

TEOREMA DEL CUADRILÁTERO COMPLETO

MARÍA LUCÍA SUÁREZ CARREÑO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2025

TEOREMA DEL CUADRILÁTERO COMPLETO

MARÍA LUCÍA SUÁREZ CARREÑO

Trabajo de grado para optar al título de
Matemática

Director

Jurgen Alfredo Julio Batalla
Doctor en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2025

DEDICATORIA

A mi familia, la de sangre y la que no lo es, y a quienes ya no están, por acompañarme en este camino.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, que ha sido mucho más que apoyo económico y estabilidad. Gracias por ser mi lugar seguro, por sostenerme cuando el ritmo se volvió pesado y por darme una base tan sólida sobre la que me pude levantar todo este camino. Su compañía y su forma de cuidarme han sido una presencia constante, discreta y esencial.

A mi novio, mi cómplice en todas las versiones que he sido en este proceso. Gracias por estar presente cada vez que lo necesité, por los intercambios de ideas y por el interés genuino incluso en lo que a veces parecía incomprendible. Gracias por la paz, la tranquilidad, la calma y el equilibrio brindados que siempre hacen la diferencia.

A mis mejores amigos. Gracias por las risas, la conexión única y por esos momentos de cotidianidad que, por su manera singular e impredecible de ser, terminaron convirtiéndose en algunos de mis recuerdos favoritos. Sé que se van a quedar conmigo para siempre. Su amistad es una rareza estadística y un privilegio que no doy por sentado.

A los profesores que hicieron posible este recorrido, por enseñarme, exigirme y empujarme a mirar las matemáticas con más profundidad, incluso cuando yo misma dudaba.

A mis compañeros que con el tiempo se volvieron amigos, gracias por el apoyo mutuo, las conversaciones, los trabajos compartidos y por ser parte del día a día que sostuvo esta carrera más allá de las aulas.

A todos, gracias por acompañarme en esta etapa.

CONTENIDO

	pág.
Introducción	9
1 Conceptos teóricos preliminares	11
1.1 Teorema del cuadrilátero completo	12
1.2 Espacio proyectivo	15
1.2.1 Referencias proyectivas	18
2 Teorema del cuadrilátero completo en la Geometría Proyectiva	23
2.1 Preliminares	23
2.2 Teorema del cuadrilátero completo en la geometría proyectiva	25
3 Principio de dualidad	29
3.1 Preliminares	32
3.2 Espacio Vectorial y Espacio Dual	33
3.3 Espacio Proyectivo Dual	35
3.4 Principio de dualidad	36
4 Construcción de la proporción áurea a partir de secuencias armónicas	50
4.1 Preliminares	50
4.2 Secuencias de tipo 1	58
4.3 Secuencias de tipo 2	60
4.4 Secuencias de tipo 3	60
5 Conclusiones	62
Bibliografía	64

LISTA DE FIGURAS

	pág.
1 Construcción del conjugado armónico de un punto	11
2 Construcción del cuadrilátero completo	12
3 Teorema de Ceva	13
4 Teorema de Menelao	13
5 Demostración del teorema del cuadrilátero completo	14
6 Ilustración de dualidad	30
7 Espiral logarítmica dorada junto con la sucesión $q_n = (-\phi^2)^n$.	60

RESUMEN

TÍTULO: TEOREMA DEL CUADRILÁTERO COMPLETO *

AUTOR: MARÍA LUCÍA SUÁREZ CARREÑO **

PALABRAS CLAVE: cuadrilátero completo; cuaterna armónica; geometría proyectiva; dualidad proyectiva; razón doble; proporción áurea; conjugado armónico.

DESCRIPCIÓN:

En este trabajo se analiza y demuestra el teorema del cuadrilátero completo desde los enfoques clásico y proyectivo, integrando una demostración constructiva con fundamentos euclidianos y una formulación algebraico-proyectiva en coordenadas homogéneas. En la primera parte se presenta la demostración euclidiana del teorema, construida mediante los teoremas de Ceva y Menelao, que permite establecer relaciones de conjugación armónica dentro de la configuración. A continuación, se introducen los fundamentos teóricos de la geometría proyectiva necesarios para reformular el teorema, tras lo cual se desarrolla su demostración proyectiva en coordenadas homogéneas. Posteriormente, se amplía el marco teórico con el principio de dualidad, que permite extender los resultados a configuraciones recíprocas. Adicional a eso, se analizan las secuencias armónicas derivadas de la configuración, destacando la aparición de la proporción áurea en determinadas condiciones. Este hallazgo revela una correspondencia entre la estructura geométrica del cuadrilátero completo y propiedades aritmético-geométricas de la razón áurea. Finalmente, el trabajo concluye que el enfoque proyectivo no solo aporta una comprensión más general y unificada del teorema, sino que también abre líneas de investigación futuras sobre iteraciones armónicas y transformaciones proyectivas en contextos geométricos más amplios.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jurgen Alfredo Julio Batalla, Doctor en Ciencias Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: THEOREM OF THE COMPLETE QUADRILATERAL *

AUTHOR: MARÍA LUCÍA SUÁREZ CARREÑO **

KEYWORDS: complete quadrilateral; harmonic quadruple; projective geometry; projective duality; cross ratio; golden ratio; harmonic conjugate.

DESCRIPTION:

This work analyzes and proves the Theorem of the Complete Quadrilateral from both classical and projective perspectives, integrating a constructive demonstration based on Euclidean foundations with an algebraic–projective formulation in homogeneous coordinates. The first part presents the Euclidean proof of the theorem, constructed through Ceva’s and Menelaus’ theorems, which allows establishing harmonic conjugation relations within the configuration. Subsequently, the theoretical foundations of projective geometry necessary to reformulate the theorem are introduced, and its projective proof is developed in homogeneous coordinates, showing the projective invariance of the cross ratio. The theoretical framework is then completed with the principle of duality, which extends the results to reciprocal configurations. In addition, the harmonic sequences derived from the configuration are analyzed, highlighting the appearance of the golden ratio in certain families and specific conditions. This finding reveals a correspondence between the geometric structure of the complete quadrilateral and the arithmetic–geometric properties of the golden ratio. Finally, the study concludes that the projective approach not only provides a more general and unified understanding of the theorem but also opens new lines of research on harmonic iterations and projective transformations in broader geometric contexts.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jurgen Alfredo Julio Batalla, Doctor en Ciencias Matemáticas.

Introducción

Desde la Antigüedad, la geometría ha sido una herramienta esencial para medir, describir y comprender el espacio. La geometría euclidiana, formalizada en *Los Elementos* de Euclides¹, se cimenta sobre nociones métricas: distancias, ángulos, paralelismo, perpendicularidad y congruencia. Su enfoque proporciona un marco preciso para resolver problemas de construcción y medida, pero su dependencia de magnitudes métricas la hace sensible a transformaciones que alteren esas medidas. Con el tiempo, esta limitación impulsó la búsqueda de un enfoque más general que capturara relaciones espaciales independientes de la métrica.

La geometría proyectiva surge como respuesta a esta necesidad, al enfocarse en propiedades que permanecen invariantes bajo proyecciones y perspectivas. En este marco, conceptos como la distancia o el ángulo dejan de ser esenciales y adquieren protagonismo relaciones más abstractas, como la alineación de puntos, la concurrencia de rectas o la razón doble.

El interés por las propiedades proyectivas surgió en un contexto práctico y artístico: los pintores del Renacimiento, al representar el espacio tridimensional en un plano, descubrieron que ciertas relaciones geométricas permanecían inalteradas bajo las proyecciones utilizadas en el dibujo. Sin embargo, a mediados del siglo XIX, se consolidó el cuerpo teórico de la geometría proyectiva, integrando resultados dispersos y dotándola de un sistema coherente de métodos y definiciones. La formulación moderna, permite transitar con naturalidad del razonamiento clásico a un marco algebraico mediante coordenadas homogéneas. Este paso no solo facilita los cálculos y la representación de los objetos, sino que hace posible enunciar y demostrar resultados generales como el principio de dualidad.

Dentro de este estudio proyectivo, el teorema del cuadrilátero completo ofrece un punto de partida privilegiado. A partir de la disposición de sus vértices y las rectas que

¹ Euclides (c. 325 a. C.–265 a. C.). Matemático griego, considerado el "padre de la geometría". Su obra *Los Elementos* sistematizó el conocimiento geométrico de la antigüedad y fue el texto de referencia durante más de dos milenios.

los unen, se obtiene una configuración que contiene relaciones armónicas entre puntos y rectas. Esta configuración no solo constituye un ejemplo clásico de propiedad invariante bajo proyecciones, sino que también proporciona un terreno fértil para compararla demostraciones constructivas con técnicas más algebraicas mediante coordenadas homogéneas.

Un fenómeno interesante dentro de la configuración y proporción del teorema del cuadrilátero completo es la aparición natural de cuaternas armónicas. Esta permite generar tres secuencias distintas de puntos, cada una definida por la construcción recursiva del conjugado armónico del término anterior respecto a un par fijo de referencia. En dos de estas secuencias, el número áureo se manifiesta: ya sea como el límite del ritmo de aproximación entre términos consecutivos o como el ángulo constante que, sobre el círculo unitario, transforma un punto en el siguiente. Ambas interpretaciones, aunque distintas en su forma, colaboran en un mismo marco algebraico-geométrico, estableciendo un vínculo directo con la estructura del plano complejo y añadiendo una dimensión adicional al estudio proyectivo del cuadrilátero completo.

Este trabajo ofrece una exposición integral del teorema del cuadrilátero completo desde una doble perspectiva: clásica (euclidiana), y la algebraica (proyectiva), basada en coordenadas homogéneas y el principio de dualidad. Se destaca el papel de la cuaterna armónica como núcleo estructural de la configuración y se analizan sus vínculos con la proporción áurea y su representación en el plano complejo. La presentación combina la construcción geométrica con el sustento algebraico que la respalda, con el propósito de mostrar, cómo un resultado clásico encierra conexiones entre armonía, proporción y estructura proyectiva, reafirmando su vigencia y valor en el marco general de la geometría.

Se comienza en el capítulo 1, con los conceptos preliminares y la enunciación precisa del teorema, que servirá de hilo conductor para todo el trabajo. La demostración algebraica de este último se da en el capítulo 2, mientras que en el 3 se desarrolla la teoría esencial sobre el Principio de dualidad. Se finaliza, en el capítulo 4, donde a partir de secuencias armónicas, se da la proporción áurea.

1. Conceptos teóricos preliminares

Antes de enunciar el teorema del cuadrilátero completo, se deben tener en cuenta las siguientes definiciones:

Definición 1.1 (Razón doble). *Dados cuatro puntos colineales A, B, C y D , su razón doble se define como*

$$[A, B; C, D] := \frac{AC}{BC} \frac{BD}{AD} = \frac{(C - A)(D - B)}{(C - B)(D - A)},$$

donde las distancias se consideran firmadas de acuerdo con una orientación elegida sobre la recta.

Por esta razón, el valor de la razón doble puede ser negativo: el signo depende de la disposición y del orden de los puntos en dicha orientación.

Definición 1.2 (Conjugado armónico). *Dados tres puntos colineales A, B , y C . Se define como **conjugado armónico** del punto C , respecto a A y B , al punto D que cumple;*

- a. *Es colineal a los puntos dados.*
- b. $[A, B; C, D] = -1$.

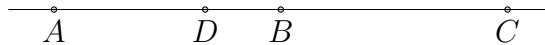


Figura 1. Construcción del conjugado armónico de un punto

Definición 1.3 (Cuaterna armónica). *Se dice que cuatro puntos A, B, C y D forman una **cuaterna armónica** si*

$$[A, B; C, D] = -1.$$

Para este trabajo es de interés analizar las relaciones entre las intersecciones de los lados de un cuadrilátero. En el marco de la geometría proyectiva, resulta natural considerar cuadriláteros cuyos lados siempre se encuentran en un punto de intersección. Aclarado esto, se puede enunciar el siguiente teorema:

1.1. Teorema del cuadrilátero completo Dados cuatro puntos A, B, C y D , tales que tres de ellos no sean colineales y sean $E = \overline{AB} \cap \overline{CD}$, $F = \overline{AC} \cap \overline{BD}$, $G = \overline{AD} \cap \overline{BC}$ y $H = \overline{BC} \cap \overline{EF}$, entonces H es conjugado armónico de G respecto a B y C .

