momento de análisis y discusión del *Lesson Study* los futuros profesores vuelven a las notas de campo expresadas en la fase de inmersión. Estos hacen énfasis en la selección de recursos didácticos y comentan que los digitales facilitan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el tema del espacio proyectivo. Si bien es cierto que al inicio del ciclo los futuros profesores mencionaron recursos digitales como los videos, por las condiciones del contexto se reservaron a los materiales concretos. Sin embargo, al final expresan que de tener el alcance de estos recursos en los entornos rurales, las prácticas de enseñanza y aprendizaje mejorarían. Este tipo de afirmaciones pueden ser ciertas, pero se alejan del tema que se maneja en la planeación: el espacio proyectivo, el cual gana riqueza en entornos amplios y reales como los rurales.

Adicionalmente, los futuros profesores reconocen implícitamente una característica de las tareas matemáticas: la triada de aprendizaje (Ramos-Rodríguez et al., 2019). Ya que identifican que el proceso educativo tiene tres figuras principales (estudiante, profesor y contenido matemático). Asociado con este contenido, reflexionan sobre las dificultades que enfrentan al momento de planear tareas: (i) el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM), ya que manifiestan que se limitaron a tareas de reproducción por la complejidad de “ir más allá” del

contenido propuesto, (ii) la secuencia u orden lógico (Carrillo et al., 2018), tanto del contenido como de las tareas entre sí y (iii) la verificación del aprendizaje (Gonzato et al., 2011), pues si se les dificulta realizar las conexiones entre el contenido y las tareas, es aún más complejo plantear estrategias evaluativas que permitan verificar el aprendizaje a partir del tipo de respuesta que efectue la tarea matemática.

Durante todo el ciclo, se evidencia una mejora en el conocimiento del tema del espacio proyectivo (KoT) y la enseñanza de este (KMT). Se caracterizan los conocimientos que tienen los futuros profesores a lo largo del ciclo, los cuales varían según las experiencias y trabajo en equipo que desarrollan. Es necesario tener en cuenta que el grupo de futuros profesores es de segundo semestre, por lo que sus experiencias educativas han sido pocas. Sin embargo, la motivación y voluntad de los estudiantes ante este tipo de actividades permiten identificar el conocimiento especializado que tienen al comienzo de la educación profesoral.

Conclusiones

La presente investigación permite pensar las prácticas de planeación como un objeto de conocimiento en constante construcción. Acorde con el objetivo de caracterizar el conocimiento especializado del futuro profesor que enseña el espacio proyectivo en el entorno rural, se logra evidenciar que los subdominios del conocimiento de los tópicos (KoT) y el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas (KMT) están presentes desde los primeros semestres de la educación profesoral. Los cuales demuestran evolución a medida que transcurre el ciclo del *Lesson Study*. La caracterización de estos conocimientos es posible gracias a la planeación de tareas para la enseñanza de las matemáticas; que tienen unas características asociadas al contexto, los conocimientos previos, los objetivos, el contenido matemático y las situaciones de aprendizaje. Lo anterior permite un acercamiento a procesos de enseñanza y aprendizaje reales, que parten de una observación, implican una planeación, pasan por una inmersión y finalizan en un balance sobre la experiencia, reflexionando sobre las dificultades y posibles adaptaciones que pueden tener las tareas.

La metodología del *Lesson Study* resulta favorable para el estudio, ya que se caracteriza por ser un proceso de aprendizaje colectivo, que potencializa los conocimientos que tienen los futuros profesores para su aplicación en el campo de la enseñanza. Así mismo, este ciclo permite un acercamiento desde los primeros semestres a las nociones de planeación y didáctica basados en la reflexión, lo cual es un elemento importante para la formación de profesores de básica primaria; pues al ser los años donde se construye la base de la formación integral en los niños, el trabajo colaborativo entre pares docentes y la evaluación de sus mismas prácticas de enseñanza resulta significativo para la mejora educativa.

El acercamiento a la planeación es necesario desde el conocimiento de contextos reales. En este caso, la ruralidad es un entorno muy abundante en Colombia; por lo que la misma

formación de profesores debe reconocer la diversidad del campo e identificar cuáles son las principales diferencias con el entorno urbano. La experiencia con los futuros profesores de básica primaria demuestra que el reconocimiento del contexto es directamente proporcional a la mejora de la calidad de la enseñanza, ya que se pueden identificar los obstáculos y desafíos del entorno, para así proponer soluciones efectivas para solventarlos.

Para poder llegar a estas soluciones, es necesario que los profesores sean competentes, tanto en el campo disciplinar (MK) como didáctico (PCK). El equilibrio entre un profundo conocimiento del tema con la habilidad de enseñarlo adecuadamente a los estudiantes es esencial para promover un aprendizaje matemáticamente significativo. Estas destrezas son la base del diseño de tareas para la enseñanza de las matemáticas adecuadas para la diversidad de contextos institucionales. Así como la adaptación de las prácticas de enseñanza según las necesidades del estudiantado.

Este estudio abre la posibilidad de abarcar nuevos espacios para la caracterización del conocimiento especializado a través de ciclos de *Lesson Study*, ya que el reconocimiento de los logros estudiantiles es el punto de partida para la reflexión sobre las propuestas de estudio de los programas de Licenciatura. Este tipo de investigaciones tiene diversos caminos para profundizar en el campo, ya sea con futuros profesores que ya han cursado actividades académicas de didácticas, profesores en formación continua que tienen conocimiento de otros campos educativos, el dominio de estrategias pedagógicas, la exploración de otras características de las tareas propuestas en entornos urbanos en contraste con los rurales y/o ciclos de *Lesson Study* temporalmente más extensos.

Referencias bibliográficas

- Acevedo-Rincón, J. (2018). Professional teacher learning of the mathematics prospective teacher situated in an interdisciplinary prospective teacher course (Doctoral dissertation) University of Campinas, Campinas (Br).
- Acevedo-Rincón (2020, March). Relevance of the mathematics teacher's specialized knowledge model in the planning and interpretation processes at spatial thinking. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1514, No. 1, p. 012019). IOP Publishing.
- Acevedo-Rincón, J., y Fiorentini, D. (2017). A 'Glocal' Lesson Study: the case of pedagogical practices in mathematics. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 7(2), 24-44.
- Acevedo-Rincón, J. P., y Guarneri de Campos Tebet, G. (2022). Spaces, movements and topological notions, what do the babies' cartographies show?. *The Mathematics Enthusiast*, 19(2), 470-500.
- Acevedo-Rincón, J., y Ramos-Rodríguez, E. (2022). Fundamental Theorem of Calculus: Cognitive Demands and Learning Limitations on Mathematical Tasks. *Acta Scientiae*. 24. 4-34. 10.17648/acta.scientiae.7099.
- Aguilar, J. (2008). La geometría: de las ideas del espacio. *Investigación educativa*, 12(21), 171-180.
- Ahmed, Y. M. (2011). Aprendizaje de las matemáticas. *Revista digital para profesionales de la enseñanza*, 8, 14
- Almodóvar, A. y García, P. (2009). *Matemáticas 5: Primaria*. Madrid. Santillana.
- Ausubel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF*, 1(1-10), 1-10.
- Barboza, J. A., y Zapata, H. A. (2013). El estudio de clase, estrategia y escenario para la cualificación del profesor de matemáticas. *Formación universitaria*, 6(4), 49-62.

- Barrera, V., Infante, J. M. I., y García, M. D. M. L. (2013). Conocimiento matemático común en geometría de los estudiantes para maestro: una propuesta de innovación. *EA, Escuela Abierta*, 16, 11-33.
- Basto Quintero, A y Triana Cometa, M. (2018). *Propuesta didáctica para el fortalecimiento de habilidades del pensamiento espacial y sistema geométrico a través de educación artística en estudiantes de grado quinto de la Institución Quebradón Sur del Municipio de Algeciras Huila*.
- Boule, F. (2005). *Reflexiones sobre la geometría y su enseñanza*. Uribe y Ferrari Editores.
- Burns, M. (1998) *Math: Facing and American Phobia*. Sausalito, CA: Math Solutions Publications
- Carpenter, T., y Fennema, E. (1992). Cognitively guided instruction: Building on the knowledge of students and teachers. *International Journal of Research in Education*, 17, 457-470.
- Castro, E. D. (2001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Síntesis.
- Castro, J. (2004). El desarrollo de la noción de espacio en el niño de Educación Inicial. *Revista Acción Pedagógica*, 13(2), 162-170.
- Cayo, H., Codes, M., y Contreras, L. C. (2023). A mathematics teacher's specialized knowledge in the selection and deployment of examples for teaching sequences. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-20.
- Clements, D. H., y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 420, 464.
- Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. *Del saber sabio al saber enseñado*, 3.
- Cochram-Smith, M.; Lytle, S. (1999). *Relationships of Knowledge and Practice: Teacher Learning in Communities*, 24, 249-305.

- Davis, B. y Grupo de Estudio de Razonamiento Espacial. (2015). *Razonamiento espacial en los primeros años: Principios, afirmaciones y especulaciones*. Routledge.
- De Faria, E. (2008). Creencias y matemáticas. *Cuadernos*, 4, 9-27.
- Dienes, Z., y Golding, E. (1967). *Geometría a Través de las Transformaciones: topología /geometría proyectiva y afín*. Teide.
- Espantoso, F., Fernández, J., y Olave, M. (2021). Planificación y análisis colaborativos de una clase de matemática para la formación en geometría de futuros maestros y profesores de matemática. Un ciclo de Lesson Study.
- Espinoza-Freire, E. E. (2018). La planeación interdisciplinar en la formación del profesional en educación. *Maestro y Sociedad*, 15(1), 77-91.
- Fernández, C., y Yoshida, M. (2004). Lesson study: A case of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development. Mahwah: Lawrence Erlbaum.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, 24(2), 139-162.
- Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. Fundación Paideia Galiza
- Flores, E., Escudero, D., Montes, M., Aguilar, A., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. Publisher Universidad de Huelva Publicaciones, 57 -72
- Flores, J. G., Gómez, G. R., Jiménez, E. G. (1999). Metodología de la investigación cualitativa. Aljibe.
- García, M., Villegas, M., y Gonzales, F. (2015). La noción del espacio en la primera infancia: un análisis desde los dibujos infantiles. *Revista Paradigma*, 36(2), 225-245.
- Giné Esparbé, N. (2004). La evaluación sumativa. *Aula de innovación educativa*.

Gómez, V. M. (2010). Una visión crítica sobre la Escuela Nueva de Colombia. *Revista Educación Y Pedagogía*, 7(14-15), 280–306.

<https://revistas.udea.edu.co/index.php/revistaeyp/article/view/5592>

González, M. (1987). El taller de los talleres. Siglo XXI Editores, S.A., México

Gonzato, M., Fernández, M., y Díaz, J. J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 99-117.

Gorotiza Alava, L. M. (2020). *Incidencia de los recursos didácticos en el aprendizaje de la matemática* (Bachelor's thesis, UNIVERSIDAD DE GUAYAQUIL: Facultad de Filosofía, Letras Y Ciencias De La Educación).

Grimsæth, G. y Hallas, B. Lesson study model: The challenge of transforming a global idea into local practice. *Policy Futures in Education*, 2015, 14(1), 1–14.

Guirles, J. R. G., y Ramón, J. (2002). El constructivismo y las matemáticas. *Sigma: Revista de Matemáticas, Vitoria*, 2, 113-129

Gutiérrez, A. (1991, July). Procesos y habilidades en visualización espacial. En *Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación Matemática: Geometría* (pp. 44-59).

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista Ema*, 3(3), 193-220.

Gysin, L., y Fernández, G. (2012). Una propuesta para enseñar geometría proyectiva en la formación de profesores de matemática. *Revista de Educación Matemática* (25), 1-10.
<https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM>

Hernández, F., y Lizarde, E. (2016). Caracterización del MTSK de los docentes en formación: aproximación desde sus concepciones sobre el KFLM y el KMLS.

- Hidalgo Alonso, S., Maroto Sáez, A., y Palacios Picos, A. (2015). Una aproximación al sistema de creencias matemáticas en futuros maestros. *Educación matemática*, 27(1), 65-90.
- Huerta, V., y Estrella, S. (2014). Implementación de la geometría topológica en aula de nivel inicial con estudiantes en formación mediante un estudio de clases. *RECHIM. Revista Chilena de Educación Matemática*, 8(1), 115-121.
- Lewis, C., y Tsuchida, I. (1998). A lesson is like a swiftly flowing river: Research lessons and the improvement of Japanese education. *American Educator*, 14 (17) 50–52.
- Liñán, M. (2017). Conocimiento especializado en Geometría en un aula de 5° de primaria. Universidad de Huelva, Departamento de Didácticas Integradas.
- Liñán, M. M., Contreras, L. C., y Barrera, V. (2016). Conocimiento de los temas (KoT). *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva*, 12-20.
- Liñán García, M. M. y Contreras González, L. C. (2013). Debilidades y Fortalezas en el Conocimiento de los Temas Matemáticos en Geometría de los Estudiantes para Maestro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 337-344). Bilbao: SEIEM.
- Marín, C. P. M. (2013). Estrategias metodológicas para la enseñanza de la ubicación espacial, teniendo como base las fases de enseñanza propuestas por Van Hiele (Doctoral dissertation, Universidad Tecnológica de Pereira. Facultad de Ciencias de la Educación. Licenciatura en Pedagogía Infantil).
- Marmolejo, G.; Blanco, H. y Fernández, E. (2009). El estudio de clase y la formación de licenciados en matemáticas en la Universidad de Nariño. En: Estudio de Clase: Una

- experiencia en Colombia para el mejoramiento de las prácticas educativas. Ministerio de Educación Nacional de Colombia. p. 93 - 104
- Martínez, M. (1999) La investigación cualitativa etnográfica en educación. Editorial: Trillas. México
- Martínez-Ravelo, P., Y Acevedo-Rincón, J. (2019). Algunas nociones de medición de longitudes en los años iniciales en un ciclo de Lesson Study. *Educere Et Educare*, 14(32). 10-17.
- Mazo, L. (2017). El pensamiento espacial en el contexto rural. (Tesis de pregrado. Universidad Cooperativa de Colombia. Licenciatura en Matemáticas e Informática)
- Mellado, M., y Chaucono, J. (2015). Creencias Pedagógicas del Profesorado de una Escuela Rural en el Contexto Mapuche. *Actualidades Investigativas en Educación*, 15(3), 316-334. http://www.scielo.sa.cr/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1409-47032015000300316&lng=en&lng=es
- Mendías, J., Alex, I., y Espigares, A. (2011). Exploración de la ansiedad hacia las matemáticas en los futuros maestros de educación primaria. *Profesorado. Revista de currículum y formación de profesorado*, 15(3), 297-312. <https://www.redalyc.org/pdf/567/56722230018.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. <https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-89869.html>
- Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M. y Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula,

- conocimiento y competencia profesional (pp. 157-176). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.
- Morales, A. G. (2003). Los paradigmas de investigación en las ciencias sociales. *Islas*, (138), 125-135.
- Moreno, A., y Ramírez, R. (2016). Variables de las funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico., y A. Moreno (Eds.). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 243-258). Pirámide.
- Muñoz, O. E. B. (2020). El constructivismo: modelo pedagógico para la enseñanza de las matemáticas. *Revista EDUCARE-UPEL-IPB-Segunda Nueva Etapa 2.0*, 24(3), 488-502.
- Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual Overview of Lesson Study. In: Hart, L., Alston, A., Murata, A. (eds) *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education*. Springer, Dordrecht.
- Murata, A. y Takahashi, A. (2002). District-level lesson study: How Japanese teachers improve their teaching of elementary mathematics. Paper presented at a research pre-session of the annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Las Vegas, NV, USA
- Ochaíta, E. (1983). La teoría de Piaget sobre el desarrollo del conocimiento espacial. *Estudios de Psicología*, 4(14-15), 93-108.
- Oliva, Y. A., y Labrada, G. C. G. (2013). El proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría y su dinámica en la escuela primaria multigrado. *Didascalía: didáctica y educación*, 4(4), 95-110.
- Ortiz, A. y Sandoval, I. (2018). Representaciones de cuerpos geométricos: Una experiencia con profesores de primaria de Latinoamérica. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-

- Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 427-436). Gijón: SEIEM.
- Padilla-Escorcia, I., y Acevedo – Rincón, J. (2020). El Conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas: Mediaciones con TIC para las funciones trigonométricas. *Série Educar Matemática*, 43, 109 – 118. DOI: 10.36 229/978- 65-86127-63-8
- Piaget, J. (1950). *The Psychology of Intelligence*. Routledge
- Piaget, J., e Inhelder, B. (1956). *The child's conception of space*. Routledge.
- Pittalis, M., Mousoulides, N., y Christou, C. (2009, July). Level of sophistication in representing 3D shapes. In *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 385-392).
- Ponce, V. (2017). Estudio de Clases: Una propuesta didáctica para la enseñanza del área de superficies planas rectangulares, basado en la teoría Modos de pensamiento (tesis maestría).
- Ramos-Rodríguez, E., Valenzuela, M., y Flores, P. (2019). El análisis didáctico como herramienta en la formación inicial y continua de profesores de matemáticas. In: Olfo, R., Ramos, E., y Zakaryan, D. (Eds.), *Formación de profesores: Aportes a la práctica docente desde la Didáctica de la Matemática* (p. 51-100). Graó.
- Riessman, C.K. (2008). *Narrative methods for the human sciences*. Sage.
- Rojas, N., Santana, O., Pérez, M. F., y Parra, S. (2021). Perspectiva isométrica. *Universidad de los Andes*.
- Rubio, F. (2001). *La enseñanza de la geometría en la Educación Primaria*. In *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas*. Subdirección General de Información y Publicaciones.

