

**DISCOS DELGADOS RELATIVISTAS CON FUENTE MATERIAL
POLARIZADA O MAGNETIZADA**

ANAMARÍA NAVARRO NOGUERA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2013**

**DISCOS DELGADOS RELATIVISTAS CON FUENTE MATERIAL
POLARIZADA O MAGNETIZADA**

ANAMARÍA NAVARRO NOGUERA

**TRABAJO DE GRADO
PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO**

**DIRECTOR
GUILLERMO A. GONZÁLEZ Ph D.**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2013**

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todos aquellos que hicieron parte de la realización del presente trabajo, en especial al Profesor Guillermo González, por sus enseñanzas, paciencia y motivación. A mi querida madre Maruja, a quien por su infinito cariño y amor, debo todo lo bueno de mi ser. A mi hermano Juan Carlos que jamás desistió en su esfuerzo por apoyarme aun cuando esto significara incontables sacrificios. A mi linda familia y amigos, Silvia Alejandra, Milena, Margarita, Natalia, Charly, Gina y Blanquita, por estar siempre a mi lado.

Índice general

1. Introducción	10
2. Modelo de Discos con Polarización Electromagnética	13
2.1. Preliminares	13
2.2. Ecuaciones de Einstein-Maxwell para distribuciones discoidales de materia	13
2.3. Tensor de momentum-energía superficial	17
2.4. Disco Polarizado Magnéticamente	19
2.5. Disco Polarizado Eléctricamente	21
2.6. Contenido de los Modelos en un Sistema de Referencia Localmente Minkowskiano	22
2.7. Solución para la Función Métrica ψ	24
3. Análisis de los modelos obtenidos	26
3.1. Preliminares	26
3.2. Solución de la Ecuación de Laplace	26
3.3. Disco Polarizado Magnéticamente	27
3.3.1. Modelo $n = 0$	28
3.3.2. Modelo $n = 1$	30
3.3.3. Cálculo de la Masa Total	34
3.4. Disco Polarizado Eléctricamente	36
3.4.1. Modelo $n = 0$	37
3.4.2. Modelo $n = 1$	39
3.4.3. Cálculo de la Masa Total	42
Conclusiones	45
Bibliografía	49

Índice de figuras

2.1. Método de “desplazamiento, corte y reflexión”	24
3.1. $\bar{\sigma}$, \bar{p}_r y \bar{p}_ϕ del disco polarizado magnéticamente para el modelo $n = 0$, ecuaciones (3.16) y (3.19) con $\bar{C}_0 = 1$	30
3.2. \bar{M}_z del disco polarizado magnéticamente para el modelo $n = 0$, ecuación (3.22) con $\bar{C}_0 = 1$	30
3.3. Líneas de campo magnético del disco polarizado magnéticamente para el modelo $n = 0$, ecuación (3.29)	31
3.4. $\bar{\sigma}$ del disco polarizado magnéticamente para el modelo $n = 1$, ecuación (3.34)	33
3.5. \bar{p}_r y \bar{p}_ϕ del disco polarizado magnéticamente para el modelo $n = 1$, ecuación (3.37)	33
3.6. \bar{M}_z del disco polarizado magnéticamente para el modelo $n = 1$, ecuación (3.40)	33
3.7. Líneas de campo magnético del disco polarizado magnéticamente en el modelo $n = 1$, ecuación (3.47)	35
3.8. $\bar{\sigma}$ y \bar{p}_r del disco polarizado eléctricamente para el modelo $n = 0$, ecuaciones (3.63) y (3.66), con $\bar{C}_0 = 1$	38
3.9. \bar{P}_r del disco polarizado eléctricamente para el modelo $n = 0$, ecuación (3.69), con $\bar{C}_0 = 1$	38
3.10. Líneas equipotenciales y líneas de campo eléctrico para el disco polarizado eléctricamente para el modelo $n = 0$, ecuaciones (3.29) y (3.72)	39
3.11. $\bar{\sigma}$ del disco polarizado eléctricamente para el modelo $n = 1$, ecuación (3.75) .	41
3.12. \bar{p}_r del disco polarizado eléctricamente para el modelo $n = 1$, ecuación (3.78) .	41
3.13. \bar{P}_r del disco polarizado eléctricamente para el modelo $n = 1$, ecuación (3.81)	41
3.14. Líneas equipotenciales y campo eléctrico del disco polarizado eléctricamente en el modelo $n = 1$, ecuaciones (3.86) y (3.47)	43

RESUMEN

TÍTULO: DISCOS DELGADOS RELATIVISTAS CON FUENTE MATERIAL POLARIZADA O MAGNETIZADA ¹

AUTOR: Anamaría Navarro Noguera ²

PALABRAS CLAVE: Relatividad General, ecuaciones de Einstein-Maxwell, discos relativistas, soluciones exactas, espacio-tiempo conformestático, tensor de momentum-energía, condiciones de energía, distribuciones tensoriales.

Descripción:

Se presentan dos familias infinitas de discos delgados relativistas autogravitantes y axialmente simétricos, uno compuesto por materia polarizada magnéticamente y el otro compuesto por materia polarizada eléctricamente. Estos modelos se obtienen al solucionar analíticamente las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el electrovacío para un espacio-tiempo conformestático. Consideramos una función métrica y un potencial electromagnético que presentan una discontinuidad finita en su primera derivada normal a través del plano $z = 0$ con el fin de producir una singularidad del tipo función delta de Dirac, la cual interpretamos como el efecto gravitacional y electromagnético causado por un disco delgado infinito de fuente material polarizada electromagnéticamente en el plano $z = 0$. De acuerdo con la naturaleza del espacio-tiempo, encontramos relaciones para la función métrica y el potencial electromagnético en términos de una solución a la ecuación de Laplace, la cual expresamos como una expansión de polinomios de Legendre y a la que aplicamos el método de “desplazamiento, corte y reflexión” con el fin de introducir las discontinuidades en la función métrica y el potencial electromagnético. Para los dos tipos de disco se obtienen las componentes del tensor de momentum-energía superficial, los vectores polarización electromagnética, y los campos electromagnéticos. Finalmente se analizan los dos primeros modelos de cada tipo de disco, analizando cualitativamente el comportamiento de las cantidades físicas bajo el cumplimiento de las condiciones de energía del tensor de momentum-energía superficial. Por último probamos la convergencia de la masa total en todos los modelos.

¹Trabajo de Grado

²Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Guillermo A. González V., Ph.D.

ABSTRACT

TITLE: RELATIVISTIC THIN DISKS WITH MATERIAL SOURCE POLARIZED OR MAGNETIZED ³

AUTHOR: Anamaría Navarro Noguera ⁴

KEYWORDS: General Relativity, Einstein-Maxwell equations, relativistic disks, exact solutions, conformastatic spacetime, energy-momentum tensor, energy conditions, tensorial distributions.

Description:

Two new families of exact solutions of the Einstein-Maxwell's equations are presented, which describe two axially symmetric infinite thin disks composed by electrically or magnetically polarized material. In order to obtain the models, axially symmetric solutions for electrovacuum in a conformastatic spacetime are considered. The solution of Einstein-Maxwell's equations leads to a relation for the metric function and the electromagnetic potential in terms of a solution of Laplace's equation, which we take as an expansion of Legendre Polynomials. It is assumed the electromagnetic potential and the metric function present a finite discontinuity in their normal first derivative through a thin disk, which is introduced by applying the "displace, cut and reflect" method on the solution of Laplace equation. Then, the energy-momentum tensor, the electromagnetic fields and the polarization vectors are found. We analyze the behavior of the first two models in a local reference frame, when the energy conditions are fully satisfied. The convergence of the mass for all the models is proved.

³Degree Work

⁴Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Advisor: Guillermo A. González V., Ph.D.

Introducción

Una de las características más fundamentales de un sistema aislado en el universo es la simetría axial, ejemplos importantes de esta clase de configuraciones son planetas, estrellas, galaxias, discos de acreción y agujeros negros. De acuerdo con esto, se han desarrollado numerosos trabajos tanto en el marco de la Teoría Newtoniana de la Gravitación como en el de la Teoría de la Relatividad General. Ahora bien, en el contexto de la Teoría de la Relatividad General, la construcción de soluciones físicamente aceptables y auto-consistentes para fuentes materiales y sus campos gravitacionales asociados es un problema de alta complejidad. Para obtener estas soluciones se debe resolver simultáneamente el problema exterior, cuya solución determina el campo externo y es básicamente un problema de contorno para las ecuaciones de Einstein de vacío; y el problema interior, cuya solución determina la estructura y la dinámica de la fuente en su propio campo gravitacional.

Por otro parte, al considerar como fuente un disco infinitesimalmente delgado, el problema se reduce a formular condiciones de frontera adecuadas para la solución exterior. Así entonces, se pueden obtener soluciones auto-consistentes que describan fuentes de materia con un comportamiento físicamente razonable. A pesar de su naturaleza altamente ideal, los modelos relativistas de discos delgados son interesantes debido a su semejanza con sistemas astrofísicos como los discos de acreción, galaxias en equilibrio termodinámico y la superposición de un agujero negro con una galaxia. En consecuencia, una extensa cantidad de trabajos se han dedicado a la obtención y análisis físico de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein correspondientes a este tipo de configuraciones. Los primeros modelos relativistas de discos estáticos delgados fueron obtenidos en 1968 por Bonnor y Sackfield [1] y en 1969 por Morgan y Morgan [2]. Desde entonces, varios autores han obtenido diferentes clases de soluciones exactas correspondientes a discos delgados estáticos [3–13] y estacionarios [14–17], mientras que la estabilidad de este tipo de modelos de discos delgados fue investigada en [18] utilizando una perturbación de primer orden del tensor de momentum-energía.

Fuentes discoidales para espacio-tiempos estacionarios axialmente simétricos con campos magnéticos son igualmente de importancia astrofísica, principalmente en el estudio de estrellas de neutrones, enanas blancas y formación de galaxias. Por otra parte, aunque normalmente se considera que los discos con campo eléctrico no tienen una clara importancia astrofísica, su estudio es de interés principalmente en el contexto de las soluciones exactas, en donde la clara identificación de la fuente material asociada a una solución dada es un problema bastante complejo. De esta manera, la obtención y el análisis físico de esta clase

de soluciones ha sido motivo de distintos trabajos, por ejemplo discos delgados como fuente de campos de Kerr-Newman [19], campos magnetostáticos axialmente simétricos [20] y métricas conformestáticas y conformestacionarias [21–23], mientras que modelos de discos de polvo estáticos contrarrotantes cargados se presentaron en [24]. Discos de fluido perfecto cargados también fueron estudiados como fuentes de espacio-tiempos estáticos [25, 26] y de tipo Taub-NUT [27], discos delgados rotantes como fuentes de espaciotiempos de Kerr-NUT cargados y magnetizados [28], discos con halo esférico y campo magnético generado por corrientes [29], discos con halo y campo eléctrico generado por cargas libres [30], entre muchos otros trabajos.

Por otra parte, fuentes de campo magnético fácilmente evidenciadas en la astrofísica son los dipolos magnéticos como los de estrellas y planetas, sin embargo este tipo de fuentes han sido estudiados en menor medida en el contexto de las soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell. Los únicos trabajos relacionados fueron realizados por Gürlebeck, Bičák y Gutiérrez-Piñeres [31, 32], en los que analizaron campos eléctricos y magnéticos generados por capas dipolares eléctricas y magnéticas sobrepuestas a un espacio-tiempo de Schwarzschild, donde resuelven solamente las ecuaciones de Maxwell. En razón de lo expuesto, consideramos de gran importancia encontrar soluciones exactas de discos delgados relativistas con materia polarizada electromagnéticamente, con base en la evidencia observacional de los dipolos magnéticos y como parte del progreso teórico general de los discos delgados relativistas. Es por esto que el objetivo del presente trabajo de grado es la construcción de dos modelos relativistas de discos delgados y estáticos, uno compuesto por una fuente material polarizada magnéticamente y el otro eléctricamente, por medio de la solución analítica de las ecuaciones de Einstein-Maxwell. El plan general del trabajo es el siguiente:

En el capítulo 2 encontramos las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el electrovacío para una configuración discoidal de materia compuesta por material polarizado electromagnéticamente empleando el formalismo distribucional de tensores. Con dos potenciales electromagnéticos correspondientes a un disco polarizado eléctricamente y a uno polarizado magnéticamente, resolvemos las ecuaciones de Einstein-Maxwell en un espacio-tiempo conformestático, donde hemos supuesto que el tensor métrico junto con el potencial electromagnético presentan una discontinuidad finita en su primera derivada a través del plano $z = 0$. Al resolver el sistema encontramos relaciones entre cada uno de los potenciales electromagnéticos en términos de la función métrica, lo cual permite encontrar expresiones para las componentes del tensor de momentum-energía superficial del disco y los vectores de polarización electromagnética en términos de la función métrica. Después, con el fin de poder analizar el contenido físico del disco, hacemos una transformación a un sistema de referencia localmente Minkowskiano, en el cual los autovalores del tensor de momentum-energía superficial del disco representan la densidad de energía superficial del disco, y las presiones principales. La naturaleza conformestática del espacio-tiempo permite expresar la función métrica en términos de una solución a la ecuación de Laplace, con lo cual todo el contenido físico del disco queda expresado en términos de una solución de Laplace.

En el capítulo 3, debido a la simetría axial del sistema, consideramos como solución a la ecuación de Laplace una expansión de polinomios de Legendre, a la cual aplicamos el método “desplazamiento, corte y reflexión” con el fin de introducir las discontinuidades en las prime-

ras derivadas de z , las cuales representan el efecto gravitacional y electromagnético causado por el disco. De esta manera encontramos las expresiones generales del contenido físico de los discos para una familia infinita de modelos. Finalmente analizamos el comportamiento de los dos primeros modelos de cada tipo de disco, el cumplimiento de las condiciones de energía del tensor de momentum-energía superficial, la densidad de energía superficial, las presiones principales, los campos electromagnéticos y los vectores de polarización electromagnética. Por último, demostramos la convergencia de la masa total de todos los modelos.

