Motivos de cambio en el uso del ejemplo en la resolución de problemas de demostración en Geometría Euclidiana

Sergio Andrés Caicedo Araque

Trabajo de investigación para optar por el título de Magister en Educación Matemática

Director:

Jorge Enrique Fiallo Leal

Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Codirector:

Luis Ángel Pérez Fernández

Magister en Educación Matemática

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2026

Dedicatoria

In memoriam

Alirio Curtidor Camargo

“Todo lo puedo en Cristo que me fortalece, creo en Dios

que me da poder para conseguir todo lo que quiero”

Vivirá por siempre en los corazones de sus seres queridos.

Agradecimientos

A la Universidad Industrial de Santander, por encontrar en ella la oportunidad de formarme académicamente y ayudarme a cumplir anhelos materiales y simbólicos en el proceso.

A mis directores, Jorge Enrique Fiallo Leal y Luis Ángel Pérez Fernández, por la orientación crítica, el desafío intelectual y su contribución decisiva a la solidez de este trabajo.

A la Universitat de València, el profesor Ángel Gutiérrez y la profesora Adela Jaime, por su afable recibimiento en mi estancia de investigación; en la que compartimos conocimientos y experiencias de vida.

A mi familia, por el apoyo indeleble en este proceso y cimentar lo que hoy me constituye como persona y profesional.

A quienes, desde la cercanía y presencia serena, contribuyeron a mantener el equilibrio y la claridad necesarios para culminar este trabajo.

Tabla de contenido

Introducción 10

1. Planteamiento del problema 12

2. Antecedentes de investigación 16

2.1 Panorama general sobre aspectos de la geometría euclidiana 16

2.2 Sobre el uso de los ejemplos en la demostración 18

2.3 Sobre generalidades de la demostración en clase de geometría 25

3. Marco de referencia 31

3.1 Concepción de la demostración 31

3.2 Estructura analítica de los tipos de demostración 31

3.3 Concepción del ejemplo y su uso productivo 34

3.4 Marco CAPS 36

4. Método de investigación 44

4.1 El experimento de enseñanza 44

4.1.1 La conjetura del experimento 44

4.1.2 Consideraciones para la secuencia de enseñanza 46

4.1.3 El equipo de investigación 48

4.1.4 Plan de ejecución del experimento 49

4.1.5 Descripción de la muestra 51

4.1.6 Recolección de la información y estrategia de consolidación de datos 52

4.2 La secuencia de enseñanza 53

4.2.1 Consideraciones sobre el qué enseñar y cómo enseñar de la secuencia 54

4.2.2 Presentación de la secuencia 62

5. Análisis y resultados 67

5.1 Usos de los ejemplos identificados 69

5.2 Cambios producidos por necesidad de generalizar propiedades y argumentos 70

5.3 Cambios producidos por necesidad de organizar propiedades y argumentos 80

5.4 Cambios producidos por necesidad de concentrarse en el problema 94

5.5 Cambios producidos por exigencias del proceso de demostración 105

5.6 Cambios producidos por retroalimentación del profesor o compañero 113

6. Conclusiones 128

Referencias bibliográficas 135

Lista de Tablas

Tabla 1 *Criterios para elegir ejemplos* 37

Tabla 2 *Propósitos para el uso del ejemplo* 38

Tabla 3 *Estrategias para elegir ejemplos* 40

Tabla 4 *Posibilidades de los ejemplos* 41

Tabla 5 *Transiciones producidas por ejemplos* 42

Tabla 6 *Descripción de las lecciones de la secuencia de enseñanza* 63

Tabla 7 *Relaciones teóricas asociadas al primer motivo de cambio* 79

Tabla 8 *Relaciones teóricas asociadas al segundo motivo de cambio* 93

Tabla 9 *Relaciones teóricas asociadas al tercer motivo de cambio* 104

Tabla 10 *Relaciones teóricas asociadas al cuarto motivo de cambio* 112

Tabla 11 *Relaciones teóricas asociadas a los cinco motivos de cambio* 131

Lista de Figuras

Figura 1 *Plan de ejecución del experimento de enseñanza* 49

Figura 2 *Sistema teórico local establecido para la secuencia de enseñanza* 62

Figura 3 *Ejemplos realizados por E6 durante su proceso de demostración* 101

Resumen

Título: Motivos de cambio en el uso del ejemplo en la resolución de problemas de demostración en Geometría Euclidiana*

Autor: Sergio Andrés Caicedo Araque**

Palabras clave: Ejemplos, Demostración, Geometría Euclidiana, Experimento de enseñanza

Descripción:

En la educación matemática se ha estudiado el papel de los ejemplos en el proceso de demostración, destacando que su uso productivo puede contribuir al desarrollo, exploración, comprensión y demostración de conjeturas (Zaslavsky, 2018; Zaslavsky y Knuth, 2019). No obstante, según Ellis et al. (2019) y Knuth et al. (2019), se necesitan de más investigaciones que ayuden a comprender mejor la naturaleza de los usos del ejemplo; en particular, en el contexto de la geometría euclidiana (Zaslavsky, 2019).

En este sentido, el presente documento reporta una investigación que tuvo por objetivo analizar los motivos que generan cambios en el uso de los ejemplos durante el proceso de resolución de problemas de demostración en un curso de Geometría Euclidiana, al implementar una secuencia de enseñanza centrada en situaciones referentes a las propiedades y congruencia de triángulos.

Como bases teóricas se tomó la estructura analítica de demostraciones de Beltrán-Meneu et al. (2024) y el marco CAPS de Ellis et al. (2019); elementos que se usaron para analizar el proceso de construcción de las demostraciones, el rol que tuvieron los ejemplos en tal proceso y los cambios en sus usos. La metodología se guio por la estrategia de investigación denominada experimento de enseñanza. En donde se diseñó, implementó y ajustó una secuencia de enseñanza enfocada en las propiedades y la congruencia de triángulos. La muestra seleccionada fueron estudiantes del curso de Geometría Euclidiana del programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander.

Los resultados dan cuenta que en algunos casos el uso de ejemplos posibilitó a los estudiantes obtener información para desarrollar conjeturas y construir demostraciones, permitiéndoles transitar de argumentos basados en ejemplos a argumentos basados en aspectos genéricos del problema. Lo que confirma que, los ejemplos pueden resultar útiles para que los estudiantes puedan transitar de demostraciones empíricas a deductivas (Zaslavsky y Knuth, 2019). En ese sentido, se evidenció que los estudiantes evolucionaron en la forma de usar los ejemplos en el proceso de resolución de problemas de demostración. Pasaron de usos empíricos a usos más productivos. Esto, por los siguientes motivos identificados: necesidad de generalizar propiedades y argumentos, necesidad de organizar propiedades y argumentos, necesidad de concentrarse en el problema, exigencias del proceso de demostración y retroalimentación del profesor o compañero.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal. Doctor en Didáctica de las Matemáticas. Codirector: Luis Ángel Pérez Fernández. Magister en Educación Matemática.

Abstract

Title: Reasons for Changes in the Use of Examples in Solving Proof Problems in Euclidean Geometry*

Author: Sergio Andrés Caicedo Araque**

Key words: Examples, Proof, Geometry Euclidean, Teaching Experiment

Description:

In mathematics education, the role of examples in the process of proof has been studied, highlighting that their productive use can contribute to the development, exploration, understanding, and proof of conjectures (Zaslavsky, 2018; Zaslavsky & Knuth, 2019). However, according to Ellis et al. (2019) and Knuth et al. (2019), further research is needed to better understand the nature of the uses of examples, particularly in the context of Euclidean geometry (Zaslavsky, 2019).

In this sense, the present document reports a study aimed at analyzing the reasons that generate changes in the use of examples during the problem-solving process of proof tasks in a Euclidean Geometry course, through the implementation of a teaching sequence focused on situations related to the properties and congruence of triangles.

As theoretical foundations, the analytical structure of proofs proposed by Beltrán-Meneu et al. (2024) and the CAPS framework of Ellis et al. (2019) were adopted. These elements were used to analyze the process of constructing proofs, the role that examples played in this process, and the changes in their uses. The methodology was guided by the research strategy known as a teaching experiment, in which a teaching sequence focused on the properties and congruence of triangles was designed, implemented, and refined. The selected sample consisted of students enrolled in the Euclidean Geometry course of the Bachelor's Degree in Mathematics program at the Industrial University of Santander.

The results show that, in some cases, the use of examples enabled students to obtain information to develop conjectures and construct proofs, allowing them to move from arguments based on examples to arguments based on generic aspects of the problem. This confirms that examples can be useful in helping students transition from empirical proofs to deductive proofs (Zaslavsky & Knuth, 2019). In this regard, it was observed that students evolved in the way they used examples in the process of solving proof problems. They moved from empirical uses to more productive uses. This occurred due to the following identified reasons: the need to generalize properties and arguments, the need to organize properties and arguments, the need to focus on the problem, the demands of the proving process, and feedback from the teacher or peers

* Master's Thesis

** Science Faculty. Mathematics school. Advisor: Jorge Enrique Fiallo Leal. PhD in Didactics of Mathematics. Co-advisor: Luis Ángel Pérez Fernández. Master´s in Mathematics Education.

Introducción

El tránsito de la demostración empírica a la demostración deductiva ha sido un tema de interés en el campo de la educación matemática. En particular, se ha estudiado cómo el uso de los ejemplos contribuye a que los estudiantes realicen este tránsito entre lo empírico y lo teórico. Al respecto, algunos estudios muestran que el uso de ejemplos puede desempeñar un papel fundamental en el desarrollo, la exploración y la comprensión de conjeturas, así como en los intentos por demostrarlas; en tanto que el uso dado a estos ejemplos sea productivo (*v.g.* Zaslavsky, 2018; Zaslavsky y Knuth, 2019; Ellis et al.,2019). Entendiéndose por uso productivo a una actividad que conduzca a una comprensión más profunda de una conjetura, a la generalización mediante el uso de un ejemplo genérico, a la generación de un contraejemplo, o a la construcción parcial o total de una demostración deductiva (Knuth et al., 2019).

No obstante, se necesitan de más investigaciones que indaguen sobre la naturaleza y el diseño de las prácticas que facilitan el desarrollo de las habilidades de los estudiantes para utilizar ejemplos de manera productiva en actividades relacionadas con la demostración (Zaslavsky y Knuth, 2019; Knuth et al., 2019; Ellis et al., 2019; Lynch y Lockwood, 2019); en particular en el contexto de la geometría euclidiana (Zaslavsky, 2019). Además, hay una necesidad latente por realizar investigaciones basadas en intervenciones en el aula que aborden cuestiones importantes de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración (Stylianides y Stylianides, 2017; Stylianides et al., 2024).

En ese sentido, la presente investigación se interesó por analizar los motivos de los cambios de un uso del ejemplo a otro durante el proceso de resolución de problemas de demostración en un curso de Geometría Euclidiana, al implementar una secuencia de enseñanza enfocada en situaciones referentes a las propiedades y congruencia de triángulos.

La memoria de esta investigación está estructurada de la siguiente manera: en el primer capítulo se expone la problemática y el objetivo del estudio. En el segundo capítulo se presentan algunos antecedentes relevantes para el trabajo. En el tercer capítulo se presenta el marco teórico compuesto por la tipología de demostraciones de Marrades y Gutiérrez (2000) y el marco CAPS desarrollado por Ellis et al. (2019) y Knuth et al. (2019). En el cuarto capítulo se plantea el experimento de enseñanza como método de investigación. En el quinto capítulo se exponen los análisis de la información y los resultados. Finalmente, en el sexto capítulo se presentan las conclusiones del trabajo.

1. Planteamiento del problema

La demostración ha sido el foco de atención de múltiples investigaciones en el campo de la Educación Matemática en las últimas décadas. En particular, lo relacionado con su enseñanza y aprendizaje (Fiallo et al., 2013; Stylianides y Stylianides, 2017; Stylianides et al., 2024).

Knuth et al. (2019) mencionan que es generalmente aceptado que los argumentos de los estudiantes deben evolucionar de empíricos a deductivos, los que finalmente constituirán una demostración. Sin embargo, esta evolución no se ha logrado explicar muy bien y diversos estudios muestran que los estudiantes tienen dificultades para realizarla (Zaslavsky y Knuth, 2019). Al respecto, se ha sugerido que el tratamiento y la excesiva dependencia de los ejemplos como medio de justificación por parte de los estudiantes es una fuente principal de sus dificultades para realizar esta transición de lo empírico a lo deductivo. En consecuencia, se ha abogado porque los estudiantes comprendan las limitaciones de los ejemplos y que reconozcan la necesidad de las demostraciones deductivas.

Sin embargo, aunque Knuth et al. (2019) defienden la idea de que los estudiantes deben reconocer las limitaciones de los ejemplos y la necesidad de las demostraciones deductivas, consideran que el razonamiento basado en ejemplos adquiere un papel protagónico en la formulación y demostración de conjeturas. Ideas que se comparten con algunas investigaciones como las de Zaslavsky (2018), Zaslavsky y Knuth (2019), Ellis et al. (2019).

Esto sugiere, de acuerdo con Zaslavsky y Knuth (2019), una reconceptualización de la investigación sobre el razonamiento basado en ejemplos, pasando de una visión en la que este se considera como un obstáculo hacia una visión en la que se ve como una base necesaria en el aprendizaje de la demostración; como una etapa intermedia hacia el desarrollo de un enfoque más formal.

Por consiguiente, Knuth et al. (2019) marcan la necesidad de comprender mejor la naturaleza y la evolución del uso de ejemplos en actividades demostrativas; así como la naturaleza de las prácticas de instrucción para ayudar a los estudiantes a volverse más deliberados y estratégicos en el uso de ejemplos en tareas de demostración. Para afrontar esta necesidad, se realizó *The Examples Project*, una investigación de cuatro años que presentó sus resultados en un número especial del *Jhournal of Mathematics Behavior*, volumen 53. Este proyecto, realizado con estudiantes de secundaria y universidad, buscó entender mejor el papel que juegan los ejemplos en el desarrollo, exploración y justificación de conjeturas.

Uno de los principales resultados de esta investigación fue presentar un marco analítico denominado CAPS (*Criteria, Affordances, Purposes*, *and Strategies*), en Knuth et al. (2019) y Ellis et al. (2019). Este marco se desarrolló para caracterizar y dar sentido a los roles y usos de los ejemplos en las actividades relacionadas con la demostración; resaltando la complejidad y diversidad de estos usos durante dichas actividades. Este marco, según Knuth et al. (2019), captura el uso de ejemplos que puede o no ser productivo para avanzar en el desarrollo de una demostración.

Con este marco ha sido posible documentar, examinar y caracterizar los roles y usos estratégicos de los ejemplos durante las actividades relacionadas con la demostración; indicando fortalezas y debilidades sobre estos usos. En particular, según Zaslavsky y Knuth (2019), la hipótesis central que se plantea a partir de sus resultados es que: los estudiantes que son capaces de pensar estratégicamente y utilizar ejemplos de manera productiva a medida que participan en actividades relacionadas con la demostración no solo obtendrán una comprensión más profunda de las matemáticas subyacentes, sino que también aprenderán a desarrollar con éxito demostraciones deductivas.

No obstante, según Ellis et al. (2019) y Knuth et al. (2019), se necesitan de más investigaciones que ayuden a comprender mejor la naturaleza de los usos del ejemplo. En ese sentido, de acuerdo con Zaslavsky y Knuth (2019), el trabajo futuro en este campo debería corresponder a investigaciones basadas en intervenciones en el aula con el fin de abordar cuestiones con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración al usar ejemplos de manera estratégica y productiva.

Más específicamente, existe la necesidad de: diseñar y probar intervenciones educativas destinadas a ayudar a los estudiantes a aprender a pensar estratégicamente y usar ejemplos de manera productiva en actividades relacionadas con la demostración; y, de investigar las formas en que el uso de los ejemplos puede facilitar el desarrollo del aprendizaje de los estudiantes para demostrar (Zaslavsky y Knuth, 2019).

Estas necesidades se enmarcan en una más general del campo de la educación matemática, pues según Styilianides y Stylianides (2017) y Stylianides et al. (2024) hay una necesidad latente por realizar investigaciones basadas en intervenciones en el aula. Estos autores argumentan que hay pocas de estas investigaciones que han desarrollado intervenciones prometedoras para abordar cuestiones importantes de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración.

Además, muchas de estas ideas sobre el uso productivo de ejemplos no se han explorado en el contexto de la geometría euclidiana, por lo que resulta pertinente explorarlas en este ambiente y ver qué resultados se obtienen (Zaslavsky, 2019).

Con base en lo anterior, esta investigación busca atender a la necesidad de comprender mejor la naturaleza de los usos de los ejemplos en el desarrollo, exploración y demostración de conjeturas. Asimismo, se pretende contribuir a la problemática general que busca favorecer la transición de demostraciones empíricas a deductivas; y a la necesidad de realizar intervenciones en el aula que aborden cuestiones sobre la demostración. En ese sentido, se indaga sobre los factores que motivan determinados usos del ejemplo y los cambios en ellos a lo largo del proceso de demostración, mediante una intervención en el aula.

Por lo tanto, el objetivo que se plantea en esta investigación es:

Analizar los motivos que generan cambios en el uso de los ejemplos durante el proceso de resolución de problemas de demostración en un curso de Geometría Euclidiana, al implementar una secuencia de enseñanza centrada en situaciones referentes a las propiedades y congruencia de triángulos.

2. Antecedentes de investigación

En este capítulo se presentan los principales referentes teóricos y contextuales que sustentan esta investigación. En primer lugar, se presenta una revisión sobre aspectos fundamentales de la geometría euclidiana en el currículo escolar. En segundo lugar, se abordan estudios y perspectivas sobre el uso de ejemplos en la construcción de demostraciones. Finalmente, se exponen algunas consideraciones sobre la demostración en clase de Geometría Euclidiana.

2.1 Panorama general sobre aspectos de la geometría euclidiana

La geometría euclidiana es considerada dentro del currículo escolar como un espacio natural e idóneo para que los estudiantes desarrollen habilidades de razonamiento, justificación y demostración, a partir de las figuras geométricas y sus relaciones (NCTM, 2003). El desarrollo de estas habilidades se potencia por algunos usos de los *softwares* de geometría dinámica (SGD) en clase de Geometría, en tanto que estos les propician a los estudiantes ambientes de exploración en los que se manipulan los objetos que se muestran en la pantalla; con el fin de establecer y explorar conjeturas, determinar invariantes, evidenciar y establecer propiedades, y mostrar ejemplos y contraejemplos (NCTM, 2003; MEN, 2004; Laborde et al., 2006; Acosta y Fiallo, 2017).

En ese sentido, de acuerdo con Acosta y Fiallo (2017), la geometría comprende procesos de percepción de figuras y procesos de razonamiento utilizando figuras. Lo que conlleva a una tensión entre la percepción y la teoría, que se ven como dos polos dentro de esta rama de las matemáticas, justamente por su clara oposición; pero también por la dependencia y complementariedad que tienen entre sí, dada la evolución histórica de la propia geometría euclidiana.

En consecuencia, según Acosta y Fiallo (2017), emergen dos grandes objetivos en la enseñanza de la geometría:

1. Introducir a los estudiantes, por medio de la percepción, a la teoría.

2. Lograr un equilibrio entre la percepción y la teoría en la actividad geométrica de los estudiantes.

Para contribuir al cumplimiento de estos objetivos, el SGD cobra suma importancia, dado que, los objetos mostrados en el *software* son tanto perceptibles como teóricos; lo que permite establecer relaciones entre estos dos polos.

Así, lo que se pretende en un curso de Geometría Euclidiana, esencialmente, es que los estudiantes aprendan a demostrar a partir de los objetos geométricos y sus propiedades. Una estrategia para lograrlo es propiciar con los SGD ambientes de exploración para la formulación y justificación de conjeturas (Samper y Molina, 2013; Samper et al., 2013; Acosta y Fiallo, 2017).

En general, en el campo de la educación matemática, la enseñanza y el aprendizaje de la demostración ha sido llamativo para diversos autores y se han desarrollado varios estados del arte al respecto (*v.g.* Fiallo et al., 2013; Stylianides y Stylianides, 2017; Stylianides et al., 2024). Allí se mencionan varias investigaciones que versan sobre la idea errónea que tienen muchos estudiantes de creer que uno o varios ejemplos constituyen una demostración; problemática que se ha identificado hace tiempo de acuerdo con el *Education Committee of the European Mathematical Society* (2011), que menciona que uno de los resultados empíricos es que:

> Existe evidencia considerable de que muchos estudiantes confían en la validación por medio de uno o varios ejemplos para apoyar enunciados generales, que este fenómeno es persistente en el sentido de que muchos estudiantes continúan haciéndolo incluso después

de una instrucción explícita sobre la naturaleza de la demostración matemática, y que el fenómeno es internacional [Traducción propia] (pp. 50–51).

Al respecto se han realizado estudios que informan sobre resultados prometedores para mejorar el aprendizaje de la demostración en matemáticas y en el contexto de la geometría euclidiana. Entre estos estudios, se destacan, para efectos de esta investigación, los que hacen referencia al papel que juegan los ejemplos en el aprendizaje de la demostración y, en particular, los que versan sobre el aprendizaje de la demostración en clase de Geometría.

2.2 Sobre el uso de los ejemplos en la demostración

Se han realizado investigaciones que han estudiado las formas de trabajo de los estudiantes cuando resuelven problemas de demostración (*v.g.* Bell, 1976; Balacheff, 1988; Harel y Sowder, 1996; Marrades y Gutiérrez, 2000; Mason, 2019; Zaslavsky y Knuth, 2019). Los resultados de estas investigaciones dan cuenta que, en la mayoría de los casos los estudiantes utilizan los ejemplos para apoyar y guiar sus demostraciones.

En estas situaciones en las que un estudiante busca demostrar una afirmación probando que es válida en algunos casos, se dice que tiene un esquema de demostración empírica. Inclusive, el Education Committee of the European Mathematical Society identificó en 2011 que la mayoría de los estudiantes que empiezan a estudiar un programa de Matemáticas tienen esquemas de demostración empírica y continúan actuando con estos esquemas durante algunos semestres. Resultados que no distan de los expuestos en otras investigaciones recientes con estudiantes universitarios (*v.g.* Riaño, 2023 y Guarín y Malaver, 2023).

Sobre esta naturaleza de las demostraciones, Bell (1976) identificó dos tipos de justificaciones que utilizaron alumnos de secundaria en los problemas relacionados con la demostración: la *justificación empírica*, la cual se refiere al uso de los ejemplos como elemento de convicción y la *justificación deductiva*, que se caracteriza por el uso de la deducción para conectar los datos con las conclusiones.

Por otra parte, Balacheff (1988) distinguió en alumnos de secundaria dos categorías de justificaciones: las *justificaciones pragmáticas* y las *justificaciones conceptuales*. En la primera categoría las justificaciones se basan en el uso de los ejemplos y acciones sobre ellos, distinguiendo así tres tipos: El *empirismo ingenuo*, donde se usan unos pocos ejemplos como comprobación de un enunciado; el *experimento crucial*, en donde el enunciado se comprueba con un ejemplo cuidadosamente seleccionado; y el *ejemplo genérico*, donde se selecciona un ejemplo como representante de una clase (de acuerdo con sus características) y la justificación se basa en operaciones o transformaciones sobre este representante. En la segunda categoría, las justificaciones se basan en formulaciones abstractas de propiedades y relaciones entre propiedades, de donde se distinguen dos categorías: El *experimento mental*, donde las acciones se interiorizan y se disocian de los ejemplos concretos considerados; y los *cálculos simbólicos*, donde la justificación se basa en el uso y transformación de expresiones simbólicas formalizadas.

En el trabajo de Harel y Sowder (1996), se identificaron tres esquemas de prueba (categorías de justificaciones): *Externas*, basadas en la autoridad de una fuente externa; *Empíricas*, basadas en ejemplos o dibujos; y *Analíticas*, basadas en argumentos que pueden constituir o llegar a constituir una demostración formal. Esto sugiere, como se mencionó anteriormente, que la mayoría de las veces los estudiantes utilizan los ejemplos para guiar y apoyar sus demostraciones. Por tanto, según mencionan Zaslavsky y Knuth (2019), estudios recientes se han interesado en investigar sobre cómo el razonamiento basado en ejemplos puede ayudar a que los estudiantes aprendan a demostrar; caracterizando y dando sentido a los roles y usos de los ejemplos en las actividades relacionadas con la demostración.

En este sentido, Zaslavsky (2019) argumenta que los ejemplos constituyen una parte fundamental de una buena explicación; pues para que el aprendizaje se pueda propiciar, se necesitan de varios ejemplos que logren encapsular determinadas características. Por lo que el uso de ejemplos para explicarse a uno mismo o a otra persona, no es un desafío trivial. Sin embargo, la autora también hace énfasis en que el uso de los ejemplos puede traer inconvenientes en situaciones en las que pueda haber una excesiva adherencia a los ejemplos prototípicos o una excesiva dependencia hacia ellos para realizar demostraciones. Para Zaslavsky (2019) un objeto matemático es considerado un ejemplo solo cuando el estudiante y/o el profesor lo perciben como una instancia de un fenómeno, propiedad, clase o idea. De modo que estos resultan útiles mientras sean *transparentes* para el estudiante; es decir, que le permitan ver las características que los hacen ejemplares de manera relativamente sencilla.

Knuth et al. (2019), Ellis et al. (2019), Aricha-Metzer y Zaslavsky (2019) y Lynch y Lockwood (2019) hablan del razonamiento basado en ejemplos y consideran que este desempeña un papel esencial en el desarrollo, la exploración y la comprensión de las conjeturas; así como en los intentos posteriores para desarrollar sus demostraciones. No obstante, si los estudiantes no piensan ni analizan estratégicamente los ejemplos en actividades relacionadas con la demostración, esto puede conllevar a dificultades para aprender a demostrar. Por tanto, se sugiere que se instruyan a los estudiantes en aprender a pensar estratégicamente y usar ejemplos de manera productiva en estas actividades para facilitar el aprendizaje de la demostración (Knuth et al., 2019). Donde el uso productivo del ejemplo es entendido por Knuth et al. (2019) como una actividad que conduce a una comprensión más profunda de la conjetura y a la comprensión del desarrollo de una demostración, llevando a la persona en cuestión a una conciencia de generalización.

Con la intención de estudiar más a fondo la función de los ejemplos en la elaboración de demostraciones, Knuth et al. (2019) y Ellis et al. (2019) presentan el marco analítico integral CAPS para caracterizar y dar sentido a los roles y usos de los ejemplos en las actividades relacionadas con la demostración en el contexto de la Teoría de Números; con datos tomados de estudiantes de secundaria, de pregrado, y matemáticos.

Las categorías principales del marco incluyen: *el propósito previsto de un ejemplo, los criterios para elegir un ejemplo, las posibilidades que resultan del uso de los ejemplos, las estrategias de uso de ejemplos y las transiciones o cambios en la actividad relacionada con la demostración*. Este marco también captura *usos de ejemplos que pueden ser productivos o no*, para avanzar hacia el desarrollo de una demostración (Knuth, et al., 2019). Una descripción más detallada de este marco se presenta en 3.4 Marco CAPS.

Usando el marco CAPS, Ellis et al. (2019) reportan que los estudiantes pueden adquirir mayor comprensión de las conjeturas y hacer generalizaciones si usan los ejemplos para: comprender por qué la conjetura puede ser verdadera, transmitir generalidad, construir formalidad e ilustrar representaciones. Considerando que los que más se benefician del uso de los ejemplos son los estudiantes que pueden notar y aislar estructuras matemáticas similares en diferentes ejemplos, ya que proporciona información y vías para argumentos deductivos. También mencionan que el uso de los ejemplos puede evolucionar con el tiempo y con una mayor sofisticación matemática.

En lo que respecta a la instrucción del uso de ejemplos, Ellis et al. (2019) sugieren que, instruir a los estudiantes a usar ejemplos estratégicamente es poco probable que tenga éxito si no se aborda simultáneamente la comprensión conceptual de las conjeturas que exploran. Inclusive, si esta instrucción minimiza la comprensión de la situación, se corre el riesgo de que se vea el uso de ejemplos como un conjunto generalizado de heurísticas y procedimientos; llevando al fracaso.

Esto conlleva a indagar más en la naturaleza del uso productivo de ejemplos, pues como señalan Ellis et al. (2019), este uso productivo da indicios de que puede ser enseñable. En este mismo sentido, Ozgur et al. (2019) investigan la naturaleza del uso productivo de ejemplos en estudiantes de secundaria y universidad a partir de examinar las características de los casos exitosos y no exitosos de demostración usando ejemplos en el contexto de la Teoría de Números. Entendiendo por caso exitoso si existen indicadores de que el trabajo con ejemplos llevó al estudiante a avanzar hacia el desarrollo de una demostración total o parcial (Ozgur et al., 2019; Aricha-Metzer y Zaslavsky, 2019). Para ello, utilizan el marco CAPS y examinan los propósitos, estrategias y posibilidades del uso del ejemplo por parte de los estudiantes.

Los resultados arrojados de Ozgur et al. (2019) sugieren que en los casos exitosos se dieron más posibilidades del uso del ejemplo que en los casos no exitosos. Es decir, el uso de los ejemplos en los casos exitosos posibilitó: comprender la conjetura; generalizar; producir una demostración viable, pero incompleta; revisar la conjetura; y producir una demostración. Mientras que, en los casos no exitosos, se dieron pocas de estas posibilidades. Del mismo modo, en los casos exitosos, los estudiantes pudieron mirar a través de los ejemplos y usarlos para comunicar una generalidad que habían reconocido, emplearon estrategias con más frecuencia y le dieron más propósitos al uso de los ejemplos para realizar su demostración. Lo anterior, permitió concluir que cuando se aplica con atención el uso de los ejemplos para diversos propósitos y se seleccionan bajo ciertas estrategias, pueden conducir a muchas posibilidades; entre ellas, el desarrollo exitoso de demostraciones, que, a su vez, pueden beneficiarse aún más si se les presenta a los estudiantes una amplia gama de ejemplos intencionados y estratégicos.

Por la misma línea y con estudiantes de secundaria y universidad, Aricha-Metzer y Zaslavsky (2019) abordan el estudio de los usos productivos de los ejemplos en la producción de demostraciones, distinguiendo entre el uso empírico y genérico de ejemplos. Entendiendo por uso empírico al uso de ejemplos para dar sentido, validar o verificar conjeturas centrándose en los detalles de un ejemplo sin mirar los detalles de manera general. Y por uso genérico a un ejemplo general que permite ver detalles, características y propiedades a través de ese caso general. Además, distinguen entre tres escenarios del uso del ejemplo: el uso espontáneo, que surge de manera natural de los estudiantes; el uso evocado, cuando se sugiere usar ejemplos; y el uso guiado, cuando el investigador o profesor le sugieren al estudiante un ejemplo.

Aricha-Metzer y Zaslavsky (2019) concluyen que, aunque se les presente a los estudiantes ejemplos genéricos, estos no lo serán hasta que los estudiantes los vean así. Por lo que se requiere fomentar el estudio de las características que hacen que el ejemplo sea genérico y el estudiante lo vea como tal; naturaleza similar a que un ejemplo se considera como tal si para el que lo está usando, refiere ese estatus (Knuth et al., 2019; Ellis et al., 2019). No obstante, los casos productivos se dieron cuando los estudiantes trataron los ejemplos de manera genérica. Esto puede sugerir que el uso genérico de ejemplos pueda ser una condición necesaria para el uso productivo de ejemplos, así como los diversos propósitos y estrategias para escoger los ejemplos, como se mencionó en Ozgur et al. (2019).

Un resultado interesante que explicitan Aricha-Metzer y Zaslavsky (2019) es que cuando el investigador les sugería un ejemplo genérico a los estudiantes, más de la mitad de los casos fueron productivos, llevando a los estudiantes a realizar argumentos deductivos. Idea que se alinea con lo mencionado por Zodik y Zaslavsky (2007), quienes mencionan que el profesor debe procurar que el ejemplo que proporcione reduzca las suposiciones injustificadas que puedan hacer los estudiantes, o incluso sugerir otros, pues ellos suelen elegir ejemplos espontáneamente que pueden aumentar considerablemente la dificultad del problema de demostración.

Sobre la generación de ejemplos, autores como Zazkis y Leikin (2008) investigan en futuros profesores de matemáticas si los ejemplos que ellos proporcionan revelan la comprensión que tienen sobre conceptos matemáticos, en particular, sobre el concepto de cuadrado. Para ello, plantean a estos futuros profesores proporcionar tantos ejemplos como sea posible para una definición de un cuadrado y juzgar la validez de 24 ejemplos de definiciones del cuadrado. Los resultados dieron cuenta que los estudiantes mostraron y eligieron algunos ejemplos de definiciones que eran inapropiados, aunque en pequeña medida; lo que permitió reafirmar un poco más la idea de que los ejemplos generados por los participantes reflejan sus concepciones de los objetos matemáticos, su repertorio pedagógico y sus dificultades.

Además, mencionan Zazkis y Leikin (2008), que esto revela la capacidad e incapacidad, en algunos casos, de distinguir entre condiciones necesarias y suficientes. Incluso, mencionan las autoras, que puede complementar los resultados de otras investigaciones que dicen que los estudiantes experimentan dificultades para interpretar las definiciones y usarlas de manera adecuada en demostraciones. Por lo que Watson y Mason (2005) resaltan el hecho de que los estudiantes generen sus propios ejemplos, ya que puede resultar positivo para mejorar el aprendizaje en las matemáticas y superar estas falencias.

