

MODELOS DE GALAXIAS PLANAS FINITAS
CON CURVAS DE ROTACIÓN REALISTAS
SIN HALOS DE MATERIA OSCURA

SANDRA MARCELA PLATA PLATA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
2008

MODELOS DE GALAXIAS PLANAS FINITAS
CON CURVAS DE ROTACIÓN REALISTAS
SIN HALOS DE MATERIA OSCURA

TRABAJO DE GRADO
PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

SANDRA MARCELA PLATA PLATA

DIRECTOR: GUILLERMO A. GONZÁLEZ V., PH.D.

CODIRECTOR: JAVIER F. RAMOS C., M.Sc.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

2008

*A Dios,
por permitirme culminar con éxito esta importante etapa académica.*

*A Sarita, mi mami,
quien con su gran apoyo, esfuerzo y dedicación
me ha brindado la mejor oportunidad de mi vida.
Gracias por confiar en mi, y
por estar siempre conmigo en cada momento.
Te quiero mucho mamita.*

*A todas las personas que con su compañía y amistad,
hicieron especial e inolvidable este paso por la Universidad,
a MaE, Claudia, Albita, Janeth, Liya y Rosilla,
gracias por estar ahí, porque realmente me diverti,
y porque sé que puedo contar con cada una de ustedes en cada momento.
Recuerden que también pueden contar conmigo siempre.*

AGRADECIMIENTOS

Agradezco inicialmente al Dr. Guillermo A. González, por permitirme hacer parte del Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación (GIRG).

A Javi Ramos por su colaboración en esta tesis, su sentido del humor amenizó bastante todo el trabajo, y su pilera le dió una mejor dirección.

A todos los compañeros del grupo GIRG, quienes de alguna manera hicieron su contribución al trabajo a partir de su experiencia.

RESUMEN

TITULO: MODELOS DE GALAXIAS PLANAS FINITAS CON CURVAS DE ROTACIÓN REALISTAS SIN HALOS DE MATERIA OSCURA.¹

AUTOR: Sandra Marcela Plata Plata.²

PALABRAS CLAVES: Dinámica de Galaxias.

CONTENIDO:

En este trabajo de grado se proponen modelos destinados a describir galaxias discoidales de extensión finita por medio de la teoría Newtoniana convencional, sin recurrir a la contribución de un halo esférico de materia oscura. Estos modelos logran describir, en forma satisfactoria, el comportamiento de las curvas de rotación al igual que la distribución de masa.

En particular, se tomaron como objeto de estudio y análisis algunas de las curvas de rotación observacionales consideradas en un trabajo previo realizado por Brownstein y Moffat. Así, a través del método planteado por Hunter se construyó una familia de discos finitos axialmente simétricos, de tal forma que las constantes de expansión que determinan tanto la densidad de masa como el potencial gravitacional, fueron ajustadas mediante una comparación directa con las curvas de rotación observadas. Dichas constantes, denotadas como \tilde{C}_{2k} , establecen el modelo de disco para cada una de las galaxias seleccionadas: NGC 1003, NGC 3877, NGC 3917, NGC 3949, NGC 4010, NGC 4183 Y NGC 5585.

Finalmente, se determina la masa total para cada una de ellas, al integrar la densidad de materia anteriormente encontrada sobre el área total del disco, la cual es obtenida en Kg que es luego expresada en unidades de masas solares.

¹Proyecto de Grado.

²Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Dr. Guillermo A. González.
Codirector: M.Sc Javier F. Ramos.

ABSTRACT

TITLE: FINITE FLAT GALAXY MODELS WITH REALISTIC ROTATION CURVES WITHOUT DARK MATTER HALOS.³

AUTHOR: Sandra Marcela Plata Plata.⁴

KEYWORDS: Galaxies Dynamics.

ABSTRACT:

In this undergraduate work, models are proposed to describe disk galaxies of finite extension through conventional Newtonian theory, without resort to the contribution of a dark matter spherical halo. These models are able to describe in a satisfactory way the behavior of the observational rotation curves as well as the mass distribution.

In particular, we have taken some observational rotation curves as an object of study and analysis considered in a previous work done by the authors Brownstein and Moffat. Thus, through the Hunter method, it was built a finite family of disk galaxies axially symmetric, so the expansion constants that determine both the potential gravitational and the density mass, were adjusted through a direct comparison with the observed rotation curves. These constants, named as \tilde{C}_{2k} , establish each one of the disk model for the selected galaxies: NGC 1003, NGC 3877, NGC 3917, NGC 3949, NGC 4010, NGC 4183 and NGC 5585.

Finally, the total mass is determined by means of the integral of the density mass previously found on the total area of the disk, which is obtained in Kg units and then expressed in solar masses units.

³Degree Project.

⁴Faculty of Sciences. Physics School. Director: Dr. Guillermo A. González.
Codirector: M.Sc Javier F. Ramos.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL	I
ÍNDICE DE FIGURAS	III
ÍNDICE DE TABLAS	V
INTRODUCCIÓN	1
1. MODELOS PLANOS DE DISCOS FINITOS	7
1.1. Teoría del Potencial	7
1.1.1. Potencial Gravitacional	7
1.1.2. Pares Potencial-Densidad para Sistemas Delgados	10
1.2. Método de Hunter	12
1.2.1. Sistema de Coordenadas Esferoidales Oblatas	12
1.2.2. Solución General de la Ecuación de Laplace	15
1.2.3. Solución General de Interés Físico	18
1.2.4. Densidad Superficial	19
1.2.5. Velocidad Circular	20

2. PARES DE POTENCIAL-DENSIDAD CON CURVAS DE ROTACIÓN REALISTAS	22
2.1. Formulación del Modelo	22
2.2. Ajuste de las Curvas de Rotación	26
2.3. Distribución de Masa	41
2.4. Potencial Gravitacional	44
 CONCLUSIONES	 45
 APÉNDICES	 47
A.1. Curvas de Rotación Observacionales	47
 BIBLIOGRAFÍA	 51

ÍNDICE DE FIGURAS

I.1.	Clasificación de Hubble de Galaxias	1
I.2.	Curva de Rotación de un disco exponencial (línea continua)[4].	3
I.3.	Curvas de Rotación teórica y observacional	4
I.4.	Curva observacional V_c [km/s] vs. R [kpc]. Galaxia NGC 4157 perteneciente al cúmulo de galaxias de la Osa mayor.	6
1.1.	Coordenadas Esferoidales Oblatas	14
2.1.	Curvas de rotación V_c [km/s] vs. \tilde{R} . Galaxia NGC 1003. Puntos datos observacionales, línea continua curva ajustada.	28
2.2.	Curvas de rotación V_c [km/s] vs. \tilde{R} . Galaxia NGC 3877. Puntos datos observacionales, línea continua curva ajustada.	30
2.3.	Curvas de rotación V_c [km/s] vs. \tilde{R} . Galaxia NGC 3917. Puntos datos observacionales, línea continua curva ajustada.	32
2.4.	Curvas de rotación V_c [km/s] vs. \tilde{R} . Galaxia NGC 3949. Puntos datos observacionales, línea continua curva ajustada.	34
2.5.	Curvas de rotación V_c [km/s] vs. \tilde{R} . Galaxia NGC 4010. Puntos datos observacionales, línea continua curva ajustada.	36
2.6.	Curvas de rotación V_c [km/s] vs. \tilde{R} . Galaxia NGC 4183. Puntos datos observacionales, línea continua curva ajustada.	38
2.7.	Curvas de rotación V_c [km/s] vs. \tilde{R} . Galaxia NGC 5585. Puntos datos observacionales, línea continua curva ajustada.	40

2.8. Densidad superficial de masa $\Sigma(R)$ [Kg/Km^2] vs. \tilde{R}	42
2.9. Densidad superficial de masa $\Sigma(R)$ [Kg/Km^2] vs. \tilde{R}	43
A.1. Curva observacional V_c [km/s] vs. R [kpc]. Galaxia Scd NGC 1003.	47
A.2. Curva observacional V_c [km/s] vs. R [kpc]. Galaxia Sc NGC 3877.	48
A.3. Curva observacional V_c [km/s] vs. R [kpc]. Galaxia Scd NGC 3917.	48
A.4. Curva observacional V_c [km/s] vs. R [kpc]. Galaxia Sbc NGC 3949.	49
A.5. Curva observacional V_c [km/s] vs. R [kpc]. Galaxia SBd NGC 4010.	49
A.6. Curva observacional V_c [km/s] vs. R [kpc]. Galaxia Scd NGC 4183.	50
A.7. Curva observacional V_c [km/s] vs. R [kpc]. Galaxia SBcd NGC 5585.	50

ÍNDICE DE TABLAS

2.1. Datos Observacionales NGC 1003	27
2.2. Valores ajustados para la NGC 1003	27
2.3. Datos Observacionales NGC 3877	29
2.4. Valores ajustados para la NGC 3877	29
2.5. Datos Observacionales NGC 3917	31
2.6. Valores ajustados para la NGC 3917	31
2.7. Datos Observacionales NGC 3949	33
2.8. Valores ajustados para la NGC 3949	33
2.9. Datos Observacionales NGC 4010	35
2.10. Valores ajustados para la NGC 4010	35
2.11. Datos Observacionales NGC 4183	37
2.12. Valores ajustados para la NGC 4183	37
2.13. Datos Observacionales NGC 5585	39
2.14. Valores ajustados para la NGC 5585	39
2.15. Constante \tilde{C}_0 y Masa total en Kg y \mathcal{M}_\odot	41

INTRODUCCIÓN

Un sistema estelar es un conjunto de estrellas y otros cuerpos ligados gravitacionalmente. Los sistemas estelares varían en más de 14 órdenes de magnitud en tamaño y masa, desde las estrellas binarias y grupos de estrellas que contienen de 10^2 a 10^6 estrellas, galaxias que contienen entre 10^5 y 10^{12} estrellas, hasta vastos grupos (clusters) de galaxias que contienen miles de ellas. De acuerdo al sistema de clasificación revisado de Hubble [3], se pueden distinguir 4 tipos básicos de galaxias, Elípticas (E0-E7), Espirales (Sa-Sd), Espirales barradas (SBa-SBd), e Irregulares (Irr) y la clase de transición de galaxias lenticulares (S0).

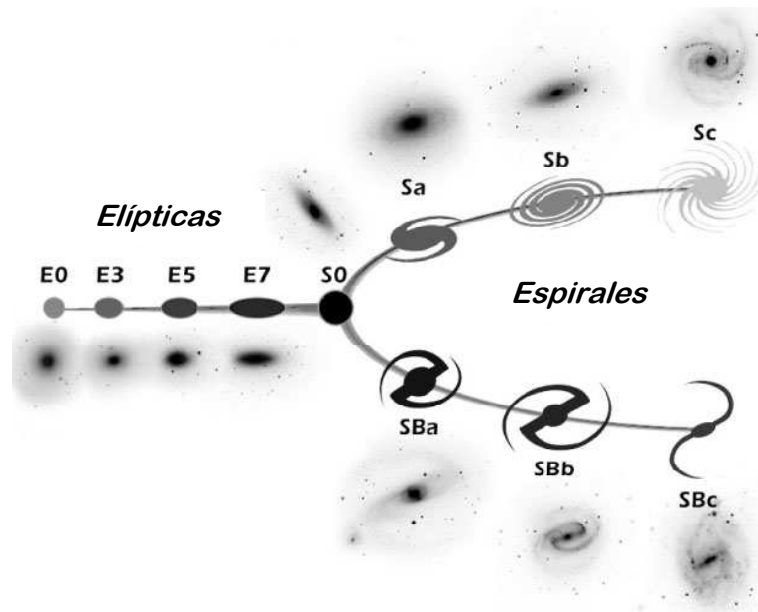


Figura I.1: Clasificación de Hubble de Galaxias

Un ejemplo de un sistema estelar típico, es el sistema estelar al cual pertenecemos llamado la Vía Láctea, o simplemente La Galaxia. Dentro de los constituyentes principales que conforman la galaxia, se encuentran cerca de 10^{11} estrellas con una masa total de aproximadamente 5×10^{10} masas solares, denotado usualmente como $5 \times 10^{10} M_{\odot}$, donde $1M_{\odot} = 1,99 \times 10^{30} kg$. La mayoría de las estrellas en la galaxia viajan en orbitas

cercanamente circulares alrededor de un disco delgado cuyo radio es aproximadamente de 10^4 parsecs ($1\text{ parsec} \equiv 1\text{ pc} \equiv 3,086 \times 10^{16}\text{ m}$) o 10 kiloparsecs. Este disco delgado también es conocido como disco galáctico, el cual es aplanado y aproximadamente axisimétrico con un grosor⁵ de aproximadamente 0,5 kpc. El disco contiene además gas, en su mayoría hidrógeno atómico y molecular, concentrado en nubes con un amplio rango de masas y tamaños, además de pequeñas partículas sólidas (polvo), el cual hace opaco el gas interstelar en las longitudes de onda visible sobre distancias de varios kiloparsecs. La mayoría del hidrógeno es neutro en lugar de ionizado, y es denotado como HI. El gas y el polvo son llamados el medio interstelar (ISM), y su masa total es únicamente de alrededor del 10 % de la masa en las estrellas; así el ISM tiene una pequeña influencia directa sobre la dinámica de la galaxia [4].

Una medida de la distribución de las estrellas en el disco galáctico es el brillo superficial, que es la luminosidad estelar emitida por unidad de área del disco. Observaciones de otros discos de galaxias sugieren que el brillo superficial es aproximadamente una función exponencial del radio $I(R) = I_d \exp(-R/R_d)$.

Otro observable que proporciona información acerca de la distribución de masa en una galaxia es la *Velocidad Circular de Rotación*. Ésta se define como la velocidad tangencial de las estrellas en órbitas cercanamente circulares alrededor del disco galáctico a un radio R denotada como $V_c(R)$, un gráfico de $V_c(R)$ versus R es llamado *Curva de Velocidad Circular* o *Curva de Rotación*.

Se considera que las curvas de rotación, son la principal herramienta para la determinación de la distribución de masa en las galaxias. Estas curvas proveen información fundamental para el entendimiento de la dinámica, evolución, y formación de galaxias.