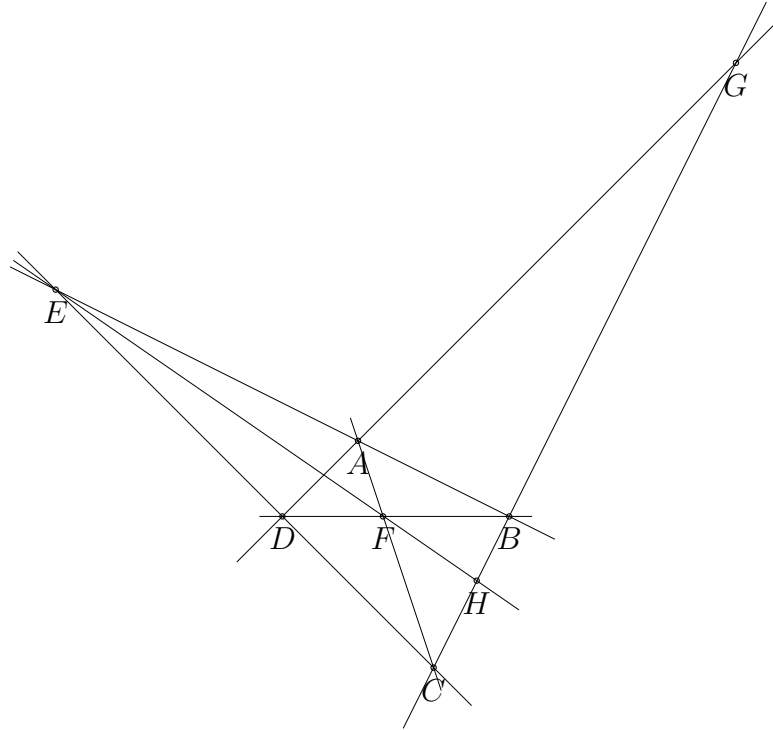


Figura 2. Construcción del cuadrilátero completo

Para demostrar el teorema anterior, se usarán el teorema de Ceva y el teorema de Menelao, los cuales se recuerdan a continuación:

Teorema de Ceva

Dado un triángulo $\triangle EBC$ y puntos H, D y A ubicados en los lados \overline{BC} , \overline{CE} y \overline{EB} respectivamente, tales que \overline{BD} , \overline{HE} y \overline{CA} sean concurrentes, se cumple que:

$$\frac{CD}{DE} \frac{EA}{AB} \frac{BH}{HC} = 1.$$

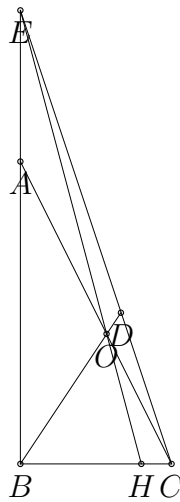


Figura 3. Teorema de Ceva

Teorema de Menelao

Dado un triángulo $\triangle EBC$, puntos A y D ubicados en los lados \overline{BE} , y \overline{EC} respectivamente; y un punto $G = \overline{BC} \cap \overline{AD}$, se cumple que:

$$\frac{CD}{DE} \frac{EA}{AB} \frac{BG}{GC} = -1.$$

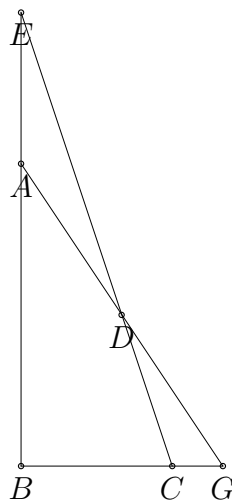


Figura 4. Teorema de Menelao

Demostración del teorema del cuadrilátero completo

La demostración que se presenta a continuación sigue la construcción clásica descrita por Shively², adaptada aquí a la notación y estilo de exposición de este trabajo. Se realiza de manera directa empleando los teoremas de Ceva y Menelao previamente enunciados. Teniendo los ocho puntos A, B, C, D, E, F, G y H distribuidos tal como se describe en 2. Ubíquese el triángulo $\triangle EBC$,

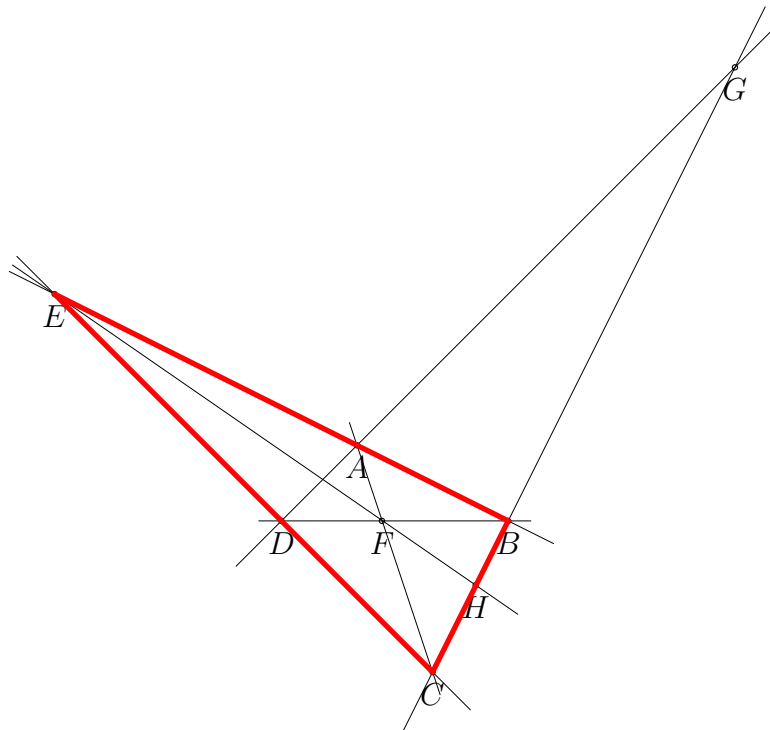


Figura 5. Demostración del teorema del cuadrilátero completo

en el cual por el **teorema de Ceva** (ver figura 3) se cumple que:

$$\frac{CD}{DE} \frac{EA}{AB} \frac{BH}{HC} = 1. \quad (1)$$

Ahora, como $G = \overline{BC} \cap \overline{AD}$ por el **teorema de Menelao** (ver figura 4) se cumple que:

$$\frac{CD}{DE} \frac{EA}{AB} \frac{BG}{GC} = -1.$$

² SHIVELY, A. *An Introduction to Modern Geometry*, Continental, 1984, p. 51.

Luego, si se invierten signos, se tiene:

$$-\frac{CD EA BG}{DE AB GC} = 1. \quad (2)$$

Por (1) y (2) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{CD EA BH}{DE AB HC} &= -\frac{CD EA BG}{DE AB GC}; \\ \frac{BH}{HC} &= -\frac{BG}{GC}; \\ \frac{BH GC}{HC BG} &= -1. \end{aligned}$$

Por lo que se concluye que H es conjugado armónico de G respecto a B y C . \square

Una vez enunciado y demostrado el teorema del cuadrilátero completo desde la perspectiva clásica, el siguiente objetivo es demostrar el teorema en su versión de geometría proyectiva para ello se hará una revisión exhaustiva de los principales elementos y herramientas de dicha subdisciplina.

La presentación del siguiente subcapítulo está adaptada del capítulo 2 de Doneddu³, con ajustes en notación y estilo.

1.2. Espacio proyectivo Dados un cuerpo \mathbb{K} y un espacio vectorial de dimensión finita V sobre \mathbb{K} considere la relación de equivalencia \sim en $V - \{0\}$ definida como:

$$a \sim b \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{K} - \{0\} : a = \lambda b).$$

Se define el **espacio proyectivo deducido** de V como las clases de equivalencia generadas por \sim . Y se denota como

$$\mathbb{P}(V) = (V - \{0\}) / \sim .$$

³ DONEDDU, A. *Complementos de Geometría Algebraica*. Dunod, 1978.

Para todo $\mathbf{x} \in V$ se denota la clase de \mathbf{x} como:

$$x = \{\lambda \mathbf{x}, \lambda \in \mathbb{K}^*\},$$

Se denotará por $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ al espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$ donde (\mathbb{K}^n) es el espacio vectorial de n-tuplas con entradas que pertenecen al cuerpo \mathbb{K} .

El siguiente ejemplo está tomado literalmente de las notas de clase de Granados ⁴.

Ejemplo 1.1. a. *Recta proyectiva real $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.*

Sea $X = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Se define la relación de equivalencia \sim sobre X así:

$$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} : (x_1, y_1) = \lambda(x_0, y_0).$$

El espacio cociente X/\sim se llama recta proyectiva real, denotada por $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

b. *Plano proyectivo real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.*

Sea $X = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$. Se define \sim sobre X así:

$$(x_0, y_0, z_0) \sim (x_1, y_1, z_1) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} : (x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_0, y_0, z_0).$$

El espacio cociente X/\sim se llama plano proyectivo real, denotado por $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

c. *Recta proyectiva compleja $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.*

Sea $X = \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$. Se define \sim sobre X como:

$$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} : (x_1, y_1) = \lambda(x_0, y_0).$$

El espacio cociente X/\sim se llama recta proyectiva compleja, denotada por $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

d. *Plano proyectivo complejo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.*

⁴ Granados, Claudia. *NOTAS DE CLASE*. Universidad Industrial de Santander, s.f.

Sea $X = \mathbb{C}^3 - \{(0, 0, 0)\}$. Se define \sim sobre X de la siguiente forma:

$$(x_0, y_0, z_0) \sim (x_1, y_1, z_1) \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} : (x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_0, y_0, z_0).$$

El espacio cociente X/\sim se llama **plano proyectivo complejo**, denotado por $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Una vez establecido que un espacio proyectivo puede deducirse a partir de un espacio vectorial, resulta natural cuestionarse acerca de la relación que existe entre ambos y, en particular, entre sus respectivos elementos. Este vínculo es fundamental, pues permite comprender cómo la estructura proyectiva surge de la estructura lineal subyacente y de qué manera se conectan los objetos de cada uno de estos espacios. La respuesta a esta cuestión se formaliza mediante la siguiente definición:

Definición 1.4. Se llama **aplicación canónica** de $V - \{0\}$ sobre $\mathbb{P}(V)$ a la aplicación dada por:

$$\begin{aligned} \pi: V - \{0\} &\rightarrow \mathbb{P}(V) \\ \mathbf{x} &\rightarrow \pi(\mathbf{x}) = x. \end{aligned}$$

Note que esta aplicación es sobreyectiva.

Definición 1.5. Dado un espacio vectorial V de dimensión finita n , se define la **dimensión del espacio proyectivo** $\mathbb{P}(V)$ deducido de V , al entero $n - 1$ y se denota por $\dim \mathbb{P}(V) = n - 1$.

Además se observa que:

Espacio Vectorial V	$\xrightarrow{\pi}$	Espacio Proyectivo $\mathbb{P}(V)$
recta vectorial $\dim V = 1$		punto proyectivo $\dim \mathbb{P}(V) = 0$
plano vectorial $\dim V = 2$		recta proyectiva $\dim \mathbb{P}(V) = 1$
espacio vectorial $\dim V = 3$		plano proyectivo $\dim \mathbb{P}(V) = 2$.

De este modo la aplicación canónica cumple el papel de “traductor” entre objetos del espacio vectorial V y su espacio proyectivo deducido $\mathbb{P}(V)$.

Definición 1.6. Dado un subespacio W de un espacio vectorial V ; se define como **subespacio proyectivo** del espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ al conjunto de la forma $\pi(W) = \mathbb{P}(W)$.

Si W cumple que $\dim \mathbb{P}(W) = \dim \mathbb{P}(V) - 1$ se dice que $\mathbb{P}(W)$ es un **hiperplano proyectivo**.

Lo anterior podría aplicarse incluso al conjunto que forma un sistema de coordenadas para un elemento $\mathbf{x} \in V - \{0\}$. Como se sigue a continuación:

Definición 1.7. Sea $\dim V = n + 1$ y $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n+1}\}$ una base de V . Se designa el sistema de coordenadas para todo $\mathbf{x} \in V$ en la base B con $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$, es decir,

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_{n+1} \mathbf{e}_{n+1}.$$

Para todo $x = \pi(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}(V)$, se define como **coordenadas homogéneas** de x a la clase de $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ denotada por $\pi((\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})) = [\alpha_1 : \dots : \alpha_{n+1}] \in \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) - \{0\}$.

1.2. Referencias proyectivas Para introducir adecuadamente el concepto de referencia proyectiva, resulta indispensable enunciar previamente la siguiente definición, la cual establece las bases necesarias para su comprensión.

Definición 1.8. Un conjunto $x_1 = \pi(\mathbf{x}_1), \dots, x_n = \pi(\mathbf{x}_n)$ en $\mathbb{P}(V)$ es **proyectivamente independiente** si los vectores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ del espacio vectorial V , son linealmente independientes en V . En particular, esto implica que $\dim(V) \geq n$.

Por otro lado en este trabajo será útil considerar conjuntos de puntos en espacios proyectivos que se distribuyen con una configuración especial:

Definición 1.9. Un conjunto x_0, \dots, x_k en $\mathbb{P}(V)$ (con $\dim \mathbb{P}(V) = n$) están en **posición canónica** cuando se cumple una de las siguientes dos condiciones:

- a. Si $k \leq n$, los puntos x_0, \dots, x_k son proyectivamente independientes.
- b. Si $k > n$, no existe ningún hiperplano de $\mathbb{P}(V)$ que contenga $n + 1$ puntos de los x_i .