- Quintero, S. E. U., & de Sá, E. F. (2018). Escuela Nueva colombiana: análisis de sus guías de aprendizaje. *Acta Scientiarum. Education*, 40(3).
- Sampieri, R. H. (2018). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw Hill México.
- Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. American Educational Research Association, 4 – 14
- Smith, M. S., y Stein, M. K. (1998). Reflections on practice: Selecting and creating mathematical tasks: *From research to practice. Mathematics teaching in the middle school*, 3(5), 344-350.
- Universidad Industrial de Santander [UIS]. (2023, 28 de septiembre). *UIS impulsa iniciativa para motivar la vocación por las matemáticas*. <https://comunicaciones.uis.edu.co/uis-impulsa-iniciativa-para-motivar-la-vocacion-por-las-matematicas/>
- Urón, F. U., Paz Montes, L. S., y Vergel Ortega, M. (2021). Método del aula invertida utilizando la mascota, en la escuela rural. *Revista Boletín Redipe*, 10(3), 119-129.
- Utamura, GZ y Curi, E. (2016). Aprendizagens dos alunos no âmbito do projeto docência compartilhada e de estudos de aula (lesson study): um trabalho com as figuras geométricas espaciais no 5º ano. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 18 (2).
- Varela, F., Thompson, E. y Rosch, E. (1991). *La mente encarnada: ciencia cognitiva y experiencia humana*. Prensa del MIT.
- Villamizar, N. L. H., Velandia, W. M., y Jaimes, S. P. (2012). Revisión teórica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista virtual universidad católica del norte*, (35), 254-287.

Villar, R. (2010). El programa Escuela Nueva en Colombia. *Revista Educación Y Pedagogía*, 7(14-15), 357–382. <https://revistas.udea.edu.co/index.php/revistaeyp/article/view/5596>

Yin, R. K. Case Study Research: Design and Methods. Bervely Hills-California: Sage, 1984.

Anexos

Anexo 1. TME G1

Grupo de grados	Cuarto y quinto		
Profesores:	Grupo 1		
Tiempo total:	2 a 3 horas		
Nombre de la sesión:	Conociendo mi entorno	Contexto de la unidad:	Identificación Espacial
Descripción del escenario	El desarrollo de cada actividad se llevará a cabo en escenarios dentro y fuera del aula de clase, los cuales permitirán que los niños expandan su conocimiento y punto de vista a través del material didáctico e infográfico, dándoles de esta manera la oportunidad de analizar, comprender y cuestionar cada detalle que vayan descubriendo antes, durante o después de la dinámica, fomentando a la creación de un ambiente respetuoso, colaborativo y participativo.		
Rol(es) del estudiante:	Piratas y artistas	Materiales:	Video cámara, micrófonos, guía de trabajo, hojas de papel, colores, lápiz, cinta de colores.
Estándares involucrados:		Propósito general:	Fomentar el desarrollo cognitivo y creativo de los niños de cuarto y quinto grado mediante una introducción LÚDICA al concepto de espacio proyectivo. Para lograrlo,

			el docente debe generar interés utilizando elementos visuales y actividades estimulantes, simplificar el concepto adaptándolo a su nivel de comprensión, fomentar la exploración a través de actividades prácticas, promover la creatividad mediante dibujos y juegos, estimular la colaboración entre los niños, realizar evaluaciones formativas, ser inclusivo, relacionar el concepto con la vida cotidiana, inspirar la curiosidad y cultivar una actitud positiva hacia las matemáticas, asegurando así un ambiente de aprendizaje enriquecedor y motivador.
MOMENTO 1: INICIO			

Busca motivar y relacionar a los estudiantes con los aprendizajes de la sesión a través de los conocimientos previos. Para ello, se plantean tareas que permitan la detección de ideas, por lo que deben ser sencillas y relacionadas con el contexto de los estudiantes.			
Pregunta orientadora:	¿Cómo relacionar el entorno rural con el espacio proyectivo?		
Objetivos de aprendizaje:	Entrar en confianza y reconocer los saberes previos de los niños sobre el espacio proyectivo.		
Tiempo estimado:	35 -40 minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
Para iniciar la sesión los docentes saludan, dicen sus nombres, edad, de donde son y qué esperan de la clase. Luego abordaremos sus conocimientos previos y haremos una actividad lúdica en la cual van a trabajar su coordinación espacial (arriba, abajo, derecha e izquierda. Si un estudiante se equivoca en un movimiento, tendrá que presentarse	Si digo arriba, abajo, derecha e izquierda ¿a dónde se mueven sus brazos?	Comprensión total de las órdenes dadas en el movimiento de la parte del cuerpo	De recurso de apoyo se llevará una cinta de color rojo para que los estudiantes que tengan problemas al diferenciar la derecha de la izquierda.
		Comprensión media: confusión de la secuencia del movimiento; confunden derecha con izquierda.	

ante todo el grupo (nombre completo, edad, grado, que le gusta de la matemática y que no le gusta).		Comprensión nula: no logran articular los movimientos según la secuencia dada, no participan.	
MOMENTO 2: DESARROLLO Fomenta el cuestionamiento y el aprendizaje de un nuevo conocimiento matemático a partir de los conocimientos previos de la tarea anterior. Se busca la autorregulación del aprendizaje de los estudiantes por medio de tareas con mayor dificultad, que impliquen una interpretación y relación de conocimientos.			
Pregunta orientadora:	¿Qué es perspectiva y cómo se podría relacionar con el mundo real?		
Objetivos de aprendizaje:	Reconocer el concepto de perspectiva junto con su aplicación en el entorno.		
Tiempo estimado:	90 minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
Los docentes iniciarán realizando una serie de preguntas al azar acerca del tema. Luego de esto, se explicará a mayor cabalidad la temática, la cual estará respaldada presentando por un material visual de apoyo (infografía).	• ¿Qué es lo primero que piensan cuando escuchan la palabra "perspectiva"? • ¿Habían escuchado antes esta palabra? De ser así, ¿en dónde la escucharon?	Conocimiento alto: Comprenden el concepto, identifican los escenarios y momentos en los cuales se presentan casos de perspectivas.	Los docentes tendrán como herramienta fundamental la infografía, basándose en ella para resolver las dudas que se van dando durante la explicación, esto con el fin de afianzar conocimientos previos y motivar hacia el desarrollo de nuevos.

	• ¿Creen que la perspectiva es algo real o inventado?	Conocimiento básico: Reconocen la temática, pero llegan a presentarse inconsistencias a la hora de dar una definición.	
		Conocimiento bajo: Desconocimiento total hacia el tema, siendo algo nuevo para ellos.	
Los docentes proceden a separar el grupo en 4 subgrupos, dándoles un distintivo que determinará su grupo haciendo uso de una cinta de color en sus muñecas. Se procederá a sacar a los alumnos a la cancha, en donde se les explicará en qué consiste la actividad. A cada grupo se le dará un apoyo visual, el cual será un mapa del tesoro	• ¿Se les hizo difícil ubicarse dentro de los puntos cardinales? • ¿Por qué creen que sus compañeros dibujaron algo diferente a lo que ustedes hicieron, sí es un solo objeto?	Desarrollo total: Los alumnos entienden instrucciones y se ubican con ayuda de los puntos cardinales.	Con la ayuda de las indicaciones de los docentes y del mapa dado, los estudiantes comprenden su espacio junto con la existencia de distintas perspectivas originadas a partir de un solo objeto.
		Desarrollo medio: Los alumnos entienden las instrucciones, pero se confunden al hacer uso de los puntos cardinales.	

que cuenta con los puntos cardinales e instrucciones, que los guiará hacia el "tesoro". Cuando lleguen a este punto, se encontrarán con cuatro cubos que estarán identificados por el mismo color del distintivo al cual pertenecen. Finalmente, los alumnos regresarán con su respectivo cubo, se sentarán en círculo y lo ubicarán en la mitad, procediendo a dibujar cada respectiva vista por todos sus integrantes.		Desarrollo nulo: Los alumnos no entienden las instrucciones y se les dificulta notoriamente ubicarse con los puntos cardinales.	
MOMENTO 3: CIERRE Realiza una síntesis y estructuración del conocimiento matemático trabajado. Se proponen tareas que permitan identificar el aprendizaje de los estudiantes donde realicen la justificación de los resultados.			
Pregunta orientadora:	¿Qué aprendí y cómo lo aplico?		

con actividades respecto al espacio proyectivo relacionándolo con su entorno.		No logran relacionar la temática vista con su entorno.	
---	--	--	--

Anexo 2. TME G2

Grupo de grados	Cuarto y quinto		
Profesores:	Grupo 2		
Tiempo total:	3 horas		
Nombre de la sesión:	¡Somos artistas!	Contexto de la unidad:	Manifestaciones artísticas
Descripción del escenario	En el arte rural, a lo largo de la historia, los artistas han intentado capturar la belleza y la perspectiva de la naturaleza que los rodea. Nuestro entorno circundante se encuentra rodeado de proyecciones que pueden ayudar a construir habilidades y desarrollar las matemáticas con los niños en la educación básica primaria. En esta sesión, los estudiantes explorarán todo un mundo ilustrativo, tomando una perspectiva como artistas donde utilizarán diferentes técnicas y formas con el fin de plasmar paisajes pintorescos y representaciones de su entorno.		
Rol(es) del estudiante:	Artistas y exploradores	Materiales:	-Fotografías impresas de la cancha, los salones, las montañas... -Dibujo artístico sin perspectiva -Dibujo artístico con perspectiva -Cartulina -Tijeras -Pegamento -Imágenes de animales, montañas, cancha, árboles, cercas y elementos similares, impresas en tamaños diferentes cada imagen.

Estándares involucrados:	Utilizo sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales. Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades. Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.	Propósito general:	Los estudiantes comprenden y aplican el concepto de perspectiva y espacio proyectivo a través de la creación artística, la historia del arte y la convivencia con su entorno rural.
MOMENTO 1: INICIO Busca motivar y relacionar a los estudiantes con los aprendizajes de la sesión a través de los conocimientos previos. Para ello, Utiliza material visual como imágenes de arte, fotografías y mapas para introducir conceptos de punto de fuga y perspectiva. Los estudiantes pueden analizar cómo los objetos se ven más pequeños a medida que se alejan y cómo las líneas convergen			
Pregunta orientadora:	¿Cómo crees que la forma en que vemos las carreteras, caminos y objetos en tu entorno rural todos los días se relaciona con la manera en que los artistas crean la ilusión de profundidad en sus pinturas y cómo los objetos cambian a medida que se alejan en la perspectiva?		
Objetivos de aprendizaje:	Motivar a los estudiantes y promover los conceptos previos con respecto al espacio proyectivo con el fin de relacionar los conceptos de punto de fuga y perspectiva utilizando material visual relacionado con el entorno rural.		
Tiempo estimado:	Cincuenta minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación

Para iniciar la sesión la docente saluda y se presenta con los estudiantes. Comenta que la sesión de hoy está dirigida hacia las diferentes perspectivas dentro de la pintura y el arte. Para comenzar hablará de cómo los artistas han intentado capturar la belleza y la perspectiva de la naturaleza que los rodea creando paisajes pintorescos y representaciones de su	¿Qué es un paisaje rural y qué elementos pueden encontrar en él? ¿Por qué creen que es importante aprender a dibujar un paisaje rural? ¿Qué observaron en su dibujo que les hizo pensar en la profundidad y la distancia en el paisaje? ¿Recuerdan lo que significa “líneas en el infinito” en el espacio proyectivo?	Un paisaje rural es un lugar en el campo donde hay naturaleza, como árboles, montañas, animales, y a menudo granjas. También puede haber caminos, cercas, y casas pequeñas. Aprender a dibujar un paisaje rural nos ayuda a expresar lo que vemos en la naturaleza y a mostrar cómo cambian las cosas a medida que nos alejamos.	A lo largo de esta secuencia didáctica, nuestro principal objetivo ha sido proporcionar a los estudiantes de tercer grado en el colegio rural una comprensión sólida de la perspectiva en el arte. A través de actividades creativas y observación reflexiva, los estudiantes han aprendido cómo representar la profundidad y la distancia en un paisaje rural utilizando el concepto de espacio proyectivo. Además de desarrollar sus habilidades técnicas, hemos buscado cultivar su aprecio por el arte y su entorno rural,
---	---	--	---

entorno, presentando aleatoriamente imágenes y pinturas El docente Instruye a los participantes para que dibujen un paisaje rural simple que incluya un camino o una cerca que se extienda hacia el horizonte y anima a los participantes a observar cómo las líneas en la naturaleza parecen converger en la distancia y cómo los objetos se vuelven más pequeños a medida que se alejan. El docente proporciona hojas de papel grandes y colores vibrantes como pasteles o acuarelas y pide a los participantes que elijan un punto central en su papel y dibujen líneas que se alejen en diferentes direcciones desde ese punto, a partir de esto, les animará a experimentar con líneas rectas, curvas y diferentes ángulos en sus	¿Qué creen que pasaría si dibujáramos un camino en nuestro dibujo rural sin preocuparnos por hacerlo más pequeño a medida que se aleja? ¿Se vería realista? ¿Por qué creen que los artistas usan las “líneas en el infinito” en sus pinturas? ¿Qué efecto pueden lograr con esto?	Observamos que las líneas, como el camino o la cerca, se vuelven más pequeñas a medida que se alejan y parecen unirse en un punto lejano. Sí, las “líneas en el infinito” son líneas que se alejan en diferentes direcciones pero parecen encontrarse en un punto muy lejano, como si fueran infinitas. Si dibujáramos el camino igual de grande en todo el dibujo, no se vería realista. Parecería que el camino es muy ancho en el horizonte, y eso no es cómo se ve en la vida real. Los artistas usan las "líneas en el infinito" para hacer que sus pinturas se vean más realistas y como si tuvieran profundidad. Pueden hacer que sintamos que estamos dentro de la pintura, como si pudiéramos caminar hacia donde se encuentran esas líneas.	promoviendo la creatividad y el intercambio de ideas.
---	---	--	--

creaciones y luego explica que, en el espacio proyectivo, todas estas líneas se encuentran en un punto lejano que se puede considerar como el "infinito" en la geometría. Cuando todos hayan completado sus obras con líneas en el infinito, colocaran sus trabajos en un área común para que todos puedan apreciar cómo las líneas convergen en diferentes direcciones			
---	--	--	--

MOMENTO 2: DESARROLLO

Fomenta el cuestionamiento y el aprendizaje de un nuevo conocimiento matemático a partir de los conocimientos previos de la tarea anterior. Se busca la autorregulación del aprendizaje de los estudiantes por medio de tareas con mayor dificultad, que impliquen una interpretación y relación de conocimientos.