El comportamiento normal de una curva de rotación correspondiente a un modelo de disco Newtoniano típico puede ser dividido en tres regiones [4]:

- Una región interna, en la cual la velocidad aumenta linealmente con la distancia al centro.
- Una región donde la velocidad alcanza su máximo y luego comienza a declinar (llamado **turnover radius**).
- Una **región Kepleriana** en la cual el potencial del disco se asemeja al potencial de una masa puntual, así que la velocidad de rotación decae como $R^{-1/2}$.

⁵El grosor característico del disco galáctico se define como la razón de la densidad superficial del disco y su densidad de volumen en el plano galáctico.

Estas tres regiones se encuentran en la mayoría de las curvas de rotación obtenidas teóricamente a partir de de una distribución de masa finita, esférica o aplanada, y axialmente simétrica (fig. I.2).

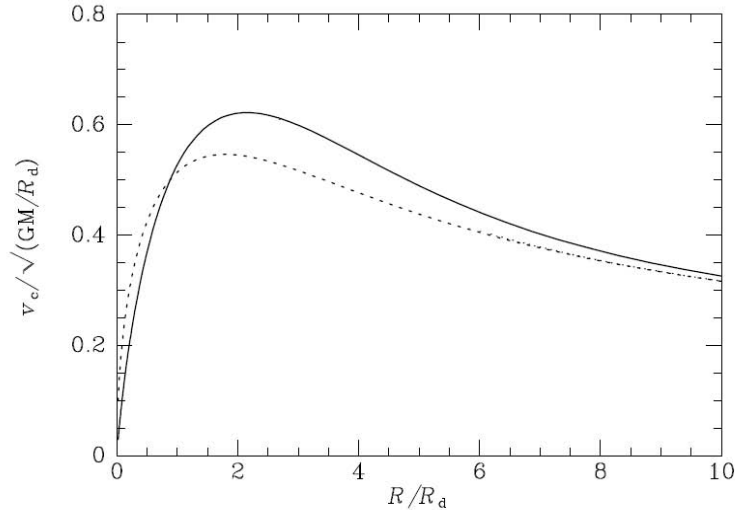


Figura I.2: Curva de Rotación de un disco exponencial (línea continua)[4].

Las curvas de rotación observacionales pueden ser medidas ópticamente a partir de las líneas de emisión en las regiones de HII, o usando la línea de emisión de los 21 *cm* del hidrógeno neutro. La era de las observaciones ópticas de las velocidades de rotación en galaxias espirales data de 1952 y estaban usualmente restringidas a las partes internas de las galaxias. En 1970 cerca de treinta curvas de rotación y masas de galaxias espirales fueron publicadas [5], todas basadas sobre la suposición que la región sin observar era Kepleriana. Como resultado de las mejoras en las observaciones de las curvas de rotación, se obtuvieron velocidades circulares extendidas a grandes radios. Estas observaciones comenzaron a mostrar que la porción plana de la velocidad circular de rotación se extendía más lejos de lo predicho por el modelo de disco exponencial, y que no había signo de un decaimiento Kepleriano.

Muy pocas galaxias muestran curvas de rotación en decaimiento, y aquellas que lo presentan: (i) decaen más lentamente que el movimiento Kepleriano, (ii) tienen compañeros cercanos que pueden perturbar el campo de las velocidades, o (iii) tienen grandes esferoides (término utilizado algunas veces para denotar a las galaxias elípticas o el bulbo de las galaxias espirales) que pueden aumentar la velocidad de rotación cerca del centro. No hay un ejemplo bien establecido de una región Kepleriana en la curva de rotación de alguna galaxia, incluso aquellas que se extienden a radios lo suficientemente grandes para contener toda la luz de la galaxia [4].

La interpretación usual de estos resultados es que las galaxias espirales poseen halos masivos de materia oscura que se extienden a grandes radios; esta hipótesis fue propuesta

por primera vez por Freeman [6], quién notó que el esperado decaimiento Kepleriano no estaba presente en la NGC 300 y la M33, y consideró una masa “indetectable” (oscura) con una distribución diferente para la masa visible.

Un sistema estelar es a menudo caracterizado por su razón masa-luminosidad (M/L), la cual se denota como Υ , esta razón mide la cantidad de masa estelar correspondiente a cada intervalo de luminosidad, y se escribe en unidades de la proporción solar $\Upsilon_{\odot} = M_{\odot}/L_{\odot}$. La luminosidad L de una determinada región es directamente observable⁶, mientras que M se infiere a través de la velocidad circular (V_c) estimada mediante observaciones fotométricas. Así, una curva de rotación proporciona una descripción acerca de cómo está distribuida la masa en el sistema estelar. Por ejemplo, según la teoría newtoniana, se esperaría que una curva de rotación típica a grandes radios decayera como $V_c(R) = (GM/R)^{1/2}$, donde M es la masa total[4] (fig. I.3).



Figura I.3: Curvas de Rotación teórica y observacional

Comúnmente, en galaxias espirales, se observa que Υ se mantiene aproximadamente constante en regiones cercanas al centro (usualmente en el rango $1 - 10\Upsilon_{\odot}$, dependiendo de la edad y de la composición química de las estrellas) y crece significativamente (en muchos casos, por mas de un orden de magnitud) en zonas alejadas de él. Este comportamiento parece paradójico, ya que se esperaría que Υ mantuviera un valor cercano (o menor) al que presenta en la región central (en primera instancia, se supone que tanto M como L disminuyen en igual proporción a grandes distancias del centro).

El halo oscuro es la componente menos conocida de la galaxia. Sólo se tienen algunos leves indicios acerca de su composición, forma, tamaño, masa y densidad local. Una

⁶Los astrónomos suelen medir qué tan brillante es un galaxia en una longitud de onda de luz determinada, por ejemplo, azul (B), roja (R), amarilla (Y), infrarroja (I), etc.

amplia variedad de candidatos para la materia oscura se han sugerido, la mayoría pertenecientes a una de las dos siguientes clases: (i) alguna desconocida partícula elemental - los candidatos preferidos son los WIMPs (weakly interacting massive particles); (ii) objetos macroscópicos no luminosos, tales como estrellas de neutrones o agujeros negros, los cuales son a menudo llamados MACHOs (massive compact halo objects). La materia ordinaria - estrellas, polvo, gas interstelar, MACHOs, etc., sea luminoso u oscuro - deriva casi la totalidad de su masa de los bariones, y por tanto, es usualmente denominada materia bariónica, para distinguirla de la materia no-bariónica como los WIMPs [4].⁷

En la actualidad, se asume que la materia oscura (independientemente de su naturaleza) está distribuida en un halo esférico que rodea el disco galáctico. Dicha suposición se apoya en el hecho de que la formación de los sistemas astrofísicos tales como el sistema solar o un disco de galaxia, genera disipación de energía electromagnética pero conserva momento angular, conduciendo naturalmente a una rotación rápida del disco delgado. Puesto que los WIMPs no pueden disipar energía electromagnética, se espera que el supuesto halo oscuro sea aproximadamente esférico. Su distribución es igualmente incierta a pequeños radios: la contribución del halo a la fuerza gravitatoria radial, que determina la velocidad circular podría situarse desde menos del 10% a casi el 50% de la fuerza total [4].

Hasta el momento, debido a la inexistencia de una explicación adecuada acerca de la composición de la materia oscura no se tiene una interpretación clara de su naturaleza. Esto ha llevado a que diversos autores se sientan interesados en proponer soluciones alternativas que expliquen el comportamiento anómalo de las curvas de rotación a grandes radios, sin necesidad de acudir a la existencia de estos halos masivos. Entre estas teorías se encuentran la teoría general de la relatividad (ej.[7]), y la propuesta desarrollada desde 1983 por Mordehai Milgrom [8] [9], a la que llamó Dinámica Modificada (MOND: Modified Newtonian Dynamics), en la que estudió una forma unificada de la dinámica Newtoniana para describir el movimiento de los cuerpos en los campos gravitacionales de galaxias asumiendo que éstas no contienen masa “*oculta*” obteniendo resultados como: la velocidad circular alrededor de una galaxia finita llega a ser independiente de r a grandes radios, resultando así en curvas de velocidad asintóticamente planas [9].

En particular, siguiendo el enfoque ilustrado anteriormente cabe mencionar el trabajo recientemente realizado por los autores Brownstein & Moffat [1], quienes hicieron un estudio de las curvas de rotación observacionales de aproximadamente 150 galaxias, comparándolas con las curvas de rotación obtenidas mediante los modelos MOND [8], y MSTG (metric-skew-tensor-gravity) [10], obteniendo gráficas como la siguiente: En la gráfica anterior se puede observar 5 diferentes curvas:

⁷Un barión es un fermión interactuando fuertemente. El uso del término “materia bariónica” para la materia ordinaria es convencional, pero no el ideal por varias razones: (i) la materia ordinaria incluye electrones, los cuales son leptones, no bariones; (ii) la partícula desconocida que se supone compone la materia oscura, es probable que sea aún más pesada que cualquier partícula bariónica.

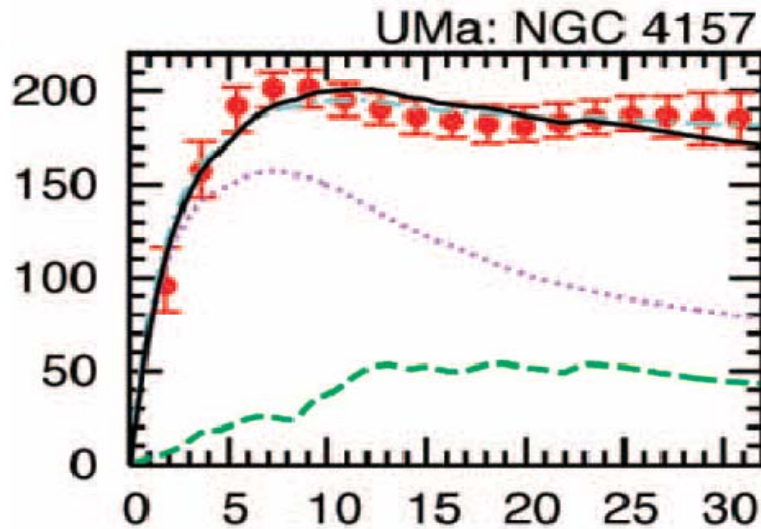


Figura I.4: Curva observacional V_c [km/s] vs. R [kpc]. Galaxia NGC 4157 perteneciente al cúmulo de galaxias de la Osa mayor.

1. Los puntos rojos con sus respectivas barras de error representan los datos observacionales.
2. La línea negra sólida es la curva de rotación determinada a partir de la teoría MSTG.
3. La línea guión-punto azul es la curva de rotación determinada a través de la teoría MOND.
4. La línea verde a trazos es la curva de rotación Newtoniana de la región de gas (HI más He).
5. La línea punteada morada es la curva de rotación Newtoniana del disco luminoso estelar.

Teniendo en cuenta que las diferentes teorías hasta el momento planteadas como explicaciones alternativas para el problema del comportamiento plano de las curvas de rotación no han sido comprobadas (materia oscura), o se encuentran aún en desarrollo de mejoras en su método (MOND, MSTG entre otras), en este trabajo tomaremos el camino de la teoría Newtoniana convencional sin tener en cuenta la materia oscura no-bariónica, para realizar un estudio de algunas de las curvas de rotación observacionales presentadas en un trabajo previo realizado por Brownstein & Moffat [1] obtenidas mediante ajustes fotométricos. Se explicará el método utilizado para analizar las curvas de rotación y a partir de ellas se encontrará la distribución de la densidad superficial de materia junto con el potencial gravitacional generado por dicha distribución.

CAPÍTULO 1

MODELOS PLANOS DE DISCOS FINITOS

1.1 Teoría del Potencial

La mayor parte de la masa de una galaxia reside en las estrellas. Así, para calcular el potencial gravitacional de una gran colección de estrellas, se debería en principio, sumar los potenciales de cada una de las masa puntuales. Sin embargo, esta no es una tarea práctica debido al número aproximado de estrellas ($\sim 10^{11}$) que componen una galaxia típica. Por ello, es suficiente con modelar el potencial gravitacional como el generado por una distribución discoidal que se puede considerar como axialmente simétrica. Esta distribución puede describirse por una densidad superficial de masa, la cual genera el potencial gravitacional que a su vez determina la curva de rotación.

1.1.1. Potencial Gravitacional

El concepto de campo gravitacional es simplemente la forma de describir la región circundante a un centro de fuerza, o fuente del campo gravitacional dentro de la cual esa fuerza actúa. Dicha región adyacente a la fuente es un conjunto de valores vectoriales los cuales están ligados a cada punto en el espacio en cada instante de tiempo. Si una partícula de prueba fuera colocada en algún punto dado en un instante de tiempo específico, ésta sentiría una fuerza cuya magnitud y dirección pueden ser deducidas del valor del campo gravitacional asociado con esa posición y tiempo determinado.

El campo gravitacional se define como

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad (1.1)$$

donde \mathbf{F} es la fuerza gravitacional y m es la masa de la partícula de prueba. De acuerdo a la Ley de la Gravitación Universal de Newton, la fuerza \mathbf{F} entre dos partículas de masas M y m situadas en los puntos \mathbf{x}' y \mathbf{x} respectivamente esta dada por

$$\mathbf{F} = GMm \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}, \quad (1.2)$$

así el campo gravitacional

$$\mathbf{g} = GM \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \quad (1.3)$$

donde G es la constante de proporcionalidad de Cavendish.

Considerando una distribución continua para el número de estrellas que componen la galaxia $\sim 10^{11}$, el cual está descrito por una por una densidad $\rho(\mathbf{x}')$, se tiene el campo gravitacional en la forma

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = G \int \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \rho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'. \quad (1.4)$$

Definiendo el potencial gravitacional $\Phi(\mathbf{x})$ en la forma

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} d^3 \mathbf{x}', \quad (1.5)$$

se puede relacionar el campo gravitacional con una función escalar $\Phi(\mathbf{x})$ en la forma

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla \int \frac{G\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} d^3 \mathbf{x}', \quad (1.6)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi(\mathbf{x}). \quad (1.7)$$

Puesto que g está determinada por el gradiente de un potencial, el campo gravitacional es conservativo, esto es, el trabajo hecho contra las fuerzas gravitacionales en el movimiento de dos estrellas desde el infinito a una configuración dada es independiente del camino a lo largo del cual se mueven. El potencial es una función favorable porque se trata de un campo escalar que permite visualizar de una manera más fácil el comportamiento del campo gravitacional. Además, en muchas situaciones la forma más fácil de obtener el campo gravitacional g es primero calcular el potencial y luego tomar su gradiente [4].