De acuerdo con lo mencionado hasta el momento, los ejemplos son una herramienta que los estudiantes suelen usar al momento de conjeturar y construir una demostración. No obstante, esta herramienta puede resultar obsoleta si la demostración que da el estudiante sobre la conjetura que formula está basada únicamente en ejemplos (particulares o generales), sin recurrir al uso de reglas teóricas (definiciones, postulados y teoremas). Por ello se requiere que se genere en el estudiante la necesidad de usar estas reglas para sus demostraciones y se le instruya sobre el uso productivo del ejemplo para buscar establecer conexiones con la teoría y así poder pasar de una demostración empírica a una deductiva.

Con base en lo anterior, los estudios que se han descrito en esta sección resultan pertinentes para esta investigación, puesto que refieren a los usos que pueden tener los ejemplos al momento de formular una conjetura y construir una demostración, y, porque plantean cómo estos usos pueden contribuir al proceso de demostración.

Ahora bien, como el contexto de esta investigación es la geometría euclidiana, en el siguiente apartado se presentan algunos estudios que versan sobre temas generales de la demostración en este contexto.

2.3 Sobre generalidades de la demostración en clase de geometría

Como se mencionó en el panorama general, el uso de los *softwares* en clase de Geometría trae consigo una forma diferente para enseñar y aprender geometría; en particular, para demostrar.

En ese sentido, Marrades y Gutiérrez (2000) se interesaron por estudiar cómo los entornos del SGD pueden ayudar a los estudiantes a mejorar su concepción de la demostración en geometría y sus métodos de justificación. Este estudio lo realizaron con estudiantes de secundaria y a partir de la información recolectada definieron un esquema de clasificación de las demostraciones. En este esquema de clasificación que definieron, se distinguen dos categorías principales: las demostraciones deductivas y las empíricas, dependiendo si la demostración se realiza comprobando ejemplos o no. Al mismo tiempo, ambas categorías se dividen en varias subclases dependiendo si se selecciona o no un ejemplo para organizar la demostración, y en función del modo en el que se seleccionan y utilizan los ejemplos. Este esquema se describe con más detalle en 3.2 Estructura analítica de los tipos de demostración.

Las conclusiones del estudio de Marrades y Gutiérrez (2000) sugieren que: el uso del SGD ayudó a los estudiantes a comprender la necesidad de realizar demostraciones deductivas; el arrastre les permitió ver varios ejemplos al mismo tiempo, lo que favoreció la búsqueda de propiedades, la formulación de contraejemplos, entre otros; y la transición entre las demostraciones empíricas a deductivas fue muy lenta, por lo que se necesitan investigaciones en las que se promuevan maneras para que esta transición sea menos laboriosa.

Aunque los estudiantes puedan disponer del SGD en las clases de geometría, también disponen de otra herramienta aunque con distinta naturaleza: el papel y lápiz. Al respecto, Komatsu y Jones (2020) se interesan por la interacción que surge entre la actividad de los estudiantes con papel y lápiz y con el SGD durante la producción y demostración de una afirmación general. Para ello, examinan una serie de lecciones en el aula en las que participan estudiantes japoneses de secundaria (14 – 15 años, grado 9) utilizando un SGD.

Komatsu y Jones (2020) encontraron que el SGD favoreció la generalización de la afirmación, pero algunos estudiantes no pudieron demostrar su generalidad; fue mediante la combinación del trabajo del SGD y la actividad en papel y lápiz que pudieron realizar la demostración. En consecuencia, estos dos entornos (digital y físico) desempeñan un papel complementario entre sí en el aprendizaje de acuerdo con las posibilidades distintivas de cada entorno. De esta manera, concluyen que usar el SGD puede permitir la generación de conjeturas, y el trabajo en papel y lápiz permite concentrarse en una sola configuración de los objetos para realizar la demostración; ya que razonar teniendo en cuenta varias configuraciones de los objetos a la vez no puede resultar muy útil en esta fase de construir la demostración. Además, que el trabajo en el papel y lápiz permite añadir marcas que hacen referencia a relaciones y propiedades de los objetos, marcas que ayudan a que se tengan presentes estas propiedades durante el proceso de demostración y no se pierdan de vista por el dinamismo.

El uso de los SGD además de influir en las actividades de conjeturación y demostración, también influye en la actividad de construcción de figuras geométricas. Al respecto, Mariotti (2000, 2019) plantea que las herramientas y las reglas de los SGD al estar fundamentadas en los axiomas y teoremas de un sistema teórico, conlleva a que cualquier construcción geométrica tiene un significado teórico; por tanto, resolver un problema de construcción en geometría corresponde a demostrar un teorema que valida el procedimiento de construcción.

Además, menciona Mariotti (2019) que el entorno dinámico trae consigo la novedad de la manipulación directa de figuras geométricas mediante el arrastre. Dicha manipulación, o arrastre de figuras, conserva la lógica de la construcción; por lo que es posible interpretar al control por arrastre como un control teórico que usualmente se le da el nombre de "*la prueba del arrastre*". Esta prueba permite corroborar si una construcción es aceptable, en el contexto de la clase, si al arrastrar la figura en la pantalla, esta mantiene se mantiene estable. No obstante, menciona Mariotti (2000) que es importante que se haga una distinción en estos entornos de manera explícita entre "dibujo" y "figura". Donde dibujo es, para ella, una construcción que no resiste la prueba del arrastre y figura una construcción que sí la resiste. Del mismo modo, es importante que los estudiantes interpreten el arrastre como una prueba teórica de las construcciones.

Esta nueva naturaleza de las construcciones en el SGD hace que las tareas de construcción en estos entornos también cambien. Así, Mariotti (2019) sugiere que las tareas de construcción tengan dos tipos de solicitudes al estudiante: la primera es construir una figura que pase la prueba del arrastre y la segunda es la producción de un texto escrito que describa el procedimiento utilizado para obtener la figura. En consecuencia, y compartiendo las ideas de Acosta y Fiallo (2017), esto puede propiciar una introducción a la teoría para los estudiantes, en tanto que ellos consideren teoremas geométricos para validar las construcciones y reconozcan las herramientas del *software* como herramientas teóricas que refieren a axiomas o teoremas.

Ahora bien, en el trabajo que realizan los estudiantes para formular conjeturas y elaborar demostraciones en muchos casos se requiere que consideren objetos auxiliares, tanto en el medio físico como en el digital. Sin embargo, se presentan algunas dificultades, ya que como mencionan Palatnik y Dreyfus (2018), puede resultar artificial para los estudiantes construir objetos que inicialmente parece que no tienen nada que ver con la situación en cuestión. En ese sentido, los autores sugieren que los estudiantes deben tomar conciencia sobre esta estrategia en tanto que construir objetos auxiliares permite: recordar fórmulas, definiciones y procedimientos conocidos; recibir más información de la situación; explorar una idea vaga; hacer notar ciertas características; y producir casos adicionales de la situación.

Durante la actividad demostrativa en clase de Geometría el rol del profesor resulta importante en tanto que es el que orienta a los estudiantes en este proceso. Por lo que Zodik y Zaslavsky (2007) se interesan por analizar los diagramas, o ejemplos, que acompañan a los problemas de demostración propuestos por cinco profesores en clase de Geometría en la escuela secundaria. Luego de analizar los ejemplos presentados por los profesores, los autores afirman que las razones para presentar determinado ejemplo puede conducir a que estos resulten útiles, reduciendo la demanda cognitiva en los problemas de demostración; pero hacen la salvedad de que estos ejemplos también pueden aumentar el nivel de dificultad. Así, identifican que las algunas razones para proponer ejemplos en problemas de demostración pueden ser: representar la situación real, ocultar lo que necesita ser probado, y que no concuerde el ejemplo con los datos del problema. En cada caso, y dependiendo de la forma en que se aborde el ejemplo, este puede o no servir a los estudiantes como una herramienta para analizar el problema y comunicar su demostración.

Otra sugerencia para el profesor en cuanto a la demostración se refiere, la plantea De Villiers (1990), quien expresa su inconformidad de que la demostración se ha interpretado únicamente en términos de verificar un enunciado y esto ha repercutido en las aulas, donde los estudiantes poco o ningún sentido le ven a demostrar afirmaciones matemáticas. En su estudio, realizado con matemáticos profesionales en ejercicio, el autor identifica que la demostración tiene otras funciones. A saber: la función de explicar por qué un resultado es verdad, la función de sistematizar resultados dentro de un sistema de axiomas y teoremas, la función de descubrir nuevos resultados y la función de comunicar el conocimiento matemático.

A partir de identificar estas funciones, De Villiers (1990) resalta que la idea de que la única función de la demostración es verificar o validar debe ser abandonada. Por lo que invita a que estas funciones se promuevan en el aula para que la enseñanza de la demostración refleje una naturaleza diferente a la tradicional y los estudiantes puedan reconocer la necesidad de demostrar; especialmente en casos en los que se les pide validar una afirmación que puede ser fácilmente comprobable de manera empírica.

Un precedente importante para la presente investigación es el estudio realizado por Riaño (2023), quien intervino con estudiantes de primer semestre de un curso de Geometría Euclidiana de las carreras de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. En su investigación identificó que a pesar de que los estudiantes recibieron información sobre las demostraciones deductivas, ellos realizaban en mayor medida demostraciones empíricas.

Incluso, se daban casos en los que para un problema realizaban una demostración deductiva, pero en otro problema volvían al empirismo. Lo que muestra que hubo una diversificación en las demostraciones, en la que lo formal y lo empírico convivían, lo que revelaba intentos de transición entre las demostraciones empíricas a las deductivas. Según Riaño (2023), esto sucedía porque se presentaban situaciones en las que los estudiantes no encontraban cómo seguir argumentando deductivamente y recurrían a la explicación sobre ejemplos, evidenciando un problema de razonamiento visual sobre los ejemplos que seleccionaban.

3. Marco de referencia

En este apartado se presentan los elementos teóricos que se tienen en cuenta para el desarrollo de la investigación. En primer lugar, se define lo que se va a entender por demostración. En segundo lugar, se describe la tipología de demostraciones de Marrades y Gutiérrez (2000) refinada en Fiallo (2011) y Beltrán-Meneu et al. (2024). Luego se describe lo que se va a entender por *ejemplo*. Y, finalmente, se describen las cinco categorías del marco CAPS de Ellis et al. (2019) y la forma en cómo se usaron cada una de ellas.

3.1 Concepción de la demostración

Reconociendo las distintas concepciones que se tiene de la demostración, en esta investigación se toma la caracterización planteada en Fiallo (2011), quien considera la demostración como “el proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática” (p. 85).

Por tanto, se acepta como demostración las justificaciones empíricas y deductivas descritas por Marrades y Gutiérrez (2000), que se presentan a continuación.

3.2 Estructura analítica de los tipos de demostración

Para identificar la forma en que se seleccionaron y usaron los ejemplos y así explicar qué tipo de demostración termina realizando el estudiante, se considera la estructura analítica de las demostraciones expuesta en Marrades y Gutiérrez (2000), refinada en Fiallo (2011) y Beltrán-Meneu et al. (2024).

Esta estructura analítica permite organizar y analizar tanto los tipos de demostraciones que realizan los estudiantes, como el proceso de producción de dichas demostraciones; a partir de las elecciones y usos de los ejemplos en sus argumentos. En ese sentido, se diferencian dos categorías principales: las demostraciones empíricas y las deductivas, dependiendo si la demostración se basa en comprobar ejemplos o no.

- **Demostraciones empíricas**

Se caracterizan por el uso de ejemplos como principal, tal vez único, elemento de convicción (Marrades y Gutiérrez, 2000). Los estudiantes utilizan los ejemplos y las propiedades identificadas en ellos para demostrar la veracidad o falsedad de una conjetura (Beltrán-Meneu et al., 2024).

Empirismo ingenuo: es cuando la conjetura se demuestra a partir de uno o varios ejemplos seleccionados sin algún criterio en particular. Las argumentaciones se basan en la percepción visual (perceptivo) o en relaciones encontradas en los ejemplos (inductivo).

Experimento crucial: refiere a cuando la conjetura se demuestra o refuta usando un ejemplo o contraejemplo, o secuencia de ejemplos específicos, cuidadosamente seleccionados. En el caso de demostración, el estudiante asume que en cualquier otro caso el resultado será el mismo (Fiallo, 2011).

Se distinguen dos tipos de experimento crucial.

***Experimento crucial basado en el ejemplo*:** sucede cuando la demostración de la veracidad de la conjetura se basa en la existencia de un único ejemplo o ausencia de contraejemplos. Y, para la falsedad de la conjetura, se basa en la existencia de un contraejemplo.

***Experimento crucial constructivo*:** es cuando la demostración está sustentada en construcciones realizadas sobre el ejemplo o en la forma de conseguir el ejemplo o contraejemplo.

Ejemplo genérico: hace referencia a cuando la demostración se basa en un ejemplo concreto, el cual es representante de una clase. Los argumentos se refieren a propiedades y elementos abstractos observados empíricamente tras explorar con ejemplos.

La principal diferencia entre el ejemplo genérico y el experimento crucial, de acuerdo con Fiallo (2011), es que, en el primer caso, la argumentación únicamente consiste en verificar experimentalmente la conjetura en el ejemplo seleccionado. Mientras que, en el segundo caso, la argumentación incluye referencia a elementos o propiedades abstractas de la clase representada por el ejemplo. Se distinguen así dos tipos de ejemplo genérico.

***Ejemplo genérico analítico*:** cuando se usa un ejemplo representante de una clase en la demostración y los argumentos se basan en relaciones y propiedades generales, las cuales fueron descubiertas a partir del ejemplo concreto.

***Ejemplo genérico intelectual*:** cuando se usa un ejemplo representante de una clase en la demostración y los argumentos incluyen algunas partes deductivas, descontextualizadas del ejemplo, y afirmaciones basadas en el ejemplo.

- **Demostraciones deductivas**

Se caracterizan por la descontextualización de los argumentos utilizados. Tiene como fin validar o invalidar la conjetura de forma general a partir de aspectos genéricos del problema, operaciones mentales y deducciones lógicas. Si se usan ejemplos, estos son una ayuda para organizar la demostración, pero las características principales del ejemplo no se tienen en cuenta. Se distinguen tres clases.

Experimento mental: refiere a procesos deductivos abstractos apoyados en observaciones previas sobre ejemplos concretos que sirven para organizar la demostración y no forman parte de esta, sino que son una ayuda para encontrar propiedades y relaciones para construirla. Se distinguen dos tipos.

***Experimento mental transformativo*:** es cuando se transforma el problema inicial, mediante operaciones mentales, en otro que es equivalente. El papel de los ejemplos en este caso es prever qué transformaciones son convenientes.

***Experimento mental estructural*:** consiste en secuencias de deducciones lógicas derivadas de los datos del problema, en las que se hace uso de definiciones, axiomas o teoremas aceptados en la clase. Los ejemplos son usados como ayuda para organizar los pasos de las deducciones.

Deducción informal: refiere a procesos deductivos abstractos que se expresan combinando expresiones verbales con lenguaje matemático, utilizando enunciados que suponen evidentemente ciertos, y basados en operaciones mentales que pueden realizarse con ayuda o no de ejemplos concretos. Las demostraciones deductivas informales pueden ser *transformativas* y *estructurales*, definidas como las demostraciones de experimento mental, pero los ejemplos tienen un papel limitado o incluso no se usan (Beltrán-Meneu et al., 2024).

Deducción formal: cuando en la demostración se usan aspectos genéricos del problema y operaciones mentales sin ayuda de ejemplos. Las demostraciones deductivas pueden ser *transformativas* y *estructurales*, definidas como las demostraciones de experimento mental, pero sin presencia de ejemplos.

Por último, se considera una última categoría denominada **Fallida**, que refiere a todos los intentos de demostración que carecen de la coherencia o el detalle necesarios para asignarlos a las categorías anteriores.

3.3 Concepción del ejemplo y su uso productivo

El término *ejemplo* ha tenido varios significados en investigaciones en educación matemática. Alcock y Weber (2010) consideran el ejemplo como un objeto matemático que satisface la definición de algún concepto. Mills (2014) amplía un poco más este significado, definiendo un ejemplo como un representante específico y concreto de una clase de objetos matemáticos, donde la clase está definida por un conjunto de criterios.

Estas definiciones están dadas más desde una perspectiva del profesor que del estudiante. Sin embargo hay que considerar, como se ha descrito anteriormente, que algunos estudiantes cuando realizan una demostración la basan en comprobar ejemplos, de modo que, para ellos en ese momento, el ejemplo no es solo un objeto matemático que satisface una condición o el representante de una clase, sino que constituye una demostración. En ese sentido, el considerar algo como un ejemplo, depende del punto de vista de la persona.

Por tanto, Goldenberg y Mason (2008) consideran un ejemplo solo cuando una persona lo percibe como tal, sosteniendo que este se sitúa dentro del entendimiento de la persona y sirve como medio para entrar en contacto con ideas abstractas. De manera más general, Zaslavsky (2019) dice que un objeto matemático se considera un ejemplo solo cuando el aprendiz y/o el maestro lo perciben como una instancia de un fenómeno, propiedad, clase o idea.

En el contexto de la geometría euclidiana, Zazkis y Leikin (2008) ven los ejemplos como ilustraciones de conceptos y principios. Un poco más específicos con la definición de ejemplo en geometría, Zodik y Zaslavsky (2007) consideran un boceto, un diagrama, una construcción en el SGD o una construcción con regla y compás como ejemplos visuales.

Por todo lo anterior y para fines de la presente investigación, se considera el ejemplo en el contexto de la geometría euclidiana desde una perspectiva amplia como lo hacen Zodik y

Zaslavsky (2007); como *bocetos, diagramas, construcciones dinámicas o estáticas, usados para ilustrar, entender, generalizar o demostrar una situación, problema, concepto, propiedad, afirmación o teorema*.

Cabe resaltar que esta perspectiva del ejemplo es necesaria que la desarrolle el estudiante, pues éste debe tomar conciencia y distinguir entre las demostraciones empíricas y las demostraciones deductivas. Esto con el fin de que las demostraciones que haga no se basen en comprobar ejemplos, sino que estos sean usados, o no, para apoyar el proceso de demostración.

Y se entiende por uso productivo del ejemplo a una actividad que conduce a: el desarrollo de una conjetura nueva, a una comprensión más profunda de una conjetura y las matemáticas subyacentes, a una generalización, a una apreciación de la necesidad de una demostración, a la generación de un contraejemplo, al desarrollo de una demostración parcial o total, o a la comprensión de una demostración (Ellis et al., 2019; Knuth et al., 2019; Ozgur et al., 2019).

3.4 Marco CAPS

El marco CAPS ofrece una herramienta analítica para examinar la actividad de formulación de conjeturas y demostraciones de los estudiantes con respecto a: sus criterios, propósitos, estrategias para elegir y usar ejemplos; así como los beneficios que obtienen de los ejemplos al evaluar, desarrollar y demostrar conjeturas (Ozgur et al., 2019).

Como se mencionó anteriormente, según Zaslavsky y Knuth (2019), se deben realizar a los estudiantes instrucciones sobre cómo usar los ejemplos de manera productiva. En ese sentido, para realizar estas instrucciones en la secuencia de enseñanza, se tiene en cuenta tres categorías del marco CAPS: *criterios, propósitos y estrategias*.

Este marco, además de ser de ayuda para el diseño de la secuencia de enseñanza, también permite analizar más a fondo, con sus categorías de *posibilidades* y *transiciones*, las formas en que el trabajo con ejemplos apoya la formulación y demostración de conjeturas, y los cambios que suceden en este proceso a partir del uso de ejemplos. Aspectos que el marco de Marrades y Gutiérrez (2000) no permite analizar con tanto detalle y resultan pertinentes para cumplir los objetivos.

En ese sentido, se exponen las categorías del marco CAPS: Criterios, Posibilidades, Propósitos, Estrategias y Transiciones.

Criterios

Esta categoría aborda las razones de los estudiantes para elegir ejemplos. A su vez, está dividida en ocho subcategorías: Fácil, Caso mínimo, Aleatorio, Caso límite, Típico, Primer pensamiento, Familiar y Favorito (ver **Tabla 1**). Esta categoría fue usada para instruir a los estudiantes en la secuencia de enseñanza y en las intervenciones sobre mejores formas en las que se puede elegir un ejemplo.

Tabla 1

Criterios para elegir ejemplos.

	Criterios
Fácil	Los estudiantes eligen ejemplos teniendo en cuenta su facilidad operativa.
Caso mínimo	Los estudiantes eligen un ejemplo que perciben como el ejemplo más pequeño o una condición inicial, pero no eligen el ejemplo para probar los límites de la conjetura.
Aleatorio	Un ejemplo se elige arbitrariamente, con la "aleatoriedad" intencional para resaltar la probabilidad de la verdad de la conjetura.
Caso límite	Los estudiantes eligen un ejemplo de caso extremo o especial, como el caso de identidad.
Típico	Los estudiantes eligen un ejemplo común que se percibe como típico o uno en el que muchos pensarían.

Primer pensamiento	Los estudiantes eligen un ejemplo que primero le vino a la mente. No hay evidencia de una decisión reflexiva sobre la selección de ejemplos.
Familiar	Los estudiantes eligen un ejemplo con propiedades o características conocidas relacionadas con la conjetura.
Favorito	Los estudiantes eligen un ejemplo basado en su forma favorita.

Propósitos

Esta categoría identifica las intenciones de los estudiantes para el uso del ejemplo. Aborda qué intención tienen los estudiantes al momento de usar los ejemplos que eligen. Se divide en once subcategorías: Entender cómo, Probar la verdad, Confirmar la creencia, Explora el dominio de la verdad, Refutar, Transmitir la reclamación, Entender por qué, Transmitir un argumento general, Representación, Desarrollo de conjeturas y Aplacar al entrevistador (en este caso profesor).

Cabe mencionar que el criterio para elegir un ejemplo y el propósito para usar ese ejemplo no están desconectados (ver **Tabla 2**). Esta categoría fue útil para instruir a los estudiantes sobre las formas en las que pueden usar los ejemplos en el proceso de demostración.

Tabla 2

Propósitos para el uso del ejemplo

	Propósitos
Entender cómo	El estudiante utiliza un ejemplo con el objetivo de comprender cómo funciona la conjetura.
Testear la verdad	El estudiante usa un ejemplo como test para determinar la verdad de la conjetura.
Confirmar la creencia	El estudiante usa un ejemplo para confirmar su creencia en la verdad de la conjetura.
Explorar el dominio de la verdad	El estudiante utiliza un ejemplo para probar el dominio para el que funciona la conjetura.
Refutar	El estudiante utiliza un ejemplo con la intención de refutar la conjetura. El ejemplo pretende ser un contraejemplo.
Transmitir la reclamación	El estudiante usa un ejemplo (o un contraejemplo) como ilustración de su afirmación de que la conjetura es verdadera (o falsa).

Entender por qué	El estudiante intenta usar un ejemplo para comprender el mecanismo causal detrás de la conjetura, o para comprender por qué la conjetura es verdadera (o falsa).
Transmitir un argumento general	El estudiante usa un ejemplo para transmitir un argumento que apoya su afirmación. El argumento es general; por lo tanto, el estudiante utiliza el ejemplo como un ejemplo genérico.
Representación	*Comprender una representación:* El estudiante utiliza un ejemplo para comprender cómo funciona una representación, o qué representa en relación con la conjetura.
	Ilustrar una representación: El estudiante usa un ejemplo como ilustración para transmitir cómo funciona una representación (como una expresión algebraica o una figura), o qué representa en relación con la conjetura.
Desarrollo de conjeturas	El estudiante utiliza un ejemplo con el objetivo de formar una conjetura.
Satisfacer al profesor	El estudiante proporciona un ejemplo en respuesta a la pregunta del profesor.

Estrategias

Las estrategias se emplean tanto para elegir conjuntos de ejemplos como para determinar cómo usar los ejemplos que se eligieron.

Las estrategias abordan los enfoques estratégicos generales de los estudiantes para conjeturar y demostrar. Por lo tanto, mientras que los propósitos son específicos para el uso de un ejemplo específico, las estrategias son enfoques más amplios que rigen las elecciones de los estudiantes para un conjunto de ejemplos. Se divide en nueve subcategorías: Diversidad, Variación sistémica, Propiedades, Intento de refutación, Estructura, Búsqueda de patrones, Formalidad de la construcción, Salto a la formalidad, Inducción formal (ver **Tabla 3**).

De acuerdo con Ellis et al. (2019), las estrategias se utilizan a veces como una decisión a priori; es decir, si el estudiante se acerca a una conjetura con el objetivo de refutarla (propósito de refutar) y emplea esa estrategia a través de una variedad de ejemplos elegidos, el propósito del estudiante para cada ejemplo individual podría ser refutar, mientras que la estrategia general que el estudiante empleó más ampliamente para la conjetura en su conjunto fue intentar refutar.

Esta categoría se usó para complementar la instrucción sobre el uso de los ejemplos en la secuencia de enseñanza y en las intervenciones. De esta manera, junto con las dos categorías ya mencionadas, se les mostró a los estudiantes criterios, propósitos y estrategias que podían usar para seleccionar y usar ejemplos para apoyar sus procesos de demostración.

Tabla 3

Estrategias para elegir ejemplos

	Estrategias
	Estrategias para elegir conjuntos de ejemplos
Diversidad	El estudiante prueba una diversidad de ejemplos.
Variación sistémica	*Inicial:* Los estudiantes eligen sistemáticamente un conjunto de ejemplos de tal manera que cambian la naturaleza de cada ejemplo sucesivo variando uno o más elementos.
	Continuación: Los estudiantes desarrollan un nuevo conjunto de ejemplos construidos a partir del conjunto anterior.
Propiedades	El estudiante elige un conjunto de ejemplos basados en una propiedad matemática particular o un conjunto de propiedades.
	Estrategias para usar ejemplos
Intento de refutación	El estudiante asume que la conjetura es falsa y primero trata de refutarla con contraejemplos.
Estructura	El estudiante busca un patrón o una estructura matemática a través de un conjunto de ejemplos, e intenta usar el conjunto para identificar características generales.
Búsqueda de patrones	El estudiante intenta encontrar características o patrones similares a partir de ejemplos anteriores sin tener en cuenta ningún elemento estructural o explicativo. Los patrones encontrados son coincidencias y la búsqueda no es específica de la conjetura.
Formalidad de la construcción	El estudiante desarrolla una representación formal como una expresión de lo que es igual en todos los ejemplos.
Salto a la formalidad	El estudiante introduce bruscamente una representación formal que no está relacionada con los ejemplos considerados u ocurre sin el uso de ejemplos.
Inducción formal	El estudiante verifica un número consecutivo de ejemplos y luego extiende su argumento a un caso general, argumentando que todos los casos se pueden generar en función del conjunto de ejemplos inicial.

Posibilidades

En esta categoría se identifican las formas en que el trabajo con ejemplos apoya la comprensión de los estudiantes sobre la conjetura, sus actividades de conjetura y demostración, o sus conocimientos matemáticos en general. Se divide en cinco subcategorías: Obtener información, Generalizar, Apoyo a las conjeturas, Apoyo a la justificación y Comprender las limitaciones (ver **Tabla 4**).

Esta categoría se usó en los análisis para identificar si el uso de un ejemplo resultó productivo o no, a partir de la forma en que este apoyó el proceso de demostración. También fue útil para corregir las instrucciones que se les daba a los estudiantes sobre el uso de los ejemplos.

Tabla 4

Posibilidades de los ejemplos

	Posibilidad
Obtener información	*Entender por qué*: El ejemplo proporciona una visión inicial de por qué la conjetura debe ser verdadera (o falsa).
	Ver un elemento estructural: El ejemplo permite a un estudiante identificar una estructura general a partir de un caso. Esta estructura a menudo proporciona información sobre una demostración potencial.
Generalizar	El ejemplo permite al estudiante hacer una generalización.
Apoyo a las conjeturas	*Nueva conjetura*: El uso de un ejemplo incita al desarrollo de una nueva conjetura.
	Conjetura revisada: Los ejemplos permiten la revisión de una conjetura existente, a menudo restringiendo el dominio de aplicabilidad.
Apoyo a la demostración	*Viable, pero incompleta*: Los ejemplos permiten al estudiante intentar tratar el caso general. El argumento presentado es un enfoque viable para demostrar la conjetura, pero no llega a ser una demostración completa.
	Producir una demostración: Los ejemplos permiten al estudiante producir una demostración viable y completa.
Comprender las limitaciones	Los ejemplos permiten al estudiante comprender las limitaciones de confiar demasiado en el uso de ejemplos en general. El estudiante comprende a través del uso del ejemplo que los ejemplos no pueden conducir a la demostración (excepto en el caso de la prueba por agotamiento).

Transiciones

Esta categoría identifica las transiciones que suceden en la actividad relacionada con la demostración a partir del uso del ejemplo. Se divide en cinco subcategorías: De ejemplos a lo general o formal, De lo general o formal a los ejemplos, De ejemplos a ejemplos, De una creencia sobre la conjetura a otra, De la exploración al cese de la exploración.

Esta categoría fue usada en los análisis para identificar los posibles cambios entre los usos de los ejemplos, pues cuando los estudiantes transitan de un ejemplo a otro el uso que se hace de ellos puede cambiar.

Aunque los autores no presentan una tabla explicativa de cada una de las subcategorías, se presenta una elaborada por los autores de la presente investigación y una reescritura de algunas de ellas para precisar más estas transiciones en nuestro contexto. Por tanto, en lugar de las subcategorías: De ejemplos a lo general o formal y De lo general o formal a ejemplos, definimos las subcategorías: *De ejemplos a argumentos deductivos* y *De argumentos deductivos a ejemplos* (ver **Tabla 5**).

Tabla 5

Transiciones producidas por ejemplos

Transiciones	
De ejemplos a argumentos deductivos	El estudiante pasa de usar ejemplos para formular la conjetura o explorar para construir la demostración, a usar argumentos deductivos que pueden estar guiados o no por el ejemplo.
De argumentos deductivos a ejemplos	El estudiante pasa de usar argumentos deductivos a usar ejemplos para apoyar, verificar o sustentar sus argumentos.
De ejemplo a ejemplo	El estudiante pasa de usar un ejemplo a usar otro. Puede ser de un ejemplo particular a uno genérico, de uno genérico a uno particular, de uno particular a otro particular, de uno genérico a otro genérico.

De una creencia de la conjetura a otra	El estudiante ya no cree en la validez de una conjetura inicial, sino en otra que percibe más adecuada o coherente con la evidencia que ha ido observando.
De la exploración al cese de la exploración	El estudiante pasa de la exploración con ejemplos para encontrar propiedades o relaciones para formular o demostrar la conjetura al cese de estas exploraciones.

4. Método de investigación

Esta investigación tuvo como método el Experimento de Enseñanza Transformativo, dirigido por una conjetura, en términos de Confrey y Lachance (2000).

4.1 El experimento de enseñanza

De acuerdo con Camargo (2021), el Experimento de Enseñanza Transformativo, consiste en "el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza organizada con la meta de poner en funcionamiento una conjetura sobre un aprendizaje específico" (p. 86).

Esta metodología es útil cuando el interés es observar el proceso de aprendizaje en los estudiantes en relación con un contenido específico en contextos donde se busca promover dicho aprendizaje, como es el caso de la presente investigación. El escenario de estos experimentos puede ser el aula de clase, aulas acondicionadas con menor cantidad de estudiantes o grupos de estudiantes voluntarios reunidos en actividades extracurriculares (Camargo, 2021).

En esta investigación, el contenido matemático específico es la demostración en geometría sobre las propiedades y la congruencia de triángulos, donde se buscó promover el uso de ejemplos mediante una secuencia de enseñanza para apoyar el proceso de demostración. El escenario escogido fue el aula de clase de un curso de Geometría Euclidiana con estudiantes del programa de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander.

4.1.1 La conjetura del experimento

Un aspecto importante de este tipo de experimentos de enseñanza es la conjetura, que es entendida como una inferencia sobre cómo deben organizarse, conceptualizarse o enseñarse las matemáticas. Puede verse como un medio para conceptualizar las formas de abordar tanto el contenido como la didáctica de un conjunto de temas matemáticos (Confrey y Lachance, 2000).

La conjetura no es una afirmación que espera ser probada o refutada ni intenta determinar si una intervención funcionó o no. La investigación guiada por una conjetura busca revisarla y reelaborarla mientras la investigación está en proceso; la conjetura evoluciona constantemente a medida que avanza la investigación (Confrey y Lachance, 2000).

De acuerdo con Camargo (2021), la conjetura necesariamente debe estar situada en un marco conceptual, pues la teoría que fundamenta a la conjetura ayuda a entretejer sus dimensiones de contenido y enseñanza. Por ello, a partir de una revisión detallada de la literatura y una fundamentación conceptual sobre el aprendizaje de un contenido matemático específico, se formula la conjetura en relación con cómo enseñar tal contenido particular en el escenario escogido, con el fin de potenciar este aprendizaje.

Esta conjetura es el eje central del experimento, a partir de ella se realiza la planeación de una secuencia de enseñanza relacionada con el contenido matemático de interés. Por ello la importancia de revisarla y reelaborarla; pues esto se hace con la intención de ir realizando ajustes a la secuencia de enseñanza planeada a medida que los investigadores van dando cuenta de si está funcionando el acercamiento conceptual, o si determinadas tareas están logrando el efecto que se esperaba (Camargo, 2021).