Pregunta orientadora:	¿Cómo podemos despertar el interés de los estudiantes y aprovechar sus conocimientos previos, y de su entorno para explicar de manera creativa y enriquecedora el concepto de espacio proyectivo con respecto a su perspectiva?		
Objetivos de aprendizaje:	Comprender y aplicar el concepto de perspectiva en un contexto rural, utilizando la técnica de collage para representar la profundidad y distancia en las imágenes.		
Tiempo estimado:	Noventa minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
Los profesores comienzan explicando a los estudiantes que van a explorar cómo representamos la profundidad y la distancia en el arte, específicamente en el contexto de su entorno rural, entonces los llevan a la cancha para que se ubiquen en diferentes puntos y tengan algunas perspectivas. Se entrega a cada estudiante una fotografía impresa de un paisaje rural, como un camino, una cerca o una vista panorámica de la	¿Qué significa la palabra "perspectiva"? ¿Alguien puede dar una definición simple?	Comprensión Total: El estudiante tiene la capacidad de explicar el concepto, dando un ejemplo y asociándolo con su día a día.	Los profesores se encargan de finalizar el tema recalcando el concepto de perspectiva por medio de un lenguaje formal: Cuando los objetos están cerca de nosotros, parecen más grandes, y cuando están lejos, parecen más pequeños. Explicando esto mediante un dibujo en el tablero de un camino que se aleja a la distancia.
		Comprensión media: El estudiante reconoce el concepto de distancia, pero no puede describir sus características ni dar ejemplos.	

zona, acorde a los puntos destinados donde los estudiantes miraran. Se les indica a los estudiantes que deben observar detenidamente la imagen y seleccionar elementos que puedan recortar para su collage. Estos elementos deben variar en tamaño y estar dispuestos de manera que parezcan alejarse en la distancia. Los estudiantes deben usar tijeras para recortar los elementos seleccionados de la imagen y luego pegarlos en un papel en el orden que elijan. Se deben tener en cuenta que los elementos más cercanos deben ubicarse en la parte frontal del collage y los elementos más lejanos en la parte trasera. En el transcurso de la actividad los profesores fomentan el dialogo entre los estudiantes sobre cómo están aplicando el concepto de perspectiva en sus collages. Después		Comprensión Nula: El estudiante no tiene conocimiento sobre el concepto de perspectiva.	
---	--	--	--

de que los estudiantes hayan completado sus collages, los profesores explican cómo esta técnica de representación se relaciona con la idea de espacio proyectivo.			
MOMENTO 3: CIERRE Realiza una síntesis y estructuración del conocimiento matemático trabajado. Se proponen tareas que permitan identificar el aprendizaje de los estudiantes donde realicen la justificación de los resultados.			
Pregunta orientadora:	¿Cómo podemos utilizar la perspectiva para crear profundidad y distancia?		
Objetivos de aprendizaje:	Destacar cómo las líneas de los caminos convergen en un punto lejano en el horizonte y que a través de la perspectiva podemos crear profundidad y distancia en una pintura o dibujo.		
Tiempo estimado:	Cuarenta minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación

Es el momento de la última actividad artística: el dibujo. Los profesores mostraran dibujos artísticos con perspectiva y sin perspectiva mientras se les explica a los estudiantes la diferencia. Ahora, es momento de poner en práctica lo aprendido. Los profesores guían a los estudiantes a que realicen un dibujo artístico de una carretera que se aleja en la distancia, aclarando que debemos utilizar líneas convergentes hacia un punto de fuga y hacer que los objetos más lejanos sean más pequeños que los cercanos.	¿Se ven iguales los dos dibujos? ¿Qué diferencia ven entre los dos dibujos? ¿Cuál dibujo tiene perspectiva y profundidad? ¿Las dos líneas de la carretera tendrán la misma distancia entre sí? ¿Qué se les dificultó al hacer el dibujo de la carretera?	Comprensión total: El estudiante reconoce y plasma en un dibujo como las líneas convergen en un punto lejano del horizonte y como se puede crear distancia y profundidad a través de la perspectiva. Comprensión media: El estudiante reconoce como las líneas convergen en un punto lejano del horizonte y como se puede crear distancia y profundidad a través de la perspectiva, pero no lo puede plasmar en un dibujo.	Los profesores explican cómo podemos crear la ilusión de profundidad y tridimensionalidad en una superficie bidimensional. Los profesores están atentos ante las preguntas que puedan surgir de los estudiantes con respecto a cómo realizar el dibujo.
--	---	--	---

		Comprensión nula: El estudiante no comprende los conceptos y no sabe cómo crear distancia y profundidad a través de la perspectiva.	
--	--	---	--

Anexo 3. TME G3

Grupo de grados	Cuarto y quinto		
Profesora:	Grupo 3		
Tiempo total:	2 h 30 minutos		
Nombre de la sesión:	Perspectivas en armonía.	Contexto de la unidad:	Concepto de proyecciones, enfocado en las sombras.
Descripción del escenario	En este escenario de estudio y experimentación, en el cual las sombras adquieren un papel protagónico en una travesía emocionante, los alumnos se sumergirán en el apasionante universo de las proyecciones, explorando de qué manera las figuras geométricas sufren variaciones bajo la influencia de la interacción lumínica y visual. En este entorno creamos las condiciones ideales para promover la cohesión grupal.		
Rol(es) del estudiante:	Exploradores y creadores.	Materiales:	7 linternas, 7 maracas, un paquete de bolsas negras de basura, marcadores, fichas de arma todo, impresiones, cinta negra, tijeras, lápices, borradores, reglas, colores y hojas blancas.
Estándares involucrados:	Utilizo sistemas de coordenadas para especificar localizaciones	Propósito general:	Los estudiantes desarrollarán su comprensión acerca de cómo representar objetos en dos y tres dimensiones de manera precisa y creativa. A

	y describir relaciones espaciales. Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades. Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.		través de actividades prácticas y participativas, se busca estimular su pensamiento espacial y el desarrollo de habilidades visuales, al mismo tiempo que se promueve la colaboración grupal y la apreciación de las aplicaciones de la geometría en la vida cotidiana y en diversas disciplinas.
MOMENTO 1: INICIO Busca motivar y relacionar a los estudiantes con los aprendizajes de la sesión a través de los conocimientos previos. Para ello, se plantean tareas que permitan la detección de ideas, por lo que deben ser sencillas y relacionadas con el contexto de los estudiantes.			
Pregunta orientadora:	¿Cuáles son los conocimientos previos de ubicación espacial de los estudiantes al momento de realizar la actividad?		
Objetivos de aprendizaje:	Incentivar en los estudiantes el conocimiento sobre el espacio topológico con respecto a sus cuerpos.		
Tiempo estimado:			
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación

Para iniciar la sesión las docentes saludan y se presentan con los estudiantes. Después de esto, comentarán cómo se irá desarrollando la clase a lo largo de la jornada. Acto seguido, llevarán a cabo una actividad de integración donde los estudiantes se conocerán entre ellos debido a que estos no han convivido en una misma aula de clase. Posteriormente, los estudiantes serán llevados fuera del aula de clase y se organizarán grupos de 3 para realizar la actividad, la	Si yo digo adelante/atrás/izquierda/derecha ¿Hacia dónde se mueven?	Compresión total: Se mueven correctamente en el sentido orientado. Compresión media: Identifican de manera correcta la orientación hacia adelante y hacia atrás, pero experimentan confusión al distinguir entre la izquierda y la derecha. Comprensión nula: No reconocen ni distinguen ninguna de las orientaciones mencionadas.	Las docentes como material de apoyo llevarán 2 marcadores de colores diferentes, que se utilizarán antes de realizar la actividad de la búsqueda del tesoro para pintar en las manos de los niños un círculo de color rojo en la mano izquierda y uno de color verde en la mano derecha con el fin de reforzar estas orientaciones. Igualmente, entregarán a los estudiantes los mapas que los dirigirán hacia los tesoros ocultos compuestos por fichas de arma todo que estarán unidas para formar diversas figuras geométricas.
---	--	---	---

cual consiste en hacer una cuadrícula con cinta en el piso y entregar a dos de los estudiantes un mapa con el cual deberán guiar a su tercer compañero para llegar al tesoro. Las docentes especificarán que las instrucciones con las que lo guiarán se deben basar en la orientación dado que el mapa contendrá flechas que indican un paso a la derecha, al frente, atrás etc; y si lo hacen correctamente llegarán al destino final en dónde encontrarán como tesoro, una figura geométrica; el tercer integrante será el encargado de plasmar en una hoja blanca lo que ve desde su perspectiva.			
MOMENTO 2: DESARROLLO Fomenta el cuestionamiento y el aprendizaje de un nuevo conocimiento matemático a partir de los conocimientos previos de la tarea anterior. Se busca la autorregulación del aprendizaje de los estudiantes por medio de tareas con mayor dificultad, que impliquen una interpretación y relación de conocimientos.			
Pregunta orientadora:	¿Cómo podemos identificar objetos en dos dimensiones y en tres dimensiones utilizando la perspectiva?		
Objetivos de aprendizaje:	Reconocer las características y diferencias de las figuras bidimensionales y tridimensionales, comprendiendo que la perspectiva es un elemento clave para identificarlas.		

Tiempo estimado:	40 minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
En esta parte de la sesión, las docentes darán inicio con la explicación de la temática propuesta sobre dimensiones, proyecciones y perspectivas, haciendo uso de un lenguaje técnico y simple: del tablero y tarjetas visuales para mantener la concentración de los estudiantes. Posteriormente, resolverán las dudas que surgieron en los estudiantes sobre el tema y se realizará una pausa activa de 5 minutos para evitar el cansancio.	Pregunta 1: ¿Alguno sabe qué es una figura bidimensional y tridimensional? Pregunta 2: ¿Saben qué es la perspectiva?, ¿Han escuchado alguna vez sobre la perspectiva de las cosas?	Comprensión total (pregunta 1): Distinguen las figuras bidimensionales de las tridimensionales.	Las docentes se asegurarán de que el salón de clases esté organizado y libre de distracciones antes de comenzar la explicación. Se organizarán los materiales necesarios, como el tablero y las tarjetas visuales, para un acceso rápido. Al final de la explicación, las docentes animarán a los estudiantes a hacer preguntas y compartir sus pensamientos, creando la oportunidad para que internalicen mejor los conceptos.
		Comprensión total (pregunta 2): Identifican que la perspectiva se refiere a la representación visual de un objeto cuando se observa desde un punto específico.	
		Comprensión media (pregunta 1): Identifican las figuras bidimensionales pero no las distinguen de las tridimensionales.	
		Comprensión media (pregunta 2): Relacionan el término de perspectiva con los objetos pero no tienen una idea o definición clara sobre esta.	
		Comprensión nula (pregunta 1): No reconocen ni asocian ninguna figura geométrica con bidimensionalidad y tridimensionalidad.	
		Comprensión nula (pregunta 2): No reconocen ni asocian el término de perspectiva.	

Dando apertura a la siguiente actividad, las docentes les entregarán a los estudiantes el material y les explicarán que dentro de las caras del desarrollo plano de la figura geométrica otorgada en la hoja de papel, deben realizar un dibujo para luego recortar la figura por el borde y doblar un poco las líneas para formar la figura con pegamento. Seguido de esto, las docentes intercambiarán las figuras entre los estudiantes y les pedirán que mencionen el nombre y las características que logren recordar de la misma.	¿Alguna vez han creado o jugado con una figura tridimensional?	Comprensión total: Han tenido experiencias previas y reconocen las figuras que poseen tres dimensiones.	Las docentes brindarán el material correspondiente a la actividad (hojas de impresión, tijeras, colores, reglas, pegamento y cinta) y darán acompañamiento a los procesos de recortar, doblar, pegar y socializar.
		Comprensión media: Han tenido experiencias previas pero no identifican la característica de tridimensionalidad en las figuras.	
		Comprensión nula: No reconocen haber tenido experiencias previas con las figuras tridimensionales.	
MOMENTO 3: CIERRE			
Realiza una síntesis y estructuración del conocimiento matemático trabajado. Se proponen tareas que permitan identificar el aprendizaje de los estudiantes donde realicen la justificación de los resultados.			
Pregunta orientadora:	¿Qué relaciones encuentran entre el movimiento de los objetos, las sombras y los sonidos?		
Objetivos de aprendizaje:	Comprender la relación entre la luz, el movimiento de objetos y el sonido, observando cómo influyen en la formación de sombras y patrones visuales y auditivos.		

Tiempo estimado:	40 minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación

En un comienzo de la actividad las docentes le pedirán a los estudiantes que las ayuden a mover los pupitres hacia atrás mientras que, dos de ellas se encargarán de cubrir posteriormente las ventanas con bolsas de basura negras para crear un ambiente un poco oscuro. Seguido de esto, las docentes encenderán una linterna y reunirán a los estudiantes en el piso formando un círculo y comentarán sobre la luz y cómo se forma una sombra cuando un objeto la bloquea. Preguntarán a los estudiantes si alguna vez han notado cómo cambian las sombras cuando algo se mueve. Esto les ayudará a conectar con sus experiencias previas. Acto seguido, las docentes dividirán al grupo en	Pregunta 1: ¿Qué observan en cuanto al tamaño de la sombra cuando el objeto se acerca o se aleja de la luz? Pregunta 2: ¿Pueden crear música utilizando las sombras y los objetos que generan sonidos?	Compresión total (pregunta 1): Identificaron que cuando el objeto se acerca a la luz, la sombra se hace más grande, y cuando el objeto se aleja de la luz, la sombra se hace más pequeña. Compresión total (pregunta 2): Identificaron que sí pueden crear música utilizando las sombras y el objeto que genera sonido. Al mover el objeto cerca de la fuente de luz al ritmo de la música, observaron que las sombras se movían siguiendo el ritmo y los sonidos del objeto se combinaban, creando una experiencia musical. Compresión media (pregunta 1): Los estudiantes identifican que el tamaño de las sombras sigue la dirección del movimiento de los objetos (la linterna y la maraca) pero no comprenden cómo se relaciona este comportamiento con la geometría y la temática de perspectiva. Compresión media (pregunta 2): Los estudiantes reconocen la	Las docentes deben estar pendientes de la seguridad y la organización de los estudiantes, estimular su observación activa y pensamiento crítico, fomentar la creatividad, promover la comunicación asertiva entre los estudiantes, adaptarse a sus necesidades individuales, y alentar la conexión con conocimientos previos mientras los guían en la exploración libre y la resolución de problemas. Además, deben facilitar la reflexión al final de la actividad y crear un ambiente de entusiasmo por el aprendizaje.
---	--	---	--

equipos de 3 estudiantes y les otorgará una maraca y una linterna a cada grupo. Después, le pedirán a los estudiantes que enciendan sus linternas y muevan la maraca lentamente en frente de la luz, luego le pedirán a los estudiantes que agiten el objeto para que genere sonidos e incentivarán a que escuchen con atención cómo cambia el sonido mientras mueven la maraca más rápido o más despacio. Después las docentes dejarán un espacio de 10 minutos para que los estudiantes exploren libremente. Para que ellos puedan intentar crear música con sus objetos mientras mueven las sombras. Finalizarán la actividad organizando el salón y a los estudiantes en cada uno de sus pupitres y les preguntarán qué aprendieron sobre las relaciones entre la luz, el		posibilidad de crear música, pero no tienen un entendimiento profundo de cómo la geometría de las sombras y la relación entre el movimiento y el sonido están interconectados. Compresión nula (pregunta 1): Los estudiantes no reconocen los cambios en el tamaño de la sombra, sin importar dónde coloquen el objeto o la luz. Compresión nula (pregunta 2): Los estudiantes no asocian que el sonido y las sombras, son causadas por el movimiento del objeto y la luz.	
--	--	---	--

movimiento y el sonido. Les pedirán que compartan sus observaciones, experiencias y sus dudas para que sean resueltas.			
---	--	--	--

Anexo 4. TME G4

Grupo de grados	Cuarto y quinto		
Profesora:	Grupo 4		
Tiempo total:	Dos horas y media		
Nombre de la sesión:	Descubriendo mi entorno.	Contexto de la unidad:	Exploradores espaciales
Descripción del escenario	Nuestro entono está lleno muchas de figuras formas lugares y objetos maravillosos que nos pueden ayudar a descubrir sus habilidades de ubicación espacial que con ayuda de las actividades que realizaremos podremos conocer y reforzar sus conocimientos.		
Rol(es) del estudiante:	Exploradores y Descubridores.	Materiales:	Caja de cartón, figuras bidimensionales y tridimensionales, campana, bandas.
Estándares involucrados:	Comparo y clasifico objetos tridimensionales y	Propósito general:	Los estudiantes desarrollan conocimientos y habilidades propios del espacio proyectivo

	bidimensionales según sus componentes y propiedades, empleo instrucciones para poder reconocer mi entorno con las relaciones espaciales.		a partir de actividades didácticas que les ayudara a mejorar sus conocimientos y a recordar conceptos de lateralidad.
MOMENTO 1: INICIO Busca motivar y relacionar a los estudiantes con los aprendizajes de la sesión a través de los conocimientos previos. Para ello, se plantean tareas que permitan la detección de ideas, por lo que deben ser sencillas y relacionadas con el contexto de los estudiantes.			
Pregunta orientadora:	Como despertar el interés de los estudiantes y aprovechar los conocimientos previos para reconocimiento de la ubicación en el espacio.		
Objetivos de aprendizaje:	Comprobar los conocimientos de los estudiantes relacionados con la ubicación en el entorno y la dimensión espacial y para poder dar partida y reforzar los temas que no tengan claros o de los que no tengan conocimiento.		
Tiempo estimado:			

Para iniciar la sesión la docente saluda y se presenta con los estudiantes comenta que la sesión de hoy estará dividida en la exploración y descubrimiento del entorno para iniciar habrá una actividad de presentación de los estudiantes, la docente les dará una pelota a un estudiante con la intención de realizar una dinámica de tingo tango donde se rotara la pelota de acuerdo a las instrucciones de(derecha, izquierda adelante o atrás)donde el niño que corresponda presentara al niño que se encuentra a su derecha o izquierda atrás o adelante .	Si yo les indico derecha izquierda adelante o atrás a donde rota la palabra.		
--	---	--	--

MOMENTO 2: DESARROLLO

Fomenta el cuestionamiento y el aprendizaje de un nuevo conocimiento matemático a partir de los conocimientos previos de la tarea anterior. Se busca la autorregulación del aprendizaje de los estudiantes por medio de tareas con mayor dificultad, que impliquen una interpretación y relación de conocimientos.

Pregunta orientadora:	¿Cuáles son las características propias de una figura tridimensional y bidimensional y así mismo la importancia de la ubicación espacial?		
Objetivos de aprendizaje:	1. Reconocer las características de las figuras bidimensionales y tridimensionales. 2. Identificar la ubicación espacial de nuestro entorno.		
Tiempo estimado:	60 minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
La profesora presentará la primera actividad, la cual será la identificación de figuras bidimensionales y tridimensionales por medio de una caja que contendrá dichas figuras. La profesora coloca en el escritorio una caja de cartón con las respectivas figuras dentro de ella. Los estudiantes tendrán que identificar y reconocer la figura que la profesora le indique; luego el estudiante tendrá que decir que figura es y si no la conoce, recibirá la respectiva retroalimentación por parte de la profesora.	¿Quién reconoce las figuras? ¿Relacionan el nombre con la figura real?	Comprensión total: Reconocen los objetos que la profesora solicita.	La profesora comienza a realizar preguntas básicas acerca de las características de las figuras bidimensionales y tridimensionales (¿La figura es grande o pequeña? ¿la figura tiene profundidad o es plana?). La profesora hará uso de las figuras que inicialmente se encontraban dentro de la caja para realizar una comparación y así mismo, realizar una retroalimentación.
		Comprensión media: Reconocen las figuras bidimensionales mas no reconocen las figuras tridimensionales.	

