

**LA CONSTRUCCIÓN DE UNA COMUNIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA
COMO ESTRATEGIA PARA EL DESARROLLO DE PENSAMIENTO
FUNCIONAL**

ANA MARÍA CORREAL JURADO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
BUCARAMANGA
2018**

**LA CONSTRUCCIÓN DE UNA COMUNIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA
COMO ESTRATEGIA PARA EL DESARROLLO DE PENSAMIENTO
FUNCIONAL**

ANA MARÍA CORREAL JURADO

Trabajo de Grado para Optar al Título de Magíster en Pedagogía

Directora

SOLANGE ROA FUENTES

Doctora en Ciencias Especialidad en Matemática Educativa

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS

ESCUELA DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA

BUCARAMANGA

2018

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	14
1. ANTECEDENTES	18
1.1 ESTÁNDARES Y PRINCIPIOS QUE GUÍAN LA ACTIVIDAD DOCENTE	18
1.2 RESULTADOS PRUEBAS NACIONALES	21
1.3 COMUNIDAD MATEMÁTICA	23
1.4 PENSAMIENTO FUNCIONAL	26
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	33
2.1 OBJETIVO GENERAL	34
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	34
3. MARCO CONCEPTUAL	36
3.1 PENSAMIENTO ALGEBRAICO	36
3.2 EL PENSAMIENTO FUNCIONAL EN LAS PRIMERAS EDADES	37
3.3 SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	42
3.3.1 Sistema de representación tabular	43
3.3.2 Sistema de representación simbólico	44
3.3.3 Sistema de representación verbal	45
3.3.4 Sistema de representación pictórico	45
3.3.5 Sistema de representación gráfico	45
4. DISEÑO METODOLÓGICO	47
4.1 DISEÑO Y ANÁLISIS DE TAREAS	48
4.2 IMPLEMENTACIÓN DE TAREAS Y DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD	49
4.3 RECOLECCIÓN Y SELECCIÓN DE DATOS	52
4.4 INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS TEÓRICO	52
5. DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN	53
5.1 PRUEBA DIAGNÓSTICA	53

5.2 SESIONES DE INTERVENCIÓN.....	77
5.2.1 Tarea 1.....	77
5.2.2 Tarea 2.....	79
5.2.3 Tarea 3.....	81
5.2.4 Tarea 4.....	82
5.2.5 Tarea 5.....	82
5.3 ANÁLISIS DE LAS SESIONES DE INTERVENCIÓN.....	83
5.3.1 Análisis de la relación funcional correspondencia.....	84
5.3.2 Análisis de la relación funcional de recurrencia.	86
5.3.3 Análisis de la relación funcional de covariación	87
5.3.4 Análisis del sistema de representación verbal	88
5.3.5 Análisis del sistema de representación pictórico.....	89
5.3.6 Análisis del sistema de representación tabular	90
5.3.7 Análisis del sistema de representación simbólico o algebraico.....	92
5.3.8 Análisis del sistema de representación gráfico.	93
5.4 COMUNIDAD MATEMÁTICA	95
5.5 ENTREVISTAS	101
5.5.1 Presentación de la entrevista.....	102
5.5.2 Análisis de las entrevistas.....	104
6. CONCLUSIONES: ASPECTOS GENERALES, TEÓRICOS, METODOLÓGICOS Y PLANTEAMIENTOS EMERGENTES.....	115
6.1 ASPECTOS GENERALES.....	115
6.2 ASPECTOS TEÓRICOS.....	115
6.2.1 Relaciones funcionales	115
6.2.2 Sistemas de representación.....	116
6.2.3 Comunidad matemática	117
6.3 CONSIDERACIONES DIDÁCTICAS Y METODOLÓGICAS SOBRE LA IMPLEMENTACIÓN DE COMUNIDADES MATEMÁTICAS: ELEMENTOS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES.	118
BIBLIOGRAFÍA.....	121

ANEXOS.....125

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Desempeño área de matemáticas 2015-2016	22
Figura 2. Secuencias presentadas a los estudiantes.	28
Figura 3. Componentes del early algebra	37
Figura 4. Mapa conceptual del pensamiento funcional	39
Figura 5. Ajuste mapa del pensamiento funcional	40
Figura 6. Representación gráfica	46
Figura 7. Estructura Metodológica de la Investigación.....	47
Figura 8. Implementación de Tareas y desarrollo de la Actividad: Construcción de una Comunidad Matemática	51
Figura 9. Secuencia de las tres primeras piscinas.....	64
Figura 10. Patron	69
Figura 11. Solución 4 y 5	70
Figura 12. Solucion 10	71
Figura 13. Problemas de las baldosas.....	77
Figura 14. Ejercicio del peregrino	81
Figura 15. Producción LKR, Primera Sesión Tarea 1(a).....	85
Figura 16. Producción LDT, Primera Sesión Tarea 1(a).	85
Figura 17. Producción LDT, Primera Sesión Tarea 1(c).	86
Figura 18. Producción G(LPC,AFT,JJS), Primera Sesión Tarea 1(c).	87
Figura 19. Producción CM, Primera Sesión Tarea 1(c).	88
Figura 20. Producción WKR, Primera Sesión Tarea 1(d).	88
Figura 21. Producción LBP, Primera Sesión Tarea 1(a).	89
Figura 22. Producción AFT, segunda Sesión Tarea 2 (h).....	90
Figura 23. Producción AFT, Primera Sesión Tarea 1 (c).	91
Figura 24. Producción IJB, segunda sesión Tarea 1 (c).	92

Figura 25. Producción G (CM, CAA, LAC, DV), quinta sesión Tarea 5.....	93
Figura 26. Producción G (IJB, LKR, BAP, JRP), quinta sesión Tarea 5.	93
Figura 27. Producción G (JJS, JSS, AFT, LPC), tercera sesión Tarea 1.....	94
Figura 28. Producción G (CM, CAA, LAC, DV), tercera sesión Tarea 1.	95
Figura 29. trabajo individual.....	96
Figura 30. Trabajo colectivo 1.....	97
Figura 31. trabajo colectivo 2.....	98
Figura 32. Trabajo grupal 1.....	99
Figura 33. Trabajo grupal 2.....	100
Figura 34. Produccion BAP y WKR entrevista 1	106
Figura 35. Produccion AFT y BO entrevista 4.....	107
Figura 36. Produccion BAP y WKR entrevista 1	108
Figura 37. produccion BON y AFT entrevista 4.....	112
Figura 38. Produccion CCA y DV entrevista 2	113

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Expectativas niveles 6-8	20
Tabla 2. Estudiantes evaluados años 2015-2016	22
Tabla 3. Resultados para la situación dada en una representación figural	29
Tabla 4. Sistema de representacion tabular	43
Tabla 5.	54
Tabla 6. Análisis a priori ítem 1 prueba diagnóstica.....	60
Tabla 7. Análisis a priori ítem 2 prueba diagnóstica.....	67
Tabla 8. Representación tabular	72
Tabla 9. Análisis a priori ítem 3 prueba diagnóstica.....	74
Tabla 10. Ejercicio del rectángulo	80
Tabla 11. Producción G (IJB, LKR, BAP, JRP), segunda Sesión Tarea 1 (c).	91
Tabla 12. Transcripción de entrevista número 1	105
Tabla 13. Transcripción de entrevista número 3	107
Tabla 14. Transcripción de entrevista número 4	109

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
Anexo A. Consentimiento informado a padres de familia	125
Anexo B. Asentimiento informado a estudiantes	127
Anexo C. Consentimiento participante	128
Anexo D. Asentamiento participante	129
Anexo E. Prueba Diagnostica	131
Anexo F. Sesión 1.....	134
Anexo G. Sesión 2	136
Anexo H. Sesión 3	138
Anexo I. Sesión 4.....	140

RESUMEN

TÍTULO: LA CONSTRUCCIÓN DE UNA COMUNIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA COMO ESTRATEGIA PARA EL DESARROLLO DE PENSAMIENTO FUNCIONAL *

AUTOR: ANA MARÍA CORREAL JURADO**

PALABRAS CLAVE: Comunidad, Matematica, aula, estrategia, pensacion, funcional

DESCRIPCIÓN:

Se presentan los resultados de una investigación que estudia el desarrollo del pensamiento funcional gracias a la construcción de una Comunidad Matemática en un curso de secundaria. Para esto se diseña un conjunto de Tareas que incluyen diferentes representaciones del concepto de función en diversos contextos. La actividad generada en el aula evidencia la importancia de fomentar la participación activa de los estudiantes mediante el desarrollo de procesos como: conjeturar, analizar, proponer, argumentar y demostrar. Así como la importancia de la construcción del concepto de función, como elemento integrador en matemáticas.

El proceso metodológico adoptado para esta investigación se basa en la construcción de una Comunidad Matemática en el aula propuesta por Santos (2007). Esta metodología permite realizar un seguimiento a los estudiantes de tercer grado de secundaria de una Institución Educativa Pública de Bucaramanga y al profesor como miembros activos de una comunidad. Así pues la metodología se compone de cuatro etapas: diseño y análisis de Tareas; Implementación de las Tareas y desarrollo de la Actividad; Recolección y Selección de datos, e Interpretación y análisis teórico de los datos.

Los participantes se familiarizaron con un conjunto de representaciones para las funciones que fueron usadas flexible y apropiadamente, examinando las relaciones funcionales de recurrencia, correspondencia y covariación, en funciones lineales y pasando con facilidad de un tipo de representación a otro.

Los resultados obtenidos muestran que los estudiantes, de un curso inicial de secundaria, parten de lo que son capaces de hacer para desarrollar elementos del pensamiento funcional, realizar transiciones de una representación a otra con propiedad y establecer relaciones entre variables. De igual forma se evidencia que la participación en la Comunidad Matemática llevó a los escolares a ser críticos y constructivos, al discutir situaciones e ideas matemáticas.

* Proyecto de grado

** Facultad de Ciencias Humanas, Escuela de Educacion, Maestria en Pedagogia. Director. Solange Roa Fuentes

ABSTRACT

TITLE: THE CONSTRUCTION OF A MATHEMATICAL COMMUNITY IN THE CLASSROOM AS A STRATEGY FOR THE DEVELOPMENT OF FUNCTIONAL THINKING*

AUTHOR: ANA MARÍA CORREAL JURADO**

KEY WORDS: *Community, Mathematics, classroom, strategy, thinking, functional*

DESCRIPTION

The present the results of a research that studies the development of functional thinking through the construction of a Mathematical Community in a high school course. To achieve this, a set of tasks were designed which include various representations of the concept of function in different contexts. The activity generated in the classroom demonstrates the importance of encouraging the active participation of students as consequence of the development of processes such as conjecture, analyze, propose, argue and demonstrate. As well as the importance of the construction of the concept of function, as an integrating element in mathematics.

The methodological process adopted for this research is based on the construction of a Mathematical Community in the classroom proposed by Santos (2007). This methodology allows accomplishing a follow-up process to third-grade students of the secondary school of a Public Educational Institution of Bucaramanga and the teacher as active members of a community. The methodology was divided into four stages: design and analysis of tasks; task implementation and activity development; collection and selection of data, and interpretation and theoretical analysis of the data.

The participants were familiarized with a set of representations for the functions that were used appropriately, examining the functional relationships of recurrence, correspondence, and covariation, in linear functions and easily moving from one type of representation to another.

The results showed that students, from an initial high school course, start from what they are able to do to develop elements of functional thinking, making transitions from one representation to another with property and establishing relationships among variables. In the same way, it is evident that the participation in the Mathematical Community led the students to be critical and constructive through situation discussions and mathematical ideas

* Proyecto de grado

** Facultad de Ciencias Humanas, Escuela de Educacion, Maestria en Pedagogia. Director. Solange Roa Fuentes

INTRODUCCIÓN

El estudio de las matemáticas en la edad escolar ha tenido cambios a través de la historia; su enfoque memorístico y netamente algorítmico se está transformando para convertirse en facilitador del desarrollo del pensamiento y su aplicación en el contexto.

En este documento, registra el diseño y desarrollo de un proyecto orientado por los principios y estándares que guían la actividad docente. La necesidad de proponer un cambio en el aula de matemáticas se hace presente en la actualidad para responder a los diferentes lineamientos propuestos por las entidades académicas que rigen el que hacer docente. En Colombia el Ministerio de Educación Nacional (MEN), plantea el desarrollo de competencias matemáticas en aspectos comunicativos y de razonamiento centrados en la resolución de problemas; en particular este trabajo está dirigido a estudiantes de educación secundaria. Se parte de la idea de que fortalecer competencias es un arduo trabajo que contemplan los retos de los maestros, es necesario cambiar la mirada del aula de clases tradicional donde prima la clase magistral, y el docente como portador de la verdad absoluta; cambiar esta perspectiva es una tarea que como licenciados en matemáticas debemos construir conjuntamente.

Este trabajo busca implementar en el aula estrategias que potencien el pensamiento funcional, bajo los parámetros contemplados por Santos Trigo (2007) en su libro *La resolución de problemas matemáticos fundamentos cognitivos*. Allí el autor plantea la estrategia para desarrollar la resolución de problemas como una metodología de clase, la necesidad de construir una Comunidad Matemática, donde la concepción de aula regular cambia. Aquí todos los integrantes del aula, maestro y estudiantes son participantes potenciales en la construcción de

conocimiento, capacidad de argumentar, proponer, conjeturar, dar puntos de vista, indagar, e incluso evaluar las propuestas de los maestros y sus semejantes que permiten una comunicación de tipo académico; que despiertan ideas matemáticas propias en los estudiantes y su interés por ser miembros productivos en una comunidad de conocimiento.

Conocer las diferentes formas de razonamiento de los integrantes de la Comunidad Matemática frente a las Tareas matemáticas objeto de esta investigación, puede permitir observar comportamientos, analizar representaciones y construcciones que susciten de los participantes de esta comunidad. En la puesta en común de las soluciones para ser debatidas e intervenidas dentro de la actividad propia de la Comunidad Matemática se encuentran evidencias de construcción de pensamiento funcional en los estudiantes.

El capítulo 1 contiene los antecedentes que se revisaron al iniciar la elaboración de esta propuesta, divididos entre la construcción de comunidades matemáticas en el aula y trabajo donde se desarrolla pensamiento funcional, los estándares que guían la actividad docente propuestas por el MEN, los resultados de las pruebas nacionales de quienes serán objeto de estudio. El capítulo 2 muestra que dados los resultados en pruebas externas y las estructuras propias de las matemáticas se propone el pensamiento funcional como concepto que puede motivar el desarrollo de diferentes habilidades entre diversas estructuras propias de las matemáticas, esto da lugar a plantear la pregunta de investigación: ¿Qué elementos del pensamiento funcional pueden desarrollar estudiantes que participan en una Comunidad Matemática?, presentando así los objetivos general y específicos que se desarrollaran en este trabajo.

El capítulo titulado marco conceptual muestra los elementos teóricos que se relacionan con nuestro problema de investigación, para esto se define el

pensamiento algebraico y a partir de este las relaciones funcionales y por último los sistemas de representación.

El capítulo del diseño metodológico, adoptado para esta investigación se basa principalmente en la construcción de una Comunidad Matemática en el aula propuesta por Santos (2007) y se compone de cuatro etapas: diseño y análisis de Tareas; Implementación de las Tareas y desarrollo de la Actividad; Recolección y Selección de datos, e Interpretación y análisis teórico de los datos.

El capítulo 5 esboza el desarrollo de la investigación que permite realizar un seguimiento a los estudiantes tercer año de secundaria de una Institución Educativa Pública de Bucaramanga y al profesor como miembros activos de una comunidad. Donde se realizan análisis a priori y a posteriori de las pruebas con el fin de caracterizar los elementos del pensamiento funcional que desarrollan los estudiantes al realizar diferentes Tareas matemáticas. Por tanto es de interés en esta investigación entender el sujeto en el aula, estudiar el rol de los estudiantes y del profesor frente a una Tarea matemática, analizar los procesos al formular, emplear e interpretar las matemáticas como forma de modelar un problema en contexto.

Para finalizar se registran los Resultados o avances. El trabajo de las funciones desde el concepto, la relación con la vida cotidiana y la relación de patrones condujo al desarrollo y profundización en la comprensión de conceptos y relaciones matemáticas a medida que los estudiantes crean, comparan y utilizan diversas representaciones, que les permiten comunicar sus ideas. Los participantes se familiarizaron con un conjunto de representaciones para las funciones incluyendo tablas, gráficas, expresiones verbales y simbólicas, que fueron usadas flexible y apropiadamente, examinando relaciones funcionales de correspondencia, covariación y recurrencia, entre las representaciones de las funciones y pasando con facilidad de un tipo de representación a otro.

Los resultados obtenidos muestran que los estudiantes, de un curso inicial de secundaria, parten de lo que son capaces de hacer para desarrollar elementos del pensamiento funcional, realizar transiciones de una representación a otra con propiedad; establecen relaciones entre variables y describen características de las funciones. De igual forma se evidencia que la participación en la Comunidad Matemática llevó a los escolares a ser críticos y constructivos, al discutir situaciones e ideas matemáticas.

1. ANTECEDENTES

La matemática ha constituido una parte fundamental del desarrollo del pensamiento desde el principio de la humanidad. Sin embargo, en el sistema educativo ha primado el desarrollo algorítmico y memorístico más que las formas de pensamiento que tuvieron lugar en su génesis. En este capítulo se describen los elementos que anteceden esta investigación, se inicia con los lineamientos que guían la actividad docente, propuestos por el MEN de Colombia, los resultados de las pruebas SABER correspondientes a la educación básica secundaria del Instituto Santo Ángel de Bucaramanga. La descripción de las características de la Comunidad Matemática como un método para desarrollar en el aula los procesos inmersos en la Resolución y Planteamiento de problemas y el desarrollo del pensamiento funcional en edad temprana.