La noción de posición canónica resulta fundamental. El siguiente teorema es una consecuencia de la configuración de puntos tal como en el primer ítem:

Teorema 1.1. ⁵ *En un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ con $\dim \mathbb{P}(V) = n$, para toda familia $\{a_0, \dots, a_{n+1}\}$ tal que toda subfamilia de cardinal $n+1$ sea proyectivamente independiente, existe siempre una base $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n+1}\}$ de V única, salvo homotecia, tal que:*

$$a. \pi(\mathbf{e}_1) = a_1, \dots, \pi(\mathbf{e}_{n+1}) = a_{n+1};$$

$$b. \pi(\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_{n+1}) = a_0.$$

Demostración. Para todo $i \in \{1, \dots, n+1\}$ se elige $\mathbf{u}_i \in V$ tal que

$$a_i = \pi(\mathbf{u}_i).$$

Entonces $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n+1}\}$ constituye una base en V y en ella todo $\mathbf{u}_0 \in V$, tal que $a_0 = \pi(\mathbf{u}_0)$, posee un sistema de coordenadas $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$:

$$\mathbf{u}_0 = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_{n+1} \mathbf{u}_{n+1}.$$

Note que todos los $\alpha_i \neq 0$; en efecto, si existe un $j \in \{1, \dots, n+1\}$ tal que $\alpha_j = 0$ entonces la familia $\{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_{n+1}\}$ no sería independiente en V , y por tanto, la subfamilia $\{a_0, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_{n+1}\}$ no sería proyectivamente independiente, lo que contradice la hipótesis. Por consiguiente si para todo $i \in \{1, \dots, n+1\}$ se escribe $\mathbf{e}_i = \alpha_i \mathbf{u}_i$, entonces $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n+1}\}$ es una base de V tal que:

$$\pi(\mathbf{e}_1) = a_1, \dots, \pi(\mathbf{e}_{n+1}) = a_{n+1}, \tag{3}$$

$$\pi(\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_{n+1}) = a_0. \tag{4}$$

Probándose la existencia de B . Queda demostrar que cualquier otra base B' que satisfaga la hipótesis se deduce de B por una homotecia, es decir que existe $\Gamma \in \mathbb{K} - \{0\}$ tal que

⁵ Adaptado de DONEDU, A. *Complementos de Geometría Algebraica*. Dunod, 1978, cap 2.

$B' = \Gamma B$. En efecto si $B' = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{n+1}\}$ es una base que satisface (3) y (4), se tiene que:

$$\forall i \in [1, n+1], \quad \pi(\mathbf{e}'_i) = \pi(\mathbf{e}_i), \quad (5)$$

$$\pi(\mathbf{e}'_1 + \dots + \mathbf{e}'_{n+1}) = \pi(\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_{n+1}). \quad (6)$$

De (5) se deduce que para todo $i \in \{1, \dots, n+1\}$, existe $\gamma_i \in \mathbb{K} - \{0\}$ tal que $\mathbf{e}'_i = \gamma_i \mathbf{e}_i$; de (6) se deduce la existencia de $\Gamma \in \mathbb{K} - \{0\}$ tal que:

$$\mathbf{e}'_1 + \dots + \mathbf{e}'_{n+1} = \Gamma(\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_{n+1}).$$

Las dos condiciones obtenidas implican:

$$(\gamma_1 - \Gamma)\mathbf{e}_1 + \dots + (\gamma_{n+1} - \Gamma)\mathbf{e}_{n+1} = 0.$$

Así, para todo $i \in \{1, \dots, n+1\}$:

$$\gamma_i = \Gamma,$$

y por consiguiente:

$$B' = \Gamma B.$$

□

Definición 1.10. Se define como **referencia proyectiva** del espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$, con $\dim \mathbb{P}(V) = n$, todo conjunto de puntos a_0, \dots, a_{n+1} que están en posición canónica.

Note que la anterior definición es equivalente a que la familia $\{a_0, \dots, a_{n+1}\}$ cumple que toda subfamilia de cardinal $n+1$ sea proyectivamente independiente.

Por definición, toda referencia proyectiva cumple el teorema 1.1. a_0 se denomina **centro de la referencia**.

Ejemplo 1.2. a. En la recta proyectiva, cualquier familia de tres puntos, distintos dos a dos, es una referencia proyectiva.

b. En el plano proyectivo, cualquier familia de cuatro puntos tales que tres cualesquiera entre ellos no sean colineales, son una referencia proyectiva.

c. Si $\dim \mathbb{P}(V) = 3$, cualquier familia de cinco puntos tales que cuatro cualesquiera entre ellos no sean coplanares, son una referencia proyectiva.

Para completar el marco conceptual requerido por el teorema del cuadrilátero completo, se introduce a continuación la noción de razón doble, en su versión correspondiente en la geometría proyectiva.

Definición 1.11. En el espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$, con $\dim \mathbb{P}(V) = 1$ (una recta proyectiva). Dada una cuaterna de puntos (a, b, c, d) tales que (a, b, c) sean una referencia proyectiva de $\mathbb{P}(V)$ con centro c y $d \neq a$. Se define como **razón doble** de la cuaterna al escalar $\rho \in \mathbb{K}$, tal que $[\rho : 1]$ sea un sistema de coordenadas homogéneas de d . La notación es:

$$\rho = [a, b; c, d],$$

O sea, existe una base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ de V tal que:

$$\pi(\mathbf{a}) = a; \quad \pi(\mathbf{b}) = b; \quad \pi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c; \quad \pi(\rho \mathbf{a} + \mathbf{b}) = d;$$

Observación 1.1. $[a, b; c, c] = 1$, $[a, b; c, b] = 0$. Si a, b, c y d son distintos entonces $\rho \neq 1$ y $\rho \neq 0$.

Ejemplo 1.3. Sea $P(V) = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ y se consideran los puntos

$$a = [1 : 0], \quad b = [0 : 1], \quad c = [1 : 1], \quad d = [\rho : 1].$$

De acuerdo con la definición, la razón doble de la cuaterna (a, b, c, d) es

$$\rho = [a, b; c, d].$$

En coordenadas afines $x = \frac{x_0}{x_1}$, los puntos se representan como

$$a = 0, \quad b = \infty, \quad c = 1, \quad d = \rho.$$

Así, la expresión clásica de la razón doble en la recta proyectiva es

$$[a, b; c, d] = \frac{(c - a)(d - b)}{(c - b)(d - a)} = \rho.$$

Por ejemplo, si $\rho = 2$, entonces los puntos $a = 0$, $b = \infty$, $c = 1$ y $d = 2$ forman una cuaterna cuya razón doble es 2.

2. Teorema del cuadrilátero completo en la Geometría Projectiva

En este capítulo se enunciará y demostrará el teorema del cuadrilátero completo haciendo uso de los conceptos teóricos preliminares de la geometría projectiva estudiados previamente. Las definiciones y resultados de este capítulo siguen de manera cercana la exposición del capítulo 2 de Fortuna et al.⁶. La notación y el orden de presentación han sido adaptados ligeramente para ajustarse al enfoque de este trabajo.

2.1. Preliminares

Definición 2.1. Ecuación de la recta projectiva en $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ Sea $[x_0 : x_1 : x_2]$ la coordenada homogénea en $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Una recta projectiva $L \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ viene dada por una ecuación lineal homogénea

$$L = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\},$$

donde $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$. La tríada de coeficientes determina la misma recta que cualquier múltiplo no nulo $\lambda(a_0, a_1, a_2)$ es decir, los coeficientes se consideran hasta multiplicación escalar.

Definición 2.2. Ecuación de plano projectivo en $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ Sea $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ la coordenada homogénea en $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$. Un plano projectivo $\Pi \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ está dado por

$$\Pi = \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{K}) \mid a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\},$$

con $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{K}^4 \setminus \{0\}$, nuevamente definido hasta multiplicación por un escalar no nulo.

Definición 2.3 (Colinealidad en $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$). Sean

$$P_1 = [x_0^{(1)} : x_1^{(1)} : x_2^{(1)}], \quad P_2 = [x_0^{(2)} : x_1^{(2)} : x_2^{(2)}], \quad P_3 = [x_0^{(3)} : x_1^{(3)} : x_2^{(3)}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}),$$

y sean $v_i = (x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \in \mathbb{K}^3$ representantes no nulos. Se dice que P_1, P_2, P_3 son

⁶ FORTUNA, E., et al. *Projective Geometry*. Springer, 2016.

colineales si existen representantes tales que pertenecen a un mismo plano que pasa por el origen, es decir, si los vectores v_1, v_2, v_3 generan un subespacio lineal de dimensión ≤ 2 .

En particular, dados dos puntos P_1 y P_2 un punto P_3 es colineal con los puntos anteriores, si su representante v_3 es combinación lineal de los otros dos representantes.

Teorema 2.1 (Criterio algebraico de colinealidad). *Con la notación anterior, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- a. Los puntos P_1, P_2, P_3 son colineales.
- b. $\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 0$.

Demostración. Una recta proyectiva corresponde a un subespacio lineal de dimensión 2 en \mathbb{K}^3 . Decir que tres puntos pertenecen a una misma recta proyectiva es exactamente lo mismo que decir que sus representantes están contenidos en un mismo subespacio lineal de dimensión ≤ 2 , lo que equivale a que la matriz cuyas filas son los representantes de esos tres puntos tiene determinante cero (o, en términos equivalentes, rango ≤ 2). \square

Definición 2.4 (Coplanaridad en $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$). Sean

$$Q_1 = [y_0^{(1)} : y_1^{(1)} : y_2^{(1)} : y_3^{(1)}], \dots, Q_4 = [y_0^{(4)} : y_1^{(4)} : y_2^{(4)} : y_3^{(4)}] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{K}),$$

con representantes $w_i \in \mathbb{K}^4$. Se dice que Q_1, \dots, Q_4 son coplanares si pertenecen a un mismo plano proyectivo, es decir, si los w_i generan un subespacio lineal de dimensión ≤ 3 .

En particular, dados tres puntos Q_1, Q_2, Q_3 un punto Q_4 es coplanar con los puntos anteriores, si su representante w_4 es combinación lineal de los otros tres representantes.

Teorema 2.2 (Criterio algebraico de coplanaridad). *Con la notación anterior, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- a. Los puntos Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 son coplanares.
- b. $\det \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix} = 0$.

Demostración. Un plano proyectivo corresponde a un subespacio lineal de dimensión 3 en \mathbb{K}^4 . Decir que cuatro puntos pertenecen a un mismo plano proyectivo es exactamente lo mismo que decir que sus representantes están contenidos en un mismo subespacio lineal de dimensión ≤ 3 , lo que equivale a que la matriz cuyas filas son los representantes de esos cuatro puntos tiene determinante cero (o, en términos equivalentes, rango ≤ 3).
□

Definición 2.5. Sea \mathbb{K} un cuerpo. Se define la característica de \mathbb{K} , denotada por $\text{car}(\mathbb{K})$, como el menor entero positivo p tal que:

$$p \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p \text{ veces}} = 0,$$

donde 1 representa el elemento neutro multiplicativo de \mathbb{K} . Si ningún entero positivo p satisface esta condición, se dice que \mathbb{K} tiene característica cero.

2.2. Teorema del cuadrilátero completo en la geometría proyectiva

Teorema 2.3. En el plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$ sobre un cuerpo \mathbb{K} de $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, considere D_{xy} , como la recta que pasa por los puntos x y y . Si se toman cuatro puntos a, b, c y d que formen una referencia proyectiva y

$$\begin{aligned} e &= D_{ab} \cap D_{cd} & g &= D_{ad} \cap D_{bc} \\ f &= D_{ac} \cap D_{bd} & h &= D_{bc} \cap D_{ef} \end{aligned}$$

Entonces b, c, g, h pertenecen a una recta proyectiva. Además $[b, c; g, h] = -1$.

La restricción $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ en el enunciado del Teorema 2.3 es esencial porque el teorema establece que cuatro puntos b, c, g, h en una recta proyectiva satisfacen $[b, c; g, h] = -1$. En un cuerpo de característica 2, se tiene $-1 = 1$. Una razón doble igual a 1 indica $g = h$ y ya no se tendría una referencia proyectiva.

El objetivo es demostrar el teorema anterior a detalle haciendo uso de los elementos teóricos de la geometría proyectiva estudiados.

Demostración. Tomando cuatro puntos a, b, c y d que forman una referencia proyectiva, sin pérdida de generalidad, se toma la referencia proyectiva estándar, dada por:

$$a = [1 : 0 : 0], b = [0 : 1 : 0], c = [0 : 0 : 1] \text{ y } d = [1 : 1 : 1]$$

Se necesitan las ecuaciones de las rectas, $D_{ab}, D_{cd}, D_{ac}, D_{bd}, D_{ad}$ y D_{bc} , empezando por D_{ab} , que resulta de calcular el determinante de la matriz con filas dadas por los vectores $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ y (x_0, x_1, x_2) e igualarlo a 0 ya que cuando esto ocurre, quiere decir que la tercera fila es combinación lineal de las otras dos. Es decir $[x_0 : x_1 : x_2]$ pertenecerá a la recta D_{ab} .

Así:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow x_2 = 0$$

luego,

$$D_{ab} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) | x_2 = 0\}$$

Repitiendo el proceso para las demás, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow x_0 = x_1$$

$$D_{cd} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) | x_0 = x_1\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow x_1 = 0$$

$$D_{ac} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) | x_1 = 0\}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow x_0 = x_2$$

$$D_{bd} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) | x_0 = x_2\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$D_{ad} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid x_1 = x_2\}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow x_0 = 0$$

$$D_{bc} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid x_0 = 0\}$$

Con lo anterior, se puede determinar las intersecciones e, f, g y h de las rectas anteriores, empezando por e que resulta de resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_0 = x_1 \end{cases}$$

luego,

$$e = [1 : 1 : 0].$$

Repitiendo el proceso para los demás, se obtiene:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_0 = x_2 \end{cases} \text{ esto implica que: } f = [1 : 0 : 1].$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_0 = 0 \end{cases} \text{ esto implica que: } g = [0 : 1 : 1].$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = x_1 + x_2 \end{cases} \text{ esto implica que: } h = [0 : -1 : 1].$$

Como $x_0 = 0$ para b, c, g y h entonces son colineales (Pertenece a la recta $L = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0\}$). Además note que

$$\pi(\mathbf{b}) = \pi((0, 1, 0)) = [0 : 1 : 0] = b$$

$$\pi(\mathbf{c}) = \pi((0, 0, 1)) = [0 : 0 : 1] = c$$

$$\pi(\mathbf{b+c}) = \pi((0, 1, 1)) = [0 : 1 : 1] = g$$

$$\pi(-\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \pi((0, -1, 1)) = [0 : -1 : 1] = h$$

por lo que $\rho = -1 = [b, c; g, h]$

□

3. Principio de dualidad

Tras analizar el teorema y su demostración, a continuación, se profundizará en las simetrías que existen entre puntos y rectas en el enunciado de ese teorema. Para tales fines se necesita estudiar de otros conceptos fundamentales de la geometría proyectiva. Cabe destacar que la demostración del teorema del cuadrilátero completo, aunque sirvió como punto de partida para adentrarse en este campo, solo se abarcaron los elementos necesarios para comprender ese teorema específico.