La profesora presentará la segunda actividad, la cual se llevará a cabo en un espacio abierto como la cancha. Para esta actividad se formarán grupos de cinco integrantes (aleatorio), donde uno será el líder, el estará en un extremo y los demás estudiantes que conforman el grupo estarán en el otro extremo de la cancha. A diferencia del líder, los otros cuatro integrantes del grupo tendrán los ojos cubiertos y el líder los tendrá que guiar por medio de indicaciones como derecha, izquierda, adelante y atrás. Esto con el fin de que el grupo llegue a donde se encuentra el líder.	¿Los estudiantes acatan las indicaciones? ¿Los estudiantes logran llegar a la meta?	Comprensión nula: No identifican las figuras con base a su proyección (tridimensional y bidimensional) Comprensión total: Los estudiantes reconocen lo que se les indica y llegan con facilidad a la meta. Comprensión media: Los estudiantes reconocen solo algunas indicaciones y tienen dificultades para llegar a la meta.	Al terminar esta actividad, la profesora les hará preguntas sobre lo que más se les dificultó y hará retroalimentación acerca de la ubicación espacial utilizando ejemplos cotidianos. Para concluir la actividad, la profesora recalcará la importancia de la ubicación espacial y como esta se encuentra presente en nuestro día a día.
---	---	---	---

		Comprensión nula: Los estudiantes no reconocen ninguna indicación y no logran llegar a la meta.	
MOMENTO 3: CIERRE Realiza una síntesis y estructuración del conocimiento matemático trabajado. Se proponen tareas que permitan identificar el aprendizaje de los estudiantes donde realicen la justificación de los resultados.			
Pregunta orientadora:	Reconocer que los objetos pueden tener representaciones diversas según los ángulos y las posiciones desde los que se observen.		
Objetivos de aprendizaje:	¿Cuáles son las perspectivas que tiene una figura tridimensional y la ubicación espacial?		
Tiempo estimado:	30 minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación

En este momento plasmaremos lo aprendido en las actividades. la profesora le dará a cada estudiante una hoja donde tendrán que ubicar en una silueta del cuerpo humano la derecha e izquierda además de esto tendrán que dibujar dos formas tridimensionales y dos figuras bidimensionales, con el fin de comprobar si los estudiantes obtuvieron los conocimientos necesarios en actividades anteriores.	¿lograron ubicar la derecha y la izquierda en la silueta del cuerpo humano? ¿logran reconocer entre una figura tridimensional y una bidimensional?	Comprensión total: logran ubicar de manera precisa la derecha y la izquierda y reconocen las figuras tridimensionales y bidimensionales.	La profesora debe premiar la autonomía de los estudiantes en esta actividad, donde ellos desarrollen los conocimientos y habilidades espaciales y dibujen correctamente las figuras solicitadas, debe estar atenta a cualquier duda que surja para ayudarle a los estudiantes a recordar y así desarrollar la actividad con mejor, además les deberá explicar el efecto espejo en la silueta del cuerpo humano.
		Comprensión media: Confunden la derecha con la izquierda y se les dificultan algunas figuras.	

		Comprensión nula: No ubican correctamente la derecha y la izquierda en la silueta del cuerpo humano y no diferencian lo bidimensional ni lo tridimensional.	
--	--	---	--

Anexo 5. TME G5

Grupo de grados	Cuarto y quinto		
Profesora:	Grupo 5		
Tiempo total:	Tres horas		
Nombre de la sesión:	¡Arte y danza para aprender!	Contexto de la unidad:	Juegos integradores y arte
Descripción del escenario	Las artes y el trabajo en equipo están presentes en todo el mundo, y mediante las cuales se pueden desarrollar habilidades matemáticas en niños de todas las edades, incluso en la educación básica primaria. Para esta sesión, los estudiantes se apreciarán como artistas (bailarines y dibujantes) que están aprendiendo nuevas formas de plasmar los objetos que los rodean, con las perspectivas; y como jugadores que están desarrollando habilidades motoras y un mejor control de su cuerpo y ubicación. Mediante esta estrategia, buscamos fomentar la confianza en sí mismos, apreciando cada victoria y cada equivocación, ya que cada manifestación de talentos es única y debe ser apreciada.		
Rol(es) del estudiante:	Bailarines y jugadores.	Materiales:	Micrófonos, parlantes, hojas adhesivas, manillas de cintas de colores, cintas de colores, marcadores y lápices.
Estándares involucrados:	Utilizo sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales.	Propósito general:	Los estudiantes desarrollan conocimientos y habilidades propios del espacio proyectivo a partir de manifestaciones artísticas como la danza y juegos físicos como la rayuela.
MOMENTO 1: INICIO			

Busca motivar y relacionar a los estudiantes con los aprendizajes de la sesión a través de los conocimientos previos. Para ello, se plantean tareas que permitan la detección de ideas, por lo que deben ser sencillas y relacionadas con el contexto de los estudiantes.			
Pregunta orientadora:	¿Comprenden los estudiantes indicaciones básicas de orientación?		
Objetivos de aprendizaje:	Reforzar los conocimientos previos sobre la orientación espacial y el espacio proyectivo con respecto a su cuerpo, además de implementar un nuevo concepto: el efecto espejo; mientras aprovechamos la actividad para que interactúen y se integren entre grupos.		
Tiempo estimado:	Cuarenta minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
Iniciamos la clase con una breve presentación del docente y los estudiantes, continuamos con una pequeña actividad de reconocimiento sobre el tema que vamos a trabajar. Damos indicaciones simples de forma verbal a los alumnos para que las realicen individualmente: “manos arriba, a la derecha, abajo, un aplauso a la izquierda”.	Si yo digo arriba/abajo/derecha/izquierda ¿a dónde se mueven?	Comprensión total: mueven las manos hacia las orientaciones correctas.	De recurso de apoyo se llevan unas manillas de dos colores que indiquen el lado derecho o izquierdo de los estudiantes y la profesora los guiará.
		Comprensión media: conocen la orientación de arriba y abajo, pero se confunden en derecha e izquierda.	
		Comprensión nula: tienen una confusión con todas las orientaciones espaciales.	
Cuando los estudiantes logren realizar la actividad sin mayor dificultad, la docente pedirá a los estudiantes que se formen en dos hileras de igual	¿Cómo nos reflejamos en los espejos? ¿Hacen exactamente lo mismo que nosotros? ¿Cómo se ve su compañero? ¿Se ven igual	Comprensión total: Los estudiantes entienden el concepto de espejo y no se confunden con los movimientos de su compañero.	Con un estudiante la docente le dice que haga movimientos de levantar la mano derecha o izquierda y moverse y ella lo hace igual ¿el espejo haría lo mismo o al contrario? Desde ahí retroalimenta sobre cómo

número, de tal modo que cada estudiante tenga un compañero al frente. Damos indicaciones como “salúdense con la mano derecha” “toquen sus cabezas con su mano izquierda” “dense palmadas en el hombro izquierdo con la mano derecha” vamos desde indicaciones sencillas a un poco más complejas y damos por finalizada esta primera fase.	entre sí? ¿Utilizan las mismas partes del cuerpo? ¿Por qué creen que se ven distintos a sus compañeros? ¿Cómo debemos ubicarnos para vernos igual?	Comprensión media: Los estudiantes comprenden el concepto de espejo, pero tienen dificultades para seguir las indicaciones con sus compañeros al frente. Comprensión nula: Los estudiantes no comprenden los conceptos ni siguen indicaciones con claridad.	funciona el reflejo y la lateralidad, desde donde guiara a ambos grupos.
MOMENTO 2: DESARROLLO Fomenta el cuestionamiento y el aprendizaje de un nuevo conocimiento matemático a partir de los conocimientos previos de la tarea anterior. Se busca la autorregulación del aprendizaje de los estudiantes por medio de tareas con mayor dificultad, que impliquen una interpretación y relación de conocimientos.			
Pregunta orientadora:	¿Cómo podemos despertar el interés de los estudiantes y aprovechar sus conocimientos previos para explorar de manera creativa y enriquecedora los conceptos de espacio topológico y proyectivo con respecto a su propio cuerpo?		

Objetivos de aprendizaje:	Motivar a los estudiantes y promover los conocimientos previos sobre el espacio topológico y proyectivo con respecto a su cuerpo, mientras aprovechamos la actividad para que interactúen y se integren entre grupos.		
Tiempo estimado:	Ochenta minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
La docente guiará a los estudiantes a un espacio adecuado para realizar la siguiente actividad, una cancha o una zona grande al aire libre, solo es necesario un suelo pavimentado. La docente rápidamente dibujará una rayuela en el piso, haciendo uso de la tiza, a continuación, pedirá a los estudiantes que se organicen en una fila de manera ordenada. Se darán las indicaciones con un voluntario para que quede claro el ejercicio y a continuación se inicia la actividad en sí. En primera instancia la docente utilizará indicaciones verbales, tales como “un salto al frente, a la derecha, dos saltos atrás” y determinará en qué	Si yo ordeno “un salto a la izquierda, dos saltos adelante, un salto a la derecha” ¿A dónde se moverán los estudiantes? ¿Podrán coordinar su cuerpo para saltar dentro de las casillas correctamente? ¿Creen que con una pista musical será más fácil realizar las indicaciones de forma satisfactoria?	Comprensión total: Mueven su cuerpo hacia las orientaciones correctas y siguiendo el ritmo de la música.	La docente se apoyará en un estudiante voluntario para realizar la demostración de la actividad, se repetirá las veces que sean necesarias y se responderán dudas y darán distintas orientaciones. Si esto no funciona del todo, la docente realizará ella misma la actividad al tiempo que da las ordenes de manera verbal, poco a poco pedirá que se unan estudiantes con ella al frente guiando los movimientos.
		Comprensión media: Conocen las orientaciones: derecha, izquierda, adelante atrás, pero se confunden al seguir el ritmo de la música y se desordenan.	
		Comprensión nula: no identifican las orientaciones básicas: derecha, izquierda, adelante, atrás, y no coordinan sus saltos con el ritmo de la música.	

momento debe entrar el siguiente jugador. Cuando veamos que siguen indicaciones sin mayor problema podemos hacer uso de la música.			
En la segunda etapa de la actividad, la docente ubicará dos filas de igual número de estudiantes, cada una debe ser ubicada en el lado opuesto al otro para no provocar obstrucción. Se realizará la misma actividad anterior con la variación de que los estudiantes tendrán un compañero al frente en modo espejo. Igualmente	Quién adivinará, ¿Los movimientos de nuestro compañero se van a ver de la misma forma que los propios? ¿Creen que si se ubican en otros lados de la rayuela algo va a cambiar en cómo se ven sus movimientos? ¿Qué creen que pasará si un jugador no sigue las indicaciones de manera correcta?	Comprensión total: Realizan de forma exitosa los movimientos en modo espejo y con la pista musical sin equivocarse en el proceso. Comprenden el fenómeno espejo. Comprensión media: Realizan la mayoría de los movimientos en modo espejo de forma correcta pero aún se confunden con los movimientos de su compañero, coordinan con la pista musical.	Con la ayuda del tablero la profesora va a dibujar la vista de una figura de cubos diferente y generara las instrucciones paso a paso con ayuda de los estudiantes

se puede incluir la música cuando se vea conveniente.	¿Qué cambio debemos hacer para que mi compañero y yo hagamos que nuestros movimientos sean iguales?	Comprensión nula: No realizan bien los movimientos, se pierde con los movimientos de su compañero y no comprenden qué es el modo espejo o se les dificulta mucho realizarlo. Se desordenan y se pierden con la pista musical.	
MOMENTO 3: CIERRE Realiza una síntesis y estructuración del conocimiento matemático trabajado. Se proponen tareas que permitan identificar el aprendizaje de los estudiantes donde realicen la justificación de los resultados.			
Pregunta orientadora:	¿Cuáles son las perspectivas que tiene una figura tridimensional?		
Objetivos de aprendizaje:	Reconocer que los objetos pueden tener representaciones diversas según los ángulos y las posiciones desde los que se observen.		
Tiempo estimado:	Sesenta minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
A continuación, la profesora les explicará a los estudiantes los conceptos de tridimensionalidad. Se usará como apoyo una actividad para reforzar la explicación en la que se hará uso de plastilina; los	¿Qué ves si estás a la derecha? ¿Es lo mismo a lo que verías estando al frente?...	Comprensión total: Reconocen que lo que ven depende de la perspectiva en la que estén y comprenden y asocian correctamente el concepto de tridimensionalidad.	La profesora va a comenzar a hacer preguntas básicas de las características para que los estudiantes entren en contacto con el juego: ¿Qué tipo de animal creen que es? ¿Es grande o pequeño? ¿Es largo o ancho? También toma el

estudiantes harán el animal de su preferencia en 3D y se hará una breve socialización donde los estudiantes contarán lo que ven.		Comprensión media: Reconocen que la figura se ve diferente dependiendo de la posición en que al miren, pero no comprenden el concepto de tridimensionalidad, ni lo asocian con objetos del diario vivir.	tablero como apoyo para dibujar las ideas de los estudiantes y acercarlos a la idea del objeto.
Para finalizar realizaremos una red semántica con los aprendizajes del día, pidiéndole a los estudiantes que escriban y enumeren tres palabras que relacionen con los temas vistos en los papelitos adhesivos que les serán entregados. La docente dibujará tres círculos enumerados del 1	¿Comprendieron los conceptos vistos en clase? ¿Por qué escribiste esta palabra? ¿Creen que vemos representados estos conceptos en nuestra vida diaria?	Comprensión nula: No entienden por qué se ve diferente el objeto para cada uno ni entienden lo que es un objeto 3D. Comprensión total: Entienden todos los conceptos vistos en clase, la lateralidad, el control del espacio, las vistas y la tridimensionalidad. Comprensión media: Entienden algunos de los conceptos vistos, o los confunden.	

al 3, cada uno dentro del otro de menor tamaño y a continuación pedirá a los estudiantes que, de manera ordenada, peguen una palabra en cada círculo, siendo 1 las que consideren las más importantes y las 3 las menos relevantes. Haremos una breve socialización del por qué escogieron esas palabras y se dará por finalizada la sesión.		Comprensión nula: No comprenden los conceptos vistos en la clase.	
---	--	---	--

Anexo 6. TME G6

Grupo de grados	Cuarto-Quinto		
Profesora:	Grupo 6		
Tiempo total:	2 horas y media		
Nombre de la sesión:	Construyendo formas	Contexto de la unidad:	Manifestaciones geométricas
Descripción del escenario	El mundo está lleno de oportunidades para construir formas, y estas requieren habilidades geométricas que pueden desarrollar los niños en la educación básica primaria. Para esta sesión, los estudiantes se verán a sí mismos como constructores que están aprendiendo nuevas formas de dar vida a estructuras, como las perspectivas. En este espacio de aprendizaje, fomentamos la confianza en sí mismos y celebramos cada intento, sin temor a equivocarse, ya que cada construcción es una historia única de amor, curiosidad y autenticidad.		
Rol(es) del estudiante:	Constructores	Materiales:	Hojas, lápices, colores, plegables.

Estándares involucrados:	• Clasifica y reconoce las figuras bidimensionales, (en particular, los triángulos y los cuadriláteros). • Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura	Propósito general:	Los estudiantes desarrollan conocimientos y habilidades propios de la bidimensionalidad, tridimensionalidad y vistas a partir de ejemplos cotidianos, cuentos y dibujos representativos.
MOMENTO 1: INICIO			

Busca motivar y relacionar a los estudiantes con los aprendizajes de la sesión a través de los conocimientos previos. Para ello, se plantean tareas que permitan la detección de ideas, por lo que deben ser sencillas y relacionadas con el contexto de los estudiantes.			
Pregunta orientadora:	¿Cómo se puede facilitar a los estudiantes la interiorización del concepto de bidimensionalidad y tridimensionalidad a partir de los conceptos básico o primitivos de la geometría como conocimientos previos?		
Objetivos de aprendizaje:	Activar la curiosidad y el reconocimiento de conceptos por parte de los estudiantes respecto a las figuras bidimensionales y tridimensionales		
Tiempo estimado:			
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
Se iniciará la sesión, saludando a los estudiantes y presentando los temas a tratar durante la clase. Se mencionará el título del tema y se dará inicio a la clase con la lectura de un cuento el cual se centra en el universo de las figuras básicas bidimensionales, para así observar qué tanto conocimiento tiene al respecto, y hacer de la introducción del tema más dinámico.	¿Pueden definir los elementos geométricos que se mencionan en el texto?	Comprensión total: Apropiación en el tema, pueden identificar los elementos mencionados.	El cuento se leerá de manera clara con el objetivo de que los estudiantes puedan identificar las figuras bidimensionales a través de la descripción oral. En caso de que un estudiante tenga dificultades para reconocer estas figuras bidimensionales, se dispondrán las figuras mencionadas en el cuento como recursos de apoyo. Estas figuras se mostrarán a los estudiantes después de realizar las preguntas. Si aún persisten las dificultades en el reconocimiento, se proporcionarán las figuras al estudiante para su análisis
		Comprensión media: Reconocen algunos elementos, pero no reconocen que hacen parte del concepto de geometría.	