1.1 ESTÁNDARES Y PRINCIPIOS QUE GUÍAN LA ACTIVIDAD DOCENTE

Los cinco procesos generales que se contemplan en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas son: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.¹

Trabajar estos procesos en el aula permite que los estudiantes desarrollen pensamiento matemático y se espera que por ende obtengan mejores resultados en prueba nacionales, internacionales como Programme for International Student Assessment, PISA; además se espera que con propiedad, logre afrontar retos

¹ COLOMBIA, M. E. N. Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. 2006, p 51

académicos y de la vida diaria. Para la población que participa en esta investigación (estudiantes de tercer año de secundaria), se plantea para el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, los siguientes estándares.

- ✓ Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- ✓ Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- ✓ Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
- ✓ Modeló situaciones de variación con funciones polinómicas.
- ✓ Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.
- ✓ Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.
- ✓ Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.
- ✓ Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.
- ✓ Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.²

En el documento Principios y estándares para la educación matemática, The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM por sus siglas en inglés, versión traducida por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática, 2003), se toma lo correspondiente a álgebra estándar para la etapa 6-8, teniendo en cuenta lo que los estudiantes deberían estar en capacidad de realizar al terminar esta etapa.

² Ibid., p. 87.

Tabla 1. Expectativas niveles 6-8

Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a los estudiantes para:	Expectativas En la etapa 6-8, todos los estudiantes deberían:
Comprender patrones, relaciones y funciones	✓ Representar, analizar y generalizar una variedad de patrones mediante tablas, graficas, palabra y cuanto sea posible, reglas simbólicas. ✓ Relacionar y comprar distintas formas de representación de una relación ✓ Identificar funciones, lineales o no lineales, y contrastar sus propiedades a partir de tablas, graficas o ecuaciones.
Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.	✓ Iniciar la comprensión conceptual de los diferentes usos de las variables. ✓ Explorar relaciones entre expresiones simbólicas y graficas de líneas, poniendo especial atención en el significado de la ordenada en el origen y de la pendiente. ✓ Usar el álgebra simbólica para representar situaciones y resolver problemas particularmente aquellos que representen relaciones lineales. ✓ Reconocer y generar formas equivalentes de expresiones algebraicas sencillas y resolver ecuaciones lineales.
Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.	✓ Analizar y resolver problemas contextualizados usando representaciones diversas como gráficas, tablas y ecuaciones.
Analizar el cambio en contextos diversos	✓ Utilizar gráficas para analizar la naturaleza de los cambios cuantitativos en relaciones lineales.

Fuente: THALES, S. A. E. M. Principios y Estándares para la Educación Matemáticas. Sevilla, SAEM Thales, 2003, p. 226

Los alumnos de los niveles medios deberían aprender el álgebra como un conjunto de conceptos y habilidades referentes a la representación de relaciones cuantitativas, y como una forma de pensamiento matemático para formalizar patrones, funciones y generalizaciones. Deberían trabajar más frecuentemente con símbolos algebraicos que en los niveles más bajos. Es fundamental que lleguen a sentirse cómodos relacionando expresiones simbólicas formuladas con variables mediante representaciones verbales, tabulares y gráficas de relaciones numéricas y cuantitativas. Deberían iniciar la comprensión de los diferentes significados y usos de las variables, mediante la representación de cantidades en problemas diversos. Deberían conectar sus experiencias con las funciones lineales a sus conocimientos en desarrollo sobre la proporcionalidad, y distinguir las funciones lineales de las no lineales. Y también, aprender a reconocer y generar expresiones equivalentes, a resolver ecuaciones lineales y a utilizar fórmulas sencillas. Siempre que sea posible la enseñanza y el aprendizaje del álgebra debe integrarse con otros tópicos del currículo.³

Enseñar álgebra de manera que se alcancen las expectativas planteadas para esta etapa, exige una implementación metodológica exhaustiva y el diseño de tareas encaminadas a la consecución de resultados. A continuación se describen los principales resultados de la institución participante en las pruebas SABER. Estos resultados se toman como un punto de partida para el diseño y desarrollo de esta investigación.

1.2 RESULTADOS PRUEBAS NACIONALES

Para mostrar un panorama de la actualidad académica del Instituto Santo Ángel lugar donde se realiza esta investigación, se muestran a continuación los resultados comparativos en las pruebas 2015-2016 SABER 9.

³ Ibid., p. 227

Descripción de la población participante de la prueba.

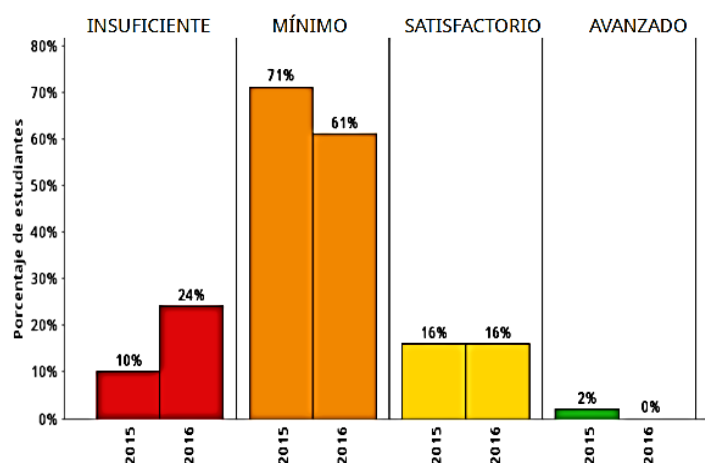
Tabla 2. Estudiantes evaluados años 2015-2016

Año	Número de estudiantes evaluados
2015	44
2016	38

Fuente: ICFES INTERACTIVO Publicación de resultados Saber 3°, 5° y 9° [en línea] disponible en: <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/historico/reporteHistoricoComparativo.aspx>

La figura 1 muestra el porcentaje de estudiantes ubicado en cada uno de los niveles de desempeño, en el área de matemáticas en el grado noveno.

Figura 1. Desempeño área de matemáticas 2015-2016



Fuente: ICFES INTERACTIVO Publicación de resultados Saber 3°, 5° y 9° [en línea] disponible en: <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/historico/reporteHistoricoComparativo.aspx>

“Los niveles de desempeño consisten en una descripción cualitativa sobre lo que el estudiante es capaz de hacer cuando se enfrenta a preguntas de distintos rangos de dificultad, en una situación de contexto específica.”⁴ En el comparativo de los años en mención 2015 y 2016, un juicio de valor sobre los cambios

⁴ ICFES INTERACTIVO Publicación de resultados Saber 3°, 5° y 9° [en línea] disponible en: <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/historico/reporteHistoricoComparativo.aspx>

presentados debe tener en cuenta los movimientos ocurridos en los cuatro niveles: dado que se presenta un aumento en la cantidad de estudiantes en nivel Mínimo se considera que no hay mejora, sino que por el contrario se tienen resultados menos favorables.

El Instituto Santo Ángel de Bucaramanga se encuentra en un nivel B y su índice sintético de calidad educativa ISCE está sobre el valor de la media nacional y territorial pero bastante alejado del rendimiento esperado por parte de la comunidad educativa.

1.3 COMUNIDAD MATEMÁTICA

Trabajar en la formación de una Comunidad Matemática en el aula responde a las necesidades de convalidación que se hacen necesarias en el mundo de las matemáticas. Se debe destacar el trabajo en equipo que permite corroborar los avances en la ciencia. Como cita Santos Trigo en su libro *La resolución de problemas matemáticos fundamentos cognitivos*⁵, las matemáticas no se construyen solo con lápiz y papel y de manera individual, sino por el contrario, es fundamental la aprobación y valides por parte otros miembros de la Comunidad Matemática. Un claro ejemplo de esto es la presentación del último teorema planteado por Fermat formulado en 1937. Durante 8 años Andrew Wiles trabajó con otros matemáticos en esta conjetura, en 1993 Wiles pone a consideración de la Comunidad Matemática, una demostración. Sin embargo resultado de esta presentación, otros matemáticos detectan fallas en la demostración “al establecer una cota superior”. Entonces Wiles revisa junto con sus estudiantes nuevamente los argumento de su demostración y en 1994 con ayuda de uno de ellos Richard L. Taylor, logra resolver este problema. La demostración del Teorema de Fermat es

⁵ SANTOS TRIGO, Luz Manuel. *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. Trillas, 2007, p 95 - 96

finalmente avalada y aprobada por la comunidad y en 1995 se anuncia la demostración de la conjetura inicial.

Tymoczko (1986) afirma que “Una demostración no es tal hasta que ha sido aceptada por la comunidad de matemáticos”⁶. En este orden de ideas es necesario reconocer el carácter de la comunidad en el aula que “identifica al estudiante como un sujeto activo que necesita una comunidad para discutir sus ideas matemáticas y así comunicarlas de maneras eficiente”⁷. De esta forma los estudiantes pueden despertar su interés y disponibilidad para estudiar matemáticas.

Establecer una Comunidad Matemática en el salón de clase se convierte en una necesidad, pues al tener este espacio los estudiantes necesitan organizar sus ideas de manera convincente; que sus argumentos e intervenciones sean razonables y contribuyan al crecimiento de los participantes de la comunidad. Pensar, razonar ordenadamente, emitir un concepto, evaluar, argumentar son formas de ser partícipe de esta comunidad y esto se logra cuando los estudiantes construyen sus propias ideas matemáticas y pueden ponerlas en consideración e incluso considerar las de sus iguales.

Vincular las matemáticas al contexto de los estudiantes, permite que puedan interactuar con libertad:

Los cursos de matemáticas deben convertirse en comunidades donde la gente tome acuerdos y se comporte de cierta forma y donde haya un gran dialogo para construir argumentos que se sustenten alguna idea o se planteen contraejemplos para refutar algún resultado.⁸

⁶ Ibid., p. 96

⁷ Ibid., p. 95

⁸ Ibid., p. 97

Así los estudiantes tendrán un papel más activo y serán participantes productivos en el estudio de la asignatura.

Una nueva propuesta del replanteamiento que debe hacer el maestro de su aula de clase para beneficiar el desarrollo de las matemáticas, es la que propone Cantoral. Allí compara el diseño del aula habitual, donde no se permite que los alumnos interactúen de manera espontánea, que argumenten o difieran de los procesos de sus compañeros y mucho menos del maestro.

En ese sentido, es frecuente observar que el diseño de la clase no incluye como actividad habitual, que los alumnos argumenten sobre los conceptos que se tratan o que ellos directamente expongan sus propias ideas, menos aún que refuten las consideraciones de sus compañeros o las de su profesor. Es así como se pierde el potencial que todo alumno posee para debatir en matemáticas y en ciencia; se pierden los hilos de la argumentación y sus ideas cotidianas no evolucionan hacia ideas científicas. Esto también, como podrá comprenderse, induce un comportamiento contemplativo en sus acciones de la vida diaria, cuando el estudiante tenga que defender sus creencias y, por tanto, se inhibe el desarrollo de una amplia gama de habilidades intelectuales. De manera que al abrir un espacio en la clase de matemáticas para que los alumnos expresen lo que piensan de algún concepto matemático y que puedan refutar la opinión de sus compañeros se torna importante, digamos fundamental, en el desarrollo de su pensamiento en general y de su pensamiento matemático en particular. Además, este tipo de interacción en el aula favorece el desarrollo del pensamiento crítico, ya que se incentiva que se ofrezcan alternativas de solución de algún problema y que argumentando con base en ello se favorezca el desarrollo intelectual de los alumnos.⁹

Esta es una fuerte razón para considerar una nueva manera de concebir el aula, los beneficios que se pueden lograr, no solo para los estudiantes sino para los

⁹ CANTORAL, R. Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. *México: Secretaría de educación pública*, 2013, p 17.

maestros. La conformación de un espacio con características especiales que trate temas que contribuyan a la formación del individuo más allá de los algoritmos y las memorizaciones, que le permita crear, interactuar, comunicarse y hacer matemáticas. Esta es la principal finalidad de la propuesta que se plantea en este escrito.

1.4 PENSAMIENTO FUNCIONAL

Cañadas y Fuentes (2015, p. 212) describen el pensamiento funcional como:

Una actividad cognitiva que se pone de manifiesto al construir, describir y razonar con y sobre las funciones y está construida por tópicos, procedimientos y relaciones que conciernen a las funciones, abordando las ideas de cambio, relaciones entre esos cambios y la utilización de esas relaciones para resolver problemas.¹⁰

Blanton y Kaput¹¹ trabajaron un estudio sobre el desarrollo del pensamiento funcional con participantes desde pre kínder hasta quinto grado, este se aplica en una escuela distrital bajo un programa de desarrollo profesional para docentes; una tarea muy significativa fue “*Eyes and tails*”. Allí se estudia la relación entre una cantidad arbitraria de perros y el número de ojos o de ojos y colas correspondiente a cada cantidad. Entre los datos recolectados, se encontraron diferentes formas de representación, las cuales permitieron su análisis a partir de la complejidad del lenguaje matemático, las operaciones empleadas y la forma como se daba tratamiento a las variables.

¹⁰ CAÑADAS, M. C.; FUENTES, S. Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio. 2015, p 212.

¹¹ BLANTON, Maria; KAPUT, James. Elementary grades students' capacity for functional thinking. En *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 2004. p. 135-142.

Con este tipo de tareas, los autores concluyen que en etapas tempranas de pre kínder a quinto, el pensamiento funcional se desarrolla; esto se hace evidente en el uso de tablas, articulación y simbolización de patrones, descripción y representación simbólica de patrones y cantidades de covarian.

Estas primeras ideas de pensamiento funcional, que son intuitivas en edades tempranas parecen perder su significado cuando se entra a la educación secundaria; pues los maestros tienden a incluir dentro de sus clases definiciones más conjuntistas, donde las funciones adquieren un carácter de concepto matemático abstracto, distante del origen de ser modelos que reflejan la variación concreta.

El estudio realizado por Tulio R. Amaya de Armas y Antonio Medina Rivilla llamado “Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal”¹² muestra que como se menciona en el párrafo anterior el manejo de las funciones parece perder su significado en la edad secundaria. Dichos autores desarrollan una investigación en 3 etapas: la primera consta de una revisión documental, la segunda del diseño de instrumentos y exploración, y la tercera del análisis e interpretación de resultados. Donde definen 6 situaciones problema para los estudiantes, pero solo se toman los que arrojaron resultados relacionados con el problema a investigar. Amaya y Medina encuentran “serias dificultades relacionadas con: el reconocimiento de los elementos de una función y cómo se relacionan éstos; el establecimiento de congruencias entre los elementos de dos o más registros; el tránsito al interior de un registro, y la complejidad intrínseca del propio concepto”¹³ hallazgos que nos llevan a re significar el proceso de enseñanza y la ideas intuitivas asociadas al concepto de función.

¹² AMAYA DE ARMAS, Tulio R.; MEDINA RIVILLA, Antonio. Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal. *Educación matemática*, 2013, vol. 25, no 2, p. 119-140.

¹³ Ibid., p 119

Dentro de su estudio trabajan un instrumento, donde ponen en juego los registros geométrico, aritmético, algebraico y del lenguaje materno, cada estudiante recibe un hoja de papel cuya área llaman A y se da la siguiente instrucción “La hoja de papel se corta por la mitad y una de las dos mitades se aparta, el pedazo que queda se corta también por la mitad, uno de los dos pedazos se aparta y así sucesivamente.¹⁴” La siguiente figura muestra dos secuencias con las áreas de los pedazos cortados y apartados hasta el cuarto corte que fue mostrada a los estudiantes.

Figura 2. Secuencias presentadas a los estudiantes.

Corte	1	2	3	4
Área del pedazo cortado	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{8}$	$\frac{A}{16}$
Área total de los pedazos apartados	$\frac{A}{2}$	$\frac{3A}{4}$	$\frac{7A}{8}$	$\frac{15A}{16}$

Este planteamiento:

“Pretendió el análisis de dificultades de los estudiantes con nociones como variable, dependencia, incógnita, ecuación, dominio, rango, secuencias, patrón de regularidad, modelación y concepción de infinito.

En cada ítem se trató de involucrar algún elemento de la función. El estudiante debía identificarlo y tratar de encontrarle una representación en otro o en el mismo registro. Se buscaba analizar las dificultades del estudiante en el abordaje que hacía de cada elemento al tratar de dar una respuesta. Por ejemplo, al darles el valor de la función en un corte determinado y pedirles que determinaran el corte en que se estaba, se involucró el concepto de incógnita y, en su proceso de solución, se esperaba que el estudiante pudiera identificar los elementos de la secuencia en la representación figural y lograra coordinarlos con elementos

¹⁴ Ibid., p. 128

congruentes en alguno de dos registros: haciendo una conversión al registro algebraico mediante el concepto de ecuación, o también por conversión al registro analítico aritmético resolviéndolo por tanteo.”¹⁵.

Los resultados obtenidos se categorizaron y sistematizaron resumiendo la información en la siguiente tabla.

Tabla 3. Resultados para la situación dada en una representación figural

Categorías de las respuestas	Núm. de estudiantes	%
Identificación de los elementos de una función	32	64
Relación entre los elementos de una función	24	48
Modelación de una situación funcional	18	36
Identificación y uso de un patrón de regularidad y crecimiento de una función	36	72
Utilizar el concepto de ecuación para encontrar una incógnita	4	8
Descripción de los procesos realizados tratando de dar respuesta a las preguntas o cuestiones planteadas	13	26

Fuente: AMAYA DE ARMAS, Tulio R.; MEDINA RIVILLA, Antonio. Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal. *Educación matemática*, 2013, vol. 25, no 2, p. 131

En esta investigación se concluye que los estudiantes tienen dificultades pronunciadas al hacer transformaciones con el registro figural a cualquiera de los otros registros. La relación de dificultades se encuentran en 3 aspectos: “1) el reconocimiento de los diferentes elementos de una función y cómo se relacionan éstos; 2) el establecimiento de congruencias entre los elementos del registro de partida y los del registro de llegada, y 3) la complejidad intrínseca del concepto en estudio (Hitt y Morasse, 2009)”¹⁶.