Tomando la divergencia de (1.4), y usando la relación

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) = 0 \quad (1.8)$$

para todo $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$. Por lo tanto cualquier contribución debe venir del punto $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, y se puede restringir el volúmen de integración a una pequeña esfera de radio h . Para un h lo suficientemente pequeño, la densidad es aproximadamente constante a través de este volúmen, luego $\rho(\mathbf{x}')$ se puede sacar de la integral, y haciendo uso del teorema de la divergencia se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|=h} \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot d^2S'}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}. \quad (1.9)$$

Sobre la esfera $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| = h$, además si $d^2S' = (\mathbf{x}' - \mathbf{x})hd^2\Omega$, donde $d^2\Omega$ es un pequeño elemento de ángulo sólido, y haciendo uso de (1.7), se obtiene la ecuación de Poisson que relaciona el potencial Φ con la densidad ρ en la forma

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (1.10)$$

La ecuación de Poisson es una ecuación diferencial que puede ser resuelta para $\Phi(\mathbf{x})$ y $\rho(\mathbf{x})$ dados junto con las apropiadas condiciones de frontera. Para un sistema aislado las condiciones de frontera son $\Phi \rightarrow 0$ como $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Esta ecuación es la forma usual de calcular el potencial gravitacional en la región dentro de la cual se encuentra la fuente o la densidad de masa.

En el caso especial de regiones que estén libres de materia, es decir $\rho = 0$, la ecuación (1.10) se reduce a la forma conocida como la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\Phi = 0. \quad (1.11)$$

Integrando ambos lados de (1.10) sobre un volúmen arbitrario conteniendo la masa total M , y aplicando el teorema de la divergencia se tiene

$$4\pi GM = 4\pi G \int d^3\mathbf{x}\rho = \int d^3\mathbf{x}\nabla^2\Phi = \int d^2\mathbf{S} \cdot \nabla\Phi. \quad (1.12)$$

Este resultado es el teorema de Gauss, el cual establece que: *La integral de la componente normal de $\nabla\Phi$ sobre cualquier superficie cerrada es igual a $4\pi G$ veces la masa contenida dentro de esa superficie* [4].

En general, cuando se tenga una distribución de materia contenida en una región finita, se debe resolver la ecuación de Poisson (1.10) en el interior de la distribución, y en el exterior de ella se debe resolver la ecuación de Laplace (1.11). Además se debe exigir que las soluciones halladas para las cada una de las regiones anteriores coincidan en la superficie de frontera de la distribución, para de esta forma garantizar la continuidad del potencial gravitacional Φ en todo el espacio.

1.1.2. Pares Potencial-Densidad para Sistemas Delgados

El cálculo del potencial gravitacional y el campo generado por una distribución de materia dada es a menudo una difícil tarea que conduce a fórmulas complejas que involucran funciones especiales ó cálculos numéricos. Sin embargo, a continuación se van a describir algunas familias de potenciales que son generados por distribuciones de densidad axisimétricas realistas y bastante simples. Estos potenciales ayudan a entender como el potencial gravitacional de un cuerpo inicialmente esférico es afectado por un aplanamiento.

1. Modelo de Plummer

Se espera que en muchos modelos esféricos la densidad sea aproximadamente constante cerca al centro, y decaiga a cero a grandes radios. El potencial de un sistema de este tipo sería proporcional a $r^2 + \text{constante}$ a pequeños radios y a r^{-1} a grandes radios. Un potencial simple con estas propiedades es el modelo de Plummer [11]

$$\Phi = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}}, \quad (1.13)$$

donde b es la longitud de escala de Plummer y M es la masa total del sistema. De la ecuación de ∇^2 en coordenadas esféricas se tiene

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = \frac{3GMb^2}{(r^2 + b^2)^{5/2}}. \quad (1.14)$$

Así, de la ecuación de Poisson (1.10) se tiene que la densidad correspondiente al potencial (1.13) es

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi b^3} \left(1 + \frac{r^2}{b^2} \right)^{-5/2}. \quad (1.15)$$

Plummer usó el par potencial-densidad descrito por las ecuaciones (1.13) y (1.15) para fijar observaciones de clusters globulares.

2. Modelo de Kuzmin

Kuzmin [12] introdujo al igual que Plummer un par potencial-densidad pero modeló el disco a partir de un potencial gravitacional que depende de las variables (R, z)

$$\Phi_k(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + |z|)^2}}, \quad (a \geq 0). \quad (1.16)$$

Aplicando Teorema de Gauss (1.12) Φ_k está generado por la densidad superficial

$$\Sigma_k(R) = \frac{aM}{2\pi(R^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (1.17)$$

3. Modelo de Miyamoto & Nagai

Considerando el potencial [13]

$$\Phi_M(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}}. \quad (1.18)$$

Cuando $a = 0$, Φ_M se reduce al potencial esférico de Plummer (1.13), y cuando $b = 0$, Φ_M se reduce al potencial de Kuzmin (1.16) de un disco delgado. Así, dependiendo de la elección de los parámetros a y b , Φ_M puede representar el potencial de cualquier cosa, desde un disco infinitesimalmente delgado hasta un sistema esférico. Calculando $\nabla^2\Phi_M$, se encuentra la distribución de masa asociada con (1.18)

$$\rho_M(R, z) = \left(\frac{b^2 M}{4\pi}\right) \frac{aR^2 + (a + 3\sqrt{z^2 + b^2})(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}{[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2]^{5/2}(z^2 + b^2)^{3/2}}. \quad (1.19)$$

Puesto que la ecuación de Poisson (1.10) es lineal en Φ y ρ la diferencia entre dos pares cualesquiera de potencial-densidad es por sí mismo un par potencial-densidad. Por lo tanto, si se deriva un par potencial-densidad con respecto a uno de sus parámetros se obtiene un nuevo par potencial-densidad. Por ejemplo, Toomre [14] derivó una familia de pares potencial-densidad derivando $\Phi_k(R, z)/a$ n veces con respecto a a^2 .

4. Modelo de Satoh

Satoh [15] obtuvo una serie de pares potencial-densidad esféricos derivando b^{-2} veces el potencial de Plummer (1.13) y n veces la densidad (1.15) con respecto a b^2 . Satoh aplanó estos potenciales reemplazando $r^2 + b^2$ con $R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2$, y en el límite $n \rightarrow \infty$ obtuvo

$$\Phi_S(R, z) = -\frac{GM}{S}, \quad (1.20)$$

donde

$$S^2 \equiv R^2 + z^2 + a(a + 2\sqrt{z^2 + b^2}). \quad (1.21)$$

La correspondiente distribución de densidad se deduce de la ecuación de Poisson (1.10)

$$\rho_S(R, z) = \frac{ab^2 M}{4\pi S^3(z^2 + b^2)} \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + b^2}} + \frac{3}{a} \left(1 - \frac{R^2 + z^2}{S^2} \right) \right]. \quad (1.22)$$

1.2 Método de Hunter

Un método simple para obtener la densidad superficial, el potencial gravitacional y la curva de rotación de un disco delgado de radio finito fue desarrollado por Hunter [2]. El método de Hunter está basado en la obtención de soluciones de la ecuación de Laplace en términos de las coordenadas esferoidales oblatas que son ideales para el estudio de discos planos de extensión finita. Por superposición de soluciones de la ecuación de Laplace, las expresiones para la densidad superficial de los discos, el potencial gravitacional y su velocidad de rotación se pueden obtener como series de funciones elementales [16].

El ejemplo más simple de un disco delgado obtenido por medio del método de Hunter es el bien conocido disco de Kalnajs [17]. El disco de Kalnajs tiene una densidad superficial bien comportada y representa un disco rotando uniformemente, así que su velocidad circular es proporcional al radio.

1.2.1. Sistema de Coordenadas Esferoidales Oblatas

Con el fin de obtener un potencial gravitacional Φ con las características necesarias para describir modelos discoidales de galaxias de radio finito, se deben imponer condiciones de frontera apropiadas sobre la componente de la derivada del potencial en la dirección normal al disco, de manera que la densidad superficial de masa se anule fuera de él. Si se utilizan las coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z) , las condiciones de contorno necesarias para satisfacer lo anterior conducen a un problema de frontera difícil, debido a que este sistema de coordenadas no está adaptado a la geometría de la fuente del campo gravitacional.

Por ello, se introduce el sistema de coordenadas esferoidales oblatas. Su ventaja está en que no solamente describe en forma apropiada la simetría del problema, sino que además es uno de los once sistemas de coordenadas en el que la ecuación de Laplace se puede resolver en forma exacta mediante el uso de separación de variables.

El sistema de coordenadas esferoidales oblatas¹ es generado tomando una familia de elipses e hipérbolas confocales ubicadas sobre el plano YZ , Las elipses e hipérbolas tienen sus focos comunes en $y = a$, $y = -a$ de manera que el semieje menor b está ubicado en la dirección del eje Z , mientras que sobre el eje Y está ubicado el semieje mayor c . Rotando estas elipses e hipérbolas confocales un ángulo ϕ alrededor del eje menor de las elipses, éstas se ubican ahora sobre el plano RZ , en donde los puntos ubicados

¹Este sistema de coordenadas emplea el ángulo azimutal usual ϕ de las coordenadas cilíndricas, pero reemplaza las coordenadas (R, z) con nuevas coordenadas (v, u) , v caracteriza a cada elipse coordenada y u a cada hipérbola coordenada.

sobre este plano tienen coordenadas dadas por

$$\begin{aligned} R &= a \cosh(v) \sin(u), \\ z &= a \sinh(v) \cos(u). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Como el ángulo formado por los planos XZ y RZ es ϕ , el cual varía entre $0 \leq \phi \leq 2\pi$, las coordenadas cartesianas (x, y, z) y las coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z) se relacionan mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= R \cos(\phi), \\ y &= R \sin(\phi), \\ z &= z. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Reemplazando (1.23) en (1.24) se tiene

$$\begin{aligned} x &= a \cosh(v) \sin(u) \cos(\phi), \\ y &= a \cosh(v) \sin(u) \sin(\phi), \\ z &= a \sinh(v) \cos(u), \end{aligned} \tag{1.25}$$

que relacionan el sistema de coordenadas cartesianas con el sistema de coordenadas esferoidales oblatas.

Con el objetivo de simplificar las expresiones en una forma más conveniente, se realiza el cambio de variable

$$\begin{aligned} \xi &= \sinh(v), \\ \eta &= \cos(u), \end{aligned} \tag{1.26}$$

con $0 \leq \xi < \infty$ y $-1 \leq \eta < 1$. Reemplazando el cambio de variable en las ecuaciones (1.25) se obtiene

$$\begin{aligned} x &= a\sqrt{1 + \xi^2}\sqrt{1 - \eta^2} \cos(\phi), \\ y &= a\sqrt{1 + \xi^2}\sqrt{1 - \eta^2} \sin(\phi), \\ z &= a\xi\eta. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Estas son las transformaciones entre el sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) y las coordenadas (ξ, η, ϕ) que se denominan también como coordenadas esferoidales oblatas. Estas relaciones permiten a su vez expresar las transformaciones entre el sistema de coordenadas cilíndricas (R, z) y las esferoidales oblatas (ξ, η) dadas por

$$\begin{aligned} R^2 &= a^2(1 + \xi^2)(1 - \eta^2), \\ z &= a\xi\eta, \end{aligned} \tag{1.28}$$

donde $0 \leq \xi < \infty$ y $-1 \leq \eta < 1$. Finalmente, las ecuaciones (1.28) son la forma más usual y conveniente de expresar el sistema de coordenadas esferoidales oblatas, cuyas superficies coordenadas son esferoides oblatos para ξ constante, con ecuación

$$\frac{R^2}{a^2(1 + \xi^2)} + \frac{z^2}{a^2\xi^2} = 1, \quad (1.29)$$

y para η constante

$$\frac{R^2}{a^2(1 - \eta^2)} - \frac{z^2}{a^2\eta^2} = 1. \quad (1.30)$$

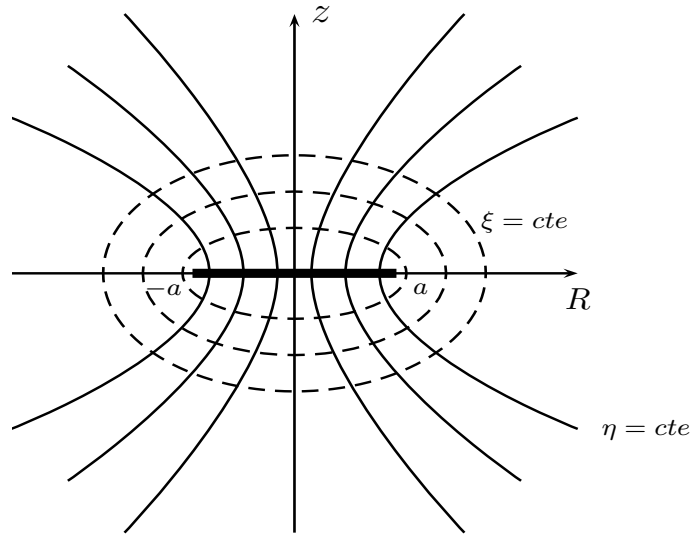


Figura 1.1: Coordenadas Esferoidales Oblatas

Para expresar las variables ξ y η explícitamente en términos de R y z , se despeja η de la segunda ecuación de (1.28) y se reemplaza en la primera obteniendo

$$0 = a^2\xi^4 + \xi^2(a^2 - z^2 - R^2) - z^2, \quad (1.31)$$

de la que despejando ξ^2 se encuentra que

$$\xi^2 = \frac{-(a^2 - z^2 - R^2) + \sqrt{(a^2 - z^2 - R^2)^2 + 4a^2z^2}}{2a^2}, \quad (1.32)$$

de la cual se toma el signo negativo considerando que $0 \leq \xi < \infty$.