Modelo de Discos con Polarización Electromagnética

2.1. Preliminares

Uno de los métodos para obtener discos delgados en Relatividad General es a partir de soluciones axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein–Maxwell en las que se introduce una discontinuidad finita en la primera derivada del tensor métrico a través del plano $z = 0$. Esta discontinuidad puede representarse por una función de Heaviside de tal forma que, dado que el tensor de curvatura es lineal en las segundas derivadas del tensor métrico y cuadrático en las primeras derivadas, tendrá términos proporcionales a la distribución delta de Dirac con soporte en $z = 0$; estos términos se interpretan como el efecto gravitacional causado por una distribución de materia discoidal en el plano $z = 0$. Por otra parte, si consideramos un potencial electromagnético con una discontinuidad como la del tensor métrico en el plano del disco, se genera un término proporcional a la distribución delta de Dirac en la derivada covariante del tensor electromagnético; éste término puede ser interpretado como el efecto causado por fuentes electromagnéticas en el plano del disco. En éste capítulo, por medio del formalismo de distribuciones tensoriales, hallamos las ecuaciones de Einstein–Maxwell para una configuración discoidal de materia polarizada electromagnéticamente, y las resolvemos en un espacio-tiempo conformestático para dos casos particulares de potencial electromagnético con tal de obtener un disco polarizado eléctricamente o magnéticamente. Con el fin de analizar los resultados obtenidos, hacemos un cambio de base a la de un observador localmente Minkowskiano. Por último, debido a la naturaleza del espacio-tiempo, encontramos una manera de expresar todo el contenido de los discos como funciones de una solución a la ecuación de Laplace.

2.2. Ecuaciones de Einstein–Maxwell para distribuciones discoidales de materia

En un espacio-tiempo estático y axialmente simétrico, donde la única distribución de materia corresponde a un disco infinitesimalmente delgado en la superficie $z = 0$, el tensor

métrico tiene simetría respecto a la superficie del disco de la forma

$$g_{\alpha\beta}(r, z) = g_{\alpha\beta}(r, -z), \quad (2.1)$$

de tal manera que, para $z \neq 0$,

$$g_{\alpha\beta,z}(r, z) = -g_{\alpha\beta,z}(r, -z). \quad (2.2)$$

Supondremos que el tensor métrico es continuo en la región del disco, lo cual se puede escribir como

$$[g_{\alpha\beta}] = g_{\alpha\beta}|_{z=0^+} - g_{\alpha\beta}|_{z=0^-} = 0, \quad (2.3)$$

donde $[g_{\alpha\beta}]$ se conoce como el salto del campo $g_{\alpha\beta}$ a través de $z = 0$ y los superíndices $+$ y $-$ representan las zonas superior e inferior al plano. Con el fin de introducir el efecto gravitatorio generado por el disco, supondremos que el tensor presenta una discontinuidad finita en su primera derivada normal al disco, la cual será descrita por el tensor $b_{\alpha\beta}$, definido como

$$b_{\alpha\beta} = [g_{\alpha\beta,z}] = g_{\alpha\beta,z}|_{z=0^+} - g_{\alpha\beta,z}|_{z=0^-} = 2g_{\alpha\beta,z}|_{z=0^+}, \quad (2.4)$$

donde se ha tenido en cuenta la simetría de reflexión con respecto al eje $z = 0$. Supondremos además que la materia que conforma el disco está polarizada electromagnéticamente de modo que el potencial electromagnético A_α , al igual que el tensor métrico, tiene simetría respecto a la superficie del disco de la forma

$$A_\alpha(r, z) = A_\alpha(r, -z), \quad (2.5)$$

de tal manera que, para $z \neq 0$,

$$A_{\alpha,z}(r, z) = -A_{\alpha,z}(r, -z). \quad (2.6)$$

Suponemos que A_α es continuo en la región del disco,

$$[A_\alpha] = A_\alpha|_{z=0^+} - A_\alpha|_{z=0^-} = 0, \quad (2.7)$$

y presenta una discontinuidad finita en su primera derivada, que puede ser representada como

$$[A_{\alpha,z}] = A_{\alpha,z}|_{z=0^+} - A_{\alpha,z}|_{z=0^-} = 2A_{\alpha,z}|_{z=0^+}, \quad (2.8)$$

donde hemos tenido en cuenta la simetría respecto a $z = 0$.

Por otra parte, las ecuaciones de Einstein-Maxwell en unidades de Heaviside-Lorentz geometrizadas, donde $c = 8\pi G = \mu_0 = \epsilon = 1$, en un espacio-tiempo libre de corrientes y cargas libres, están dadas por

$$G_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^M + T_{\alpha\beta}^F + T_{\alpha\beta}^{FM}, \quad (2.9a)$$

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = M^{\alpha\beta}{}_{;\beta}, \quad (2.9b)$$

donde

$$F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}, \quad (2.10)$$

es el tensor electromagnético y $M_{\alpha\beta}$ es el tensor de polarización electromagnética [33]. El tensor de momentum-energía tiene una componente que corresponde a la materia $T_M^{\alpha\beta}$, una al campo electromagnético $T_F^{\alpha\beta}$, dada por

$$T_F^{\alpha\beta} = F^\alpha{}_\mu F^{\beta\mu} - \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

y una a la interacción electromagnética con la materia polarizada $T_{FM}^{\alpha\beta}$, expresada como

$$T_{FM}^{\alpha\beta} = -F^\alpha{}_\mu M^{\beta\mu}, \quad (2.12)$$

la cual es consistente con las leyes de la termodinámica de medios continuos [33, 34].

La formulación distribucional tensorial [35–37] nos permite expresar el tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ de la forma

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^+ \Theta(z) + g_{\alpha\beta}^- \{1 - \Theta(z)\}, \quad (2.13)$$

siendo $g_{\alpha\beta}^\pm$ el tensor métrico en las regiones superior e inferior al disco y $\Theta(z)$ la distribución de Heaviside definida según

$$\Theta(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ \frac{1}{2}, & z = 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

El tensor de Ricci puede ser expresado como

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}^+ \Theta(z) + R_{\alpha\beta}^- \{1 - \Theta(z)\} + H_{\alpha\beta} \delta(z), \quad (2.15)$$

donde $\delta(z)$ es la distribución de Dirac con soporte en la superficie $z = 0$ y $H_{\alpha\beta}$ está dado por

$$H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (b^z{}_\alpha \delta^z{}_\beta + b^z{}_\beta \delta^z{}_\alpha - b^\mu{}_\mu \delta^z{}_\alpha \delta^z{}_\beta - g^{zz} b_{\alpha\beta}), \quad (2.16)$$

donde todas las cantidades deben evaluarse en $z = 0^+$. Al reemplazar la expresión para el tensor de Ricci (2.15) en el tensor de Einstein,

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R, \quad (2.17)$$

se obtiene

$$G_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta}^+ \Theta(z) + G_{\alpha\beta}^- \{1 - \Theta(z)\} + Q_{\alpha\beta} \delta(z), \quad (2.18)$$

donde

$$G_{\alpha\beta}^\pm = R_{\alpha\beta}^\pm - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R^\pm, \quad (2.19)$$

y

$$Q_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}H, \quad (2.20)$$

donde $H = g^{\alpha\beta}H_{\alpha\beta}$.

El potencial electromagnético A_α y su derivada $A_{\alpha,\beta}$, siguiendo la formulación distribucional, se pueden escribir del siguiente modo

$$A_\alpha = A_\alpha^+ \Theta(z) + A_\alpha^- \{1 - \Theta(z)\}, \quad (2.21)$$

$$A_{\alpha,\beta} = A_{\alpha,\beta}^+ \Theta(z) + A_{\alpha,\beta}^- \{1 - \Theta(z)\}. \quad (2.22)$$

Entonces, reemplazando (2.22) en (2.10) encontramos que el tensor electromagnético puede escribirse como

$$F_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}^+ \Theta(z) + F_{\alpha\beta}^- \{1 - \Theta(z)\}, \quad (2.23)$$

y, reemplazando (2.23) en (2.11), obtenemos para el tensor de momentum-energía electromagnético la expresión

$$T_F^{\alpha\beta} = T_F^{\alpha\beta+} \Theta(z) + T_F^{\alpha\beta-} \{1 - \Theta(z)\}, \quad (2.24)$$

donde $T_F^{\alpha\beta\pm}$ está dado por (2.11). El tensor de polarización electromagnética y el tensor de momentum-energía de materia se pueden escribir como

$$M^{\alpha\beta} = \Pi^{\alpha\beta} \delta(z), \quad (2.25)$$

$$T_M^{\alpha\beta} = \tau_M^{\alpha\beta} \delta(z), \quad (2.26)$$

dado que sólo en la región del disco, en el plano $z = 0$, existe materia y ésta se encuentra polarizada electromagnéticamente. Los vectores polarización eléctrica y magnética del disco están definidos como

$$P_\alpha = u^\beta \Pi_{\beta\alpha}, \quad (2.27)$$

$$M^\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \Pi_{\mu\nu} u_\beta \quad (2.28)$$

respectivamente, donde u_β es la velocidad del observador y $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ es el tensor de Levi-Civita. Al reemplazar (2.23) y (2.25) en (2.12), encontramos que el tensor de interacción electromagnética puede escribirse de la forma

$$T_{FM}^{\alpha\beta} = \tau_{FM}^{\alpha\beta} \delta(z), \quad (2.29)$$

donde

$$\tau_{FM}^{\alpha\beta} = \bar{F}^\alpha{}_\mu \Pi^{\mu\beta}, \quad (2.30)$$

con

$$\bar{F}^\alpha{}_\mu = \frac{F_\mu^{\alpha+} + F_\mu^{\alpha-}}{2}, \quad (2.31)$$

en la que todas las cantidades deben ser evaluadas en $z = 0^+$.

Podemos escribir la derivada covariante del tensor electromagnético y del tensor de polarización electromagnética como

$$\sqrt{-g} F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \left(\hat{F}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} \right)^D + \left[\hat{F}^{\alpha\beta} \right] \delta^z{}_\beta \delta(z), \quad (2.32)$$

$$\sqrt{-g} M^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \hat{\Pi}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} \delta(z) + \hat{\Pi}^{\alpha z} \delta'(z), \quad (2.33)$$

donde $\hat{F}^{\alpha\beta} = \sqrt{-g}F^{\alpha\beta}$ y $\hat{\Pi}^{\alpha\beta} = \sqrt{-g}\Pi^{\alpha\beta}$. Así, al reemplazar (2.32), (2.33), (2.24), (2.29) y (2.26) en las ecuaciones de Einstein-Maxwell (2.9) y después de realizar una comparación de términos, obtenemos los sistemas de ecuaciones

$$G_{\alpha\beta}^{\pm} = (T_{\alpha\beta}^F)^{\pm}, \quad (2.34a)$$

$$\hat{F}_{\pm,\beta}^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.34b)$$

para las regiones $z > 0$ y $z < 0$, y

$$Q_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}^M + \tau_{\alpha\beta}^{FM}, \quad (2.35a)$$

$$[\hat{F}^{\alpha z}] = \hat{\Pi}^{\alpha\beta}_{,\beta}, \quad (2.35b)$$

$$\hat{\Pi}^{\alpha z} = 0, \quad (2.35c)$$

para la región del disco, el plano $z = 0$.

2.3. Tensor de momentum-energía superficial

De la ecuación (2.35a) podemos despejar el tensor $\tau_{\alpha\beta}^M$, así se obtiene

$$\tau_{\alpha\beta}^M = Q_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha\beta}^{FM}, \quad (2.36)$$

por medio de esta ecuación, el tensor de momentum energía correspondiente a la materia se puede expresar como

$$T_{\alpha\beta}^M = (Q_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha\beta}^{FM}) \delta(z), \quad (2.37)$$

la cual nos permite calcular el tensor de momentum energía superficial del disco, el cual está dado por la integral

$$S_{\alpha\beta} = \int T_{\alpha\beta}^M ds_n = \sqrt{g_{zz}} (Q_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha\beta}^{FM}), \quad (2.38)$$

donde $ds_n = \sqrt{g_{zz}} dz$ es la medida física de longitud en dirección normal al disco.

En una tétrada ortonormal como la del ‘‘Observador Localmente Estático’’ (LSO) [22], un observador en reposo con respecto al infinito, definido como

$$e_{(t)}^{\alpha} = e^{-\psi} \delta_t^{\alpha}, \quad (2.39a)$$

$$e_{(r)}^{\alpha} = e^{\psi} \delta_r^{\alpha}, \quad (2.39b)$$

$$e_{(\phi)}^{\alpha} = e^{\psi} \delta_{\phi}^{\alpha} / r, \quad (2.39c)$$

$$e_{(z)}^{\alpha} = e^{\psi} \delta_z^{\alpha}, \quad (2.39d)$$

donde $e_{(0)}^{\alpha}$ es la cuadrivelocidad del observador, el tensor de momentum energía superficial se puede descomponer de la forma

$$S_{\alpha\beta} = \sigma e_{\alpha}^{(t)} e_{\beta}^{(t)} + p_r e_{\alpha}^{(r)} e_{\beta}^{(r)} + p_{\phi} e_{\alpha}^{(\phi)} e_{\beta}^{(\phi)} + p_z e_{\alpha}^{(z)} e_{\beta}^{(z)} \quad (2.40)$$

donde σ representa la densidad de energía superficial del disco, p_r la presión radial, p_ϕ la presión en azimutal y p_z la presión normal [38], los cuales son los autovalores del tensor en la tétrada ortonormal,

$$\sigma = S_{(t)(t)}, \quad (2.41)$$

$$p_r = S_{(r)(r)}, \quad (2.42)$$

$$p_\phi = S_{(\phi)(\phi)}, \quad (2.43)$$

$$p_z = S_{(z)(z)}; \quad (2.44)$$

estas componentes se calculan mediante la relación

$$S_{(\alpha)(\beta)} = S_{\mu\nu} e_{(\alpha)}^\mu e_{(\beta)}^\nu, \quad (2.45)$$

con $S_{\alpha\beta}$ dado por (2.38).