¹⁵ Ibid., p. 129

¹⁶ Ibid., p. 135

Las conclusiones enumeradas, nos llevan a interesarnos por implementar un estudio sobre el desarrollo del pensamiento funcional, el trabajo con conceptos y representación de funciones y el manejo o tratamiento que evidencian estudiantes de secundaria.

Vrancken, Engler, Giampieri y Müller consideran que la manera más asertiva de introducir el concepto de función no es el conjuntista, por el contrario la variación debe estar presente como parte fundamental. Para ello desarrollaron una investigación llamada “*Estudio de las funciones en situaciones variacionales. Resultados de la implementación de una secuencia de actividades*”, que se realiza con estudiantes de primer año de ingeniería agronómica de la Universidad Nacional del Litoral en Argentina, donde se favorece el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, los autores establecen una secuencia de actividades.

Con el propósito de llevar a los alumnos a identificar y comprender las funciones en situaciones de cambio, se prepararon actividades que comprenden los conceptos de variación, variable y función. El propósito de las mismas es que, al resolverlas puedan dar respuesta a tres preguntas: ¿qué cambia en la situación planteada?, ¿cómo cambia? y ¿cuánto cambia? Esto implica la identificación de las variables involucradas en las distintas situaciones y su relación entre ellas, la coordinación de los cambios de una variable con los cambios de la otra variable y la cuantificación de esos cambios.¹⁷

Dentro de las actividades se encuentran:

- Identificar qué es lo que cambia en una situación dada;
- Determinar con respecto a que cambia;
- Determinar cuáles son las variables que intervienen en una situación;
- Establecer la variable dependiente y la independiente;

¹⁷ VRANCKEN, Silvia, et al. Estudio de las funciones en situaciones variacionales. Resultados de la implementación de una secuencia de actividades. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 2014, vol. 15, no 1, p 5.

- Describir fenómenos o situaciones que se pudieran representar con una función;
- Describir con palabras un fenómeno de covariación;
- Completar una tabla o realizar una gráfica.¹⁸

A partir de las situaciones planteadas que permitían las distintas representaciones, se concluye que dada la asociación al concepto de función que se presenta en la escuela secundaria, se dificulta el tratamiento del concepto. De igual forma se encuentran argumentos variacionales, de tipo cualitativo y cuantitativo al acercarse al concepto de función.

Las aulas de clase basadas en la memorización y donde el registro principal es el algebraico, dan como resultado aprendizaje poco significativo, esto genera poca comprensión de objetos los matemáticos.

No obstante esta consideración, la enseñanza del cálculo en el bachillerato tiene poca relación con dominios de la ingeniería, con episodios de la vida cotidiana que precisan del estudio del cambio, e incluso con ejemplos de la física, química o biología, y se caracteriza más bien por estar regida por un discurso matemático escolar tradicionalista, donde predominan algoritmos del tipo algebraico y algunos aspectos formales de la matemática¹⁹

Esta es una perspectiva que no contribuye a la formación de estudiantes que conformen una comunidad matemática, por esto es necesario implementar en la clase de matemáticas tareas que permitan el desarrollo del pensamiento funcional dando un tratamiento más allá del algebraico a las funciones y diseñar actividades de enseñanza que incluyan diferentes registros de representación.

¹⁸ Ibid., p. 6.

¹⁹ CANTORAL, Op. Cit. p. 22.

De esta manera a partir de diseño de preguntas, situaciones y ejercicios que le permita a los estudiantes trabajar las diferentes formas de representación para valorar el efecto que producen en el desarrollo del pensamiento funcional.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

“Una investigación central que es prioritaria es encontrar las formas para ayudar a los estudiantes a construir las conexiones entre lo que ven, hacen y expresan, investigar como los significados matemáticos son estructurados por los instrumentos disponibles para expresar las relaciones bajo estudio y bosquejar que tanto estos procesos mediados apoyan (o no) la construcción de significados matemáticos”²⁰

Esta investigación se desarrolla en una institución educativa pública de Bucaramanga (Santander, Colombia). Dentro de los diferentes cursos de matemáticas en la escuela se ha encontrado la educación tradicional frente a los asuntos matemáticos, esto genera cierto grado de aversión por parte de los integrantes de esta comunidad hacia el aprendizaje de las matemáticas.

Los resultados en las pruebas nacionales muestran un amplio desinterés y poca respuesta hacia la construcción de contenidos matemáticos; por tanto se propone que trabajar el pensamiento funcional como concepto fundamental puede motivar el desarrollo de diferentes habilidades y conexiones entre diversas estructuras propias de las matemáticas.

Dar un nuevo aire orientado por la conformación de una Comunidad Matemática en el aula regular, con el fin de mejorar los resultados académicos y la producción intelectual de los estudiantes, podría generar avances en el desarrollo del pensamiento funcional, por medio de estrategias que “identifiquen al estudiante

²⁰ NOSS, Richard; HEALY, Lulu; HOYLES, Celia. The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational studies in mathematics*, 1997, vol. 33, no 2, p. 207

como un sujeto activo que necesita una comunidad para discutir sus ideas matemáticas y así comunicarlas de maneras eficiente”²¹

Desde la perspectiva de Santos Trigo, los resultados que se podrían obtener bajo esta implementación nos llevan a plantear la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué elementos del pensamiento funcional pueden desarrollar estudiantes que participan en una Comunidad Matemática?

Y para responder a esta pregunta se plantean los siguientes objetivos.

2.1 OBJETIVO GENERAL

Caracterizar el desarrollo de pensamiento funcional en estudiantes con edades comprendidas entre los 13 y 16 años a través de la conformación de una Comunidad Matemática en el aula donde los niños tengan la oportunidad de conjeturar, analizar, proponer, argumentar y demostrar sus ideas y las de sus compañeros.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conformar una Comunidad Matemática en el aula de clase regular.
- Motivar la participación de los estudiantes como miembros activos de la Comunidad Matemática.
- Trabajar actividades que permitan el desarrollo del pensamiento funcional, bajo los diferentes parámetros y formas de participación en el aula.

²¹ SANTOS, Op. Cit., p 95

- Reconocer los avances de los estudiantes participantes en la Comunidad Matemática.

3. MARCO CONCEPTUAL

Para realizar esta investigación es necesario presentar los antecedentes y elementos teóricos que se relacionan con el problema de investigación. Para esto se define el pensamiento algebraico, a partir de esto se definen las relaciones funcionales y finalmente los sistemas de representación.

3.1 PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Early Algebra. La enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar ha tomado un nuevo aire. Desde la década de los 90 se han desarrollado investigaciones que destacan que el álgebra no debe ser solo una cuestión de formalismos y algoritmos que se enseñan exclusivamente en secundaria. Actualmente se ha formulado la “importancia de integrar el pensamiento algebraico en las matemáticas escolares”²². Todas estas consideraciones llevan a la propuesta curricular *early algebra*, que en términos de Kaput se refiere a la “algebrización del currículo”²³ que busca el desarrollo del álgebra en los contenidos tradicionales de matemáticas en los niveles iniciales.

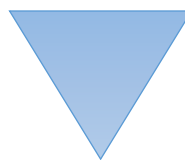
Carraher, Schliemman y Schwartz (2008) muestran la siguiente figura:

²² MOLINA, Marta. Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. 2009.

²³ KAPUT, James J. *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. US Department of Education, Office of Educational Research and Improvement, Educational Resources Information Center, 2000.

Figura 3. Componentes del early algebra

Notación algebraica
introducida gradualmente



Relación entrelazada entre
los contenidos matemáticos

Problemas contextualizados

Fuente: CARRAHER, David W.; SCHLIEMANN, Analucia D.; SCHWARTZ, J. Early algebra is not the same as algebra early. 2008.

En este sentido, es posible en grados elementales promover en los estudiantes formas básicas de pensamiento algebraico. Además de reconocer la relación que existe en el contexto con los contenidos matemáticos y la forma como el introducir las nociones algebraicas gradualmente puede llevar a los estudiantes a empezar a pensar en forma algebraica aún en ausencia de signos alfanuméricos del álgebra. Así mismo, Cai y Knuth²⁴ señalan que los estudiantes de los primeros grados son capaces de pensar algebraicamente al resolver problemas, y que el hecho de trabajar ideas algebraicas puede ayudarlos a desarrollar formas aritméticas y algebraicas de pensar.

3.2 EL PENSAMIENTO FUNCIONAL EN LAS PRIMERAS EDADES

El interés por estudiar a temprana edad el pensamiento funcional se puede ver desde dos perspectivas: las curricular y la investigadora. Doorman y Drijvers²⁵ expresan que el trabajo con variables, entender el comportamiento de las mismas, las fórmulas y las representaciones (tabular, simbólico, verbal, pictórico y manipulativo) de una función son fundamentales para este contenido matemático.

²⁴ CAI, Jinfa; KNUTH, Eric (ed.). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Springer Science & Business Media, 2011.

²⁵ DOORMAN, Michiel; DRIJVERS, Paul. Algebra in function. En *Secondary algebra education*. SensePublishers, 2011. p. 119-135.

La manipulación y entendimiento de las funciones puede convertirse en una herramienta muy útil en matemáticas y en otras disciplinas, y pueden servir como una técnica que conecta e incluso unifica contenidos en el currículo, Schwartz²⁶.

Hasta hace unos años el estudio de las funciones requería de pensamiento formal y abstracto razón por la cual solo estaba contemplado en los contenidos de grados superiores de secundaria dada su complejidad. En los últimos años diferentes investigadores²⁷ han manifestado que los niños pueden establecer relaciones funcionales antes de lo que se presuponía.

El pensamiento funcional promueve en los estudiantes la identificación de patrones y la generalización a través de las relaciones funcionales. “Para ello se basan en la consideración de la inducción como un medio potente para la adquisición de conocimiento, para realizar descubrimientos matemáticos y para poner a los alumnos en una situación semejante a la de un matemático en su quehacer científico”²⁸. Esto hace que fomente el razonamiento inductivo y, como consecuencia, facilite herramientas a los estudiantes para la adquisición de conocimiento matemático.

La figura 4 sintetiza los elementos teóricos que se utilizan y desarrollan en una investigación.²⁹

²⁶ SCHWARTZ, Judah; YERUSHALMY, Michal. Getting students to function in and with algebra. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, 1992, no 25, p. 261-289.

²⁷ BLANTON, Maria, et al. A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2015, vol. 46, no 5, p. 511-558.

²⁸ CASTRO, Encarnación; CAÑADAS, María C.; MOLINA, Marta. El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, 2010, vol. 54, p. 60.

²⁹ CAÑADAS, María C.; MOLINA, Marta. Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. 2016.

Figura 4. Mapa conceptual del pensamiento funcional

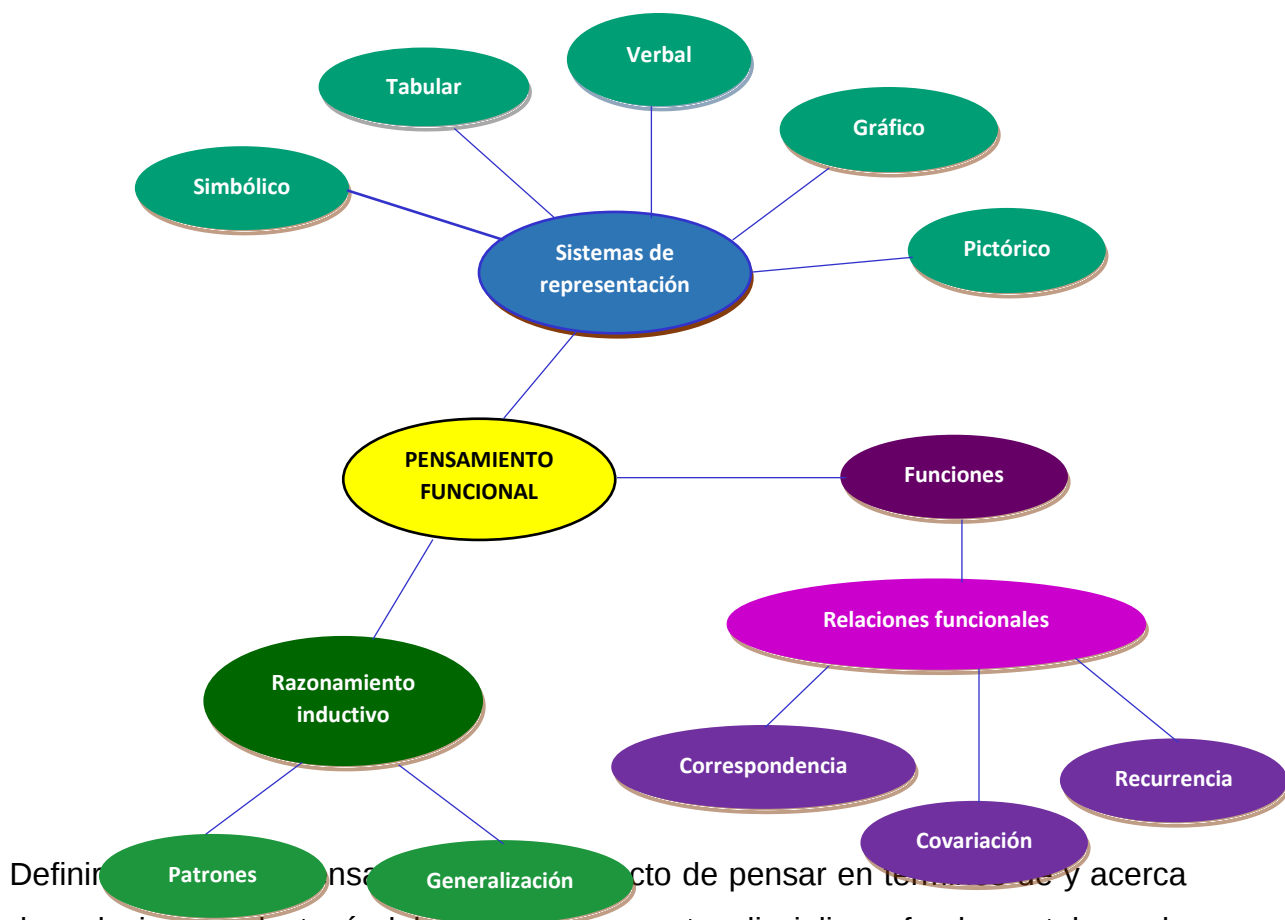


La función, entendida como una relación de dependencia entre cantidades covariantes, es el foco de contenido matemático en el que se centra “El pensamiento funcional, es decir, pensar en términos de y acerca de relaciones, es una meta disciplinar fundamental en la enseñanza de las matemáticas. Las relaciones pueden representarse mediante una diversidad de sistemas, incluyendo símbolos, gráficas, tablas y dibujos geométricos. Distintas representaciones pueden servir para propósitos diversos y tener propiedades diferentes.”³⁰ El mundo está lleno de relaciones y fenómenos que podrían ser descritos o modelados por medio de una función, en cualquiera de sus representaciones, pero entendidas como una explicación matemática de la realidad.

Para esta investigación emplearemos una modificación del mapa conceptual del pensamiento funcional (figura 4), de manera que demos lugar a las relaciones funcionales y los sistemas de representación que se analizarán en esta investigación.

³⁰ RICO, Luis. La competencia matemática en PISA. *pna*, 2007, vol. 1, no 2, p. 56

Figura 5. Ajuste mapa del pensamiento funcional



Definir el pensamiento funcional como un modo de pensar en términos de relaciones, destacándolo como una meta disciplinar fundamental en la enseñanza de las matemáticas. “El pensamiento funcional es una actividad cognitiva de las personas que se centra en la relación entre dos o más cantidades que varían”³¹.

La relación entre las cantidades que varían conjuntamente son contenidos que permiten desarrollar pensamiento algebraico, no se trata de introducir el concepto de función sino por el contrario de manipular este contenido de manera que se potencie para que le sea útil en el razonamiento general y el matemático en su nivel y en los sucesivos.

³¹ SMITH, Eric. Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. 2008. P 133-163

Llevar las situaciones expresadas de manera verbal o cotidiana al contexto matemático, es uno de los trabajos más importantes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, dominar el uso de las letras para expresar cantidades desconocidas o variables, es un propósito que secundaria se debe alcanzar.

El modelamiento algebraico de situaciones verbales no es un algoritmo o una receta que se pueda generalizar, pero se pueden sugerir algunos consejos para lograr exitosamente:

1. Determinar lo que se pide hallar en el enunciado e introducir una variable para representar la cantidad desconocida. Algunas palabras claves como, qué, cuántos, y encontrar, señalan la cantidad desconocida.
2. Buscar relaciones matemáticas entre las cantidades conocidas y desconocidas. Algunas palabras proporcionan claves lingüísticas de posibles igualdades y operaciones.
3. Escribir las relaciones mediante expresiones algebraicas.
4. Tratar de escribir alguna cantidad de dos maneras distintas, lo que producirá una ecuación.
5. Resolver la ecuación o inecuación usando las técnicas formales disponibles.
6. Traducir la solución matemática encontrada al lenguaje original del problema.
7. Evaluar la solución ¿Has encontrado lo que se pedía? ¿Tiene sentido la respuesta? Por ejemplo, si el problema era encontrar el área de un rectángulo, la respuesta -4 sería absurdo.³²

El uso de estas recomendaciones podría facilitar al estudiante llevar situaciones naturales del contexto al ámbito matemático.

³² GODINO, Juan D.; FONT, Vicenç. *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, 2003, p. 792.