Si se define ahora,

$$\begin{aligned} R_+^2 &= R^2 + (z + ia)^2, \\ R_-^2 &= R^2 + (z - ia)^2, \end{aligned} \quad (1.33)$$

se puede escribir la solución de la ecuación (1.32) como

$$\xi = \frac{R_+ + R_-}{2a}. \quad (1.34)$$

Analogamente para η se tiene

$$\eta = \frac{R_+ - R_-}{2ia}. \quad (1.35)$$

Esta coordenada presenta una discontinuidad en el plano $z = 0$, puesto que su valor cambia de signo al atravesar el plano $z = 0$; es decir, $\lim_{z=0^-} \eta = -\lim_{z=0^+} \eta$. Este comportamiento singular de η implica que una función par de η es una función continua en todas partes pero tiene una derivada de η discontinua en el disco.

Tomando el caso en que $\xi = 0$ en (1.28) se tiene que $z = 0$ y $0 \leq R \leq a$, lo que representa un disco delgado de radio $R = a$. Entonces, sobre el disco ξ es igual a cero, mientras que la coordenada η según (1.28) toma el valor

$$\eta = \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^{1/2}. \quad (1.36)$$

1.2.2. Solución General de la Ecuación de Laplace

Con el fin de obtener modelos de discos delgados finitos axialmente simétricos, se necesita encontrar soluciones de la ecuación de Laplace que representen el potencial exterior de una fuente delgada tipo disco. De acuerdo a esto, se debe resolver la ecuación de Laplace para un potencial axialmente simétrico,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (1.37)$$

donde (R, ϕ, z) son las coordenadas cilíndricas usuales. Además de la simetría axial, se supone que el potencial gravitacional posee simetría de reflexión con respecto al plano $z = 0$; esto es,

$$\Phi(R, z) = \Phi(R, -z), \quad (1.38)$$

lo que implica que la componente normal del gradiente de Φ , $\partial\Phi/\partial z$, satisface la relación

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(R, -z) = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}(R, z), \quad (1.39)$$

donde se supone que $\partial\Phi/\partial z$ no se anula sobre el plano $z = 0$, que es la región en la cual se encuentra la distribución de materia que representa la galaxia. Esto quiere decir que en el plano $z = 0$ las líneas de campo cambian de dirección, como es de esperarse puesto que el campo gravitacional es un campo de atracción.

Dado un potencial $\Phi(R, z)$ con las propiedades mencionadas, la densidad $\Sigma(R)$ correspondiente a la distribución superficial de materia, se puede obtener utilizando ley de Gauss, la cual implica que,

$$\Sigma(R) = \frac{1}{4\pi G} \left\{ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=0^+} - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=0^-} \right\}. \quad (1.40)$$

Haciendo uso de la relación (1.39), se obtiene el resultado

$$\Sigma(R) = \frac{1}{2\pi G} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=0^+}. \quad (1.41)$$

La densidad superficial $\Sigma(R)$ es diferente de cero como consecuencia de la suposición de que $\partial\Phi/\partial z$ no se anula sobre el plano $z = 0$.

Ahora, con el objetivo de obtener una distribución de materia discoidal de extensión finita con una densidad de masa diferente de cero, se imponen las condiciones de contorno

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(R, 0^+) \neq 0, \quad R \leq a \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(R, 0^+) = 0, \quad R > a \quad (1.43)$$

lo que garantiza que la distribución de masa está confinada en el disco $z = 0, 0 \leq R \leq a$.

Al introducir el sistema de coordenadas esferoidales oblatas descrito en la sección anterior, cuya relación con las coordenadas cilíndricas está dada por (1.28), se tiene que las coordenadas del disco son $\xi = 0$ y $0 \leq \eta^2 \leq 1$.

En términos de las coordenadas esferoidales oblatas la ecuación de Laplace axialmente simétrica puede ser escrita como,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 + 1) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] = 0. \quad (1.44)$$

De esta manera, se debe encontrar la solución general del potencial $\Phi(\xi, \eta)$ resolviendo el conjunto de ecuaciones diferenciales dadas por (1.44). La forma más fácil de manejar una ecuación diferencial parcial es transformarla en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el método de separación de variables en la forma [4]

$$\Phi(\xi, \eta) = M(\xi)N(\eta). \quad (1.45)$$

Reemplazando (1.45) en (1.44), y dividiendo por $\Phi(\xi, \eta)$ se obtiene

$$\frac{1}{M} \frac{d}{d\xi} \left[(\xi^2 + 1) \frac{dM}{d\xi} \right] + \frac{1}{N} \frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dN}{d\eta} \right] = 0, \quad (1.46)$$

la cual contiene una parte que depende sólo de ξ y otra que depende sólo de η , por lo que cada lado de la ecuación se puede igualar a una constante de separación j , la cual se elige en la forma

$$\frac{d}{d\xi} \left[(\xi^2 + 1) \frac{dM}{d\xi} \right] - jM = 0, \quad (1.47)$$

y

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dN}{d\eta} \right] + jN = 0. \quad (1.48)$$

Esta última ecuación es la ecuación de Legendre para N . Aunque la primera de ellas no es una ecuación de Legendre se puede adaptar a la misma forma definiendo

$$\xi = i\varepsilon, \quad (1.49)$$

derivando y reemplazando en (1.47), se tiene

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[(1 - \varepsilon^2) \frac{dM}{d\varepsilon} \right] + jM = 0, \quad (1.50)$$

la cual es la ecuación de Legendre para M .

El método para resolver estas ecuaciones, es plantear soluciones en series de potencias, pero estas soluciones divergen; por lo que las series deben cortarse escogiendo apropiadamente la constante de separación j de manera que los coeficientes de las series sean cero después de un determinado valor, de modo que las series infinitas se reduzcan a polinomios finitos. La constante de separación debe elegirse en la forma $j = n(n + 1)$, donde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ con lo que las ecuaciones (1.48) y (1.50) toman la forma

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dN}{d\eta} \right] + n(n + 1)N = 0, \quad (1.51)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[(1 - \varepsilon^2) \frac{dM}{d\varepsilon} \right] + n(n + 1)M = 0, \quad (1.52)$$

cuyas soluciones son

$$N = A_n P_n(\eta) + B_n Q_n(\eta), \quad (1.53)$$

$$M = D_n P_n(i\varepsilon) + E_n Q_n(i\varepsilon), \quad (1.54)$$

donde P_n y Q_n son los polinomios de Legendre de primer orden y las funciones de Legendre de segunda clase respectivamente, y A_n, B_n, D_n y E_n son constantes arbitrarias.

Es conveniente expresar los P_n y Q_n de argumento imaginario en la forma

$$p_n(\xi) = i^{-n} P_n(i\xi), \quad (1.55)$$

$$q_n(\xi) = i^{n+1} Q_n(i\xi),$$

así, (1.54) se puede reescribir como

$$M = H_n p_n(\xi) + K_n q_n(\xi). \quad (1.56)$$

De esta manera la solución general de la ecuación de Laplace (1.45) se escribe a partir de (1.53) y (1.56) como

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} [H_n p_n(\xi) + K_n q_n(\xi)] [A_n P_n(\eta) + B_n Q_n(\eta)]. \quad (1.57)$$

1.2.3. Solución General de Interés Físico

La solución general (1.57) encontrada en la sección anterior, se debe someter a ciertas condiciones físicas de contorno con el propósito de obtener un potencial gravitacional con las características apropiadas para la descripción de modelos de discos delgados de radio finito.

La primera condición de contorno que se debe imponer es que a una distancia lo suficientemente grande de la fuente del campo gravitacional, el potencial Φ debe anularse; es decir,

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Phi(\xi, \eta) = 0. \quad (1.58)$$

Para que esta condición se satisfaga se debe tener en cuenta que

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} p_n(\xi) = \infty, \quad \text{para } n > 0, \quad (1.59)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} q_n(\xi) = 0, \quad (1.60)$$

lo que implica que en (1.57) se debe hacer $H_n = 0$ para que se cumpla la condición (1.58), la cual por ahora queda expresada como

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n q_n(\xi) [A_n P_n(\eta) + B_n Q_n(\eta)]. \quad (1.61)$$

La segunda condición de contorno que se debe establecer es que sobre el eje de simetría $\eta = \pm 1$, se debe garantizar que el potencial no presente singularidades. Para que esta condición se cumpla se debe tener en cuenta que

$$Q_n(\pm 1) = \infty. \quad (1.62)$$

Esto hace necesario que en (1.61) la constante B_n sea igual a cero para que se cumpla esta condición. Así esta segunda condición de contorno simplifica aún más la expresión de la solución general para el potencial quedando escrita como

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n q_n(\xi) A_n P_n(\eta), \quad (1.63)$$

renombrando las constantes arbitrarias $K_n A_n$ como C_n se tiene

$$\Phi(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} C_n q_n(\xi) P_n(\eta), \quad (1.64)$$

donde el signo negativo se escoge teniendo en cuenta que el potencial gravitacional es atractivo.

Sin embargo, dada la discontinuidad de la coordenada η sobre el disco, la solución general (1.64) se debe elegir en términos de los polinomios y funciones de Legendre de orden par para garantizar que el potencial sea continuo con lo que (1.64) se escribe en la forma [18]

$$\Phi(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta), \quad (1.65)$$

o en términos de las funciones de Legendre de segunda clase de argumento imaginario dada por (1.55)

$$\Phi(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} C_{2n} Q_{2n}(i\xi) P_{2n}(\eta). \quad (1.66)$$

Esta es la expresión para el potencial gravitacional Newtoniano para el exterior de un disco delgado finito. Esta relación permitirá la determinación de otras dos importantes cantidades físicas que describen los modelos de galaxias. Estas cantidades son la densidad superficial de masa $\Sigma(R)$ y la velocidad circular $v_c(R)$.

1.2.4. Densidad Superficial

En la sección anterior haciendo uso de la ley de Gauss y de la simetría de reflexión del potencial gravitacional se encontró la expresión (1.41), la cual permite encontrar la expresión general para la distribución de materia en el disco mediante el potencial Newtoniano (1.66) mediante su derivada normal y evaluando sobre el plano $z = 0$, obteniendo

$$\Sigma(R) = -\frac{1}{2\pi g} \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} C_{2n} \left[P_{2n}(\eta) \frac{\partial Q_{2n}(i0)}{\partial z} + Q_{2n}(i0) \frac{\partial P_{2n}(\eta)}{\partial z} \right], \quad (1.67)$$

en donde

$$\frac{\partial Q_{2n}(i0)}{\partial z} = iQ'_{2n}(i0) \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad (1.68)$$

y

$$\frac{\partial P_{2n}(\eta)}{\partial z} = P'_{2n}(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad (1.69)$$

donde haciendo uso de (1.28) se encuentra que

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{a\eta}, \quad (1.70)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = 0, \quad (1.71)$$

recordando que los valores de ξ y η están determinados por las condiciones $\eta = \sqrt{1 - (R/a)^2}$ y $\xi = 0$ con el fin de restringirse al disco galáctico. Reemplazando estos valores en (1.68) y (1.69) se tiene

$$\Sigma(R) = -\frac{1}{2\pi a G \eta} \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+2} C_{2n} P_{2n}(\eta) Q'_{2n}(i0). \quad (1.72)$$

Usando fórmulas de recurrencia de los polinomios de Legendre [4] y puesto que en el disco $\xi = 0$ se tiene que

$$Q'_{2n}(i0) = -(2n+1)Q_{2n+1}(i0), \quad (1.73)$$

reemplazando en la ecuación anterior se encuentra finalmente que la densidad superficial de masa para un disco delgado de radio finito asociado con el potencial Newtoniano (1.66) se encuentra expresado en la forma

$$\Sigma(R) = \frac{1}{2\pi a G \eta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n+1) C_{2n} P_{2n}(\eta) Q_{2n+1}(i0). \quad (1.74)$$

1.2.5. Velocidad Circular

La siguiente propiedad física de interés de una distribución discoidal de masa es la velocidad circular $V_c(R)$, definida como la velocidad de una partícula de prueba en una órbita cercanamente circular de radio R alrededor del disco galáctico. La velocidad circular puede obtenerse empleando las ecuaciones del movimiento circular, y teniendo en cuenta que la aceleración en la dirección radial está dada por la componente radial del gradiente de Φ , $\partial\Phi/\partial R$ se tiene que

$$V_c^2 = R \left[\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right]_{z=0}. \quad (1.75)$$

Derivando (1.66) con respecto a R

$$V_c^2(R) = -R \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} C_{2n} \left[P_{2n}(\eta) \frac{\partial Q_{2n}(i0)}{\partial R} + Q_{2n}(i0) \frac{\partial P_{2n}(\eta)}{\partial R} \right], \quad (1.76)$$

en donde,

$$\frac{\partial Q_{2n}(i0)}{\partial R} = i Q'_{2n}(i0) \frac{\partial \xi}{\partial R}, \quad (1.77)$$

y

$$\frac{\partial P_{2n}(\eta)}{\partial R} = P'_{2n} \frac{\partial \eta}{\partial R}. \quad (1.78)$$

Utilizando (1.28) se tiene que

$$\frac{\partial \xi}{\partial R} = 0, \quad (1.79)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial R} = -\frac{R}{a^2 \eta}. \quad (1.80)$$

Reemplazando en (1.76) se obtiene la expresión general para la velocidad circular en la forma

$$V_c^2(\tilde{R}) = \frac{\tilde{R}^2}{(1 - \tilde{R}^2)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} C_{2n} Q_{2n}(i0) P'_{2n}(\eta), \quad (1.81)$$

la cual se ha expresado en términos de una coordenada adimensional \tilde{R} , definida como $\tilde{R} = R/a$, la cual se utiliza para realizar el análisis gráfico de las curvas de rotación.