Según explican Confrey y Lachance (2000) y Camargo (2021), la conjetura tiene dos dimensiones. En primer lugar, el contenido matemático en cuestión. Es decir, qué debería ser enseñado; sugiriendo una vía de acercamiento conceptual. En segundo lugar, el aprendizaje, es decir, cómo debería ser enseñado; este aspecto de la conjetura guía al investigador sobre: cómo se debe organizar el aula para la instrucción; qué tipo de tareas, actividades y recursos se deben proporcionar para el contenido y cuáles podrían ser los aprendizajes esperados.

Al respecto, la conjetura ya revisada y reelaborada de este experimento de enseñanza que se plantea es: *el proceso de demostración de teoremas referentes a las propiedades y congruencia de triángulos se favorece si se promueve el uso de ejemplos como estrategia a lo largo de este proceso.*

4.1.2 Consideraciones para la secuencia de enseñanza

En lo que respecta al diseño e implementación de la secuencia de enseñanza, Confrey y Lachance (2000) mencionan que componentes como el currículo, las interacciones en el aula y el rol del profesor deben ser tenidas en cuenta.

Currículo: se debe tener en cuenta lo que se espera que los estudiantes y el profesor cubran en el curso dado que, la conjetura determina qué áreas de contenido serán abordadas y el experimento se lleva a cabo en un aula de clase donde el curso se desarrolla continuamente. Por ello, se debe llevar a cabo el experimento de manera que el profesor y los estudiantes tengan tiempo suficiente para cubrir el material prescrito (Confrey y Lachance, 2000).

Este experimento se desarrolló en la primera parte del curso de Geometría Euclidiana, por lo que tuvo una duración de cinco semanas, en las que en cada semana se tenían tres sesiones de clase de dos horas y adicionalmente una sesión de tutoría de dos horas. Esta primera parte del curso, de acuerdo con su distribución, está relacionada con el estudio de las propiedades y congruencia de triángulos; por lo que la secuencia estuvo enfocada en estos conceptos.

Interacciones en el aula: el investigador debe decidir cómo se va a estructurar la instrucción. Si los estudiantes van a trabajar en grupos, individualmente o como una clase completa. Si van a haber actividades de resolución de problemas o más bien un formato de clase magistral o una combinación de ambos. Estos métodos de instrucción están influenciados por las dimensiones didácticas de la conjetura y el marco conceptual (Confrey y Lachance, 2000).

En esta investigación la secuencia de enseñanza se implementó en el Aula Virtual de GeoGebra (AVG) con los estudiantes trabajando en parejas en un computador. Las interacciones en el aula estuvieron orientadas por las siguientes fases que fueron los momentos en los que se desarrollaban las intervenciones:

1) Fase de conjeturación: en esta fase se proponía el problema para que los estudiantes plantearan su conjetura, utilizando sus conocimientos, usando o no sus propios ejemplos e interactuando con GeoGebra para experimentar y validar o invalidar su conjetura. La conjetura se escribía en la hoja de trabajo o en GeoGebra y los estudiantes debían describir el proceso que los condujo a plantearla.

2) Fase de explicitación: el profesor promovía la participación de los estudiantes con el propósito de que ellos comunicaran sus conjeturas, las discutieran en grupo y presentaran argumentos. Los estudiantes planteaban sus argumentos para apoyar sus conjeturas o refutar las de sus compañeros. En esta fase el profesor debía priorizar la participación de estudiantes que hicieron uso de ejemplos que ayudaron a la formulación de la conjetura.

3) Fase de demostración: después de la discusión y del replanteamiento o confirmación de la conjetura, se les solicitaba a los estudiantes construir una demostración. Esta se debía construir en la hoja de trabajo o en el AVG y se debía describir todo el proceso que los condujo a dicha demostración, incluyendo la manera en que usó o no los ejemplos. En algunas actividades esta fase no se realizó, pues había teoremas que se aceptaron sin hacer una demostración.

4) Fase de institucionalización: el profesor proponía a algunos estudiantes explicar sus demostraciones con el fin de analizar el uso de los ejemplos y proponer nuevos ejemplos que condujeran a construir una demostración más cercana a una demostración deductiva.

Rol del profesor: se deben responder algunas preguntas: ¿quién actuará como docente durante la intervención? ¿qué papel desempeñará el profesor durante la intervención? De acuerdo con Confrey y Lachance (2000), en lo que atañe a estas preguntas, en algunas ocasiones resulta acertado que el profesor actual del aula sea el profesor principal de la investigación, dando más tiempo a los investigadores para observar los efectos de la intervención. Esto implica que el profesor del aula debe ser miembro del equipo de investigación, estar familiarizado con la conjetura y participar en el análisis de los datos del experimento. Por ello, en otras ocasiones puede ser mejor que un miembro del equipo de investigación actúe como maestro en el aula durante la intervención.

En este experimento el investigador hizo de profesor del aula y estuvo acompañado por dos miembros del equipo de investigación que ayudaron a tomar información y apoyar al profesor a dirigir los momentos de clase.

Lo que respecta al equipo de investigación, se presenta a continuación.

4.1.3 El equipo de investigación

Como menciona Camargo (2021), los participantes de un experimento de enseñanza son el equipo de investigación y los estudiantes, sujetos de estudio del experimento. En cuanto al equipo de investigación menciona que hay miembros responsables de proponer la secuencia de enseñanza y recopilar la información, un miembro que debe hacer de profesor y otros que apoyan al profesor en la clase.

En este experimento, el equipo de investigación estuvo conformado por el autor de la investigación, el director y codirector del trabajo, en estrecha colaboración con cuatro coinvestigadores. Este equipo mantenía reuniones semanales en las que se discutían las actividades a implementar de la secuencia de enseñanza, los aspectos metodológicos de la clase, y se reflexionaba sobre lo ocurrido en las implementaciones para refinar las actividades de la secuencia de enseñanza. Además, se discutían los análisis de datos que se iban haciendo a medida que la investigación iba avanzando.

Este trabajo permitió que en las reuniones se hicieran pilotajes entre los integrantes del grupo para refinar las actividades antes de cada implementación y hacer las respectivas correcciones, tanto metodológicas como teóricas, que las fundamentan.

En esta investigación, todo el equipo contribuyó en la preparación de la secuencia de enseñanza. El investigador, quien fue el profesor del curso, junto con dos coinvestigadores fueron los responsables de la recopilación de la información y de realizar las respectivas observaciones en el aula de clase tomando notas de campo.

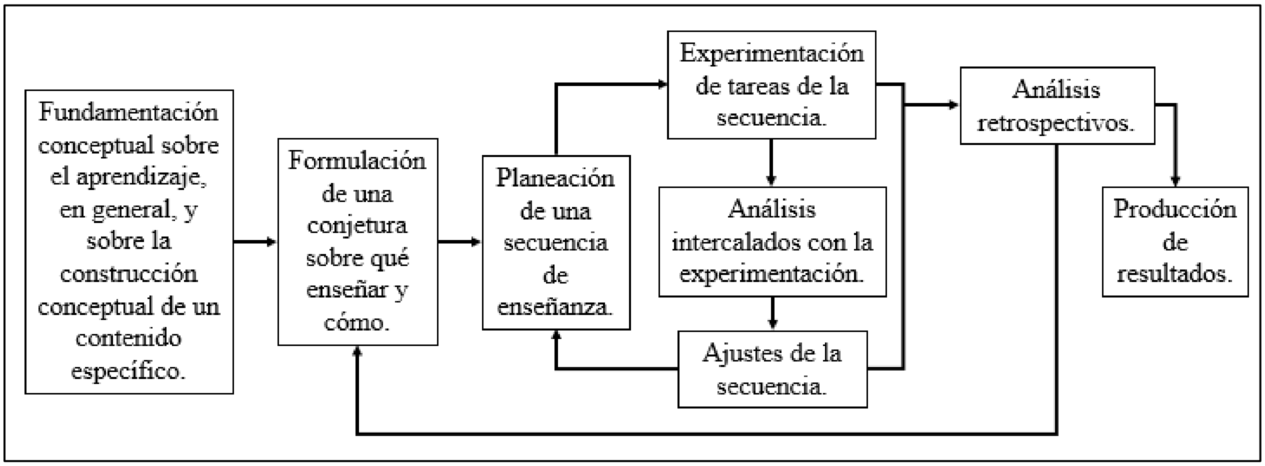
4.1.4 Plan de ejecución del experimento

Según Camargo (2021), los investigadores asisten al aula con una secuencia preliminar de enseñanza, producto de la conjetura que se piensa abordar. Al tiempo que se va desarrollando el experimento se va ajustando la secuencia teniendo en cuenta las limitaciones del contexto escolar, las adaptaciones que se realizan durante la clase y la retroalimentación obtenida a partir de la observación y análisis de las clases. En ese sentido, esta autora propone un plan de ejecución del experimento de enseñanza (ver

Figura 1).

Figura 1.

Plan de ejecución del experimento de enseñanza



Nota. Tomado de *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. recursos para la captura de información y análisis* (p. 89), por Camargo, 2021, Editorial Universidad de Antioquia.

A partir de este plan general, se propusieron las siguientes fases de investigación.

- **Fase I: Fundamentación conceptual y formulación de la conjetura.**

En esta primera fase se realizó una revisión de la literatura sobre: los tipos de demostraciones que realizan los estudiantes; los usos de los ejemplos que hacen en la construcción de demostraciones; el desarrollo del uso productivo de los ejemplos en el proceso de demostración de los estudiantes; y los problemas de demostración en clase de Geometría, relacionados con las propiedades y la congruencia de triángulos. Con base en esta información se planteó la conjetura inicial.

- **Fase II: Planeación de la secuencia de enseñanza.**

En esta fase se diseñó la secuencia de enseñanza en función del objetivo de investigación y de la conjetura realizada. Luego se hizo un pilotaje de la secuencia con el equipo de investigación para discutir y refinar aspectos de esta antes de su implementación.

- **Fase III: Experimentación.**

En esta fase se implementó la secuencia de enseñanza y se realizaron los ciclos repetidos de planeación, experimentación, análisis y ajustes; antes, durante y después de cada intervención.

A continuación, se describen las acciones que se realizaron en cada uno de estos momentos.

Antes de la intervención: se obtenía información sobre el trabajo previo realizado en el aula para tenerlo en cuenta en el diseño de la intervención y en la posterior interpretación de los datos. Se identificaban los objetivos de la intervención y se elaboraban hipótesis sobre los posibles resultados que se pudieran obtener durante la clase.

Durante la intervención: se modificaba durante la clase, si era necesario, el diseño de la intervención considerando los objetivos planteados para esta. Y se recolectaba la información de lo que ocurría durante la clase, incluyendo las decisiones que se tomaron.

Después de la intervención: se analizaba la información recogida en la intervención anterior para reformular y/o revisar las actividades e identificar cómo se actuaría en la siguiente intervención.

- **Fase IV: Análisis retrospectivos y producción de resultados.**

En esta última fase se recopiló y organizó toda la información para realizar algunas actividades de investigación. En primer lugar revisar las evidencias y datos obtenidos a lo largo del experimento con el fin de refinar y modificar la conjetura. Seguidamente, producir una secuencia de enseñanza evaluada y mejorada. Y, por último, concluir la investigación.

4.1.5 Descripción de la muestra

El experimento de enseñanza se realizó en un curso de Geometría Euclidiana con 31 estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, cuyas edades oscilaban entre los 17 y 20 años. Estos estudiantes cursaban el primer semestre y en su mayoría eran provenientes de colegios públicos. Sus clases de geometría de colegio las habían trabajado solamente en un entorno de lápiz y papel, y en consecuencia resultó pertinente instruirlos en el uso del *software* GeoGebra y del AVG.

La secuencia se implementó con todo el curso, no obstante para el desarrollo de la investigación se tomó el registro completo del proceso de demostración de dos parejas de estudiantes. Estos cuatro estudiantes se seleccionaron a la luz de los resultados de una prueba diagnóstica que se realizó para identificar sus saberes previos y la forma en que realizaban las demostraciones. Para su selección se tuvo en cuenta que en la prueba diagnóstica realizaran demostraciones y no solo intentos de ellas o exploraciones inconclusas, también se tuvo en cuenta que no tuvieran experiencias anteriores sobre demostraciones deductivas y sobre conceptos más elaborados de geometría.

Sin embargo, gracias al apoyo de los dos miembros del equipo de investigación que asistían al aula de clase, se pudo tomar a lo largo del experimento el registro de ocho estudiantes más, que dieron información relacionada con el objetivo de la investigación.

4.1.6 Recolección de la información y estrategia de consolidación de datos

La recolección de información, relacionada con el proceso de demostración, se realizó mediante grabaciones de audio y video de las pantallas de las dos parejas seleccionadas. Adicionalmente, se grabaron las respuestas de los otros ocho estudiantes que dieron información relacionada con el uso de ejemplos y la realización de demostraciones; no obstante de esta información solo se contaba con el resultado final de la demostración, por lo que se hacían preguntas para indagar sobre todo el proceso. También se contó con una grabación de audio de la clase en general y con las notas de campo realizadas por los tres investigadores.

Para la consolidación de los datos de la investigación, primero se realizaron las transcripciones de los procesos de demostración de los teoremas que quedaron grabados en los videos de las intervenciones. De estas transcripciones se seleccionaron algunas teniendo en cuenta que en el proceso de demostración se tuviera evidencia del uso de ejemplos y de demostraciones finalizadas ya fuera de manera escrita o verbal. Posteriormente estos datos fueron analizados a la luz de las dos categorías de análisis seleccionadas del Marco CAPS y por la tipología de demostraciones; en el capítulo 5 Análisis y resultados se describe con más detalle la estructura de estos análisis. Finalmente, se seleccionaron algunos de estos análisis en función de responder al objetivo de la investigación.

4.2 La secuencia de enseñanza

En esta sección se presentan los aspectos que fundamentaron la secuencia de enseñanza y se presenta su versión final. Esta secuencia fue desarrollada en el AVG y comprendió 13 lecciones que se implementaron en cinco semanas.

Según Camargo (2021) la secuencia de enseñanza es la que pone en funcionamiento la conjetura realizada, en el sentido en que la secuencia se organiza a partir de la conjetura. Por este motivo, en el caso de la presente investigación, la secuencia tuvo los siguientes dos objetivos centrales:

- **Promover la comprensión y el aprendizaje de las propiedades y la congruencia de triángulos.**

- **Fomentar el uso de ejemplos como estrategia para el desarrollo de demostraciones deductivas.**

En el siguiente apartado, se describen aspectos importantes sobre el diseño de la secuencia.

4.2.1 Consideraciones sobre el qué enseñar y cómo enseñar de la secuencia

En esta sección se explicitan los aspectos generales relativos al *qué enseñar* en la secuencia: definiciones, postulados y teoremas. Luego se describen los aspectos referentes al *cómo enseñar*.

Aspectos generales sobre *qué enseñar*

Los conceptos geométricos de interés son relativos a las propiedades y congruencia de triángulos, por lo que desde antes de diseñar la secuencia de enseñanza se habían preseleccionado algunos teoremas teniendo en cuenta la unidad didáctica presentada en Marrades y Gutiérrez (2000) y el libro guía del curso de Geometría Euclidiana en la UIS, Clemens et al. (1998).

Posteriormente, en las reuniones con el equipo de investigación, se depuró esta preselección teniendo en cuenta el tiempo de duración del experimento, la importancia y relación de los teoremas con las propiedades y la congruencia de triángulos, y las reflexiones y sugerencias de los miembros más experimentados del equipo en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría euclidiana.

Los teoremas seleccionados fueron los siguientes: *teorema de la suma interna de ángulos, teorema del ángulo exterior, teorema de ángulos opuestos por el vértice, teorema de la mediatriz, teoremas de congruencia de triángulos, teorema de la bisectriz, teorema del triángulo isósceles y segundo teorema de Tales.*

Luego de hacer la selección de los teoremas se pensó en cuáles definiciones básicas debían ser las necesarias para conectar con dichos teoremas. Al respecto, Marrades y Gutiérrez (2000) y

Guerrero y Triviño (2018), sugieren que los conceptos básicos relacionados a dichos teoremas y que son necesarios como conocimientos previos antes de empezar la actividad demostrativa en geometría son: el círculo, el punto medio, las rectas perpendiculares y paralelas, y algunas líneas notables del triángulo como la altura, mediana, mediatriz y bisectriz.

Una vez establecidos los conceptos y los teoremas principales, estos debían estar organizados y articulados. Para ello, se tuvo en cuenta lo dicho por Samper y Molina. (2013), quienes expresan que resulta positivo que los estudiantes vivan la experiencia de construir su propio sistema teórico en colaboración con los demás miembros de la clase; buscando que entre ellos se escuchen y validen las conjeturas, argumentos y demostraciones. Con relación a esto, se considera como sistema teórico local de la clase las definiciones, postulados y teoremas que se acordaron y establecieron en el curso.

Por lo tanto, se construyó un pequeño sistema teórico local de la clase que permitió organizar el contenido matemático elegido para enseñar en el experimento. Aunque el trabajo de Samper y Molina (2013) pretende en verdad construir un sistema teórico definiendo conceptos como recta, ángulo, plano, entre otros; este no es el objetivo del presente trabajo, por lo que en el sistema considerado no todos los conceptos están definidos. Al final de este apartado se muestra una imagen de dicho sistema teórico junto con los enunciados de los conceptos, postulados y teoremas trabajados (ver **Figura 2**).

Este sistema teórico sirvió como referencia para organizar las lecciones de la secuencia, de modo que en las primeras lecciones se abordaron los conceptos básicos, luego algunos teoremas relacionados con estos conceptos (adicionales a los ya mencionados) y posteriormente, teoremas relacionados con la congruencia de triángulos.

Aspectos generales sobre *cómo enseñar*

Una vez definidos los aspectos generales relativos a cómo crear el sistema teórico local, cuáles iban a ser los conceptos básicos y teoremas que lo constituyen y cómo están relacionados, cabe preguntarse *cómo enseñar* dichas definiciones de conceptos básicos y teoremas, teniendo en cuenta el entorno del SGD.

Para ello, primero se identificó que una de las dificultades que pueden presentar los estudiantes, de acuerdo con Morales y Samper (2015) y Guarín y Malaver (2023), es no interpretar afirmaciones matemáticas en lenguaje natural como una relación de causalidad, que establece condiciones de dependencia. Es decir, si se usa la definición estándar de circunferencia *como el conjunto de puntos que equidistan de otro*, es probable que algunos estudiantes no identifiquen en dicho enunciado una relación de causalidad implícita por no estar escrita de la forma si-entonces y puedan tener dificultades para expresar una propiedad como*: si dos o más puntos están en una circunferencia, entonces equidistan de su centro*. En consecuencia, para ayudar con esta familiarización con el lenguaje formal y con el reconocimiento de dependencia entre propiedades, todas las definiciones de conceptos y teoremas se trabajaron de la forma si-entonces.

Respecto a *cómo enseñar* las definiciones básicas, Vinner (2002) y De Villiers (1998) sustentan que es necesario que el profesor promueva situaciones en las que los estudiantes puedan formular sus propias definiciones y elegirlas, además de proponer otras situaciones en donde utilicen dichas definiciones acordadas, favoreciendo la deducción. Complementando estas ideas, Silva (2013) menciona que, al momento de abordar una definición, se debe propiciar que, a aparte de que el estudiante conozca la definición formal, debe hacer otras representaciones del objeto o concepto que se está definiendo y establecer relaciones con otros conceptos.

Bajo estas ideas, se procuró que en las definiciones de algunos conceptos básicos (como círculo, rectas paralelas y perpendiculares, mediatriz) fueran exploradas por los estudiantes mediante situaciones propuestas en el SGD para que notaran propiedades o invariantes y a partir de ellos pudieran dar su propia definición en una proposición de la forma si-entonces, para luego discutir las distintas definiciones y consensuar una. Aunque en algunas ocasiones, la definición ya se daba explícitamente por cuestiones de duración de las lecciones y para que los estudiantes la interpretaran y usaran (como la de punto medio, altura, mediana, bisectriz). Posterior a ello, se les pedía que construyeran ejemplos o contraejemplos de dicha definición y que después la usaran para concluir otras relaciones.

A medida que se iban dando algunas definiciones también se proponían teoremas en los que estas definiciones estuvieran inmersas para demostrarlos. De manera general, al momento de abordar los teoremas se siguió procurando que los estudiantes exploraran, formularan sus conjeturas y se consensuara una para luego demostrarla, tal como se describe en los momentos de clase en la metodología: fase de conjeturación, fase de explicitación, fase de demostración y fase de institucionalización.

Con la intención de fomentar el uso de ejemplos en la secuencia de enseñanza, se aplicaron las siguientes estrategias basadas en las categorías de *Criterios*, *Propósitos* y *Estrategias* del marco CAPS de Ellis et al. (2019), y en las sugerencias dadas en investigaciones presentadas en el capítulo de los antecedentes: Knuth et al. (2019), Aricha-Metzer y Zaslavsky (2019), Ellis et al. (2019), Zaslavsky y Knuth (2019).

- **En cada una de las lecciones de la secuencia se hizo la sugerencia de usar ejemplos con algún propósito o estrategia en particular, las que se seleccionaron dentro de las categorías del marco CAPS fueron las siguientes: formular una conjetura, comprender/entender por qué la conjetura es verdadera o falsa, representar y/o**

entender la situación, explorar casos para los que la conjetura es cierta, usar un ejemplo para transmitir argumentos, refutar argumentos, buscar un patrón para identificar propiedades, generalizar una propiedad y desarrollar argumentos formales.

- **En los problemas de construcción se propuso que se hiciera un ejemplo para usar la técnica de análisis, en donde se estudia una figura que representa el problema resuelto (ya sea un dibujo estático o dinámico), para encontrar allí las relaciones entre datos y objetivos hasta encontrar las relaciones que se pueden construir (Acosta 2008).**
- **Si en los problemas de demostración los ejemplos que los estudiantes usaban no les ayudaba a avanzar con el desarrollo de la demostración, el profesor les proponía ejemplos particulares con la intención de que desarrollaran una demostración en ese caso particular y luego generalizaran los argumentos usados.**
- **Las definiciones, postulados y teoremas se escribían en un documento en el que los estudiantes podían hacer ejemplos relativos a dicha regla teórica; además, podían usar tal documento en las clases para tener presente las reglas teóricas.**
- **Para realizar algunas instrucciones sobre cómo usar los ejemplos de manera productiva, en las fases de explicitación e institucionalización el profesor procuraba que algún estudiante que hubiese usado ejemplos relatara la forma en la que abordó el problema planteado; fomentando una reflexión en torno al criterio, propósito y estrategia que se usó para seleccionar el ejemplo; así como las posibilidades o dificultades que generó tal uso.**
- **Con el objetivo de generar una toma de conciencia propia del estudiante en torno al uso de ejemplos, al final de algunas lecciones se les pedía que escribieran un párrafo en el que reflexionaran sobre el uso que habían hecho de los ejemplos y en qué les había ayudado para resolver el problema. Al igual que identificar los propósitos y estrategias con los que usualmente los usaban.**

A continuación, se presentan los enunciados de las definiciones, postulados y teoremas, donde algunos fueron tomados de Guarín y Malaver (2023) y otros formulados junto al equipo de investigación:

Definición de circunferencia: si dos o más puntos están en una circunferencia, entonces equidistan del centro de dicha circunferencia. Si dos o más puntos equidistan de otro, entonces están en una circunferencia con centro en ese otro.

Definición de punto medio: si un punto equidista de otros dos y está alineado con ellos, entonces es punto medio de esos dos puntos. Si un punto es punto medio de otros dos, entonces está alineado con ellos y equidista de ellos.

Definición de rectas paralelas: si dos rectas son paralelas, entonces no se cortan. Si dos rectas no se cortan, entonces son paralelas.

Definición de rectas perpendiculares: si dos rectas son perpendiculares, entonces forman ángulos rectos al intersecarse. Si dos rectas forman ángulos rectos al intersecarse, entonces son perpendiculares.

Definición de rectángulo: si un cuadrilátero es rectángulo, entonces sus ángulos son rectos. Si un cuadrilátero tiene sus ángulos rectos, entonces es un rectángulo.

Definición de altura: si un segmento es una altura de un triángulo entonces va desde un vértice del triángulo hasta la recta que contiene al lado opuesto en dirección perpendicular a esta. Si un segmento va desde un vértice de un triángulo hasta la recta que contiene al lado opuesto en dirección perpendicular a esta, entonces es una altura de dicho triángulo.

Definición de mediana: si un segmento es una mediana de un triángulo entonces va desde un vértice del triángulo hasta el punto medio del lado opuesto. Si un segmento va desde un vértice de un triángulo hasta el punto medio del lado opuesto entonces es una mediana de dicho triángulo.

Definición de mediatriz: si una recta es la mediatriz de un segmento entonces contiene el punto medio de dicho segmento y es perpendicular a él. Si una recta contiene el punto medio de un segmento y es perpendicular a él entonces es la mediatriz de dicho segmento.

Definición de bisectriz: si una recta es la bisectriz de un ángulo entonces lo divide en dos ángulos congruentes. Si una recta divide a un ángulo en dos ángulos congruentes entonces es la bisectriz de dicho ángulo.

Postulado de perpendicularidad y paralelismo: si dos rectas son perpendiculares a otra, entonces son paralelas. Si dos rectas son paralelas y una tercera es perpendicular a una de ellas, entonces es perpendicular a la otra.

Teorema de la mediatriz: si un punto está en la mediatriz de un segmento entonces equidista de los extremos del segmento. Si un punto equidista de los extremos de un segmento entonces está en la mediatriz de dicho segmento.

Postulado de suma interna de ángulos de un triángulo: si en un polígono la suma de sus ángulos internos es igual a 180°, entonces dicho polígono es un triángulo. Si un polígono es un triángulo, entonces la suma de sus ángulos internos es igual a 180°.

Postulado de congruencia LLL: si dos triángulos tienen los tres lados correspondientes congruentes entonces dichos triángulos son congruentes.

Postulado de congruencia ALA: si dos triángulos tienen dos pares de ángulos correspondientes congruentes y los lados comprendidos entre estos congruentes, entonces dichos triángulos son congruentes.

Postulado de congruencia LAL: si dos triángulos tienen dos pares de lados correspondientes congruentes y los ángulos comprendidos entre estos congruentes, entonces dichos triángulos son congruentes.

Teorema. 1: si dos segmentos son radios de una circunferencia, entonces son congruentes.

Teorema 2: si un punto es centro de una circunferencia, entonces es punto medio de su diámetro.

Teorema 3: si A y B son puntos, f es la recta AB, g es una recta perpendicular a f que pasa por B, C es un punto sobre g, h es una recta perpendicular a g que pasa por C, i es una recta perpendicular a f que pasa por A, y D es el punto de intersección de h e i; entonces el cuadrilátero $ABCD$ es rectángulo.

Teorema 4: si AM y BN son medianas de un triángulo ABC, entonces los triángulos AMB y BNA tienen la misma área.

Teorema 5: si DAB es ángulo exterior de un triángulo ABC, entonces las bisectrices de los ángulos DAB y BAC son perpendiculares.

Teorema 6 (Teorema del ángulo exterior): si un ángulo es exterior de un triángulo, entonces es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes de dicho triángulo.

Teorema 7 (Teorema del triángulo isósceles): si un triángulo tiene dos lados congruentes, entonces los ángulos opuestos a dichos lados también son congruentes.

Teorema 8 (Segundo Teorema de Tales): si un ángulo está inscrito en un semicírculo, entonces es recto.

Teorema 9 (Teorema de la bisectriz): si un punto está sobre la bisectriz de un ángulo, entonces está a igual distancia de los lados que comprenden dicho ángulo.

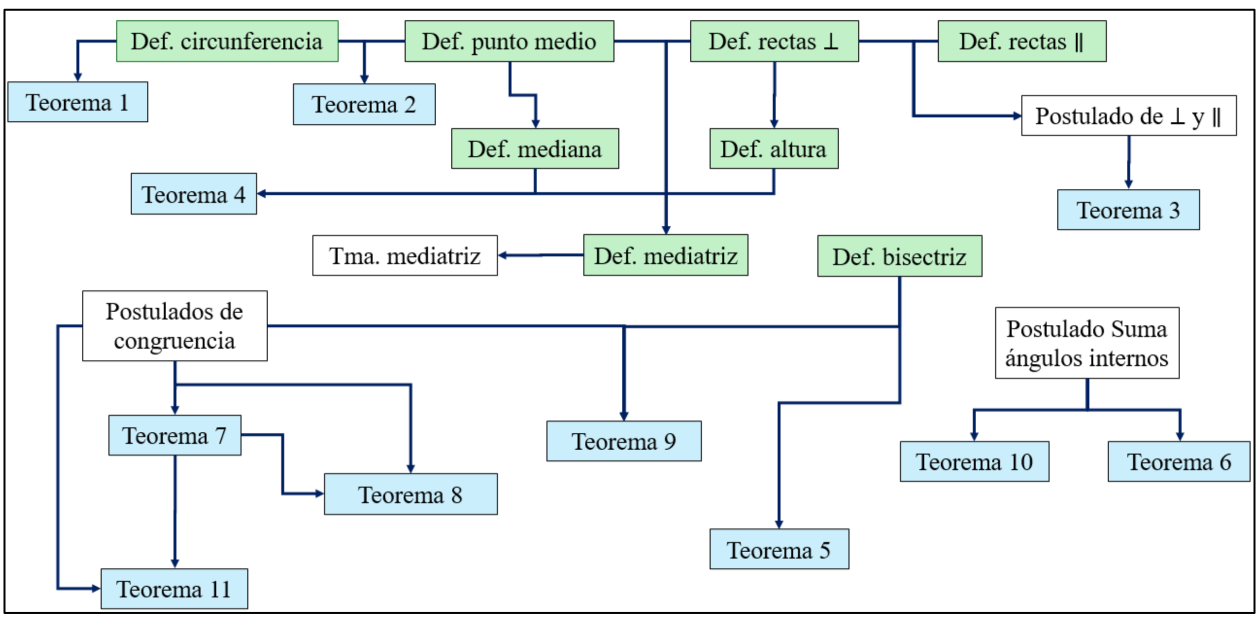
Teorema 10 (Teorema de ángulos opuestos por el vértice): si dos rectas se cortan, entonces los ángulos opuestos por el vértice que se forman son congruentes.

Teorema 11: si un triángulo es isósceles, entonces su altura, mediana y bisectriz, trazadas desde el vértice donde es isósceles, y su mediatriz trazada desde el lado opuesto a dicho vértice están contenidas en la misma recta.

La siguiente imagen representa el sistema teórico local. De color verde los conceptos básicos. De color blanco los teoremas que no se demostraron. De color azul los teoremas que sí se demostraron. Las líneas hacen referencia a que determinada definición, postulado o teorema se utilizó para demostrar otro teorema (ver **Figura 2**).

Figura 2

Sistema teórico local establecido para la secuencia de enseñanza



En el siguiente apartado se describen sucintamente las lecciones que conforman la secuencia y se presenta la secuencia ya refinada.

4.2.2 Presentación de la secuencia

La secuencia de enseñanza que se presenta es el resultado del ciclo de planeación, experimentación, análisis y ajustes que se realizaron con el equipo de investigación antes, durante y después de cada intervención, como se mencionó en la Fase III de la metodología. Donde los ajustes se realizaron a partir de comparar los resultados que se esperaban de cada lección con los obtenidos luego de cada implementación, lo que ponía en reconsideración el planteamiento de algunas lecciones, la forma de su redacción, el nivel de dificultad, la especificación de algunas sugerencias referentes al uso de ejemplos y la organización de los temas. Estas respectivas correcciones se realizaron con el equipo de investigación.

En ese sentido, en este apartado se presenta brevemente la descripción de cada una de las lecciones (ver **Tabla 6**). Donde estas están conformadas por uno, o varios, problemas de demostración o situaciones de exploración si el objetivo de la lección era solamente descubrir propiedades sin demostrarlas. Además, estas lecciones se desarrollan de acuerdo con los momentos de clase mencionados en la sección **4.1.2 Consideraciones para la secuencia de enseñanza**: fase de conjeturación, fase de explicitación, fase de demostración y fase de institucionalización.

La secuencia de enseñanza corregida y refinada se encuentra en el siguiente enlace de libro de GeoGebra.

Tabla 6

Descripción de las lecciones de la secuencia de enseñanza

Lección	Descripción
1) Definiciones básicas: circunferencia.	Se pretende que los estudiantes conozcan el *software*, diferencien construcciones exactas de aproximadas (si resisten o no el arrastre), reconozcan que hay herramientas que garantizan propiedades, que estas se mantienen al arrastrar y que las usen para realizar construcciones exactas. El propósito de la lección consiste en establecer la definición de circunferencia y empezar a realizar demostraciones como: si dos segmentos son radios de una circunferencia, entonces son congruentes (Teorema 1).