3.3 SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

En esta sección se definirán los sistemas de representación a partir de ejemplos, para el contenido matemático objeto de este estudio las funciones, tendremos en cuenta las representación tabular, simbólica, verbal, grafica y pictórica.

Autores como (Brizuela, Carraher y Schliemann, 2000; Brizuela y Lara-Roth, 2002; Cañadas y Figueiras, 2011; Gómez, 2007; Rico, 2009), presentan diferentes definiciones de sistema de representación, pero estos concuerdan en que una representación sirve para expresar contenidos matemáticos y que cada representación muestra ciertas características para cada contenido.

Los estándares de la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) plantea que cuando los estudiantes acceden a las representaciones matemáticas y a las ideas que representan, toman posesión de un conjunto de instrumentos que amplían de forma significativa su capacidad para pensar matemáticamente. El término representación se refiere tanto al proceso como al resultado, esto permite considerar todos los significados de representación teniendo en cuenta lo que el niño expresa, su producto y también lo que tiene lugar internamente, en la mente de quien realiza la representación

“Hay muchas situaciones en las que dos variables están relacionadas. Esta relación es una función cuando para cada valor de la variable independiente le corresponde un solo valor de la variable dependiente. Esta relación se puede expresar en forma de enunciado, gráfica, tabla y fórmula.”³³, lograr estas diferentes representaciones es una tarea que se contempla en este trabajo y que se esperaba los estudiantes consiguieran a partir de su participación en una comunidad matemática. Para tal fin tomamos el ejemplo del libro “Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros” donde el autor muestra un ejemplo del

³³ Ibid., p. 801

tratamiento que se le deben dar a las funciones para lograr las diferentes representaciones.

Si un móvil se desplaza a velocidad constante, el espacio que recorre en un tiempo dado se calcula multiplicando la velocidad por el tiempo. Decimos que el espacio depende o es función del tiempo. Si indicamos con las variables e y t el espacio y el tiempo, respectivamente, de un móvil que se mueve a velocidad constante, por ejemplo de 5m/s ³⁴

3.3.1 Sistema de representación tabular Este sistema de representación tiene como característica principal el uso de tablas como registro de información y organización de datos, para el caso particular de las funciones de dos variables, ayudan a encontrar relaciones entre las variables involucradas, es decir los estudiantes establecen relaciones entre los valores en las columnas y las filas a medida que van construyendo la tabla.

Tabla 4. Sistema de representacion tabular

Tiempo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Espacio	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75

Fuente: GODINO, Juan D.; FONT, Vicenç. *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, 2003,p. 802

El trabajo cuando los datos están desordenados, dificulta identificar relaciones existentes entre variables, la creación de tablas permite la organización de los datos y el análisis por parte de los estudiantes al identificar características en los mismos.

Brizuela y Lara-Roth en el 2002 en su estudio Additive relations and function tables, muestran algunos formas como los estudiantes usan tablas en la

³⁴ Ibid., p. 802

resolución de tareas matemáticas, estos muestran que las tablas herramientas para ayudar a los niños en el reconocimiento de relaciones funcionales

3.3.2 Sistema de representación simbólico Este sistema de representación permite expresar de forma correspondiente a una cantidad variable haciendo uso de representaciones simbólicas y cantidades constantes presentes en contenidos matemáticos. En palabras de Rico “Representaciones de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas informáticos y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento”³⁵ para las funciones se expresan valores de carácter numérico y de símbolos algebraicos.

Al generar una expresión de tipo algebraico (representación simbólica) se entiende como un proceso de generalización.

Para el ejemplo que estamos trabajando propuesto por Godino la representación simbólica es la fórmula algebraica donde se relaciona el espacio y el tiempo.

“Con la fórmula, la relación de dependencia entre las variables espacio y tiempo se puede expresar mediante una fórmula algebraica, $e = 5t$ ”³⁶

El objetivo de esta representación es la introducción de letras, las cuales actúan como variables. Brizuela et al. (2014) En sus conclusiones resalta que los alumnos pueden adquirir un lenguaje de letras como variables y evidencian el pensamiento funcional en la introducción de éstas variables en las tareas propuestas a los alumnos.³⁷

³⁵ RICO, Luis. Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *pna*, 2009, vol. 4, no 1, p. 3

³⁶ GODINO, Op. Cit. p. 802

³⁷ FUENTES, Sandra. *Pensamiento funcional de alumnos de primero de educación primaria: un estudio exploratorio*. 2014. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. P. 21

3.3.3 Sistema de representación verbal Este sistema de representación refiere el uso de lenguaje natural de los estudiantes con el fin de exponer los resultados que van obteniendo, esto les permite establecer un orden y una estructura, para expresar los procesos propios de sus razonamientos.

Los estudiantes enuncian situaciones y la solución de las mismas, es decir podrían proponer una respuesta sin necesidad de un algoritmo matemático que la represente.

Para el ejercicio particular que estamos trabajando los estudiantes podrían enunciar respuestas para un valor específico de la siguiente manera –como la velocidad es constante 5 metros por segundo, y quiero saber cuánto espacio recorre el móvil en el 10 segundos, multiplico cinco por 10 que es el tiempo que me dan y encuentro que el espacio recorrido por el móvil es 50 metros. Aquí se expresa el proceso detalladamente por parte de los escolares sin necesidad registrar la operación matemática. La función que está inmersa en esta representación es $f(x)=5x$, siendo x el tiempo y $f(x)$ el espacio recorrido.

3.3.4 Sistema de representación pictórico Este sistema de representación es aquel en el que intervienen dibujos.

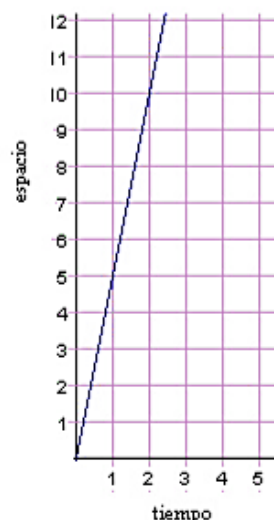
Los estudiantes hacen uso de dibujos para representar información que encuentra en una situación matemática, estos le proveen una forma de organización de lo que está pensando y de la solución del problema, los dibujos pueden estar acompañados de notas aclaratorias que le ayudan a resolver su tarea. Este tipo de representación es frecuente en estudiantes en las primeras edades.

3.3.5 Sistema de representación gráfico Este sistema de representación refiere al uso de graficas cartesianas para la explicación de situaciones de variación, en este caso la representación de funciones de da en la ubicación de las variables

dependiente e independiente, que permiten la identificación de relaciones funcionales.

Se puede expresar mediante una gráfica cartesiana.

Figura 6. Representación gráfica



Fuente: GODINO, Juan D.; FONT, Vicenç. *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, 2003 p.- 803

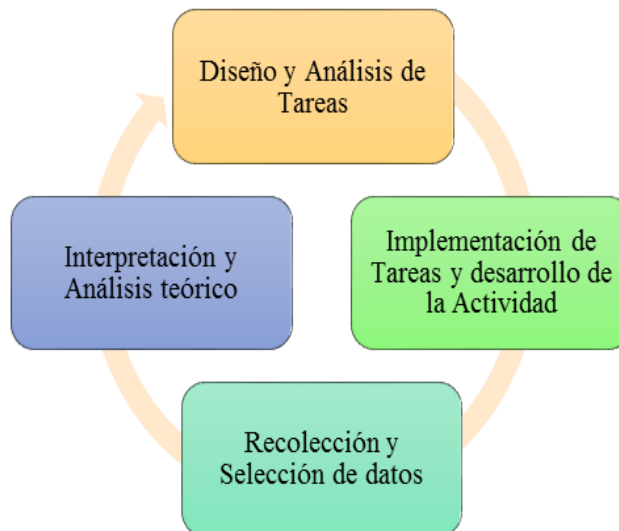
El uso de sistemas de representación es una forma de conocer como los estudiantes entienden y registran su información al enfrentarse a una tarea matemática, el uso de las mismas en el pensamiento funcional permiten reconocer las relaciones funcionales de recurrencia, correspondencia y covariación que expresan los estudiantes, razón por la que serán objeto de estudio en esta investigación.

4. DISEÑO METODOLÓGICO

El proceso metodológico adoptado para esta investigación se basa principalmente en la construcción de una Comunidad Matemática en el aula propuesta por Santos (2007). Esta metodología permite realizar un seguimiento a los estudiantes del grado 8 del Instituto Santo Ángel de Bucaramanga y profesores como miembros activos de una comunidad.

Por tanto es de interés en esta investigación entender el sujeto en el aula, estudiar el rol de los estudiantes y del profesor frente a una Tarea matemática, analizar los procesos de formular, emplear e interpretar las matemáticas como forma de modelar un problema en contexto. Por tanto la metodología está compuesta por cuatro etapas: diseño y análisis de Tareas; Implementación de las Tareas y desarrollo de la Actividad; Recolección y Selección de datos, e Interpretación y análisis teórico de los datos.

Figura 7. Estructura Metodológica de la Investigación



Como se muestra en la figura 5 la primera etapa se centra en el diseño y análisis de Tareas que es retroalimentada por la aplicación completa de las etapas del ciclo. La aplicación de este ciclo de investigación le permite al investigador presentar un conjunto de Tareas matemáticas validadas que potencian el desarrollo del pensamiento funcional como parte del pensamiento algebraico temprano.

A continuación se presenta una descripción de las principales características de cada una de las etapas del Ciclo; particularmente cómo se constituye la Etapa 2 a través de los elementos característicos de una Comunidad Matemática.

4.1 DISEÑO Y ANÁLISIS DE TAREAS

Esta etapa tiene en cuenta los objetivos del currículo, los resultados de las Pruebas Saber 9 aplicadas en los años 2015 y 2016, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), respecto al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Además de los resultados obtenidos de la aplicación de una prueba Diagnóstica que será analizada con detalle en el desarrollo de esta Etapa.

Desde la perspectiva teórica descrita en la Sección anterior se analizan los elementos del pensamiento funcional, las representaciones tabular, grafica, verbal y simbólica, la creación de representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas, la selección, aplicación y traducción de las representaciones matemáticas para resolver problemas.

Es importante aclarar que en esta investigación se hace una distinción entre la Tarea y la Actividad en términos de Radford³⁸ (2013). El diseño de las Tareas es potestad del profesor-investigador quien planifica y tiene una idea de lo que puede llegar a suceder en el aula. Pero es a través de la Actividad que dicha tarea promueve que los estudiantes pueden progresivamente tomar conciencia de los significados culturales que han sido históricamente constituidos.

4.2 IMPLEMENTACIÓN DE TAREAS Y DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

Con base en el diseño y el análisis a priori sustentado en la etapa anterior se da paso a la implementación de las Tareas en el aula. Dicha implementación así como el desarrollo de la Actividad están guiados en esta investigación por la construcción de una Comunidad matemática en el aula. Santos Trigo (2007) propone:

Entre las premisas fundamentales de la propuesta de aprender matemáticas dando énfasis en la resolución de problemas, está que el salón de clases ofrezca oportunidades a los estudiantes para reconstruir o desarrollar ideas matemáticas. En este contexto el papel de los problemas y las ideas que se discuten durante el proceso de resolución parte sustancial que ayuda a crear una comunidad matemática entre los estudiantes³⁹.

Bajo esta mirada, cada estudiante se concibe como un sujeto activo que necesita de una comunidad para discutir y comunicar de manera eficaz sus ideas matemáticas. Esto propicia el desarrollo de los procesos matemáticos fundamentales, que en esta investigación se sustentan en las directrices dadas por la OCDE (2012):

³⁸ RADFORD, Luis. Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza: hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. 2013.P. 41

³⁹ SANTOS, Op cit., p 94

1. Formulación matemática de situaciones.
2. Empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos.
3. Interpretación, aplicación y valoración de los resultados matemáticos.⁴⁰

El desarrollo de la Actividad dentro de la Comunidad Matemática transforma el rol del profesor y del estudiante frente a la construcción de conocimiento matemático. Cada estudiante encuentra en el salón de clase un ambiente que le permite pensar y razonar sobre las matemáticas involucradas en la solución de una tarea, razonar sobre ellas y comunicar sus ideas. “Esta interacción permite la formulación de ideas, el desarrollo de argumentos, la validez, verificación y en su medida la demostración que aquello que se propone como verdadero”⁴¹ (Santos-Trigo, 2007).

El desarrollo histórico y epistemológico de las matemáticas muestra que la comunicación y la interacción social son fundamentales para la construcción y consolidación de conocimiento matemático. Por tanto en esta Etapa de la investigación cada estudiante, así como el profesor, como miembros de su Comunidad deben desarrollar una ética comunitaria donde muestren que:

- a. Participan activamente en el espacio público de la Comunidad.
- b. Muestran un espíritu abierto a las discusiones y debates.
- c. Son solidarios con los otros miembros (compañeros y profesores).
- d. Trabajan por la construcción de una conciencia crítica generada a través del trabajo colectivo que genera la solución de una Tarea.

Estas características propuestas por Radford⁴² transforman la manera de concebir las matemáticas y las formar de conocer en el aula. Este ambiente establecido por

⁴⁰ MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA Y DEPORTE, Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012 matemáticas, lectura y ciencias, Instituto Nacional de Evaluación educativa, Madrid 2013, p. 30

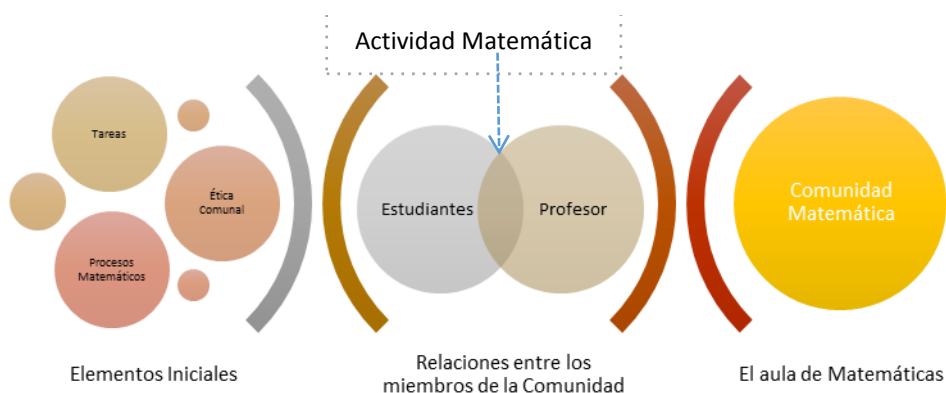
⁴¹ SANTOS, Op. Cit., p95

⁴² RADFORD, Op. Cit., p 41

la comunidad potencia el desarrollo de una forma independiente de pensar sobre las ideas y/o nociones matemáticas, generando procesos creativos y por tanto formas significativas para los sujetos de construir conocimiento matemático.

La figura 6 muestra los principales constructos que guían el diseño y desarrollo de esta Etapa de la investigación. Allí aparecen los elementos iniciales que son el insumo para a partir de las interacciones entre los miembros de la comunidad, generan un ambiente de aula que se caracteriza por los procesos que guían la construcción, desarrollo y consolidación de una Comunidad Matemática en el aula.

Figura 8. Implementación de Tareas y desarrollo de la Actividad: Construcción de una Comunidad Matemática



La Comunidad Matemática propicia el trabajo cooperativo que puede iniciar en parejas y motivar la conformación de equipos alrededor de los intereses comunes y las necesidades individuales. Claramente esta manera de concebir el aula y la interacción entre el profesor, el estudiante y el saber dinamiza el rol de los estudiantes y profesores.

Al finalizar el Ciclo de investigación propuesto, se podrá dar cuenta de la viabilidad de la conformación de la comunidad, además se podrán plantear características

específicas de sus miembros, así como los intereses que deben priorizarse en su conformación, consolidación y permanencia.

4.3 RECOLECCIÓN Y SELECCIÓN DE DATOS

Esta investigación es de tipo cualitativo por tanto busca dar cuenta del desarrollo del pensamiento funcional a través de la conformación de una comunidad matemática. Para una recolección amplia de la información que permita una selección de datos exitosa se toma como fuente:

- Análisis de la prueba diagnóstica.
- Videos y Audios de las sesiones de clase: con base en las transcripciones de los videos y de las observaciones del profesor-investigador, se construye el diario de campo que permite un análisis más profundo de la Actividad Matemática generada en el aula.
- Análisis de la prueba final. Una vez finalizada la tercera etapa de la investigación se diseña y aplica una prueba final. Esta busca evidenciar que aspectos
- Entrevista didáctica.

4.4 INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS TEÓRICO

En esta Etapa con base en los elementos teóricos que sustentan la investigación se sistematizan los principales resultados de la aplicación. Se realiza una triangulación de la información y se llega a un consenso entre los miembros del Colectivo de Investigación sobre el trabajo realizado por los estudiantes para a la luz de los elementos del marco conceptual determinar qué elementos del pensamiento funcional logran desarrollar estudiantes que participan de una comunidad matemática.

5. DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

La propuesta se desarrolla en 2 etapas: diagnóstico y sesiones de intervención, esta sección está dirigida al análisis a priori de la prueba aplicada como diagnóstico y las tareas planeadas para cada intervención.

Cada sesión será de 2 horas, en el aula de clase regular durante la clase de matemáticas del grupo participante de la investigación.

5.1 PRUEBA DIAGNÓSTICA

La prueba diagnóstica aplicada en el presente estudio se compone de 3 actividades direccionadas al reconocimiento de elementos del pensamiento funcional que manejan los estudiantes de grado octavo, las diferentes representaciones de funciones y el tratamiento de las mismas.