Es razonable esperar que el tensor de momentum-energía superficial del disco satisfaga ciertas condiciones, como que la densidad de energía sea positiva y domine sobre las presiones. Dichos requerimientos se expresan en las condiciones de energía, las cuales son:

1. **Condición débil de energía:** La densidad de energía medida por un observador arbitrario no puede ser negativa.
2. **Condición fuerte de energía:** La densidad de masa medida por un observador arbitrario no puede ser negativa.
3. **Condición dominante de energía:** El vector densidad de flujo de energía medido por cualquier observador debe ser un vector temporal o nulo orientado hacia el futuro.

Estas condiciones de energía están resumidas en las siguientes desigualdades

$$\sigma \geq 0, \quad (2.46a)$$

$$|\sigma| \geq |p_i|, \quad (2.46b)$$

$$\sigma + p_i \geq 0, \quad (2.46c)$$

$$\sigma + p_r + p_\phi + p_z \geq 0, \quad (2.46d)$$

mediante las cuales se evalúa si un modelo de distribución de materia es físicamente razonable.

Por otra parte, por medio del tensor de momentum-energía superficial podemos calcular la masa total del disco. Una definición para la masa total de un espacio-tiempo estacionario y asintóticamente plano fue desarrollada por Komar [38], y se expresa como

$$M = 2 \int_{\Sigma} \left[T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right] n^\alpha \xi_{(t)}^\beta d\Sigma, \quad (2.47)$$

donde n^α es el vector unitario perpendicular a la hipersuperficie, $\xi_{(t)}^\alpha$ es el vector de Killing tipo tiempo y $d\Sigma$ es el elemento de volumen. Para calcular la masa del disco, tenemos que el vector normal está dado por $n^\alpha = e_{(t)}^\alpha$, el vector de Killing por $\xi_{(t)}^\alpha = e^\psi e_{(t)}^\alpha$, $d\Sigma = re^{-3\psi} dr d\phi dz$ y $T_{\alpha\beta} = e^\psi S_{\alpha\beta} \delta(z)$, entonces la ecuación (2.47) se reescribe como

$$M = 2 \int_{\Sigma} \left[S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} S g_{\alpha\beta} \right] e_{(t)}^\alpha e_{(t)}^\beta r e^{-\psi} \delta(z) dr d\phi dz. \quad (2.48)$$

Considerando que en la tétrada ortonormal el tensor de momentum energía superficial $S_{\alpha\beta}$ se puede descomponer según (2.40), tenemos que

$$\left[S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} S g_{\alpha\beta} \right] e_{(t)}^\alpha e_{(t)}^\beta = \frac{1}{2} (\sigma + p_r + p_\phi + p_z), \quad (2.49)$$

reemplazando (2.49) en (2.48) y evaluando las integrales en ϕ y z encontramos

$$M = 2\pi \int_0^\infty (\sigma + p_r + p_\phi + p_z) r e^{-\psi} dr, \quad (2.50)$$

la cual es la expresión general para el cálculo de la masa de los discos en términos de los autovalores del tensor de momentum-energía superficial en la tétrada ortonormal (2.39).

2.4. Disco Polarizado Magnéticamente

Con el fin de estudiar las ecuaciones de Einstein-Maxwell deducidas en la sección 2.2, las ecuaciones (2.34) y (2.35), las estudiamos en un espacio-tiempo conformestático [39, 40], cuyo elemento de línea en coordenadas cilíndricas, $x^a = (t, r, \phi, z)$, se puede expresar como

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{-2\psi} (dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2), \quad (2.51)$$

donde la función métrica ψ tiene dependencia $\psi = \psi(r, z)$, para que el espacio-tiempo sea axialmente simétrico. La coordenada ϕ varía en el intervalo usual $[0, 2\pi)$, r entre $[0, \infty)$ y z entre $(-\infty, \infty)$.

Consideramos que el disco delgado contiene solamente materia polarizada magnéticamente, por lo tanto el vector potencial electromagnético está dado por

$$A_\alpha = (0, 0, A, 0), \quad (2.52)$$

donde suponemos que la función A tiene simetría respecto a la superficie del disco de la forma

$$A(r, z) = A(r, -z), \quad (2.53)$$

es continua en la región del disco,

$$[A] = A|_{z=0^+} - A|_{z=0^-} = 0, \quad (2.54)$$

y presenta una discontinuidad finita en su primera derivada, que puede ser representada como

$$[A_{,z}] = A_{,z}|_{z=0^+} - A_{,z}|_{z=0^-} = 2A_{,z}|_{z=0^+}, \quad (2.55)$$

donde se ha tenido en cuenta la simetría de reflexión respecto al plano $z = 0$.

Por medio de la ecuación (2.35c), encontramos que las componentes no nulas del tensor polarización electromagnética del disco son $\Pi_{r\phi}$ y $-\Pi_{\phi r}$, considerando esto, el vector polarización magnética (2.28) sólo tiene una componente, la cual está en la dirección z dada por

$$M_z = e^{3\psi} \Pi_{r\phi} / r^2, \quad (2.56)$$

para la cual hemos tomado como velocidad al vector $e_{(0)}^\alpha$, definido en (2.39). Despejando de esta ecuación $\Pi_{r\phi}$ y teniendo en cuenta que el tensor de polarización electromagnética es antisimétrico, tenemos que

$$\Pi_{r\phi} = -\Pi_{\phi r} = e^{-3\psi} r^2 M_z. \quad (2.57)$$

Con estas componentes y las ecuaciones (2.34a) y (2.34b), encontramos el siguiente sistema de ecuaciones

$$2\psi_{,r}\psi_{,z}r^2 + e^{2\psi} A_{,r}A_{,z} = 0, \quad (2.58a)$$

$$2\psi_{,r}^2 r^2 - e^{2\psi} A_{,z}^2 = 0, \quad (2.58b)$$

$$2\psi_{,z}^2 r^2 - e^{2\psi} A_{,r}^2 = 0, \quad (2.58c)$$

$$\nabla^2 \psi - \nabla \psi \cdot \nabla \psi = 0, \quad (2.58d)$$

donde ∇ es el operador diferencial usual en coordenadas cilíndricas. Las ecuaciones (2.58a), (2.58b) y (2.58c) implican las relaciones

$$A_{,r} = \sqrt{2} e^{-\psi} r \psi_{,z}, \quad (2.59a)$$

$$A_{,z} = -\sqrt{2} e^{-\psi} r \psi_{,r}, \quad (2.59b)$$

cuyas condiciones de integrabilidad están garantizadas por la relación (2.58d). De la ecuación (2.35b) obtenemos la ecuación diferencial para M_z

$$r M_{z,r} + M_z (1 - r \psi_{,r}) + 2\sqrt{2} e^{2\psi} \psi_{,r} = 0, \quad (2.60)$$

la cual tiene solución

$$M_z = 2\sqrt{2} (e^{-\psi} - 1), \quad (2.61)$$

donde la constante de integración se ha elegido igual a cero. Finalmente, con las expresiones para las derivadas del potencial electromagnético A , las componentes no nulas del tensor de momentum-energía superficial del disco son

$$S_{tt} = 4e^{3\psi} \psi_{,z}, \quad (2.62)$$

$$S_{rr} = \sqrt{2} r e^{-3\psi} \psi_{,z} M_z, \quad (2.63)$$

$$S_{\phi\phi} = r^2 S_{rr}, \quad (2.64)$$

definidas por la relación (2.38).

2.5. Disco Polarizado Eléctricamente

Ahora, analizaremos un disco delgado con fuente material polarizada eléctricamente siguiendo los mismos pasos de la sección 2.4 y considerando el mismo elemento de línea (2.51). En este caso el vector potencial electromagnético está dado por

$$A_\alpha = (-\chi, 0, 0, 0). \quad (2.65)$$

Según las características del potencial electromagnético descritas en la sección 2.2, suponemos que la función χ tiene simetría respecto a la superficie del disco de la forma

$$\chi(r, z) = \chi(r, -z), \quad (2.66)$$

es continua en la región del disco,

$$[\chi] = \chi|_{z=0^+} - \chi|_{z=0^-} = 0, \quad (2.67)$$

y presenta una discontinuidad finita en su primera derivada que puede ser representada como

$$[\chi, z] = \chi, z|_{z=0^+} - \chi, z|_{z=0^-} = 2\chi, z|_{z=0^+}, \quad (2.68)$$

donde se ha tenido en cuenta la simetría de reflexión respecto al plano $z = 0$.

Por medio de la ecuación (2.35c) y considerando la simetría axial del sistema, encontramos que las componentes no nulas del tensor de polarización electromagnética del disco son Π_{rt} y Π_{tr} ; considerando esto, el vector polarización eléctrica (2.28) sólo tiene una componente, la cual está en la dirección radial, dada por

$$P_r = e^{-\psi} \Pi_{rt} / r^2, \quad (2.69)$$

para la cual hemos tomado como velocidad al vector $e_{(0)}^\alpha$, definido en (2.39). Despejando de esta ecuación Π_{rt} y teniendo en cuenta que el tensor de polarización electromagnética es antisimétrico, tenemos que

$$\Pi_{rt} = -\Pi_{tr} = P_r e^\psi. \quad (2.70)$$

Con estas componentes y las ecuaciones (2.34), encontramos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\chi, r^2 - 2e^{2\psi} \psi, r^2 = 0, \quad (2.71a)$$

$$\chi, z^2 - 2e^{2\psi} \psi, z^2 = 0, \quad (2.71b)$$

$$\chi, r \chi, z - 2e^{2\psi} \psi, r \psi, z = 0, \quad (2.71c)$$

$$\nabla^2 \psi - \nabla \psi \cdot \nabla \psi = 0, \quad (2.71d)$$

donde ∇ es el operador diferencial usual en coordenadas cilíndricas. Las ecuaciones (2.71a), (2.71b) y (2.71c) implican una relación funcional $\chi = \chi(\psi)$ de la forma

$$\chi = \sqrt{2} (e^\psi - 1), \quad (2.72)$$

donde el valor de la constante de integración ha sido elegida de tal manera que el potencial electromagnético corresponda al de una fuente de extensión finita, se anule cuando r tiende a infinito. De la ecuación (2.35b) obtenemos la ecuación diferencial para P_r

$$rP_{r,r} + P_r(1 - r\psi_{,r}) + 2\sqrt{2}r\psi_{,z} = 0, \quad (2.73)$$

la cual tiene como solución

$$P_r = -\frac{2\sqrt{2}e^\psi}{r} \int r\psi_{,z}e^{-\psi} dr, \quad (2.74)$$

donde la constante de integración se ha elegido igual a cero. Finalmente, teniendo en cuenta la expresión para el potencial electromagnético χ , las componentes no nulas del tensor de momentum-energía superficial del disco son

$$S_{tt} = e^{3\psi} \left(4\psi_{,z} - \sqrt{2}P_r\psi_{,r} \right), \quad (2.75)$$

$$S_{rr} = \sqrt{2}e^{-\psi}\psi_{,r}P_r, \quad (2.76)$$

definidas por la relación (2.38).

2.6. Contenido de los Modelos en un Sistema de Referencia Localmente Minkowskiano

Con el fin de analizar el contenido físico de los discos, hacemos una transformación a una tétrada ortonormal de vectores definida por las relaciones (2.39), la cual ubica al observador en una posición local, en la cual calculamos las componentes del tensor de momentum-energía superficial, los campos electromagnéticos y los vectores de polarización electromagnética, .

Para el disco con materia polarizada magnéticamente encontramos las siguientes expresiones para las componentes del tensor de momentum-energía en la tétrada

$$\sigma = 4e^\psi\psi_{,z}, \quad (2.77a)$$

$$p_r = \sqrt{2} e^\psi\psi_{,z}M_z, \quad (2.77b)$$

$$p_\phi = p_r, \quad (2.77c)$$

$$p_z = 0. \quad (2.77d)$$

El campo magnético en la base ortonormal se calcula mediante la expresión

$$B_{(\alpha)} = B_\mu e_{(\alpha)}^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\beta\lambda\nu}F^{\lambda\nu}u^\beta e_{(\alpha)}^\mu, \quad (2.78)$$

donde u^α es la cuadrivelocidad del observador. Sus componentes no nulas son

$$B_{(r)} = -\sqrt{2} e^\psi\psi_{,r}, \quad (2.79a)$$

$$B_{(z)} = -\sqrt{2} e^\psi\psi_{,z}. \quad (2.79b)$$

Podemos escribir estas componentes en términos del potencial electromagnético de la forma

$$B_{(r)} = A_{,z} e^{2\psi} / r, \quad (2.80a)$$

$$B_{(z)} = -A_{,r} e^{2\psi} / r, \quad (2.80b)$$

según las expresiones del potencial electromagnético (2.59). La polarización magnética en z en la base ortonormal está dada por

$$M_{(z)} = M_{\beta} e_{(z)}^{\beta} = M_z e^{\psi} = 2\sqrt{2} (1 - e^{\psi}). \quad (2.81)$$

Para el disco con materia polarizada eléctricamente encontramos las siguientes expresiones para las componentes del tensor de momentum-energía en la tétrada

$$\sigma = e^{\psi} \left(4\psi_{,z} - \sqrt{2}\psi_{,r} P_r \right), \quad (2.82a)$$

$$p_r = \sqrt{2}\psi_{,r} e^{\psi} P_r, \quad (2.82b)$$

$$p_{\phi} = p_z = 0. \quad (2.82c)$$

El campo eléctrico en la base ortonormal se calcula mediante la expresión

$$E_{(\alpha)} = E_{\mu} e_{(\alpha)}^{\mu} = F_{\mu\nu} u^{\nu} e_{(\alpha)}^{\mu}, \quad (2.83)$$

donde u^{α} es la cuadrivelocidad del observador. Sus componentes no nulas son

$$E_{(r)} = -\sqrt{2} e^{\psi} \psi_{,r}, \quad (2.84a)$$

$$E_{(z)} = -\sqrt{2} e^{\psi} \psi_{,z}. \quad (2.84b)$$

La polarización eléctrica radial en la base ortonormal está dada por

$$P_{(r)} = P_{\beta} e_{(r)}^{\beta} = P_r e^{\psi} = -\frac{2\sqrt{2}e^{2\psi}}{r} \int r\psi_{,z} e^{-\psi} dr. \quad (2.85)$$

Según las expresiones (2.79) y (2.84) encontramos que los campos eléctrico y magnético para los dos tipos de disco son iguales, por lo tanto las ecuaciones de sus líneas de campo serán idénticas. Las líneas de campo magnético pueden obtenerse al resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{B_{(z)}} = \frac{dr}{B_{(r)}}, \quad (2.86)$$

la cual al sustituir las componentes (2.80) puede escribirse como

$$dA = A_{,r} dr + A_{,z} dz = 0. \quad (2.87)$$

En consecuencia, la ecuación

$$A(r, z) = k, \quad (2.88)$$

con k constante, puede utilizarse para obtener las líneas de campo magnético.