Es posible estudiar el plano proyectivo desde una perspectiva más axiomática. Para esto, se tendrá presente el capítulo 14.1 de Coxeter⁷, aunque adaptado en estilo y notación al contexto presente.

Axioma 3.1. *Dos puntos diferentes cualesquiera están unidos por una única recta.*

Axioma 3.2. *Dos rectas cualesquiera se intersecan en por lo menos un punto.*

Axioma 3.3. *Existen cuatro puntos, tales que tres de ellos no son colineales.*

Axioma 3.4. Axioma de Fano *Los tres puntos diagonales de un cuadrángulo completo no son colineales nunca.*

Lo anterior determina una de las propiedades mas especiales del plano proyectivo, la cual es: **la dualidad**, que es la correspondencia biyectiva entre puntos y rectas que respeta **la incidencia**: un punto incide en una recta si el punto pertenece a la recta, y una recta incide en el punto si la recta pasa por el punto. En ese orden de ideas, se puede enunciar:

Teorema 3.1. *Dos rectas diferentes cualesquiera se intersecan en un único punto.*

⁷ COXETER, H.S.M. *Introduction to Geometry*. 2nd ed. Wiley, 1969.

Teorema 3.2. *Dos puntos cualesquiera están unidos por al menos una recta.*

Note que teorema 3.1 es la proposición dual del axioma 3.1, que fácilmente se demuestra usando el axioma 3.2. Análogamente se tiene lo mismo para el teorema 3.2 que es la proposición dual del axioma 3.2 y se demostraría usando el axioma 3.1.

El principio de dualidad afirma que si una proposición verdadera sobre únicamente los términos punto, recta y la relación de incidencia, entonces la proposición dual, obtenida de la original intercambiando la palabras puntos por rectas, intersección por unión, concurrentes por colineales, haz por hilera, n-ángulo por n-latero, etc, también es verdadera.

Para demostrar esto solo se necesita utilizar los anteriores axiomas. Por lo que se puede demostrar mecánicamente el teorema dual de uno original dualizando cada paso de la demostración original.

Ejemplo 3.1. *El dual del axioma 3.3 afirma la existencia de un cuadrilátero completo. Si A, B, C, D son los vértices de un cuadrángulo cuyos lados son*

$$a = \overline{AB}, \quad b = \overline{AC}, \quad c = \overline{CD}, \quad d = \overline{BD}, \quad e = \overline{AD}, \quad f = \overline{BC}$$

De manera ilustrativa:

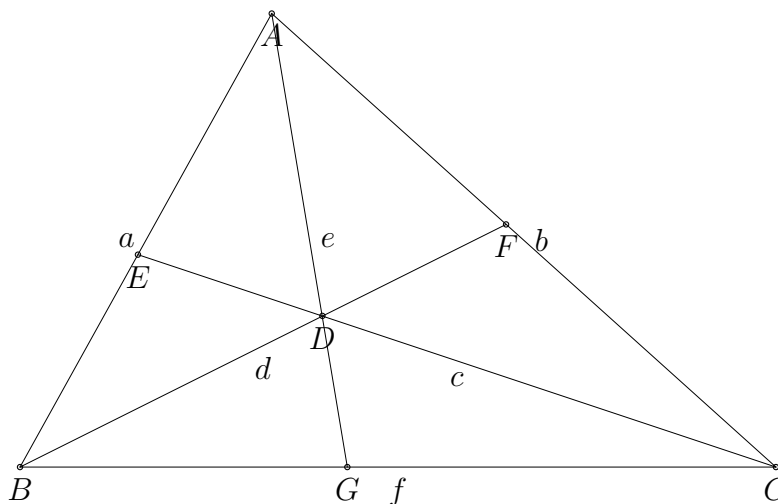


Figura 6. Ilustración de dualidad

Entonces a, b, c, d son las rectas de un cuadrilátero cuyos vértices son

$$A = a \cap b, B = a \cap f, C = b \cap f, D = c \cap d, E = a \cap c, F = b \cap d.$$

Donde las tres rectas que unen pares de vértices opuestos se denominan **diagonales**.

Por el axioma 3.4 lo siguiente:

Los tres puntos diagonales $E = a \cap c, F = b \cap d, G = e \cap f$ no son colineales. (7)

Por el dual, se tendría que las tres rectas diagonales de un cuadrilátero nunca concurren. Si ese cuadrilátero es el formado por a, b, c y d y lo anterior es falso, entonces sus diagonales

$$e = \overline{AD}, f = \overline{BC}, g = \overline{EF}$$

concurren, por lo que el punto G estaría en la recta g , lo cual contradice (7). \square

Materializando lo anterior para el contexto del cuadrilátero completo se tendría:

Teorema del cuadrilátero completo

Dados cuatro puntos A, B, C y D , tales que tres de ellos no sean colineales y sean

$$E = \overline{AB} \cap \overline{CD}, F = \overline{AC} \cap \overline{BD},$$

$$G = \overline{AD} \cap \overline{BC} \text{ y } H = \overline{BC} \cap \overline{EF},$$

entonces H es conjugado armónico de G respecto a B y C .

Teorema del cuadrángulo completo

Dadas cuatro rectas a, b, c y d , tales que tres de ellas no sean concurrentes y sean

$$e = \overline{a \cap b} \cap \overline{c \cap d}, f = \overline{a \cap c} \cap \overline{b \cap d},$$

$$g = \overline{a \cap d} \cap \overline{b \cap c} \text{ y } h = \overline{b \cap c} \cap \overline{e \cap f},$$

entonces h es conjugado armónico de g respecto a b y c .

Donde la definición de razón doble de cuatro rectas concurrentes es:

Definición 3.1. Dadas b, c, g y h cuatro rectas distintas que pasan por un mismo punto O . Sea l una recta cualquiera que no pase por O y que corte a b, c, g, h en los puntos B, C, G, H , respectivamente. Se define la **razón doble de las rectas** $[b, c; g, h]$ como la

razón doble de los puntos $[B, C; G, H]$, esto es:

$$[b, c; g, h] = [B, C; G, H] = \frac{BG}{CG} \frac{CH}{BH}.$$

El valor de esta razón es independiente de la recta l elegida. Además, cuando se cumple que

$$[b, c; g, h] = -1,$$

se dice que h es **conjugado armónico** de g respecto a b y c .

Así se tiene que el teorema del cuadrángulo completo al ser el dual del original, también es cierto.

Habiendo abordado la dualidad desde una perspectiva axiomática, se cambia ahora a una formulación algebraica que permita cálculos y construcciones explícitas. Se introduce la transformación proyectiva, entendida como la correspondencia entre espacios proyectivos que proviene de aplicaciones lineales inyectivas en los espacios subyacentes, y utiliza su representación algebraica para traducir las propiedades axiomáticas en enunciados demostrables.

Los subcapítulos presentados a continuación tienen como principales fuentes bibliográficas los capítulos 1.2.2, 1.2.3, 1.4.2 y 1.4.4 de Fortuna et al.⁸, el capítulo 5.5 de Gallier⁹ y el capítulo 3F de Axler¹⁰.

3.1. Preliminares

Definición 3.2. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo \mathbb{K} . Se define como **transformación proyectiva** a la aplicación $g : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$, si existe una aplicación lineal inyectiva $f : V \rightarrow W$ tal que:

⁸ FORTUNA, E.; FRIGERIO, R.; PARDINI, R. *Projective Geometry*. Springer, 2016.

⁹ GALLIER, Jean. *Geometric Methods and Applications*. Springer, 2011.

¹⁰ AXLER, Sheldon. *Linear Algebra Done Right*. Springer, 2024.

$$g([\mathbf{x}]) = [f(\mathbf{x})], \forall \mathbf{x} \in V - \{0\}.$$

Y se denota $g = \overline{f}$.

Si f es un isomorfismo lineal entonces g es un **isomorfismo proyectivo**. Dos espacios proyectivos sobre un cuerpo \mathbb{K} se dicen **isomorfos** si existe un isomorfismo proyectivo entre ellos; esto ocurre si, y solo si, tienen la misma dimensión.

3.2. Espacio Vectorial y Espacio Dual Dados un cuerpo \mathbb{K} y un espacio vectorial de dimensión finita V sobre \mathbb{K} . Se define como **espacio dual** al espacio formado por las aplicaciones lineales de V a \mathbb{K} . Y se denota por

$$V^* = \{\phi : V \rightarrow \mathbb{K} \mid \phi \text{ es lineal}\}$$

Para todo \mathbf{x} y $\mathbf{y} \in V$ y k y $k' \in \mathbb{K}$ se tiene:

$$\phi(k\mathbf{x} + k'\mathbf{y}) = k\phi(\mathbf{x}) + k'\phi(\mathbf{y}),$$

donde los ϕ son elementos de V^* .

Ejemplo 3.2. Considere el espacio vectorial \mathbb{R}^2 sobre el cuerpo \mathbb{R} . Dicho espacio tiene como base a los vectores:

$$\mathbf{e}_0 = (1, 0), \quad \mathbf{e}_1 = (0, 1).$$

Se puede afirmar que los funcionales ϵ^0, ϵ^1 que satisfacen

$$\epsilon^0(\mathbf{e}_0) = 1, \quad \epsilon^0(\mathbf{e}_1) = 0, \quad \epsilon^1(\mathbf{e}_0) = 0, \quad \epsilon^1(\mathbf{e}_1) = 1$$

son una base de su espacio dual, \mathbb{R}^{2*} y se denomina como **la base dual**.

Así, cada elemento de \mathbb{R}^{2*} se puede escribir como:

$$\phi = a\epsilon^0 + b\epsilon^1, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

De manera más explícita, tome el vector $\mathbf{x} = (x_0, x_1)$, entonces,

$$\epsilon^0(x_0, x_1) = x_0 \text{ y } \epsilon^1(x_0, x_1) = x_1$$

por tanto,

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi((x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1))$$

por linealidad,

$$\phi(x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1) = \phi(x_0 \mathbf{e}_0) + \phi(x_1 \mathbf{e}_1) = \phi(\mathbf{e}_0)x_0 + \phi(\mathbf{e}_1)x_1 = \phi(\mathbf{e}_0)\epsilon^0(x_0, x_1) + \phi(\mathbf{e}_1)\epsilon^1(x_0, x_1)$$

Así tomando $a = \phi(\mathbf{e}_0)$ y $b = \phi(\mathbf{e}_1)$ se obtiene la expresión previa $\phi = a\epsilon^0 + b\epsilon^1$. En particular, se puede escribir a ϕ como:

$$\phi = (a, b)$$

Donde (a, b) sería el sistema de coordenadas para $\phi \in \mathbb{R}^{2*}$ en la base (ϵ^0, ϵ^1) .

Ejemplo 3.3. Generalizando para \mathbb{R}^n . Brevemente, la base de este espacio es $\{\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_{n-1}\}$, donde cada coordenada del vector \mathbf{e}_j es 0 menos la j -ésima coordenada que es 1. Por lo anterior, es claro que la base dual es $\{\epsilon^0, \dots, \epsilon^{n-1}\}$, donde cada funcional ϵ^j "extrae" la coordenada j -ésima correspondiente de un vector de \mathbb{R}^n . Así todo ϕ de \mathbb{R}^{n*} se puede escribir de esta forma:

$$\phi = k_0\epsilon^0 + \dots + k_{n-1}\epsilon^{n-1}, \quad k_0, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto se puede concluir que todo ϕ de \mathbb{R}^{n*} puede escribirse como $\phi = (k_0, \dots, k_{n-1})$. De ese modo, se puede ver a los funcionales ϕ del espacio dual \mathbb{R}^{n*} como vectores columna de \mathbb{R}^n .

Observación 3.1. De lo anterior se puede deducir que hay un isomorfismo lineal entre todo espacio vectorial V y su respectivo espacio dual V^* . Por lo que si un espacio vectorial

V tiene dimensión $n + 1$, $\dim V = n + 1$; entonces su espacio dual V^* también tiene dimensión $n + 1$, $\dim V^* = n + 1 = \dim V$.

El isomorfismo mencionado en la Observación 3.1 es el que asigna a cada vector $\mathbf{x} \in V$ su correspondiente funcional ϕ en el espacio dual V^* , que actúa extrayendo sus coordenadas en la base dual. Es decir, si la base de V es $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ y la base dual correspondiente es $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$, el isomorfismo está dado por:

$$f: V \rightarrow V^*, \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}^i \mathbf{e}_i \mapsto f(\mathbf{x}) = \phi_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}^i \epsilon^i.$$

Así, la i -ésima coordenada de \mathbf{x} en V se corresponde con la i -ésima coordenada de $\phi_{\mathbf{x}}$ en V^* , mostrando el isomorfismo entre ambos espacios.