CAPÍTULO 2

PARES DE POTENCIAL-DENSIDAD CON CURVAS DE ROTACIÓN REALISTAS

2.1 Formulación del Modelo

A partir de la muestra de aproximadamente 150 galaxias [1], se eligieron 7 de ellas para realizar un estudio de las curvas de rotación observacionales y analizar si es posible explicar su comportamiento plano mediante la teoría Newtoniana convencional. En particular, se utiliza el método de Hunter [2], a través del cual tanto el potencial gravitacional (1.66) como la distribución de masa (1.74) y la velocidad circular (1.81) quedan expresados como combinaciones de polinomios y funciones de Legendre, junto con unas constantes de expansión.

El objetivo es ajustar las constantes C_{2n} presentes en las diferentes ecuaciones que determinan la dinámica de la galaxia que son (1.66), (1.74) y (1.81); pero esta vez las sumatorias no se toman infinitas, sino que van desde $n = 0$ hasta una constante m .

Este ajuste se realiza a partir de la ecuación para la velocidad circular, puesto que el propósito es encontrar valores tales que, permitan curvas de rotación con comportamientos realistas, como el mostrado anteriormente en la gráfica de la galaxia NGC 4157 (I.4). Para ello, se redefinen las constantes C_{2n} de (1.81) en la forma

$$\tilde{C}_{2n} = i^{2n+1} C_{2n} Q_{2n}(i0) = C_{2n} q_{2n}(0), \quad (2.1)$$

se tiene una ecuación más compacta, la cual genera los modelos de discos, al asignar

valores a m ,

$$V_c^2(\tilde{R}) = \frac{\tilde{R}^2}{(1 - \tilde{R}^2)^{1/2}} \sum_{n=0}^m \tilde{C}_{2n} P'_{2n}(\eta), \quad (2.2)$$

expandiendo,

$$V_c^2(\tilde{R}) = \frac{\tilde{R}^2}{(1 - \tilde{R}^2)^{1/2}} [\tilde{C}_0 P'_0 + \tilde{C}_2 P'_2 + \tilde{C}_4 P'_4 + \tilde{C}_6 P'_6 + \dots]. \quad (2.3)$$

Agrupando términos de la misma potencia e igualando a unas constantes a_{2n} se tiene finalmente que la ecuación de velocidad circular a ajustar es un polinomio en \tilde{R} de orden $2m - 2$, con $m \geq 2$

$$V_c(\tilde{R}) = \tilde{R} \sqrt{a_0 + a_2 \tilde{R}^2 + a_4 \tilde{R}^4 + a_6 \tilde{R}^6 + a_8 \tilde{R}^8 + \dots} \quad (2.4)$$

Las constantes a_0, a_2, a_4, \dots , permiten encontrar el valor de las \tilde{C}_{2n} . Para encontrar la relación entre ellas, se igualan las ecuaciones (2.3) y el cuadrado de (2.4), reemplazando a su vez el valor $\eta = (1 - \tilde{R}^2)^{1/2}$

$$\frac{1}{\eta} \sum_{n=0}^m \tilde{C}_{2n} P'_{2n}(\eta) = \sum_{n=0}^m a_{2n} \tilde{R}^{2n}. \quad (2.5)$$

Pero de $\eta = (1 - \tilde{R}^2)^{1/2}$ se tiene que $\tilde{R}^{2n} = (1 - \eta^2)^n$, introduciendo este resultado

$$\sum_{n=0}^m \tilde{C}_{2n} P'_{2n} = \eta \sum_{n=0}^m a_{2n} (1 - \eta^2)^n, \quad (2.6)$$

multiplicando ambos lados de la ecuación por $P'_{2k}(\eta)$

$$\sum_{n=0}^m \tilde{C}_{2n} P'_{2n}(\eta) P'_{2k}(\eta) = \eta P'_{2k}(\eta) \sum_{n=0}^m a_{2n} (1 - \eta^2)^n, \quad (2.7)$$

integrando de -1 a 1 y utilizando la propiedad $\int_{-1}^1 P'_{2n}(x) P'_{2k}(x) dx = 2n(2n+1) \delta_{nk}$ [19] se llega a

$$\tilde{C}_{2k} 2k(2k+1) = \sum_{n=0}^m \int_{-1}^1 \eta (1 - \eta^2)^n P'_{2k}(\eta) a_{2n} d\eta, \quad (2.8)$$

de la que despejando \tilde{C}_{2k} , se encuentra la relación entre las a_{2n} y las \tilde{C}_{2k} en la forma

$$\tilde{C}_{2k} = \frac{1}{2k(2k+1)} \sum_{n=0}^m \int_{-1}^1 \eta (1 - \eta^2)^n P'_{2k}(\eta) a_{2n} d\eta, \quad (2.9)$$

pero, puesto que $P_0(\eta) = 1$ su derivada es igual a cero, luego la sumatoria se inicia desde $n = 1$, obteniendo finalmente

$$\tilde{C}_{2k} = \frac{1}{2k(2k+1)} \sum_{n=1}^m \int_{-1}^1 \eta (1 - \eta^2)^n P'_{2k}(\eta) a_{2n} d\eta, \quad k \neq 0. \quad (2.10)$$

Con estos valores fijados para la velocidad, se determina la densidad superficial de materia la cual se expresa como un polinomio en \tilde{R} de orden $2m$ como

$$\Sigma(\tilde{R}) = \frac{1}{2\pi a G} \sum_{n=0}^m \tilde{C}_{2n} \frac{P_{2n}(\eta)}{\eta}. \quad (2.11)$$

Esta relación tiene presente una constante indeterminada \tilde{C}_0 , la ecuación (2.10) sólo permite encontrar los valores $\tilde{C}_2, \tilde{C}_4, \tilde{C}_6, \dots$. Para determinar el valor de esta constante se exige que la densidad superficial de masa $\Sigma(\tilde{R})$ sea de la forma

$$\Sigma(\tilde{R}) = \frac{a\eta^2 + b\eta^4 + \dots}{\eta}, \quad (2.12)$$

es decir, para garantizar que la densidad en el borde sea igual a cero. Teniendo en cuenta la fórmula [19]

$$P_{2n}(\eta) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(4n-2k)!}{2^{2n} k! (2n-k)! (2n-2k)!} \eta^{2n-2k}, \quad (2.13)$$

y separando el término $n=0$ de los demás en la ecuación (2.11) se tiene

$$\Sigma(\tilde{R}) = \frac{1}{2\pi a G \eta} \sum_{n=0}^m \tilde{C}_{2n} P_{2n}(\eta) = \frac{1}{2\pi a G \eta} \left[\tilde{C}_0 + \sum_{n=1}^m \tilde{C}_{2n} P_{2n}(\eta) \right], \quad (2.14)$$

igualando el término en paréntesis a una función arbitraria $A_m(\eta)$, reemplazando el valor de $P_{2n}(\eta)$ dado por (2.13), y expandiendo luego el valor para $k=n$ de la sumatoria, se llega a

$$\begin{aligned} A_m(\eta) &= \tilde{C}_0 + \sum_{n=1}^m \sum_{k=0}^n \frac{\tilde{C}_{2n} (-1)^k (4n-2k)!}{2^{2n} k! (2n-k)! (2n-2k)!} \eta^{2n-2k} \\ &= \tilde{C}_0 + \sum_{n=1}^m \tilde{C}_{2n} \left[\frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (4n-2k)!}{2^{2n} k! (2n-k)! (2n-2k)!} \eta^{2n-2k} \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

El segundo término del paréntesis queda expresado sólo en términos de η , entonces al exigir que $A_m(\eta) = a\eta^2 + b\eta^4 + \dots$ es necesario que

$$\tilde{C}_0 + \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \tilde{C}_{2n} = 0, \quad (2.16)$$

de la que se tiene finalmente el valor de la constante indeterminada como

$$\tilde{C}_0 = - \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \tilde{C}_{2n}. \quad (2.17)$$

Así, teniendo todos los valores necesarios para determinar el valor de la densidad superficial de masa, e integrando sobre el área total del disco, se encuentra que la masa total del mismo se expresa según

$$M = \int_0^a \Sigma(\tilde{R})dA. \quad (2.18)$$

2.2 Ajuste de las Curvas de Rotación

En primera instancia, para ajustar las constantes de la ecuación (2.4), se necesita determinar la tabla de datos de las curvas observacionales de cada una de las galaxias seleccionadas. Esto se puede realizar mediante el uso de programas especializados en la obtención de datos a partir de diferentes gráficas. En este caso, se hizo uso del programa *GetData Graph Digitizer versión 2.24*, el cual permitió obtener las tablas de datos introduciendo los valores mínimos y máximos respectivos para cada una de las escalas correspondientes, para luego marcar los puntos cuyas coordenadas son necesarias, usando la opción modo de captura de puntos. Con el fin de realizar análisis gráfico en una escala normalizada adimensional, cada uno de los valores correspondientes a la escala del radio son divididos por el valor del último de estos puntos.

Una vez se tienen las tablas de datos se utiliza, en el programa *Wolfram Mathematica 6.0* la subrutina denominada `FindFit[data, expr, pars, vars]` que realiza por defecto un ajuste no-lineal por mínimos cuadrados, para encontrar los valores numéricos de los parámetros (*pars*) que hacen que la expresión a la cual se quiere ajustar (*expr*) sea el mejor ajuste de los datos (*data*) como una función de las variables (*vars*). En nuestro caso, *data* representa los datos obtenidos anteriormente utilizando *GetData*, *expr* es la ecuación a la cual se desea ajustar, es decir la ecuación (2.4), *pars* son las constantes que se han denominado a_{2n} , y *vars* es la variable de la cual la ecuación a ajustar es dependiente, es decir \tilde{R} .

Estos valores son reemplazados en la expresión (2.4), que se grafica usando la subrutina `Plot[f, {x, xmin, xmax}]` la cual genera una gráfica de la función f , como una función de la variable x en un rango dado por los valores de escala $xmin$ y $xmax$; los valores mínimos y máximos para las gráficas son 0 y 1 respectivamente, puesto que se grafica en una escala normalizada.

Como siguiente paso, a partir de los valores numéricos de los coeficientes a_{2n} hallados con la subrutina *FindFit*, se calcula el valor de las constantes \tilde{C}_{2k} mediante la expresión dada por (2.10), y estos valores permiten hallar el valor de la constante indeterminada \tilde{C}_0 la cual es necesaria para determinar la distribución de masa en el disco.

A continuación se presentan la tabla de datos observacionales y la tabla de los valores correspondientes de las constantes ajustadas a_{2n} junto con los valores de \tilde{C}_{2k} para cada galaxia. Además se presenta la curva de rotación obtenida a partir de la tabla de los datos observacionales y la curva obtenida a partir del ajuste realizado.

NGC 1003

\tilde{R}	V_c
0.07	75.7
0.13	146.8
0.20	201.9
0.27	227.9
0.33	239.3
0.40	243.1
0.47	243.8
0.53	242.2
0.59	242.2
0.67	240.6
0.74	239.8
0.80	240.5
0.87	238.1
0.94	236.6
1	233.5

Tabla 2.1: Tabla de datos \tilde{R} y V_c [km/s] obtenida a partir de la curva de rotación observacional.

a_{2n}	\tilde{C}_{2k}
$1,44 \times 10^6$	191844.
$-1,39 \times 10^7$	176675.
$6,62 \times 10^7$	117518.
$-1,44 \times 10^8$	42109.
$-5,85 \times 10^6$	-308.9
$7,66 \times 10^8$	-7736.5
$-1,82 \times 10^9$	-3655.1
$2,03 \times 10^9$	-838.3
$-1,14 \times 10^9$	-99.3
$2,62 \times 10^8$	-4.8

Tabla 2.2: Valores numéricos de las constantes ajustadas.

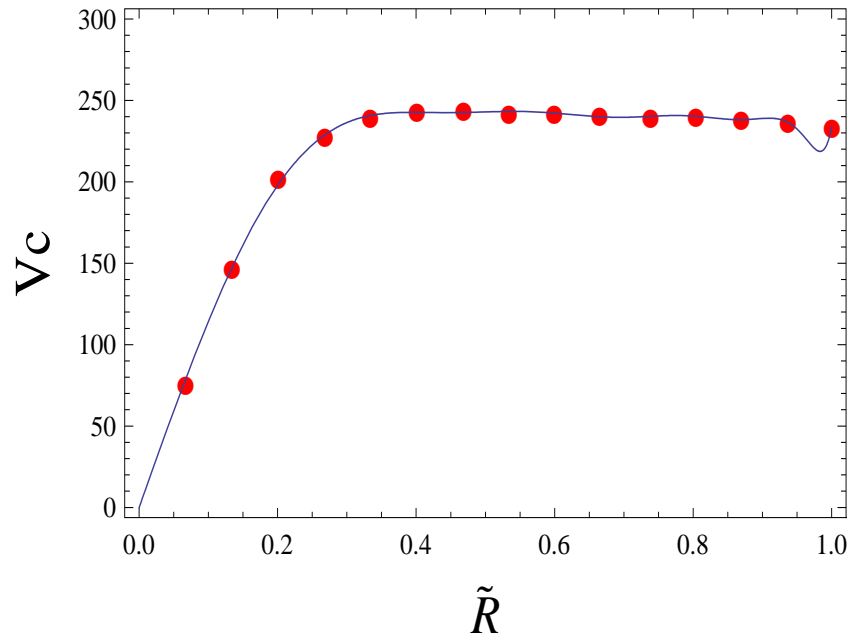


Figura 2.1: Curvas de rotación V_c [km/s] vs. \tilde{R} . Galaxia NGC 1003. Puntos datos observacionales, línea continua curva ajustada.

NGC 3877

\tilde{R}	V_c
0.07	37.8
0.15	79.7
0.23	121.0
0.31	141.9
0.38	152.7
0.46	159.4
0.54	161.5
0.62	166.6
0.69	168.7
0.77	170.8
0.84	170.8
0.92	169.8
1	168.8

Tabla 2.3: Tabla de datos \tilde{R} y V_c [km/s] obtenida a partir de la curva de rotación observacional.

a_{2n}	\tilde{C}_{2k}
338290.	45105.4
$-1,78 \times 10^6$	22696.8
$4,85 \times 10^6$	8627.2
$-6,94 \times 10^6$	2032.
$4,96 \times 10^6$	262.1
$-1,39 \times 10^6$	14.1

Tabla 2.4: Valores numéricos de las constantes ajustadas.