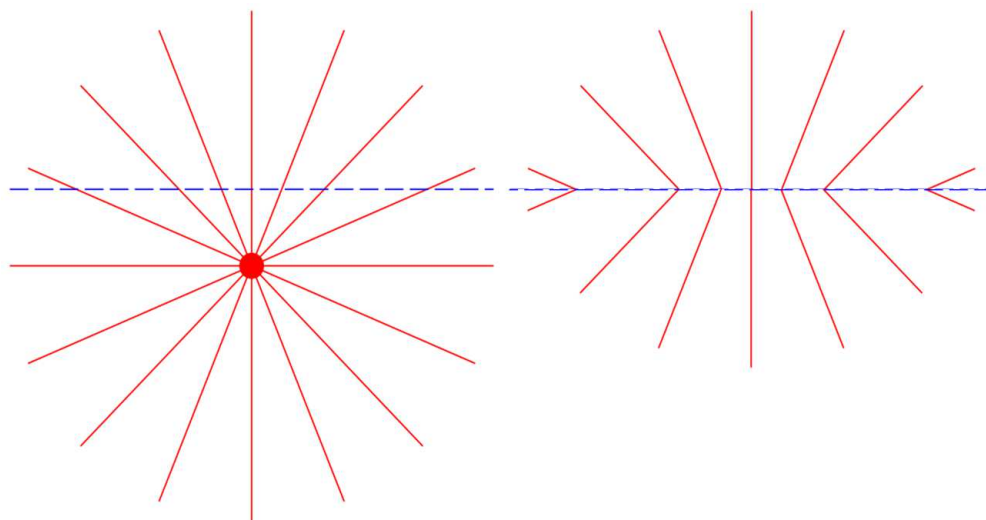


Figura 2.1: Método de “desplazamiento, corte y reflexión”

2.7. Solución para la Función Métrica ψ

En la sección anterior encontramos expresiones para todas las cantidades que describen el comportamiento de los discos, la densidad superficial de energía, las presiones, los campos electromagnéticos y los vectores de polarización electromagnética en términos de la función métrica ψ . Por otra parte, en las secciones 2.5 y 2.4 hemos encontrado la ecuación

$$\nabla^2 \psi - \nabla \psi \cdot \nabla \psi = 0, \quad (2.89)$$

(2.58d) para el disco polarizado magnéticamente y (2.71d) para el disco polarizado eléctricamente y puede ser escrita como

$$\nabla^2 (e^{-\psi}) = 0, \quad (2.90)$$

la cual es la ecuación de Laplace $\nabla^2 U = 0$. Por lo tanto podemos expresar la función métrica de la forma

$$e^{-\psi} = 1 - U, \quad (2.91)$$

donde $U(r, z)$ es una solución a la ecuación de Laplace que se anula apropiadamente en el infinito con el fin de que el espacio-tiempo sea asintóticamente plano.

Entonces, podemos expresar todas las cantidades físicas en términos de la función U . Para el disco polarizado magnéticamente, podemos expresar la densidad de energía superficial, la presión radial, la polarización radial, el campo eléctrico y la masa total de la forma siguiente

$$\sigma = \frac{4U_{,z}}{(1-U)^2}, \quad (2.92a)$$

$$p_r = p_\phi = -\frac{4UU_{,z}}{(1-U)^2}, \quad (2.92b)$$

$$M_{(z)} = -\frac{2\sqrt{2}U}{1-U}, \quad (2.92c)$$

$$B_{(r)} = -\frac{\sqrt{2}U_{,r}}{(1-U)^2}, \quad (2.92d)$$

$$B_{(z)} = -\frac{\sqrt{2}U_{,z}}{(1-U)^2}, \quad (2.92e)$$

$$M = 8\pi \int_{r=0}^{\infty} \frac{U_{,z}(1+U)rdr}{(1-U)}, \quad (2.92f)$$

y de igual forma para el disco polarizado eléctricamente encontramos

$$\sigma = \frac{4}{(1-U)^2} \left[U_{,z} + \frac{U_{,r}}{(1-U)r} \int U_{,z}rdr \right], \quad (2.93a)$$

$$p_r = -\frac{4U_{,r}}{(1-U)^3} \int U_{,z}rdr, \quad (2.93b)$$

$$P_{(r)} = \frac{2\sqrt{2}}{(1-U)^2r} \int U_{,z}rdr, \quad (2.93c)$$

$$E_{(r)} = -\frac{\sqrt{2}U_{,r}}{(1-U)^2}, \quad (2.93d)$$

$$E_{(z)} = -\frac{\sqrt{2}U_{,z}}{(1-U)^2}, \quad (2.93e)$$

$$M = 8\pi \int_{r=0}^{\infty} \frac{U_{,z}rdr}{(1-U)}, \quad (2.93f)$$

donde las cantidades σ , p_r , p_ϕ , $M_{(z)}$, $P_{(r)}$ deben evaluarse en $z = 0^+$. Tenemos entonces a todas las variables del modelo expresadas en términos de la función $U(r, z)$.

Ahora bien, las soluciones que correspondan a un disco delgado infinito deben ser funciones simétricas de z con su primera derivada en z discontinua en $z = 0$. Entonces, con el fin de obtener este tipo de soluciones, asumiremos que $U(r, z)$ es continua al igual que sus derivadas y realizaremos la transformación

$$z \rightarrow |z| + a, \quad (2.94)$$

donde a es una constante positiva. Esto lo hacemos con el fin de introducir las discontinuidades que generan el efecto de un disco delgado infinito polarizado electromagnéticamente, es decir, las ecuaciones (2.4) y (2.8). Este método fue implementado por Kuzmin y Toomre y se conoce como el método “desplazamiento corte y reflexión”, el cual se puede observar gráficamente en la figura 2.1.

Análisis de los modelos obtenidos

3.1. Preliminares

En este capítulo evaluamos una solución particular de la ecuación de Laplace y aplicando el método desarrollado por Kuzmin–Toomre en gravedad Newtoniana, se introducen las discontinuidades que representan el efecto causado por un disco delgado infinito. Así obtenemos las expresiones generales de las funciones que describen los modelos, las componentes del tensor de momentum-energía, los campos electromagnéticos, los vectores de polarización electromagnética y la masa total. Analizamos estas funciones para dos modelos particulares de cada tipo de disco y por último demostramos que la masa total de los discos converge para toda la familia de soluciones por medio del teorema de comparación del límite.

3.2. Solución de la Ecuación de Laplace

En el capítulo anterior expresamos las variables que caracterizan los dos tipos de disco en términos de una función solución a la ecuación de Laplace U . Pensando en nuestro sistema axialmente simétrico, es razonable que expresemos dicha función de la forma

$$U(R, \theta)_n = - \sum_{l=0}^n \frac{C_l P_l(\cos \theta)}{R^{l+1}}, \quad (3.1)$$

donde C_l son constantes y $P_l(\cos \theta)$ son los polinomios de Legendre. Además,

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad (3.2)$$

en la que r es la coordenada radial y z es la coordenada perpendicular al plano del disco. La función se anula cuando r tiende a infinito, garantizando que el espacio-tiempo sea asintóticamente plano, ecuación (2.91). Como se explicó en el capítulo anterior, aplicaremos la transformación (2.94) con el fin de producir las discontinuidades que originan el disco.

3.3. Disco Polarizado Magnéticamente

Expresando como solución de Laplace U a la expansión de polinomios de Legendre (3.1), y después de realizar la transformación (2.94) tenemos

$$U_n|_{z=0^+} = - \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R_0^{l+1}} P_l(a/R_0), \quad (3.3)$$

$$U_{n,z}|_{z=0^+} = \sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{R_0^{(l+2)}} P_{l+1}(a/R_0), \quad (3.4)$$

$$U_{n,r}|_{z=0^+} = \sum_{l=0}^n \frac{C_l P'_l(a/R_0)}{R_0^{(l+3)}}, \quad (3.5)$$

donde

$$R_0 = \sqrt{r^2 + a^2}, \quad (3.6)$$

por medio de las cuales encontramos las expresiones generales para el cálculo de la densidad de energía superficial del disco

$$\sigma = \frac{4 \left[\sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{R_0^{(l+2)}} P_{l+1}(a/R_0) \right]}{\left[1 - \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R_0^{l+1}} P_l(a/R_0) \right]^2}, \quad (3.7)$$

la presión radial y azimutal

$$p_r = p_\phi = \frac{4 \left[\sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R_0^{l+1}} P_l(a/R_0) \right] \left[\sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{R_0^{(l+2)}} P_{l+1}(a/R_0) \right]}{\left[1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R_0^{l+1}} P_l(a/R_0) \right]^2}, \quad (3.8)$$

la magnetización en dirección z

$$M_{(z)} = - \frac{2\sqrt{2} \left[\sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R_0^{l+1}} P_l(a/R_0) \right]}{1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R_0^{l+1}} P_l(a/R_0)}, \quad (3.9)$$

las componentes del campo magnético

$$B_{(r)} = - \frac{\sqrt{2} \left[\sum_{l=0}^n \frac{C_l P'_l(a/R_0)}{R_0^{(l+3)}} \right]}{\left(1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R_0^{l+1}} P_l(a/R_0) \right)^2}, \quad (3.10)$$

$$B_{(z)} = - \frac{\sqrt{2} \left[\sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{R_0^{(l+2)}} P_{l+1}(a/R_0) \right]}{\left[1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R_0^{l+1}} P_l(a/R_0) \right]^2}, \quad (3.11)$$

y para la masa total del disco

$$M = 8\pi \int_{r=0}^{\infty} \frac{\left[\sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{R_0^{(l+2)}} P_{l+1}(a/R_0) \right] \left[1 - \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R_0^{l+1}} P_l(a/R_0) \right] r dr}{\left[1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R_0^{l+1}} P_l(a/R_0) \right]}. \quad (3.12)$$

A continuación, evaluaremos el comportamiento de estas funciones para los modelos $n = 0$ y $n = 1$.

3.3.1. Modelo $n = 0$

Analizaremos las soluciones correspondientes al primer término de la expansión de polinomios de Legendre, reemplazando $n = 0$ en la ecuación (3.1), de este modo la función U quedará representada por la expresión

$$U_0 = -\frac{C_0}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (3.13)$$

Para ello, reemplazamos $n = 0$ en las expresiones para la densidad de energía, las presiones principales, los vectores electromagnéticos y los campos electromagnéticos, y después aplicamos el método “desplazamiento, corte y reflexión” que introduce las discontinuidades que originan el disco.

Encontramos que para este modelo, la densidad de energía superficial está dada por la expresión

$$\sigma = \frac{4C_0 a}{R_0(R_0 + C_0)^2}, \quad (3.14)$$

donde

$$R_0 = \sqrt{r^2 + a^2}. \quad (3.15)$$

Normalizando y adimensionalizando la expresión por medio de las definiciones $r = a\bar{r}$, $C_0 = a\bar{C}_0$, $R_0 = a\bar{R}_0$, obtenemos

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{(1 + \bar{C}_0)^2}{\bar{R}_0(\bar{R}_0 + \bar{C}_0)^2}, \quad (3.16)$$

en la cual

$$\sigma_0 = \sigma|_{(r=0)} = \frac{4\bar{C}_0}{a(1 + \bar{C}_0)^2}. \quad (3.17)$$

Las presiones radial y azimutal quedan representadas por la expresión

$$p_r = p_\phi = \frac{4C_0^2 a}{R_0^2(R_0 + C_0)^3}, \quad (3.18)$$

y al normalizar y adimensionalizar obtenemos

$$\bar{p}_r = \bar{p}_\phi = \frac{p_r}{p_{r0}} = \frac{(1 + \bar{C}_0)^2}{\bar{R}_0^2(\bar{R}_0 + \bar{C}_0)^2}, \quad (3.19)$$

donde

$$p_{r_0} = p_r|_{(r=0)} = \frac{4\bar{C}_0^2}{a(1 + \bar{C}_0)^2}. \quad (3.20)$$

La magnetización en dirección z queda representada por la expresión

$$M_{(z)} = \frac{2\sqrt{2}C_0}{(R_0 + C_0)}, \quad (3.21)$$

la cual al normalizar y adimensionalizar se convierte en

$$\bar{M}_{(z)} = \frac{M_{(z)}}{M_{(z)_0}} = \frac{1 + \bar{C}_0}{\bar{R}_0 + \bar{C}_0}, \quad (3.22)$$

en la cual

$$M_{(z)_0} = M_{(z)}|_{r=0} = \frac{2\sqrt{2}\bar{C}_0}{1 + \bar{C}_0}. \quad (3.23)$$

Según las expresiones (3.14) y (3.18), las condiciones de energía (2.46) se satisfacen sólo si $C_0 = a$. Con este valor para la constante presentamos en la figura 3.1 las gráficas para la densidad superficial de energía y las presiones radial y azimutal, ecuaciones (3.16) y (3.19), gráfica que muestra que en el centro de la estructura discoidal la densidad de energía y las presiones tienen su valor máximo y a medida que la coordenada radial aumenta sus valores disminuyen considerablemente hasta tender a cero; además son funciones suaves y no presentan singularidades. En la figura 3.2 presentamos la gráfica de la magnetización en dirección z , ecuación (3.22), tomando $C_0 = a$, en la que encontramos que en el centro del disco existe una concentración máxima de dipolos magnéticos orientados en la dirección z , la cual decae conforme la distancia desde el centro del disco aumenta.