3.3. Espacio Proyectivo Dual Dados un cuerpo \mathbb{K} y un espacio vectorial de dimensión finita V sobre \mathbb{K} , denotando por V^* su espacio dual. Considere la relación de equivalencia \sim en $V^* - \{0\}$ definida como:

$$a \sim b \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{K} - \{0\} : a = \lambda b).$$

Se define como **espacio proyectivo dual** al espacio proyectivo $\mathbb{P}(V^*)$, deducido del espacio dual V^* como las clases de equivalencia generadas por \sim . Y se denota como

$$\mathbb{P}(V^*) = (V^* - \{0\}) / \sim.$$

Para todo $\phi \in V^*$ se denota la clase de ϕ como:

$$\varphi = \{\lambda \phi, \lambda \in \mathbb{K}^*\},$$

Así, por definición, existe una **aplicación canónica** de $V^* - \{0\}$ sobre $\mathbb{P}(V^*)$ dada por:

$$\begin{aligned} \pi': V^* - \{0\} &\rightarrow \mathbb{P}(V^*) \\ \phi &\rightarrow \pi'(\phi) = \varphi. \end{aligned}$$

Si $\dim V = n + 1$, como $\mathbb{P}(V^*)$ es isomórfico proyectivamente a $\mathbb{P}(V)$ entonces tiene dimensión n .

En resumen se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h} & V^* \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ \mathbb{P}(V) & & \mathbb{P}(V^*) \end{array}$$

Por otro lado, cabe destacar que si se tiene $h : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal inyectiva que induce g , que es una aplicación proyectiva, entonces el conjunto de aplicaciones lineales de V a W que inducen a g coincide con la familia $\{\lambda h \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\}$.

Así se puede completar el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} V = \{\mathbf{x}\} & \xrightarrow{h} & V^* = \{\phi_{\mathbf{x}}\} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ \mathbb{P}(V) = \{x \mid x = \{\lambda \mathbf{x}\}\} & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}(V^*) = \{\varphi \mid \varphi = \{\lambda \phi_{\mathbf{x}}\}\} \end{array}$$

El anterior diagrama permite comprender de manera explícita el isomorfismo entre $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{P}(V^*)$

3.4. Principio de dualidad A continuación, se presentarán definiciones elementales para establecer el principio de dualidad.

Definición 3.3. Dado un subespacio W , con $\dim W = k$ de un espacio vectorial V , $\dim V = n$. Se define como **anulador** de W al conjunto de todas las formas lineales ϕ en el espacio dual V^* tales que ϕ es cero restringido en W , se denota por:

$$W^0 = \{\phi \in V^* \mid \phi|_W = 0\}$$

Observación 3.2. W^0 es un subespacio lineal de V^* de dimensión $n - k$ y $(W^0)^0 = W$.

Propiedades 3.1. Para W_1 y W_2 de V^* se verifican las siguientes propiedades:

(I) $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$.

Demostración. $(W_1 + W_2)^0 \subseteq W_1^0 \cap W_2^0$:

Sea $\phi \in (W_1 + W_2)^0$. Entonces $\phi(w) = 0$ para todo $w \in W_1 + W_2$. En particular, para todo $w_1 \in W_1 \subseteq W_1 + W_2$ se tiene $\phi(w_1) = 0$, luego $\phi \in W_1^0$. Análogamente, para todo $w_2 \in W_2 \subseteq W_1 + W_2$ se tiene $\phi(w_2) = 0$, luego $\phi \in W_2^0$. Por tanto, $\phi \in W_1^0 \cap W_2^0$.

$W_1^0 \cap W_2^0 \subseteq (W_1 + W_2)^0$:

Sea $\phi \in W_1^0 \cap W_2^0$. Entonces $\phi(w_1) = 0$ para todo $w_1 \in W_1$ y $\phi(w_2) = 0$ para todo $w_2 \in W_2$. Para cualquier $w \in W_1 + W_2$, existen $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tales que $w = w_1 + w_2$. Luego:

$$\phi(w) = \phi(w_1 + w_2) = \phi(w_1) + \phi(w_2) = 0 + 0 = 0.$$

Por tanto, $\phi \in (W_1 + W_2)^0$.

De ambas inclusiones se sigue la igualdad $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$. □

(II) $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$.

Demostración. $W_1^0 + W_2^0 \subseteq (W_1 \cap W_2)^0$:

Sea $\phi \in W_1^0 + W_2^0$. Entonces existen $\phi_1 \in W_1^0$ y $\phi_2 \in W_2^0$ tales que $\phi = \phi_1 + \phi_2$. Para cualquier $w \in W_1 \cap W_2$, se tiene que $w \in W_1$ y $w \in W_2$. Dado que $\phi_1 \in W_1^0$, $\phi_1(w) = 0$, y como $\phi_2 \in W_2^0$, $\phi_2(w) = 0$. Por lo tanto:

$$\phi(w) = \phi_1(w) + \phi_2(w) = 0 + 0 = 0.$$

Esto implica que ϕ se anula en todo $w \in W_1 \cap W_2$, es decir, $\phi \in (W_1 \cap W_2)^0$. Así, $W_1^0 + W_2^0 \subseteq (W_1 \cap W_2)^0$.

$(W_1 \cap W_2)^0 \subseteq W_1^0 + W_2^0$:

Sea $n = \dim V$. Para cualquier subespacio W de V , se tiene $\dim W^0 = n - \dim W$. Además, nótese que $W_1^0 \cap W_2^0 = (W_1 + W_2)^0$, ya que un funcional se anula en W_1 y W_2 si y solo si se anula en $W_1 + W_2$.

Se calcula la dimensión de $W_1^0 + W_2^0$:

$$\begin{aligned}\dim(W_1^0 + W_2^0) &= \dim W_1^0 + \dim W_2^0 - \dim(W_1^0 \cap W_2^0) \\ &= (n - \dim W_1) + (n - \dim W_2) - \dim(W_1 + W_2)^0 \\ &= 2n - \dim W_1 - \dim W_2 - (n - \dim(W_1 + W_2)) \\ &= n - \dim W_1 - \dim W_2 + \dim(W_1 + W_2).\end{aligned}$$

Por la fórmula de la dimensión de la suma de subespacios:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}\dim(W_1^0 + W_2^0) &= n - \dim W_1 - \dim W_2 + (\dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)) \\ &= n - \dim(W_1 \cap W_2).\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\dim(W_1 \cap W_2)^0 = n - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Por lo tanto, $\dim(W_1^0 + W_2^0) = \dim(W_1 \cap W_2)^0$. Dado que ya se tiene $W_1^0 + W_2^0 \subseteq (W_1 \cap W_2)^0$, y ambos espacios tienen la misma dimensión, se concluye que $(W_1 \cap W_2)^0 \subseteq W_1^0 + W_2^0$.

De ambas inclusiones se sigue la igualdad $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$. □

Notación: El símbolo *span* denota el subespacio generado por los vectores indicados, es decir, el conjunto de todas sus combinaciones lineales.

Ejemplo 3.4. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $W = \text{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \subset V$.

El espacio dual V^* es el conjunto de todas las formas lineales $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Se quiere describir el anulador $W^0 \subset V^*$, es decir:

$$W^0 = \{\phi \in V^* \mid \phi(w) = 0 \text{ para todo } w \in W\}.$$

Dado que los vectores de W tienen su tercera componente igual a cero, cualquier

forma lineal que se anule en W debe depender únicamente de la tercera coordenada. Por tanto, W^0 está generado por la forma lineal

$$\phi \text{ tal que } \phi(x_0, x_1, x_2) = x_2, \phi = \epsilon^2$$

Así,

$$W^0 = \text{span}\{\epsilon^2\} \subset (\mathbb{R}^3)^*.$$

Definición 3.4. Dado un subconjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{P}(V)$. Se define como **espacio generado por A** al subespacio proyectivo obtenido al intersectar todos los subespacios de $\mathbb{P}(V)$ que contienen a A . Y se denota por:

$$L(A) = \cap \{S \subseteq \mathbb{P}(V) \mid A \subseteq S\}.$$

Si $A = S_1 \cup S_2$ con $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$, $S_2 = \mathbb{P}(W_2)$, el subespacio generado por A se denotará como $L(S_1, S_2)$ y se llamará la **unión de S_1 y S_2** ; se denotará por $L(P_1, \dots, P_m)$ al subespacio generado por los puntos P_1, \dots, P_m .

Observación 3.3. Note que

$$L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$$

Demostración. $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$:

Como $W_1 \subseteq W_1 + W_2$ y $W_2 \subseteq W_1 + W_2$, se sigue que $S_1 = \mathbb{P}(W_1) \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$ y $S_2 = \mathbb{P}(W_2) \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$. Por tanto, $\mathbb{P}(W_1 + W_2)$ es un subespacio proyectivo que contiene a $S_1 \cup S_2$. Por la definición de $L(S_1, S_2)$ como intersección de todos los subespacios proyectivos que contienen a $S_1 \cup S_2$, la intersección está contenida en cualquiera de esos subespacios, en particular:

$$L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2).$$

$\mathbb{P}(W_1 + W_2) \subseteq L(S_1, S_2)$:

Sea S un subespacio proyectivo arbitrario que contenga a $S_1 \cup S_2$. Entonces $S = \mathbb{P}(U)$ para algún subespacio vectorial $U \subseteq V$, y $S_1 \subseteq \mathbb{P}(U)$ es decir $\mathbb{P}(W_1) \subseteq \mathbb{P}(U)$. Se toman $v \in W_1$, $v \neq 0$. Entonces la clase proyectiva $[v] \in \mathbb{P}(W_1) \subseteq \mathbb{P}(U)$, por lo que existe $u \in U \setminus \{0\}$ y

$\lambda \in \mathbb{K}^\times$ con $u = \lambda v$; por tanto, $v = \lambda^{-1}u \in U$. Así, $W_1 \subseteq U$. Análogamente, $W_2 \subseteq U$. De aquí se sigue que $W_1 + W_2 \subseteq U$, y por tanto:

$$\mathbb{P}(W_1 + W_2) \subseteq \mathbb{P}(U) = S.$$

Como S era un subespacio proyectivo arbitrario que contenía a $S_1 \cup S_2$, la inclusión anterior muestra que $\mathbb{P}(W_1 + W_2)$ está contenida en la intersección de todos esos S , es decir:

$$\mathbb{P}(W_1 + W_2) \subseteq L(S_1, S_2).$$

De (i) y (ii) se obtiene la igualdad buscada:

$$L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2).$$

□

Sean $P_1 = [v_1]$ y $P_2 = [v_2]$ dos puntos distintos en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$, donde $v_1, v_2 \in V \setminus \{0\}$ son representantes homogéneos. El subespacio generado por ellos es $L(P_1, P_2)$ y es el menor subespacio que los contiene. Como $P_1 \neq P_2$, los vectores v_1 y v_2 no son proporcionales, es decir, son linealmente independientes. Entonces, el subespacio lineal

$$W = \text{span}\{v_1, v_2\} \subset V$$

tiene dimensión 2. Este subespacio es el único subespacio de V de dimensión 2 que contiene simultáneamente a v_1 y v_2 , ya que cualquier otro subespacio de dimensión 2 que los contenga debe coincidir con W .

Con esto, se ha demostrado el siguiente teorema:

Teorema 3.3. *Dos puntos diferentes cualesquiera están unidos por una única recta proyectiva.*

Note que este enunciado es el axioma 3.1 de la geometría del plano proyectivo.

Definición 3.5. Sean $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$ y $S_2 = \mathbb{P}(W_2)$ subespacios proyectivos de $\mathbb{P}(V)$. Los subespacios S_1 y S_2 se dicen **incidentales** si $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, y **disjuntos** si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Observación 3.4. *Note que*

$$S_1 \cap S_2 = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$$

Demostración. $S_1 \cap S_2 \subseteq \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$:

Sea $[v] \in S_1 \cap S_2$. Entonces $[v] \in \mathbb{P}(W_1)$ y $[v] \in \mathbb{P}(W_2)$; por tanto existe $v \neq 0$ tal que $v \in W_1$ y $v \in W_2$. De ello se sigue $v \in W_1 \cap W_2$, y por ende $[v] \in \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$. Esto prueba la inclusión indicada.

$\mathbb{P}(W_1 \cap W_2) \subseteq S_1 \cap S_2$:

Sea $[v] \in \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$. Entonces $v \neq 0$ y $v \in W_1 \cap W_2$, de modo que $v \in W_1$ y $v \in W_2$. Por definición de proyectivización se tiene $[v] \in \mathbb{P}(W_1) = S_1$ y $[v] \in \mathbb{P}(W_2) = S_2$, luego $[v] \in S_1 \cap S_2$. Esto prueba la inclusión contraria.

Combinando (i) y (ii) se obtiene la igualdad

$$S_1 \cap S_2 = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2).$$

□

A continuación, se enuncia una fórmula fundamental que se utiliza para estudiar intersecciones en espacios proyectivos.

Fórmula de Grassmann para espacios proyectivos: Sea $\mathbb{P}(V)$ un espacio proyectivo y sean $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$. Entonces,

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2).$$

Demostración. Sea $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$ y $S_2 = \mathbb{P}(W_2)$, donde $W_1, W_2 \subseteq V$ tal que $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$. Se sabe que la dimensión de un subespacio proyectivo $\mathbb{P}(W)$ es $\dim W - 1$. Se aplica la fórmula de Grassmann en espacios vectoriales:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Ahora se traslada esta fórmula al contexto proyectivo. Primero, se tiene que:

$$\dim(S_1) = \dim(W_1) - 1,$$

$$\dim(S_2) = \dim(W_2) - 1,$$

$$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim(W_1 \cap W_2) - 1,$$

$$\dim(L(S_1, S_2)) = \dim(W_1 + W_2) - 1,$$

(Las últimas dos ecuaciones son consecuencia de las observaciones 3.3 y 3.4.)