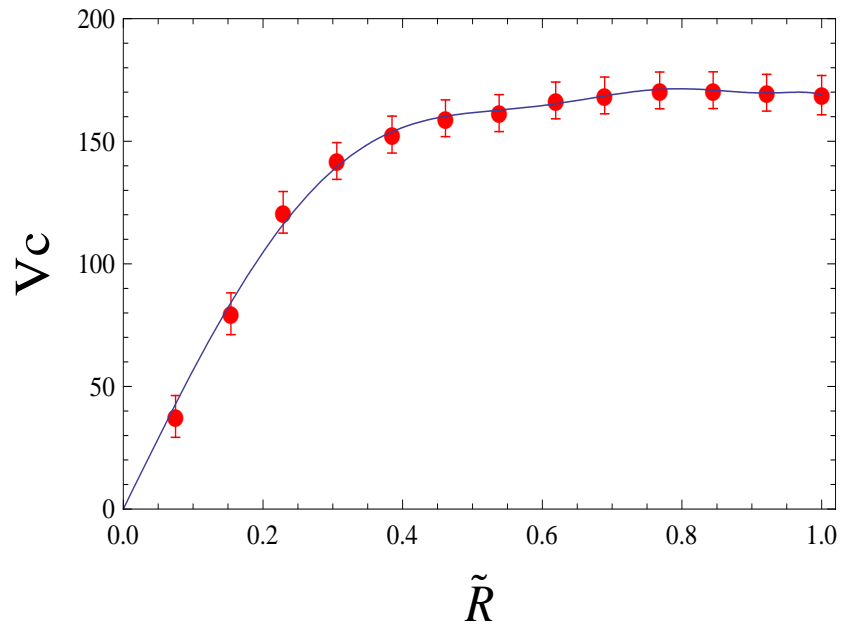


Figura 2.2: Curvas de rotación V_c [km/s] vs. \tilde{R} . Galaxia NGC 3877. Puntos datos observacionales, línea continua curva ajustada.

NGC 3917

\tilde{R}	V_c
0.05	23.9
0.12	50.0
0.17	74.0
0.23	100.9
0.29	106.1
0.35	114.7
0.41	122.8
0.47	129.7
0.52	133.7
0.58	135.7
0.64	136.5
0.70	135.3
0.77	136.9
0.82	136.5
0.88	136.4
0.94	137.2
1	135.9

Tabla 2.5: Tabla de datos \tilde{R} y V_c [km/s] obtenida a partir de la curva de rotación observacional.

a_{2n}	\tilde{C}_{2k}
224378.	29917.
$-1,45 \times 10^6$	18364.1
$5,63 \times 10^6$	10007.4
$-1,29 \times 10^7$	3765.0
$1,66 \times 10^7$	875.0
$-1,11 \times 10^7$	111.9
$2,99 \times 10^6$	6.0

Tabla 2.6: Valores numéricos de las constantes ajustadas.

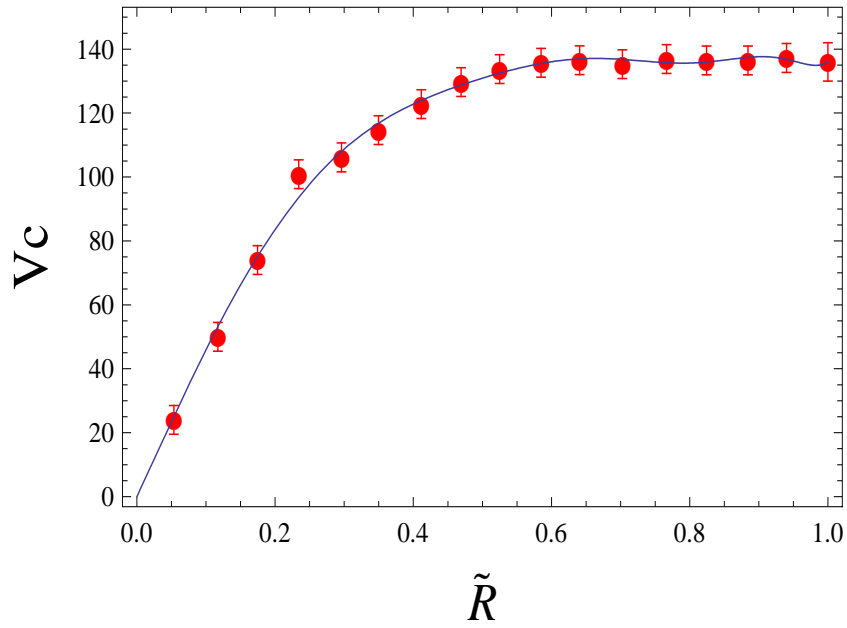


Figura 2.3: Curvas de rotación $V_c[km/s]$ vs. \tilde{R} . Galaxia NGC 3917. Puntos datos observacionales, línea continua curva ajustada.

NGC 3949

\tilde{R}	V_c
0.12	168.3
0.24	164.8
0.36	161.1
0.49	156.5
0.62	151.9
0.74	144.8
0.86	121.7
1	67.5

Tabla 2.7: Tabla de datos \tilde{R} y V_c [km/s] obtenida a partir de la curva de rotación observacional.

a_{2n}	\tilde{C}_{2k}
322150.	42953.3
$-1,63 \times 10^6$	20676.1
$3,74 \times 10^6$	6645.0
$-3,87 \times 10^6$	1131.9
$1,46 \times 10^6$	77.1

Tabla 2.8: Valores numéricos de las constantes ajustadas.

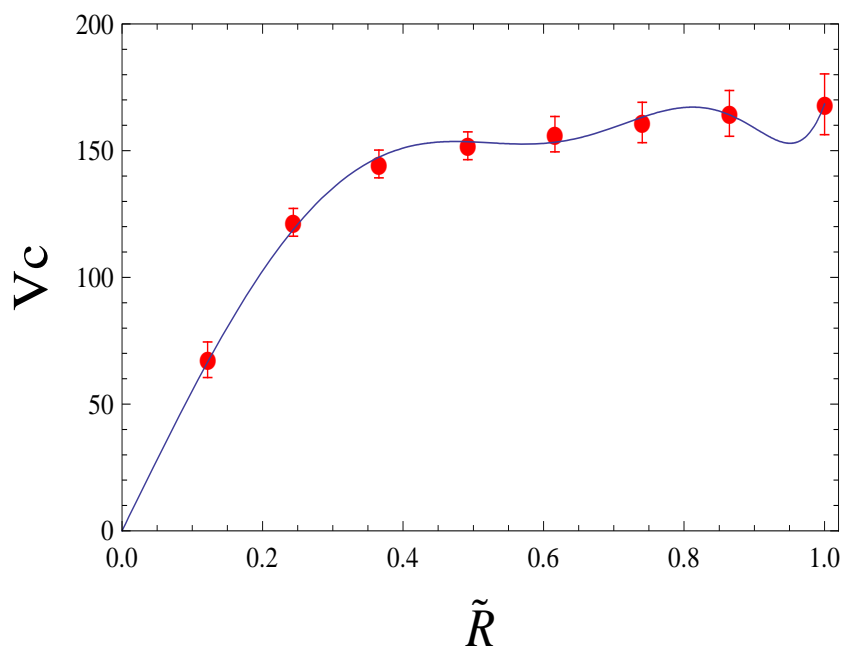


Figura 2.4: Curvas de rotación $V_c[km/s]$ vs. \tilde{R} . Galaxia NGC 3949. Puntos datos observacionales, línea continua curva ajustada.

NGC 4010

\tilde{R}	V_c
0.08	38.8
0.16	55.2
0.25	66.2
0.33	83.4
0.41	93.5
0.50	104.2
0.58	114.8
0.66	127.0
0.75	129.0
0.83	126.5
0.92	123.2
1	121.9

Tabla 2.9: Tabla de datos \tilde{R} y V_c [km/s] obtenida a partir de la curva de rotación observacional.

a_{2n}	\tilde{C}_{2k}
143174.	19089.9
$-1,28 \times 10^6$	16366.4
$6,67 \times 10^6$	11850.3
$-1,76 \times 10^7$	5145.8
$2,44 \times 10^7$	1285.9
$-1,70 \times 10^7$	171.8
$4,73 \times 10^6$	9.5

Tabla 2.10: Valores numéricos de las constantes ajustadas.

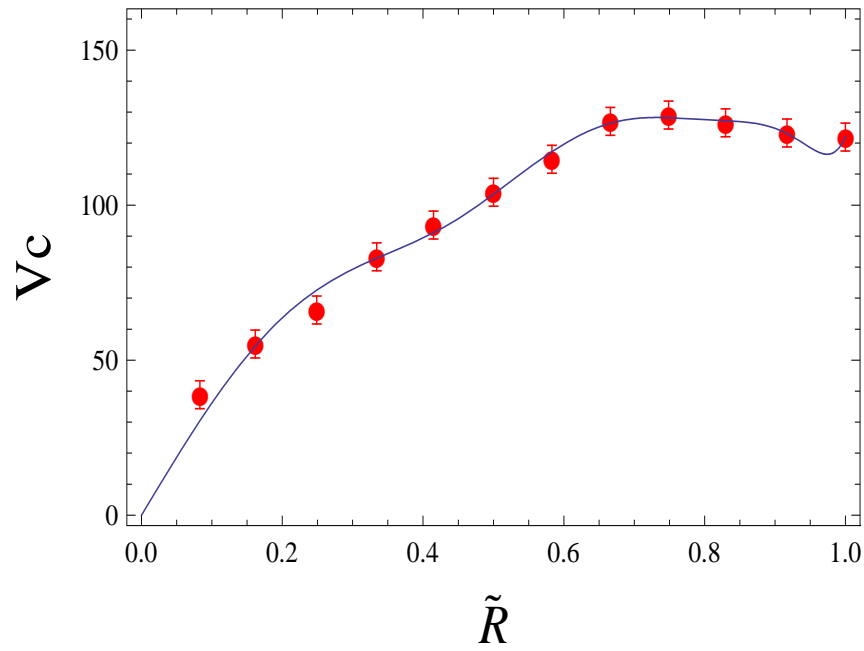


Figura 2.5: Curvas de rotación V_c [km/s] vs. \tilde{R} . Galaxia NGC 4010. Puntos datos observacionales, línea continua curva ajustada.

NGC 4183

\tilde{R}	V_c
0.04	47.2
0.08	65.3
0.12	75.6
0.16	85.6
0.21	97.1
0.22	98.7
0.29	102.9
0.33	106.8
0.37	110.6
0.41	113.3
0.45	114.1
0.49	111.0
0.54	109.9
0.58	111.1
0.62	109.2
0.66	108.4
0.71	109.6
0.76	111.5
0.80	110.4
0.85	109.3
0.89	110.0
0.95	112.4
1	112.8

Tabla 2.11: Tabla de datos \tilde{R} y V_c [km/s] obtenida a partir de la curva de rotación observacional.

a_{2n}	\tilde{C}_{2k}
345666.	46088.8
$-3,43 \times 10^6$	43588.1
$1,60 \times 10^7$	28496.2
$-3,95 \times 10^7$	11547.1
$5,25 \times 10^7$	2771.5
$-3,57 \times 10^7$	360.2
$9,69 \times 10^6$	19.5

Tabla 2.12: Valores numéricos de las constantes ajustadas.

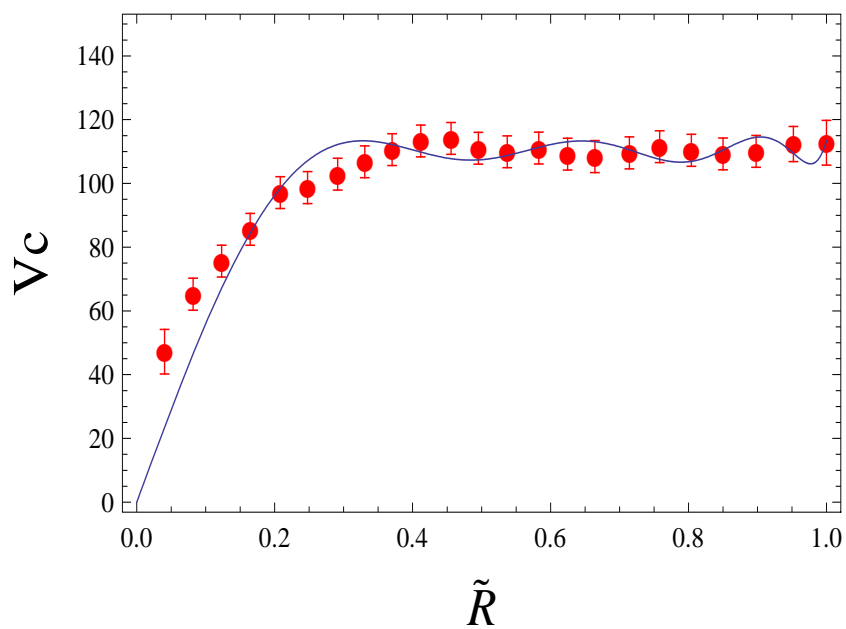


Figura 2.6: Curvas de rotación V_c [km/s] vs. \tilde{R} . Galaxia NGC 4183. Puntos datos observacionales, línea continua curva ajustada.

NGC 5585

\tilde{R}	V_c
0.06	25
0.13	40.8
0.19	53.3
0.25	64.3
0.31	72.7
0.38	76.5
0.44	78.6
0.49	83.2
0.56	87.7
0.62	89.5
0.69	90.6
0.75	91.6
0.81	92.1
0.87	90.6
0.94	89.8
1	89.0

Tabla 2.13: Tabla de datos \tilde{R} y V_c [km/s] obtenida a partir de la curva de rotación observacional.

a_{2n}	\tilde{C}_{2k}
121486.	16198.1
$-1,19 \times 10^6$	15132.7
$6,78 \times 10^6$	12040.6
$-2,20 \times 10^7$	6437.8
$4,17 \times 10^7$	2202.9
$-4,57 \times 10^7$	461.9
$2,68 \times 10^7$	53.9
$-6,50 \times 10^6$	2.7

Tabla 2.14: Valores numéricos de las constantes ajustadas.