	Además, se fomenta la elección de ejemplos a partir de criterios propios, la estrategia de buscar patrones y usarlos con el propósito de desarrollar y transmitir los argumentos.
2) Definiciones básicas: punto medio.	Se busca que los estudiantes sigan conociendo el *software*, interioricen la prueba del arrastre para validar sus construcciones y reconozcan que el uso de herramientas garantizan propiedades. El propósito de la lección consiste en establecer la definición de punto medio y realizar la demostración de: si un punto es centro de una circunferencia, entonces es punto medio de su diámetro (Teorema 2). Además, se fomenta la elección de ejemplos a partir de criterios propios y el propósito de usarlos para entender definiciones, verificar y demostrar una conjetura.
3) Definiciones básicas: paralelismo y perpendicularidad.	Se espera que los estudiantes sigan en el proceso de diferenciar construcciones exactas de aproximadas y que reconozcan que las herramientas garantizan propiedades. Se tiene como propósito establecer la definición de rectas perpendiculares y paralelas a partir de la exploración con ejemplos y el uso de herramientas. Se pretende que los estudiantes formulen sus propias definiciones de rectas paralelas y perpendiculares, y usen los ejemplos con el propósito de apoyar este proceso.
4) Postulado de perpendicularidad y paralelismo. Definición de rectángulo.	Se tiene como propósito establecer el postulado de perpendicularidad y paralelismo mediante ejemplos en el *software* que representan protocolos de construcción. Se pretende que construyan una recta paralela a otra usando la herramienta *Recta perpendicular* y usen el postulado para argumentar por qué la construcción resiste el arrastre. Y, además, se plantea un protocolo de construcción para que, sin realizar la construcción, anticipen qué propiedades se cumplen y luego demuestren el teorema 3 usando el postulado. Se fomenta el uso de ejemplos con el propósito de formular conjeturas, validarlas y guiar la demostración.
5) Altura y mediana de un triángulo.	Se da la definición de altura y mediana, luego se fomenta el uso de ejemplos con el propósito de entender las definiciones. Posteriormente, se plantea un problema de demostración (Teorema 4) que involucra estos dos conceptos. Finalmente, se pide un texto en el que reflexionen cómo los ejemplos ayudaron a realizas las tareas pedidas. Se fomenta el uso de los ejemplos con el propósito de notar invariantes, formular una conjetura y demostrarla.
6) Mediatriz de un segmento	En esta tarea se pretende, a partir de tareas de construcción y exploración en el *software*, llegar a la definición de mediatriz. Luego, se propone otra exploración para llegar al teorema de la mediatriz. Finalmente, se espera

	llegar, mediante exploraciones con ejemplos, al resultado teórico que las mediatrices de un triángulo concurren en un punto llamado circuncentro. Se fomenta el uso de ejemplos con el propósito de buscar patrones, formular conjeturas y generalizar. También se les pide a los estudiantes escribir un texto en el que reflexionen sobre los criterios, propósitos y estrategias con los que usan los ejemplos.
7) Bisectriz de un ángulo	En esta tarea se da la definición de bisectriz de un ángulo y se propone un problema que refiere al teorema 5. Se fomenta el uso de los ejemplos con el propósito de ilustrar y entender los problemas propuestos; además de usarlos con el propósito de argumentar. Y se da un espacio para reflexionar sobre estos usos del ejemplo.
8) Problemas de construcción y demostración.	En esta lección se presentan problemas de construcción y de demostración, alusivos a los conceptos de mediatriz, bisectriz, altura y mediana, en los que deben usar estos conceptos para resolver tales problemas. Se trabaja el postulado de la suma interna de ángulos de un triángulo, se da como postulado el 2do teorema de Tales y se propone demostrar el teorema 6. Se fomenta el uso de los ejemplos con el propósito de entender los problemas, ilustrar el problema resuelto y desarrollar conjeturas y demostrarlas. En esta lección se presentan varios problemas, pero no se trabajan todos en la misma clase. Se deben dosificar en las diferentes clases. En el caso de esta investigación, se trabajaron estos problemas en las horas de tutoría que tiene la asignatura semanalmente o se les proponía como trabajo extra-clase a los estudiantes.
9) Concurso de postulados de congruencia de triángulos	Se presenta un concurso de construir triángulos con medidas dadas para tomar conciencia de las formas en las que se puede garantizar la construcción de un triángulo congruente con uno dado, promoviendo conocimientos necesarios para los postulados de congruencia de triángulos. La descripción más detallada de este concurso se encuentra en la lección 9 del libro de GeoGebra.
10) Postulados de congruencia de triángulos	En esta lección se presentan los postulados de congruencia de triángulos (LLL, LAL y ALA) y se fomenta el uso de los ejemplos para construir triángulos congruentes a otro y el uso de contraejemplos para justificar por qué un triángulo determinado no cumple con alguno de los postulados de congruencia.
11) Teorema del triángulo isósceles y segundo teorema de Tales	Se proponen tres problemas de demostración, donde dos consisten en demostrar el teorema del triángulo isósceles y el segundo teorema de Tales (Teoremas 7 y 8).

	Se fomenta el uso de ejemplos como estrategia para obtener información y con el propósito de explorar ideas y construir una demostración. Además, se lleva a pensar en usar los ejemplos con otros propósitos y estrategias que puedan ayudar en la solución de los problemas.
12) Teorema de la bisectriz y del ángulo opuesto	Se propone demostrar el teorema de la bisectriz y del ángulo opuesto (Teoremas 9 y 10), entre otros problemas. Se fomenta el uso de ejemplos como estrategia para obtener información y con el propósito de explorar ideas y construir una demostración.
13) Teorema de las líneas notables	Se propone demostrar el teorema de las líneas notables (Teorema 11). Se fomenta el uso de ejemplos como estrategia para obtener información y con el propósito de explorar ideas y construir una demostración.

5. Análisis y resultados

En este capítulo se presenta el análisis realizado a los datos obtenidos en las grabaciones de las lecciones 2, 5, 7, 8, 11 y 12, que fueron seleccionados a partir de las discusiones del equipo de investigación, en las que hubo consenso sobre cuáles datos eran los que daban información sobre el proceso de resolución de los problemas de demostración, del uso de ejemplos, sus cambios y sus motivos.

Antes de cada análisis se presenta la transcripción de los momentos relevantes en el desarrollo del problema de demostración realizado por los estudiantes, junto con una contextualización de la situación para ubicar al lector. Estas transcripciones se muestran en una tabla de tres columnas, en donde la primera corresponde al número de intervención, la segunda al nombre del estudiante o el profesor y la tercera a las acciones realizadas. En paréntesis redondos ( ) se complementa la información de lo que quiso decir la persona y en paréntesis cuadrados [ ] se describen las acciones realizadas que resultan importantes en este proceso y no quedan explícitas.

Los análisis están conformados por la articulación de las dos categorías del marco CAPS y el marco de los tipos de demostración. Con la categoría de transiciones del marco CAPS se pretende identificar los momentos en los que hubo transición entre ejemplos o entre ejemplos y argumentos, con el fin de analizar en esas transiciones posibles cambios en el uso del ejemplo y buscar sus motivos. La categoría de posibilidades permite determinar si algún ejemplo resultó productivo o no en el proceso. Y el marco de demostraciones se usa para describir la forma en que se seleccionaron y usaron los ejemplos, para explicar así qué tipo de demostración termina realizando el estudiante y relacionarlo con la influencia que tuvieron los ejemplos en todo el proceso. Luego de cada análisis se presenta un esquema que destaca los momentos en los que hubo cambios en el uso de los ejemplos, los motivos que generaron estos cambios y cuáles fueron los cambios en el uso. De esta manera se tiene una visión completa de todo el proceso de resolución del problema, identificando usos, cambios y motivos. Al final, se presentan los resultados que se obtienen con base en lo evidenciado en los análisis; resultados enfocados en responder al objetivo de la investigación.

Los motivos identificados como generadores de cambios en el uso de ejemplos en el proceso de demostración fueron los siguientes: *Necesidad de generalizar propiedades y argumentos, Necesidad de organizar propiedades y argumentos, Necesidad de concentrarse en el problema, Exigencias del proceso de demostración y Retroalimentación del profesor o compañero.*

Sin embargo, hubo otro motivo que se identificó: Necesidad de validar empíricamente propiedades. Un motivo que, al menos con la información que se cuenta, se produce luego de que el estudiante formula su conjetura y busca validarla mediante el arrastre en los ejemplos; ocasionando un cambio en el uso del ejemplo en ese instante, pero no en otros momentos del proceso de demostración. Además, esta acción de validar la conjetura antes de demostrarla obedece, según De Villiers (1990), a asegurarse y convencerse de una propiedad antes de sumergirse en procesos deductivos, porque normalmente no se busca demostrar algo de lo que no se está convencido previamente que es cierto. Por estas razones, este motivo no es relevante para estudiar y profundizar en esta investigación, aunque se nombra en los análisis porque es un hecho que tampoco se puede pasar por alto.

Para presentar los motivos se seleccionaron situaciones en las que resultaron relevantes en el proceso de demostración, por lo que algunos motivos pueden aparecer en otras situaciones, pero con un papel más secundario que protagónico.

Antes de iniciar con los respectivos análisis sobre los motivos de cambio del uso del ejemplo y buscando claridad en la investigación, se menciona primero cuáles fueron los usos que se identificaron y que se van a mencionar.

5.1 Usos de los ejemplos identificados

En el proceso de resolución de problemas de demostración se identificó una variedad de usos del ejemplo. Algunos ya mencionados en la literatura consultada y otros que están relacionados. Estos usos se hicieron sobre ejemplos que fueron casos particulares, casos límite o ejemplos genéricos que se propusieron en el papel o en el *software*. Los usos son:

- **Formular y validar la conjetura: se usa uno o varios ejemplos para explorar y formular una conjetura. Luego, se usa la prueba del arrastre para validar empíricamente la veracidad de la conjetura (Marrades y Gutiérrez, 2000; Ellis et al., 2019).**
- **Basar su demostración: el estudiante usa el ejemplo como elemento de convicción para sustentar argumentos en una demostración (Marrades y Gutiérrez, 2000).**
- **Identificar/descartar información: se usa uno o varios ejemplos para explorar e identificar propiedades y relaciones que se puedan usar o no para la demostración de la conjetura (Ellis et al., 2019).**
- **Organizar la información identificada: se usa el ejemplo para clasificar y ordenar lo observado en las exploraciones. El ejemplo funciona como un organizador, donde mediante etiquetas, marcas o señas en él se aclara la información y se organiza para empezar a construir la demostración.**
- **Generalizar propiedades y relaciones: mediante el ejemplo y el arrastre se identifican propiedades o relaciones invariantes que se generalizan (Ellis et al., 2019).**
- **Refutar argumentos: se usa el ejemplo para contradecir o refutar argumentos (Ellis et al., 2019).**
- **Guiar y presentar los argumentos: se usa el ejemplo para orientar el orden del razonamiento deductivo o secuenciar los argumentos. Luego, se usa como recurso comunicativo para escribir una secuencia de deducciones que constituyen la demostración. (Marrades y Gutiérrez, 2000).**

- **Expresar los argumentos: el ejemplo se usa para verbalizar los argumentos, donde se mezcla el lenguaje matemático con expresiones no matemáticas (Beltrán-Meneu et al., 2024).**
- **Entender enunciados teóricos: se usa el ejemplo para representar un concepto, definición, teorema, etc., para comprender su enunciado o significado.**

Existen otros usos mencionados en la literatura, pero que pueden considerarse similares o que están dentro de los mencionados. Por ejemplo, un uso que refiera a descubrir propiedades o generar ideas en la exploración, está relacionado con el de identificar/descartar información. Además, estos usos que se expusieron pueden seguir refinándose en cuanto a especificidad o incluso juntar algunos en un uso más general.

A continuación, se presentan los motivos de cambio entre estos usos durante el proceso de demostración.

5.2 Cambios producidos por necesidad de generalizar propiedades y argumentos

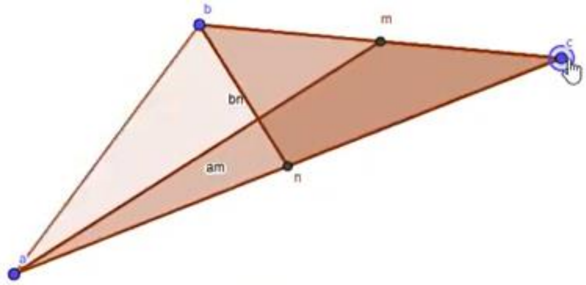
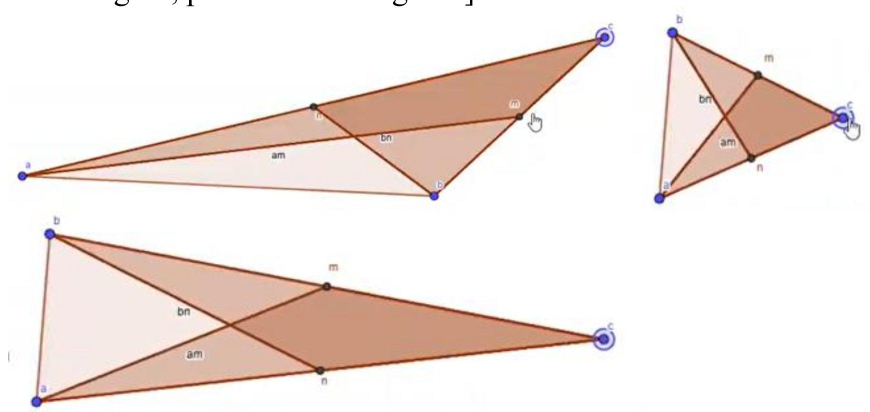
De acuerdo con Riaño (2023) y Lynch y Lockwood (2019), los estudiantes suelen usar ejemplos de casos particulares y realizar demostraciones empíricas, incluso cuando se les ha hecho explícito que las demostraciones deben ser deductivas. Esto es, algunos estudiantes no presentan argumentos generales, les cuesta prescindir del ejemplo para expresar propiedades invariantes y presentar una argumentación que valga para cualquier caso. En ese sentido, este motivo refiere a situaciones en las que los estudiantes sienten la necesidad, por iniciativa propia o no, de generalizar las propiedades que han observado y/o de generalizar argumentos para poder construir una demostración para todos los casos posibles. Lo que lleva a que cambien el uso de los ejemplos en virtud de esta necesidad.

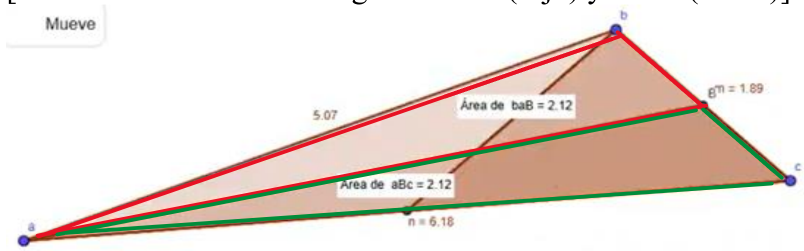
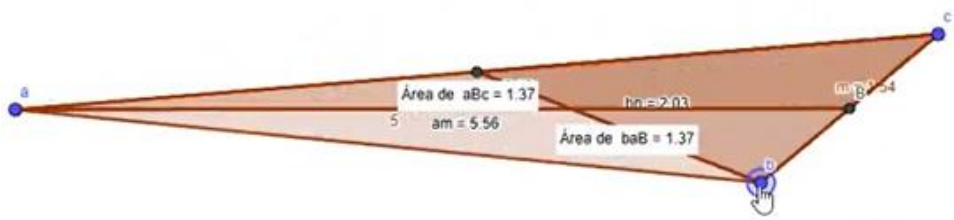
En la situación que aquí se presenta, los estudiantes inicialmente realizan una demostración empírica basada en un caso particular, pero luego experimentan la necesidad de generalizar las propiedades y los argumentos empíricos expuestos. Esta necesidad de generalizar motivó usos del ejemplo que resultaron productivos.

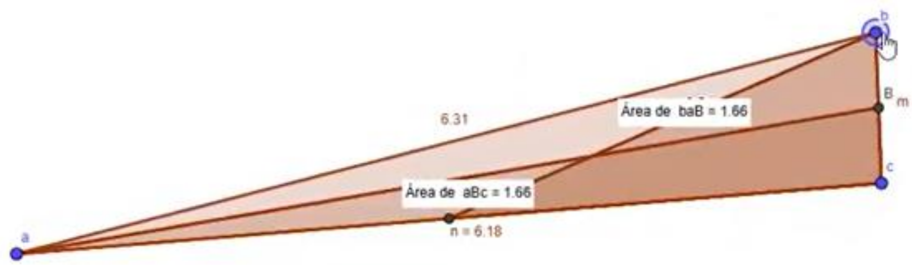
El problema de demostración refiere al teorema 4, que se abordó en la lección 5. El enunciado fue el siguiente.

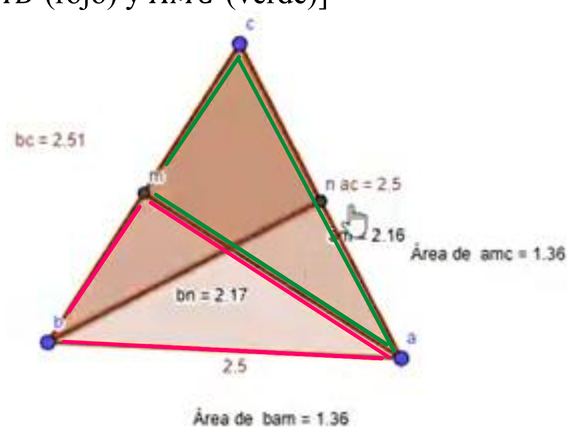
Dado un triángulo ABC, con mediana AM y BN. ¿Qué relación existe entre los triángulos AMC y BNC? Formule una conjetura y demuéstrela.

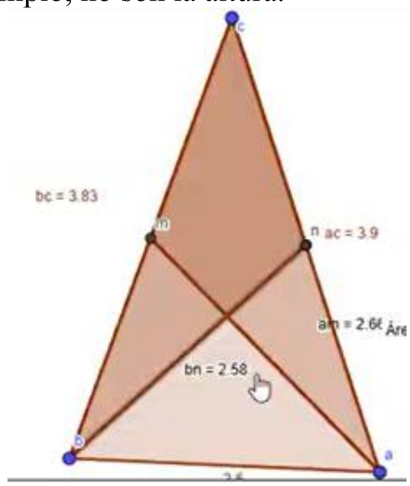
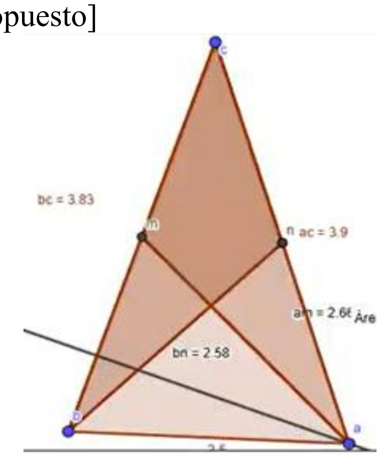
Sugerencia: *use ejemplos de distintos tipos de triángulos con el fin de notar una relación invariante entre los triángulos, formular una conjetura a partir de lo observado, entender por qué la conjetura es verdadera y desarrollar una demostración.*

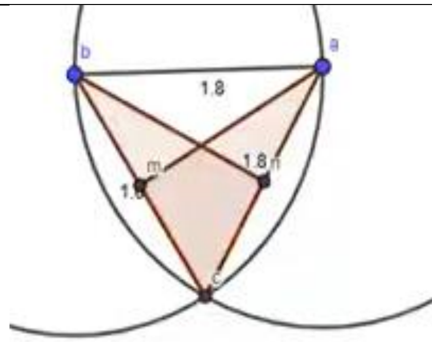
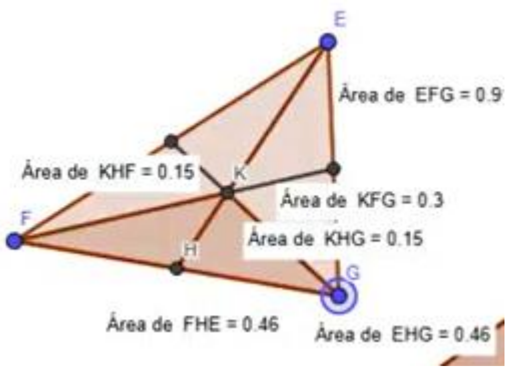
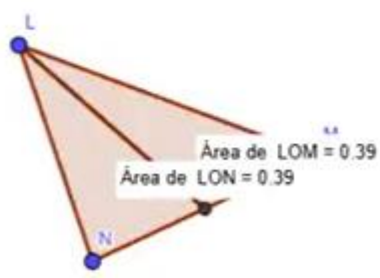
N°	Sujeto	Acciones
1	E3 y E4	[Leen el problema y construyen los objetos dados] 
2	E3	¿Son semejantes?
3	E4	¿Será su área? Yo creo que tiene que ver con el área… Vamos a analizar eso.
4	E3 y E4	[Exploran algunos ejemplos en el *software* e intentan usar la fórmula del área del triángulo, pero sin éxito alguno.] 

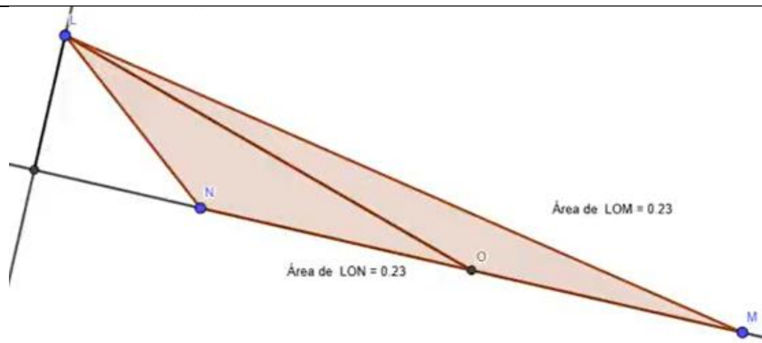
<table>
<tr><td>5</td><td>E4</td><td>¿No había una fórmula para el área con los lados del triángulo? [Busca en el navegador la fórmula de Herón]</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Profesor</td><td>¿Por qué pensaron en esa fórmula?</td></tr>
<tr><td>7</td><td>E3</td><td>Porque creemos que tienen la misma área.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>E4</td><td>[Mide las áreas de los triángulos AMB (rojo) y AMC (verde)]

</td></tr>
<tr><td>9</td><td>E3</td><td>¡Sí, son iguales! [Arrastra la construcción]




Pero ¿por qué?</td></tr>
<tr><td>10</td><td>E4</td><td>[Intenta aplicar la fórmula de Herón para el área de un triángulo] No, pero con esto va a salir muy largo, no sirve.</td></tr>
<tr><td>11</td><td>E3 y E4</td><td>[Construyen perceptivamente un triángulo equilátero ABC y mide las áreas de los triángulos AMB (rojo) y AMC (verde)]

</td></tr>
<tr><td>12</td><td>E3</td><td>Creo que el motivo por el cual las áreas son iguales, intuyo gracias a lo que veo, es por los puntos medios de los segmentos.</td></tr>
</table>

		Porque si usted mira, hay un corte a la mitad, lo que termina creando dos triángulos iguales. Mire esta línea que hay de las medianas (BN), eso es como si fuese la altura y corta a la mitad el triángulo.
13	E4	Y este también (AM). Pero solo se cumple si es equilátero.
14	E3	¿Está seguro de que no se cumple en otro?
15	E4	Sí, en este caso, por ejemplo, no son la altura.  Sí pasan por la mitad, pero alturas no son. Recuerda que debe ser perpendicular. En este caso, esta debe ser la altura [construye una recta perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto] 
16	E3 y E4	[Exploran en el *software* una manera de demostrar la conjetura arrastrando los objetos por la pantalla]
17	E4	A ver, en el equilátero se cumple, porque esa es la altura (refiriéndose a la mediana). [Propone el ejemplo de un triángulo equilátero usando círculos]

		
18	E3	Podemos conjeturar que…
19	E4	Tenemos que AC es igual a BC, por lo tanto, MC es la mitad y NC es la mitad y son la base. Y BN es igual a AM porque es un triángulo equilátero, es la altura, entonces son iguales. Y como tenemos bases y alturas iguales, ambos triángulos tienen igual área.
21	E4	Si construimos un triángulo cualquiera y hacemos sus medianas…y medimos las áreas de esos triángulos.  [Arrastra la construcción]
22	E3	Hay algunas que son iguales…
23	E4	Espere, creo que estoy viendo algo. La mediana divide en dos triángulos con la misma área. [Construye un triángulo, traza una mediana y mide las áreas] 
24	E3	¿Pero por qué pasa eso? Que lo divide en dos triángulos de igual área.
25	E4	Tal vez puede ser por la altura, porque las bases son iguales por la mediana.
26	E3	[Arrastra el triángulo, construye una de sus alturas y prolonga su lado correspondiente]

		 Son la misma altura. Ambos comparten la misma altura.
27	E4	Entonces para resolver el problema, debemos primero aclarar esto.
28	E3	Y como son todos de la misma área, entonces los del inicio tienen también igual área (AMC y BNC).
29	E3 y E4	[Escriben la siguiente demostración] *Para la solución de este problema es necesario demostrar que una mediana de un triángulo parte al mismo en dos triángulos con áreas iguales. Ya que, al hacerlo, podríamos demostrar que todos los nuevos triángulos formados por las medianas trazadas en un triángulo serán iguales entre sí.* *Para demostrar esto, imaginemos una mediana en un triángulo, veamos el lado que toca la mediana como la base de los nuevos triángulos, estas son iguales ya que ambas son la distancia media del mismo segmento. Ahora, veamos el segmento que se forma por una línea perpendicular al lado que toca la mediana, que es la altura de ambos triángulos. Y como tienen igual medida de base y de altura, entonces el área será igual también.*

En [3] E4 conjeturó que es probable que el área de los triángulos esté relacionada y usó algunos ejemplos para formular una conjetura relacionada con esta idea [4]. Estos ejemplos los abordó usando el arrastre con el objetivo de descubrir una propiedad entre las bases y las alturas de los triángulos, de modo que algebraicamente tuvieran una relación para usar la fórmula del área o la fórmula de Herón, pero no tuvo éxito [5].

Luego usaron la herramienta *Área* para medir las áreas de los triángulos AMB y AMC [8], lo que les posibilitó *desarrollar una conjetura:* sus áreas eran iguales. En este momento ocurrió un cambio en el uso del ejemplo, donde ahora usaron el arrastre sobre el ejemplo como prueba para *testear la verdad* de la conjetura formulada [9]. Este cambio fue provocado por la necesidad de validar la conjetura. Luego de esto, se dispusieron a construir la demostración.

En [11] ocurrió una transición *de ejemplo a ejemplo*, particularmente pasaron de ejemplos aleatorios a un ejemplo cuidadosamente seleccionado de un triángulo equilátero para tratar de demostrar la conjetura, emitiendo argumentos empíricos [12]. Sin embargo, en [15] E4 presentó un contraejemplo a esos argumentos, lo que generó una *necesidad de generalizar* que produjo un cambio en el uso del ejemplo, donde ahora, asumimos que usaron el mismo ejemplo del triángulo equilátero para identificar propiedades que se puedan generalizar junto con sus argumentos para otros casos [16 – 19]. Sin embargo, no lo logran.

Es así como luego de volver a repasar sus argumentos en el caso del triángulo equilátero [19] y por la *necesidad de generalizar* dichos argumentos, en [21] prescindieron del ejemplo particular y propusieron un ejemplo genérico; que usaron para presentar una variedad de ejemplos para identificar/descartar información para una posible demostración general [23]. Constituyendo así una transición *de ejemplo a ejemplo*, de uno particular a uno genérico.

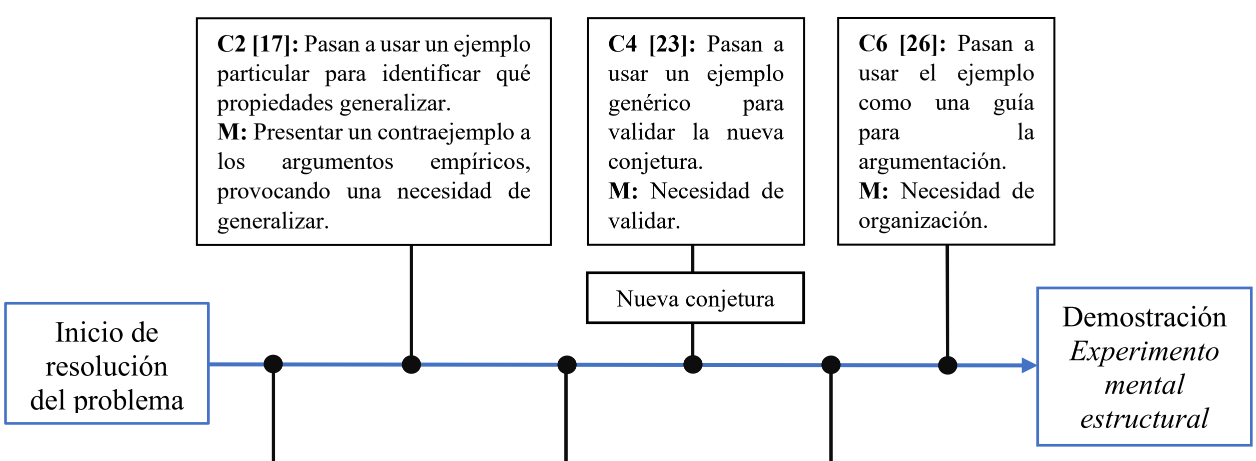
Estas exploraciones sobre el ejemplo genérico posibilitaron *formular una nueva conjetura* relacionada con el problema planteado [22 – 23]: la mediana de un triángulo lo divide en dos de igual área. Esto hizo que se produjera una nueva actividad demostrativa, en el sentido en que ahora buscaron demostrar esta conjetura. Por lo que, motivados por la necesidad de validar su conjetura nueva, transitaron a un nuevo ejemplo genérico en [23] que usaron para efectuar dicha validación midiendo las áreas de los triángulos. Luego en [24] usaron este mismo ejemplo para identificar información para la demostración, un cambio motivado por las propias exigencias del proceso de demostración.

Así, a partir de exploraciones previas sobre el ejemplo genérico, este les posibilitó identificar propiedades para construir una demostración [25 – 26] y en [29] hubo una transición *de ejemplos a argumentos deductivos*; donde cambió el uso del ejemplo para guiar sus argumentos y presentarlos en una demostración. Este cambio de uso fue motivado por una *necesidad de organización*, pues, aunque el ejemplo no hace parte de la demostración, la estructura de esta y los argumentos deductivos que la constituyen hacen referencia a varias acciones realizadas sobre los ejemplos. Determinando una demostración de tipo *experimento mental estructural.*

Sin embargo, los estudiantes no terminan de demostrar el problema inicial, ya que mencionan en [28] que, habiendo demostrado esta nueva conjetura, la del problema inicial también se puede; aunque no lo hacen explícito. Por tanto, la demostración está incompleta.

A lo largo de este proceso los estudiantes realizaron varios cambios en el uso de los ejemplos, incluso cambios de tipo de ejemplos como de un caso particular a uno genérico, permitiendo a los estudiantes avanzar en su proceso de demostración, donde el motivo principal que pudo llevar a los estudiantes a este avance fue la necesidad de generalizar los argumentos empíricos que presentaron para un caso particular. Esta necesidad que ellos mismos provocaron y experimentaron hizo que pasaran a un ejemplo general y formularan una conjetura que demostraron y, aunque no se hizo la demostración completa, hubo argumentos deductivos que se favorecieron por cambios en el uso de los ejemplos.

El siguiente esquema presenta los cambios sucedidos en el proceso de resolución del problema, donde Cn es la numeración de estos y M los motivos que los ocasionaron.



C1 [11]: Pasan de usar ejemplos arbitrarios para formular y validar la conjetura a un ejemplo cuidadosamente seleccionado para basar su demostración. **M:** Exigencias del proceso de demostración (pasar a demostrar la conjetura).	**C3 [21]:** Pasan a usar un ejemplo genérico para identificar/descartar información para una demostración general. **M:** Necesidad de generalizar.	**C5 [24]:** Pasan a usar el ejemplo genérico para identificar información para la demostración. **M:** Exigencias del proceso de demostración.

Como se evidenció, este primer motivo evoca pensar y considerar ejemplos genéricos para generalizar las propiedades identificadas de manera empírica. En este caso se puede afirmar que estos ejemplos genéricos fueron, de acuerdo con Aricha-Metzer y Zaslavsky (2019), un puente que les ayudó a los estudiantes a pasar de visiones empíricas a una comprensión de por qué la conjetura era verdadera; evocando una función explicativa de la demostración. De acuerdo con De Villiers (1990), esta función explicativa surge en estos casos donde las propiedades son evidentes, por lo que no se busca verificar sino explicar por qué sucede aquello que es claro ante los sentidos. Lo que podría aclarar por qué los estudiantes profundizaron más en la segunda conjetura que en la inicial; pues no buscaron verificar la conjetura inicial, sino explicar por qué debía ser verdadera a partir de verificar la segunda conjetura.

Esta necesidad de generalizar se puede provocar, como fue el caso, mediante contraejemplos a los argumentos empíricos. También se puede provocar preguntando si con los argumentos presentados se están abarcando todos los casos posibles y para los distintos tipos de triángulos; es decir, poniendo en duda los argumentos. Incluso mediante el mismo contrato didáctico, estableciendo paulatinamente que los argumentos presentados deben valer para todos los posibles casos.

Este motivo identificado evoca usos sobre los ejemplos genéricos que mencionan Aricha-Matzer y Zaslavsky (2019): identificar aspectos específicos de un ejemplo como invariantes; ver detalles, características y propiedades a través de ese caso genérico y usarlas para conectarlas con la teoría y construir su demostración. Estos usos que mencionan las autoras están relacionados con las siguientes posibilidades del marco CAPS: obtener información, generalizar, apoyar la demostración y comprender las limitaciones del ejemplo. Además, esta necesidad puede llevar a las siguientes transiciones para avanzar en el proceso de demostración: de ejemplo a ejemplo (particular a genérico) y de ejemplos a argumentos formales.