En el documento original se encuentran 4 Tareas, con ítems que le permiten al estudiante seguir un proceso lógico, iniciando de lo concreto a la generación de expresiones que implican variación. La aplicación se realizó a 90 estudiantes de grado octavo ubicados en tres grupos, 29, 30 y 31 estudiantes respectivamente. Se presenta de forma escrita con el siguiente encabezado.

Algunas instrucciones importantes:

Lea atentamente cada una de las situaciones que a continuación se plantean, escriba claramente los razonamientos que realice para resolver cada una de las

preguntas aquí solicitadas, entre más detallada esté la información, más útil será para este estudio.

La aplicación fue de forma presencial, individual y con algunas orientaciones docentes.

Análisis a priori

TAREA 1

1. Charles vio anuncios de dos compañías de teléfonos móviles, la compañía keep in touch ofrece servicios con una tarifa básica de 20 dólares al mes, más 10 centavos por cada minuto. La chit-chat no tiene tarifa mensual, pero cobra 45 centavos de dólar por cada minuto. Ambas compañías disponen de tecnología que les permite precisar el tiempo empleado; no redondean por arriba al minuto más próximo, como hacen muchos de sus competidores. Compárense las facturaciones de las dos compañías durante un mes.

- a. ¿Cuánto cobraría cada compañía por 25 minutos?
- b. ¿y por 100 minutos?

En esta primera actividad los estudiantes deben encontrar valores para cantidades específicas a partir de la relación que se enuncian inicialmente (costo, cantidad de minutos consumidos) Por ejemplo relacionando la información como aparece en la siguiente tabla.

Tabla 5.

Chit chat	Keep in touch
El valor para 25 minutos $25 \times 45 \text{ cent} = 1125 \text{ cent dólar}$	El valor para 25 minutos $(25 \times 10 \text{ cent}) + 20 \text{ Dol} = 250 \text{ cent} + 20$

Chit chat	Keep in touch
Convertimos los centavos a Dólares $1125/100 = 11,25$ dólares	Dol Convertimos los centavos a dólares $250/100 = 2,5$ dólares Entonces $2,5 \text{ Dol} + 20 \text{ Dol} = 22,5$ Dólares
El valor para 100 minutos $100 \times 45 \text{ cent} = 4500 \text{ cent dólar}$ Convertimos los centavos a Dólares $4500/100 = 45$ dólares	El valor para 100 minutos $(100 \times 10 \text{ cent}) + 20 \text{ Dol} = 1000 \text{ cent} + 20 \text{ Dol}$ Convertimos los centavos a dólares $1000/100 = 10$ dólares Entonces $10 \text{ Dol} + 20 \text{ Dol} = 30$ Dólares

Se espera que se den la identificación de patrones simples, a la luz de lo teóricos (Cañadas) patrones recursivos: implica encontrar el patrón de variación que se puede identificar en una secuencia de valores. La relación funcional descrita por Smith 2008 de correspondencia donde el foco está centrado en la relación entre variables, es decir el costo de 25 minutos y de 100 para los dos casos particulares de los numerales a y b, está relacionado con un valor correspondiente.

- c. Realice una tabla comparativa, donde relaciones los valores encontrados en la información del problema.

Para resolver este numeral el estudiante hará uso del sistema de representación tabular basado en el uso de tablas donde se relacionan valores. “En el caso de las funciones con dos variables, las tablas permiten organizar la información, relacionando los valores de las dos variables involucradas. Para que los alumnos establezcan relaciones entre los valores de las columnas o filas de las tablas que deben ir construyendo.”⁴³ En este ítem se busca la organización del valor a cancelar en la factura para cada una de las empresas según la cantidad de minutos, esto permitirá establecer relaciones funcionales; la escala correcta para

⁴³ FUENTES, Op. Cit., P. 22-23

La representación es la forma “como los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas”⁴⁴

Para poder expresar de forma general y dar el valor correspondiente a una cantidad de minutos consumidos se hace uso de representaciones simbólicas. “Representaciones de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas informáticos y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento”⁴⁵ para las funciones se expresan valores de carácter numérico y de símbolos algebraicos.

Al generar una expresión de tipo algebraico (representación simbólica) para calcular el valor de cualquier cantidad de minutos en cada una de las respectivas compañías se espera la interacción de valores de valores numéricos y variables.

Para este caso particular se da el nombre de x al símbolo algebraico pero este podría ser elegido con libertad por quien genere la representación simbólica.

d. Generando la expresión para keep in touch:

$$\text{Valor a cancelar por x minutos} = 0.1 X + 20$$

e. Generando la expresión para chit- chat

$$\text{Valor a cancelar por x minutos} = 0.45 X$$

f. ¿Qué compañía resulta más barata si usas el teléfono con poca frecuencia?

g. ¿y si lo usas frecuentemente?

⁴⁴ RICO, Op. Cit., p 3

⁴⁵ Ibíd. p. 8.

- h. Si no puedes gastar más de 50 dólares al mes, pero quieres hablar tantos minutos como sea posible, ¿Qué compañía deberás elegir?
- i. ¿hay un número de minutos cuyo costo sea igual en ambas compañías?

Se solicita a los estudiantes establecer el punto de equilibrio entre los costos de ambas compañías de teléfono, la conveniencia al momento de definir parámetros específicos para cada una de las compañías en cuanto al consumo y al valor final de pago por cantidad de consumo. La relación entre variables (correspondencia) permite la relación para valores similares, en efectos del caso de las dos compañías el valor correspondiente para la cantidad de minutos en cada una de ellas es diferente y la comparación numérica de valores se puede observar en las relaciones de Covariación establecidas en la representación tabular.

f. Teniendo en cuenta la representación tabular se debe llegar a la conclusión de que es más conveniente usar la compañía chit chat, por el valor con poca cantidad de minutos parte superior de la tabla, (correspondencia, recurrencia y covariación).

g. Teniendo en cuenta la representación tabular se debe llegar a la conclusión de que es más conveniente usar la compañía keep in touch, por el valor que se registra al aumentar la cantidad de minutos. (Correspondencia, recurrencia y covariación)

h. Se debe encontrar el valor particular que dé como resultado 50 dólares.

Tabla 6. Chit chat

Chit chat	Keep in touch
Valor a cancelar por x minutos= $0.45 X$ 50 Dólares= $0.45 X$ $X = 50/0.45 = 111.11$ minutos	Valor a cancelar por x minutos= $0.1 X + 20$ 50 Dólares = $0.1 X + 20$ $X = (50 - 20) / 0.1 = 300$ minutos
Luego teniendo en cuenta los cálculos es conveniente escoger keep in touch.	

i. Para encontrar el valor igual en ambas compañías para una cantidad de minutos, se debe igualar las expresiones algebraicas correspondientes a valor a cancelar por x minutos.

$$0,45X=0,1X+20 \text{ entonces } 0,45X-0,1X=20 \text{ luego } X=20/0,35 \quad X= 57.14.$$

Las compañías cobran un valor similar cuando se están entre los 57 y 58 minutos.

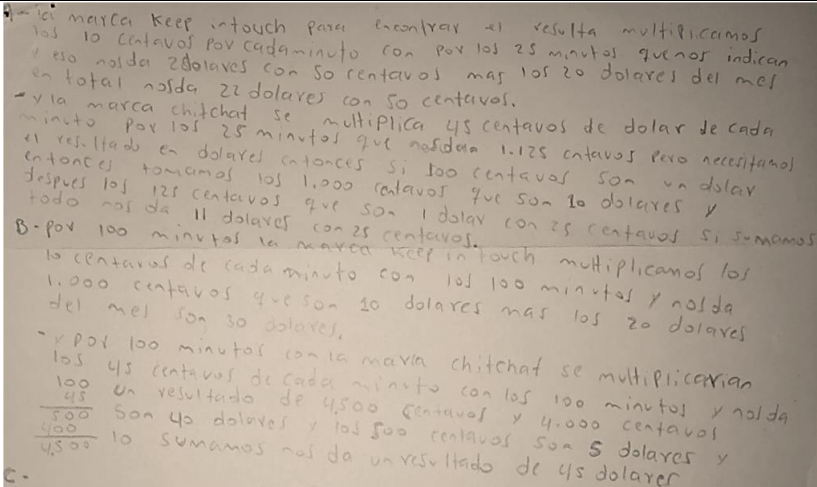
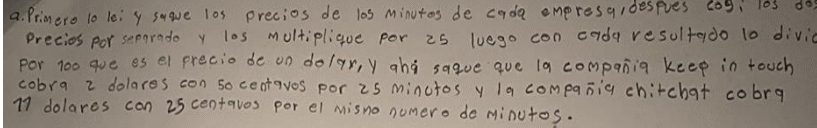
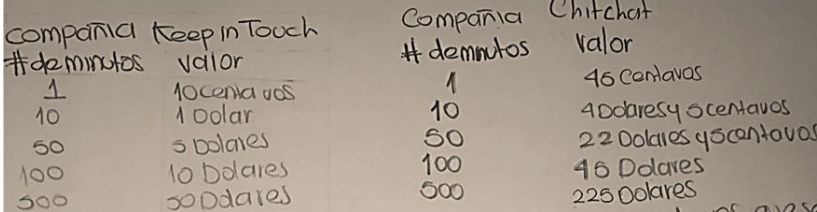
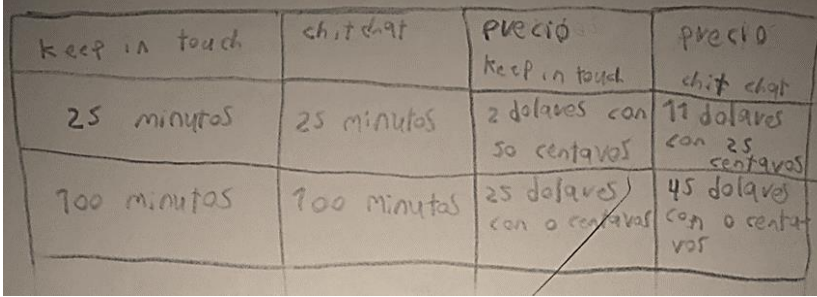
Los autores Confrey y Smith en 1991 recogen la noción matemática de relación funcional para presentar dos aproximaciones para la enseñanza de las funciones.

Se establecen tres tipos de relaciones funcionales, para este caso particular; correspondencia, en la que hace hincapié en la relación entre los pares correspondientes de la variable.

Análisis a posteriori

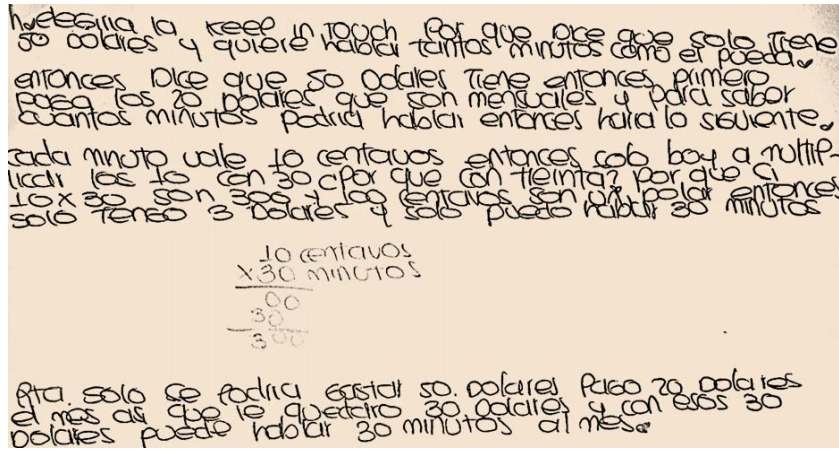
El desarrollo de esta tarea los estudiantes en el aula de trabajaron los ejercicios en la práctica tradicional. Se han seleccionado algunas respuestas dadas por los estudiantes de manera intencionada para evienciar los resultados de la prueba diagnóstica.

Tabla 7. Análisis a priori ítem 1 prueba diagnóstica.

Est	Evidencia	Análisis
JRP		El estudiante usa la representación verbal, describe las operaciones para generar la relación funcional de correspondencia para 25 y 100 centrandó en la relación entre variables en cada una de las dos compañías.
CAA		
JJS		El estudiante muestra la representación tabular organiza en filas columnas,
EAE		aunque no muestra la relación de recurrencia dado que no establece valores para notar la variación 4.5 en 4.5 y de 10 en 10 en sus respectivos casos. De igual forma solo establece

Est	Evidencia	Análisis
		como un sistema de representación pero no se evidencia la relación funcional.
CAA	d. Pues para calcularlo primero se necesitaría el número de minutos gastados o que se van a gastar, segundo, el número se multiplica por 70 que es lo que vale un minuto en el plan, después cuando ya se tiene el resultado y este se le suma 20 dólares que es lo que vale la tarifa mensual del plan, y después se divide por 100 que es lo que cuesta un dólar y ya habiendo echo eso ya se tiene el precio final e. Para calcularlo se tomaría el número de minutos a gastar, después ese número de minutos se multiplica por 45 que es lo que vale un minuto en esa compañía, con el resultado se divide por 100 que es el precio un dólar en centavos y así ya se obtendría el resultado total.	Los participantes generan una representación verbal que describe valores numéricos y variables cuando expresan “número de minutos” para calcular el valor de cualquier cantidad en cada una de las compañías, aunque no generan una fórmula como se menciona en el análisis a priori si muestran la relación entre los valores.
JJS	4. multiplicando el número de minutos por los 10 centavos que se aplican por cada minuto y luego se le suma el valor mensual de la tarifa 5. multiplicando el número de minutos por el valor de cada minuto que sería 45 centavos	
LBP	¶ la mas barata seria claritell porque no le cobran Tarifa mensual, solo estan cobrando 45 centavos por cada minuto que este. 6. si lo uso frecuentemente voy a ir a la compañía keep in touch por que solo me estan cobrando 40 por cada minuto, aunque toca pagar la tarifa mensual, pero me saldra mas economica.	Los estudiantes al realizar esta Tarea, concluyen que lo más

Est	Evidencia	Análisis
LPC	Por lo mas barata seria la de chitchat por que no hay una tarifa mensual y si solo llamadas seria mas barato asi que mi respuesta es que la compañía chitchat es la que usaria si usara el celular en poca frecuencia. Si usara la compañía keep in touch por que lo voy a usar frecuentemente para llamar y aunque paga 20 dolares al mes la escogeria por que los minutos son mas baratos.	conveniente es escoger la compañía Chit chat si se consumen pocos minutos, y la keep in touch si usan el teléfono frecuentemente. Esto sugiere la correspondencia para valores pequeños y grandes de ambas compañías y la covariación al tener en cuenta cómo varían las cantidades de pago según el consumo de minutos.
LBP	#. Pues yo escogeria la keep in touch por que cobran una tarifa de 20 dolares al mes, y cobran 30 dolares si solo fueran 50 dolares, y es mas economica por que solo estan cobrando 10 centavos por minuto y asi podre gastar lo que quiera.	Los estudiantes al realizar esta Tarea no hacen uso de una

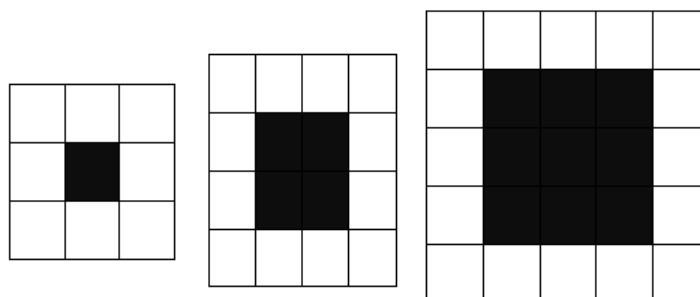
Est	Evidencia	Análisis
LPC	 Necesita la keep in touch por que dice que solo tiene 50 dolares y quiere hablar tantos minutos como el pueda. entonces dice que 50 dolares tiene entonces primero para las 20 dolares que son mensuales y para saber cuantos minutos podria hablar entonces haria lo siguiente. cada minuto vale 10 centavos entonces cob bay a multiplicar los 10 con 30 a por que con treinta? por que si 10×30 son 300 y los centavos son un dolar entonces solo tengo 3 dolares y solo puedo hablar 30 minutos. 10 centavos $\times 30$ minutos 300 Pta solo se podria estar 50 dolares Paga 20 dolares el mes asi que le quedaria 30 dolares y con esos 30 dolares puede hablar 30 minutos al mes.	expresión algebraica, realizan cálculos con el fin de encontrar cuántos minutos pueden pagar con 50 dólares. Para esto establecen una relación funcional de covariación y correspondencia 50 y 300 para el caso de keep in touch. establece un plan y calcula pero su respuesta no es 300
Para el último ítem de la Tarea ningún participante encontró el valor igual para ambas compañías según la cantidad de minutos consumidos, según Confrey y Smith en 1991 la relación funcional debe mostrar dos aproximaciones.		

Análisis a priori

TAREA 2

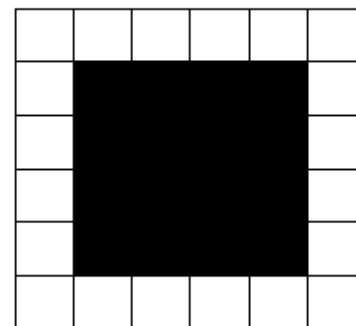
- Un conjunto de piscinas se va rodear con un borde de baldosas de cerámica. El borde tiene el ancho de una baldosa. La siguiente secuencia de figuras representa la primeras tres piscinas. Las baldosas sombreadas representan el área superficial del agua dentro de la piscina.

Figura 9. Secuencia de las tres primeras piscinas



- a. Siguiendo la secuencia dibuja la piscina que sigue.