Por otra parte, las derivadas del potencial magnético A_α están dadas por las expresiones

$$A_r = -\sqrt{2}C_0z \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right), \quad (3.24a)$$

$$A_z = -\sqrt{2}C_0 \frac{r^2}{R^3}. \quad (3.24b)$$

Podemos así expresar el potencial magnético de una forma más general como

$$A(r, z) = \int A_r dr + f(z); \quad (3.25)$$

donde $f(z)$ es una función que depende únicamente de z . Sustituyendo la ecuación (3.24a) en la anterior, se tiene

$$A(r, z) = -\sqrt{2}C_0z \left(\frac{1}{R} \right) + f(z), \quad (3.26)$$

derivando esta expresión respecto a la coordenada z y reemplazando (3.24b) encontramos que $f(z)$ es una constante, la cual tomaremos como cero; así el potencial queda expresado por

$$A(r, z) = -2C_0 \frac{z}{R}. \quad (3.27)$$

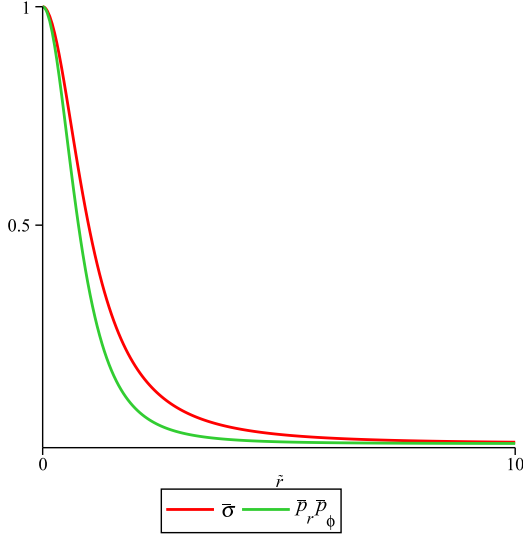


Figura 3.1: $\bar{\sigma}$, \bar{p}_r y \bar{p}_ϕ del disco polarizado magnéticamente para el modelo $n = 0$, ecuaciones (3.16) y (3.19) con $\bar{C}_0 = 1$

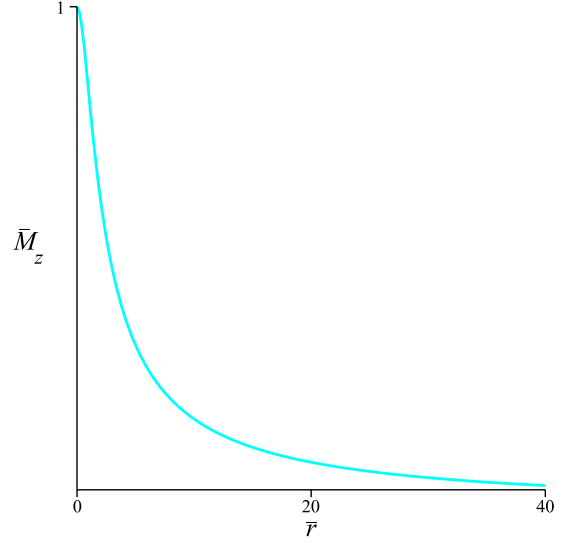


Figura 3.2: \bar{M}_z del disco polarizado magnéticamente para el modelo $n = 0$, ecuación (3.22) con $\bar{C}_0 = 1$

Haciendo la transformación (2.94) e igualando el potencial a una constante C_A tenemos

$$C_A = -2C_0 \frac{(|z| + a)}{\sqrt{r^2 + (|z| + a)^2}}; \quad (3.28)$$

resolviendo r de esta expresión obtenemos la ecuación para las líneas de campo magnético

$$\bar{r} = Cte(|\bar{z}| + 1), \quad (3.29)$$

donde

$$Cte = \sqrt{2 \left(\frac{\bar{C}_0}{\bar{C}_A} \right)^2 - 1}, \quad (3.30)$$

y $r = a\bar{r}$, $z = a\bar{z}$, $C_0 = a\bar{C}_0$, $C_A = a\bar{C}_A$. En la figura 3.3 presentamos las líneas de campo magnético, ecuación (3.29).

3.3.2. Modelo $n = 1$

Del mismo modo que en la sección 3.3.1, analizaremos las soluciones correspondientes al primer y segundo término de la expansión de polinomios de Legendre, reemplazando $n = 1$ en la ecuación (3.1); la función U quedará representada por la expresión

$$U_1 = -\frac{C_0}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{C_1 z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.31)$$

Para ello, reemplazamos la ecuación (3.31) en las funciones que describen el disco, y después aplicamos el método “desplazamiento, corte y reflexión”.

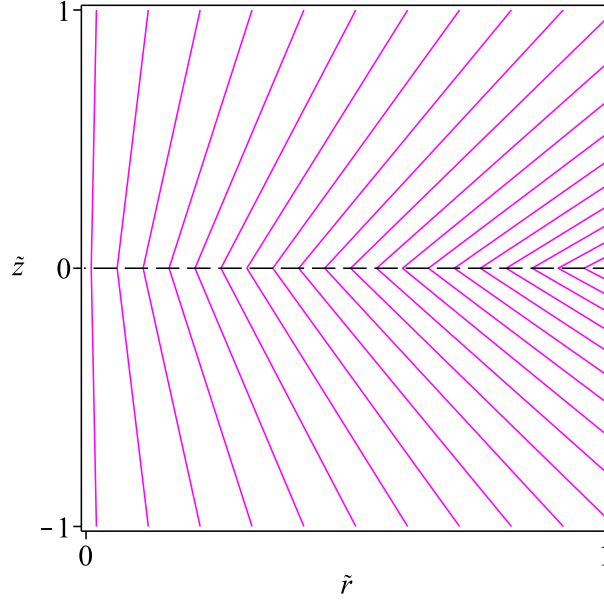


Figura 3.3: Líneas de campo magnético del disco polarizado magnéticamente para el modelo $n = 0$, ecuación (3.29)

Encontramos que en este modelo, la densidad de energía superficial está dada por

$$\sigma = \frac{4R_0 (C_0 a R_0^2 + C_1 [2a^2 - r^2])}{(R_0^3 + C_0 R_0^2 + C_1 a)^2}, \quad (3.32)$$

donde

$$R_0 = \sqrt{r^2 + a^2}. \quad (3.33)$$

Ahora bien, normalizando y adimensionalizando la expresión por medio de las definiciones $r = a\bar{r}$, $C_0 = a\bar{C}_0$, $C_1 = a^2\bar{C}_1$, $R_0 = a\bar{R}_0$, obtenemos

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\bar{R}_0 (\bar{C}_0 \bar{R}_0^2 + \bar{C}_1 [2 - \bar{r}^2]) (1 + \bar{C}_0 + \bar{C}_1)^2}{(\bar{R}_0^3 + \bar{C}_0 \bar{R}_0^2 + \bar{C}_1)^2 (\bar{C}_0 + 2\bar{C}_1)}, \quad (3.34)$$

en la que

$$\sigma_0 = \sigma|_{(r=0)} = \frac{4(\bar{C}_0 + 2\bar{C}_1)}{a(1 + \bar{C}_0 + \bar{C}_1)^2}. \quad (3.35)$$

Las presiones radial y azimutal están dadas por

$$p_r = p_\phi = \frac{4(C_0 R_0^2 + C_1 a)(C_0 a R_0^2 + C_1 (2a^2 - r^2))}{R_0^2 (R_0^3 + C_0 R_0^2 + C_1 a)^2}, \quad (3.36)$$

y normalizando y adimensionalizando la expresión obtenemos

$$\bar{p}_r = \bar{p}_\phi = \frac{p_r}{p_{r_0}} = \frac{(\bar{C}_0 \bar{R}_0^2 + \bar{C}_1) (\bar{C}_0 \bar{R}_0^2 + \bar{C}_1 [2 - \bar{r}^2]) (1 + \bar{C}_0 + \bar{C}_1)^2}{\bar{R}_0^2 (\bar{R}_0^3 + \bar{C}_0 \bar{R}_0^2 + \bar{C}_1)^2 (\bar{C}_0 + 2\bar{C}_1) (\bar{C}_0 + \bar{C}_1)}, \quad (3.37)$$

en la cual

$$p_{r0} = p_r|_{(r=0)} = \frac{4(\bar{C}_0 + 2\bar{C}_1)(\bar{C}_0 + \bar{C}_1 a)}{(1 + \bar{C}_0 + \bar{C}_1)^2}. \quad (3.38)$$

La magnetización en dirección z queda expresada como

$$M_z = \frac{2\sqrt{2}(C_0 R_0^2 + C_1 a)}{R_0^3 + \bar{C}_0 R_0^2 + \bar{C}_1 a}; \quad (3.39)$$

al adimensionalizar y normalizar obtenemos

$$\bar{M}_z = \frac{M_z}{M_{z0}} = \frac{(\bar{C}_0 \bar{R}_0^2 + C_1)(1 + \bar{C}_0 + \bar{C}_1)}{(\bar{R}_0^3 + \bar{C}_0 \bar{R}_0^2 + \bar{C}_1)(\bar{C}_0 + \bar{C}_1)}, \quad (3.40)$$

en el cual

$$M_{z0} = M_z|_{r=0} = \frac{2\sqrt{2}(\bar{C}_0 + \bar{C}_1)}{(1 + \bar{C}_0 + \bar{C}_1)}. \quad (3.41)$$

Según las expresiones (3.32) y (3.36), las condiciones de energía (2.46) se satisfacen sólo si se cumplen las relaciones

$$C_1 \leq 0, \quad (3.42a)$$

$$C_0 \geq 2|C_1|, \quad (3.42b)$$

$$R^3 \geq (C_0 R^2 + C_1). \quad (3.42c)$$

Con algunos valores de las constantes C_0 y C_1 que satisfacen las expresiones anteriores, presentamos en la figura 3.4 la gráfica para la densidad superficial de energía, ecuación (3.34), la cual, a diferencia del modelo anterior, no alcanza su valor máximo en el centro; sin embargo, disminuye conforme la coordenada radial aumenta. En la figura 3.5 presentamos la gráfica de las presiones radial y azimutal, ecuación (3.37), la cual demuestra un comportamiento similar al de la densidad de energía. En la figura 3.6 presentamos la gráfica de la magnetización en dirección z , ecuación (3.40), en la que encontramos que en el centro del disco su valor es máximo y finito, y a medida que la distancia aumenta su valor decrece; es una función bien comportada pues no tiene singularidades y es una función suave.

Las derivadas del potencial magnético están dadas por las expresiones

$$A_r = -\sqrt{2}r \left[-\frac{C_0 z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{C_1}{(r^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3C_1 z^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \right], \quad (3.43a)$$

$$A_z = \sqrt{2}r \left[-\frac{C_0 r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3C_1 z r}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \right]. \quad (3.43b)$$

El potencial magnético puede ser expresado de una forma más general como

$$A(r, z) = \int A_r dr + f(z). \quad (3.44)$$

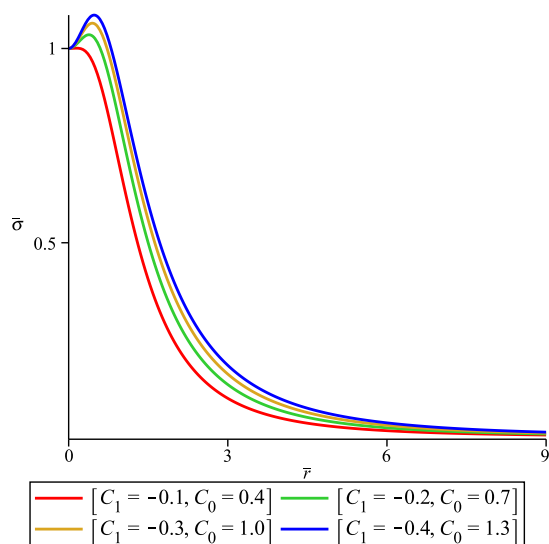


Figura 3.4: $\bar{\sigma}$ del disco polarizado magnéticamente para el modelo $n = 1$, ecuación (3.34)

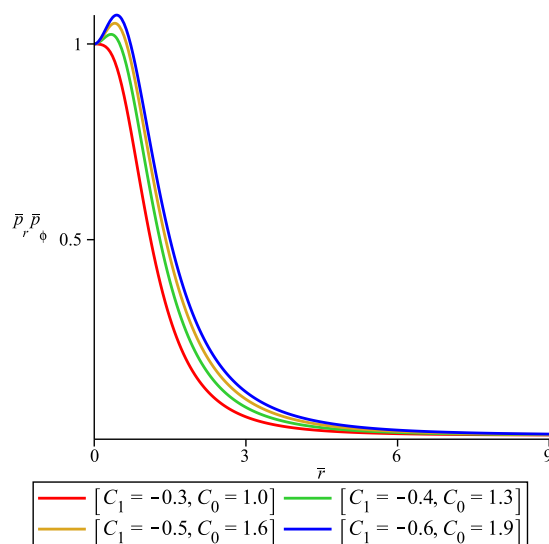


Figura 3.5: \bar{p}_r y \bar{p}_ϕ del disco polarizado magnéticamente para el modelo $n = 1$, ecuación (3.37)