Estas transiciones, posibilidades y usos evocados por la necesidad de generalizar, de acuerdo con los análisis, guardan una relación con los tipos de demostración dados en Marrades y Gutiérrez (2000) y Beltrán-Meneu (2024). En este caso contribuyeron al desarrollo de una demostración de tipo experimento mental, pero pueden apoyar la construcción de demostraciones de tipo deducción informal, así como las de tipo ejemplo genérico. En la **Tabla 7** se muestran los usos del ejemplo, posibilidades y transiciones que se pueden dar para llegar a estos tipos de demostración mencionados, aclarando que no son una condición necesaria o suficiente para que dicho tipo de demostración se dé.

Tabla 7

Relaciones teóricas asociadas al primer motivo de cambio

Función de la demostración	Usos del ejemplo	Posibilidades	Transiciones	Tipo de demostración
Explicar	Identificar/descartar información	Obtener información	De ejemplo a ejemplo (particular a genérico)	Ejemplo genérico
	Generalizar propiedades y relaciones.	Generalizar	De ejemplo a argumentos deductivos	
			De argumentos deductivos a ejemplos	

Explicar	Identificar/descartar información.	Obtener información	De ejemplo a ejemplo	Experimento mental
	Generalizar propiedades y relaciones	Generalizar		
	Guiar y presentar los argumentos	Apoyar la demostración	De ejemplos a argumentos deductivos	
		Comprender las limitaciones del ejemplo		
Explicar	Identificar/descartar información	Obtener información, generalizar	De ejemplo a ejemplo	Deducción informal
	Generalizar propiedades y relaciones.	Apoyar la demostración	De ejemplos a argumentos deductivos	
	Expresar los argumentos de la demostración	Comprender las limitaciones del ejemplo		

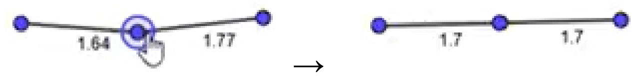
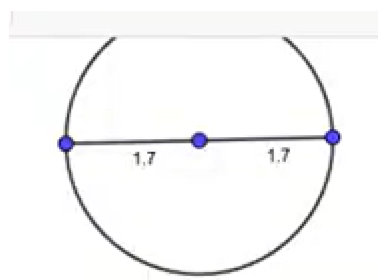
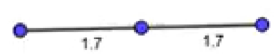
5.3 Cambios producidos por necesidad de organizar propiedades y argumentos

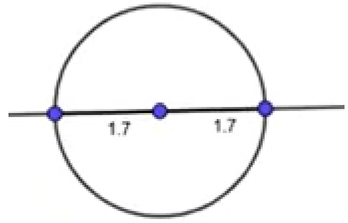
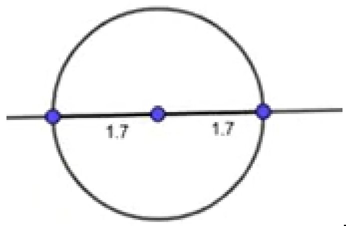
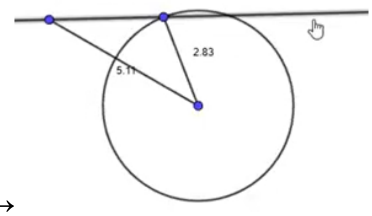
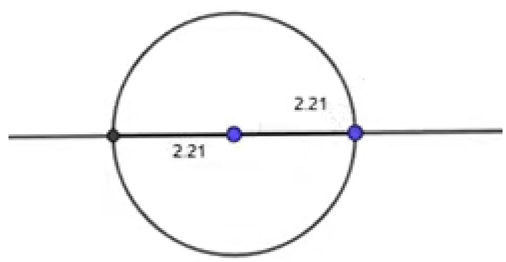
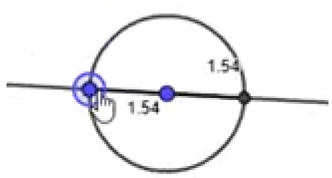
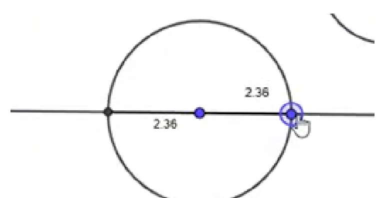
En esta categoría se presenta el motivo de cambio de uso de ejemplos relacionado con una necesidad del estudiante por escribir y organizar las propiedades y argumentos que identificó previamente. Usualmente pasaba que algunos estudiantes expresaban tener unas ideas para su demostración, pero se les dificultaba escribirlas o expresarlas; lo que desencadenaba que usaran los ejemplos como una guía de la demostración, en especial cuando les ponían etiquetas a los objetos en los ejemplos.

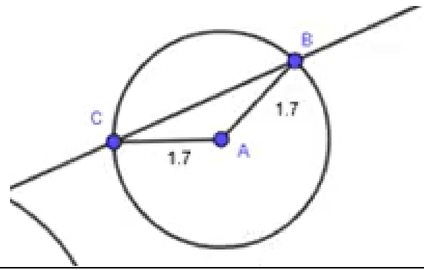
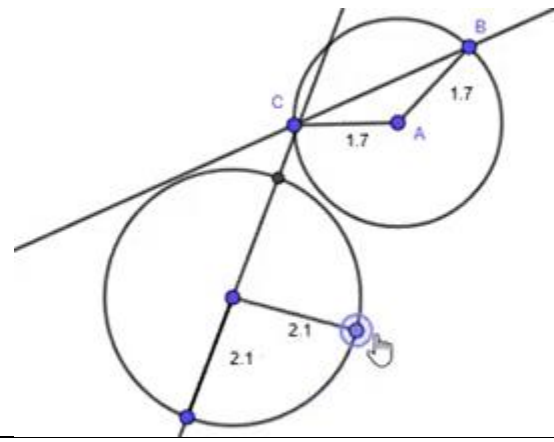
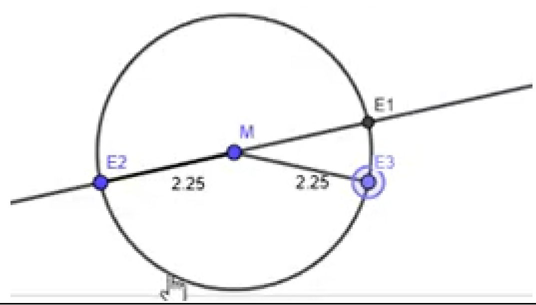
A continuación, se presenta lo ocurrido en la lección 2, donde los estudiantes ya conocían la definición de circunferencia y punto medio. En esta lección se les pidió que, basados en la definición de punto medio, propusieran un ejemplo de: un punto que cumpliera con la definición de punto medio, un punto que cumpliera con la propiedad de alineación, pero no de equidistancia;

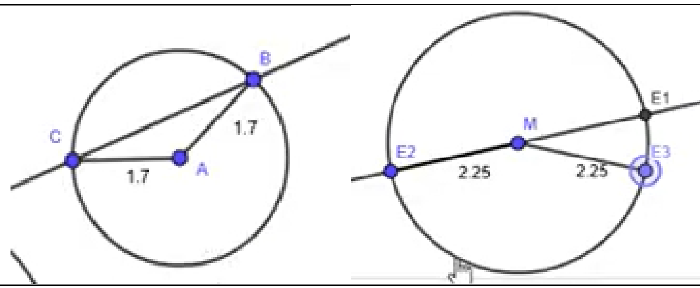
un punto que cumpliera con la propiedad de equidistancia, pero no de alineación; y uno que no cumpliera con ninguna de las dos propiedades.

Se presenta lo ocurrido en el desarrollo de toda la lección porque las tareas del inicio, que no son de demostración, influyeron en la tarea del final que sí lo era.

N°	Sujeto	Acciones
1	E3	*Tarea 1: dé un ejemplo de un punto que sea punto medio de otros dos.* [Lee la tarea, luego la definición de punto medio, construye dos segmentos y los arrastra para que parezcan congruentes y alineados]  [Construye un círculo con centro en el punto del medio y con radio uno de los segmentos]  Nosotros podemos decir, entre muchas comillas, que están alineados los puntos.
2	E4	[Lee la definición de punto medio] Listo… ¿y ahí qué hizo?
3	E3	Hice un ejemplo.
4	E4	¿Por qué lo hiciste así?
5	E3	Porque equidistan, están a la misma distancia. Y están alineados.
6	E4	[Borra el círculo] Es el punto del medio, listo. 
7	E3	Ay, E4, use el círculo porque cuando yo lo pongo desde el centro hasta allá, sí da la circunferencia. (refiriéndose a que, si la circunferencia tiene centro en el punto del medio y radio la mitad del segmento pasará por el otro extremo del segmento).
8	E4	Y uso una recta que pase por los dos y ahí ya están alineados. [Construye una circunferencia con centro en el punto del medio y radio uno de los segmentos].

		
9	E3	Se podría decir que este (punto de la mitad) es punto medio de estos dos (extremos) si equidistan.
10	E4	¿Qué pasa si arrastro la recta…? [arrastra la recta y las medidas ya no son iguales].  →  Si un punto se mueve ya el otro no está alineado…
11	E3	Espere… [construye una circunferencia con la herramienta *Circunferencia (centro, punto)*, una recta que pasa por su centro, marca las intersecciones y mide las distancias].  [Arrastra los puntos para verificar si las propiedades se mantienen] Listo, esta tarea ya.  → 
12	E3 y E4	[Leen la siguiente tarea] Tarea 2: *dé un ejemplo de un punto que cumple con la propiedad de equidistancia, pero no la de alineación. ¿Este punto igual lo considera punto medio? ¿Por qué sí o por qué no?*
13	E4	No es punto medio, porque un punto medio se determina trazando una recta entre dos puntos y si no está alineado, no será punto medio. La alineación importa para determinar un punto medio. Y pues acá es el primer ejemplo que hicimos… pero pongámosle nombres para referirnos a ellos.

		[Pone nombres a los puntos y arrastra la construcción para que los tres puntos no estén alineados] 
14	E3	Pero espere… [arrastra la construcción hecha en la tarea 1 y sobre el círculo construye un punto, el segmento que lo une al centro del círculo y mide su longitud]. 
15	E4	¿Es lo mismo?
16	E3	Sí, pero la diferencia con el de arriba es que este se mueve junto con la longitud (la longitud del radio permanece constante al arrastre del punto sobre la circunferencia).
17	E4	Entonces usemos ambos. [les da nombres a los puntos de la construcción de la tarea 1]. 
18	E3 y E4	[Escriben la siguiente explicación del ejemplo usado para la tarea 1 y 2] *Ejemplo en el applet: En el círculo con centro en A podremos ver dos puntos (C, B) que equidistan de otro (A) mas A no es su punto medio. Ya que la línea más corta entre dos puntos es una recta que pasa por los mismos y solo en ella se puede hallar el punto medio de la distancia. En el círculo con centro en M podremos ver dos puntos $(E2,\ E3)$ que equidistan de otro (M) y M es su punto medio. Esto porque se encuentra sobre la recta que pasa por ambos puntos.*

		
19	E3	Tarea 3: *dé un ejemplo de un punto que cumpla con la propiedad de alineación, pero no de equidistancia*. [Lee la tarea 3 y construye una recta AB, un punto C sobre ella, construye los segmentos AC y CB con su respectiva medida] 
20	E3 y E4	[Escribe la siguiente explicación del ejemplo usado para la tarea 3] *En el ejemplo podemos ver dos puntos (A, B) y un punto C que se encuentra sobre la recta que pasa por A y B. Este punto no se considera punto medio, esto porque la relación de punto medio de otros dos puntos se puede plantear como una relación bicondicional donde si y solo si C se encuentra sobre la línea AB y $AC = AB$, entonces C será el punto medio entre A y B.*

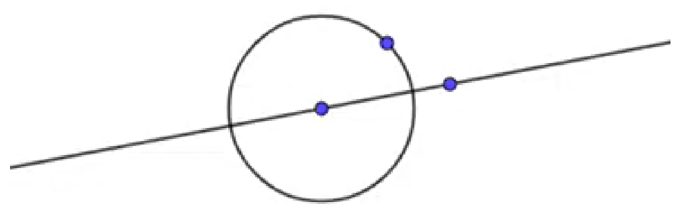
En [1], cuando los estudiantes leyeron la tarea 1 y la definición de punto medio, inmediatamente propusieron un ejemplo que cumplía perceptivamente las propiedades solicitadas. En [7] E3 expresó la necesidad de construir una circunferencia, tal vez influenciado por las tareas de circunferencia trabajadas la clase anterior y la idea de que los puntos sobre ella equidistan de su centro. En [10] los estudiantes arrastraron la construcción y evidenciaron que no resistía el arrastre, lo que llevó a E3 en [11] a hacer uso de herramientas del *software* para garantizar las propiedades de equidistancia y alineación.

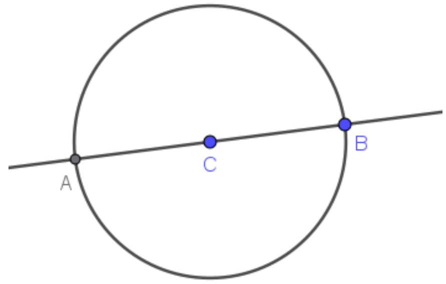
Estas tareas previas resultaron importantes en el desarrollo del problema de demostración, pues los estudiantes anticiparon la conjetura en [7] y usaron un ejemplo con etiquetas en [13] para organizar la escritura de sus respuestas. Lo que se identificó que influyó en el problema de demostración; como se observa a continuación.

N°	Sujeto	Acciones

22	E4	[Lee el enunciado del problema de demostración]
23	E3	Es el punto medio, el centro es el punto medio.
24	E4	Usted escriba y yo le ayudo a redactar.
23	E3 y E4	[Escriben la siguiente respuesta] *La relación que tiene el centro de un círculo con cada uno de sus diámetros es que el centro de la circunferencia es el punto medio de cada uno de los diámetros que están conectados con una recta que corte con el centro de la circunferencia.*
24	E4	Ahora… ¿por qué esto es cierto?

Los estudiantes no tuvieron dificultades al momento de formular la conjetura, reconociendo que la relación era que el centro del círculo es punto medio del diámetro. Posiblemente esta idea la habían anticipado en [7 – 9] cuando construyeron una circunferencia con centro en el punto medio de un segmento e hicieron explícita la relación de punto medio en dicha configuración [9].

24	E4	Ahora… ¿por qué esto es cierto?
25	E3	Pues básicamente vimos que la definición de punto medio cumple con unas ciertas condiciones. Prácticamente que equidistan y están alineados.
26	E4	[Empieza a escribir la demostración] *esto sucede porque el punto medio…* Ay, pero podríamos usar un ejemplo gráfico. Entonces necesito un círculo y una línea recta que pase por aquí (refiriéndose al centro del círculo) [construye un círculo con centro y radio libre, y una recta que pasa por el centro de dicho círculo].  Listo, entonces podemos decir que esa relación se cumple porque… el punto medio está a igual distancia… No, espere. ¿Y si marcamos los puntos de corte con la recta y los llamamos A y B? Y así podemos escribir mejor.
27	E3	Sí, hagamos eso. [Usan el siguiente ejemplo para guiar su demostración]



28	E3 y E4	[Escriben la siguiente aclaración al inicio de la demostración] Supongamos que existe una recta que pasa por el centro de una circunferencia y conecta con dos puntos cualquiera de la misma, llamemos a esos dos puntos A y B, y al centro C.
29	E4	Ahora… [escribe en el espacio de respuesta] la distancia AB es igual a BC, esto porque AB y BC son los radios de la circunferencia que por definición tienen la misma distancia uno del otro… y dado que es una línea recta, se puede decir que el punto C es el punto medio entre A y B.
30	E3	Déjeme hacer una aclaración. Agregar algo… [continúa escribiendo en el espacio de respuesta] Decimos con certeza que es el punto medio, ya que C no solo equidista entre A y B, sino que además C se encuentra alineado sobre la recta A y B.
31	E4	[Lee la definición de punto medio dada] Por definición de punto medio es que se cumple. [Lee y refina lo escrito hasta el momento, agregando que C cumple la definición de punto medio dada en clase] *La relación que tiene el centro de un círculo con uno de sus diámetros es que el centro de la circunferencia es el punto medio de cada uno de los diámetros que estén conectados con una recta que corte con el centro de la circunferencia. Supongamos que existe una recta que pasa sobre el centro de una circunferencia y conecta con dos puntos cualquiera de la misma, llamemos a esos dos puntos A y B, y al centro C. La distancia entre $AC = BC$ esto porque AC y BC son radios de la circunferencia que por definición tienen la misma distancia uno del otro y dado que es una recta donde se encuentra C, se puede decir que el punto C es el punto medio entre A y B por la definición dada al inicio de esta tarea. Decimos con certeza que es el punto medio, ya que C no solo equidista entre A y B. sino que además C se encuentra alineado sobre la recta AB.*
32	E3	Listo, no más.

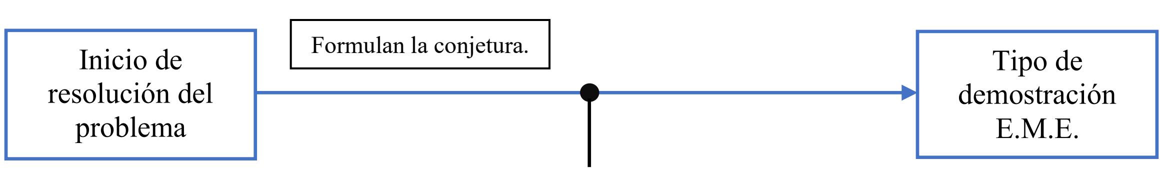
Cuando E4 preguntó sobre cómo demostrar la conjetura, E3 [25] mencionó las condiciones que debe cumplir un punto para ser punto medio de otros dos. Este comentario no pasó desapercibido y la idea de usar la definición resultó importante en la construcción de la demostración.

En [26] E4 motivado por una *necesidad de organización* de sus ideas recurrió a un ejemplo genérico con la intención de organizar la información para la demostración, idea que quedó explícita cuando expresó que puede construir un ejemplo y que si además nombra los puntos, le facilitará la escritura de la demostración.

Este ejemplo es usado como una guía de los argumentos deductivos, como se evidencia en [27 – 28] donde para iniciar su demostración escribieron que se parte del supuesto de la existencia y de las relaciones entre los objetos dados; lo que *posibilitó* producir una demostración. Una demostración que siguió una secuencia de deducciones lógicas derivadas de los datos del problema y de las definiciones de círculo y punto medio; por lo tanto, es una demostración de tipo *experimento mental estructural*.

Los análisis anteriores permiten afirmar que el uso de ejemplos fue productivo, en el sentido en que los ejemplos que dieron los estudiantes en las tareas previas influyeron en la formulación de la conjetura y posibilitaron la construcción de la demostración, lo que favoreció la actividad demostrativa.

El siguiente esquema presenta los cambios sucedidos en el proceso de resolución del problema, donde Cn es la numeración de estos y M los motivos que los ocasionaron.



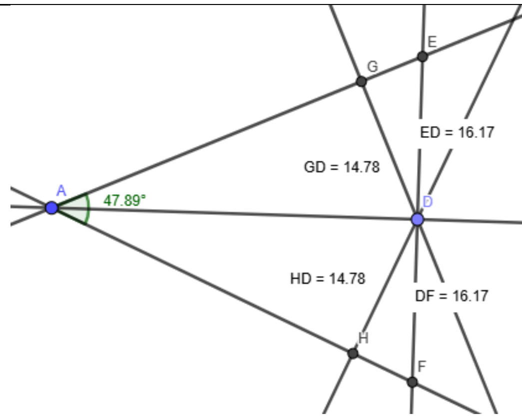
C1 [26]: Pasan directamente a usar el ejemplo como una guía de la demostración. **M:** Necesidad de escribir y organizar los argumentos.

Para E3 y E4 usar un ejemplo con etiquetas les facilitó expresar sus ideas, hacer énfasis en determinadas propiedades que querían destacar y guiar sus argumentos para construir la demostración. Y aunque en esta situación no haya habido en el proceso de resolución del problema otros usos del ejemplo, se reafirma lo dicho por Silva (2013), quien sugiere que cuando se aborde una definición, el estudiante debe hacer representaciones del objeto y establecer relaciones con otros conceptos, para buscar favorecer la deducción. Aspectos que sucedieron en esta situación, ya que a los estudiantes se les presentó tareas en las que debían formular ejemplos de lo que era y no era un punto medio y en la medida que iban realizando estas tareas, iban estableciendo relaciones con la definición de circunferencia, lo que favoreció el proceso deductivo en el problema de demostración.

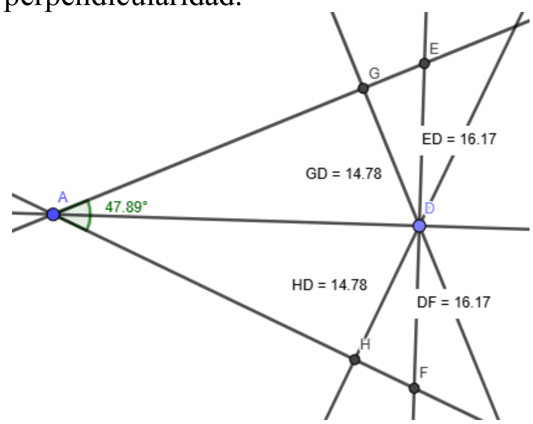
A continuación, se presenta otra situación en la que la necesidad de organización motivó un uso productivo del ejemplo que llevó a una demostración deductiva. Sin embargo, aunque no se tiene evidencia en audio y video de gran parte del proceso de demostración, sí se cuenta con información suficiente para realizar los análisis.

Esta transcripción es de la lección 12, donde el enunciado del problema de demostración refiere al teorema de la bisectriz.

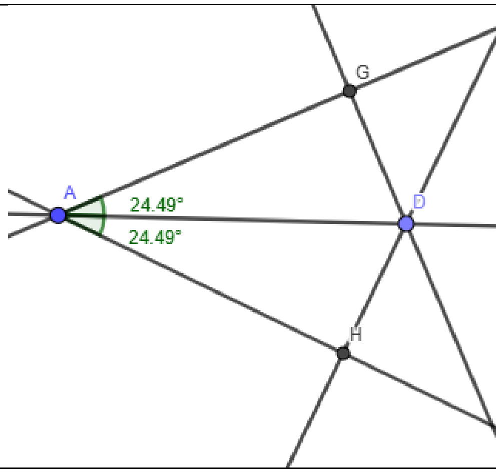
Dado un ángulo y su bisectriz, ¿qué relación tienen los lados que comprenden dicho ángulo con un punto sobre su bisectriz? Formule una conjetura de la forma si-entonces y demuéstrela.

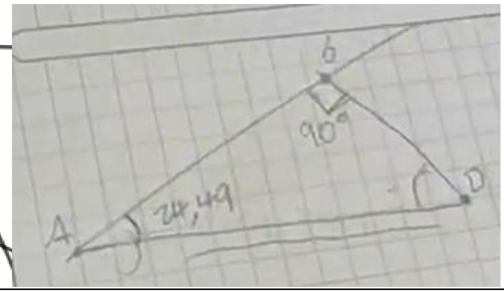
<table>
<tr><th>N°</th><th>Sujeto</th><th>Acciones</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Profesor</td><td>Cuénteme cómo ha ido desarrollando su idea para la demostración del teorema.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>E5</td><td>


Esto se debe a que tenemos el ángulo FAE, el cual es dividido en dos partes iguales DAE y DAF; estos son congruentes por definición de bisectriz.
Luego trazamos una perpendicular en el punto D hasta que interseque los lados del ángulo, por ende, el ángulo ADE y ADF son congruentes de 90°, por definición de perpendicularidad.



Además, el segmento AD es compartido por ambos triángulos y podemos concluir que el triángulo ADE y ADF son congruentes por el postulado de congruencia LAL.
Esto demuestra que este punto (D) es equidistante a los lados del ángulo.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Profesor</td><td>Pero dijimos que la distancia se mide de manera perpendicular a la recta.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>E5</td><td>De mi lógica dije que debe ser de E hasta D y de F hasta D y es la misma distancia…</td></tr>
<tr><td>5</td><td>E5</td><td>[Corrige la demostración]</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Profesor</td><td>Bueno E5, veo que tomó como referencia un dibujo de la construcción que hizo.</td></tr>
</table>





7	E5	Sí, porque lo que queremos demostrar es que esta distancia (GD) es congruente a esta distancia (DH). Entonces trabajé con un triángulo (ejemplo en papel) para ver con qué información contaba. Entonces tenemos el ángulo completo (HAG). (Pasa a exponer sus argumentos en el dibujo). Tenemos la bisectriz y entonces tenemos este ángulo (BAD) que es la mitad del ángulo inicial. Tenemos que esta línea (BD) forma una perpendicular con uno de los lados (AB) de ese ángulo, entonces serían $90°$. Y contamos también con la bisectriz que la comparten ambos triángulos (AB). Y pues este ángulo (BDA) se halla haciendo la suma de los ángulos internos de un triángulo, entonces el restante para llegar a $180°$ sería ese ángulo. Y ya teniendo ángulo-lado-ángulo, podemos demostrar acá (*software*) que este lado (GD) es congruente con este (HD).
8	Profesor	Tengo una pregunta, ¿qué pasa si uno elige un ángulo distinto a este de $24.49°$?
9	E5	Como tal no es trabajar con el número, sino de forma general. De si tenemos un ángulo y se le traza la bisectriz, ya conocemos el ángulo que sería GAD y así ir trabajando.
10	E5	[Presenta la siguiente demostración] *Queremos demostrar que D es equidistante a G y a H, para ello demostrare que los triángulos que se forman son congruentes tenemos el ángulo GAH el cual es dividido en dos partes iguales GAD y DAH, entonces son congruentes (definición de bisectriz), luego tenemos que ambos comparten un lado (este sería la bisectriz del ángulo), nos damos cuenta que podremos obtener los ángulos ADG y ADH con el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo ya que tenemos dos ángulos de dichos triángulos (los congruentes de la bisectriz y los de $90°$ que se obtienen por la perpendicularidad de los segmentos DG y DH respecto a los lados) y ya con esta información podremos utilizar el postulado de congruencia ALA para decir que dichos triángulos son congruentes y por ende los segmentos DG y DH son congruentes y equidistantes.*

Para realizar su demostración, E5 en [2] exploró un ejemplo en el *software* que le posibilitó *obtener información,* identificando una estructura en la configuración de los objetos que le proporcionaba una posible vía de demostración: la congruencia de los triángulos ADE y ADF.

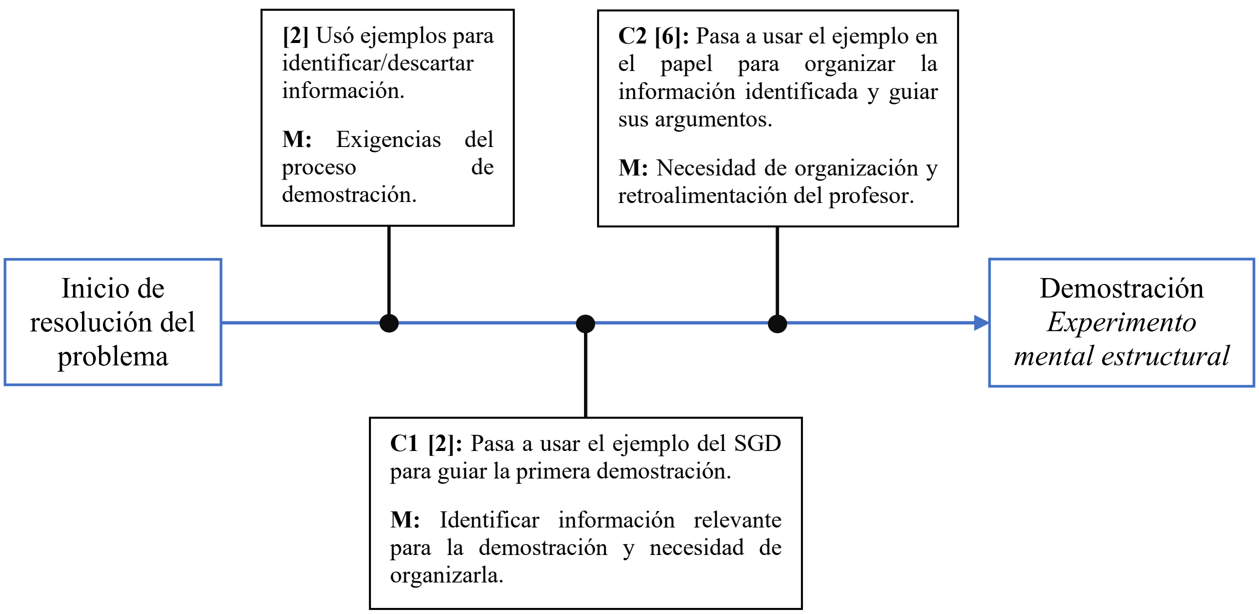
Bajo esta idea de demostrar la congruencia, identificó información en el ejemplo que produjo una transición *de un ejemplo a argumentos deductivos* como los que expresa en [2] que están presentados de manera secuencial y sustentados en teoremas aceptados en clase, con los que concluyó que los triángulos ADE y ADF son congruentes. No obstante, estos argumentos no demuestran la conjetura, como se lo hizo ver el profesor en [3], pero aun así es de tipo *experimento mental estructural.*

Luego de que el profesor puso en duda la demostración, haciéndole saber que había considerado erróneamente las distancias, ocurrió una transición *de un ejemplo a otro* [6], de uno en el *software* a uno en el papel que usó organizar la información identificada [7]; un cambio en el uso del ejemplo motivado por una *necesidad de organización*.

Así, en [7] ocurrió una transición de *ejemplos a argumentos deductivos*, donde presentó una secuencia deductiva de pasos en los que expuso la información necesaria para usar el criterio ALA y concluir que los lados GD y HD son congruentes, demostrando así la conjetura y evidenciando la utilidad de haber usado el ejemplo en el papel para organizar la información y guiar la demostración.

En [8] el profesor pretendió poner en duda los argumentos presentados, pero la estudiante resaltó que el ejemplo lo trató como un ejemplo genérico, prescindiendo de las medidas y lo perceptivo, usando los teoremas y definiciones. Finalmente, en [10] presentó su demostración, que, con base en lo mencionado anteriormente, es de tipo *experimento mental estructural*.

En esta situación la estudiante inicialmente usó el ejemplo en el *software* para identificar/descartar información relevante y luego, una vez la encontró, usó el ejemplo para guiar su demostración. Sin embargo, luego de la retroalimentación del profesor y motivada por una necesidad de organización, usó un ejemplo con etiquetas en el papel para organizar la información identificada y poder guiar y presentar su demostración. A continuación, se presenta el esquema que presenta estos momentos clave.



En este caso la necesidad de organización como motivo de cambio de uso del ejemplo surgió por poner en duda los argumentos de la demostración, aunque de manera directa. Lo que por su puesto también se pudo haber hecho con algún ejemplo o solicitud de medir las distancias para una verificación experimental.

Con base en las dos situaciones, este motivo surge cuando los estudiantes se disponen a construir su demostración y encuentran dificultades para expresar y/o organizar sus argumentos. Este motivo está relacionado con la función comunicativa de la demostración de De Villiers (1990), quien explica que la demostración es una manera en la que el estudiante comunica sus resultados al profesor. La demostración se ve en este caso como una interacción social donde subjetivamente se negocian los criterios para una argumentación aceptable. Además, este autor dice que esta función comunicativa emerge luego de que el estudiante realizó exploraciones y tiene ideas y argumentos para la demostración, por lo que en este punto solo busca comunicar.

La necesidad comunicativa de la demostración lleva al estudiante a una búsqueda de cómo secuenciar sus argumentos, a una forma de presentarlos en la que el otro entienda los resultados. Por ello, se evidencia que una manera en la que los estudiantes organizan la información y guían sus argumentos es usando un ejemplo con etiquetas, donde se puede referir a las propiedades y relaciones de los objetos sin dificultades ni ambigüedades.

Por lo anterior y la naturaleza del uso del ejemplo evocado por este motivo, la necesidad de organización puede promover la posibilidad de apoyar la demostración (identificando posibles vías de demostración y llegando a producir una demostración completa). Además, puede promover la transición de ejemplos a argumentos deductivos.

En estas situaciones, debido a la característica de este motivo de buscar una forma de organizar la información y comunicarla de manera efectiva para presentar la demostración, se evidencia que guarda relación con las demostraciones deductivas de tipo experimento mental y deducción informal, por la descontextualización y guía del ejemplo. Además, se relaciona con las posibilidades y transiciones mencionadas, como se muestra en la **Tabla 8**.