Buscaremos ejemplos de estas figuras en la narrativa. Al relacionar la lectura con ejemplos cotidianos que nos rodean, lograremos una comprensión más completa de las figuras básicas bidimensionales.		Comprensión nula: No reconocen los elementos.	individual, permitiéndole comentar sobre lo que reconoce en cada una de ellas.
	¿Pueden realizar un dibujo coloreado de cada uno de ellos?	Comprensión alta: Pueden identificar y dibujar los elementos mencionados.	
		Comprensión media: Pueden dibujar los elementos, pero no reconocen hacen parte del concepto de geometría.	
		Comprensión nula: No pueden identificar los elementos y tampoco dibujarlos.	

MOMENTO 2: DESARROLLO

Fomenta el cuestionamiento y el aprendizaje de un nuevo conocimiento matemático a partir de los conocimientos previos de la tarea anterior. Se busca la autorregulación del aprendizaje de los estudiantes por medio de tareas con mayor dificultad, que impliquen una interpretación y relación de conocimientos.			
Pregunta orientadora:	¿Cómo podemos diseñar una actividad efectiva para que los estudiantes comprendan que las figuras tridimensionales están compuestas por figuras bidimensionales?		
Objetivos de aprendizaje:	Comprender y explorar conceptos básicos de tridimensionalidad.		
Tiempo estimado:			
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
La profesora comienza explicando que la tridimensionalidad se refiere a objetos que tienen tres dimensiones: largo, ancho y alto, y que están compuestos por figuras bidimensionales. Muestra ejemplos de objetos tridimensionales en la vida cotidiana, como una pelota, un dado o una lata de refresco y se relacionara el tema de tridimensionalidad con el de bidimensionalidad visto anteriormente.	¿Pueden nombrar otros objetos tridimensionales que conocen?	Comprensión alta: Pueden nombrar objetos tridimensionales que conocen.	Se iniciará haciendo preguntas básicas acerca del tema de bidimensionalidad y respondiendo cualquier duda que el estudiante pueda tener, para así dar pie al tema de tridimensionalidad y como estos se complementan. Se explicará sus dimensiones y como el mundo que nos rodea está conformado por figuras tridimensionales.
		Comprensión media: Nombran objetos, pero no reconocen que clase de objetos son (bidimensional o tridimensional).	
		Comprensión nula: No pueden nombrar objetos diferentes a los mencionados por la profesora	

Después, se pasará a aplicar una actividad diseñada para profundizar el tema, por medio de una plantilla de un plegable previamente preparada, que simula un dado, ellos solo tendrán que armar el cubo, con el objetivo de que puedan observar y entender como una figura plana, se transforma en una figura tridimensional.	¿Pueden armar el plegable e identificar el cuerpo geométrico que se arma?	Comprensión alta: Lograron armar el plegable e identificaron la figura que observa	Se llevará el material necesario, para qué cada estudiante pueda realizar su propio dado. Al finalizar la actividad del plegable, se empezará a explicar los elementos del cuerpo geométrico que se formó: alto, largo y ancho
		Comprensión media: Logran armar el plegable, pero no identifican qué figura es	
		Comprensión nula: No pueden armar el plegable y tampoco identificar que figura podría realizarse con este.	
MOMENTO 3: CIERRE			
Realiza una síntesis y estructuración del conocimiento matemático trabajado. Se proponen tareas que permitan identificar el aprendizaje de los estudiantes donde realicen la justificación de los resultados.			
Pregunta orientadora:	¿Cuáles son las perspectivas que tiene una figura tridimensional?		
Objetivos de aprendizaje:	Reconocer que los objetos pueden tener representaciones diversas según los ángulos y las posiciones desde los que se observen.		

Tiempo estimado:			
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
Por última actividad, la profesora organizará la clase, en grupos de cinco estudiantes y en el centro de cada grupo pondrá un cubo qué representará un dado. Luego la maestra les pedirá a los estudiantes qué dibujen el número qué ven, desde la perspectiva qué ellos están, para qué al final ellos puedan darse cuenta qué todos están viendo el mismo dado, pero todos ven un número diferente por la posición en la que se encuentran.	¿Qué número logran ver del dado desde dónde están? ¿Es el mismo número que tiene su compañero?	Comprensión total: Reconocen que desde la posición de cada uno es diferente lo que observan, por lo tanto, el número que cada uno ve cambia	La profesora debe primar la autonomía de los estudiantes en esta actividad, donde ellos desarrollen los conocimientos y habilidades espaciales. No obstante, debe estar pendiente de cada grupo de los estudiantes para resolver dudas y apoyar con explicaciones a los estudiantes que se les dificulta comprender.
		Comprensión media: Reconocen que los números cambian, pero no lo relacionan con el espacio	

		Comprensión nula: Todos obtienen el mismo número porque es la misma figura	
--	--	--	--

Anexo 7. TME G7

Grupo de grados	Alumnos de 4°- 5°		
Profesora:	Grupo 7		
Tiempo total:	Dos a tres horas		
Nombre de la sesión:	¡Astronautas y artistas!	Contexto de la unidad:	Manifestaciones artísticas.
Descripción de escenario	El mundo está lleno de arte, y este contempla habilidades matemáticas que pueden desarrollar los niños en la educación básica primaria. Para esta sesión, los estudiantes se contemplarán como artistas que están aprendiendo nuevas formas de plasmar los dibujos, como las perspectivas. En este espacio mágico, fomentamos la confianza en sí mismos y celebramos cada intento, sin temor a equivocarse, ya que cada obra es una historia única de amor, curiosidad y autenticidad.		
Rol(es) del estudiante:	Dibujantes, Exploradores.	Materiales:	Colores, lápices, marcadores, lana, hojas de cuaderno, hojas (exterior), piedras (exterior), tijeras, fomi, cubos, bafle pequeño
Estándares involucrados:	Se orientará a los niños a que por medio de su imaginación plasmen una figura de manera 2D y 3D. Se hace un juego de roles para desarrollar el espacio topográfico y el pensamiento espacial del alumno	Propósito general:	Los estudiantes desarrollan conocimientos y habilidades propios del espacio proyectivo a partir de manifestaciones artísticas como es el dibujo, y junto al pensamiento espacial.

MOMENTO 1: INICIO

Busca motivar y relacionar a los estudiantes con los aprendizajes de la sesión a través de los conocimientos previos. Para ello, se plantean tareas que permitan la detección de ideas, por lo que deben ser sencillas y relacionadas con el contexto de los estudiantes.

Pregunta orientadora:	¿Cómo podemos despertar el interés de los estudiantes y aprovechar sus conocimientos previos para explorar de manera creativa y enriquecedora los conceptos de espacio topológico y proyectivo con respecto a su propia imaginación?		
Objetivos de aprendizaje:	Motivar a los estudiantes y promover los conocimientos previos sobre el espacio topológico y proyectivo con respecto a su imaginación.		
Tiempo estimado:	45 minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
Para iniciar la sesión los docentes saludan y se presenta con los estudiantes. Comentan que la sesión de hoy está dirigida hacia las diferentes manifestaciones del arte. Para comenzar se les explicará que se va a realizar un ejercicio de dibujo para conocerlos y ellos a su vez puedan interactuar con sus compañeros.	Sí les indicamos dibujar una casa ¿En qué dimensión lo harán? ¿Dibujarán el entorno de su casa o harán más del mismo?	Comprensión total: realizarán la actividad dibujando no solo la casa, si no su entorno, (ej.: una casa con árboles, montañas o a su vez con edificios y calles como en la ciudad etc.).	Ayudamos a los niños con cualquier pregunta que ellos puedan tener acerca de como dibujar su casa, reforzamos conocimientos sobre perspectiva y ayudamos en la mejora de las mismas.
		Comprensión mediana: realizan la actividad intentan dibujar la casa y el entorno, pero lo dibujan de una manera errónea' (ej.: dibujan su casa y en sima de ese dibujo hacen otro de un árbol sin respetar espacios).	

MOMENTO 2: DESARROLLO

Fomenta el cuestionamiento y el aprendizaje de un nuevo conocimiento matemático a partir de los conocimientos previos de la tarea anterior. Se busca la autorregulación del aprendizaje de los estudiantes por medio de tareas con mayor dificultad, que impliquen una interpretación y relación de conocimientos.

Pregunta orientadora:	¿Cuáles son las características de una figura tridimensional? ¿Qué es el espacio topográfico?		
Objetivos de aprendizaje:	Reconocer las características de las figuras tridimensionales y el espacio topográfico.		
Tiempo estimado:	120 minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
Como primera actividad vamos a formar 5 grupos a los cuales se le darán cierta cantidad de cubos; los estudiantes van a dibujar diferentes diseños de casas utilizando los cubos, al menos 5 diseños de casas.	¿Cuántos tipos de casas podrán armar?	Comprensión total: Los estudiantes habrán dibujado una gran cantidad de casas, en cualquiera de las dimensiones (2D – 3D)	Ayudaremos a que esta actividad se haga con orden y con la mejor actitud, evidenciando una buena comunicación con el estudiante y clarificando cualquier duda al respecto.
	¿Utilizarán todos los cubos?		
	¿En qué dimensión dibujarán las casas?	Comprensión mediana: No habrán podido dibujar muchas casas, pero si han podido plasmar la actividad.	
	¿Podrán realizar un trabajo en equipo correcto?	Comprensión nula: No han podido plasmar ni dibujar ningún diseño de casa	
Como segunda actividad vamos a llevar a los niños a la cancha formando 4 filas de 5 niños, a los cuales se les dará aleatoriamente un planeta o estrella, con la finalidad de identificar su posición; Para poder identificar la ubicación de los mismo y su cercanía o lejanía utilizaremos un sistema	¿los alumnos sabrán la ubicación de cada planeta o estrella?	Comprensión total: El estudiante reconocerá las posiciones de los diferentes planetas o estrellas.	Haremos un seguimiento de todos los grupos, para que con orden se puedan dar todos los cuestionamientos y se respondan las preguntas que los alumnos tengan.
	¿podrán identificar el concepto de espacio?	Comprensión mediana: El estudiante no podrá reconocer todas las posiciones de los planetas o estrellas.	
	¿Podrán entender la ubicación más cercana y más lejana?		

de desplazamiento, en el cual sabremos cuanto se tiene que mover uno para llegar a otro.		Comprensión nula: el estudiante desconoce tanto la ubicación de los planetas como el desplazamiento	
Como tercera actividad con los mismos grupos anteriormente formados, vamos a repartir un trozo medianamente largo de lana, luego vamos a relatar la historia del gusanito, se les pedirá a los estudiantes que vayan y busquen que llevara el mismo a su madriguera, dibujaremos los diferentes gusanitos. ¿Cuál es la cosa que está a los extremos del gusanito? ¿Qué cosa está en el medio? ¿Y si fueran más de un gusano, cuales cosas estarían en los extremos?	¿Podrán reconocer cual es el objeto más cercano a un extremo? ¿Podrán reconocer el concepto de extremos y medios? ¿Podrán entender la posición de los objetos?	Comprensión total: Pudieron dibujar todas las formas que encontraron, e identificaron los límites.	Ayudaremos a los alumnos en la repartición de material e iremos yendo por todos los grupos para hacer un seguimiento de los avances, se les hará entrega de una hoja para que anoten o dibujen sus razonamientos y combinaciones.
		Comprensión mediana: Pudieron dibujar algunas de las formas encontradas e identificaron algunos límites	
		Comprensión nula: No pudieron dibujar ninguna de las formas, ni pudieron identificar ningún límite	

MOMENTO 3: CIERRE

Realiza una síntesis y estructuración del conocimiento matemático trabajado. Se proponen tareas que permitan identificar el aprendizaje de los estudiantes donde realicen la justificación de los resultados.

Pregunta orientadora:	¿Cómo reconocen figuras bidimensionales? ¿Son capaces de representarlas en un contexto específico?
Objetivos de aprendizaje:	Representar los diferentes tipos de figuras bidimensionales.
Tiempo estimado:	15 minutos

Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
Se les permitirá a los alumnos que trabajen en parejas o en grupos, se les pedirá que formen una figura bidimensional con sus brazos/manos y como condición no se puede repetir, al tener formadas las figuras tendrán que bailar una canción sin desarmar la figura.	¿Podrán recordar las diferentes figuras bidimensionales?	Comprensión total: Pudieron reconocer, armar diferentes tipos de figuras y bailar la canción sin desarmar la figura.	Ayudaremos a los estudiantes a recordar las figuras anteriormente nombradas en las actividades del desarrollo, evidenciando un real aprendizaje junto con una coordinación adecuada.
	¿Podrán seguir la canción sin desarmar las figuras?	Compresión media: Pudieron reconocer, armar algunos tipos de figuras y bailar la canción.	
	¿Podrán lograr el objetivo de no repetir ninguna de las figuras?	Compresión nula: No pudieron reconocer ninguna de las figuras, ni armarlas o bailar la canción.	

Anexo 8. TME G8

Grupo de grados	Cuarto y quinto		
Profesora:	Grupo 8		
Tiempo total:	2 horas y 30 minutos		
Nombre de la sesión:	Explorando nuestro espacio.	Contexto de la unidad:	Observación del entorno.
Descripción del escenario	Nuestro entorno está lleno de cosas que nos ayudan a complementar las habilidades matemáticas que pueden desarrollar los niños, para esta sesión los estudiantes se convertirán en exploradores que están conociendo su entorno desde diferentes perspectivas.		
Rol(es) del estudiante:	Exploradores dibujantes.	Materiales:	Colores, lápices, hojas, fichas temáticas para preguntas, objetos geométricos, marcadores, cintas de colores.
Estándares involucrados:	Reconozco y clasifico objetos tridimensionales y bidimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades. Se plasmar en un dibujo la imagen que observo a mi	Propósito general:	Los estudiantes desarrollan conocimientos y habilidades propios del espacio proyectivo a partir de actividades de reconocimiento de su entorno y su habilidad de dibujar.

	alrededor de un objeto tridimensional. Utilizo mi habilidad de dar indicaciones para especificar la localización de un objeto y la relación de espacialidad que tiene este con el entorno.		
MOMENTO 1: INICIO Busca motivar y relacionar a los estudiantes con los aprendizajes de la sesión a través de los conocimientos previos. Para ello, se plantean tareas que permitan la detección de ideas, por lo que deben ser sencillas y relacionadas con el contexto de los estudiantes.			
Pregunta orientadora:	¿Cómo podemos aprovechar los conocimientos previos de los estudiantes utilizando conceptos de espacio topológico y perspectiva?		
Objetivos de aprendizaje:	Promover conocimientos sobre las diferentes direcciones y orientaciones que tienen con respecto a su entorno y el retomar los conocimientos sobre el reconocimiento de figuras 2d y 3d.		
Tiempo estimado:	40 minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
Iniciaremos saludando a los estudiantes y haciendo una ronda de presentaciones. A continuación, se les explicará que en la sesión de hoy está dirigida a ser exploradores de nuestro entorno.	¿Saben cuál es la derecha, la izquierda, arriba y abajo?	Compresión total: Sepan hacer las indicaciones correctamente.	Para los estudiantes que se les dificulta se llevarán dos cintas de colores azul para la derecha y verde para la izquierda, para ayudar al reconocimiento de cada lado
		Comprensión media: Tienen cierta dificultad para diferenciar, pero lo hacen.	
		Comprensión Nula: No saben identificar las indicaciones.	

Para comenzar se hablará del tema retomando los conocimientos previos por medio de preguntas sobre el espacio proyectivo.	¿Saben que es el espacio proyectivo?	Comprensión total: Conocen y saben sobre el tema.	Se dará un concepto del espacio proyectivo y se darán ejemplos para así poder facilitar la comprensión de estos términos y se retroalimenta a los estudiantes que se les ha dificultado incluso después de la explicación del concepto.
		Comprensión media: Conocen algo relacionado, pero les causa confusión.	
		Comprensión nula: No saben nada sobre el tema.	
	¿Saben la diferencia entre una figura 2d y una 3d?	Comprensión total: Conocen y saben sobre las diferentes figuras.	Se explicarán las diferentes figuras con las distintas formas que tienen nuestros objetos y se explicará las características de estas. Se diferenciarán las distintas formas con sus caras o figuras 2D.
		Comprensión media: Reconocen algunas figuras, pero no tienen en cuenta sus características.	
		Comprensión nula: No reconocen las diferencias entre estas figuras.	