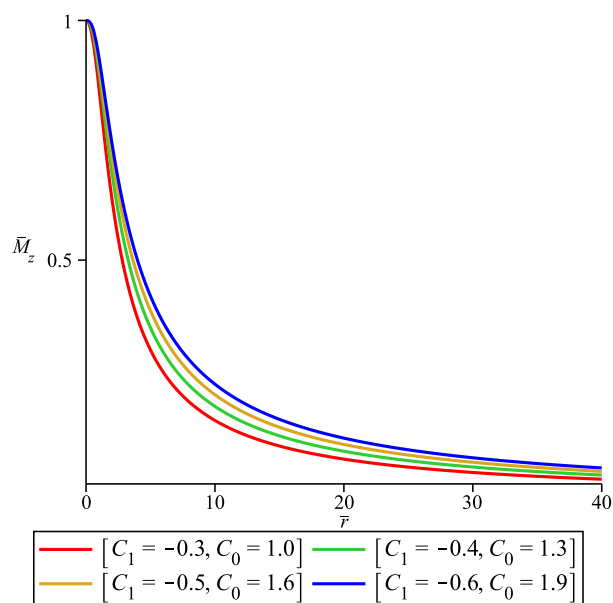


Figura 3.6: \bar{M}_z del disco polarizado magnéticamente para el modelo $n = 1$, ecuación (3.40)

Derivando esta expresión respecto a la coordenada z y reemplazando (3.24b) encontramos que $f(z)$ es una constante, la cual tomaremos como cero. Así el potencial queda expresado por

$$A(r, z) = -\frac{\sqrt{2}(C_0 z^3 + r^2 C_0 z - C_1 r^2)}{(r^2 + z^2)^{3/2}}; \quad (3.45)$$

ahora bien, haciendo la transformación (2.94) e igualando el potencial a una constante C_A tenemos

$$C_A = -\frac{\sqrt{2}(C_0(|z| + a)^3 + r^2 C_0(|z| + a) - C_1 r^2)}{(r^2 + (|z| + a)^2)^{3/2}}, \quad (3.46)$$

y al resolver la expresión anterior para la coordenada r , obtenemos la ecuación de las líneas de campo magnético

$$\bar{r} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\bar{T} + \frac{4}{3}\frac{(\bar{C}_0\bar{z} - \bar{C}_1)^2}{\bar{T}\bar{C}_A^2} + \frac{\sqrt{2}\bar{C}_1}{3\bar{C}_A} + \frac{\sqrt{2}\bar{C}_0\bar{z}}{3\bar{C}_A}\right)^2 - \bar{z}^2}, \quad (3.47)$$

donde hemos adimensionalizado $C_A = \bar{C}_A a$, y en la que

$$\begin{aligned} \bar{T} = \frac{a}{\bar{C}_A^3} & \left(-108\sqrt{2}\bar{C}_1\bar{C}_A^2\bar{z}^2 + 8(\sqrt{2})^3\bar{C}_1^3 - 48\sqrt{2}\bar{C}_0\bar{C}_1^2\bar{z} - 48\bar{C}_0^2\bar{C}_A\bar{z}^2 \right. \\ & \left. - 8(\sqrt{2})^3\bar{C}_0^3\bar{z}^3 + 12\bar{C}_A\bar{T}_1 \right)^{1/3}, \end{aligned} \quad (3.48a)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 = & \left(-72\sqrt{2}\bar{C}_0\bar{C}_1^2\bar{C}_A\bar{z}^4 + 144\bar{C}_0\bar{C}_1^3\bar{z}^3 - 48\bar{C}_1\bar{C}_0^3\bar{z}^5 + 162\bar{C}_1^2\bar{C}_A^2\bar{z}^4 \right. \\ & \left. - 48\bar{C}_1^4\bar{z}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.48b)$$

En la figura 3.7 presentamos la gráfica de las líneas de campo magnético, la ecuación (3.47), líneas que se comportan de manera similar al del modelo anterior.

3.3.3. Cálculo de la Masa Total

El disco polarizado magnéticamente tiene como expresión general para el cálculo de la masa total la ecuación (3.12), y por medio de ella calculamos la masa total para el modelo $n = 0$; tenemos entonces

$$M = 8\pi C_0 a \int_a^\infty \frac{(R_0 - C_0) dR_0}{R_0^2 (R_0 + C_0)}, \quad (3.49a)$$

$$= 8\pi \left(2a \ln \left(\frac{C_0 + a}{a} \right) - C_0 \right), \quad (3.49b)$$

$$= 8\pi a (2 \ln 2 - 1), \quad (3.49c)$$

donde hemos reemplazado $C_0 = a$, pues éste era el único valor de la constante que hacía que las condiciones de energía se satisficieran para este modelo, con lo que encontramos que la masa del disco converge.

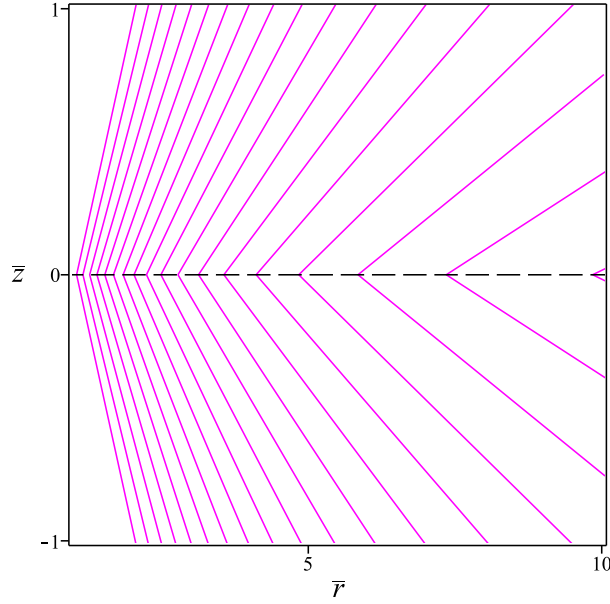


Figura 3.7: Líneas de campo magnético del disco polarizado magnéticamente en el modelo $n = 1$, ecuación (3.47)

Según la ecuación (3.12), el integrando general para la masa del disco está dado por

$$f_n = \frac{\left[\sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{R^{l+2}} P_{l+1}(a/R) \right] \left[1 - \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R^{l+1}} P_l(a/R) \right]}{\left[1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R^{l+1}} P_l(a/R) \right]}; \quad (3.50)$$

por lo tanto, para demostrar la convergencia de las masas de todos los modelos basándonos en el teorema de comparación de límite [41], debemos demostrar que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = c \quad (3.51)$$

con $c \neq 0$ y $R^2 = r^2 + a^2$. Las función f_{n+1} , se expresa como

$$f_{n+1} = \frac{\left[\sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{R^{l+2}} P_{l+1}(a/R) + \frac{C_{n+1}(n+2)}{R^{n+3}} P_{n+2}(a/R) \right] \left[1 - \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R^{l+1}} P_l(a/R) - \frac{C_{n+1}}{R^{n+2}} P_{n+1}(a/R) \right]}{1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R^{l+1}} P_l(a/R) + \frac{C_{n+1}}{R^{n+2}} P_{n+1}(a/R)}, \quad (3.52)$$

y por tanto, se puede calcular la relación

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \left[1 + \frac{\frac{C_{n+1}(n+2)}{R^{n+3}} P_{n+2}(a/R)}{\sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{R^{l+2}} P_{l+1}(a/R)} \right] \left[\frac{1 - \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R^{l+1}} P_l(a/R) - \frac{C_{n+1}}{R^{n+2}} P_{n+1}(a/R)}{1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R^{l+1}} P_l(a/R) + \frac{C_{n+1}}{R^{n+2}} P_{n+1}(a/R)} \right] \left[\frac{1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R^{l+1}} P_l(a/R)}{1 - \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R^{l+1}} P_l(a/R)} \right], \quad (3.53)$$

de donde es fácil ver que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1. \quad (3.54)$$

En conclusión, ya que se logró demostrar que la masa para el modelo $n = 0$ converge, se puede afirmar que para cualquier modelo n la masa también converge.

3.4. Disco Polarizado Eléctricamente

Del mismo modo que en la sección anterior, encontramos para el disco polarizado eléctricamente la expresión general para la energía superficial de disco,

$$\sigma = \frac{4 \left[\sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{R_0^{(l+2)}} P_{l+1}(a/R_0) \right]^2 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l P'_l(a/R_0)}{R_0^{(l+3)}} \int \sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{R_0^{(l+2)}} P_{l+1}(a/R_0) r dr}{\left(1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R_0^{l+1}} P_l(a/R_0) \right)^2 \left[1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R_0^{l+1}} P_l(a/R_0) \right]^3 r}, \quad (3.55)$$

para la presión radial

$$p_r = - \frac{4 \left[\sum_{l=0}^n \frac{C_l P'_l(a/R_0)}{R_0^{(l+3)}} \right]}{\left[1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R_0^{l+1}} P_l(a/R_0) \right]^3} \int \sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{R_0^{(l+2)}} P_{l+1}(a/R_0) r dr, \quad (3.56)$$

para la polarización radial,

$$P_{(r)} = \frac{2\sqrt{2}}{\left[1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R_0^{l+1}} P_l(a/R_0) \right]^2} \int \sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{R_0^{(l+2)}} P_{l+1}(a/R_0) r dr, \quad (3.57)$$

para el campo eléctrico

$$E_{(r)} = - \frac{\sqrt{2} \left[\sum_{l=0}^n \frac{C_l P'_l(a/R_0)}{R_0^{(l+3)}} \right]}{\left[1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R_0^{l+1}} P_l(a/R_0) \right]^2}, \quad (3.58)$$

$$E_{(z)} = - \frac{\sqrt{2} \left[\sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{R_0^{(l+2)}} P_{l+1}(a/R_0) \right]}{\left[1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R_0^{l+1}} P_l(a/R_0) \right]^2}, \quad (3.59)$$

y para la masa total del disco

$$M = 8\pi \int_{r=0}^{\infty} \frac{\sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{R_0^{(l+2)}} P_{l+1}(a/R_0)}{1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R_0^{l+1}} P_l(a/R_0)} r dr. \quad (3.60)$$

A continuación, analizaremos el comportamiento de estas funciones para los modelos $n = 0$ y $n = 1$.

3.4.1. Modelo $n = 0$

Para este modelo, la densidad de energía superficial está dada por la expresión

$$\sigma = \frac{4aC_0}{(R_0 + C_0)^3}, \quad (3.61)$$

donde

$$R_0 = \sqrt{r^2 + a^2}. \quad (3.62)$$

Normalizando y adimensionalizando la expresión por medio de las definiciones $r = a\bar{r}$, $C_0 = a\bar{C}_0$, $R_0 = a\bar{R}_0$ obtenemos

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \left(\frac{1 + \bar{C}_0}{\bar{R}_0 + \bar{C}_0} \right)^3, \quad (3.63)$$

en la cual

$$\sigma_0 = \sigma|_{(r=0)} = \frac{4\bar{C}_0}{a(1 + \bar{C}_0)^3}. \quad (3.64)$$

Para la presión radial encontramos la expresión

$$p_r = \frac{4aC_0^2}{R_0(R_0 + C_0)^3}, \quad (3.65)$$

al normalizarla y adimensionalizarla obtenemos

$$\bar{p}_r = \frac{p_r}{p_{r_0}} = \frac{1}{\bar{R}_0} \left(\frac{1 + \bar{C}_0}{\bar{R}_0 + \bar{C}_0} \right)^3, \quad (3.66)$$

en la que

$$p_{r_0} = p_r|_{(r=0)} = \frac{4\bar{C}_0^2}{a(1 + \bar{C}_0)^3}. \quad (3.67)$$

La polarización radial queda expresada por

$$P_{(r)} = \frac{-2\sqrt{2}C_0aR_0}{(R_0 + C_0)^2r}, \quad (3.68)$$

al adimensionalizarla encontramos

$$P_{(r)} = \frac{-2\sqrt{2}\bar{C}_0\bar{R}_0}{(\bar{R}_0 + \bar{C}_0)^2\bar{r}}. \quad (3.69)$$

Según las expresiones (3.61) y (3.65), las condiciones de energía (2.46) se satisfacen sólo si $C_0 = a$. Con este valor para la constante presentamos en la figura 3.8 las gráficas para la densidad superficial de energía y la presión radial, ecuaciones (3.63) y (3.66), en las que

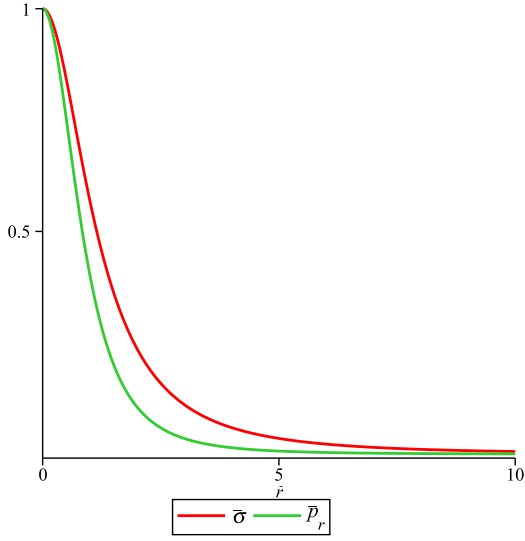


Figura 3.8: $\bar{\sigma}$ y \bar{p}_r del disco polarizado eléctricamente para el modelo $n = 0$, ecuaciones (3.63) y (3.66), con $\bar{C}_0 = 1$

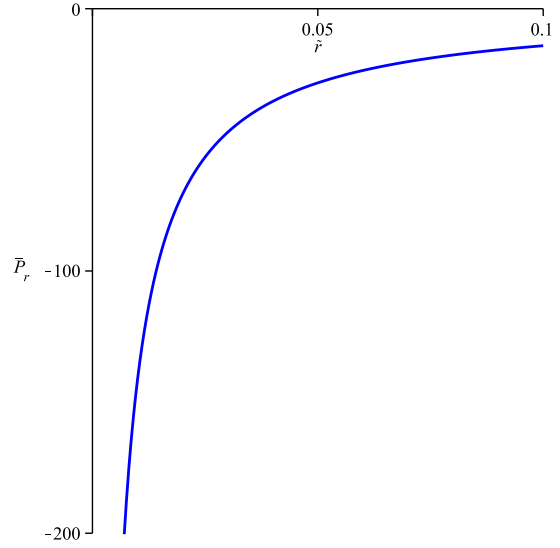


Figura 3.9: \bar{P}_r del disco polarizado eléctricamente para el modelo $n = 0$, ecuación (3.69), con $\bar{C}_0 = 1$

encontramos que en el centro del disco alcanzan su valor máximo y a medida que la coordenada radial aumenta, disminuyen considerablemente, son funciones suaves y no presentan singularidades. En la figura 3.9 presentamos la gráfica de la polarización radial, la ecuación (3.69), la cual muestra una singularidad en el centro del disco, y a medida que la distancia desde el centro aumenta, su valor disminuye.