Tabla 8

Relaciones teóricas asociadas al segundo motivo de cambio

Función de la demostración	Usos del ejemplo	Posibilidades	Transiciones	Tipo de demostración

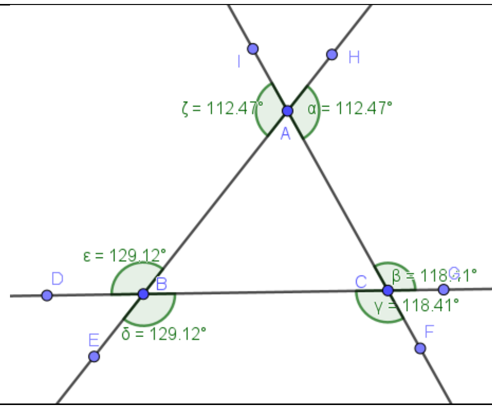
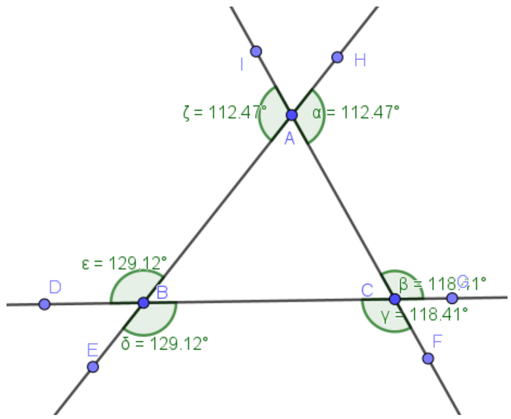
Comunicar	Organizar la información identificada	Apoyar la demostración	De ejemplos a argumentos deductivos	Experimento mental
	Guiar y presentar los argumentos de la demostración			
Comunicar	Organizar la información identificada	Apoyar la demostración	De ejemplos a argumentos deductivos	Deducción informal
	Expresar los argumentos de la demostración			

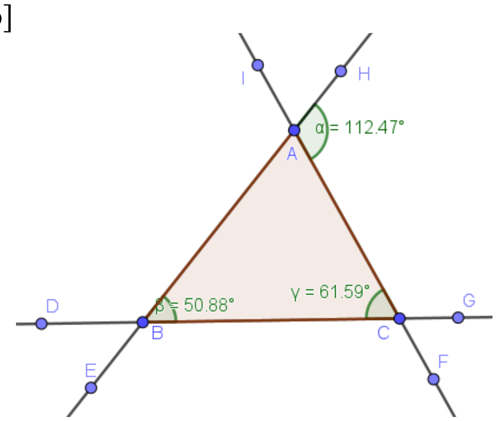
5.4 Cambios producidos por necesidad de concentrarse en el problema

De acuerdo con Komatsu y Jones (2020), el uso exclusivo del SGD no necesariamente conduce al estudiante a progresar en la actividad demostrativa. Esto debido a que se muestran al mismo tiempo gran variedad de diagramas que los pueden distraer. En ese sentido, se observó que algunos estudiantes experimentan en el trabajo con el SGD una necesidad de usar ejemplos en el papel para concentrarse mejor durante el proceso de demostración de la conjetura. A continuación, se presentan dos situaciones donde esta necesidad motivó cambios en el uso de ejemplos.

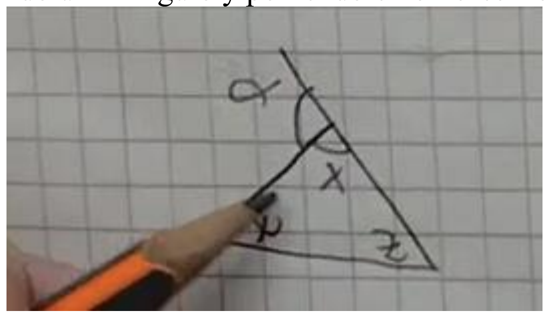
La primera situación refiere al problema que se presentó en la lección 8 ubicada por la mitad del experimento. El enunciado fue el siguiente: *Demuestre que, si un ángulo es exterior de un triángulo, entonces es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes de dicho triángulo.*

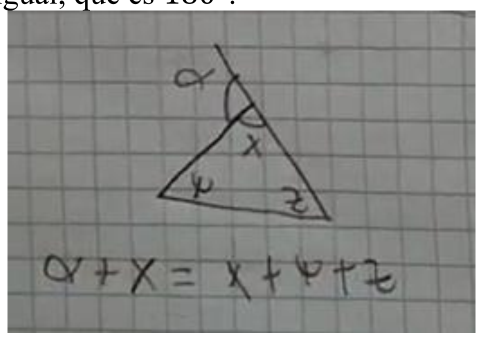
N°	Sujeto	Acciones
1	E1 y E2	[Leen la tarea de demostración]
2	E2	¿No adyacente es el que no le sigue?
3	E1	Es que no comparte ni vértice ni punto. [Empieza a resolver el problema en su cuaderno]
4	E2	Ah bueno. [Construye un ejemplo en el *software*]

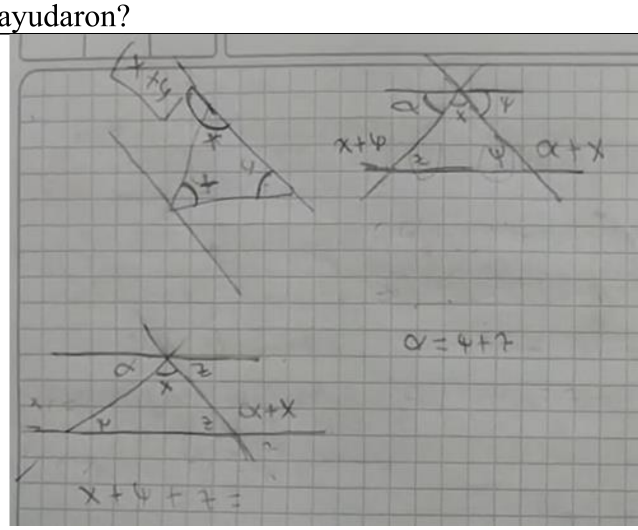
<table>
<tr><td></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>5</td><td>E1</td><td>Ya, ya está. Creo que ya. Voy a formularla mejor [Va a su cuaderno a explorar sus ideas para la demostración].</td></tr>
<tr><td>6</td><td>E2</td><td>O sea que esto (ángulos HAC) es la suma de esto (ángulo CBA) y esto (ángulo ACB).


[Escribe lo siguiente en el espacio de respuesta]
$HAC = ABC + BCA$
$HAC + CAB = 180°$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Profesor</td><td>A veces tener tantos objetos señalados en el software impide ver lo que a uno le interesa. Puede borrar las medidas de los ángulos que no está usando.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>E2</td><td>[Arregla su ejemplo]


HAC es la suma de CBA y ACB. Entonces, como HAC y BAC son suplementarios, entonces dan 180°. Ahora, BAC más CBA más ACB tiene que dar 180°. Entonces… hasta ahí llego.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>E1</td><td>Yo lo hice con otros nombres.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>10</td><td>Profesor</td><td>¿Cómo?</td></tr>
<tr><td>11</td><td>E1</td><td>Empecé construyendo un triángulo y poniéndole nombres a sus ángulos.


Entonces sabiendo que α y x son suplementarios, entonces $\alpha + x$ será $180°$, pero también podemos usar que será igual a la suma interna de los ángulos que va a ser $x + y + z$ que va a ser $180°$. Lo mismo que $\alpha + x$. Entonces estos resultados van a ser igual, que es $180°$.


Cancelamos x en los dos lados porque tienen signo positivo y nos queda que $\alpha = y + z$. Que son los ángulos no adyacentes a α.</td></tr>
<tr><td>12</td><td>Profesor</td><td>¿Usted cómo estableció esa relación entre los ángulos? Veo que arriba hizo más ejemplos, ¿le ayudaron?</td></tr>
<tr><td>13</td><td>E1</td><td>

No, eso me confundió más. Porque sabía que si lo hacía como lo hice, sería más sencillo. Sin embargo, decidí hacer lo otro como para generalizar un poco más. Pero lo resolví acá más fácil, pero allá no.</td></tr>
<tr><td>14</td><td>Profesor</td><td>Pero no usó el software, ¿por qué?</td></tr>
<tr><td>15</td><td>E1</td><td>Porque es más fácil despejar e identificar las propiedades para mí, escribiendo yo mismo con mi lápiz.</td></tr>
</table>

16	Profesor	¿En el cuaderno se le facilita?
17	E1	Sí, es mejor, uno puede modificar lo que uno quiera sin tanta restricción del *software*, pero igual el *software* ayuda.
18	E1 y E2	[Guiado por la demostración de E1, presentan la siguiente demostración en GeoGebra] $HAC + BAC = BAC + BCA + CBA$ *esto por definición de ángulos suplementarios* (HAC *y* BAC) *y definición de suma interna de ángulos* ($BAC + BCA + CBA$) *donde estos conceptos nos dan una suma de* 180°, *por lo que podremos igualar y cancelar* BAC *en ambos lados llegando a que* $HAC = BCA + CBA$.

En [3] E1 empezó a abordar el problema proponiendo ejemplos genéricos en su cuaderno de la situación presentada para explorar propiedades de paralelismo y de ángulos, buscando identificar o descartar información relevante, como se evidencia en la imagen en [13]. Este uso de los ejemplos estuvo motivado por lo que expresó en [15 y 17], donde afirmó que trabajar con el papel y lápiz le facilitó identificar propiedades, permitiéndole mayor flexibilidad y control para concentrarse en sus razonamientos; es decir un cambio producido por la *necesidad de concentración en el problema*.

Sin embargo, estas exploraciones de E1 con los ejemplos en el papel no prosperaron de inmediato, por lo que buscó explorar otra idea que de antemano sabía que podría ser más fácil de abordar; ocasionando así una transición *de un ejemplo a otro*, a un ejemplo genérico de un triángulo con ángulos x, y, z, pero que siguió usando para identificar información relevante.

Al mismo tiempo, E2 exploró algunos ejemplos para comprender la conjetura y saber cuáles eran los objetos involucrados [4 y 6]. Esta exploración le posibilitó *obtener información*, proporcionándole una visión inicial de por qué la conjetura debía ser cierta, información que dice en [8] y donde se produce una transición *de ejemplos a argumentos deductivos*, donde a partir del ejemplo, presentó argumentos basados en teoremas [8]. No obstante, aunque el razonamiento que iba planteando era correcto, no logró construir una demostración en ese intento.

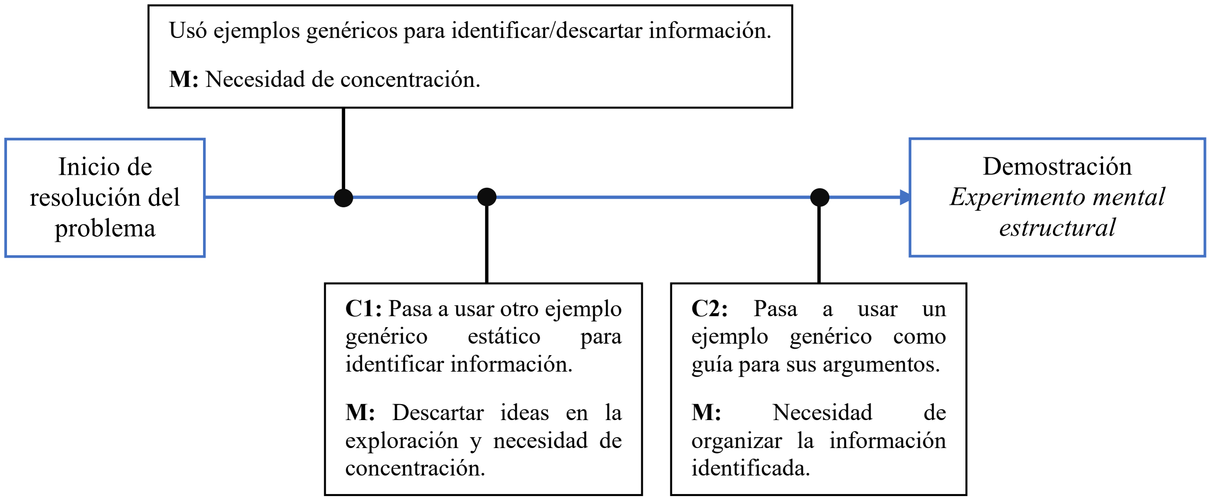
Luego, E1 en [11] expuso su otra idea, la cual abordó desde un ejemplo genérico que usó para ayudar a organizar su demostración. Las relaciones entre los ángulos las verbalizó, las escribió en ecuaciones y las sustentó mediante teoremas aceptados en clase; evocando una transición *de ejemplos a argumentos deductivos*. Concluyendo así su demostración, que es de tipo *Experimento mental estructural*.

Posteriormente, en [18] E2 construyó su demostración, influenciado por la de E1.

De acuerdo con lo analizado, para E2 los ejemplos resultaron productivos hasta cierto punto, en tanto que con ellos pudo entender el problema, identificar los objetos involucrados y hallar relaciones entre ellos, aunque no construyó una demostración por sí solo. En el caso de E1, el uso de ejemplos resultó productivo; le permitió explorar ideas para la demostración, descartarlas, probar otras, concentrarse y realizar una demostración deductiva.

En esta situación presentada, se resalta que E1 abordó directamente el problema desde ejemplos genéricos, sin pasar por ejemplos particulares o casos límite, motivado por una necesidad de concentración para resolver el problema. Además, los cambios en el uso de los ejemplos también fueron pocos. Pasó de usarlos para identificar y descartar información a organizar la información identificada para construir la demostración. Esto muestra una evolución en la forma en que se han ido usando los ejemplos, una más productiva.

El siguiente esquema presenta el proceso de resolución del problema de E1, donde Cn es la numeración de los cambios ocurridos y M los motivos que ocasionaron los cambios de usos de ejemplos.

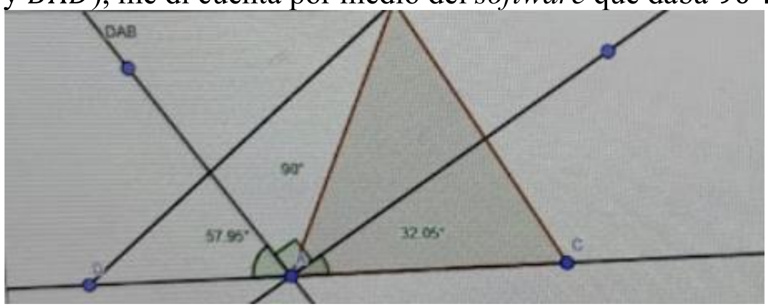
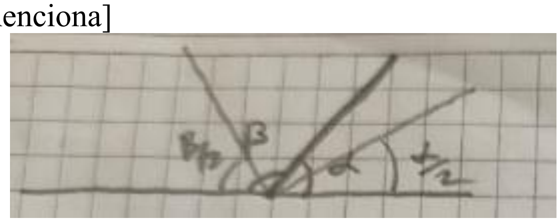


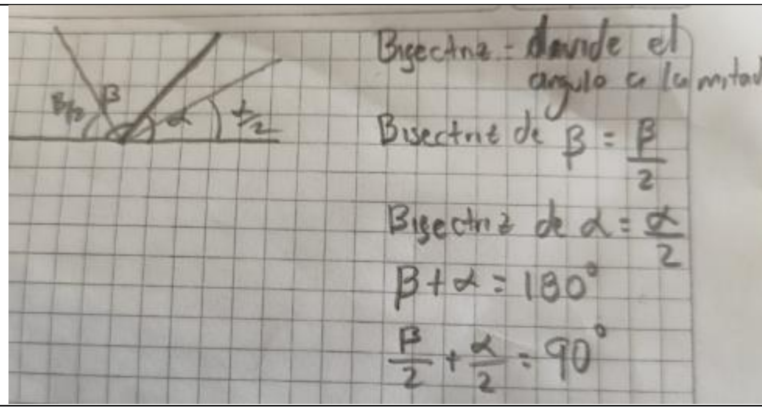
En otra clase se les preguntó a los dos estudiantes por qué trabajaban con ejemplos en el papel cuando querían hacer las demostraciones y esta fue su respuesta, donde dan a entender que buscan una mejor concentración añadiendo marcas y analizando un solo ejemplo.

Profesor	¿Por qué algunas demostraciones las hacen mejor pensando en el papel que en el *software*? ¿A qué puede deberse eso?
E2	Uno en el papel puede dibujar todo lo que uno quiera: rayitas, señas. Y acá uno puede mover para donde quiera, pero no puede poner ciertas cosas que lo hacen pensar a uno más.
E1	Siento más libertad en el papel. Si necesito poner dos ángulos congruentes, pues los señalo y es más fácil. También para señalar un ángulo recto, más rápido y eficiente. Me gusta más trabajar en el papel.
E2	Acá uno piensa algo y mientras mira otra cosa, ya se le olvidó porque no lo marcó.

A continuación, se presenta la segunda situación donde el motivo de necesidad de concentración resulta importante en el cambio de uso del ejemplo en el proceso de demostración.

El problema de demostración era el siguiente, ubicado en la lección 7: *Considere un triángulo ABC con ángulo externo DAB. Construya las bisectrices del ángulo BAC y de su ángulo externo DAB, ¿en qué posición debe estar el punto B para que el ángulo entre las bisectrices sea* *máximo? ¿Por qué?* ***Sugerencia:*** *use ejemplos con el propósito de ilustrar la situación, entenderla y desarrollar su argumentación.*

N°	Sujeto	Acciones
1	Profesor	¿Podría decirme cómo abordó el problema para construir su demostración?
2	E6	Haciendo el problema me di cuenta de que formaba un ángulo de 180°. Entonces cuando hacíamos las bisectrices con respecto a estos ángulos (CAB y BAD), me di cuenta por medio del *software* que daba 90°.  Entonces me pregunté por qué pasaba eso. [A continuación, usa el siguiente ejemplo para guiar sus deducciones, señalando sobre él los objetos que menciona]  Al sumar los dos ángulos (señala β y α) y saber que son suplementarios, sé que dan 180°. $$\beta+\alpha=180°$$ Entonces, si yo sé que saco la bisectriz de cada ángulo aparte, es la mitad de cada ángulo. Y pues si yo a esta fórmula la divido entre dos, me va a dar esta. $$\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}=90°$$ Que la suma de las bisectrices me va a formar un ángulo de 90°.
3		[Imagen completa de la demostración].

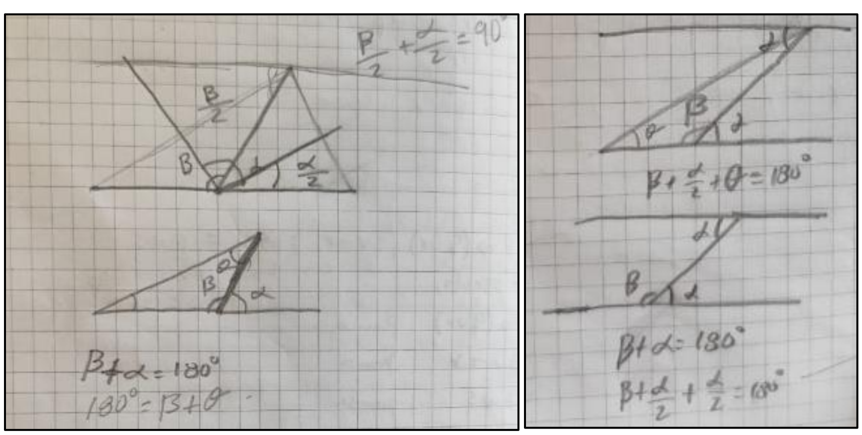


En [2] E6 expuso la demostración que construyó. Inicialmente los ejemplos en el *software* le posibilitaron *producir una conjetura*: el ángulo entre las bisectrices era de 90° siempre. Lo que permite deducir que usó el ejemplo para, al menos, formular la conjetura y posiblemente para validarla.

En su discurso, E6 no profundizó sobre la forma en la que llegó a los argumentos que presentó. No obstante, se puede deducir cómo pudo llegar a estos analizando los dibujos que hizo en la hoja de papel. Las siguientes son imágenes de los ejemplos que abordó el estudiante antes de presentar el ejemplo final con el cual expuso su demostración.

Figura 3

Ejemplos realizados por E6 durante su proceso de demostración

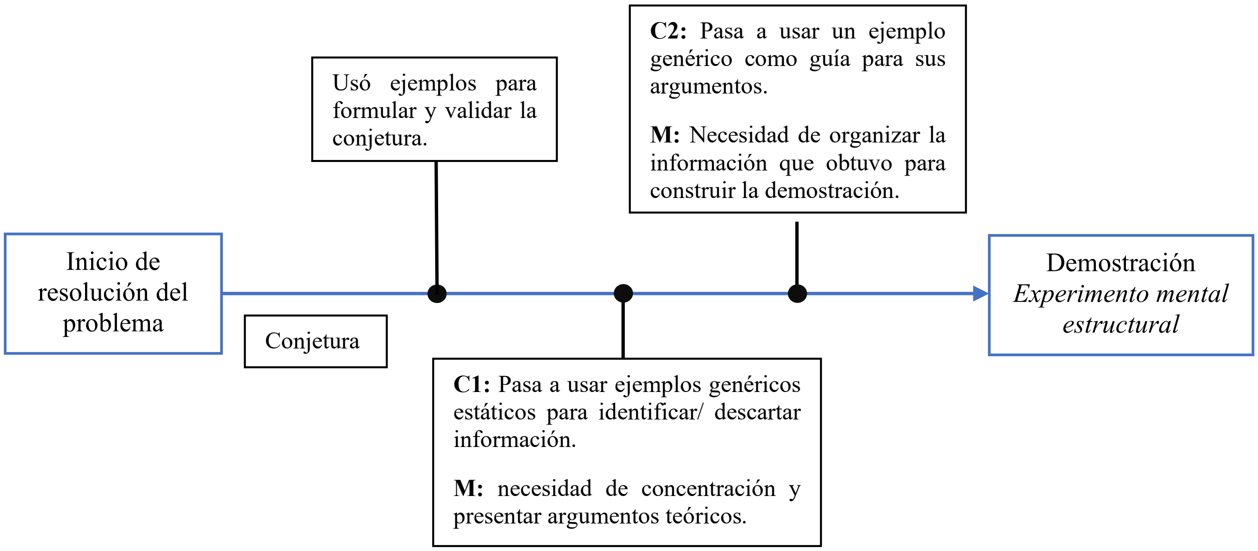


En la **Figura 3** se evidencia que usa ejemplos genéricos presentados en un medio estático, donde en cada uno de ellos hace énfasis a alguna disposición de los objetos y propiedades que logró deducir. E6 expresaba en algunas clases que él prefería trabajar en su cuaderno y no en el *software* porque se concentraba mejor. Aunque resaltaba el uso del *software* para desarrollar las conjeturas gracias al dinamismo.

Estas imágenes muestran que el estudiante iba transitando *de un ejemplo a otro* y estos le posibilitaron *obtener información* que lo iban guiando hacia una demostración mediante las propiedades que iba deduciendo y escribía en forma de ecuaciones: $\beta + \alpha = 180°$, $\beta + \frac{\alpha}{2} + \theta = 180°$ y $\beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 180°$. Inclusive, con estos ejemplos iba descartando ideas, como usar ángulos entre paralelas. Dando a entender que los usó para identificar información y descartar ideas, motivado por el hecho de tener mayor concentración y de usar argumentos soportados en la teoría.

Luego, el uso de ejemplos produjo una transición importante *de un ejemplo a argumentos deductivos* cuando usó el ejemplo final presentado en [2] para organizar sus argumentos. Lo que le posibilitó *producir una demostración* basándose en la definición de bisectriz, de ángulos suplementarios, realizando operaciones algebraicas y presentando paulatinamente la información que fue deduciendo de los ejemplos hasta finalmente concluir la demostración. Una demostración de tipo *experimento mental estructural*.

El siguiente esquema presenta estos cambios, donde C_n es la numeración de estos y M los motivos que lo ocasionaron.



E6 era un estudiante que expresaba que trabajaba en el papel por mayor familiaridad y porque en el *software* "todo se movía" y no le permitía concentrarse en aspectos importantes del problema. Esto generaba que la mayoría de las veces buscaba hacer ejemplos en el papel y trabajar sobre él, como también expresaron E1 y E2, quienes agregaron la facilidad de añadir marcas para recordar e identificar propiedades.

Lo ocurrido en las dos situaciones mostradas lo explican Komatsu y Jones (2020), quienes identifican que los estudiantes al sentirse distraídos por el dinamismo de las figuras en el SGD buscan concentrarse haciendo ejemplos en el papel añadiendo información; aspectos resaltados por los propios estudiantes E1, E2 y E6.

Con base en los análisis, este motivo está relacionado con la función de la demostración para verificar y comunicar (De Villiers, 1990); así como con la necesidad de emplear representaciones simbólicas (Komatsu y Jones, 2020). De acuerdo con De Villiers (1990), la función de verificar usa métodos intuitivos y cuasi-empíricos como prerrequisito para iniciar a demostrar por qué una afirmación es verdadera. Esto concuerda con lo sucedido en las situaciones presentadas, donde antes de iniciar con la demostración se usan los ejemplos en el SGD para convencerse de la veracidad de la conjetura. Sin embargo, cuando se disponen a explorar para construir la demostración presentan una necesidad de concentración y de comunicación. Por un lado buscan analizar un solo ejemplo genérico que sea lo más fiel posible al problema para concentrarse mejor. Por otro lado, buscan añadir marcas y señas en el ejemplo que representen las relaciones identificadas que luego pasarán a formar parte de la demostración. Una demostración que no es del todo verbal ni formulística, sino que busca un intercambio de significados (De Villiers, 1990). En consecuencia, la demostración se usa para validar al tiempo que se usa para comunicar.

Por consiguiente, este motivo de necesidad de concentración puede generar cambios en los usos del ejemplo como: explorar ideas para identificar/descartar información, analizar un ejemplo genérico para abordar de manera general el problema, organizar y expresar ideas haciendo marcas y señas en el ejemplo, y usar un ejemplo para guiar y ordenar sus argumentos. Usos que pueden posibilitar obtener información, generalizar, apoyar las conjeturas y apoyar la demostración. Además de generar transiciones como de ejemplo a ejemplo y de ejemplos a argumentos deductivos. Por lo tanto, promover la necesidad de concentración puede llevar a usos productivos del ejemplo para desarrollar demostraciones de tipo experimento mental y deducción formal. A continuación, se presenta la **Tabla 9** para ejemplificar estas relaciones identificadas.

Tabla 9

Relaciones teóricas asociadas al tercer motivo de cambio

Función de la demostración	Usos del ejemplo	Posibilidades	Transiciones	Tipo de demostración
Verificar y comunicar	Formular y validar la conjetura	Apoyar las conjeturas	De ejemplos a ejemplos (especialmente estáticos)	Experimento mental
	Identificar/descartar información	Obtener información		

	Organizar la información identificada	Generalizar	De ejemplos a argumentos deductivos	
	Guiar y presentar los argumentos de la demostración	Apoyar la demostración		
Verificar y comunicar	Formular y validar la conjetura	Apoyar la demostración	De ejemplos a ejemplos (especialmente estáticos)	Deducción informal
	Identificar/descartar información	Obtener información		
	Organizar la información identificada	Generalizar	De ejemplos a argumentos deductivos	
	Expresar los argumentos de la demostración	Apoyar la demostración		

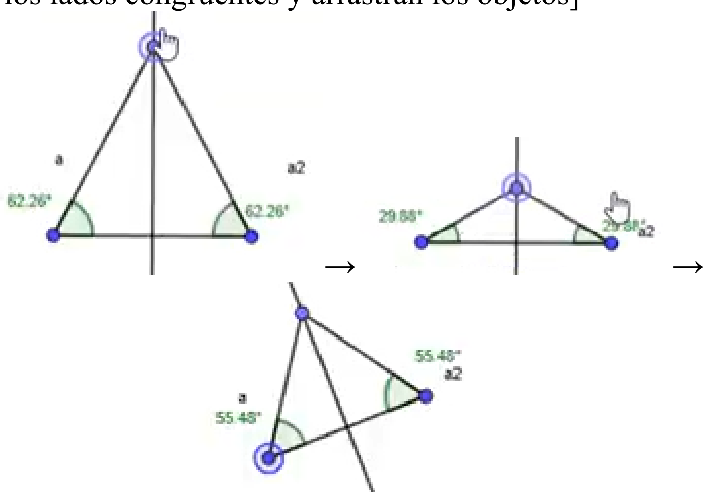
5.5 Cambios producidos por exigencias del proceso de demostración

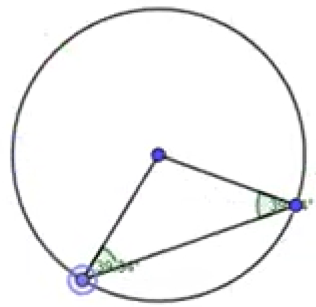
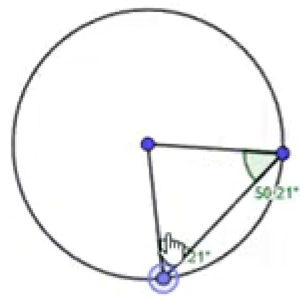
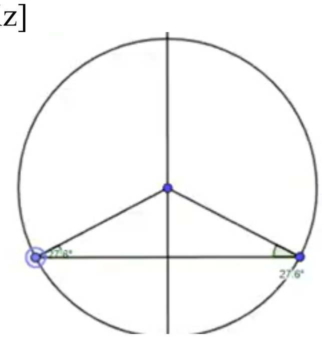
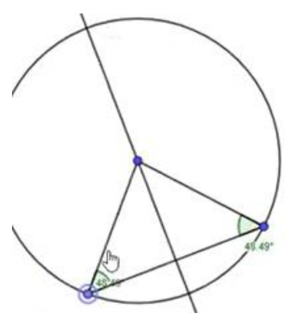
A medida que las clases iban pasando y se iban haciendo retroalimentaciones a las soluciones de los problemas de demostración, los estudiantes interiorizaban que primero debían formular una conjetura que fuera de la forma si-entonces y luego exploraban en el *software* para identificar relaciones y propiedades para construir una demostración que tuviera argumentos deductivos.

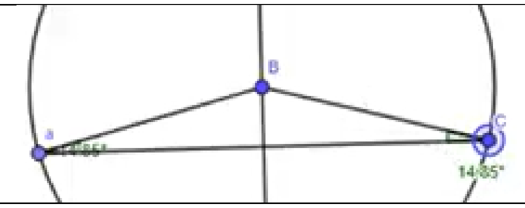
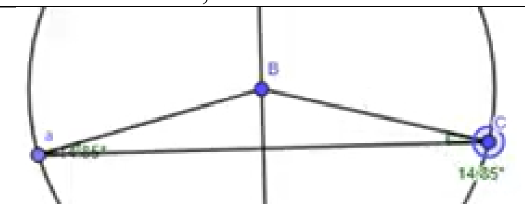
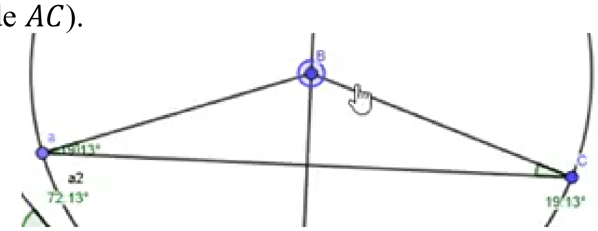
En consecuencia, algunos estudiantes pasaban de usar los ejemplos para formular y validar la conjetura a usarlos para identificar/descartar propiedades en el *software* y finalmente usarlos para guiar su demostración, pero estos cambios no provenían de motivos como los descritos anteriormente, sino que estaban motivados por esta interiorización de cómo debían ser las demostraciones.

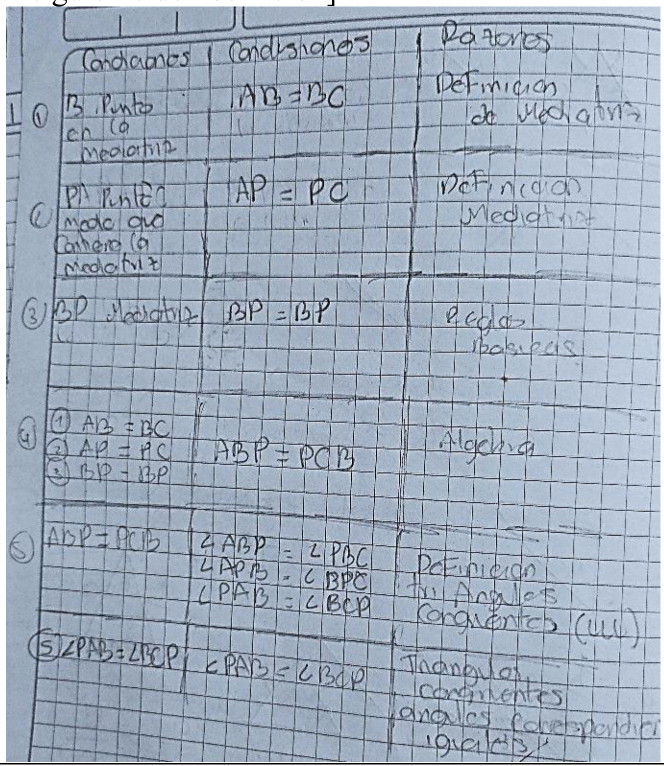
A continuación, se presenta una transcripción de la lección 11, donde la tarea de demostración era sobre el teorema del triángulo isósceles.