Así, sustituyendo en la fórmula de Grassmann se obtiene:

$$\dim(L(S_1, S_2)) = \dim(W_1 + W_2) - 1 = [\dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)] - 1.$$

Reorganizando términos:

$$\dim(L(S_1, S_2)) = (\dim(W_1) - 1) + (\dim(W_2) - 1) - (\dim(W_1 \cap W_2) - 1),$$

lo cual equivale a:

$$\dim(L(S_1, S_2)) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2).$$

□

Lo anterior implica que si dos subespacios $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$, $S_2 = \mathbb{P}(W_2) \subset \mathbb{P}(V)$ cumplen que

$$\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V),$$

entonces necesariamente $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, es decir, los subespacios se intersecan.

Demostración. Sean $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$ y $S_2 = \mathbb{P}(W_2)$ subespacios proyectivos de $\mathbb{P}(V)$, donde W_1, W_2 son subespacios vectoriales de V .

Aplicando la relación entre dimensiones proyectivas y vectoriales, se obtiene:

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

Ahora, se tiene que

$$\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V),$$

y como $L(S_1, S_2)$ está contenido en $\mathbb{P}(V)$, se cumple

$$\dim \mathbb{P}(V) \geq \dim L(S_1, S_2),$$

por tanto,

$$\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim L(S_1, S_2).$$

Sustituyendo la expresión de $\dim L(S_1, S_2)$ obtenida anteriormente, se tiene:

$$\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2),$$

de donde se deduce que

$$0 \geq -\dim(S_1 \cap S_2),$$

y, en consecuencia,

$$\dim(S_1 \cap S_2) \geq 0.$$

Cabe recordar que, por convención, el conjunto vacío tiene dimensión -1 , es decir, $\dim(\emptyset) = -1$. Dado que la dimensión de la intersección es mayor o igual que 0 , se concluye que dicha intersección no puede ser vacía. Por lo tanto,

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset.$$

entonces necesariamente se intersecan. □

En particular, si se trabaja en un plano proyectivo, es decir, si $\dim(\mathbb{P}(V)) = 2$, entonces cualquier par de subespacios proyectivos de dimensión 1 (es decir, rectas proyectivas) satisfacen

$$\dim(S_1) = \dim(S_2) = 1 \quad \Rightarrow \quad \dim(S_1) + \dim(S_2) = 2 = \dim(\mathbb{P}(V)).$$

Con esto se ha demostrado el siguiente teorema:

Teorema 3.4. *Dos rectas proyectivas en un plano proyectivo siempre se intersecan.*

Note que este enunciado es el axioma 3.2 de la geometría del plano proyectivo.

A continuación se presenta un teorema que introduce una definición significativa para este capítulo.

Teorema 3.5. *Sea $\mathbb{P}(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n , entonces existe una biyección entre el conjunto de subespacios de dimensión k de $\mathbb{P}(V)$ y el conjunto de subespacios de dimensión $n - k - 1$ de $\mathbb{P}(V)^*$.*

Demostración. Se considera la función δ que va de los subespacios de dimensión k de $\mathbb{P}(V)$ a los subespacios de dimensión $n - k - 1$ de $\mathbb{P}(V)^*$, dada por $\delta(\mathbb{P}(W)) = \mathbb{P}(W^0)$.

Entonces:

$$\dim \mathbb{P}(W) + \dim \mathbb{P}(W^0) = \dim W - 1 + \dim W^0 - 1.$$

Por propiedades de la dimensión del espacio anulador ($\dim V = \dim W + \dim W^0$):

$$\dim \mathbb{P}(W) + \dim \mathbb{P}(W^0) = \dim V - 1 - 1$$

$$\dim \mathbb{P}(W) + \dim \mathbb{P}(W^0) = \dim \mathbb{P}(V) - 1$$

$$\dim \mathbb{P}(W^0) = \dim \mathbb{P}(V) - \dim \mathbb{P}(W) - 1$$

$$\dim \mathbb{P}(W^0) = n - k - 1$$

Por lo tanto, la función δ está bien definida.

Inyectividad. Supongamos que

$$\delta(\mathbb{P}(W_1)) = \delta(\mathbb{P}(W_2)).$$

Entonces,

$$\mathbb{P}(W_1^0) = \mathbb{P}(W_2^0) \implies W_1^0 = W_2^0.$$

Por propiedades del espacio anulador ($(W^0)^0 = W$). Por tanto,

$$W_1 = (W_1^0)^0 = (W_2^0)^0 = W_2,$$

lo cual demuestra que δ es inyectiva.

Sobreyectividad. Sea $H \subset V^*$ un subespacio de dimensión $n - k$. Se define $W =$

$H^0 \subset V$. Entonces se cumple que

$$W^0 = (H^0)^0 = H.$$

Por tanto,

$$\delta(\mathbb{P}(W)) = \mathbb{P}(W^0) = \mathbb{P}(H),$$

lo que muestra que cada subespacio de dimensión $n - k - 1$ en $\mathbb{P}(V^*)$ es imagen de algún subespacio de dimensión k en $\mathbb{P}(V)$. Así, δ es sobreyectiva.

Dado que δ es inyectiva y sobreyectiva, se concluye que es una biyección. \square

Definición 3.6. Se define como **biyección canónica dual** a la aplicación que tiene como dominio el conjunto de los subespacios de $\mathbb{P}(V)$ de dimensión k y como codominio el conjunto de subespacios de $\mathbb{P}(V^*)$ de dimensión $n - k - 1$, que asocia a cada subespacio $S = \mathbb{P}(W)$ el subespacio $\mathbb{P}(W^0)$. Y se denota por:

$$\begin{aligned} \delta : \{ \mathbb{P}(V) \supseteq S = \mathbb{P}(W) \mid \dim S = k \} &\rightarrow \{ \mathbb{P}(W^0) \subseteq \mathbb{P}(V^*) \} \\ S &\rightarrow \delta(S) = \mathbb{P}(W^0). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5. Se considera el espacio $V = \mathbb{R}^3$ y el subespacio $W = \text{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \subset V$. Entonces, $\dim(W) = 2$, por lo tanto $S = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ es un subespacio proyectivo de dimensión $k = 1$.

Se quiere encontrar la imagen de S bajo la biyección canónica dual, es decir, $\delta(S) = \mathbb{P}(W^0) \subset \mathbb{P}((\mathbb{R}^3)^*)$.

Como W está generado por vectores cuya tercera coordenada es cero, las formas lineales que se anulan en W deben depender solamente de la tercera variable. Así, W^0 está generado por las formas lineales:

$$\phi \text{ tal que } \phi(x_0, x_1, x_2) = x_2, \quad \phi = \epsilon^2$$

Y su dimensión es 1. Por tanto, $W^0 = \text{span}\{(\epsilon^2)\} \subset (\mathbb{R}^3)^*$, lo cual implica que el subespacio proyectivo $\delta(S) = \mathbb{P}(W^0)$ tiene dimensión 0.

Propiedades 3.2. Para cualesquiera subespacios proyectivos $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$ y $S_2 = \mathbb{P}(W_2)$ de $\mathbb{P}(V)$, δ verifica las siguientes propiedades:

(I) (Inversión de inclusiones) Si $S_1 \subseteq S_2$, entonces

$$\delta(S_2) \subseteq \delta(S_1).$$

(II) (Intersección \leftrightarrow suma proyectiva)

$$\delta(S_1 \cap S_2) = L(\delta(S_1), \delta(S_2)).$$

(III) (Suma proyectiva \leftrightarrow intersección)

$$\delta(L(S_1, S_2)) = \delta(S_1) \cap \delta(S_2).$$

Demostración. Sea $S_i = \mathbb{P}(W_i)$ ($i = 1, 2$) con $W_i \subseteq V$ subespacios vectoriales.

(i) (Inversión de inclusiones).

Supongamos $S_1 \subseteq S_2$. Entonces $\mathbb{P}(W_1) \subseteq \mathbb{P}(W_2)$, y por la relación entre proyectivización e inclusión de subespacios vectoriales se sigue $W_1 \subseteq W_2$. Sea $\phi \in W_2^0$. Por definición $\phi(w) = 0$ para todo $w \in W_2$; como $W_1 \subseteq W_2$ se obtiene $\phi(w) = 0$ para todo $w \in W_1$, es decir $\phi \in W_1^0$. Por tanto $W_2^0 \subseteq W_1^0$, y por la relación entre proyectivización e inclusión de subespacios vectoriales se sigue

$$\delta(S_2) = \mathbb{P}(W_2^0) \subseteq \mathbb{P}(W_1^0) = \delta(S_1).$$

Esto prueba (i).

(ii) (Dualidad entre intersección proyectiva y suma).

Por las propiedades de la proyectivización de intersecciones vistas anteriormente

$$S_1 \cap S_2 = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2),$$

y por definición

$$\delta(S_1 \cap S_2) = \mathbb{P}((W_1 \cap W_2)^0).$$

Ahora, por propiedades del anulador de un subespacio vectorial

$$(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0,$$

Aplicando proyectivización, se obtiene:

$$\mathbb{P}(W_1^0 + W_2^0) = L(\delta(S_1), \delta(S_2)) = \delta(S_1 \cap S_2).$$

Queda demostrado (ii).

(iii) (*Dualidad entre suma proyectiva e intersección*).

Por las propiedades de la proyectivización de suma vistas anteriormente

$$L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$$

y por definición

$$\delta(L(S_1, S_2)) = \mathbb{P}((W_1 + W_2)^0).$$

Ahora, por propiedades del anulador de un subespacio vectorial

$$(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0,$$

Aplicando proyectivización, se obtiene:

$$\mathbb{P}(W_1^0 \cap W_2^0) = \delta(S_1) \cap \delta(S_2) = \delta(L(S_1, S_2)).$$

que es precisamente (iii).

□

Cuando $k = n - 1$, se recupera la correspondencia uno a uno entre hiperplanos de $\mathbb{P}(V)$ y puntos de $\mathbb{P}(V^*)$; cuando $k = 0$, se obtiene una correspondencia uno a uno entre puntos de $\mathbb{P}(V)$ e hiperplanos de $\mathbb{P}(V^*)$.

La formalización algebraica de los Teoremas 3.3 y 3.4 establece un marco sólido para garantizar el principio de dualidad en el plano proyectivo: entendido como una correspondencia biyectiva entre puntos y rectas que preserva la incidencia. En

consecuencia, cada enunciado puede reinterpretarse en su forma dual y, con base en los resultados ya demostrados, formularse las proposiciones duales correspondientes a los Teoremas 3.3 y 3.4, que se presentan a continuación.

Proposiciones duales de los teoremas 3.3 y 3.4

Recordando el **Teorema 3.3** en el plano proyectivo:

Dados dos puntos proyectivos distintos P_1 y P_2 , existe una única recta $L(P_1, P_2)$ proyectiva que pasa por ambos.

Su proposición dual es:

Dadas dos rectas proyectivas distintas L_1 y L_2 , existe un único punto $P = L_1 \cap L_2$ proyectivo donde se intersecan.

Demostración. Se denota

$$L_1 = \delta(P_1), L_2 = \delta(P_2)$$

por biyectividad de δ se tiene que:

$$\delta^{-1}(L_1) = P_1, \delta^{-1}(L_2) = P_2$$

Por Teorema 3.3 hay una única recta proyectiva $L(P_1, P_2)$ que pasa por P_1 y P_2 . Así, por propiedad iii de δ

$$\delta(L(P_1, P_2)) = \delta(P_1) \cap \delta(P_2) = P = L_1 \cap L_2$$

donde P es un punto proyectivo único ya que $L(P_1, P_2)$ es única y δ es biyectiva. \square

Recordando el **Teorema 3.4** en el plano proyectivo:

Dos rectas proyectivas cualesquiera L_1 y L_2 siempre se intersecan en un punto proyectivo $P = L_1 \cap L_2$.

Su proposición dual es:

Dos puntos proyectivos cualesquiera P_1 y P_2 siempre están unidos en una recta proyectiva $L(P_1, P_2)$

Demostración. Se denota

$$P_1 = \delta(L_1), P_2 = \delta(L_2)$$

por biyectividad de δ tiene que:

$$\delta^{-1}(P_1) = L_1, \delta^{-1}(P_2) = L_2$$

Por Teorema 3.4 hay un punto proyectivo $P = L_1 \cap L_2$ en el que L_1 y L_2 siempre se intersecan. Así, por propiedad ii de δ

$$\delta(L_1 \cap L_2) = L(\delta(L_1), \delta(L_2)) = L(P_1, P_2)$$

donde $L(P_1, P_2)$ es una recta proyectiva. □

Expuesto el uso de la biyección canónica dual, se pueden establecer los otros axiomas del capítulo anterior y:

El Principio de Dualidad en el Plano Proyectivo

Si una proposición verdadera involucra únicamente los términos *punto*, *recta* y la relación de *incidencia*,

\Rightarrow

la proposición **dual**, obtenida al intercambiar las palabras *punto(s)* por *recta(s)*, *intersección* por *unión*, *concurrentes* por *colineales*, *haz por hilera*, *n-ángulo* por *n-latero*, etc, también es verdadera.