El potencial eléctrico está representado por la expresión

$$\chi = \frac{-\sqrt{2}C_0}{\sqrt{r^2 + (|z| + a)^2 + C_0}}, \quad (3.70)$$

al igualarlo a una constante χ_C tenemos

$$\frac{-\sqrt{2}C_0}{\sqrt{r^2 + (|z| + a)^2 + C_0}} = \chi_C, \quad (3.71)$$

expresión que nos permite encontrar las ecuaciones de las líneas equipotenciales al despejar r ,

$$\bar{r} = \pm \sqrt{\nu - (|\bar{z}| + 1)^2}, \quad (3.72)$$

donde

$$\nu = a^2 \bar{C}_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{\chi_C + 1} \right)^2, \quad (3.73)$$

y $r = a\bar{r}$, $C_0 = a\bar{C}_0$. Las ecuaciones (2.84) y (2.79) muestran que los campos eléctrico y magnético para los dos tipos de discos son iguales, por lo tanto la expresión para las líneas de campo eléctrico las tomamos de las líneas de campo magnético calculadas en la sección 3.4.1,

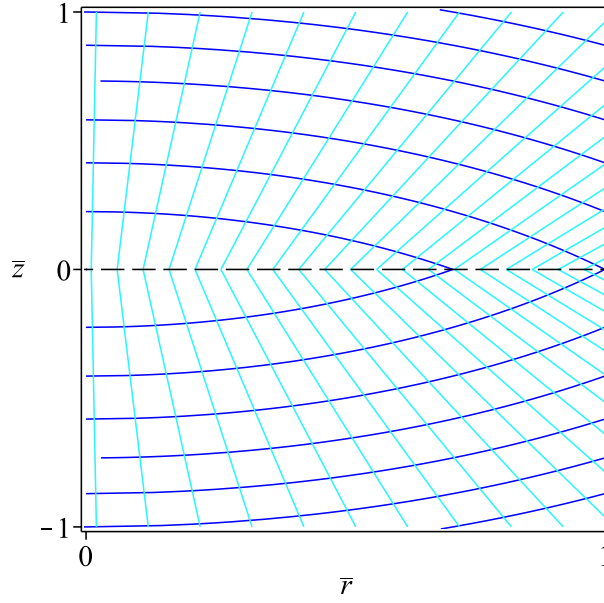


Figura 3.10: Líneas equipotenciales y líneas de campo eléctrico para el disco polarizado electricamente para el modelo $n = 0$, ecuaciones (3.29) y (3.72)

la ecuación (3.29), las cuales graficamos en la figura 3.10 junto a las líneas equipotenciales, ecuación (3.72).

3.4.2. Modelo $n = 1$

Encontramos que para este modelo, la densidad de energía superficial, está dada por

$$\sigma = \frac{4R_0^2 (C_0 a R_0^4 + C_1 [a^2 (R_0^2 + a^2) - r^4] + 2C_1^2 a R_0)}{(R_0^3 + C_0 R_0^2 + C_1 a)^3}, \quad (3.74)$$

normalizando y adimensionalizando la expresión obtenemos

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{R}_0^2 (\bar{C}_0 \bar{R}_0^4 + \bar{C}_1 [(\bar{R}_0^2 + 1) - \bar{r}^4] + 2\bar{C}_1^2 \bar{R}_0) (1 + \bar{C}_0 + \bar{C}_1)^3}{(\bar{R}_0^3 + \bar{C}_0 \bar{R}_0^2 + \bar{C}_1)^3 (\bar{C}_0 + 2\bar{C}_1(1 + \bar{C}_1))}, \quad (3.75)$$

donde

$$\sigma_0 = \sigma|_{(r=0)} = \frac{4(\bar{C}_0 + 2\bar{C}_1(1 + \bar{C}_1))}{a(1 + \bar{C}_0 + \bar{C}_1)^3}. \quad (3.76)$$

Para la presión radial encontramos

$$p_r = \frac{4R(C_0 R_0^2 + 3C_1 a)(C_0 a R_0^2 - C_1 r^2)}{(R_0^3 + C_0 R_0^2 + C_1 a)^3}, \quad (3.77)$$

normalizando y adimensionalizando la expresión obtenemos

$$\bar{p}_r = \frac{p_r}{p_{r_0}} = \frac{\bar{R}_0 (\bar{C}_0 \bar{R}_0^2 + 3\bar{C}_1) (\bar{C}_0 \bar{R}_0^2 - \bar{r}^2 \bar{C}_1) (1 + \bar{C}_0 + \bar{C}_1)^3}{\bar{C}_0 (\bar{R}_0^3 + \bar{C}_0 \bar{R}_0^2 + \bar{C}_1)^3 (\bar{C}_0 + 3\bar{C}_1)}, \quad (3.78)$$

en la que

$$p_{r_0} = p_r|_{(r=0)} = \frac{4\bar{C}_0(\bar{C}_0 + 3\bar{C}_1)}{a(1 + \bar{C}_0 + \bar{C}_1)^3}. \quad (3.79)$$

La polarización radial queda expresada como

$$P_r = \frac{-2\sqrt{2} (C_0 a R_0^2 - C_1 r^2)}{r (R_0^3 + C_0 R_0^2 + C_1 a)}, \quad (3.80)$$

al adimensionalizar la expresión obtenemos

$$\bar{P}_r = -\frac{2\sqrt{2} (\bar{C}_0 \bar{R}_0^2 - \bar{C}_1 \bar{r}^2)}{\bar{r} (\bar{R}_0^3 + \bar{C}_0 \bar{R}_0^2 + \bar{C}_1)}, \quad (3.81)$$

en la cual

$$P_{r_0} = P_r|_{r=0} = -2\sqrt{2} (\bar{C}_0 + \bar{C}_1). \quad (3.82)$$

Según las expresiones (3.74) y (3.77), las condiciones de energía (2.46) se satisfacen sólo si se cumplen las relaciones

$$\bar{R}_0 (\bar{C}_0 \bar{R}_0^4 + \bar{C}_1 [\bar{r}^2 + 2 - \bar{r}^4] + 2\bar{C}_1^2 \bar{R}_0) \geq (\bar{C}_0 \bar{R}_0^2 + 3\bar{C}_1) (\bar{C}_0 \bar{R}_0^2 - \bar{C}_1 \bar{r}^2), \quad (3.83a)$$

$$\bar{C}_0 \bar{R}_0^4 + \bar{C}_1 [\bar{r}^2 + 2 - \bar{r}^4] + 2\bar{C}_1^2 \bar{R}_0 \geq 0, \quad (3.83b)$$

$$\bar{C}_0 > |\bar{C}_1| - 1, \quad (3.83c)$$

$$\bar{C}_0 > 3|\bar{C}_1|. \quad (3.83d)$$

Con algunos valores de las constantes \bar{C}_0 y \bar{C}_1 que satisfacen las expresiones anteriores, presentamos en la figura 3.11 la gráfica para la densidad superficial de energía, ecuación (3.75), la cual muestra que en el centro del disco tienen su valor máximo y a medida que la coordenada radial aumenta sus valores disminuyen considerablemente hasta tender a cero, además son funciones suaves y no presentan singularidades. En la figura 3.12 presentamos la gráfica de la presión radial, ecuación (3.78), en la que vemos que el valor máximo no ocurre en el centro del disco como en el modelo anterior, sino que se encuentra desplazado, sin embargo, una vez alcanzado el punto máximo su valor disminuye conforme aumenta la coordenada radial. En la figura 3.13 presentamos la gráfica de la polarización radial, ecuación (3.81), en la que encontramos un comportamiento similar al del modelo anterior, existe una singularidad en el centro del disco y a medida que aumenta la coordenada r el valor de la polarización disminuye.

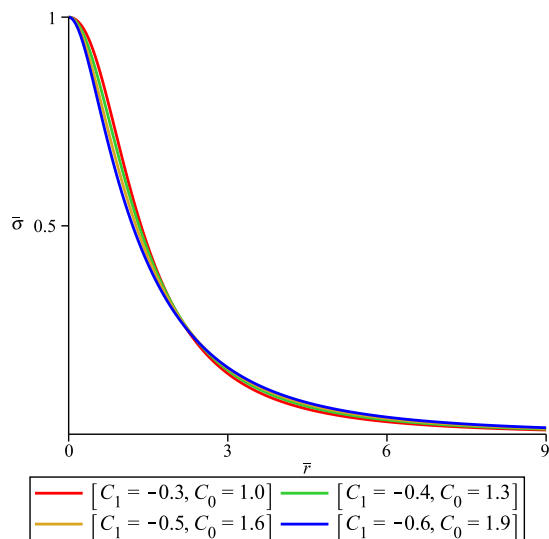


Figura 3.11: $\bar{\sigma}$ del disco polarizado eléctricamente para el modelo $n = 1$, ecuación (3.75)

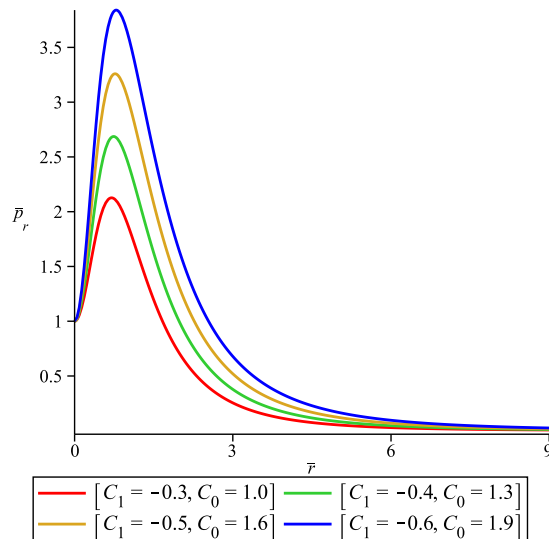


Figura 3.12: \bar{p}_r del disco polarizado eléctricamente para el modelo $n = 1$, ecuación (3.78)

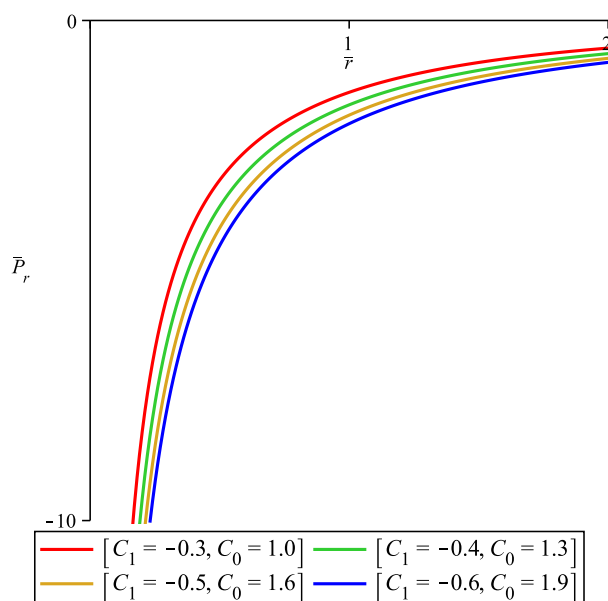


Figura 3.13: \bar{P}_r del disco polarizado eléctricamente para el modelo $n = 1$, ecuación (3.81)

El potencial eléctrico queda definido como

$$\chi = -\sqrt{2} \left(\frac{C_0 R^2 + C_1 z}{R^3 + C_0 R^2 + C_1 z} \right), \quad (3.84)$$

igualandolo a una constante χ_C , tenemos

$$\chi_C = -\sqrt{2} \left(\frac{C_0 R^2 + C_1 z}{R^3 + C_0 R^2 + C_1 z} \right), \quad (3.85)$$

realizando la transformación (2.94) y resolviendo r obtenemos una expresión para las líneas equipotenciales

$$\bar{r} = \pm \sqrt{\frac{1}{36} (D + 4\alpha^2 D^{-1} - 2\alpha)^2 - (|\bar{z}| + 1)^2}, \quad (3.86)$$

donde

$$D = \left(-108\bar{\gamma}\bar{z} - 8\bar{\alpha}^3 + 12\sqrt{3\bar{\gamma}\bar{z}(27\bar{\gamma}\bar{z} + 4\bar{\gamma}^3)} \right)^{1/3}, \quad (3.87)$$

$$\bar{\alpha} = \bar{C}_0 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\chi_{Cte}} \right), \quad (3.88)$$

$$\bar{\gamma} = \bar{C}_1 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\chi_{Cte}} \right). \quad (3.89)$$

En la figura 3.14 presentamos la gráfica de las líneas equipotenciales, ecuación (3.86) y las líneas de campo eléctrico, tomando la ecuación deducida para el campo magnético del disco polarizado magnéticamente, ecuación (3.47).