Dado un triángulo que tiene dos de sus lados congruentes, ¿qué relación observa entre los ángulos opuestos a dichos lados? ¿Se cumple en todos los triángulos que tienen dos lados congruentes? Formule una conjetura de la forma Si-entonces y demuéstrela. ***Sugerencia:*** *puede usar ejemplos con el propósito de explorar para desarrollar su demostración.*

N°	Sujeto	Acciones
1	E1	[Construye un triángulo equilátero usando la mediatriz, mide los ángulos opuestos a los lados congruentes y arrastran los objetos]  [Escribe la siguiente conjetura] *Los ángulos opuestos a los lados congruentes también serán congruentes*.
2	Profesor	¿Qué ha conjeturado?
3	E1	Yo quiero demostrar por qué se cumple la conjetura, de que si un triángulo es isósceles, entonces los ángulos opuestos a sus lados congruentes también serán iguales o congruentes. El por qué es lo que quiero buscar… Es que eso ya lo sé, es de teoría y me lo han enseñado.
4	Profesor	¿La conjetura que va a demostrar ya la sabía?
5	E1	Sí, siempre me dijeron que si un triángulo es isósceles tendrá dos lados y dos ángulos congruentes.
6	Profesor	Bien, entonces escriba la conjetura y demuéstrela.
7	E1	[Termina de escribir su conjetura] *Los ángulos opuestos a los lados congruentes también serán congruentes.* *Si un triángulo es isósceles, entonces los ángulos opuestos a los lados congruentes también serán congruentes.*
8	E1	[Construye un triángulo isósceles usando un círculo]

		 [Arrastra los objetos para obtener distintos ejemplos]  [Construye una mediatriz]  [Borra la mediatriz y construye la bisectriz del ángulo central del círculo y arrastra la figura] 
9	E1	[Escribe este primer intento de demostración] *Para garantizar que los lados sean iguales, se trazó la mediatriz. Ahora, al trazar esa mediatriz, sabremos que los segmentos (extremos del segmento por el que se trazó la mediatriz) equidistarán del punto. Ahora, si observamos los triángulos pequeños, observaremos que sus tres lados son iguales. Por tanto, son congruentes, o sea, sus ángulos correspondientes serán iguales.* [Les pone etiquetas a los vértices del triángulo]

		
10	Profesor	Veo que tiene una demostración, cuéntemela.
11	E1	 Sé que va a ser un triángulo que va a tener dos lados iguales. Entonces como sé que son iguales, equidistarán de un punto y para eso tracé la mediatriz, para tenerlo en cuenta. Ahora, sé que el lado AB es igual a BC y que la mediatriz pasa por el punto medio de este lado (AC), por lo tanto, los lados que se forman son iguales. Entonces si nos fijamos en los triángulos pequeños, comparten un lado y los otros son iguales. Por lo tanto, sus ángulos correspondientes van a ser congruentes.
12	Profesor	Ahí tengo una duda, ¿en cualquier triángulo, la mediatriz pasa por el vértice opuesto al lado del que se trazó?
13	E1	Si es isósceles sí, porque equidistarán de un punto.
14	Profesor	Y, ¿por qué sabe que el punto B está sobre la mediatriz de AC?
15	E1	Porque cualquier punto de la mediatriz, por la definición que vimos, equidistará de los extremos de un segmento, por tanto, este lado (AB) va a ser igual a este (BC).
16	Profesor	Listo, es que es un detalle que hay que tener en cuenta porque no siempre pasa.
17	E1	Pero si es isósceles debería pasar.
18	Profesor	¿Exploró en el *software* para construir la demostración?
19	E1	Pues exploré y dije, tengo estos dos triángulos (los que se forman al trazar la mediatriz de AC).  Entonces tengo que garantizar que son iguales sus ángulos. Y entonces me puse a pensar y vi que dos son de 90° y dije ¿será que la mediatriz los divide a la mitad (a los ángulos en el vértice B) y por eso son iguales? Pero no encontré algo coherente que me permitiera concluir eso. Por lo que me basé mejor en los lados. Ya que comparten un lado, otro ya es igual y el otro es igual por el punto medio. Entonces tres lados iguales correspondientes y en consecuencia ángulos iguales.

20	Profesor	Entiendo, puede seguir con la construcción de la tabla que estaba armando.
21	E1	[Construye la siguiente demostración] 

En [1] E1 empezó su exploración con ejemplos representantes de triángulos isósceles, midió los ángulos que son congruentes y escribió su conjetura. En [3] mencionó que esta conjetura era una propiedad que ya conocía de antemano, aunque aun así utilizó ejemplos para validar sobre ellos la conjetura.

Luego de escribir la conjetura completa [7], se dispuso a demostrarla. Para este fin, en [8] volvió a recurrir a ejemplos de triángulos isósceles que usó para identificar/descartar información relevante. Un cambio motivado por haber formulado la conjetura y disponerse a demostrarla: una exigencia del proceso de demostración. En sus exploraciones construyó la mediatriz de uno de sus lados que le posibilitó *obtener información* al ver que la mediatriz dividía al triángulo en otros dos que parecen ser congruentes por tener sus tres lados congruentes; idea que expresó en su primer intento de demostración en [9].

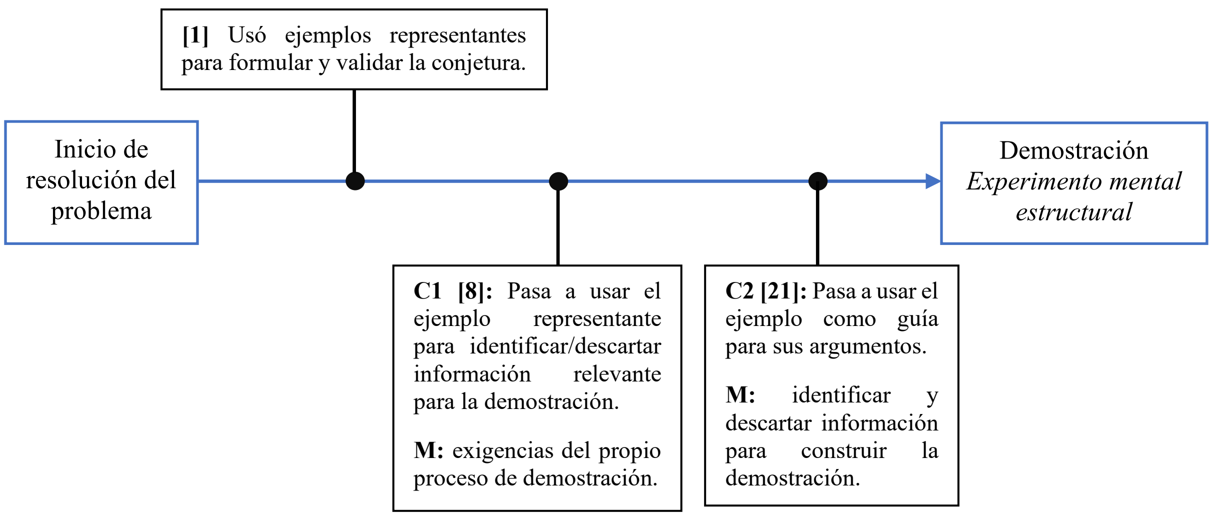
Este intento realizado en [9] está basado en un ejemplo que seleccionó de manera cuidadosa y en las construcciones que realizó sobre él. Como trazar la mediatriz y observar que los triángulos son congruentes, sin hacer uso explícito de algún teorema o definición. Por lo que constituye una demostración de tipo *Experimento crucial constructivo*, ya que no se puede suponer que sí estuviera pensando en teoremas y además sus argumentos reflejan ideas empíricas como "…observamos que sus tres lados son iguales…"

Luego, en la interacción con el profesor [10 – 15], E1 fue dando más detalles de su idea de demostración inicial, dándole fundamento a los argumentos presentados; mencionando la definición y el teorema de la mediatriz, y las propiedades que estos garantizan. Es así como en esta interacción E1 hizo explícitas las reglas teóricas y se produjo una transición *del ejemplo a argumentos formales*. Lo que hace reflexionar en la importancia de las preguntas por parte del profesor para esclarecer lo que está pensando el estudiante, pues este estaba empezando a pensar deductivamente y no lo estaba haciendo explícito.

En consecuencia, en [21] presentó su segundo intento de demostración, en el que, guiado por el ejemplo, expuso una secuencia deductiva de pasos en la que usó definiciones y teoremas para concluir que los ángulos son congruentes. Aunque en el paso 4 cometió un error, al decir que los triángulos ABP y PCB son congruentes por "álgebra". Sin embargo, podría considerarse más un error de descuido que un error conceptual, pues en el siguiente paso sí hizo mención del teorema de congruencia LLL. En consecuencia, terminó construyendo una demostración de tipo *experimento mental transformativo*, pues transformó el problema inicial en demostrar una congruencia para concluir lo pedido. Incluso, se produjo un cambio sobre el final de la demostración en el uso del ejemplo, donde pasó a usarlo como guía de sus argumentos que presenta en una tabla de tres columnas [21].

Además, en [19] se puede observar una fuerte influencia del uso de ejemplos en la construcción de la demostración. E1 mencionó que llegó a considerar que un camino viable podría ser demostrar que la mediatriz dividía en dos ángulos congruentes al ángulo ABC. Sin embargo, abandonó esa idea; por lo que se puede afirmar que los ejemplos le ayudaron a prever qué transformaciones eran convenientes para su demostración, resultando así en un uso productivo durante el proceso de demostración.

El siguiente esquema presenta los cambios de uso del ejemplo, donde Cn es la numeración de estos y M los motivos que lo ocasionaron.



En esta situación se evidencia que el estudiante cambia naturalmente el uso del ejemplo por motivos propios del proceso de demostración: para formular y validar la conjetura, para explorar e identificar ideas para la demostración y finalmente, para escribirla. Esto puede indicar lo dicho por Zaslavsky y Knuth (2019), que los estudiantes a medida que reciben instrucciones sobre cómo usar los ejemplos, los usos que hacen de ellos se refinan y resultan productivos en el proceso de demostración, como sucedió en este caso. Aunque bien puede pasar que el estudiante haya refinado estos usos y cuando se enfrente a un problema de más complejidad, pueda que use ejemplos de casos particulares, casos límite o incluso, como expuso Riaño (2023), volver a realizar demostraciones empíricas.

Este motivo de cambio del uso del ejemplo muestra una relación con la función de validar de la demostración. Según De Villiers (1990), esta función puede verse como algo rutinario, en el sentido en que luego de convencerse de que el teorema es verdadero, se empieza a demostrarlo. En tal proceso de demostración se usan métodos intuitivos y cuasi-empíricos como los que facilita el *software* con su dinamismo, lo que ayuda a prever e identificar qué camino tomar para construir la demostración. En ese sentido, este motivo puede evocar usos del ejemplo enfocados en identificar/descartar información luego de ser usados para formular y validar la conjetura. Así mismo puede promover usos para organizar la información, buscando articular de manera deductiva los argumentos para convencer a otro de la veracidad de la conjetura; una parte comunicativa inherente a la verificación.

En consecuencia, este motivo está relacionado con posibilidades y transiciones que produce el uso de ejemplos en el proceso de demostración, así como con las demostraciones deductivas. Dicha relación se muestra en la **Tabla 10**.

Tabla 10

Relaciones teóricas asociadas al cuarto motivo de cambio

<table>
<tr><th>Función de la demostración</th><th>Usos del ejemplo</th><th>Posibilidades</th><th>Transiciones</th><th>Tipo de demostración</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Verificar</td><td>Formular y validar la conjetura</td><td>Apoyar las conjeturas</td><td rowspan="2">De ejemplos a ejemplos</td><td rowspan="3">Experimento mental</td></tr>
<tr><td>Identificar/descartar información</td><td>Obtener información</td></tr>
<tr><td>Guiar y presentar la demostración</td><td>Generalizar</td><td>De ejemplos a argumentos deductivos</td></tr>
</table>

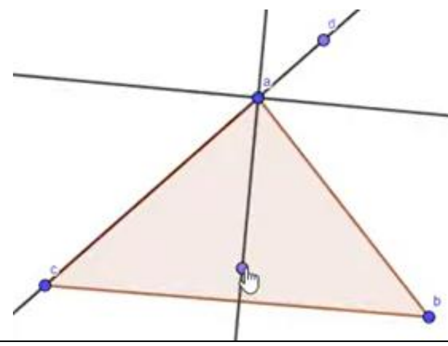
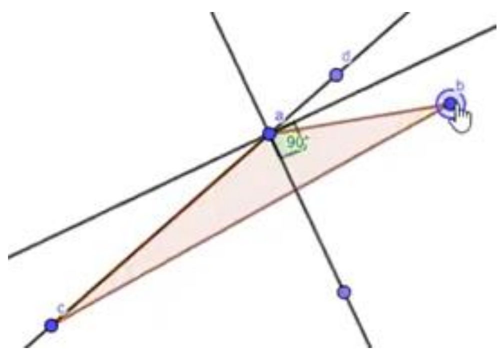
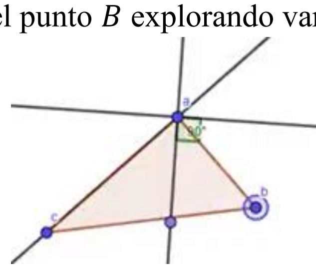
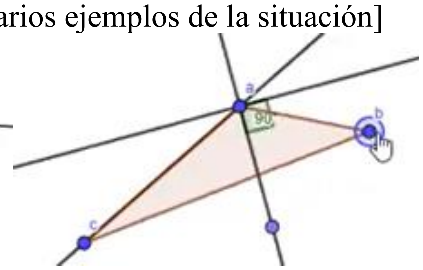
		Apoyar la demostración		
Verificar	Formular y validar la conjetura	Apoyar la demostración	De ejemplos a ejemplos	Deducción informal
	Identificar/descartar información	Obtener información		
	Expresar los argumentos de la demostración	Generalizar	De ejemplos a argumentos deductivos	
		Apoyar la demostración		

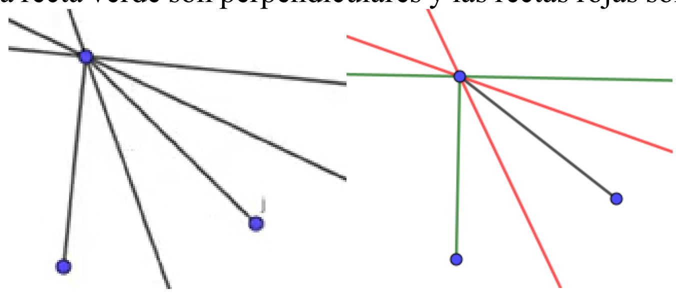
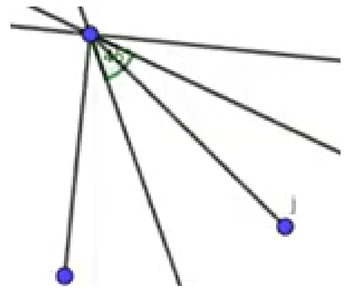
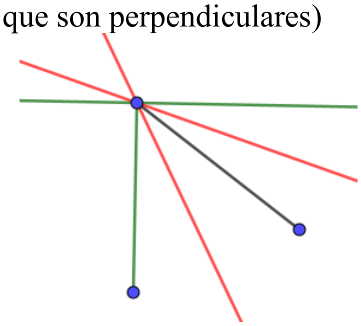
5.6 Cambios producidos por retroalimentación del profesor o compañero

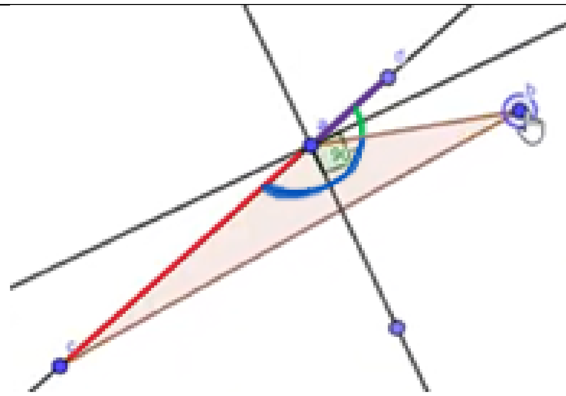
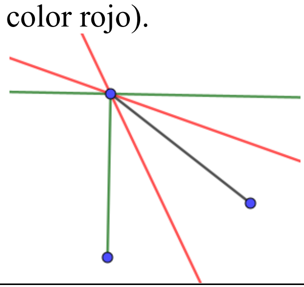
Como se mencionó en el capítulo 5, un objetivo de la secuencia de enseñanza era promover el uso de los ejemplos como estrategia para la construcción de demostraciones. No obstante, según Zaslavsky (2019) no basta con solo pedirle a los estudiantes usar ejemplos, sino que debe haber una instrucción sobre estos usos; los estudiantes deben aprender qué usos de los ejemplos pueden resultar productivos. En ese sentido, el profesor en las socializaciones grupales e individuales con los estudiantes procuraba instar a que se usaran los ejemplos para lo siguiente: representar la situación planteada para entenderla, descubrir propiedades invariantes, formular la conjetura, explorar ideas para la demostración y organizar los argumentos para la construcción de la demostración.

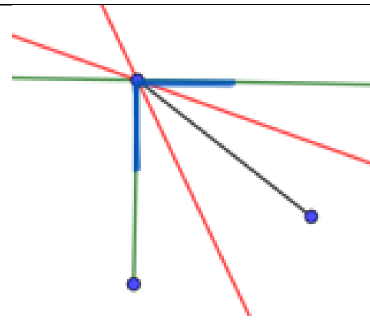
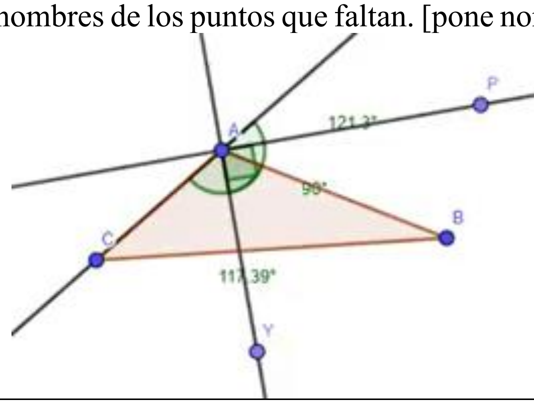
Así, en el proceso de construcción de las demostraciones a veces los estudiantes llamaban al profesor para expresarle que no sabían cómo avanzar, por lo que el profesor aprovechaba para hacer preguntas buscando poner en duda los argumentos o para recordarles algunos usos de los ejemplos que podrían ayudarles. En ocasiones, estas retroalimentaciones motivaban que los estudiantes usaran los ejemplos como lo sugería el profesor, como se evidencia en la siguiente situación.

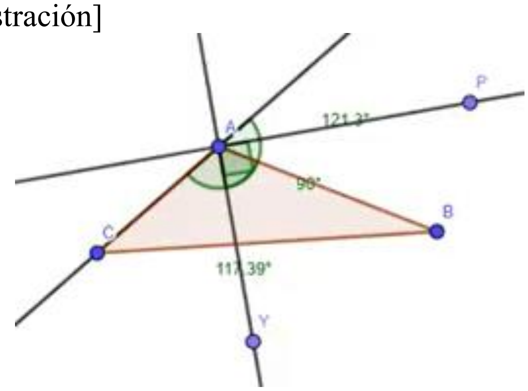
El problema se presentó en la lección 7 de la siguiente manera: *Considere un triángulo ABC con ángulo externo DAB. Construya las bisectrices del ángulo BAC y de su ángulo externo DAB, ¿en qué posición debe estar el punto B para que el ángulo entre las bisectrices sea máximo? ¿Por qué?* ***Sugerencia:*** *use ejemplos con el propósito de ilustrar la situación, entenderla y desarrollar su argumentación.*

N°	Sujeto	Acciones
1	E3 y E4	[Leen la tarea y construyen los objetos dados y las bisectrices de los ángulos BAC y DAB] 
2	E4	[Mide el ángulo entre las bisectrices] ¡Mira! Es de 90°
3	E3	[Arrastra el punto B] Independientemente de la posición que tome B, siempre va a ser de 90°.  ¿Eso será cierto?
4	E4	[Arrastra el punto B explorando varios ejemplos de la situación]   Ya, ya entendí. Al ser este un ángulo de 180° (CAD)… Entonces por ejemplo si este fuera un ángulo de 90° (CAD), el ángulo entre las bisectrices será de 45°,

		o sea, va a ser como la mitad del ángulo sobre el cual se formen las líneas… A ver, un ejemplo. [Construye el siguiente ejemplo. A la derecha una imagen auxiliar, donde el segmento y la recta verde son perpendiculares y las rectas rojas son bisectrices]  Se supone que el ángulo entre las bisectrices debe dar 45°. [Mide el ángulo]  Esto porque la base que ya está puesta ahí, va a ser de 90°, entonces claro, lo divide a la mitad.
5	Profesor	¿Cómo van con su demostración?
6	E4	Bueno, lo que hemos dicho es que, en este ejemplo… La base es esta de acá (señala las líneas verdes que son perpendiculares)  Esas dos líneas son de 90° (segmento y la recta verde) y si yo trazo una línea (segmento en negro) y trazo dos bisectrices a los ángulos formados, pues la suma de esos siempre va a dar 45° porque la base es de 90°, por lo que sería la mitad.
7	Profesor	¿Está partiendo del hecho de que el ángulo mide 90°?
8	E4	Si es de 180°, entonces el otro sería de 90°. Si es de 360°, entonces la suma daría 180°. Entonces el ángulo que se forma entre las dos bisectrices es la mitad del de la base.
9	Profesor	¿A qué se refiere con la base?

10	E4	 Acá por ejemplo podemos ver a CA (señalado en rojo) como la base del ángulo BAC (señalado en azul) y esta base (segmento DA, en morado) como la base del ángulo DAB (señalado en verde). Entonces claro, ahí trazamos las bisectrices y el ángulo que se forma, va a ser la mitad de la base que ellos comparten, que en este caso es una línea. Entonces ahora, lo que hicimos fue exactamente lo mismo… Esta línea (segmento verde) es una base y esta (su perpendicular, en verde) es la otra base, que forman un ángulo de 90° y va a dar siempre la mitad, 45° (el ángulo entre las bisectrices que están de color rojo). 
11	Profesor	Bueno, ¿entonces esa idea cómo la podría utilizar en el problema propuesto?
12	E3 y E4	[Empiezan a escribir la conjetura usando la idea de la *base*] *Para que el ángulo entre las bisectrices sea máximo, no importa dónde esté el punto B, ya que este ángulo siempre será la mitad de la base sobre la cual se crearon los ángulos, en este caso de* 90°. [divagan en cómo escribir sus argumentos para la demostración y escriben lo siguiente] *El ángulo formado por la bisectriz de dos ángulos que tengan una misma base siempre será la mitad de aquella base, esto porque si tenemos una recta y marcamos un segmento…*
13	E4	Profe, es que queremos escribir la demostración, pero nos enredamos en la redacción.
14	Profesor	Cuéntenme la demostración.
15	E4	Lo que nosotros nos dimos cuenta fue que el ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos que tengan la misma base siempre será la mitad de aquella base.
16	Profesor	¿A qué se refiere con la base? (pregunta de nuevo, pretendiendo ver si ha habido una evolución en el significado de este término)
17	E4	Yo quiero llamar base a esto de aquí (señala lo indicado en azul)

		 Donde se forma dos ángulos y pasan las bisectrices, que en este caso sería de 45° porque partimos de una base de 90°. ¿Yo puedo llamar a eso base, o cómo lo llamo?
18	Profesor	Es como la unión de dos segmentos.
19	E4	Sí.
20	Profesor	¿Pero es necesario hablar de la base? Usted lo está pensando todo en términos de esa base, de esa unión. Entonces trate de expresarlo no en términos de esa unión, porque lo que usted quiere decir es que algo es la mitad de otra cosa. Entonces, ¿qué es la mitad de qué?
21	E4	El ángulo entre las bisectrices es la mitad de la suma de los dos ángulos. Vamos a replantear lo que escribimos. [Escribe nuevamente su conjetura y demostración] *Para que el ángulo entre las bisectrices sea máximo, no importa dónde esté el punto B, ya que este ángulo siempre será la mitad de la suma de los dos ángulos, en este caso de* 90°. *El ángulo formado por la bisectriz de dos ángulos siempre será la mitad de la suma de estos ángulos. Esto porque una bisectriz es una línea que divide a un ángulo en dos ángulos congruentes y sumamos las dos mitades…* Pero no sé cómo continuar.
22	Profesor	¿A qué se refiere cuando dice que sumamos las dos mitades?
23	E4	A los ángulos en los que ambas bisectrices dividen los ángulos.
24	Profesor	De pronto nombrando los ángulos le ayuda a escribir mejor lo que tiene en mente.
25	E4	Ah sí, puedo hacerlo con los puntos. [Abandona el ejemplo particular planteado y vuelve al ejemplo que representa el problema] Sí, pongamos los nombres de los puntos que faltan. [pone nombres a los puntos] 
26	E3 y E4	[Se concentran en el ejemplo y reescriben sus ideas]

		Para que el ángulo YAP sea máximo no importa en dónde esté el punto B, ya que este ángulo siempre será la mitad de la suma de los dos ángulos CAB y BAD, en este caso de $90°$. *El ángulo formado por la bisectriz de dos ángulos siempre será la mitad de la suma de estos ángulos. Esto porque si tenemos un ángulo CAB con su bisectriz Y y otro ángulo BAD con su bisectriz P, tenemos que el ángulo YAP será la suma de una de las mitades de cada ángulo. Lo que resulta en la mitad del ángulo CAD. Ya que si tomamos un valor y lo dividimos en dos valores iguales o diferentes y a estos nuevos valores los dividimos en dos valores iguales, tenemos que la suma…*
27	E4	Mejor borro lo último. *Para que el ángulo YAP sea máximo no importa en dónde esté el punto B, ya que este ángulo siempre será la mitad de la suma de los dos ángulos CAB y BAD, en este caso de* $90°$. *El ángulo formado por la bisectriz de dos ángulos siempre será la mitad de la suma de estos ángulos. Esto porque si tenemos un ángulo CAB con su bisectriz Y y otro ángulo BAD con su bisectriz P, tenemos que el ángulo YAP será la suma de una de las mitades de cada ángulo. Lo que resulta en la mitad del ángulo CAD.*
28	E3	Listo, así.
29	Profesor	¿Terminaron?
30	E4	Sí. Porque si tienes un valor y lo divides en dos partes diferentes y a estos mismos valores los divides entre dos y coges un valor de cada una de estas divisiones y los sumas, va a dar la mitad del valor inicial. Pero creo que no hay que explicar eso, ¿no? ($Explicación\ en\ fórmula$: $\left(\theta = \alpha + \beta \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$
31	Profesor	Depende. ¿Sin explicarlo igual se entiende lo que quiere decir?
32	E3 y E4	[Corrige su demostración]  *Para que el ángulo YAP sea máximo no importa en dónde esté el punto B, ya que este ángulo siempre será la mitad de la suma de los dos ángulos CAB y BAD, en este caso de* $90°$. *El ángulo formado por la bisectriz de dos ángulos siempre será la mitad de la suma de estos ángulos. Esto porque si tenemos un ángulo CAB con su bisectriz Y y otro ángulo BAD con su bisectriz P, tenemos que el ángulo YAP será la suma de una de las mitades de cada ángulo. Lo que resulta en la mitad del ángulo CAD. Esto porque si tenemos un valor y lo dividimos en dos partes*

	iguales o diferentes al tomar las mitades de estas partes y sumarlas tendremos que el resultado será la mitad del resultado inicial.

Inicialmente [1] los estudiantes midieron el ángulo entre las bisectrices en un ejemplo que usaron para formular la conjetura, donde afirmaron que este es de 90° [2]. Luego, en [3 – 4] motivados por validar la conjetura, usaron la prueba de arrastre para verificar sobre el ejemplo si su conjetura era cierta.

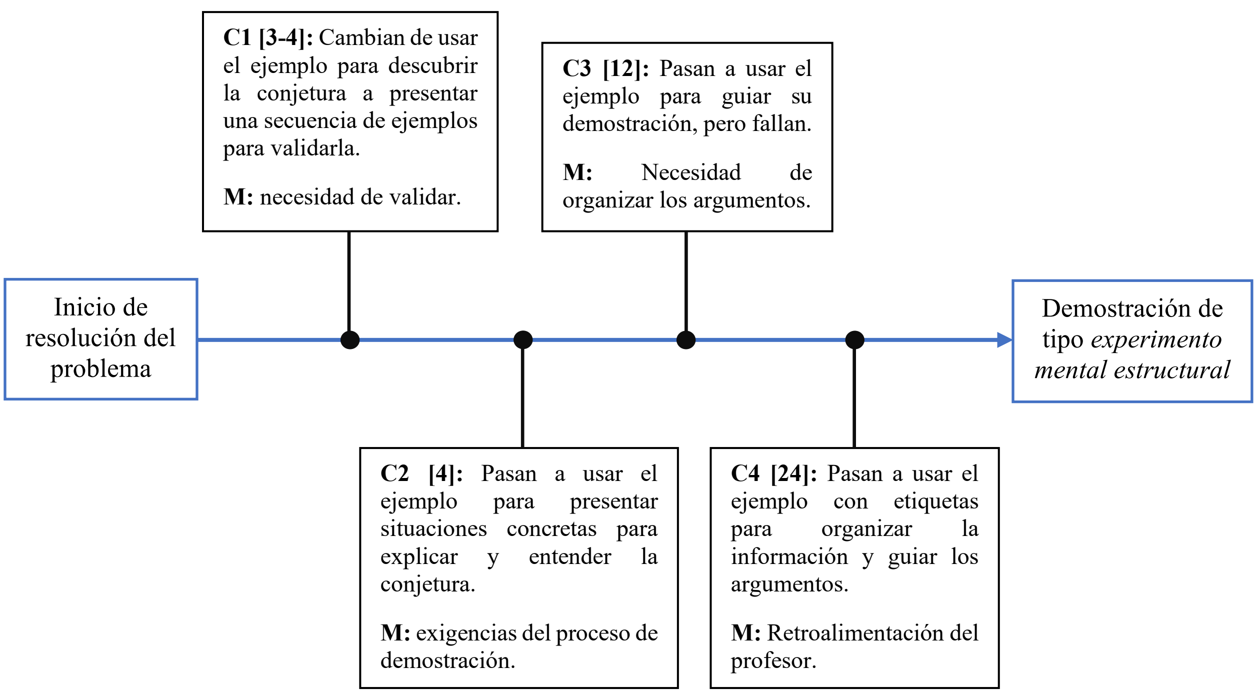
En este mismo momento [4], ocurrió una transición *de un ejemplo a otro*, pues E4 expresó haber entendido porqué la conjetura era cierta y usó un ejemplo cuidadosamente seleccionado para expresar sus ideas sobre el fenómeno detrás de la veracidad de la conjetura; constituyendo así un cambio en el uso del ejemplo, de formular y validar la conjetura a explicarla y entenderla, motivado por la propia exigencia del proceso de demostración.

En [6 y 10] E4 detalló los ejemplos que propuso para explicar y entender su conjetura y en [12] hacen su primer intento de demostración. Es en este intento donde se produce un *cambio en el uso del ejemplo*, uno donde este se usa para guiar y presentar los argumentos, aunque no de manera clara. No obstante, no terminaron su demostración por presentar dificultades para verbalizar las ideas [13]. Este cambio mencionado se ve motivado por una necesidad de organización, porque los estudiantes ya habían identificado cómo empezar su demostración y estaban intentando organizar sus ideas, pero carecían de claridad y organización sobre sus argumentos.

Esta dificultad sobre la claridad y organización de sus ideas se hace evidente en [14 – 23], donde trataron de explicarle al profesor sus ideas y este los fue guiando a usar una mejor terminología para lograr un mayor entendimiento. Lo que generó un refinamiento del primer intento de demostración [23], pero siguieron ante la necesidad de buscar organizar sus argumentos y expresarlos.

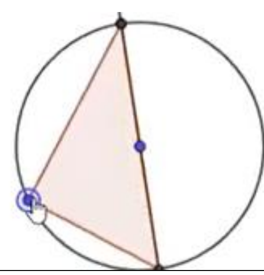
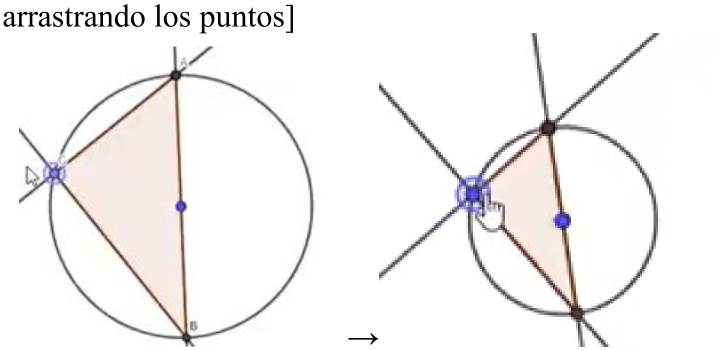
Es así como el profesor en [24] les sugirió usar un ejemplo con nombres para escribir lo que tenían en mente. Lo que generó una transición *de un ejemplo a otro*, volviendo al ejemplo inicial y usándolo ahora para expresar y organizar la información para construir la demostración [32]. Lo que finalmente *posibilitó* que construyeran una demostración de tipo *experimento mental estructural*, pues esta da cuenta de procesos deductivos abstractos expresados de manera informal, en donde el ejemplo ayudó a la organización de los pasos deductivos.

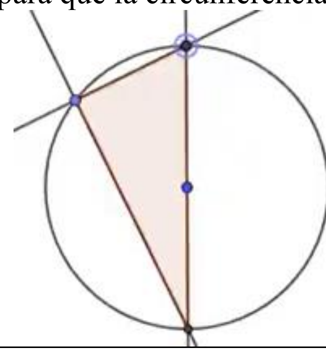
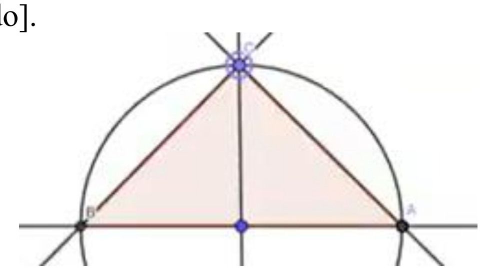
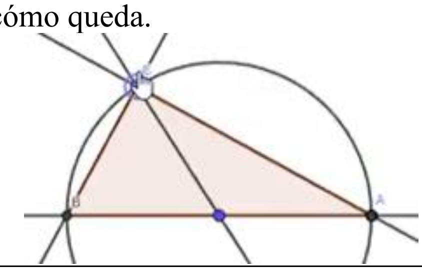
El siguiente esquema presenta estos cambios, donde C_n es la numeración de estos y M los motivos que lo ocasionaron.