Se espera que los estudiantes construyan la figura siguiente teniendo en cuenta las figuras presentadas en la secuencia. El uso de patrones recursivos implica encontrar el patrón de variación que se puede identificar en una secuencia, y la exploración de relaciones funcionales entre dos variables. En este caso el patrón corresponde con regularidad expresada



a través de cualquiera de las relaciones funcionales, si usa la relación recurrencia para generar la figura emplea el termino anterior para generar el siguiente, para la relación de correspondencia si ya establece que la figura 4 tiene en el centro (área superficial de la piscina) 16 cuadros y en el borde 20 baldosas blancas, establece la relación sin necesidad de la piscina anterior. Así mismo se espera la representación pictórica, como forma de expresar su respuesta.

- b. Si la cantidad de agua de la piscina cubre 64 baldosas, ¿Cuántas baldosas necesitarías para bordear esa piscina? Escribe cómo llegas a la respuesta.

Para encontrar el número necesario de baldosas para bordear una figura cuadrada cuya área es 64, es necesario que el estudiante relacione el problema con el

concepto de perímetro de un cuadrado; de la misma forma debe considerar que a tal expresión le debe aumentar en 4 unidades para que la relación funcional de correspondencia se dé. El uso de la correspondencia como relación entre variables y la elección del valor para 64.

Es decir $L=\sqrt{64}=8$ valor del lado de la piscina, el perímetro sería $P= 4L$, entonces el perímetro es 32, más 4 como corresponde al valor para bordear la piscina luego las baldosas que se necesitan son 36.

- c. Si tienes 28 baldosas para bordear una piscina, ¿Cuáles son las dimensiones de la piscina que es posible construir?

Para este ejercicio se requiere encontrar el número de baldosas para rellenar una figura cuadrada cuyo perímetro es 28 menos 4, condición que se establece con anterioridad al encontrar la relación de que la cantidad de baldosas del borde es igual al perímetro de la figura más 4, para calcular el valor del lado es cuestión de dividir el valor del perímetro en 4 entonces $24/4=6$ valor que empleará para establecer el valor correspondiente que sería 6×6 pues se piden las dimensiones de la piscina . Se espera el uso de la representación simbólica (algebraica) para generar la relación funcional de correspondencia.

- d. Encuentra un método para hallar la cantidad de baldosas del borde de cualquier piscina.
- e. Escribe cómo le explicarías a tu mejor amigo o amiga cómo calcular el área de cualquier piscina de la secuencia.

En esta actividad se solicita a los estudiantes la representación algebraica que genera la cantidad de baldosas para bordear cualquier piscina y el área superficial de la misma.

Algunos alumnos pueden resolver este problema elaborando una tabla con distintos valores del largo y del ancho de las piscinas y los números correspondientes de baldosas en los bordes. A partir de esta tabla podrían llegar a estructurar una generalización y expresarla mediante una expresión alfanumérica..

La fórmula para el número de baldosas es $N = 2(L+A)+4$. Hice una tabla con columnas para L (largo), A ancho y N (número de baldosas) y dibuje algunas figuras con diferentes dimensiones. Después conté las baldosas en cada una de ellas, y anote los números en la tabla. A continuación busque un patrón. ¡Fue fácil! Duplicando la suma del largo y el ancho y añadiendo 4, siempre se obtenía el número de baldosas necesario.

Otros alumnos podrían razonar geométricamente (o visualmente) sobre la situación, en vez de hacerlo numéricamente. He aquí 3 posibles respuestas:

Dibujé varias figuras y descubrí que necesitaba $L+2$ baldosas para el borde de arriba y otras tantas para el de abajo.

Además, necesitaba A baldosas para el lado izquierdo y A baldosas para el derecho. Por tanto, el número total de baldosas era $N=2(L+2)+2A$.

Lo dibuje mentalmente. Primero colocaba un baldosa en cada una de las esquinas de la piscina, por tanto, necesitaba L baldosas para la parte de arriba y L para la parte de abajo y A para cada uno de los laterales, en total, $4 + 2L + 2A$.

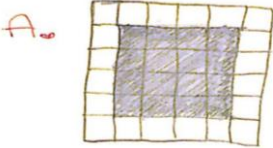
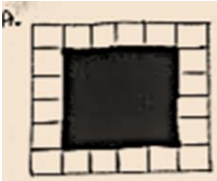
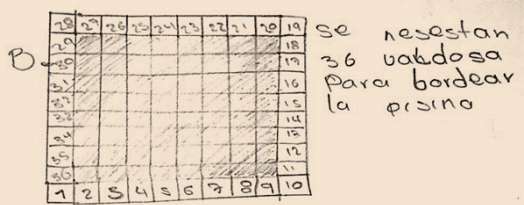
Puedo hallar el número de baldosas que se necesita calculando el área del rectángulo completo (piscina más borde) y luego restar el área de la piscina. El área de la piscina junto con la del borde es $(L+2)(A+2)$ y la de la piscina sola es LA. Por tanto, el número de baldosas necesario es $(L+2)(A+2)+LA$.

Estas tres respuestas difieren en las formas de considerar las características geométricas (visuales). En las primeras dos soluciones, el borde de baldosas se considera con relación al

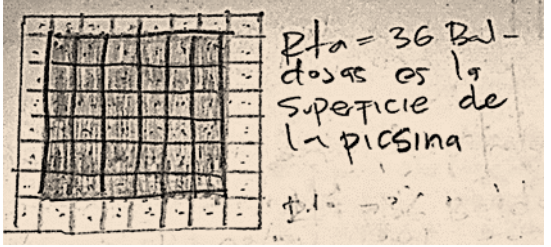
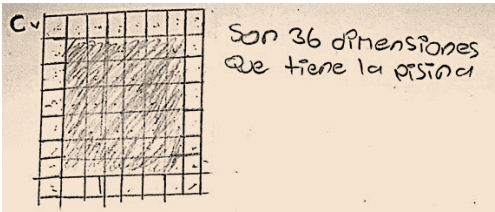
perímetro del rectángulo grande formado por las baldosas y la piscina pero con descomposiciones distintas de dicho perímetro. La tercera respuesta considera el área del rectángulo grande y la del pequeño, y deduce el número de baldosas lo que es correcto ya que las baldosas son unidades cuadradas.⁴⁶

Análisis a posteriori

Tabla 8. Análisis a priori ítem 2 prueba diagnóstica.

Est.	Evidencia	Análisis
BAP		Los estudiantes hacen uso de patrones recursivos que implican un patrón de variación que se identifica en una secuencia, establece la recurrencia partiendo de la figura anterior para generar la siguiente, de igual forma hacen uso de la representación pictórica para mostrar la figura
LDL		
LDL		Los participantes que desarrollaron esta Tarea emplearon crear primero una piscina cuadrada de área 64 y después bordearon la piscina y contaron la cantidad de baldosas que se necesitaban no hicieron uso de la representación algebraica para calcular el valor del lado de la piscina, aun así emplearon una representación pictórica, para encontrar la relación del área y hacer el cálculo que se solicitaba que es 36
BAP		

⁴⁶ THALES, S. A. E. M. Principios y Estándares para la Educación Matemáticas. Sevilla, SAEM Thales, 2003, p. 287

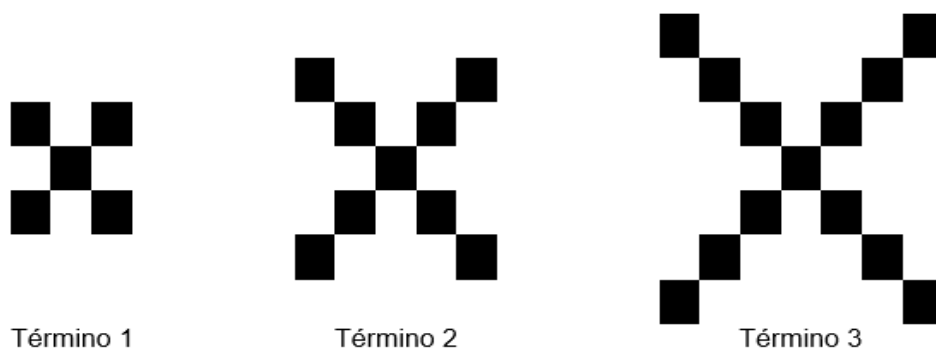
Est.	Evidencia	Análisis
AFT		La Tarea propone encontrar el número necesario de baldosas para rellenar una piscina cuyo borde es 28 baldosas, los estudiantes plantean un método de dibujar el borde y después realizar el conteo de las baldosas que corresponden a la superficie de la piscina, encontrando así que la correspondencia para 28 es 36, aunque no hacen uso de una representación simbólica ni del concepto de área, si establecen la relación funcional de correspondencia 28 con 36, usando una representación pictórica.
WR		
Los incisos d. y e. de la Tarea no fueron resueltos por ninguno de los participantes, la representación simbólica (algebraica) no hace parte de los recursos que los estudiantes usan para resolver este tipo de Tareas y el establecer las relaciones funcionales inmersas en la solución de este ejercicio		

Análisis a priori

TAREA 3

3. Cuadrados cruzados: Un cuadrado tiene cuatro esquinas o vértices. A continuación se presentan tres términos de una secuencia de figuras formadas por cuadrados.

Figura 10. Patron



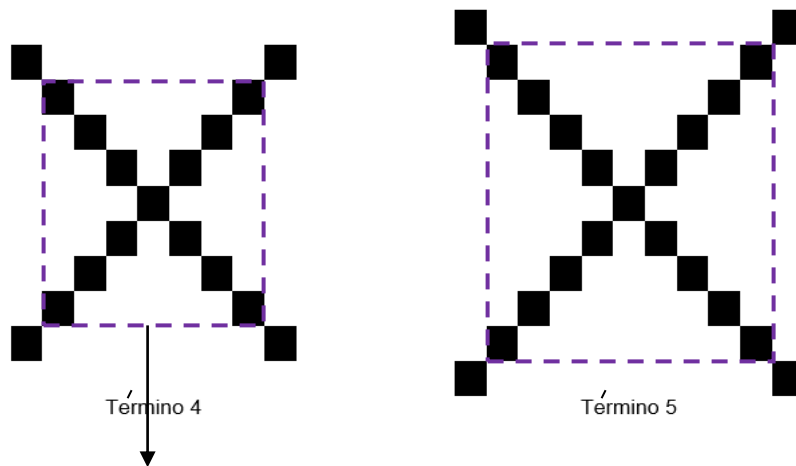
- a. Dibuja las figuras que aparecen en los términos 4 y 5 de la secuencia. Explique cómo encuentra dichas figuras.

“El trabajo con patrones no solo se puede llevar a cabo a través de actividades relacionadas con la extensión de estos. Los autores señalan que el trabajo con patrones permite, por una parte, establecer una generalización entre los elementos presentes en una secuencia, así como también permiten representar una función”⁴⁷, el término 3 puede usarse generar el término siguiente a partir de la expresión anterior estableciendo la relación funcional de recurrencia para la variable dependiente, el aumento de 4 cuadros para cada término a partir del anterior, aumento de 4 en 4 para la variable dependiente.

Se espera que los estudiantes construyan los términos 4 y 5 teniendo en cuenta la relación funcional de recurrencia al emplear las figuras planteadas en las construcciones iniciales, haciendo uso de la representación pictórica.

⁴⁷ PINTO, Eder. *Relaciones funcionales, sistemas de representación y generalización en estudiantes de tercero de primaria*. 2016. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, p 21

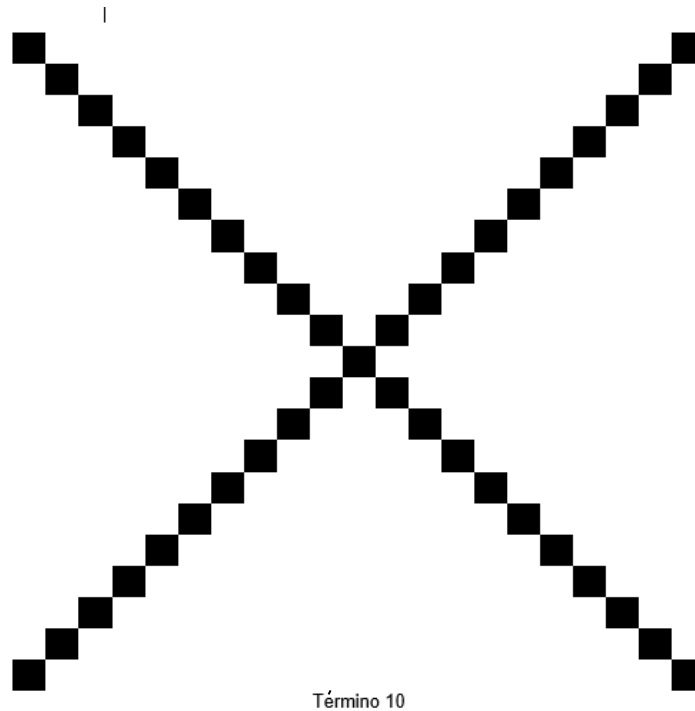
Figura 11. Solución 4 y 5



El uso de la relación de recurrencia al tomar el término anterior y sumar de 4 a la variable dependiente, permite encontrar y establecer la recurrencia basado en la figura anterior, del mismo modo, la relación funcional covariación es en los términos de 1 en 1 (variable independiente) y de 4 en 4 para la variable dependiente.

- b. Si extendemos el patrón basado en las figuras anteriores de la secuencia, ¿Qué figura aparece en el término 10? Dibújala y explica cómo la encontraste.

Figura 12. Solucion 10



El uso de los términos anteriores, darán lugar a encontrar los términos posteriores partiendo de ellos, al revisar la relación de recurrencia, el cambio de un término a otro es de 4 cuadrados, esto podría llevar al estudiante a encontrar el valor del término 10 sin necesidad de dibujar las figuras anteriores, aunque algunos necesiten pintar todas las figuras antes de la figura deseada, para esto se espera el uso de la representación pictórica, pues se solicita el dibujo de la figura 10 y no la cantidad de cuadros que pertenecen a ella. Se trata de encontrar ciertas características comunes en los términos de la secuencia (donde se pueden develar alguna de las relaciones) que permiten a los estudiantes la construcción de un patrón. Que pueden “generalizar”

- c. ¿Cuántos cuadrados tiene el término 5, 6 y 7? ¿Cuántos cuadrados tiene el término 25? Y ¿cuántos cuadrados tiene el término 100? Explica ampliamente cómo encuentras las respuestas.

El uso de patrones recursivos que implican encontrar el patrón de variación que se puede identificar en una secuencia, permite la exploración de funcionales entre dos variables, establecer la relación de covariación al reconocer que una figura y otra cambian dependiendo el lugar que ocupan y la relación de recurrencia al identificar las diferencias entre un término y otro, “El reconocimiento de patrones es por tanto, esencial en el desarrollo de habilidades para generalizar”⁴⁸ El concepto de patrón adquiere un rol importante en el proceso de razonamiento inductivo, donde su presencia puede ayudar a potenciar el desarrollo de habilidades de generalización, por tanto establecer valores no cercanos y para este caso particular grandes (100) lleva al estudiante al buscar una forma de expresar la cantidad de cuadrados sin necesidad de dibujar todos los términos y de emplear la recursividad pues debería hacer el cálculo de 1 hasta 100. Para esto se emplea la correspondencia para cada valor e incluso la representación algebraica de la función podría generarse a partir de esa generalización

Tabla 9. Representación tabular

Término	Número de cuadros
5	21
6	25
7	29
25	101
100	401

⁴⁸ CAÑADAS, María C. Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas. 2007.p 75

- d. Escribe cómo le explicarías a la profesora Ana María cómo puede encontrar el número de cuadrados de cualquier término de la secuencia.

Para la solución de este ítem se espera que el estudiante pueda generar una representación simbólica donde involucre valores numéricos y variables. De igual forma que pueda describir el proceso que desarrollo para encontrar los valores solicitados.

Para este caso particular se da el nombre de t al símbolo algebraico pero este podría ser elegido con libertad por quien genere la representación simbólica.

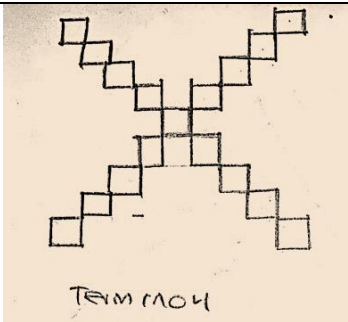
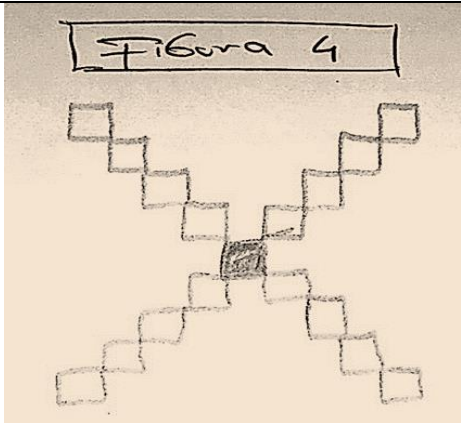
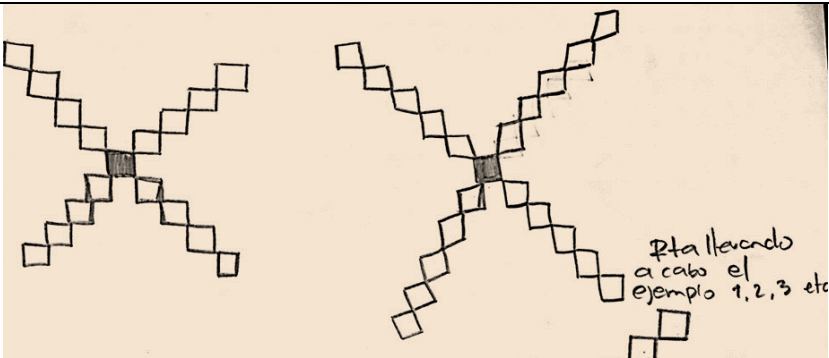
Se espera que los estudiantes puedan generar ya sea la expresión verbal que permita encontrar el número de cuadrados que corresponde a cada figura sin necesidad de dibujarla; o la representación algebraica para cualquier término de la secuencia. Por ejemplo si C es el número de cuadros y t el término al que corresponde cada uno, entonces:

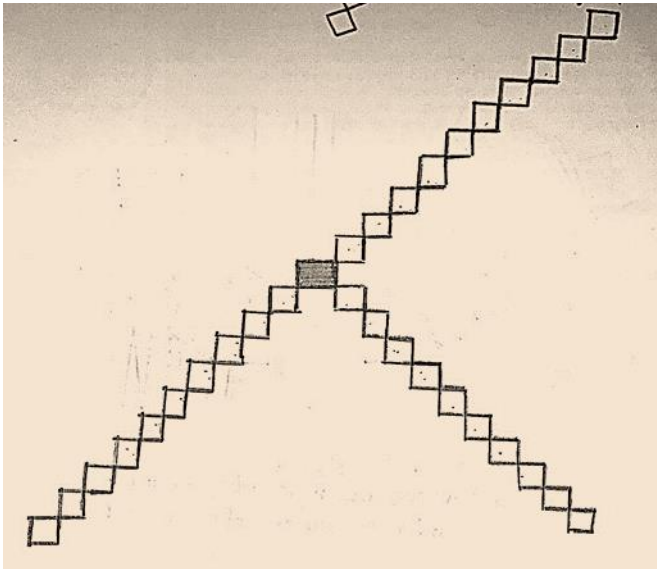
$$C = 4t + 1$$

Esta expresión corresponde a la solución ya que, el 1 es el cuadro que está en el centro a partir de ahí se agregan en cada uno de las puntas del cuadro una fila con el número de cuadrados igual al término que estamos buscando. Como se tienen 4 puntas el valor el 4 veces el término buscado, entonces por eso se multiplica 4 por el número de elemento que estamos buscando y se le suma uno.