Continuaremos con una actividad haciendo un reconocimiento de los objetos que se van a utilizar. Después se hará la demostración con dos estudiantes que la maestra va a escoger, esta actividad trata de que a cada uno se le dan ciertos objetos, a uno organizados y al otro en desorden. Al estudiante que se le dan en orden guiará al otro compañero diciendo arriba, abajo, derecha, izquierda con respecto a los objetos y el compañero estará de espaldas sin que este pueda ver el orden de los objetos. Después de la demostración se arman los respectivos grupos para comenzar la actividad, donde la maestra estará entregando los objetos a un	¿Qué nombre tienen las figuras que tenemos se están mostrando?	Comprensión total: conocen la figura presentada, su nombre y sus características	Se dará una breve explicación de la clase de figuras que se están mostrando y si no se llega a reconocer alguna de estas se mostrará más a detalle para que puedan saber más sobre esa figura.
		Comprensión media: Ha visto la figura, pero se le complica el nombre y no tiene ningún conocimiento de sus características.	
		Comprensión nula: No tienen ningún conocimiento de la figura.	
	¿Pueden entender/dar las indicaciones que les da/deben dar a su compañero?	Comprensión total: Entienden lo que dice el compañero y siguen las instrucciones correctamente. Dieron las instrucciones claras.	Se estará acompañando por tiempos a cada equipo por si presentan alguna complicación y si llega a ser así dar una explicación de la indicación que se les está complicando dar o entender para que de esta manera todos los niños puedan realizar la

niño organizado y al otro desorganizado y esto lo va hacer con cada grupo. Cuando se acabe el tiempo dado cada grupo va a socializar el resultado y se verá si pudieron cumplir con organizar los objetos o no.		Comprensión media: Entienden las señales, pero se pierden al escuchar al compañero. Tenía ciertos problemas en diferenciar algunas direcciones.	actividad con éxito y si algún grupo no llega a cumplir el objetivo de la actividad retroalimentar sobre las orientaciones.
		Compresión nula: No entienden y se pierden muy fácilmente al momento en que el compañero le da indicaciones. No sabe cómo expresar en donde se encuentra la figura.	
MOMENTO 2: DESARROLLO			
Fomenta el cuestionamiento y el aprendizaje de un nuevo conocimiento matemático a partir de los conocimientos previos de la tarea anterior. Se busca la autorregulación del aprendizaje de los estudiantes por medio de tareas con mayor dificultad, que impliquen una interpretación y relación de conocimientos.			
Pregunta orientadora:	¿Cómo podemos aprovechar el entorno que nos rodea para evidenciar las diferentes perspectivas de la vista y saber ubicarnos en el espacio?		
Objetivos de aprendizaje:	Reconocer que los espacios y objetos tienen diversas perspectivas dependiendo del ángulo o posición en que lo observemos.		
Tiempo estimado:	Una hora		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
Dando paso a la siguiente actividad, la profesora sacará a los estudiantes del salón y los llevará a la	¿Qué es la perspectiva de un objeto, persona, figura o lugar?	Comprensión total: Entiende que es perspectiva y sabe cómo identificarlas.	Se les dará una explicación ejemplificada de cuales son las perspectivas que podemos identificar y se ayudará a los niños que después

cancha. Allí se les pedirá a los niños que busquen en el patio el lugar que más les guste o les llame la atención y lo plasmen en la hoja a través de un dibujo en la hoja que les daremos. Aquí se les explicará qué tienen que hacer una observación del entorno en dónde están en ese momento ubicados e identifiquen las cosas que tienen a su alrededor y desde qué perspectiva lo ven.		Comprensión media: Se le dificulta saber que es una perspectiva pero identifica cuales son.	de la explicación se les dificulta un poco el concepto.
		Comprensión nula: No entiende nada sobre una perspectiva y no sabe identificarlas.	
Seguido a ésto ellos dibujara qué pudieron observar y desde qué perspectiva lo dibujaron después se les dará paso para que expliquen su dibujo dando indicaciones de dónde están ubicados los elementos que conforman su dibujo, por ejemplo la montaña estaba	¿Pudo identificar las cosas que veo desde cada perspectiva?	Comprensión total: Entiende la pregunta y responde correctamente todo lo que observa.	Se estará guiando a los estudiantes en el momento de hacer la actividad para ayudarlos a identificar la vista que le corresponde a cada uno dependiendo del lugar que escogieron. Se les dará un poco de acompañamiento y de ayuda al identificar los objetos o cosas que observen.
		Comprensión media: Sabe identificar lo que ve pero se le dificulta entender cuál es la vista de la que estamos hablando.	

a mi derecha , el árbol al frente y etc. Y se les explicarán las diferentes perspectivas que tuvieron sus otros compañeros		Comprensión nula: No sabe identificar la vista que se le propuso y estuvo observando todo sin tener en cuenta perspectiva alguna.	
MOMENTO 3: CIERRE Realiza una síntesis y estructuración del conocimiento matemático trabajado. Se proponen tareas que permitan identificar el aprendizaje de los estudiantes donde realicen la justificación de los resultados.			
Pregunta orientadora:	¿Qué pudimos entender y aprender de toda la sesión sobre perspectiva y espacio proyectivo?		
Objetivos de aprendizaje:	Reconocer las diferentes perspectivas, figuras y espacios proyectivos que vimos durante la sesión.		
Tiempo estimado:	Treinta minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
En este momento ellos manifestaran lo aprendido durante la sesión. La profesora les pedirá que se levanten y coloquen los	¿ Que hizo que se confundieran al moverse y perdieran?	Comprensión total: Al momento de la actividad reconocen que algunos pasos se les dificulta al tener cierta presión de tiempo.	Se retroalimenta desde el reto que es movernos según lo indicado. Para complementar antes de la actividad se hará un ejemplo con los profesores e indicar paso a paso los movimientos que se están

puestos a un lado del salón. Posterior a esto se les empezara a dar instrucciones para que ellos hagan, como por ejemplo: un paso a la derecha, dos a la izquierda, un salto arriba, etc. Los niños que se vayan equivocando pasarán al tablero y escogen una tarjeta y en estas habrán preguntas relacionados con todo lo que vieron en la sesión de esta manera se podrá evaluar los conocimientos que pudieron adquirir los estudiantes sobre los conceptos que se trataron y explicaron en la sesión. Finalmente nos despediremos de ellos.		Compresión media : al momento de iniciar la actividad saben que se les dificulta pero escuchan claramente las indicaciones aunque no las siguen correctamente.	escuchando para aclarar cualquier duda que los niños puedan tener y después de esto se preguntará si queda alguna duda por si algún estudiante queda con alguna duda se le sea aclarada y pueda realizar la actividad con mayor facilidad.
		Comprensión nula: Se les dificulta acatar las indicaciones dadas y al moverse se pierden con facilidad.	

Anexo 9. TME G9

Grupo de grados	Cuarto y quinto		
Profesora:	Grupo 9		
Tiempo total:	Dos horas y media		
Nombre de la sesión:	Podemos ser lo que queramos ser.	Contexto de la unidad:	La diversidad de las profesiones.
Descripción del escenario	Estamos en un mundo muy diverso en la cual existen distintas profesiones. Por eso en esta sesión vamos a volvernos escritores, matemáticos, astronautas y bailarines. Vamos a crear conciencia acerca del espacio que nos rodea y que en él existen dimensiones y perspectivas que lo conforma.		
Rol(es) del estudiante:	Bailarines, astronautas, matemáticos y escritores.	Materiales:	Cinta de colores, parlante, usb con las canciones, caja de cartón en forma de prima rectangular con figuras en las caras laterales y superior en papel celofán, lampara, bolsas de basura negras, hojas, lápices, colores, tetraedro, esfera, bolsa de dulces con sticker.
Estándares involucrados:	Identifico caras, lados y como los cuerpos tridimensionales tienen una perspectiva diferente	Propósito general:	Los estudiantes desarrollan conocimientos acerca del espacio proyectivo a partir de la temática vista en la sesión.

	dependiendo del lugar donde se observen.		
MOMENTO 1: INICIO Busca motivar y relacionar a los estudiantes con los aprendizajes de la sesión a través de los conocimientos previos. Para ello, se plantean tareas que permitan la detección de ideas, por lo que deben ser sencillas y relacionadas con el contexto de los estudiantes.			
Pregunta orientadora:	¿Cómo podemos involucrar al estudiante con las actividades que queremos desarrollar para explorar y conocer los conceptos propuestos?		
Objetivos de aprendizaje:	Esclarecer el espacio proyectivo, activar conocimientos previos en relación a este y que los niños entiendan que esto no es una disciplina intrínseca, sino que esta se manifiesta en todos los aspectos de la vida.		
Tiempo estimado:	40-50 minutos.		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
Se inicia con una presentación entre profesor y estudiantes. Preguntando sus nombres, edades y qué quieren ser cuando sean adultos. Se procede a realizar un estiramiento con canciones donde se realiza una breve coreografía donde los niños se vuelven bailarines. Identificando derecha, izquierda, arriba, a bajo, al frente, atrás. Para esto se utilizan pañuelos o papeles de colores a manera que los estudiantes puedan	Si se pregunta derecha, izquierda, arriba, abajo, adelante, atrás. ¿Van a ser capaces de identificar las dimensiones?	Comprensión total: Identifican y reconocen la dirección explicados por la profesora.	Se procede a explicar ciertos pasos de la coreografía para identificar si los niños tienen una noción correcta acerca de lo que es derecha e izquierda.
		Compresión media: Identifican la dirección de algunos movimientos durante la ejecución del baile.	

relacionar un color con un lado, a manera que esto se le haga más dinámico para los niños. Por ejemplo: Izquierda (morado), derecha (rosado). El objetivo con esta actividad inicial es romper el hielo con los estudiantes y que se muestren más participativos con las próximas actividades.		Comprensión nula: No logran identificar las direcciones de los movimientos.	
	¿Los colores propuestos ayudaran a una mejor identificación de las direcciones?	Compresión total: Los niños identifican con rapidez y sin ninguna dificultad las direcciones con ayuda de los pañuelos.	La profesora les explica a los niños que para la identificación de las direcciones trajo pañuelos de dos colores distintos y que cada color representara una dirección. Procede a explicar la coreografía a detalle esto en acompañamiento de los pañuelos previamente entregados, esperando un desarrollo éxito de la actividad.
		Compresión media: Aun con la ayuda de los pañuelos confunde derecha, izquierda.	

		Compresión nula: No identifican de manera correcta ninguna dirección de movimiento.	
MOMENTO 2: DESARROLLO			

Fomenta el cuestionamiento y el aprendizaje de un nuevo conocimiento matemático a partir de los conocimientos previos de la tarea anterior. Se busca la autorregulación del aprendizaje de los estudiantes por medio de tareas con mayor dificultad, que impliquen una interpretación y relación de conocimientos.			
Pregunta orientadora:	¿Cuántas dimensiones hay y cuales podemos identificar?		
Objetivos de aprendizaje:	Reconocer las características de los cuerpos tridimensionales y reconocer lo que es una perspectiva y vista.		
Tiempo estimado:	50-60 minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
La profesora inicia mostrando y explicando a los estudiantes diferentes cuerpos geométricos (tetraedro, cilindro, esfera) para reconocer saberes previos sobre cuerpos tridimensionales.	¿Reconocen que son las figuras presentadas? ¿Dónde las podemos ver en la vida cotidiana?	Comprensión total: Son capaces de identificar los cuerpos geometría y donde los ven en su día a día.	La profesora presenta los distintos cuerpos geométricos e interroga a los estudiantes acerca de estos, prestando atención a sus respuestas y así mismo observando si estos lo relacionan en su vida diaria como cuerpos geométricos o simplemente como objetos.
		Comprensión media: Los identifican en su vida diaria, pero no tienen conciencia que son cuerpos geométricos.	
		Comprensión nula: No comprende o no posee conocimiento acerca de los cuerpos geométricos ni lo relacionan con la vida cotidiana.	

Los niños se sientan en mesa redonda y en el centro se pone prisma rectangular que en las caras refleja distintas figuras relacionadas con el espacio. Para esto se necesitará propiciar un espacio oscuro. La idea es poner una lampara en el centro para que en un primer momento se reflejen todas las sombras. Posteriormente, se les pedirá a los niños que estén ubicados en distintos lugares, que mencionen que figuras alcanzan a ver y allí se puede proceder a explicar lo que son caras y perspectivas. Seguido de esto se puede reforzar lo que es el reflejo espejo solicitando a varios niños que estén ubicados en posiciones contrarias que tapen un lado solicitado (derecha, izquierda). Culminamos esta actividad haciendo una recolección de los conceptos trabajados	¿Qué piensan los estudiantes que se va a proyectar en el prisma rectangular? ¿Son capaces de reconocer las figuras proyectadas? ¿Pueden identificar las caras de la perspectiva?	Compresión total: Son capaces de identificar y señalar las figuras que componen a la imagen proyecta e identifican las perspectivas.	La profesora inicia colocando el prisma rectangular en el centro de la mesa redonda teniendo previamente acomodado para que el prisma proyecte las imágenes e iniciar a esclarecer los conceptos que se quieren explicar a los alumnos con preguntas ¿Qué logra ver desde su posición? ¿Qué logra ver si lo hace desde la de su compañero?
		Compresión media: Son capaces de identificar las imágenes proyectadas. Identifican caras, pero no perspectivas.	
		Compresión nula: No logran identificar caras, perspectivas o figuras que componen a las imágenes proyectadas.	

y como estos están presentes en nuestra vida.			
MOMENTO 3: CIERRE Realiza una síntesis y estructuración del conocimiento matemático trabajado. Se proponen tareas que permitan identificar el aprendizaje de los estudiantes donde realicen la justificación de los resultados.			
Pregunta orientadora:	¿Pueden los estudiantes identificar las perspectivas y caras de un cuerpo tridimensional?		
Objetivos de aprendizaje:	Reconocer la presencia y tener conciencia del espacio proyectivo en relación a perspectivas y espacio.		
Tiempo estimado:	30-40 minutos.		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
El cierre se inicia entregándoles a los niños una hoja, lápices y colores para que en ella puedan plasmar lo aprendido durante la sesión y tengan libertad de hacer un dibujo en el cual ellos manifiesten lo aprendido. En otra hoja los estudiantes mencionaran que quieren ser de adultos y si creen	¿Hubo comprensión del tema tratado? ¿Falta algo por esclarecer? ¿El niño es capaz de expresarlo en palabras o se le hace más fácil dibujarlo?	Comprensión total: El niño es capaz de escribir y hacer una representación gráfica del tema tratado.	La profesora hace un recuento de las actividades hechas desde un inicio para que el niño recuerde todo lo visto; pone a disposición de los alumnos hojas, lápices y colores, les solicita que en ella escriban y dibujen lo que aprendieron durante la sesión y si consideran que hay algo que no hayan entendido bien. Mientras lo hacen los

que lo aprendido en clase se manifiesta en eso. La profesora de despedida les regala a los alumnos un dulce con un papel mensaje acerca de no rendirse sin importar lo difícil que sea esto para su futuro.		Comprensión media: El niño entiende el tema, pero no es capaz de plasmarlo de manera clara.	alumnos tienen la oportunidad de preguntar y aclarar dudas. Luego de recoger la actividad se les dará a los niños el dulce con un sticker (mensaje de que pueden ser lo que quieran ser).
		Comprensión nula: El niño no entendió el tema tratado por lo tanto no es capaz de plasmar nada.	

Anexo 10. TME G10

Grupo de grados	Cuarto y quinto		
Profesora:	Grupo 10		
Tiempo total:	Tres horas		
Nombre de la sesión:		Contexto de la unidad:	Creatividad y diversión
Descripción de escenario	En este espacio se fomenta la confianza estudiante-docente y estudiante- estudiante, teniendo en cuenta la diferencia de grados. Para esta sesión los estudiantes reconocerán el espacio proyectivo y el concepto de perspectiva junto con su enseñanza de que existirán distintos puntos de vista y todos son respetables, ninguno debe ser símbolo de burla. Además, se abrirá un espacio para dibujar y crear alimentos con plastilina, el cuál seguirá en pro de la confianza y seguridad de cada uno de los estudiantes, de lo que cada uno ve desde donde estÉ ubicado.		
Rol(es) del estudiante:	Artistas y bailarines	Materiales:	Plastilina, mesas, hojas, lapiceros, colores, marcadores, lápices, frutas, celular.
Estándares involucrados:	Utilizo sistema de coordenadas para identificar la percepción espacial. Mediante diferentes vistas se identifica la inteligencia visual espacial.	Propósito general:	Los estudiantes adquieren conocimientos y competencias relacionados con el espacio proyectivo por medio de actividades dinámicas y de creatividad.