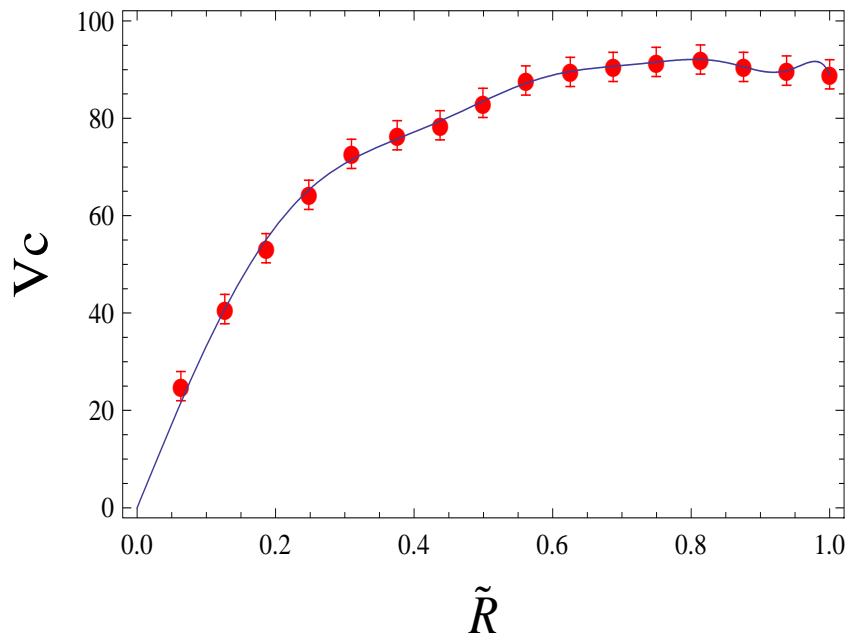


Figura 2.7: Curvas de rotación V_c [km/s] vs. \tilde{R} . Galaxia NGC 5585. Puntos datos observacionales, línea continua curva ajustada.

2.3 Distribución de Masa

Los valores calculados de las constantes $\tilde{C}_2, \tilde{C}_4, \dots$, se utilizan para calcular el valor de \tilde{C}_0 , necesaria para determinar el valor de la densidad superficial de masa $\Sigma(\tilde{R})$ dada por (2.11) para cada uno de los modelos de discos; la cual se grafica utilizando de nuevo la subrutina *Plot* para comprobar que la distribución de materia presente un máximo en el centro del disco decreciendo a cero en el borde del mismo. Esta densidad de materia se usa para encontrar la masa total de la galaxia a través de la relación (2.3).

Así, se tiene la tabla de datos de la constante faltante \tilde{C}_0 junto con la gráfica obtenida para la distribución de la densidad superficial de masa, para cada galaxia.

GALAXIA	Tipo	\tilde{C}_0	Masa[Kg]	Masa[\mathcal{M}_\odot]
NGC 1003	Scd	55929.9	$1,9 \times 10^{38}$	$9,4 \times 10^7$
NGC 3877	Sc	16243.1	$1,3 \times 10^{40}$	$6,7 \times 10^9$
NGC 3917	Scd	10361.1	$1,4 \times 10^{40}$	$7,3 \times 10^9$
NGC 3949	Sbc	15509.2	$7,0 \times 10^{39}$	$3,5 \times 10^9$
NGC 4010	SBd	5983.4	$4,2 \times 10^{39}$	$2,1 \times 10^9$
NGC 4183	Scd	13051.4	$3,7 \times 10^{40}$	$1,8 \times 10^{10}$
NGC 5585	SBcd	4875.32	$4,1 \times 10^{39}$	$2,0 \times 10^9$

Tabla 2.15: Valor numérico de la constante indeterminada \tilde{C}_0 y masa total en [Kg] y [\mathcal{M}_\odot].

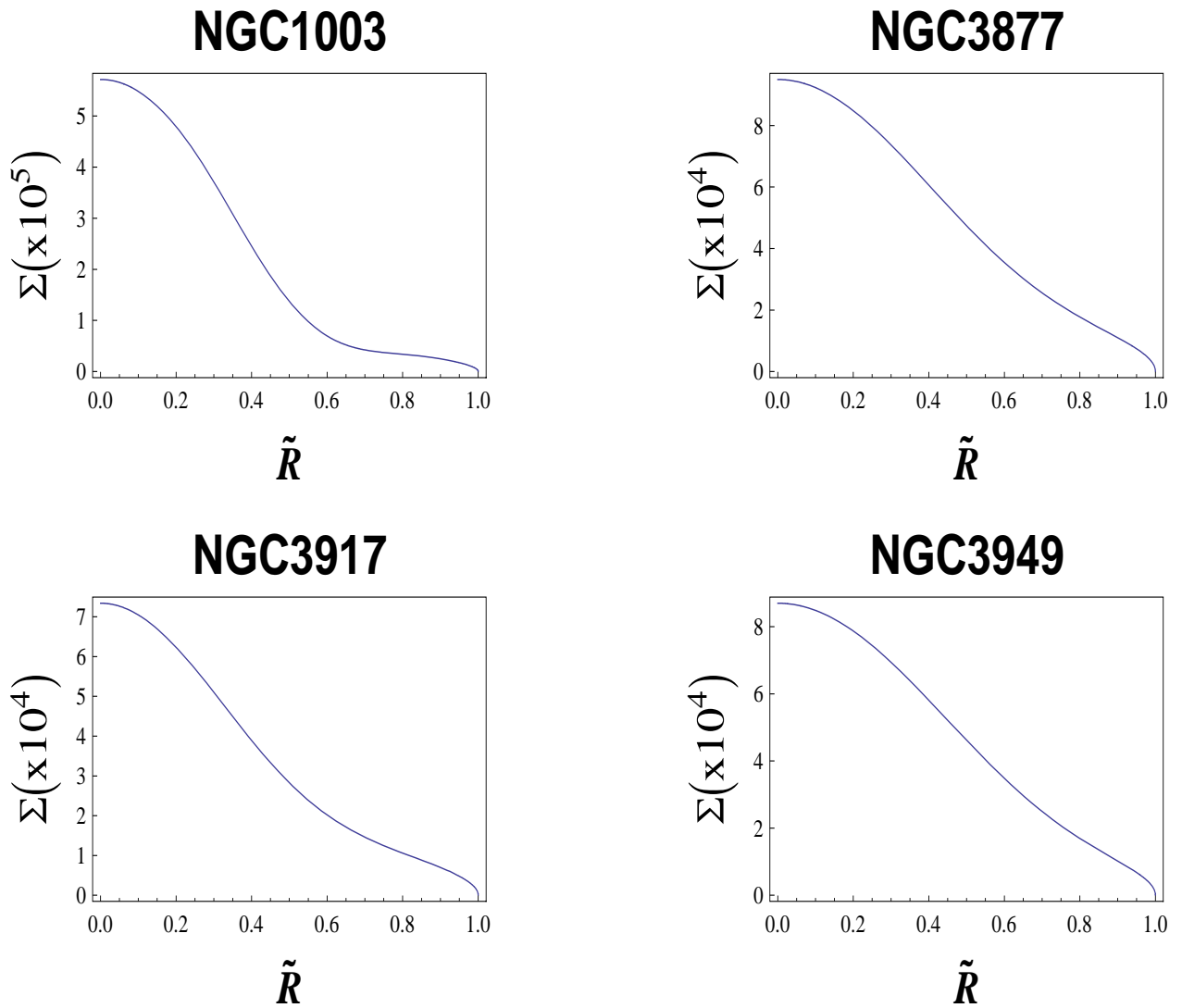


Figura 2.8: Densidad superficial de masa $\Sigma(R)$ [Kg/Km^2] vs. \tilde{R}

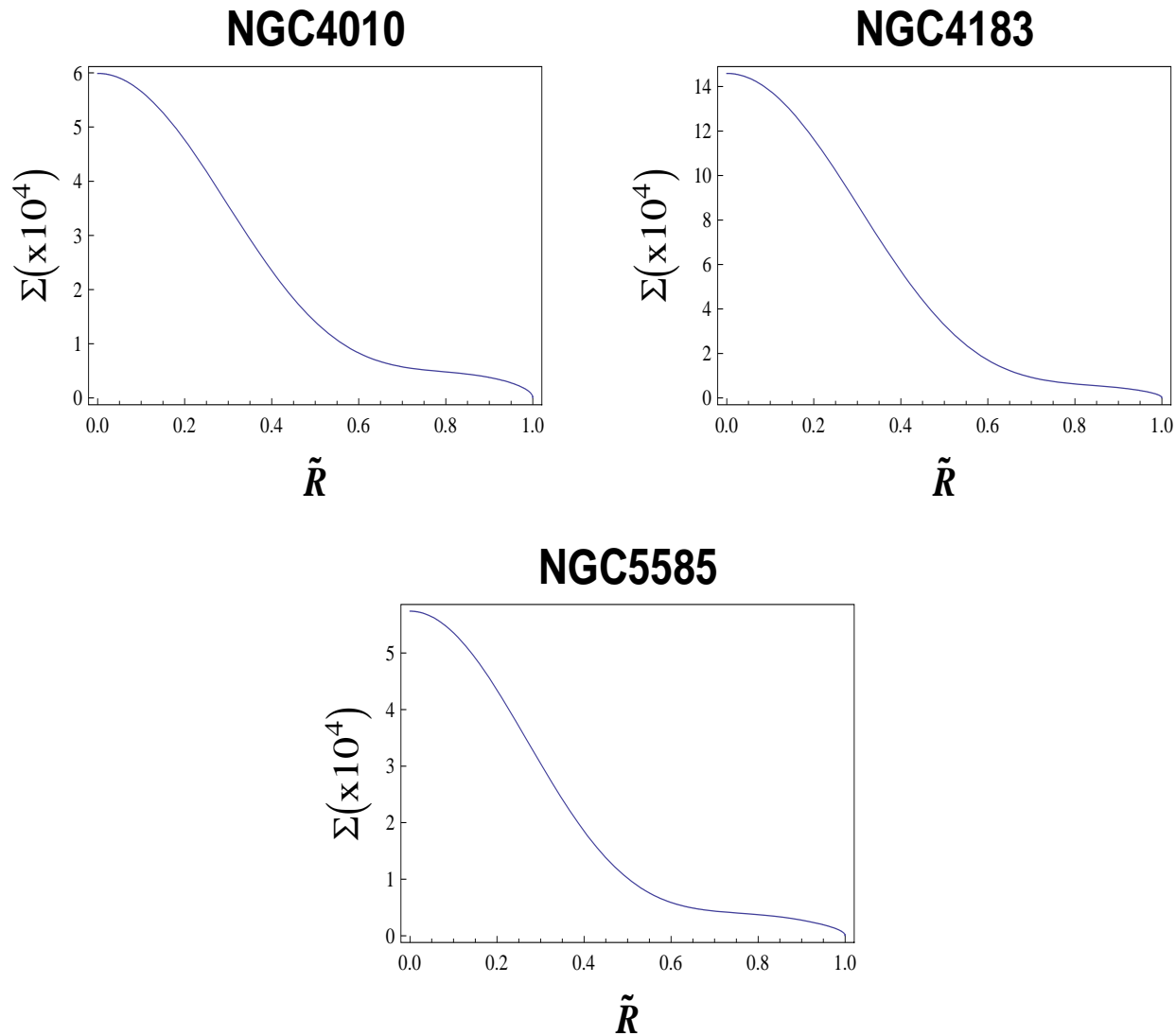


Figura 2.9: Densidad superficial de masa $\Sigma(R)$ [Kg/Km^2] vs. \tilde{R}

2.4 Potencial Gravitacional

Finalmente, para determinar el potencial gravitacional $\Phi(\xi, \eta)$ de cada modelo de disco a partir de la ecuación (1.66), y teniendo en cuenta la definición establecida para las constantes \tilde{C}_{2n} en la forma (2.1), se encuentra que

$$i^{2n+1}C_{2n} = \frac{\tilde{C}_{2n}}{Q_{2n}(i0)}, \quad (2.19)$$

así, reemplazando en la expresión para el potencial se tiene la relación final para determinar el potencial Newtoniano para puntos exteriores al disco en la forma

$$\Phi(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^m \tilde{C}_{2n} \frac{Q_{2n}(i\xi)}{Q_{2n}(i0)} P_{2n}(\eta). \quad (2.20)$$

De esta manera, por medio de las constantes obtenidas mediante el ajuste por comparación directa con las curvas de rotación observacionales, se obtienen los pares potencial-densidad de cada uno de los modelos de discos que caracterizan a las galaxias consideradas.

CONCLUSIONES

En este trabajo, se han planteado modelos destinados a describir galaxias discoidales, utilizando la teoría Newtoniana convencional, sin necesidad de recurrir a la contribución de un halo esférico adicional (usualmente asociado a materia oscura). Estos modelos describen satisfactoriamente el comportamiento de las curvas de rotación y la distribución de masa; en particular, logran reproducir en muy buena aproximación el comportamiento observacional mostrado en las curvas de rotación observacionales presentadas por Brownstein & Moffat [1]. A través del método de Hunter [2] se construyó una familia de discos finitos axialmente simétricos de tal forma que las constantes de expansión que determinan el potencial gravitacional, la densidad de masa y la velocidad circular de rotación, podían ser ajustadas mediante una comparación directa con las curvas de rotación experimentales obtenidas por medio de observaciones fotométricas (el ajuste se hizo utilizando un método de mínimos cuadrados no-lineal). Estas constantes, denotadas como \tilde{C}_{2k} , caracterizan un modelo particular de disco para cada galaxia considerada: NGC 1003, NGC 3877, NGC 3917, NGC 3949, NGC 4010, NGC 4183 Y NGC 5585 (tablas (2.2), (2.4), (2.6), (2.8), (2.10), (2.12) y (2.14)).

Luego de realizar el ajuste de las constantes \tilde{C}_{2k} , se hicieron los correspondientes gráficos de las curvas de rotación y la densidad superficial de masa respectivamente. El resultado obtenido fue que las curvas de rotación describen satisfactoriamente el comportamiento observacional, corroborando de esta forma la aplicabilidad del modelo planteado.