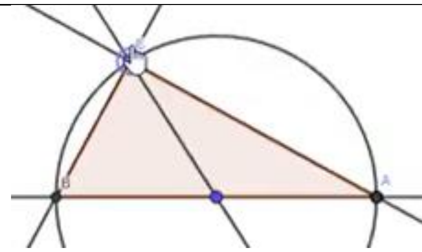
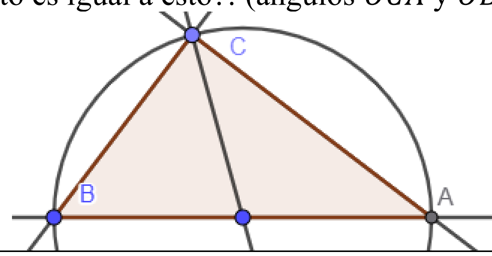
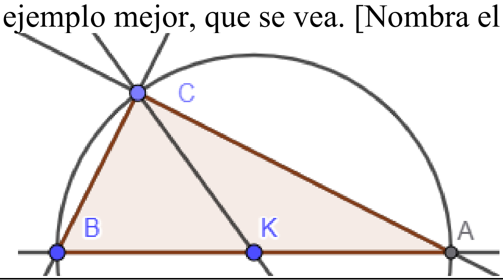


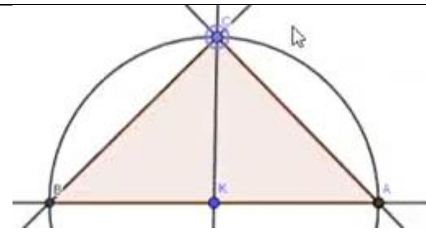
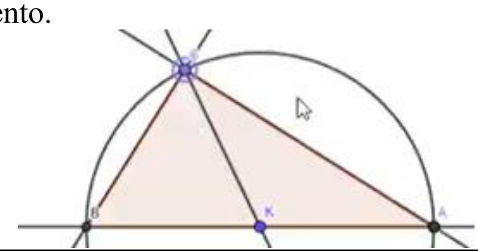
En esta situación la retroalimentación del profesor resultó importante para motivar una transición a un ejemplo y usarlo para organizar sus ideas y argumentos para la demostración. Ya que aunque los estudiantes intentaron usar el ejemplo de esta misma manera anteriormente, lo estaban haciendo sobre un ejemplo que les generaba dificultades para expresarse. Por esta razón se considera que la intervención del profesor, además de producir el paso a otro ejemplo, refuerza el uso del ejemplo para organizar la información; lo que desencadenó en una demostración deductiva. En este caso la dificultad de expresar los argumentos surge de un problema de querer referirse a las propiedades, pero los objetos al no tener etiquetas les resulta complejo referirse a ellas. Por lo que la sugerencia de nombrar los objetos y de poner etiquetas puede resultar provechosa, como ha sucedido ya en algunas situaciones presentadas.

A continuación, se presenta otra situación en la que ocurren dos retroalimentaciones, una por parte del profesor y otra por parte de un compañero. Para esta lección, los estudiantes ya conocían el segundo teorema de Tales desde antes y se centraron en demostrarlo.

N°	Sujeto	Acciones
1	E1 y E2	[Construyen los objetos] 
2	E1	Vamos a partir de lo que sabemos. Para que sea recto, deben ser perpendiculares. Ahora, ¿por qué son perpendiculares?
3	E2	Trazamos una recta y su perpendicular y por definición… [Explora en el *software* arrastrando los puntos] 

		Pero este círculo no debería moverse ni cambiar de tamaño. Tiene mucho movimiento…
4	E1	Entonces hágalo con la herramienta de centro y radio. [Construyen nuevamente los objetos para que la circunferencia no cambie de radio] 
5	E2	[Empieza a buscar y leer las definiciones y teoremas aceptados en clase]
6	E1	(Escuchan la sugerencia que se le dio a sus compañeros de al lado: arrastrar el punto C de tal forma que $BC = AC$) No mueva los puntos, E2, déjelos quietos, así. [arrastra el punto C para que satisfaga lo sugerido].  Como este es el diámetro (BA), entonces estos lados serían radios… Por lo que se forman isósceles, entonces los ángulos miden α y queda que $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha = 180°$. Y 180° entre 4, da 45°.
7	E2	Y ya.
8	E1	Al valer α 45°, quiere decir que este vale 90°. (ángulo en C) Acá el dilema es que esto es para un ejemplo concreto.
9	E2	Sí, si quito C de ahí cómo queda. 
10	E1	Pero mire que, si uno se hace grande, el otro se hace pequeño (las dos divisiones del ángulo en C), entonces deben hacerlo en igual medida.
11	E2	Ya tenemos un ejemplo.
12	E1	[Se toma O como el centro del círculo para explicar lo dicho por E1]

		 Pero mire, tenemos que este es igual a este (BO y CO) y este igual a este (CO y AO). Entonces tenemos que este es igual a este (ángulos OBC y BCO) y este igual a este (ángulos OCA y CAO). Y como todos tienen la misma medida (BO, CO y AO), entonces los ángulos van a ser iguales también.
13	E2	¡¿Entonces todos son α?!
14	E1	Sí, todos son α
15	E2	¡¿Pero entonces esto es igual a esto?! (ángulos OCA y OBA) 
16	E1	Pues sí, según los isósceles sí.
17	E2	Pero se ve que no son iguales.
18	E1	A ver, muestre un ejemplo mejor, que se vea. [Nombra el centro como K] 
19	E2	AK es igual a BK y a CK también por radios.
20	E1	A estos ángulos (del triángulo BKC) pongámosle α. Y estos dos (ángulos del triángulo AKC) tienen la misma medida β. Ahora nos queda que $\alpha + \beta + \alpha + \beta = 180$.
21	E2	O sea, $2\alpha + 2\beta = 180$.
22	E1	Y ahora dividimos todo entre 2.
23	E2	Y queda que $\alpha + \beta = 90$.
24	E1	Listo, tenemos todo para cualquier medida.
25	E2	Llamemos al profesor.
26	Profesor	¿Por qué trazaron esa recta CK?
27	E1	Es que usted nos dio la idea de considerar un ejemplo particular, cuando se lo dijo a los compañeros. Cuando $AC = BC$.

		 Entonces dividimos el triángulo en dos. Donde CK es igual a AK, entonces sus ángulos opuestos son congruentes. Y lo mismo por el otro lado. Entonces nos quedan así cuatro ángulos iguales, por lo que miden 45° en este caso. Por tanto, así se demuestra que es recto.
28	E2	Pero eso solo en ese caso. Porque si C está por acá, no funciona y ahí sacamos el siguiente argumento. 
29	Profesor	¿Cuál fue ese argumento?
30	E1	La mediana. Trazamos la mediana y obtuvimos que la mediana era un radio y dividía a AB en dos radios. Entonces íbamos a tener dos triángulos que iban a tener dos lados iguales cada uno
31	E2	$BK = AK = CK$.
32	E1	Entonces, este ángulo (BCK) es igual a este (CKB), pongámosle β. Y este (KCA) es igual a CAK, pongámosle α. Entonces $\alpha + \beta + \alpha + \beta$ por suma interna de ángulo le va a dar 180°. Entonces al hacer eso nos queda $2\alpha + 2\beta = 180$ y queremos saber cuánto es $\alpha + \beta$ porque es la medida de este ángulo (BCA), entonces dividimos entre 2 y nos queda que $\alpha + \beta = 90$.
33	Profesor	Quisiera reflexionar sobre qué les posibilitó haber trabajado antes con ese ejemplo concreto.
34	E2	Pues primero sacamos la idea de que si $AC = BC$, ya teníamos un argumento. Y de ahí partimos para decir que los ángulos no son los mismos y de ahí sacamos la otra explicación.
35	E1	Los ejemplos sirven de guía.
36	E2	Sí, como para ir teniendo ideas y llegar a algo más general.

En el episodio de clase mostrado, en [3] E2 intentó explorar un ejemplo en el *software* para identificar/descartar información, pero exclamó que el dinamismo de la circunferencia obstaculizó su exploración, por lo que motivado por buscar una mejor concentración transitó *de un ejemplo a* *otro* en el que el radio de la circunferencia es fijo, y lo siguió usando para identificar o descartar información relevante, ayudado de las reglas teóricas [4].

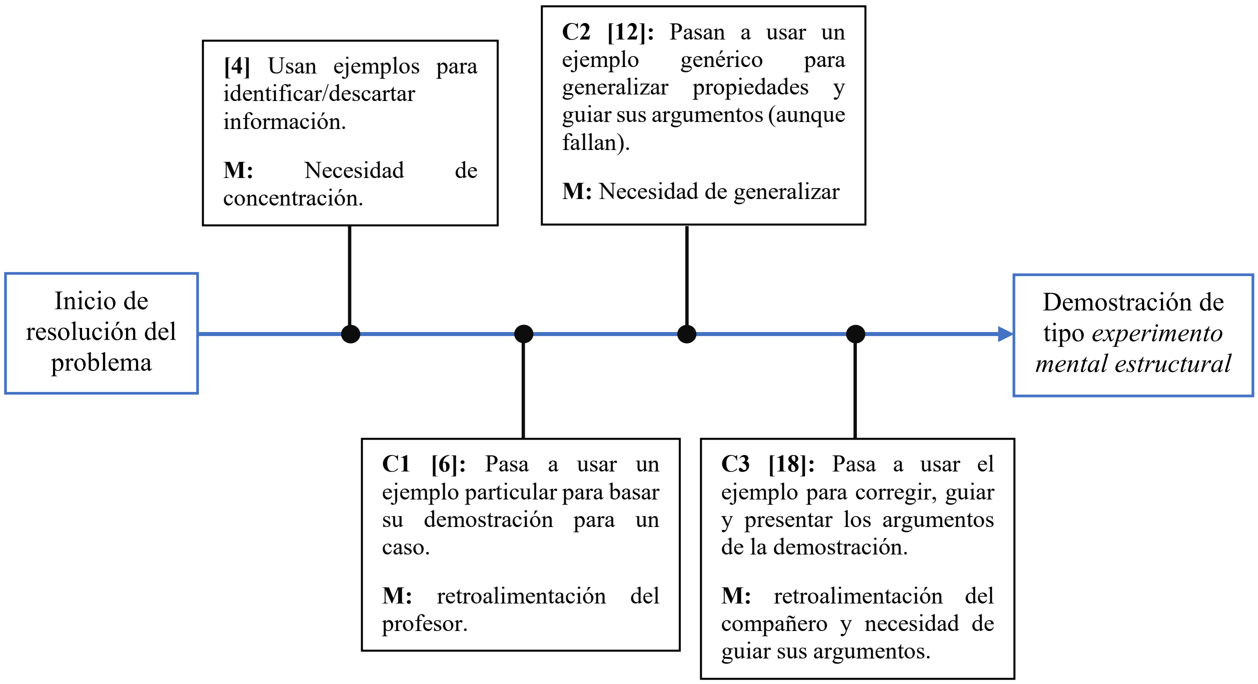
Sin embargo, no tuvieron mayores avances y escucharon la sugerencia que les planteó el profesor a sus compañeros de al lado, lo que produjo en [6] una transición de *un ejemplo a otro,* un ejemplo particular que usaron para construir una demostración para el caso en que $BC = AC$. Definiendo así, por el momento, una demostración de tipo *ejemplo genérico analítico*.

En [8 – 9] E1 y E2 tomaron conciencia de que la demostración es válida solo en el ejemplo que seleccionaron, por lo que arrastraron el punto C para transitar *de un ejemplo a otro* [9], a uno genérico, que usaron en [12] para intentar realizar una demostración general. Sin embargo, E1 hizo un mal uso del teorema del triángulo isósceles [12 – 14], lo que llevó a E2 a usar un contraejemplo para hacerle ver a E1 su error en la argumentación [17 – 18].

Esto llevó a E1 a corregir sus argumentos y a usar el ejemplo como guía para estos [18], posibilitando generalizar sus argumentos y produciéndose una transición *de un ejemplo a argumentos deductivos* [19 – 24] que le permitieron construir una demostración de tipo *experimento mental estructural* [32].

En [33 – 36] E1 y E2 afirmaron que el haber usado ejemplos en este proceso les permitió probar y descartar ideas, y guiarlos para llegar a argumentos más generales y poder construir la demostración. Lo que evidencia también una reflexión en ellos sobre cómo usar los ejemplos para que estos puedan resultar productivos.

El siguiente esquema presentan los cambios en el uso de ejemplos, donde Cn es la numeración de estos y M los motivos que lo ocasionaron.



En esta situación la retroalimentación hecha indirectamente por parte del profesor motivó que se usara el ejemplo para construir una primera demostración para un caso particular y a partir de estas ideas generalizar los argumentos. Luego, la retroalimentación del compañero haciendo uso del contraejemplo hizo dar cuenta de un error en la demostración y motivó a que esta se corrigiera y guiara usando un ejemplo genérico. Ambas retroalimentaciones apoyaron cambios productivos en el uso del ejemplo, donde la sugerencia de considerar un caso particular, que se hizo siguiendo las indicaciones de Zaslavsky (2019) que menciona que los ejemplos también pueden ser evocados por el profesor y cuando es así, puede haber mayor probabilidad de que estos se usen de manera productiva y ayuden en el proceso de demostración.

Con base en las dos situaciones presentadas se evidencia que las retroalimentaciones producen cambios en el uso de ejemplos que pueden resultar productivos, en tanto que ayudan a superar obstáculos que se les presenta a los estudiantes. En la primera situación los estudiantes presentaban un problema de comunicación, estaban buscando usar la demostración en su función para comunicar ideas y argumentos (De Villiers, 1990). Ante esto, el profesor sugirió el uso de un ejemplo con etiquetas que pudo resolver esta necesidad de comunicarse. En la segunda situación las retroalimentaciones llevaron a los estudiantes a usar métodos cuasi-empíricos que combinaron con la teoría, como considerar un caso particular para producir una demostración o proponer un contraejemplo frente a la falsedad de algunos argumentos. Esto promovió la función de la demostración como verificación, pues al estar ya convencidos del resultado a demostrar se propusieron validarlo mediante la teoría.

Este motivo de cambio en el uso de ejemplos deja entrever que de acuerdo con las retroalimentaciones que se realicen, se puede evocar una u otra función de la demostración de De Villiers (1990). Por lo que el profesor debería identificar en primer lugar qué función están haciendo los estudiantes de la demostración, o cuál de ellas les resultará más útil, para llevar hacia allá sus retroalimentaciones y poder apoyar este proceso teniendo en cuenta las relaciones identificadas entre funciones, usos, posibilidades y transiciones.

6. Conclusiones

A partir de los resultados expuestos en el capítulo anterior, se presentan las siguientes conclusiones.

Las aportaciones de este trabajo consisten, en primer lugar, con la identificación de los motivos por los cuales los estudiantes cambian el uso de los ejemplos en el desarrollo de problemas de demostración en geometría, contribuyendo así con la necesidad marcada por Knuth et al. (2019) de comprender mejor la naturaleza de los usos del ejemplo. En segundo lugar, con el aporte de una secuencia de enseñanza implementada, evaluada y corregida, que representa un producto teórico-práctico que puede usarse como insumo para la enseñanza de las propiedades y congruencia de triángulos a nivel universitario, en la que se pueden realizar adaptaciones según corresponda a los intereses del profesor. En tercer lugar, un refinamiento de la categoría de transiciones del marco CAPS de Ellis et al. (2019) y Knuth et al. (2019), incluyendo una descripción a las transiciones que proponen los autores.

El objetivo de esta investigación consistió en analizar los motivos de los cambios de un uso del ejemplo a otro durante el proceso de resolución de problemas de demostración. En ese sentido, se concluye que hubo cinco motivos que llevaron a cambios en el uso del ejemplo durante el proceso de resolución de problemas de demostración. A saber: Necesidad de generalizar propiedades y argumentos, Necesidad de organizar propiedades y argumentos, Necesidad de concentrarse en el problema, Exigencias del proceso de demostración y Retroalimentación del profesor o compañero. Estos motivos produjeron cambios de uso en los ejemplos que resultaron productivos en el sentido de Ellis et al. (2019) y Knuth et al. (2019), pues llevaron a los estudiantes a una comprensión más profunda de la conjetura, a generalizaciones, a una apreciación de la necesidad de una demostración deductiva, a la generación de contraejemplos y a la construcción de demostraciones deductivas parciales o completas.

Los motivos identificados surgen de necesidades que experimentan los estudiantes y que están relacionados con las transiciones y propósitos del marco CAPS de Ellis et al. (2019) y las funciones de la demostración por De Villiers (1990). A su vez, estos motivos, transiciones, propósitos y funciones están relacionados con algunos tipos de demostración propuestos en Beltrán-Meneu et al. (2024); específicamente, se relacionaron con las demostraciones deductivas, buscando aportar información para apoyar y entender mejor el tránsito hacia este tipo de demostraciones. Las relaciones establecidas permitieron identificar y explicar los motivos de cambio en el uso de los ejemplos; así como entender las implicaciones que conlleva determinados usos del ejemplo en la demostración de conjeturas.

Respecto al primer motivo se concluye que evoca justamente de una necesidad por generalizar propiedades, relaciones y/o argumentos. Está aparentemente relacionado con la función de explicar, pues en este camino de generalizar el estudiante va explicando por qué la conjetura depende de determinadas propiedades. De igual manera, está relacionado con usos del ejemplo, posibilidades y transiciones que promueven la generalización. Así, aun cuando hay estudiantes que poseen esquemas de demostración empírica, al experimentar esta necesidad pueden realizar usos productivos del ejemplo que los lleven a emitir argumentos deductivos. Lo que sugiere la pertinencia de evocar o promover este motivo en contextos similares.

El segundo motivo, de necesidad de organización, surge de una necesidad de ordenar, explicar, secuenciar y presentar los argumentos de la demostración. Una necesidad relacionada con la función de comunicar, en la que se busca organizar y construir un discurso para presentar un resultado (De Villiers, 1990). Así mismo, este motivo está relacionado con usos del ejemplo, posibilidades y transiciones que buscan fomentar y facilitar la comunicación en el proceso de demostración. En consecuencia, este motivo marca la importancia de generar espacios para que los estudiantes usen ejemplos como soporte para guiar y comunicar sus demostraciones, sin que estos hagan parte de los argumentos.

El tercer motivo, la necesidad de concentración, responde a dos necesidades: la de concentrarse durante las exploraciones en el *software* o el papel y al tiempo ir organizando mediante señas o marcas la información útil para la demostración. Por consiguiente, tiene relación con la función de verificar y comunicar, en tanto que se busca validar una conjetura y comunicar su demostración. Por tanto, puede promover usos del ejemplo, posibilidades y transiciones en favor de apoyar el proceso de demostración desde la formulación de la conjetura hasta su respectiva prueba, buscando tener esta concentración durante dicho proceso. Así, este motivo puede desencadenar usos productivos del ejemplo que apoyen la concentración y comunicación para construir demostraciones deductivas.

El cuarto motivo, las exigencias del proceso de demostración, está ligada a la interiorización por parte del estudiante de que se busca que las demostraciones sean deductivas. En consecuencia, está relacionado con la función de validar descrita por De Villiers (1990), en la que primero mediante métodos empíricos se convence el estudiante de la veracidad de la conjetura y luego busca validarla mediante deducciones lógicas. Este motivo fomenta exploraciones y usos del ejemplo más eficaces y productivos, en el sentido en que no se toma lo visual como elemento de convicción sino como apoyo para buscar relaciones con la teoría. Así mismo, está relacionado con posibilidades y transiciones que están enfocadas en promover, a partir de lo empírico, la construcción de argumentos deductivos. En este sentido, puede entenderse como un motivo que se va formando, ya que como mencionan Acosta y Fiallo (2017), mediante la intuición se debe hacer ver la necesidad de usar la teoría, pues inicialmente el estudiante no va a realizar demostraciones deductivas e incluso no les puede ver el sentido.

El quinto motivo, las retroalimentaciones del profesor o el compañero, se relaciona con las funciones de verificar, explicar o comunicar dadas por De Villiers (1990). Esto se debe a que en las interacciones de la clase el estudiante busca apoyo en el profesor o en alguno de sus compañeros, por lo que la retroalimentación que se reciba puede llevar a determinados usos del ejemplo que estén relacionados con alguna de estas funciones de la demostración; dependiendo de la necesidad por la que esté pasando el estudiante: generalizar, organizar o concentrarse. Este motivo resalta la importancia del profesor, quien es el que dirige los momentos de la clase y quien debe identificar los obstáculos que enfrentan los estudiantes para actuar de manera pertinente. Así, la retroalimentación es un factor clave que puede favorecer usos productivos del ejemplo en el proceso de demostración.

La siguiente **Tabla 11** presenta una síntesis de lo dicho anteriormente sobre los cinco motivos de cambio y las **Tabla 7**, **Tabla 8**, **Tabla 9** y **Tabla 10**.

Tabla 11

Relaciones teóricas asociadas a los cinco motivos de cambio

Motivo de cambio	Función de la demostración	Posibilidades y transiciones	Tipo de demostración
Necesidad de generalizar propiedades y argumentos	**Explicar** por qué la conjetura es cierta a partir de una propiedad característica, que hace evidente la veracidad de la conjetura	Enfocadas en generalizar e identificar propiedades y relaciones	Ejemplo genérico Experimento mental Deducción informal
Necesidad de organizar propiedades y argumentos	**Comunicar** sus argumentos, organizarlos y presentarlos en una secuencia de pasos	Enfocadas en organizar la información y presentarla	Experimento mental Deducción informal

Necesidad de concentrarse en el problema	**Verificar**, apoyándose en métodos empíricos y en ejemplos estáticos, la conjetura. Y **comunicar** sus resultados usando marcas o señas matemáticas sobre los ejemplos	Enfocadas en explorar para identificar propiedades y relaciones, en organizar la información y presentarla	Experimento menta Deducción informal
Exigencias del proceso de demostración	**Verificar**, apoyándose en métodos empíricos, la conjetura	Enfocadas en explorar para identificar propiedades y relaciones, y en organizar la información.	Experimento mental Deducción informal
Retroalimentación del profesor o compañero	Explicar, verificar o comunicar	Enfocadas de acuerdo con la necesidad de generalizar, organizar o concentrarse	Experimento mental Deducción informal

En lo que respecta a la metodología se concluye que: el trabajo con el equipo de investigación resultó relevante en aspectos clave de este estudio como el diseño, la preparación y los reajustes de la secuencia de enseñanza; así como en la selección de la información y el análisis de los datos. El experimento de enseñanza permitió realizar una intervención en el aula en la que se valoraron dimensiones como el currículo, interacciones y contenido a enseñar, favoreciendo la observación del proceso de aprendizaje en los estudiantes en relación con el uso de ejemplos como estrategia para la resolución de problemas de demostración. La conjetura que guio el experimento resultó esencial en las fases II y IV (planeación de la secuencia y análisis retrospectivos), debido a que orientó el diseño de la secuencia y permitió realizar una valoración sobre ella para refinarla. La secuencia de enseñanza favoreció la instrucción sobre el uso productivo de ejemplos y, en algunos estudiantes, la comprensión de las propiedades y congruencia de triángulos, cumpliendo sustancialmente con sus dos objetivos. El uso del AVG para trabajar allí la secuencia resultó acertado, ya que facilitó la toma de información en escrito y la orientación de las clases. Y, en cuanto a los momentos propuestos de clase sobre el planteamiento de conjeturas y de demostraciones, fueron pertinentes en tanto que llevaron a los estudiantes a usos del ejemplo que con el tiempo iban refinando y siendo más productivos; lo que aportó información suficiente para entender más sobre el uso de los ejemplos en la demostración.

Sobre algunos aportes teóricos más de este trabajo, se identificó un uso del ejemplo que puede resultar productivo: usar ejemplos para entender/representar definiciones teóricas. Este uso pretende ayudar a la comprensión de teoremas, en el sentido en que mediante ejemplos y/o contraejemplos el estudiante identifica las condiciones necesarias y suficientes del teorema, así como sus consecuencias. También se identificó la *necesidad de validar* como otro posible motivo de cambio entre los usos del ejemplo, pero no se contó con información suficiente para indagar sobre este motivo más que usar el ejemplo y el arrastre para validar empíricamente la conjetura.

Las limitaciones de este estudio, en cuanto a lo teórico, radican en que las relaciones establecidas entre las perspectivas teóricas propuestas por De Villiers (1990), Marrades y Gutiérrez (2000) y Ellis et al. (2019) necesitan seguir siendo investigadas para una mejor comprensión y explicación del fenómeno que involucra los motivos por los que los estudiantes pueden cambiar de un uso del ejemplo a otro. Otra limitación teórica es que los usos y motivos de cambio han sido identificados en el contexto de un curso universitario de Geometría Euclidiana respecto a problemas básicos de demostración; por tanto, con otros problemas o en otros cursos y otros niveles de educación pueden surgir usos y motivos de cambio que vale la pena investigar y contrastar con los aquí identificados.

Sobre las limitaciones metodológicas, los resultados están basados en su mayoría en datos recopilados con dos parejas de estudiantes. Y en general, con un número limitado de estudiantes observados, por tanto, los resultados presentados no pretenden ser generalizables. No obstante, aportan a la comprensión del uso de ejemplos como estrategia para la resolución de problemas de demostración y al desarrollo de prácticas e intervenciones en el aula que buscan indagar sobre problemáticas de la demostración.

Algunas perspectivas que se pueden explorar en otras investigaciones pueden ser sobre la identificación de otros motivos de cambio del ejemplo con otros problemas como los de construcción, lugares geométricos, simulación, entre otros. También pueden centrarse en analizar más a fondo la relación entre los usos del ejemplo, los motivos de cambio y las funciones de la demostración, para identificar si las funciones determinan los motivos de cambios o si son estos motivos los que llevan a usar alguna función de la demostración. En general, investigaciones que busquen aportar a comprender mejor la naturaleza del uso del ejemplo en el proceso de demostración (Knuth et al. 2019) y que contribuyan al campo de la educación matemática con intervenciones en el aula para abordar problemáticas de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración (Stylianides y Stylianides, 2017; Stylianides et al., 2024).

Referencias bibliográficas

Acosta, M. (2008). *Démarche expérimentale, validation, et ostensifs informatisés. Implications dans la formation d'enseignants à l'utilisation de Cabri en classe de géométrie*. [Tesis de doctorado no publicada] Universite Joseph Fourier, Francia.

Acosta, M. y Fiallo, J. (2017). *Enseñando geometría con tecnología digital. Una propuesta desde la teoría de las situaciones didácticas*. UFD editorial.

Alcock, L. y Weber, K. (2010). Undergraduates' Example Use in Proof Construction: Purposes and Effectiveness. *Investigations in Mathematics Learning, 3*(1), 1-22.

Aricha-Metzer, I. y Zaslavsky, O. (2019). The nature of students' productive and non-productive example-use for proving. *The Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 304-322. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.002

Balacheff, N. (1988). A study of students' proving processes at the junior high school level. In *Second UCSMP international conference on mathematics education*. NCTM.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Una empresa docente.

Bell, A. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*, 23-40. https://doi.org/10.1007/BF00144356

Beltrán-Meneu, M., Ramírez-Uclés, R., Ribera-Puchades, J., Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2024). A case study of prooving by students with differents levels of mathematical gidftedness. *Mathematics Teaching Research Journal*, *16*(2), 119-145.

Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática: Recursos para la captura de información y el análisis*. Editorial Universidad de Antioquia.

Clemens, S., O'Daffer, P. y Cooney, T. (1998). *Geometry.* Addison Wesley Longman.

Confrey, J. y Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjeture-driven research design. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 231-265). Lawrence Erlbaum Associates.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*, 17 – 24.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En: A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology Of Mathematics Education*: Vol. 2. (pp. 248-255). University of Stellerbosch: Stellerbosch.

Education Committee of the European Mathematical Society. (2011). Do theorems admit exceptions? Solid findings in mathematics education on empirical proof schemes. *EMS Newsletter, 82*,50–53.

Ellis, A., Ozgur, Z., Vinsonhaler, R., Dogan, M., Carolan, T., Lockwood, E., Lynch, A., Sabouri, P., Knuth, E. y Zaslavsky, O. (2019). Student thinking with examples: The criteria-affordances-purposes-strategies framework. *The Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 263-283. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.06.003

Fiallo J. (2011). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. [Tesis de doctorado no publicada]. Universidad de Valencia, España.

Fiallo, J., Camargo, L. y Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista Integración, 31*(2), 181-205.

Guerrero, D. y Triviño, J. (2018). *Generar incertidumbre para generar argumentos y desarrollar competencias ciudadanas y matemáticas en clase de geometría*. [Tesis de maestría no publicada], Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Goldenberg, P. y Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics, 69,* 183-194. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9143-3

Guarín, J. y Malaver, D. (2023). *Razonamiento deductivo a través de problemas de construcción utilizando DGPad-Colombia como medio*. [Tesis de pregrado no publicada], Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Harel, G. y Sowder, L. (1996). Classifying processes of proving. En L. Puig y Á. Gutiérrez. (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology Mathematics Education* (pp. 59-66). Valencia, España: Encuadernaciones Artesanas, S.L.

Iannone, P., Inglis, M., Mejía-Ramos, J., Simpson, A., y Weber, K. (2011). Does generating examples aid proof production? *Educational Studies in Mathematics*, 77, 1–14. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9299-0

Knuth, E., Zaslavsky, O., y Ellis, A. (2019). The role and use of examples in learning to prove. *The Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 256-262. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.06.002

Komatsu, K. y Jones, K. (2020). Interplay between Paper-and-Pencil Activity and Dynamic-Geometry-Environment Use during Generalisation and Proving. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *6*(2), 123-143. https://doi.org/10.1007/s40751-020-00067-3

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. y Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, Present and Future* (pp. 275-304). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Lynch, A. y Lockwood, E. (2019). A comparison between mathematicians' and students' use of examples for conjecturing and proving. *The Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 323-338. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.07.004

Mariotti, M. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44,* 25–53. https://doi.org/10.1023/A:1012733122556

Mariotti, M. (2019). The Contribution of Information and Communication Technology to the Teaching of Proof. En G. Hanna, D. Reid, M. De Villiers (Eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*. Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_8

Marrades, R. y Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational studies in mathematics*, *44*, 87-125. https://doi.org/10.1023/A:1012785106627

Mason, J. (2019). Relationships between proof and examples: Comments arising from the papers in this issue. *Journal of Mathematical Behavior, 53*, 339–347. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.07.005

Mills, M. (2014). A framework for example usage in proof presentations. *Journal of Mathematical Behavior, 33*, 106–118. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.11.001

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*. Enlace Editores LTDA.

Morales, S. y Samper, C. (2015). Dificultades en el aprendizaje de la demostración deductiva formal en geometría euclídea, *Amazonia Investiga, 4*(6). 55-68.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). Principios y estándares para la educación matemática. (M. Reyez, Trans.). Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (Obra original publicada en el 2000).

Ozgur, Z., Ellis, A., Vinsonhaler, R., Dogan, M. y Knuth, E. (2019). From examples to proof: Purposes, strategies, and affordances of example use. *The Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 284-303. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.03.004

Palatnik, A., y Dreyfus, T. (2019). Students' reasons for introducing auxiliary lines in proving situations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *55*, 100679. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.10.004

Riaño, Á. (2023). *Tipos de demostración que realizan estudiantes de nuevo ingreso al curso de geometría euclidiana en las carreras de matemáticas y licenciatura en matemáticas de la Universidad Industrial de Santander*. [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Samper, C. y Molina, Ó. (2013). *Geometría plana. Un espacio de aprendizaje*. Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Molina, Ó. y Echeverry, A. (2013). *Elementos de geometría*. Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Silva, L. (2013). *Argumentar para definir y definir para argumentar*. [Tesis de maestría no publicada] Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Stylianides, G. y Stylianides, A. (2017). Based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, *96*, 119-127. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9782-3

Stylianides, G., Stylianides, A. y Moutsios-Rentzos, A. (2024). Proof and proving in school and university mathematics education research: a systematic review. *ZDM–Mathematics Education*, *56*(1), 47-59. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01518-y

Vinner, S. (2002). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En: Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library*, 11. 65-81, Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5

Watson, A. y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Lawrence Erlbaum. https://doi.org/10.4324/9781410613714

Zaslavsky, O. (2018). Genericity, conviction, and conventions: examples that prove and examples that don't prove. En A. Stylianides, y G. Harel (Eds.), *Advances in mathematics education research on proof and proving* (pp. 283–298). Cham, Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_20

Zaslavsky, O. (2019). There is more to examples than meets the eye: Thinking with and through mathematical examples in different settings. *The Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 245-255. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.10.001

Zaslavsky, O. y Knuth, E. (2019). The complex interplay between examples and proving: Where are we and where should we head? *The Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 242-244. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.10.001

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69,* 131–148. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9131-7

Zodik, I., y Zaslavsky, O. (2007). Is a visual example in geometry always helpful? En Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. y Seo, D.Y. (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, (pp. 265-272). Seoul: PME.