MOMENTO 1: INICIO			
Busca motivar y relacionar a los estudiantes con los aprendizajes de la sesión a través de los conocimientos previos. Para ello, se plantean tareas que permitan la detección de ideas, por lo que deben ser sencillas y relacionadas con el contexto de los estudiantes.			
Pregunta orientadora:	¿De qué manera podríamos capturar la atención de los estudiantes y utilizar sus conocimientos previos para abordar de forma imaginativa y enriquecedora los conceptos de espacio topológico y proyectivo, relacionándolos con su propio cuerpo?		
Objetivos de aprendizaje:	Motivar a los estudiantes y promover los conocimientos previos sobre el espacio topológico y proyectivo con respecto a su cuerpo.		
Tiempo estimado:	Cuarenta minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
Al iniciar la sesión la docente saluda y se presenta con los estudiantes. Para romper el hielo y empezar de una manera dinámica se le les brinda la confianza a los estudiantes de preguntarle a la docente durante (5-10min) lo que quieran saber de ella y/o les cause curiosidad. Se dará inicio a la actividad comentándoles que deben seguir unas instrucciones para reconocer su manejo del espacio con respecto a su cuerpo, ejemplo: levantar la mano derecha, sacar el pie izquierdo.	¿Los estudiantes harán preguntas sobre la clase o sobre la docente?	Comprensión total: realizan preguntas sobre el docente, la clase y se establece una corta conversación	Se tienen en cuenta las preguntas de todos los estudiantes, y estas son respondidas respetuosamente.
	¿Habrá participación?	Comprensión media: realizan algunas preguntas personales o sobre la clase, poca participación	Se empiezan a dar ciertas instrucciones para analizar sus conocimientos previos, agilidad y atención, es una actividad para activar a los estudiantes y ubicarlos dentro del plano tridimensional, de igual forma presentar conceptos de representación espejo.
	¿Logran orientarse espacialmente con su cuerpo?	Comprensión nula: no sienten la confianza de realizar alguna pregunta	
	¿Reconocen arriba/abajo/izquierda/derecha?	Comprensión total: mueven la extremidad indicada hacia la orientación indicada	Se aclara la diferencia de números entre las parejas que se formaron previamente al azar, se da inicio a la actividad y se empieza a hacer un dictado de comandos.
		Comprensión media: se confunden con derecha e izquierda y realizan lo mismo que el compañero para completar la orientación	Luego de un tiempo el

Procedemos a armar parejas y ubicarlos de frente el uno con el otro, enumerarlos en 1 y 2, teniendo así cada número una instrucción distinta (1 Brazos Arriba – 2 Brazos Abajo) o una misma instrucción para evidenciar su comportamiento con respecto a la coordinación (1 y 2 brazos a la derecha).	a?		
	¿El estudiante con el numero asignado a la instrucción dada, comprende y hace uso correcto de esta?	Comprensión nula: confunden las orientaciones espaciales respecto a su cuerpo	movimiento mejora la comprensión de los comandos.
		Comprensión total: comprende y realiza la instrucción dada al número que se le ha indicado	
		Comprensión media: realizan la orientación de arriba y abajo pero se confunden con las de derecha e izquierda	
	¿El estudiante con el número 1 o 2 replica el movimiento del compañero con el que se encuentra o reconoce la instrucción dada si es distinta?	Comprensión nula: no comprende las orientaciones y realiza los mismos movimientos que su compañero de enfrente	
MOMENTO 2: DESARROLLO Fomenta el cuestionamiento y el aprendizaje de un nuevo conocimiento matemático a partir de los conocimientos previos de la tarea anterior. Se busca la autorregulación del aprendizaje de los estudiantes por medio de tareas con mayor dificultad, que impliquen una interpretación y relación de conocimientos.			
Pregunta orientadora:	¿Cómo pueden los niños indagar en las distintas variables que se presentan frente a una situación, viéndola desde diferentes perspectivas, que ven?		
Objetivos de aprendizaje:	Comprender los significados de perspectivas, el tamaño, entender el por qué se da el cambio en este y generar espíritu de duda.		
Tiempo estimado:	Sesenta minutos		

Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
Teniendo en cuenta que aproximadamente serán 20 estudiantes, la docente da la indicación de formar dos grupos (10 estudiantes) ubicados en un círculo y en el centro de cada grupo se ubicaran aleatoriamente 5 frutas (de preferencia con distinto tamaño y color) posteriormente se espera que reconozcan la ubicación de estas en el espacio y se hace entrega de plastilina para que cada uno haga una representación que logra observar desde sus perspectivas.	¿Comprenderán que dependiendo del lugar en el que se encuentren logran ver más o menos objetos? ¿Comprenderán que el tamaño del objeto puede variar respecto a la distancia en que se encuentre?	Comprensión total: reconocen las frutas presentadas, modelan las que logra observar desde su posición con su respectivo tamaño Comprensión media: reconocen las frutas, modelan las que desean con tamaños que no corresponden Comprensión nula: no reconoce las frutas y el trabajo de modelado lo realiza basándose en el de su compañero	Se hacen un par de preguntas como, si lograron ver todas las frutas desde donde estaban ubicados, cuales se les difícil, que frutas podían ver solo una pequeña parte, pero no toda la fruta. Se les dice a los estudiantes que cambien de puesto para que ahora tenga otra perspectiva de las diferentes vistas que pueden observar dependiendo de donde se encuentran ubicados.
MOMENTO 3: CIERRE Realiza una síntesis y estructuración del conocimiento matemático trabajado. Se proponen tareas que permitan identificar el aprendizaje de los estudiantes donde realicen la justificación de los resultados.			

Pregunta orientadora:	¿Qué entiende acerca de la perspectiva, por qué cambia el tamaño?		
Objetivos de aprendizaje:	Reconocer que los objetos pueden tener representaciones diversas según los ángulos y las posiciones desde los que se observen.		
Tiempo estimado:	treinta minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
Para finalizar vamos a realizar una comparación y retroalimentación, se dará la indicación de reunirse en círculo y en la mitad del piso se pondrán 5 hojas, cada una con una fruta impresa, se les indicará a los estudiantes que pongan las figuras que modelaron sobre la respectiva hoja. Después de esto se darán unos minutos para que observen cada una de las figuras para así luego realizar una ronda de palabras donde comenten que observaron respecto a los tamaños y que vieron de diferente en cada fruta	¿Qué hay de diferente en cada figura? ¿Por qué hay diferentes cantidades de frutas?	Comprensión total: entiende que por la distancia el objeto se puede ver más grande o más pequeño de lo que realmente es Comprensión media: comprende que el tamaño del objeto puede variar según la distancia pero no sabe cómo se ve más grande o más pequeño Comprensión nula: identifica el objeto por la forma y no por el tamaño, por lo tanto no entiende que el tamaño puede variar respecto a la distancia	Se observará que cantidad de estudiantes podían ver cada fruta, en el tablero se realiza una representación de como estaban ubicadas todas las frutas en la mesa para que de tal forma los estudiantes puedan comprender un poco mejor el coÓmo estaban distribuidas en este espacio.

Apéndices

Apéndice A. Consentimiento informado

Consentimiento informado para recolectar información mediante el análisis discursivo

Título de la investigación: Conocimiento especializado del futuro profesor que enseña el espacio proyectivo en el entorno rural

Investigadora: María Fernanda Mejía Barajas

Directora: Jenny Patricia Acevedo-Rincón

Línea de investigación: Investigación Educativa

Mediante este documento le invitamos a participar del desarrollo de la investigación denominada **“Conocimiento especializado del futuro profesor que enseña el espacio proyectivo en el entorno rural”**, desde la cual se busca *Caracterizar el conocimiento especializado del futuro profesor al enseñar el espacio proyectivo en un entorno rural*. Donde se busca que durante unas sesiones de clase de la actividad académica de Didáctica de la Matemática I se realice un reconocimiento sobre las practicas matemáticas y la planeación que se realiza para zonas rurales.

La recolección de datos está respaldada por la ley 1377 de 2017, capítulo II, artículo 4; en el que se expresa que mediante la autorización del participante se pueden recolectar datos personales con un fin específico. Asimismo, su participación es totalmente voluntaria. Por lo tanto, usted elige si desea hacer parte o no del proceso investigativo propuesto. En caso de que decida participar de la investigación, su rol como informante se encuentra amparado bajo el Decreto Reglamentario 1377 del 2013 dentro del Capítulo II, donde se aborda la autorización de datos específicamente el artículo 9, el cual estipula que usted podrá solicitar (en caso de que desee hacerlo) a la investigadora el retiro de su participación dentro del proyecto y de la presentación de la información ha sido suministrada por usted.

Los resultados de la investigación serán presentados sin dar a conocer su identidad ni la de ningún participante. Los datos serán compartidos con fines académicos en el Trabajo de Investigación y su difusión académica en grupos de investigación y congresos nacionales e internacionales.

Formulación del consentimiento:

Reconozco que la presente investigación busca *Caracterizar el conocimiento especializado del futuro profesor al enseñar el espacio proyectivo en un entorno rural*. La duración de las actividades será de dos sesiones de clases, las cuales incluyen trabajo individual y grupal.

Entiendo que la información que suministre en el cuestionario es estrictamente confidencial y no será usada para ningún otro objetivo fuera de los planteados. He sido informado que puedo realizar preguntas sobre la investigación en cualquier momento, y así mismo, retirar mi participación.

He leído la información proporcionada o me ha sido leída. He tenido la oportunidad de preguntar sobre ella y se me ha contestado satisfactoriamente las preguntas que he realizado. Por lo que consiento voluntariamente participar en esta investigación.

Nombre del estudiante _____
Firma del estudiante _____
Fecha _____
día/mes/año

Nombre del testigo 1 María Fernanda Mejía Barajas
Firma del testigo 1 _____
Fecha _____
día/mes/año

Nombre del testigo 2 Jenny Patricia Acevedo Rincón
Firma del testigo 2 _____
Fecha _____
día/mes/año

Apéndice B. Asentimiento informado

Consentimiento informado para recolectar información mediante el análisis discursivo

Título de la investigación: Conocimiento especializado del futuro profesor que enseña el espacio proyectivo en el entorno rural

Investigadora: María Fernanda Mejía Barajas

Directora: Jenny Patricia Acevedo-Rincón

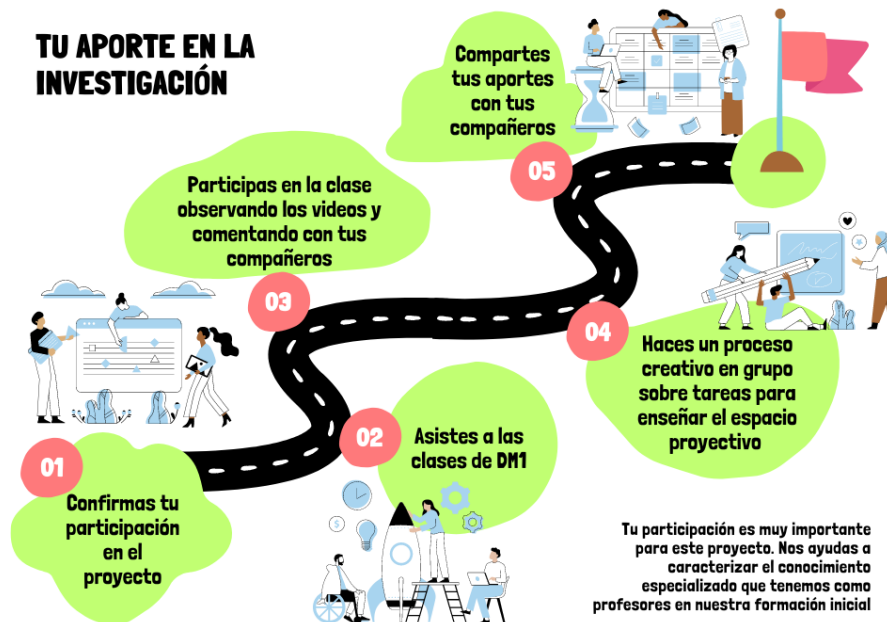
Línea de investigación: Investigación Educativa

Mediante este documento le invitamos a participar del desarrollo de la investigación denominada **“Conocimiento especializado del futuro profesor que enseña el espacio proyectivo en el entorno rural”**, desde la cual se busca *Caracterizar el conocimiento especializado del futuro profesor al enseñar el espacio proyectivo en un entorno rural*. Donde se busca que durante unas sesiones de clase de la actividad académica de Didáctica de la Matemática I se realice un reconocimiento sobre las practicas matemáticas y la planeación que se realiza para zonas rurales.

La recolección de datos está respaldada por la ley 1377 de 2017, capítulo II, artículo 4; en el que se expresa que mediante la autorización del participante se pueden recolectar datos personales con un fin específico. Asimismo, su participación es totalmente voluntaria. Por lo tanto, usted elige sí desea hacer parte o no del proceso investigativo propuesto. En caso de que decida participar de la investigación, su rol como informante se encuentra amparado bajo el Decreto Reglamentario 1377 del 2013 dentro del Capítulo II, donde se aborda la autorización de datos específicamente el artículo 9, el cual estipula que usted podrá solicitar (en caso de que desee hacerlo) a la investigadora el retiro de su participación dentro del proyecto y de la presentación de la información ha sido suministrada por usted.

Los resultados de la investigación serán presentados sin dar a conocer su identidad ni la de ningún participante. Los datos serán compartidos con fines académicos en el Trabajo de Investigación y su difusión académica en grupos de investigación y congresos nacionales e internacionales.

TU APOORTE EN LA INVESTIGACIÓN



He leído la información proporcionada o me ha sido leída. He tenido la oportunidad de preguntar sobre ella y se me ha contestado satisfactoriamente las preguntas que he realizado. Por lo que consiento voluntariamente que mi hijo(a) puede participar en esta investigación.

Nombre del acudiente _____
 Firma del acudiente _____
 Fecha _____
 día/mes/año

Nombre del estudiante _____
 Firma del estudiante _____
 Fecha _____
 día/mes/año

Nombre del testigo María Fernanda Mejía Barajas
 Firma del testigo _____
 Fecha _____
 día/mes/año

Apéndice C. TME entorno urbano

Grupo de grados	Cuarto y quinto		
Profesora:	María Fernanda Mejía Barajas		
Tiempo total:	Tres horas		
Nombre de la sesión:	¡Somos artistas!	Contexto de la unidad:	Manifestaciones artísticas
Descripción del escenario	El mundo está lleno de arte, y este contempla habilidades matemáticas que pueden desarrollan los niños en la educación básica primaria. Para esta sesión, los estudiantes se contemplarán como artistas que están aprendiendo nuevas formas de plasmar los dibujos, como las perspectivas. En este espacio mágico, fomentamos la confianza en sí mismos y celebramos cada intento, sin temor a equivocarse, ya que cada obra es una historia única de amor, curiosidad y autenticidad.		
Rol(es) del estudiante:	Bailarines y dibujantes	Materiales:	Video cámara, micrófonos, parlantes, escenografía del teatro de sombras, regla, objetos, cubos, hojas, flechas de colores, cintas de colores, marcadores, colores y lápices.
Estándares involucrados:	Utilizo sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales. Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades. Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones	Propósito general:	Los estudiantes desarrollan conocimientos y habilidades propios del espacio proyectivo a partir de manifestaciones artísticas como es el dibujo, la danza, el teatro y la escultura.

	bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.		
MOMENTO 1: INICIO Busca motivar y relacionar a los estudiantes con los aprendizajes de la sesión a través de los conocimientos previos. Para ello, se plantean tareas que permitan la detección de ideas, por lo que deben ser sencillas y relacionadas con el contexto de los estudiantes.			
Pregunta orientadora:	¿Cómo podemos despertar el interés de los estudiantes y aprovechar sus conocimientos previos para explorar de manera creativa y enriquecedora los conceptos de espacio topológico y proyectivo con respecto a su propio cuerpo?		
Objetivos de aprendizaje:	Motivar a los estudiantes y promover los conocimientos previos sobre el espacio topológico y proyectivo con respecto a su cuerpo.		
Tiempo estimado:	Cuarenta minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
Para iniciar la sesión la docente saluda y se presenta con los estudiantes. Comenta que la sesión de hoy está dirigida hacia las diferentes manifestaciones del arte porque todos somos artistas. Para comenzar hablará de la danza y comenta que quiere hacer una actividad para moverse con los estudiantes y así animarlos. La docente pone una canción de fondo y da instrucciones de los pasos	Si yo digo arriba/abajo/derecha/izquierda ¿a dónde se mueven?	Comprensión total: mueven las manos hacia las orientaciones correctas	De recurso de apoyo se llevan unas flechas que indiquen el lado derecho o izquierdo de los estudiantes y la profesora los guiará. En el caso de que haya un estudiante que finalmente no reconozca, se le pondrá una cinta roja en la mano derecha y una azul en la izquierda para su reconocimiento
		Comprensión media: conocen la orientación de arriba y abajo pero se confunden en derecha e izquierda	
		Comprensión nula: tienen una confusión con todas las orientaciones espaciales	
	¿Cómo hacen medio giro? ¿Cómo hacen un cuarto de giro? ¿Cómo hacen un giro?	Comprensión total: realizan los giros de acuerdo con la instrucción dada y quedan mirando hacia el lugar correcto del aula de clases	Se explica por tiempos. El primer tiempo es la posición inicial, el segundo tiempo es un giro pequeño viendo a la pared de la puerta, el tercer tiempo es otro giro viendo hacia la parte de atrás y el cuarto giro es viendo a la pared opuesta,
		Comprensión media: conocen el giro completo y el medio giro pero se confunden cuando	

de baile de lateralidad (ej. Tres aplausos arriba a la derecha y tres abajo a la izquierda). Después de algunos patrones memorizados, la docente les dirá a los estudiantes que se giren de modo que la mitad del salón quede viendo a la otra mitad y realicen el baile en modo espejo.		se habla de un cuarto de giro	cuando vuelven a la posición inicial es un giro y cada giro pequeño es un cuarto, y dos cuartos forman medio giro. Después de hacen ejercicios de repeticiones de giros para la comprensión en dirección derecha e izquierda
		Comprensión nula: no realizan los movimientos de un giro	
		Comprensión total: conocen que el espejo hace una reflexión de nuestro cuerpo	
		Comprensión media: saben que el espejo es un reflejo de nosotros pero no especifican la reflexión	
	¿Cómo nos reflejamos en los espejos? ¿Hacen exactamente lo mismo que nosotros?	Comprensión nula: no saben que el espejo nos refleja exactamente, es decir, no sigue los movimientos del cuerpo	Con un estudiante la docente le dice que haga movimientos de levantar la mano derecha o izquierda y moverse y ella lo hace igual ¿el espejo haría lo mismo o al contrario? Desde ahí retroalimenta sobre cómo funciona el reflejo y la lateralidad para el cambio de baile, desde donde guiara a ambos grupos
La profesora va a proyectar en el televisor un vídeo de los estudiantes bailando el	¿Qué paso cuando hicieron el giro del baile? ¿Qué se les dificultó?	Comprensión total: reconocen que el giro los hizo cambiar la reflexión de su cuerpo con respecto a la de sus compañeros	Se retroalimenta desde el reto que es movernos hacia la derecha e izquierda. Para complementar, puede poner el

final del video desde diferentes perspectivas.		Comprensión media: saben que el giro se les dificulta porque cambiaron de posición pero no reconocen el movimiento espejo	ejemplo de cuando caminamos de un punto hacia otro y como al cambiar nuestro cuerpo modificamos la derecha e izquierda.
		Comprensión nula: no pueden realizar el giro porque pierden los movimientos	
	¿Qué se ve desde esta toma desde arriba? ¿Por qué se ve diferente al baile desde abajo en la cancha?	Comprensión total: identifican que desde arriba se proyectan las cabezas y algunos movimientos de desplazamiento. Se ve diferente porque cambia la perspectiva desde que lo vemos	En el caso de que identifiquen que la perspectiva desde arriba se retroalimenta, de lo contrario se muestra un video desde la perspectiva de frente para hacer comparativos entre todos
		Comprensión media: Reconocen que hay un cambio desde la toma de arriba y abajo pero no saben que se debe	
		Comprensión nula: no identifican diferencias entre las tomas	

MOMENTO 2: DESARROLLO

Fomenta el cuestionamiento y el aprendizaje de un nuevo conocimiento matemático a partir de los conocimientos previos de la tarea anterior. Se busca la autorregulación del aprendizaje de los estudiantes por medio de tareas con mayor dificultad, que impliquen una interpretación y relación de conocimientos.