Los modelos obtenidos se caracterizan por tener una distribución de masa en la forma (2.12). Dicha expresión constituye una exigencia impuesta a la ecuación general (2.11) y en consecuencia la constante \tilde{C}_0 puede ser determinada a partir de las \tilde{C}_{2k} con $k = 1, 2, 3, \dots$. Los valores de \tilde{C}_0 fueron tabulados para cada modelo en la tabla (2.15). Las gráficas correspondientes a la densidad superficial de masa, también exhiben el comportamiento esperado; es decir la distribución de masa es máxima en el centro del disco decayendo suavemente hasta cero en el borde del mismo (gráficas (2.9)).

Finalmente, la masa total M se calculó a partir de las densidades de masa obtenidas integrando sobre el área total del disco en un radio $0 \leq R < a$. Para cada caso, el valor de a corresponde al valor del último punto de los datos, el cual es convertido de *kpc* a

km para que la masa total quede expresada en unidades de Kg y así encontrar el valor correspondiente en unidades de la proporción solar M_{\odot} , cuyo resultado es coherente con el rango normal encontrado para una galaxia típica (tabla (2.15)).

APÉNDICES

A.1 Curvas de Rotación Observacionales

Las curvas de rotación de los datos observacionales de las 7 galaxias seleccionadas de una muestra total de más de 150 estudiadas por Brownstein & Moffat [1] son las siguientes

NGC 1003

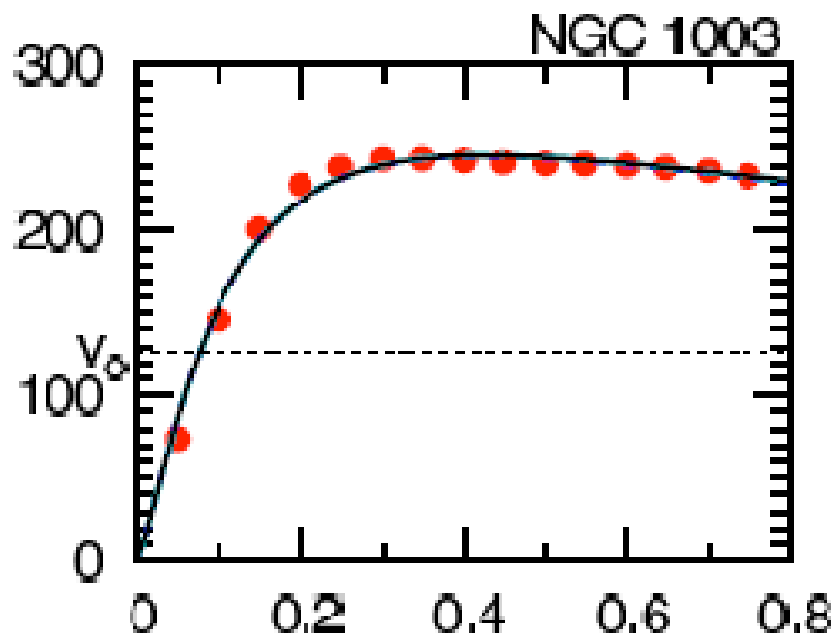


Figura A.1: Curva observacional V_c [km/s] vs. R [kpc]. Galaxia Scd NGC 1003.

NGC 3877

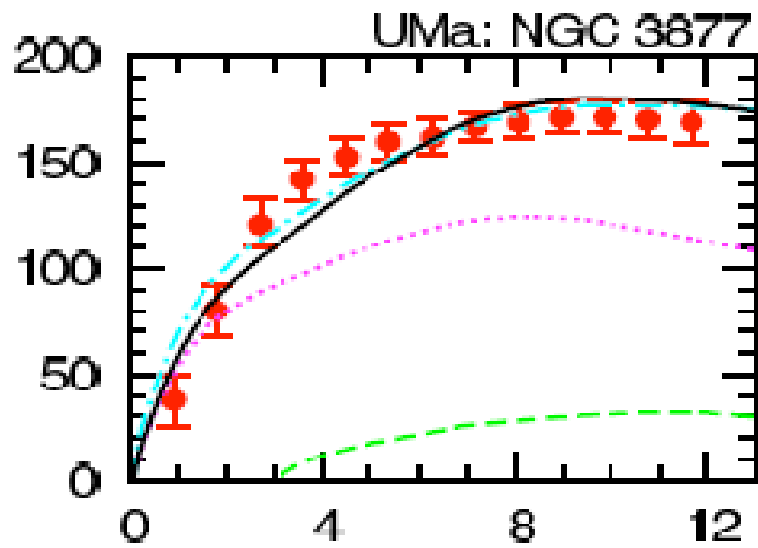


Figura A.2: Curva observacional V_c [km/s] vs. R [kpc]. Galaxia Sc NGC 3877.

NGC 3917

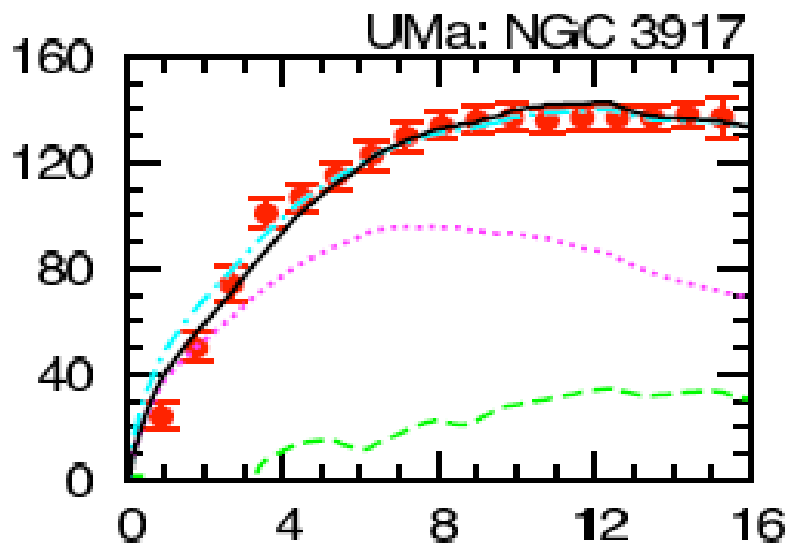
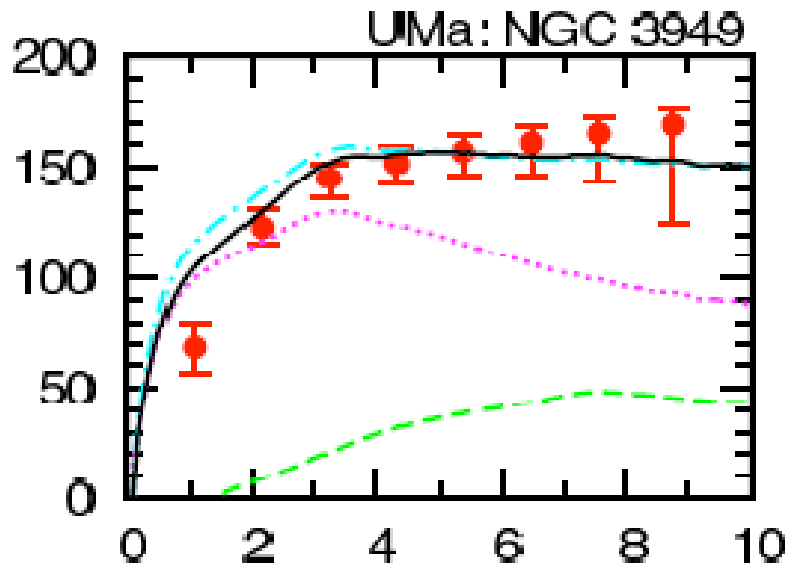
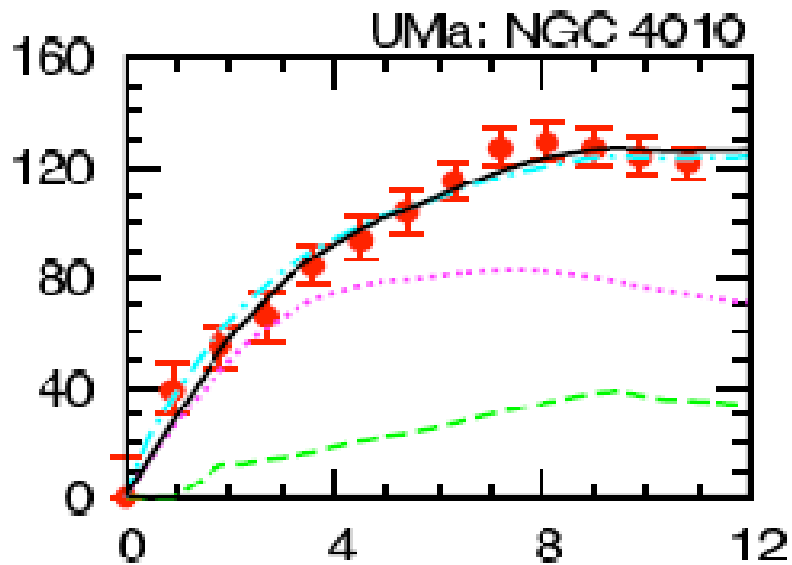


Figura A.3: Curva observacional V_c [km/s] vs. R [kpc]. Galaxia Scd NGC 3917.

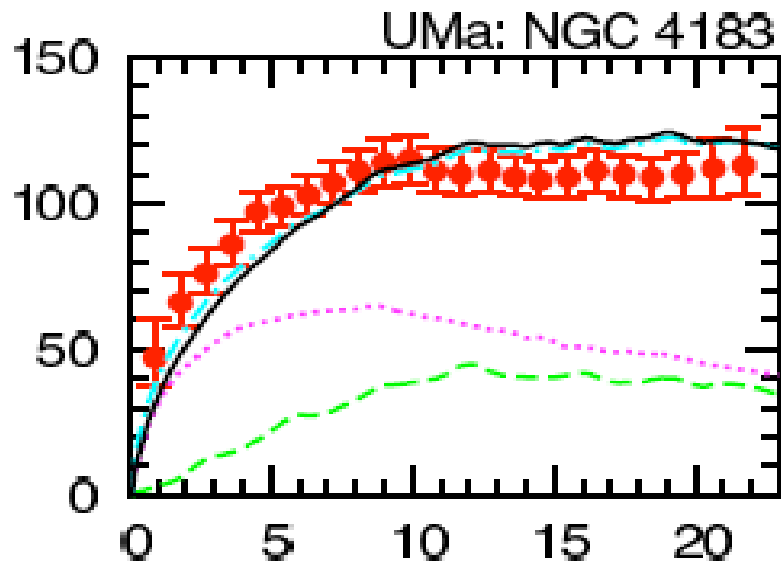
NGC 3949

Figura A.4: Curva observacional V_c [km/s] vs. R [kpc]. Galaxia Sbc NGC 3949.

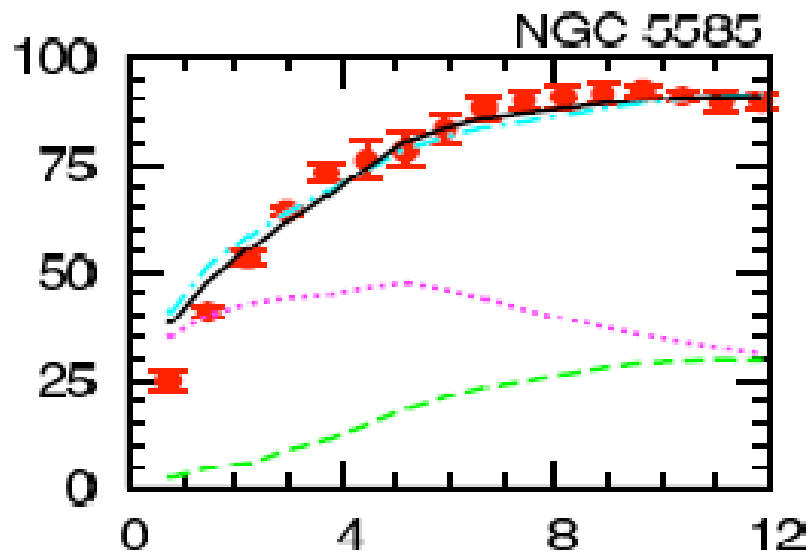
NGC 4010

Figura A.5: Curva observacional V_c [km/s] vs. R [kpc]. Galaxia SBd NGC 4010.

NGC 4183

Figura A.6: Curva observacional V_c [km/s] vs. R [kpc]. Galaxia Scd NGC 4183.

NGC 5585

Figura A.7: Curva observacional V_c [km/s] vs. R [kpc]. Galaxia SBcd NGC 5585.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Brownstein J.R., Moffat J.W., 2006, ApJ, 636, 721.
- [2] Hunter C., 1963, MNRAS, 126, 299H.
- [3] Hubble E., The Realm of the Nebulae. Yale University Press, New Haven, 1936.
- [4] Binney J., Tremaine S., 1987, Galactic Dynamics, Princeton Univ., Princeton.
- [5] Burbidge E., Burbidge G., 1975, In Stars and Stellar Systems IX: Galaxies and the Universe, ed. A. Sandage, M. Sandage, & J. Kristian, p. 81. Chicago: Univ. Chicago Press.
- [6] Freeman K.C., 1970, ApJ, 160, 811F.
- [7] Balasin H., Gruniller D., 2006, arXiv:astro-ph/0602519v2.
- [8] Milgrom M., 1983, ApJ., 270:365.
- [9] Milgrom M., 1983, ApJ., 270:371.
- [10] Moffat J.W., 2005, J. Cosmology Astropart. Phys., 05,003.
- [11] Plummer H.C., 1911, MNRAS, 71, 460.
- [12] Kuzmin G., 1956, Astron. Zh., 33, 27.
- [13] Miyamoto M., Nagai R., 1975, PASJ, 27, 533.
- [14] Toomre, A. 1963. ApJ, 138, 38.
- [15] Satoh C., 1980, PASJ, 32, 41.
- [16] González G., Reina J., 2006, MNRAS, 371, 1873.
- [17] Kalnajs A. J., 1972, ApJ, 175, 63.
- [18] Letelier P., Oliveira S., 1987, J. Math. Phys., 28:165.
- [19] Arfken G., 1985, Mathematical Methods for Physicists. Academic Press. Third edition.