Análisis a posteriori

Tabla 10. Análisis a priori ítem 3 prueba diagnóstica

Est	Evidencia	Análisis
MFB		En esta Tarea el estudiante establece la relación funcional de recurrencia para la variable dependiente, al aumentar la figura en 4 cuadros a partir del anterior y para la variable independiente de uno en uno. Los participantes hacen una representación pictórica como se espera.
JSS		
AFT		

Est	Evidencia	Análisis
AFT		El estudiante realiza la representación pictórica. Aunque está incompleta, se logra visualizar que la construcción cumple los 10 cuadros en cada una de las puntas del cuadro de la mitad, no se encuentra explicación por parte del participante de cómo se solicitaba en la Tarea.
No se encuentran evidencias de los ítems c. y d. de la Tarea donde se esperan la representaciones verbales y simbólicas por parte de los participantes, de igual forma las relaciones funcionales de recurrencia para cada una de las variables y de covariación, asociadas a la correspondencia para los casos de la variable independiente 5, 6, 7,25 y 100, así mismo la generalización cuando se solicita el número de cuadrados para cualquier término de la secuencia.		

Después de la aplicación de la prueba diagnóstica, se evidencia que los estudiantes hacen uso de algunos sistemas de representación como herramienta para explicar relaciones funcionales, las más usadas por los participantes son la representación pictórica y verbal, pues explican sus procedimientos de manera escrita y en ocasiones detallada donde involucran operaciones y procesos matemáticos para dar lugar a sus soluciones, establecen la relación funcional de correspondencia para variables, en su mayoría para valores pequeños o cercanos,

ya sea en el uso de patrones representando el término siguiente por medio de una representación pictórica e incluso describiendo las características de la misma.

La representación tabular que registran algunos estudiantes, muestra relaciones de correspondencia hasta determinado valor y la relación de recurrencia para las variables; aun cuando enuncian un valor repetitivamente las filas de la tabla, es decir no escriben el resultado, sino que registran la operación de suma que se le hace al término anterior.

El trabajo con las tres relaciones funcionales en las Tareas programadas muestra que los estudiantes no reconocen la representación simbólica o algebraica, es decir no emerge este tipo de representación y no se evidencia un proceso de generalización al entender las relaciones funcionales de recurrencia y correspondencia que evidencian los estudiantes. La representación gráfica no es familiar para los estudiantes, no la consideran de su manejo cotidiano, incluso no muestran ningún tipo de evidencia de las relaciones funcionales al solicitar este tipo de representación.

A continuación se muestran las Tareas matemáticas propuestas para las sesiones de intervención, que están encaminadas a lograr que los estudiantes puedan reconocer las relaciones funcionales de correspondencia, covariación y recurrencia, haciendo uso de los diferentes sistemas de representación tabular, gráfico, verbal, pictórico y simbólico o algebraico que son de interés para este estudio, cada Tarea con su descripción de aplicación y análisis a priori de la misma.

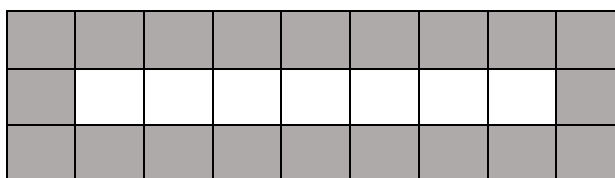
5.2 SESIONES DE INTERVENCIÓN

Cada intervención está programada con una duración de 110 minutos, destinados de la siguiente manera: trabajo individual 45 minutos, este momento permitirá a los participantes conjeturar y proponer sus posibles razonamientos en torno a la solución, trabajo en colectivos de 4 personas donde los estudiantes interactúan y socializan sus respuestas para llegar a consensos que lleven al trabajo en grupo 30 minutos, y trabajo grupal 35 minutos que es el tiempo destinado para argumentar y proponer posibles soluciones y llegar a convalidar la o las que se aceptaran como válidas.

5.2.1 Tarea 1 El cuestionario empleado está conformado por una situación problema que responde a la función $f(x) = 2x+6$, tal como se presenta en la figura 1. Además, dejamos materiales manipulativos que representan los diferentes tipos de baldosas (cuadrados blancos y grises), por si querían utilizarlos durante el proceso de solución.

Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen.

Figura 13. Problemas de las baldosas



El colegio contrata a una empresa para que reforme los pasillos de las tres plantas del colegio. Te pedimos que ayudes a los albañiles a contestar algunas preguntas que necesitan responder para hacer este trabajo

A continuación de la presentación, planteamos las siguientes cuestiones, donde se solicitan las respuestas y la justificación de las mismas.

1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?
2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?
3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?
4. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?
5. Ahora hazlo de una forma diferente y explícalo aquí.
6. Los albañiles de una empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas?
7. En uno de los pasillos, por error los albañiles han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 20 baldosas grises, ¿cuántas baldosas blancas necesitan?
8. En otro pasillo los albañiles también han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 56 baldosas grises, ¿cuántas baldosas blancas necesitan?

Análisis A priori

Analizamos las respuestas escritas de los estudiantes en los cuestionarios. Para el análisis de la información, consideraremos dos focos, que responden a los objetivos presentados: (a) relaciones funcionales y (b) sistemas de representación. Para la determinación de aquellos estudiantes en los que es posible identificar evidencias de pensamiento funcional en sus respuestas, nos centraremos en la totalidad de respuestas entregadas por dicho estudiante, analizándolas de forma conjunta (Cañadas, en prensa). De este modo, consideraremos que un estudiante pone de manifiesto pensamiento funcional cuando en dos o más respuestas se identifican una relación funcional. Para abordar el objetivo relativo a las relaciones funcionales, consideraremos las categorías que se corresponden con las relaciones funcionales descritas en el marco teórico: (a) recurrencia, (b) correspondencia y (c) covariación. Análogamente, sobre los sistemas de representación, consideraremos los mencionados en el marco teórico, tomando las características específicas de la tarea: (a) verbal, (b) simbolismo numérico, (c) simbolismo algebraico, (d) pictórico y (e) manipulativo. Los sistemas de representación no son mutuamente excluyentes por lo que, para el análisis consideraremos la posibilidad de que aparecieran representaciones múltiples y/o sintéticas.⁴⁹

5.2.2 Tarea 2

Área -perímetro de un rectángulo.

Existen infinitos rectángulos de área 60 cm^2 y diferente perímetro cada uno. Completa la siguiente tabla:

⁴⁹ PINTO, Eder, et al. Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. 2016. P. 420-421

Tabla 11. Ejercicio del rectángulo

Base	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30
Altura										

1. Construye la gráfica de la función anterior utilizando el eje de abscisas para representar la base de los rectángulos y el eje de ordenadas para las alturas.
2. Escribe la expresión algebraica de las alturas en función de las bases.

Esta actividad involucra los conceptos de área y perímetro de un rectángulo. La comprensión de ambos conceptos tiene dificultades para los alumnos que los confunden o son incapaces de comprender las relaciones que hay entre ellos. En la actividad, manteniendo fija el área de un rectángulo se trata de que los alumnos calculen la altura de dicho rectángulo a partir de una base dada, y de esta manera aprecien cómo varía el perímetro de dicho rectángulo. Para apreciar esta relación los datos se recogen en forma de tabla. A continuación se trata de que los alumnos traduzcan esa tabla a una gráfica cartesiana. Es el momento en el que el profesor puede hacer hincapié sobre la forma que tiene dicha gráfica y sobre el paso de una representación discreta a una continua. Finalmente, se pide a los alumnos la traducción a la expresión algebraica de la altura en función de la base. Se trata aquí de un proceso de generalización de los datos incluidos en la tabla.⁵⁰

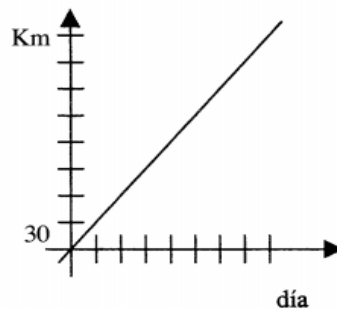
⁵⁰ SIERRA VÁZQUEZ, Modesto; GONZÁLEZ ASTUDILLO, María Teresa; LÓPEZ ESTEBAN, Carmen. Funciones: traducción entre representaciones. 1998. P. 98

5.2.3 Tarea 3

El peregrino.

Un peregrino quiere cubrir la distancia de Astorga a Santiago de 240 km. La siguiente gráfica ilustra la progresión después de t días:

Figura 14. Ejercicio del peregrino



1. Describe la situación con tus propias palabras.
2. ¿Qué distancia ha recorrido durante el primer día y cuánto le falta para llegar a Santiago?
3. ¿Qué distancia ha recorrido durante el segundo día y cuánto le falta para llegar a Santiago?
4. Construye una tabla que represente la distancia recorrida cada día.
5. ¿Cuánto habrá recorrido después de t días? ¿Cuánto le queda para llegar a su destino?
6. Haz un gráfico de la distancia que le queda por recorrer en función de los días.

En esta actividad se parte de una gráfica que representa el espacio recorrido por un peregrino en función del tiempo, se trata de un movimiento uniforme.

Se plantea al alumno que describa verbalmente la situación planteada; esta descripción verbal le debe servir para entender la relación entre el espacio y el tiempo.

A partir de la descripción verbal y fijándose en la gráfica, el alumno debe analizar lo que ocurre en momentos puntuales relativos al desplazamiento del peregrino. Estos momentos deben relacionarse no sólo con el inicio del recorrido sino también con el final para construir las tablas correspondientes y posteriormente la gráfica del camino que queda por recorrer. En esta última tarea, se pone de manifiesto cómo la traducción gráfica-gráfica puede ayudar a enriquecer el conocimiento de un determinado fenómeno.⁵¹

5.2.4 Tarea 4 En febrero del 2000 el costo de enviar una carta por correo era 33 pesos por el primer gramo, y 22 pesos adicionales por cada gramo o fracción de esta hasta 13 gramos.

- a) ¿Cuál es el valor de envío de una carta si se sabe esta pesa 5 gramos?
- b) ¿Cuál es el valor de envío de una carta si se sabe esta pesa 7.2 gramos?
- c) Elabora una tabla de valores para representar la situación
- d) Si C es el costo en pesos de enviar una carta y P su peso en gramos, puedes encontrar una expresión que relacione estos dos valores.
- e) Realiza una gráfica donde se relacione la información de esta situación⁵²

5.2.5 Tarea 5 La banda del instituto Santo Ángel está organizando un concierto. La clase de octavo se encarga de los refrescos. Uno de los que va a servir es jugo

⁵¹ Ibíd. P 99.

⁵² THALES, Op cit. p 302

de frutas. Un experto proporciono a los estudiantes 2 recetas que llevan soda y jugo de uva.⁵³

Receta A
3 copas de jugo de uvas
5 copas de soda.

Receta B
1 copas de jugo de uvas
4 copas de soda.

- a) Si se necesitan 10 copas de refresco ¿Cuántas copas de jugo de uvas se necesitan para cada receta?
- b) Si se necesitan 10 copas de refresco ¿Cuántas copas de soda se necesitan para cada receta?
- c) Si se necesitan 120 copas de refresco ¿Cuántas copas de jugo de uvas se necesitan para cada receta?
- d) Si se necesitan 120 copas de refresco ¿Cuántas copas de soda se necesitan para cada receta?
- e) Organiza la información de esta situación en una tabla de valores
- f) Puedes encontrar una expresión que me permita encontrar la cantidad de copas jugo de uvas para cualquier cantidad de refresco.
- g) Puedes encontrar una expresión que me permita encontrar la cantidad de copas de soda para cualquier cantidad de refresco.
- h) Realiza una gráfica donde se relacione la información de esta situación

5.3 ANÁLISIS DE LAS SESIONES DE INTERVENCIÓN.

Este análisis de las sesiones comprende el trabajo con las Tareas desarrolladas durante cada intervención, donde se evidencian las relaciones funcionales correspondencia, covariación y recurrencia planteadas por Smith 2008, el pensamiento funcional involucra a las funciones que como contenido matemático asocia los diferentes sistemas de representación de las mismas (tabular,

⁵³ Ibid p. 278-279

simbólico, pictórico, verbal y gráfico) cada uno de esos pone de manifiesto unos u otros significados de este contenido evidenciados por los estudiantes al desarrollar las actividades propuestas, para esto se hace uso de las hojas de proceso de los participantes, principal insumo de los registros de actividades planteadas, los videos de las sesiones donde se tendrá en cuenta imágenes que muestren los diferentes procesos y formas como los adolescentes encontraron sus soluciones y por último los diarios de campo tomados por el profesor investigador.

Las imágenes seleccionadas, muestran los instantes donde desarrollan sus análisis y procedimientos para encontrar las soluciones en el caso de los videos y las imágenes escaneadas son evidencias del ejercicio escrito de los participantes y sus registros de trabajo.

El tipo de codificación de registro empleado para el desarrollo de este análisis es por ejemplo CAA que corresponde a las iniciales de los participantes para cada uno de los casos, para manejar la confidencialidad en la identidad de los mismos; en los casos donde el registro corresponde al trabajo colectivo (3 o 4 personas) se empleara el código G (CAA, LPC, AFT, JSS) para identificar los participantes de cada grupo. Las transcripciones de videos estarán en su mayoría acompañadas por imágenes de los participantes o de las producciones de los mismos en sus hojas de trabajo.

5.3.1 Análisis de la relación funcional correspondencia Esta relación funcional se refiere a establecer la relación o el valor que corresponde dado un término inicial, es decir establecer la relación que existe para el mismo dentro de la función, en el lenguaje de las funciones establecer un valor en el dominio y su correspondiente valor en el recorrido. Dado un elemento del conjunto inicial le corresponde uno y solo un elemento en el conjunto final, en el sistema de representación gráfico, en plano cartesiano define la correspondencia en el conjunto de coordenadas cartesianas, al establecer (x, y) siendo x un elemento del

conjunto de partida al que le corresponde y en el conjunto de llegada, en la representación tabular ubicar en la tabla el valor para completar la columna o la fila según se establezca el orden en la misma y valor que corresponde para llenar la información. Se establece que hay una relación funcional de correspondencia ya que el estudiante muestra el proceso para obtener el valor para 5 y no es una respuesta directa que no permite identificar tal relación.

En la sesión 1, Tarea 1 los estudiantes LDT y LKR cada uno realiza las operaciones para establecer el valor que le corresponde a 5, para dar respuesta al inciso (a).

Figura 15. Producción LKR, Primera Sesión Tarea 1(a).

Handwritten student work for LKR. The text reads: "¿cuál es el valor de envío de una carta si se sabe esta pesa 5 gramos?". Below this, there is a calculation:
$$\begin{array}{r} 22 \times \\ 4 \\ \hline 88 \end{array} \quad \begin{array}{r} 88 + \\ 33 \\ \hline 121 \end{array}$$
 To the right of the calculations, it says: "Rta: El valor del envío es de 121 de la carta que pesa 5 gramos."

En este caso el participante establece una multiplicación de los gramos menos uno y al resultado le suma el valor de del gramo inicial que es 33.

Figura 16. Producción LDT, Primera Sesión Tarea 1(a).

Handwritten student work for LDT. The text reads: "A) El valor del envío es de 121, porque primero sume 33 pesos que equivale al precio del primer gramo, luego sume 4 veces 22 pesos que equivalen al precio de los gramos adicionales y así saque el resultado." Below the text, there is a vertical addition:
$$\begin{array}{r} 33 \\ 22 \\ 22 \\ 22 \\ 22 \\ \hline 121 \end{array}$$
 The final result, 121, is enclosed in a box.

Para el caso del estudiante LDT, este realiza una suma repetitiva al valor del gramo inicial, le adiciona 22 las veces correspondientes al peso en gramos menos uno. y encuentra la correpondencia para 5 $\longrightarrow$ 121.