Pregunta orientadora:	¿Cuáles son las características de una figura tridimensional?		
Objetivos de aprendizaje:	Reconocer las características de las figuras tridimensionales		
Tiempo estimado:	Ochenta minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación

La profesora presentará la tercera manifestación artística: el teatro. La profesora pone en el escritorio el escritorio el teatro de sombras y dentro ubica objetos tridimensionales que se puedan identificar desde diferentes perspectivas. Los estudiantes deben jugar a la adivina que hay dentro del teatro comenzando a describir el objeto y sus características, donde pueden dibujar en el tablero como creen que es, hasta que finalmente lo descifren.	Quién adivinara ¿qué hay en el teatro? ¿cómo lo ven?	Comprensión total: describen los objetos que están en el teatro por las características que proyecta su sombra	La profesora va a comenzar a hacer preguntas básicas de las características para que los estudiantes entren en contacto con el juego: ¿grande o pequeño? ¿es flexible o rígido? ¿tiene bordes afilados o redondos? También toma el tablero como apoyo para dibujar las ideas de los estudiantes y acercarlos a la idea del objeto.
		Comprensión media: reconocen los objetos que están en el teatro pero no pueden describir sus características	
		Comprensión nula: no identifican los objetos con base en la proyección de su sombra	
La profesora les pedirá a los estudiantes que se organicen en grupos de cinco personas. Para explicar la última tarea, ello va a tomar una de las representaciones de los cubos y dibujará las proyecciones ortogonales	¿Cómo podemos dar las instrucciones para que un compañero dibuje una figura que no ve?	Comprensión total: identifican instrucciones como la descripción de cubo por cubo y la necesidad de reconocer las orientaciones espaciales	Con la ayuda del tablero la profesora va a dibujar la vista de una figura de cubos diferente y generara las instrucciones paso a paso con ayuda de los estudiantes

del objeto mientras explica a que hace alusión cada representación. Después, toma una sola proyección y describirá el dibujo cuadro por cuadro mientras lo dibuja en el tablero. Hace alusión a las orientaciones y lateralidades. Una vez organizados los estudiantes, se dividirán en dos subgrupos: 1) describe la figura que forman los cubos y las características del dibujo cubo por cubo y 2) sin ver y solo escuchando las instrucciones, deben representar la figura. Los estudiantes solo tomaran una vista de la figura.		Comprensión media: no comentan estrategias en específico pero saben que es importante guiarse por orientaciones espaciales	
		Comprensión nula: no saben cómo realizar la tarea	
MOMENTO 3: CIERRE			
Realiza una síntesis y estructuración del conocimiento matemático trabajado. Se proponen tareas que permitan identificar el aprendizaje de los estudiantes donde realicen la justificación de los resultados.			
Pregunta orientadora:	¿Cuáles son las perspectivas que tiene una figura tridimensional?		
Objetivos de aprendizaje:	Reconocer que los objetos pueden tener representaciones diversas según los ángulos y las posiciones desde los que se observen.		
Tiempo estimado:	Sesenta minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación

Ahora, es el momento de la última manifestación de arte: el dibujo. La profesora les preguntará a los estudiantes qué han dibujado, cada cuanto lo hacen, qué tienen en cuenta al dibujar; con el fin de establecer una conexión entre lo que ellos conocen del dibujo y el dibujo desde el espacio proyectivo. Posteriormente, la profesora organizará grupos cinco estudiantes y en el centro del grupo pondrá una figura realizada con cubos. Primero, la profesora les dice a los estudiantes que comenten todo lo que visualicen la imagen que forma el cubo desde su perspectiva	¿Qué dibujo forman los cubos desde dónde están? ¿Es lo mismo que tiene su compañero?	Comprensión total: Reconocen que desde la posición de cada uno es diferente lo que observan, pues los dibujos y la cantidad de cubos cambian Comprensión media: Reconocen que los dibujos cambian pero no lo relacionan con el espacio y los cubos	La profesora debe primar la autonomía de los estudiantes en esta actividad, donde ellos desarrollen los conocimientos y habilidades espaciales. No obstante, debe estar pendiente de cada grupo de los estudiantes para resolver dudas y apoyar con explicaciones a los estudiantes que se les dificulta comprender que deben dibujar.
--	---	--	---

(formas, dibujos, colores, tamaños, cantidades). Después, les pedirá a los estudiantes que dibujen en detalle cómo ven ellos los cubos, aclarando que todas las obras artísticas deben quedar diferentes.		Comprensión nula: Todos obtienen el mismo dibujo porque es la misma figura	
--	--	---	--

Apéndice D. Rúbrica para evaluar una planeación

Aspectos por evaluar	Categorías	Sí	No	Observaciones
Conocimiento de los tópicos	Existen definiciones matemáticas claras para el aprendizaje			
	Los procedimientos hacen alusión al cómo se hace y por qué se hace así			
Conocimiento de la estructura de las matemáticas	Son claras las conexiones basadas en el incremento de la complejidad matemática			
Conocimiento de la práctica matemática	Se presentan situaciones donde es necesario el uso del lenguaje formal			
	Las tareas propuestas tienen forma de validación y demostración			
Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas	El conocimiento está respaldado en una teoría de aprendizaje matemático			
	La planeación demuestra la forma en la que interactúa el estudiante con el contenido matemático			
	Existe una clasificación que permite identificar las fortalezas y debilidades del aprendizaje matemático			
Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas	Los materiales y recursos están descritos y son accesibles y apropiados para la población y el contexto de los estudiantes			
	La situación de aprendizaje es adecuada para el contexto de los estudiantes y se relaciona con el contenido matemático			
	Las tareas propuestas: -Son adecuadas para el nivel de desarrollo de los niños de educación básica primaria -Son pertinentes para el contexto (rural/urbano) -Están diseñadas para fomentar la exploración y comprensión del espacio proyectivo			

	-Son variadas y ofrecen diferentes enfoques para comprender el tema			
	Los objetivos de la planeación están claramente establecidos y son coherentes con el contenido matemático			
Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas	La planeación cuenta con momentos y tareas que permiten la evaluación y seguimiento del conocimiento de los estudiantes			
TOTAL:				

Apéndice E. TME entorno rural

Grupo de grados	Cuarto y quinto		
Profesora:	María Fernanda Mejía Barajas		
Tiempo total:	120 minutos		
Nombre de la sesión:	Mentes artísticas	Contexto de la unidad:	Manifestaciones artísticas
Descripción del escenario	El mundo está lleno de arte, y este contempla habilidades matemáticas que pueden desarrollar los niños en la educación básica primaria. Para esta sesión, los estudiantes son artistas que están aprendiendo nuevas formas de plasmar los dibujos, como las perspectivas. En este espacio mágico, fomentamos la confianza en sí mismos y celebramos cada intento, sin temor a equivocarse, ya que cada obra es una historia única de amor, curiosidad y autenticidad.		
Rol(es) del estudiante:	Artistas	Materiales:	Frutas Plastilina Imágenes de frutas Plantilla de cubo plegable Tijeras Colbón Tiza Reproductor de música Marcador Hojas Reglas Lápices
Estándares involucrados:	Utilizo sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales.	Propósito general:	Desarrollar conocimientos y habilidades del espacio proyectivo a partir de manifestaciones artísticas como el dibujo, la escultura y la expresión corporal.

	Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades. Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.		
MOMENTO 1: INICIO Busca motivar y relacionar a los estudiantes con los aprendizajes de la sesión a través de los conocimientos previos. Para ello, se plantean tareas que permitan la detección de ideas, por lo que deben ser sencillas y relacionadas con el contexto de los estudiantes.			
Pregunta orientadora:	¿Cómo puedo recrear con mi cuerpo formas y figuras geométricas?		
Objetivos de aprendizaje:	Recrear con nuestro cuerpo formas y figuras geométricas teniendo en cuenta la perspectiva de nuestra vista		
Tiempo estimado:	20 minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
Para iniciar la sesión la docente se presenta con los estudiantes y comenta el objetivo de la clase: aprender habilidades matemáticas mediante el arte. La clase continua con una dinámica de participación, donde se espera que los	¿Qué debo tener en cuenta para imitar el cuerpo de mi compañero?	Comprensión total: El estudiante se ubica en la posición que se encuentra su compañero y las lateralidades de la expresión corporal coinciden.	La docente realiza un ejercicio modelado con uno de los estudiantes, especificando que tiene en cuenta para recrear la expresión corporal que tiene el estudiante.

estudiantes se presenten unos a otros y activen los conocimientos previos que tiene sobre las figuras geométricas, el espacio topológico y proyectivo. Se comienza a rotar dos pelotas (una roja y una		Comprensión media: Las lateralidades de la expresión corporal coinciden pero el estudiante no se ubica en la posición de su compañero.	
--	--	---	--

azul) con el juego tingo tingo tango. Es estudiante que tenga la pelota roja debe presentar al que tenga la pelota azul; luego el estudiante de la pelota azul debe hacer una figura o pose con su cuerpo y el estudiante de la pelota roja debe imitarla teniendo en cuenta lateralidades, ubicación y perspectivas.		Comprensión nula: El estudiante no recrea la expresión corporal que tiene su compañero.	
--	--	--	--

Posteriormente se realiza otra dinámica de expresión corporal, donde todos los estudiantes se organizan en parejas. La docente pone una canción y deben bailar; cuando se detiene la canción la docente dice una figura geométrica que tienen que recrear con el cuerpo (por ejemplo, un triángulo).	¿Todas las figuras geométricas son iguales? O ¿Podemos recrear la misma figura de otras formas?	Comprensión total: El estudiante reconocen que existen otras formas de recrear figuras con nuestros cuerpos.	En el caso en el que haya diversidad de expresiones corporales sobre una misma figura se les pide a los estudiantes pasar al frente para que todos observen las diferencias. Si no existen otras formas, la docente pregunta si piensen en otra forma en la que se pueda recrear la misma figura. Si no lo hacen, la docente puede modelar una con un estudiante para apreciar las diferencias entre las formas de recrear la figura.
		Comprensión media: El estudiante identifican las figuras de los cuerpos pero no proponen otras formas de llegar a la misma figura	
	¿Desde dónde tenemos que ver la figura geométrica para reconocer su forma?	Comprensión nula: El estudiante no realizan la figura geométrica presentada.	La docente toma a un grupo de modelo y pone a los estudiantes a observar la figura de frente; luego pone a algunas sillas para que los estudiantes observen la figura desde arriba y describan la diferencia.
		Comprensión total: El estudiante identifica las diferentes perspectivas desde las cuales se visualiza una figura geométrica.	

		Comprensión media: El estudiante identifica la figura pero no reconoce desde que perspectiva puede obtener su vista completa.	
		Comprensión nula: El estudiante no identifica la figura desde otras vistas.	
MOMENTO 2: DESARROLLO			
Fomenta el cuestionamiento y el aprendizaje de un nuevo conocimiento matemático a partir de los conocimientos previos de la tarea anterior. Se busca la autorregulación del aprendizaje de los estudiantes por medio de tareas con mayor dificultad, que impliquen una interpretación y relación de conocimientos.			
Pregunta orientadora:	¿Cómo varía la imagen de un objeto desde los diferentes puntos de vista?		
Objetivos de aprendizaje:	Comprender que la imagen de un objeto puede variar dependiendo del punto de vista en el que se encuentre el observador		
Tiempo estimado:	80 minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación
La docente divide el grupo en dos subgrupos y en el centro de cada uno va a poner una bandeja con frutas. Hablará con los estudiantes sobre que frutas ven, qué les gusta, cómo están ubicadas las frutas.	¿Cuáles frutas pueden visualizar? ¿Cómo están ordenadas?	Comprensión total: El estudiante reconoce que las frutas tienen diferentes tamaños y desde el punto de vista que observemos las frutas varía la imagen.	La docente debe aclarar que la escultura de las frutas es desde el punto de vista en el que están y lo que alcanzan a ver. Para ello, va a describir las frutas que ve si está sentada en un lugar del circulo y las que ve si

Después, pondrá unas plastilinas en el medio y en parejas (con el que está al lado) va a representar las frutas que alcanza a ver. Al final, la docente pondrá una hoja con la imagen de cada fruta y los estudiantes deben ubicar encima de la hoja las frutas que recrearon. Allí se verá la diferencia de tamaños y el por qué algunos grupos hicieron otras frutas que ellos no vieron.		Comprensión media: El estudiante identifica que las frutas tienen diferentes tamaños pero no asocia la perspectiva con la vista propia que tiene.	esta de pie en otro lugar del círculo.
		Comprensión final: El estudiante describe las frutas por tamaños. No tiene en cuenta la perspectiva desde la vista que tiene.	
Para iniciar esta tarea, los estudiantes deben estar sentados en sus puestos, donde a cada uno se le va a entregar una plantilla plegable de un cubo; el cual ellos deben armar recortando y pegando sus caras. Allí, los estudiantes observan como una figura bidimensional compone un cuerpo tridimensional.	¿Qué figura puede armar esta plantilla?	Comprensión total: El estudiante identifica que puede armar un cubo y justifica que la plantilla tiene seis cuadrados iguales.	La docente explica las características que tiene la plantilla para presuponer que arma un cubo.
		Comprensión media: El estudiante identifica que la plantilla arma un cubo pero no justifica por qué.	

Cuando los estudiantes tengan los cubos, la docente les dirá que van a dibujar puntos como si fueran un dado (1-6), teniendo en cuenta que todas las caras opuestas deben sumar siete.		Comprensión nula: El estudiante asocia la plantilla a otras figuras que no corresponden a la construcción tridimensional.	La docente se apoya de un cubo Rubik y sus colores para explicar las caras opuestas que tiene un cubo.
	¿Cuáles son las caras opuestas de un cubo?	Comprensión total: El estudiante reconoce que los opuestos son los que están directamente al otro lado de la figura.	
		Comprensión media: El estudiante conocen la palabra opuesto como algo contrario pero no lo relacionan con el cubo.	
		Comprensión nula: El estudiante no identifica que es un opuesto.	
MOMENTO 3: CIERRE			
Realiza una síntesis y estructuración del conocimiento matemático trabajado. Se proponen tareas que permitan identificar el aprendizaje de los estudiantes donde realicen la justificación de los resultados.			
Pregunta orientadora:	¿Cómo se presenta el espacio proyectivo en el movimiento de las personas?		
Objetivos de aprendizaje:	Reconocer el espacio proyectivo desde patrones de movimiento asociados a la lateralidad		
Tiempo estimado:	20 minutos		
Tareas	Preguntas del profesor	Respuestas esperadas	Retroalimentación

La docente guiará a los estudiantes a un espacio adecuado para realizar la siguiente actividad, una cancha o una zona grande al aire libre, solo es necesario un suelo pavimentado. La docente rápidamente dibujará dos rayuelas en el piso, haciendo uso tiza, a continuación, pedirá a los estudiantes que se organicen en dos filas de manera ordenada (cada fila va para una rayuela). Se darán las indicaciones con un voluntario para que quede clara la tarea. En primera instancia la docente utilizará indicaciones verbales, tales como “un salto al frente, a la derecha, dos saltos atrás” y determinará en qué momento debe entrar el siguiente jugador. Cuando sigan las indicaciones sin mayor problema podemos hacer uso de la música. En la segunda etapa de la actividad, la docente	¿Los movimientos de nuestro compañero se van a ver de la misma forma que los propios?	Comprensión total: El estudiante reconoce los patrones de movimiento asociados a la lateralidad.	La docente realiza el modelado de la tarea con ayuda de un voluntario. Resaltará las instrucciones que da con su movimiento. Luego le pedirá a un estudiante que lo haga junto a ella en la rayuela. Se repite el proceso cuando se trabaje en modo espejo.
---	--	---	--

ubicará dos filas de igual número de estudiantes, cada una debe ser ubicada en el lado opuesto al otro para no provocar obstrucción. Se realizará la misma actividad anterior con la variación de que los estudiantes tendrán un compañero al frente en modo espejo. Igualmente se puede incluir la música cuando se vea conveniente.			
---	--	--	--