Así, con la ayuda del álgebra y los conceptos vistos en el capítulo, se puede demostrar que los duales de los mencionados axiomas y del **teorema del cuadrilátero** completo también son verdaderos.

4. Construcción de la proporción áurea a partir de secuencias armónicas

En este capítulo se aborda la construcción de la proporción áurea en el marco de la geometría proyectiva, utilizando para ello el concepto de secuencias armónicas. La idea central consiste en aplicar iteradamente la noción de conjugado armónico sobre cuaternas de puntos, lo que permite generar sucesiones con propiedades invariantes bajo transformaciones proyectivas. A partir de esta estructura se identifican distintos tipos de secuencias que conducen a la aparición de la razón áurea como un límite. Para ello, se presentan primero algunos preliminares técnicos, seguidos de la definición y análisis de secuencias de tipo 1, 2 y 3, cada una de las cuales aporta un enfoque particular en la construcción buscada.

El siguiente subcapítulo contiene definiciones que toman como fuente al capítulo 5.5 de Gallier¹¹.

4.1. Preliminares

Transformaciones proyectivas: (los grupos GL y PGL) En geometría proyectiva, las transformaciones más fundamentales son aquellas que preservan la estructura proyectiva del espacio. Estas transformaciones están estrechamente ligadas a los grupos GL y PGL, descritos a continuación.

Definición 4.1. *El grupo lineal general $GL(n, \mathbb{K})$ está formado por todas las matrices invertibles de tamaño $n \times n$ con entradas en \mathbb{K} , es decir:*

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

Este grupo actúa sobre el espacio vectorial \mathbb{K}^n mediante la multiplicación matricial.

Sin embargo, en geometría proyectiva no se trabaja directamente con vectores de \mathbb{K}^n , sino con clases de equivalencia de vectores no nulos bajo multiplicación escalar. Es decir, se consideran puntos de **espacio proyectivo** $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$, que pueden interpretarse

¹¹ GALLIER, Jean. *Geometric Methods and Applications*. Springer, 2011.

como líneas que pasan por el origen en \mathbb{K}^n . Por lo tanto, dos matrices que difieren solo por un escalar definen la misma transformación proyectiva.

Definición 4.2. El **grupo lineal general proyectivo** $\text{PGL}(n, \mathbb{K})$ se define como el cociente:

$$\text{PGL}(n, \mathbb{K}) = \text{GL}(n, \mathbb{K}) / \mathbb{K}^\times,$$

donde \mathbb{K}^\times es el grupo multiplicativo de escalares no nulos de \mathbb{K} , actuando sobre $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ por multiplicación escalar. Dos matrices en $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ representan la misma clase en $\text{PGL}(n, \mathbb{K})$ si difieren solo por un escalar.

Definición 4.3. Dada una aplicación lineal biyectiva $f : V \rightarrow V$ entre espacios vectoriales de dimensión finita, se dice que la aplicación inducida

$$\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$$

es una **proyectividad**.

Ejemplo 4.1. En el caso particular de la recta proyectiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, toda proyectividad está inducida por una aplicación lineal biyectiva

$$g : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$$

representada por una matriz invertible:

$$M(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{con } ad - bc \neq 0.$$

Obsérvese que define naturalmente una transformación en la recta proyectiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ dada por

$$[x : y] \mapsto [ax + by : cx + dy].$$

Esta correspondencia está bien definida, pues si $[x : y] = [\lambda x : \lambda y]$ para $\lambda \neq 0$, entonces $[ax + by : cx + dy] = [\lambda(ax + by) : \lambda(cx + dy)]$, de modo que la clase proyectiva no depende del representante. Así, toda matriz invertible $M(g)$ induce una **proyectividad** sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

En la carta afín donde $y \neq 0$, se identifica cada punto de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ con un elemento

$z = x/y \in \mathbb{K}$. En estas coordenadas, la aplicación anterior toma la forma racional dada por

$$c \neq 0 \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & \text{si } z \neq -\frac{d}{c}, \\ \infty, & \text{si } z = -\frac{d}{c}, \\ \frac{a}{c}, & \text{si } z = \infty, \end{cases} \quad c = 0 \begin{cases} \frac{az+b}{d} \\ \infty, & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Ya que $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K} \cup \infty$

Definición 4.4. El primer caso es conocido como **transformación de Möbius**, las cuales son transformaciones dadas de la forma:

$$f(t) = \frac{at + b}{ct + d}, \quad \text{con } ad - bc \neq 0.$$

En los casos donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, se observa que:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c}, \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{az + b}{cz + d} = \infty,$$

cuando $c \neq 0$, lo cual asegura continuidad proyectiva.

Teorema 4.1. ¹²[**TEOREMA FUNDAMENTAL DEL PLANO PROYECTIVO**] Dadas dos cuarternas de puntos en posición general A, B, C, D y A', B', C', D' en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, existe una única proyectividad $T \in \text{PGL}(3, \mathbb{R})$ que lleva uno a otro:

$$T(A) = A', \quad T(B) = B', \quad T(C) = C', \quad T(D) = D'.$$

Esto quiere decir que cualquier cuarteto de puntos proyectivos en posición general se puede transformar en otro cuarteto, también en posición general, mediante una única proyectividad.

La prueba del teorema se basa en un lema técnico, que nos da control sobre los representantes homogéneos de cuatro puntos proyectivos en posición general.

¹² Adaptado de RAMÍREZ-GALARZA, A. I.; KURI, J. S. *Introducción a la geometría avanzada*. 2002, cap. 3.5.

Lema 4.1. ¹³ Dada una cuaterna $A, B, C, D \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, en posición general, es posible encontrar representantes (vectores $a = (a_1, a_2, a_3), \dots$) tales que:

$$a = b + c + d$$

Esto quiere decir que se puede encontrar representantes en \mathbb{R}^3 tales que uno de ellos (por ejemplo a) es combinación lineal de los otros tres.

Demostración. Cuatro puntos proyectivos en posición general determinan cuatro direcciones no coplanares en \mathbb{R}^3 . En consecuencia, cualquier subconjunto de tres de estos vectores genera una base del espacio, y por tanto, el cuarto puede escribirse como combinación lineal de los otros tres. Así, existen escalares $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$a = \beta b' + \gamma c' + \delta d'.$$

Multiplicando cada vector por el escalar correspondiente, se redefinen los representantes:

$$b := \beta b', \quad c := \gamma c', \quad d := \delta d',$$

y se obtiene:

$$a = b + c + d.$$

De esta manera, se hallan representantes homogéneos tales que uno es suma de los otros tres, lo cual concluye la demostración del lema. \square

Demostración del teorema. Se aplica el lema anterior a ambos cuartetos A, B, C, D y A', B', C', D' . Se obtiene vectores representativos $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D} \in \mathbb{R}^3$ y $\bar{A}', \bar{B}', \bar{C}', \bar{D}' \in \mathbb{R}^3$ tales que:

$$\bar{A} = \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}, \quad \bar{A}' = \bar{B}' + \bar{C}' + \bar{D}'.$$

Como los vectores $\bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ forman una base de \mathbb{R}^3 (por estar en posición general), y

¹³ Adaptado de RAMÍREZ-GALARZA, A. I.; KURI, J. S. *Introducción a la geometría avanzada*. 2002, cap. 3.5.

lo mismo ocurre con $\bar{B}', \bar{C}', \bar{D}'$, existe una única matriz $M \in GL(3, \mathbb{R})$ tal que:

$$M(\bar{B}) = \bar{B}', \quad M(\bar{C}) = \bar{C}', \quad M(\bar{D}) = \bar{D}'.$$

Entonces, por linealidad:

$$M(\bar{A}) = M(\bar{B} + \bar{C} + \bar{D}) = M(\bar{B}) + M(\bar{C}) + M(\bar{D}) = \bar{B}' + \bar{C}' + \bar{D}' = \bar{A}'.$$

Por lo tanto, la transformación lineal inducida por M lleva los representantes de los puntos A, B, C, D a los de A', B', C', D' , respectivamente. Como las proyectividades en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ corresponden a clases de matrices en $GL(3, \mathbb{R})$, se concluye que la clase $[M] \in PGL(3, \mathbb{R})$ es la proyectividad buscada. \square

Con lo anterior se puede afirmar:

Teorema 4.2. *La razón doble es invariante bajo transformaciones de Möbius.*

Demostración. Considerese primero el caso en que todos los puntos z_1, z_2, z_3, z_4 son finitos. Se definen las imágenes bajo f como:

$$w_i = f(z_i) = \frac{az_i + b}{cz_i + d}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4.$$

La razón doble de los puntos w_1, w_2, w_3, w_4 está dada por:

$$(w_1, w_2; w_3, w_4) = \frac{(w_1 - w_3)(w_2 - w_4)}{(w_1 - w_4)(w_2 - w_3)}.$$

Se calculan las diferencias $w_i - w_j$ para $i \neq j$. Se tiene:

$$w_i - w_j = \frac{az_i + b}{cz_i + d} - \frac{az_j + b}{cz_j + d} = \frac{(az_i + b)(cz_j + d) - (az_j + b)(cz_i + d)}{(cz_i + d)(cz_j + d)}.$$

Desarrollando el numerador:

$$\begin{aligned} (az_i + b)(cz_j + d) - (az_j + b)(cz_i + d) &= acz_i z_j + adz_i + bcz_j + bd \\ &\quad - acz_i z_j - adz_j - bcz_i - bd \\ &= (ad - bc)(z_i - z_j). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$w_i - w_j = \frac{(ad - bc)(z_i - z_j)}{(cz_i + d)(cz_j + d)}.$$

Sustituyendo en la razón doble:

$$\begin{aligned} (w_1, w_2; w_3, w_4) &= \frac{(w_1 - w_3)(w_2 - w_4)}{(w_1 - w_4)(w_2 - w_3)} \\ &= \frac{\left(\frac{(ad-bc)(z_1-z_3)}{(cz_1+d)(cz_3+d)}\right) \left(\frac{(ad-bc)(z_2-z_4)}{(cz_2+d)(cz_4+d)}\right)}{\left(\frac{(ad-bc)(z_1-z_4)}{(cz_1+d)(cz_4+d)}\right) \left(\frac{(ad-bc)(z_2-z_3)}{(cz_2+d)(cz_3+d)}\right)}. \end{aligned}$$

Observése que los factores $(ad - bc)$ se cancelan (pues $ad - bc \neq 0$), y reorganizando los denominadores se obtiene:

$$(w_1, w_2; w_3, w_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} \cdot \frac{(cz_1 + d)(cz_4 + d)(cz_2 + d)(cz_3 + d)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)(cz_2 + d)(cz_4 + d)}.$$

Cancelando los términos comunes en el numerador y el denominador, se llega a:

$$(w_1, w_2; w_3, w_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} = (z_1, z_2; z_3, z_4).$$

Esto demuestra la invarianza para puntos finitos.

Si uno de los puntos es el punto al infinito, la demostración se completa por continuidad. Dado que las transformaciones de Möbius son homeomorfismos de la recta proyectiva y la razón doble es continua, la igualdad se extiende a todos los puntos de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. □

Antes de abordar el análisis asintótico de sucesiones mediante herramientas proyectivas, es fundamental introducir el papel que desempeñan las **transformaciones de Möbius**.

En geometría proyectiva, el espacio que se considera no es el espacio afín habitual (como \mathbb{R} o \mathbb{C}), sino el espacio proyectivo $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, que extiende la noción de punto al incluir un punto en el infinito. En este entorno, las nociones métricas absolutas pierden significado (como distancias o diferencias), y en cambio se privilegian las relaciones invariantes bajo transformaciones proyectivas, como la **razón doble**.

En este marco, cualquier sucesión numérica clásica como

$$(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$$

no puede analizarse directamente en términos proyectivos sin un procedimiento que garantice la coherencia geométrica con la estructura de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Una transformación de Möbius es un isomorfismo de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sobre sí misma, y su aplicación a una sucesión produce una nueva sucesión de puntos proyectivos:

$$P_n = f(\alpha^n).$$

El propósito del uso de esta transformación es múltiple:

- **Uniformización proyectiva:** Permite representar la sucesión original en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ de manera canónica.
- **Preservación de propiedades proyectivas:** Las transformaciones de Möbius preservan invariantes proyectivos esenciales, como la razón doble. Así, cualquier análisis realizado sobre la sucesión transformada P_n tendrá validez en la estructura de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.
- **Acceso a límites proyectivos:** Permite definir y analizar límites proyectivos y otras propiedades geométricas que no tienen sentido en el plano afín clásico.

En lo que sigue se usarán definición 1.1, definición 1.2, definición 1.3.

Definición 4.5. *Dado un par de puntos C_0, C_1 y un punto C_2 , se define recursivamente una secuencia $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que cada término C_{n+1} esté posicionado como en la definición 1.2 (Conjugado armónico) para C_n con respecto al par (C_{n-1}, C_{n-2}) . Esta secuencia se denomina **secuencia armónica generada por C_n respecto a C_{n-1} y C_{n-2} .***

Notación: El símbolo $H(A, B; C)$ denota el *conjugado armónico* del punto C con respecto a los puntos A y B .

En este capítulo se propone construir la proporción áurea a partir del estudio de secuencias armónicas en el contexto proyectivo. La construcción se basa en una sucesión

de cuaternas armónicas definidas sobre una línea proyectiva y en la aplicación iterada del concepto de conjugación armónica.