3.4.3. Cálculo de la Masa Total

El disco polarizado eléctricamente tiene como expresión general para el cálculo de la masa total la ecuación (3.60), y por medio de ella calculamos la masa total para el modelo $n = 0$; tenemos entonces

$$M = 8\pi a C_0 \int_a^\infty \frac{dR_0}{R_0(R_0 + C_0)}, \quad (3.90)$$

$$= 8\pi a \ln \left(\frac{C_0 + a}{a} \right), \quad (3.91)$$

$$= 8\pi a \ln 2, \quad (3.92)$$

donde hemos reemplazado $C_0 = a$, pues éste era el único valor de la constante que hacía que las condiciones de energía se satisficieran para este modelo. Así encontramos que la masa del disco converge en este modelo.

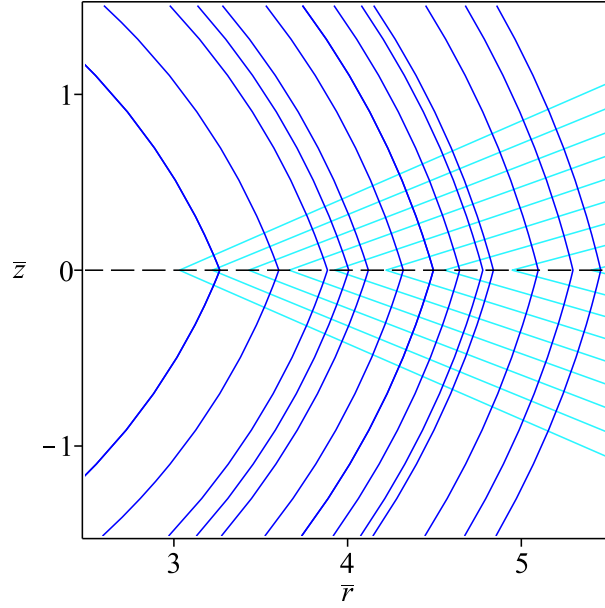


Figura 3.14: Líneas equipotenciales y campo eléctrico del disco polarizado eléctricamente en el modelo $n = 1$, ecuaciones (3.86) y (3.47)

Según la ecuación (3.60), el integrando general para la masa del disco está dado por

$$h_n = \frac{\sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{R^{(l+2)}} P_{l+1}(a/R)}{1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R^{l+1}} P_l(a/R)}; \quad (3.93)$$

por lo tanto, para demostrar la convergencia de las masas de todos los modelos basándonos en el teorema de comparación de límite [41], debemos demostrar que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{h_{n+1}}{h_n} = c, \quad (3.94)$$

con $c \neq 0$ y $R^2 = r^2 + a^2$. La función h_{n+1} , se expresa como

$$h_{n+1} = \frac{\sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{R^{(l+2)}} P_{l+1}(a/R) + \frac{C_{n+1}(n+2)}{R^{(n+3)}} P_{n+2}(a/R)}{1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R^{l+1}} P_l(a/R) + \frac{C_{n+1}}{R^{n+2}} P_{n+1}(a/R)}, \quad (3.95)$$

y por tanto, se puede calcular la relación

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{\left[1 + \frac{C_{n+1}(n+2)}{R^{(n+3)}} P_{n+2}(a/R) \right] \left[1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R^{l+1}} P_l(a/R) \right]}{1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R^{l+1}} P_l(a/R) + \frac{C_{n+1}}{R^{n+2}} P_{n+1}(a/R)}, \quad (3.96)$$

de donde es fácil ver que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{h_{n+1}}{h_n} = 1. \quad (3.97)$$

En conclusión, ya que se logró demostrar que la masa para el modelo $n = 0$ converge, se puede afirmar que para cualquier modelo n la masa también converge.

Conclusiones

Se construyeron dos familias infinitas de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell para un espacio-tiempo conformestático y axialmente simétrico. Dichas soluciones describen dos familias de discos infinitesimalmente delgados, uno polarizado eléctricamente y otro magnéticamente. Estos modelos se obtuvieron por medio del formalismo general de distribuciones tensoriales, al introducir discontinuidades finitas en las derivadas del tensor métrico y el potencial electromagnético. Encontramos que el disco con polarización eléctrica tiene solamente presión radial, y su única componente del vector polarización está en dirección radial; mientras que en el disco con polarización magnética encontramos que la presión radial es igual a la presión azimutal, es decir, es un disco de fluido perfecto, y su única componente del vector polarización está en dirección normal al plano.

Se analizó el comportamiento de los modelos $n = 0$ y $n = 1$ para cada tipo de disco, encontrando las restricciones sobre las constantes de la expansión de polinomios con las que se satisfacen las condiciones de energía. Con estas pudimos ver que las densidades de energía superficial son funciones suaves y no presentan singularidades, y en general se comportan de manera similar, diferenciándose básicamente en el punto en el que alcanzan su valor máximo, están concentradas en la región central de la configuración, lo cual es físicamente aceptable ya que a pesar de que la extensión del disco sea infinita, la distribución de energía está concentrada en el centro del disco.

Para las presiones, en general encontramos un comportamiento similar a los de la densidad de energía superficial, que disminuyen al aumentar la distancia, no presentan singularidades, y cuyas diferencias más notorias son en el punto de su valor máximo. Igualmente, vimos que la magnetización en dirección z del disco polarizado magnéticamente no presenta singularidades, alcanza su valor máximo en el centro de la configuración y decrece al aumentar la coordenada radial. Por otra parte, la polarización radial en el disco polarizado eléctricamente presenta una divergencia en el centro del disco y disminuye cuando la distancia desde el centro aumenta; esta divergencia es el único inconveniente, ya que no podemos interpretarla físicamente. Por otra parte, mediante el Teorema de comparación del límite demostramos que la masa de ambos sistemas para todos los modelos converge, al haber probado la convergencia del modelo $n = 0$.

Los modelos obtenidos son bien comportados en general, pues el valor de la masa converge y pese a que son de extensión infinita, la densidad de energía está concentrada en la región central, como se esperaría físicamente. Estos trabajos sirven como punto de partida para el estudio de la materia polarizada en el contexto de las soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell, y sirven como motivación para considerar en futuros trabajos discos con características más complejas como por ejemplo, discos con extensión finita, con halos esferoidales, discos estacionarios que presenten rotación, o un disco con materia polarizada electromagnéticamente.

Los resultados obtenidos en el marco del desarrollo del presente Trabajo de investigación, han sido presentados en los eventos:

- Anamaría Navarro, Guillermo A. González. *Relativistic static thin disks with electrically and magnetically polarized material source*. Presentado en The 20th International Conference on General Relativity and Gravitation (GR20) and the 10th Amaldi Conference on Gravitational Waves (Amaldi10), Varsovia, Polonia, 7 al 13 de Julio de 2013.
- Anamaría Navarro, Guillermo A. González. *Exact Relativistic Thin Disks with Electrically and Magnetically Polarized Material Source*. Aceptado para el Compact Object Summer Fest, Bucaramanga, Colombia, 21 al 23 de agosto de 2013
- Anamaría Navarro, Guillermo A. González. *Construcción de modelos relativistas de discos delgados estáticos y axialmente simétricos con fuentes dipolares eléctricas y magnéticas*. Aceptado para el XXV Congreso Nacional de Física, Armenia, Quindío, 25 al 29 de agosto de 2013

Bibliografía

- [1] W. B. Bonnor and A. Sackfield. The Interpretation of Some Spheroidal Metrics. *Commun. math. Phys.*, **8**:338, (1968).
- [2] T. Morgan and L. Morgan. The Gravitational Field of a Disk. *Phys. Rev.*, **138**:1097, (1969).
- [3] T. Morgan and L. Morgan. Gravitational Field of Shells and Disks in General Relativity. *Phys. Rev., D* **2**:2756, (1970).
- [4] B. H. Voorhees. Relativistic Disks. I. Background Models. *Phys. Rev., D* **5**:2413, (1972).
- [5] D. Lynden-Bell and S. Pineault. Relativistic Disks - I. Counter-rotating Disks. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **185**:679, (1978).
- [6] A. Chamorro, R. Gregory, and J. M. Stewart. Static Axisymmetric Discs and Gravitational Collapse. *Proc. R. Soc. Lond.*, **A413**:251, (1987).
- [7] P. S. Letelier and S. R. Oliveira. Exact Selfgravitating Disks and Rings: A Solitonic Approach. *J. Math. Phys.*, **28**:165, (1987).
- [8] J. P. S. Lemos. Self-similar Relativistic Disks with Pressure. *Class. Quantum Grav.*, **6**:1219, (1989).
- [9] D. Bičák, D. Lynden-Bell, and J. Katz. Relativistic Disks as Sources of Static Vacuum Spacetimes. *Phys. Rev., D* **47**:4334, (1993).
- [10] J. Bičák, D Lynden-Bell, and C. Pichon. Relativistic Discs and Flat Galaxy Models. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **265**:126, (1993).
- [11] G. A. González and P. S. Letelier. Relativistic Static Thin Disks with Radial Stress Support. *Class. Quantum Grav.*, **16**:479, (1999).
- [12] G. A. González and O. A. Espitia. Relativistic Static Thin Disks: The Counterrotating Model. *Phys. Rev., D* **68**:104028, (2003).
- [13] G. A. González, A. C. Gutiérrez-Piñeres, and V. M. Viña-Cervantes. Relativistic Static Thin Dust Disks with an Inner Edge: An Infinite Family of New Exact Solutions. *Phys. Rev., D* **79**:124048, (2009).
- [14] S. Lynden-Bell, D. y Pineault. Relativistic Disks - II. Self-similar Disks in Rotation. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **185**:695, (1978).
- [15] J. Bičák and T. Ledvinka. Relativistic Disks as Sources of the Kerr Metric. *Phys. Rev. Lett.*, **71**:1669, (1993).

-
- [16] C. Pichon and Lynden-Bell. New Sources for Kerr and Other Metrics: Rotating Relativistic Discs with Pressure Support. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **280**:1007, (1996).
- [17] G. A. González and P. S. Letelier. Rotating Relativistic Thin Disks. *Phys. Rev.*, D **62**:064025, (2000).
- [18] M. Ujevic and P. S. Letelier. Stability of General Relativistic Geometric Thin Disks. *Phys. Rev.*, D **70** :084015, (2004).
- [19] G. García-Reyes and G. A. González. Rotating and Counterrotating Relativistic Thin Disks as Sources of Stationary Electrovacuum Spacetimes. *J. Phys.*, **37**:1094, (2007).
- [20] P. S. Letelier. Exact General Relativistic Disks with Magnetic Fields. *Phys. Rev.*, D **60** :104042, (1999).
- [21] D. Vogt and P.S. Letelier. Exact Relativistic Static Charged Dust Discs and Non-axisymmetric Structures. *Class. Quantum Grav.*, **21**:3369, (2007).
- [22] J. Katz, J. Bičák, and D. Lynden-Bell. Disk Sources for Conformastationary Metrics. *Class. Quantum Grav.*, **16**:4023, (1999).
- [23] G. A. González, A. C. Gutiérrez-Piñeres, and P. Ospina. Finite Axisymmetric Charged Dust Disks in Conformastatic Spacetimes. *Phys. Rev.*, D **78**:064058, (2008).
- [24] G. García and G. A. González. Electrovacuum Static Counterrotating Relativistic Dust Disks. *Phys. Rev.*, D **69**:124002, (2004).
- [25] D. Vogt and P. S. Letelier. Exact Relativistic Static Charged Perfect Fluid Disks. *Phys. Rev.*, D **70**:064003, (2004).
- [26] G. García-Reyes and G. A. González. Counterrotating Perfect Fluid Discs as Sources of Electrovacuum Static Spacetimes. *Class. Quantum Grav.*, **21**:4845, (2004).
- [27] G. García-Reyes and G. A. González. Charged Perfect Fluid Disks as Sources of Taubnut-type Spacetimes. *Phys. Rev.*, D**70**:104005, (2004).
- [28] G. García-Reyes and G. A. González. (2009).
- [29] D. A. Ballén and G. A. González. Discos delgados relativistas con halo y campo magnético. *Trabajo de Grado. Universidad Industrial de Santander*, (2012).
- [30] L. A. Gómez and G. A. González. Discos delgados relativistas con halo y campo eléctrico. *Trabajo de Grado. Universidad Industrial de Santander*, (2012).
- [31] N. Gürlebeck, J. Bičák, and A. C. Gutiérrez-Piñeres. Monopole and Dipole Layers in Curved Spacetimes: Formalism and Examples. *Phys. Rev.*, D **83** :124023, (2011).
- [32] N. Gürlebeck, J. Bičák, and A. C. Gutiérrez-Piñeres. Electromagnetic Sources Distributed on Shells in a Schwarzschild Background. *Gen. Relativ. Gravit.*, **43**:3301, (2011).
- [33] G. A. Maugin. On the Covariant Equations of the Relativistic Electrodynamics of Continua. I General Equations. *J. Math. Phys.*, **19**:1198, (1978).

-
- [34] R. A. Grot. Relativistic Continuum Theory for the Interaction of Electromagnetic Fields with Deformable Bodies. *J. Math. Phys.*, **11**:109, (1970).
- [35] A. Papapetrou and A. Hamouni. Surface Layers of Matter in General Relativity. *Ann. Ins. Henri Poincaré*, **9**:179, (1968).
- [36] A. Lichnerowicz. Sur les Ondes de Choc Gravitationnelles. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér., A* **273**:528, (1971).
- [37] A. H. Taub. Space-times with Distribution Valued Curvature Tensors. *J. Math. Phys.*, **21**:1423, (1980).
- [38] E. Poisson. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, (2004).
- [39] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, and M. McCallum. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge University Press, (2003).
- [40] J. L. Synge. *Relativity: The General Theory*. North-Holland Publishing Company, (1966).
- [41] T.M Apostol. *Calculus*. Reverté S.A, (1965).