Se parte de tres puntos iniciales distintos y en posición general sobre una línea proyectiva, los cuales se denotan por P_0 , P_1 y P_2 . La elección de un cuarto punto, que permita formar una cuaterna armónica con tres puntos consecutivos, da lugar a tres posibles formas de extender la sucesión $\{P_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, cada una determinada por una regla distinta de generación armónica. Estas formas se pueden clasificar del siguiente modo:

- **Regla directa:** el punto P_{n+3} es definido como el conjugado armónico de P_n con respecto a P_{n+1} y P_{n+2} .

$$P_{n+3} := H[P_{n+1}, P_{n+2}; P_n]$$

- **Regla intermedia:** el punto P_{n+3} es definido como el conjugado armónico de P_{n+1} con respecto a P_n y P_{n+2} .

$$P_{n+3} := H[P_n, P_{n+2}; P_{n+1}]$$

- **Regla inversa:** el punto P_{n+3} es definido como el conjugado armónico de P_{n+2} con respecto a P_n y P_{n+1} .

$$P_{n+3} := H[P_n, P_{n+1}; P_{n+2}]$$

Para elegir alguna secuencia que estudiar a partir de ahora, por practicidad, se selecciona una secuencia geométrica:

$$P_n = q^n,$$

donde q es un escalar no nulo del cuerpo base.

La elección de esta forma funcional para la sucesión permite aprovechar la estructura algebraica para estudiar las condiciones necesarias para que se cumpla la relación de conjugación armónica entre los términos de la sucesión.

La presentación que sigue, incluyendo las fórmulas y los resultados cualitativos, se basa en el trabajo de Leitenberger (2016), aunque la redacción ha sido adaptada a la notación

y estilo de esta tesis.¹⁴

4.2. Secuencias de tipo 1 Específicamente, se desea determinar bajo qué valores de q se satisface que q^n es el conjugado armónico de q^{n-3} con respecto a q^{n-2} y q^{n-1} .

En este caso, se impone:

$$q^{n+3} := H[q^{n+1}, q^{n+2}; q^n]$$

o sea, que cumpla:

$$[q^{n+1}, q^{n+2}; q^n, q^{n+3}] = -1.$$

aplicando la fórmula:

$$-1 = \frac{(q^n - q^{n-1})(q^{n-2} - q^{n-3})}{(q^n - q^{n-2})(q^{n-1} - q^{n-3})} = \frac{q}{(q+1)^2},$$

i.e.

$$q^2 + 3q + 1 = 0$$

Las soluciones son:

$$q_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} = -\Phi^{-2} = \Phi - 2, \quad q_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} = -\Phi^2 = -\Phi - 1,$$

donde $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es el número áureo.

Considere la transformación proyectiva

$$f(t) = \frac{at + b}{ct + d} \quad \text{con} \quad ad - bc \neq 0$$

que induce una sucesión de puntos proyectivos:

$$P_n := f(q^n).$$

¹⁴ El desarrollo matemático y las expresiones empleadas se basan en LEITENBERGER, Frank. "Iterated Harmonic Divisions and the Golden Ratio", Forum Geometricorum 16 (2016), pp. 429–430.

Para analizar el comportamiento de la sucesión, se considera el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+2}P_{n+1}}{P_{n+1}P_n}.$$

Este cociente mide el ritmo de aproximación de los términos sucesivos de la sucesión.

Para un límite finito, se tiene $d \neq 0$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+2}P_{n+1}}{P_{n+1}P_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{aq_1^{n+2}+b}{cq_1^{n+2}+d} - \frac{aq_1^{n+1}+b}{cq_1^{n+1}+d}}{\frac{aq_1^{n+1}+b}{cq_1^{n+1}+d} - \frac{aq_1^n+b}{cq_1^n+d}} = \frac{q_1(cq_1^n + d)}{(cq_1^{n+2} + d)} = -\Phi^{-2},$$

i.e.,

$$P_{n+2}P_{n+1} \approx -\Phi^{-2}P_{n+1}P_n \quad \text{para } n \text{ grande.}$$

Para un límite infinito, se tiene $d = 0$, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+2}P_{n+1}}{P_{n+1}P_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{aq_1^{n+2}+b}{cq_1^{n+2}} - \frac{aq_1^{n+1}+b}{cq_1^{n+1}}}{\frac{aq_1^{n+1}+b}{cq_1^{n+1}} - \frac{aq_1^n+b}{cq_1^n}} = \frac{1}{q_1} = -\Phi^2.$$

i.e.,

$$P_{n+2}P_{n+1} \approx -\Phi^2P_{n+1}P_n \quad \text{para } n \text{ grande.}$$

En este contexto, aunque las transformaciones proyectivas no preservan razones entre puntos, se observa un fenómeno notable: ciertos límites de cocientes, como el ritmo de crecimiento entre términos consecutivos de una sucesión proyectiva, sí se conservan. Este tipo de límites permiten captar información estructural que sobrevive a la acción proyectiva, funcionando como una especie de invariante débil. En particular, cuando se aplica una transformación proyectiva a una sucesión geométrica, se pueden obtener nuevas sucesiones cuyos límites reflejan propiedades constantes, como ocurre con la aparición del número áureo.

Se puede contemplar que la sucesión definida por $q_n = (-\Phi^2)^n$ puede interpretarse como un subconjunto real de la llamada espiral dorada, descrita por la expresión

$$z(t) = e^{t(\ln \Phi + i\frac{\pi}{2})}, \quad t \in \mathbb{R},$$

que representa una espiral logarítmica rotando en el plano complejo con razón áurea.

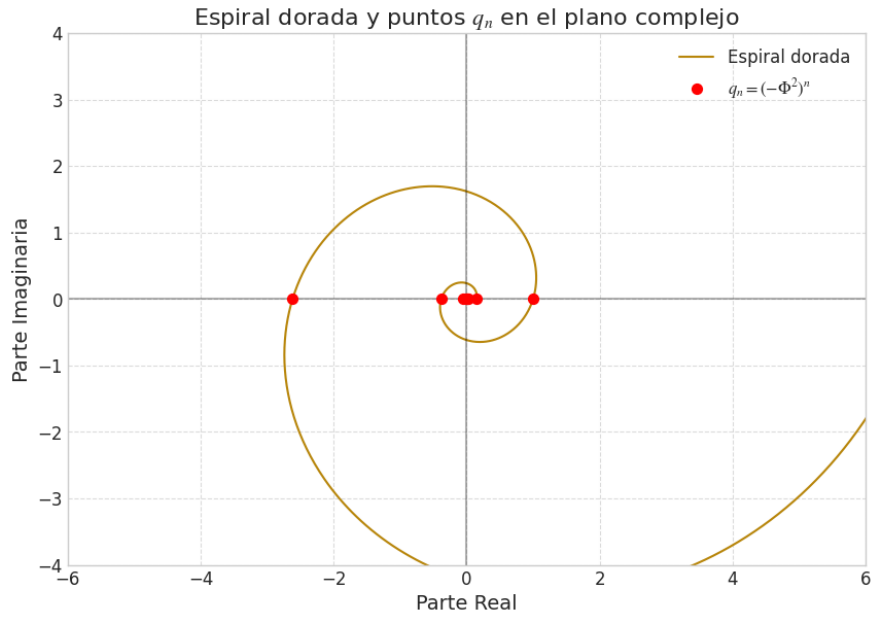


Figura 7. Espiral logarítmica dorada junto con la sucesión $q_n = (-\phi^2)^n$.

4.3. Secuencias de tipo 2 Por definición, se tiene que $P_{n+4} = P_n$. La sucesión (P_n) es una sucesión 4-periódica de dos pares de conjugados armónicos: (P_0, P_2) y (P_1, P_3) .

4.4. Secuencias de tipo 3 Específicamente, se desea determinar bajo qué valores de q se satisface que q^n es el conjugado armónico de q^{n-2} con respecto a q^{n-3} y q^{n-1} .

En este caso, se impone:

$$q^{n+3} := H[q^n, q^{n+1}; q^{n+2}]$$

o sea, que cumpla:

$$[q^n, q^{n+1}; q^{n+2}, q^{n+3}] = -1.$$

aplicando la fórmula:

$$-1 = \frac{(q^n - q^{n-2})(q^{n-3} - q^{n-1})}{(q^n - q^{n-3})(q^{n-2} - q^{n-1})} = \frac{(q+1)^2}{q^2 + q + 1},$$

i.e.

$$q^2 + \frac{3}{2}q + 1 = 0$$

Las soluciones complejas son:

$$q_1 = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{4}, \quad q_2 = \frac{-3 - i\sqrt{7}}{4},$$

Además, se observa que $|q_{\pm}| = 1$, lo que significa que los módulos de las soluciones son 1, por lo tanto, están sobre la circunferencia unitaria del plano complejo.

Para una secuencia arbitraria de tipo 3, existe un isomorfismo proyectivo entre la circunferencia unitaria del plano complejo y la recta proyectiva real, tal que al aplicar este isomorfismo a la potencia q_+^n , se obtiene un punto P_n sobre la recta proyectiva real. Este isomorfismo es inducido por una **transformación de Möbius compleja**.

Esto quiere decir que se generan los puntos q_+^{n+1} a partir de q_+^n rotando en la circunferencia unitaria por un ángulo $\arg(q_+)$. Sin embargo, este ángulo es irracional (en el sentido de que no es múltiplo racional de 2π), porque el número q_+ no es una raíz de la unidad. De hecho, su polinomio minimal $2q^2 + 3q + 2$ no es ciclotómico (no tiene raíces de la unidad como soluciones).

Como consecuencia:

- Los puntos q_+^n son **densos** en la circunferencia unitaria.
- Por lo tanto, sus imágenes P_n bajo la transformación de Möbius también son **densos** en la recta proyectiva real.

Aunque las secuencias tipo 3 no están directamente relacionadas con el número áureo, el ángulo de rotación $\arg(q_+) \approx 138,59^\circ$ es sorprendentemente cercano al ángulo áureo:

$$\frac{360^\circ}{\varphi^2} \approx 137,5^\circ$$

donde φ es el número áureo.

5. Conclusiones

- a. **Síntesis conceptual y metodológica.** Este trabajo integró con éxito dos marcos de referencia complementarios para el estudio del teorema del cuadrilátero completo: (i) una demostración clásica basada en herramientas euclidianas (Ceva y Menelao), de carácter constructivo, y (ii) una formulación algebraico–proyectiva en coordenadas homogéneas que hace explícita la incidencia y la invariancia proyectiva de los objetos involucrados. Esta doble vía permitió contrastar el alcance y las limitaciones de cada enfoque, y dio una visión unificada del resultado.
- b. **Principio de dualidad formalizado.** Se estableció el principio de dualidad tanto en su formulación axiomática como en su traducción algebraica mediante la biyección canónica dual $\delta : \mathbb{P}(W) \mapsto \mathbb{P}(W^0)$, basada en anuladores y en la correspondencia entre subespacios de $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{P}(V^*)$.
- c. **Estructura armónica e invariantes.** La razón doble se consolidó como el invariante central de la configuración: en el cuadrilátero completo, los cuatro puntos colineales correspondientes satisfacen una cuaterna armónica con razón doble -1 , lo que identifica al punto H como conjugado armónico de G respecto de los puntos de referencia B y C . La formalización en $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ aclaró el requerimiento $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ y su papel para evitar degeneraciones (por ejemplo, $-1 = 1$ en característica 2).
- d. **Secuencias armónicas y aparición de la proporción áurea.** El análisis de secuencias armónicas sobre la recta proyectiva mostró tres familias canónicas. En la familia tipo 1, la condición de conjugación armónica conduce al polinomio $q^2 + 3q + 1 = 0$, cuyas raíces se expresan en términos del número áureo Φ , vinculando así la dinámica de la sucesión con la proporción áurea. El estudio mediante transformaciones de Möbius evidencia que ciertos cocientes asintóticos entre términos se estabilizan en constantes relacionadas con Φ , revelando un invariante débil bajo proyectividades. En contraste, la familia tipo 3 la condición de conjugación armónica conduce al polinomio $q^2 + \frac{3}{2}q + 1 = 0$ lo que lleva a rotaciones de ángulo irracional sobre la circunferencia unitaria (raíces no ciclotómicas), implicando densidad en la circunferencia y en la recta y ofreciendo un puente entre la dinámica

y el plano complejo.

Bibliografía

Referencias

[Axler(2024)] Axler, S. (2024). *Linear Algebra Done Right*. Springer.

[Coxeter y Greitzer(1967)] Coxeter, H. S. M., & Greitzer, S. L. (1967). *Geometry Revisited*. Mathematical Association of America.

[Coxeter(1969)] Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to Geometry* (2nd ed.). Wiley.

[Doneddu(1978)] Doneddu, A. (1978). *Complementos de Geometría Algebraica*. Aguilar S.A.

[Fortuna et al.(2016)] Fortuna, E., Frigerio, R., & Pardini, R. (2016). *Projective Geometry*. Springer.

[Gallier(2011)] Gallier, J. (2011). *Geometric Methods and Applications*. Springer.

[Granados Pinzón(2025)] Granados Pinzón, C. (2025). *Notas de clase*. Universidad Industrial de Santander. [Documento en PDF no publicado].

[Leitenberger(2016)] Leitenberger, F. (2016). Iterated harmonic divisions and the golden ratio. *Forum Geometricorum*, 16, 429–430.

[Ramírez-Galarza y Kuri(2002)] Ramírez-Galarza, A. I., & Kuri, J. S. (2002). *Introducción a la geometría avanzada*. Universidad Nacional Autónoma de México.

[Shively(1984)] Shively, L. (1984). *An Introduction to Modern Geometry*. Continental S.A.