5.3.2 Análisis de la relación funcional de recurrencia. Esta relación funcional se refiere a establecer la relación de cambio para cada una de las variables, la recurrencia se ve para cada una de las variables por separado ya sea en la dependiente o en la independiente, es identificar que patrón de variación asociado a cada una de ellas, establecer a partir de la condición dada el termino siguiente, o de la primera condición los términos precedentes ya sea el inmediato y algunos más lejanos.

El estudiante AFT establece el valor inicial y la recurrencia de 22 para el elemento siguiente, estableciéndolo como cobro adicional por gramo o fracción luego la recurrencia para la variable dependiente es 22 a 22.

Figura 17. Producción LDT, Primera Sesión Tarea 1(c).

Costo de envío	Pesos
Cobro primer gramo	33
cobro adicional por gramo o fraccion	22

Para la siguiente imagen la conclusión de recurrencia para la variable dependiente costo de envío de la carta se hace es en el colectivo, segunda fase de trabajo en la comunidad matemática, se toman las opiniones y quedan registradas en la hoja de proceso donde concluyen la variación de 22 a 22 y dicen que es la segunda opinión.

Figura 18. Producción G(LPC,AFT,JJS), Primera Sesión Tarea 1(c).

Costo de envío	Pesos.
Cobro primer gramo.	33
Cobro adicional Por gramo o Fracción.	22

segunda opinion...

5.3.3 Análisis de la relación funcional de covariación Esta relación funcional se centra el análisis de como dos cantidades varían simultáneamente, establecer la relación entre las variables presentes en la función, de manera que los estudiantes interpreten que los cambios que se producen en una de ellas afectan a la otra, es decir covarían.

El reconocimiento del proceso como las dos magnitudes cambian explicado por los participantes no solo implica obtener resultados inmediatos, sino la explicación de cada uno de esos patrones de variación para cada una de las variables y su relación cuando existen cambio de valores para cualquiera de ellas y el comportamiento que esto implica para la otra variable.

El estudiante CM presenta una tabla donde muestra la correlación de variables y su variación simultánea al enunciar “para cada gramo adicional a 1, al precio del costo del envío se le suma 22 sucesivamente”, es decir establece una correlación donde la variable independiente varia el uno y la independiente 22.

Figura 19. Producción CM, Primera Sesión Tarea 1(c).

(C)

numero de gramos	1	2	3	4	5	6	7	8
primer didmo	33	33	33	33	33	33	33	33
gramo adicional	0	22	44	66	88	110	132	154
resultado - suma	33	55	77	99	121	143	165	187

d) C P
 $33 = 1$
 $33 + 22 = 2$

Por cada gramo adicional a 1, al precio del costo del envío se le suma 22 sucesivamente.

5.3.4 Análisis del sistema de representación verbal El sistema de representación verbal, es una forma de expresar con el lenguaje cotidiano características de lo que sucede con la función, los resultados que se van obteniendo al realizar razonamientos matemáticos para establecer relaciones entre los elementos que interviene en la función. Cañadas y Figueira 2011 manifiestan que es una forma de expresar el proceso de forma cohesionada y estructurada.

Esta representación es de las más cotidianas en los estudiantes pues de forma explicativa pueden escribir o hablar de resultados, incluso plantear distintas soluciones sin necesidad de una fórmula o de un simbolismo.

El participante WKR manifiesta la relación de dos variables peso de la carta y costo de envío, usando P y C para nombrar cada uno de ellos, pero su relación no es algorítmica es una explicación de cómo solucionar este ejercicio.

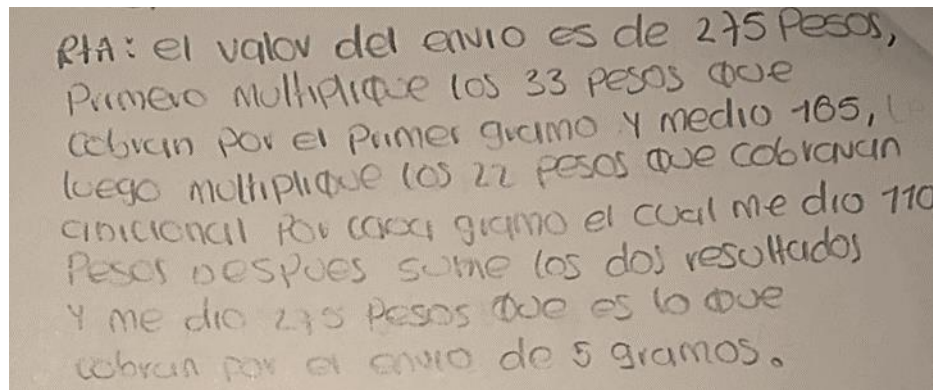
Figura 20. Producción WKR, Primera Sesión Tarea 1(d).

251 255

de si hay una expresión que relacione estos 2 valores porque la c es el costo de enviar una carta y la p es el peso de gramos de cada carta, una dice la cantidad de gramo pesa la p y la otra el precio por cada gramo pesa la c,

Dado que este sistema de representación sirve para explicar con el lenguaje cotidiano el proceso que realiza para hallar una solución, el participante LBP realiza un proceso que explica con palabras.

Figura 21. Producción LBP, Primera Sesión Tarea 1(a).

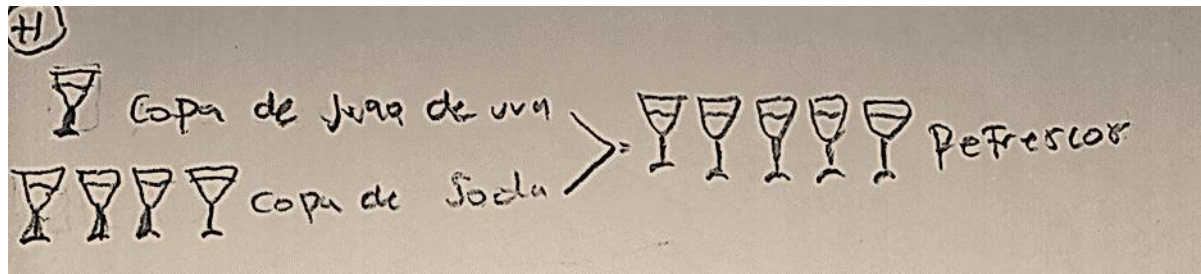


RTA: el valor del envío es de 275 Pesos,
Primero multiplique los 33 pesos que
cobran por el primer gramo y medio 165,
luego multiplique los 22 pesos que cobran
adicional por cada gramo el cual me dio 110
Pesos después sume los dos resultados
y me dio 275 Pesos que es lo que
cobran por el envío de 5 gramos.

5.3.5 Análisis del sistema de representación pictórico El sistema de representación pictórico, es una forma de expresar información de un problema o situación por medio de dibujos, estos ayudan al estudiante a organizar información es incluso a representarla para buscar dar solución a la situación planteada. Los dibujos pueden tener información que está presente en el enunciado e incluso pueden contener anotaciones adicionales que den información para resolver el problema.

Al realizar la segunda tarea de la primera sesión, el estudiante AFT realiza los dibujos de unas copas de jugo de uvas y soda para establecer el valor de producción de refresco siguiendo una receta, aun cuando podría establecer los valores solo poniendo los números decide modelar la situación realizando los dibujos de los objetos.

Figura 22. Producción AFT, segunda Sesión Tarea 2 (h).



5.3.6 Análisis del sistema de representación tabular El sistema de representación tabular, es el uso de tablas como registro de valores y de información de las relaciones funcionales para este caso específico, dado que las funciones trabajadas son de dos variables, la tabla permite organizar información relacionando las variables que participan en la función. Los participantes pueden establecer relaciones funcionales a medida que construyen los valores para las columnas y las filas, de recurrencia, correspondencia y covariación.

Este tipo de registro en tablas, permite el análisis de datos por parte de los estudiantes dado que el orden que en ellas se establece, hace que se identifiquen con facilidad relaciones funcionales existentes, más que cuando los datos se encuentran en no ordenados.

En la tarea uno inciso c se solicita específicamente la representación tabular de la relación funcional del peso de la carta y el valor del costo de envío de la misma, el participante DCG realiza un registro tabular donde relaciona la información con correspondencia para las variables y la relación funcional de recurrencia y covariación, de igual forma establece los valores para la variable dependiente hasta 13 como lo plantea el ejercicio, es importante notar que aun cuando en la variable independiente tiene valores hasta 15, el estudiante no correlaciona estos valores.

Figura 23. Producción AFT, Primera Sesión Tarea 1 (c).

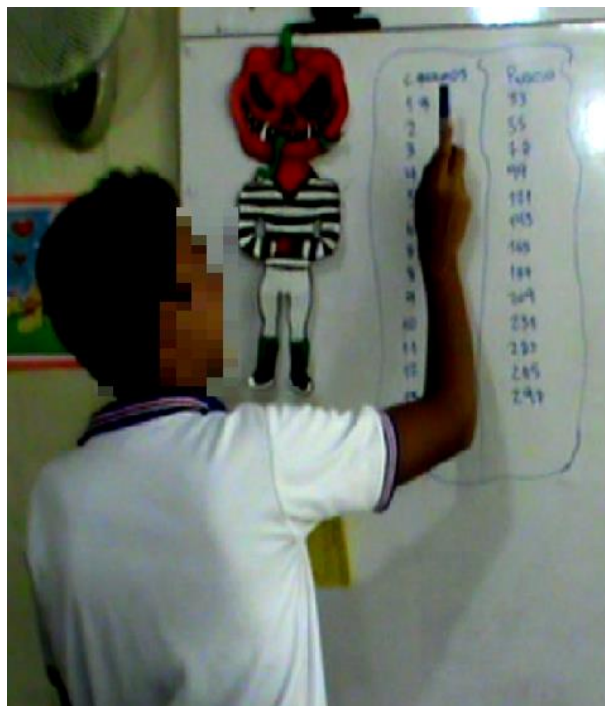
C. gramos	Precio
1 g	33
2	55
3	77
4	99
5	121
6	143
7	163
8	187
9	209
10	231
11	253
12	275
13	297
14	
15	

En el trabajo con la comunidad matemática en la puesta en común con el grupo el participante IJB, expone su trabajo del colectivo en consideración grupal, bajo intervención de los participantes para su convalidación.

Tabla 12. Producción G (IJB, LKR, BAP, JRP), segunda Sesión Tarea 1 (c).

Transcripción video 3 minuto 21:20 hasta 22:14	
Inves.	Listo, Isaac antes de sentarse, háblenos que fue lo que quisieron decir en esa tabla y todos ponemos atención, ¿Qué hicieron? Isaac cuéntenos esta tabla que quiere decir.
IJB	El primer gramo vale 33 y pues los otros restantes son a 22 pesos
Inves.	Entonces cuanto valdría una carta que pesa 2 gramos
IJB	55
Inves.	55 ¿Qué más hay que decir ahí? ¿Porque solo hasta 13?
IJB	Porque ahí dice

Figura 24. Producción IJB, segunda sesión Tarea 1 (c).



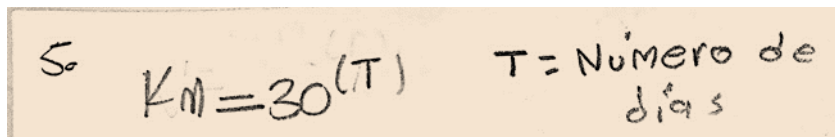
5.3.7 Análisis del sistema de representación simbólico o algebraico El sistema de representación simbólico o algebraico, es en el que intervienen símbolos algebraicos entendidos como variables (letras) y valores constantes (numéricos) que permiten expresar una función, en términos de Rico 2009 de carácter alfanumérico, esta es la descripción de los elementos que intervienen en la función y los resultados que se describen para cualquier termino en la misma, es decir permite escribir la expresión general que define una función.

La forma algebraica o de fórmula que se entiende para esta representación puede emerger después del trabajo con valores específicos que llevan a esta representación como una forma de generalización.

En la sesión cinco, se solicita a los estudiantes la expresión para el recorrido después de t días, planteando t como variable independiente, el trabajo colectivo de los participantes G (CM, CAA, LAC, DV), generaron la siguientes expresión

algebraica partiendo de la información que extrajeron de la representación gráfica suministrada en el ejercicio, cabe aclarar que aunque en la imagen la t parece un exponente, en su explicación de la puesta grupal aclararon que fue solo una cuestión de escritura.

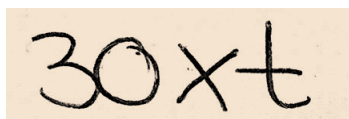
Figura 25. Producción G (CM, CAA, LAC, DV), quinta sesión Tarea 5.



$$Se \quad Km = 30(T) \quad T = \text{Número de días}$$

En la misma tarea el colectivo G (IJB, LKR, BAP, JRP) genera un expresión para ¿cuánto habrá recorrido después de t días?, sin escribir tal como una relación funcional de variables dependientes o independientes.

Figura 26. Producción G (IJB, LKR, BAP, JRP), quinta sesión Tarea 5.



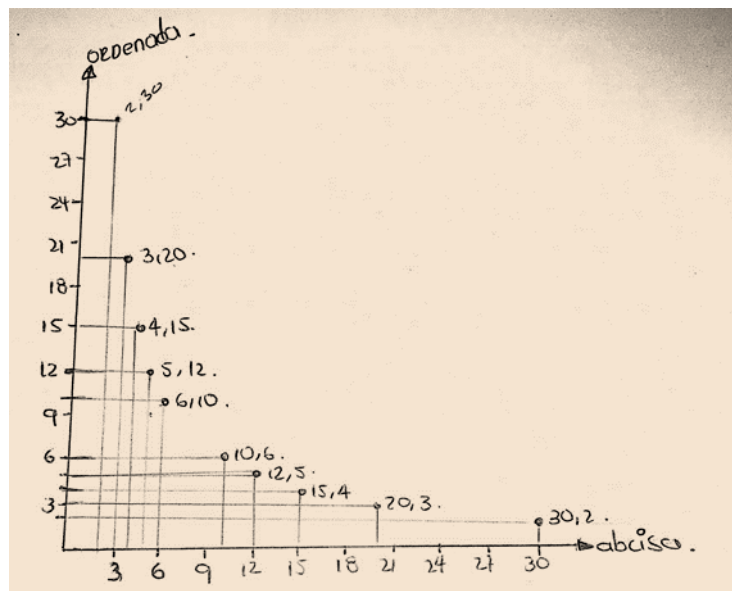
$$30 \times t$$

5.3.8 Análisis del sistema de representación gráfico. El sistema de representación gráfico es la práctica de trazado y lectura de valores numéricos en graficas (plano cartesiano), esto va más allá de la lectura de pares ordenados, abscisas y ordenadas, las características visuales que describen este tipo de representación, deben ser entendidas matemáticamente y que su composición completa brinde información del comportamiento de la función.

La interpretación de la gráfica para definir las relaciones funcionales se da incluso en la ubicación y escala de cada una de las variables y en lo que significa su composición dentro del plano.

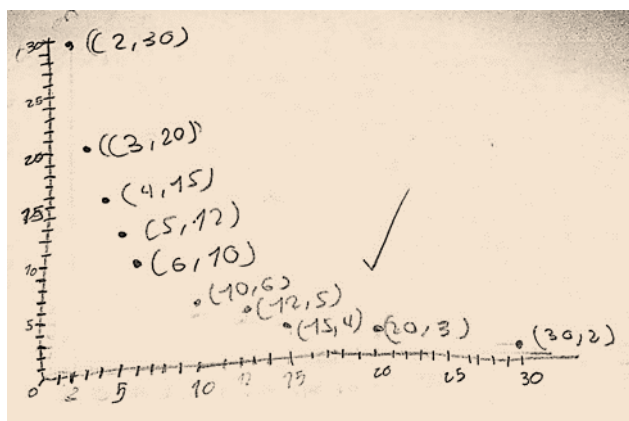
En la sesión 3 Tarea 1 se solicita la representación gráfica a partir de la representación tabular que inicialmente se pidió completar, el colectivo G (JJS, JSS, AFT, LPC) plantea una gráfica donde establecen una escala de 3 a 3 para los dos ejes y se cumple la proporcionalidad para la misma, de igual forma la ubicación de los parejas ordenadas muestran la relación de correspondencia establecida por los participantes.

Figura 27. Producción G (JJS, JSS, AFT, LPC), tercera sesión Tarea 1.



De igual forma el colectivo G (CM, CAA, LAC, DV) plantea una gráfica donde establecen una escala de 5 a 5 para los dos ejes y se cumple la proporcionalidad para la misma, así mismo las relación funcional de correspondencia y covariación es evidenciada en la ubicación de las ordenadas y las abscisa de manera correcta.

Figura 28. Producción G (CM, CAA, LAC, DV), tercera sesión Tarea 1.



5.4 COMUNIDAD MATEMÁTICA

Las matemáticas a través de la historia no sean construido solo con lápiz y papel y de manera individual, sino por el contrario, se han sometido a aprobaciones por parte de miembros de una Comunidad Matemática, es fundamental la aprobación y valides por parte otros miembros que estén en la capacidad de convalidar o refutar con argumentos matemáticos los contenidos que quieren publicarse (teoremas, demostraciones, definiciones, entre otros).

Esta investigación de carácter cualitativo, le interesa conformar una Comunidad Matemática en el aula regular de los estudiantes de tercer año de secundaria de un colegio público de la ciudad y analizar el rol de los estudiantes y del maestro como actores principales de la misma.

Conformar una Comunidad matemática en el aula es salir del confort normal de la clase magistral donde se dan explicaciones, se pregunta por la claridad en lo que explicamos y dejamos ejercicios para que los estudiantes en cierta medida repliquen la información que hemos transmitido, la interacción con los escolares

muchas veces se reduce a la revisión de los ejercicios en el cuaderno y a las pocas preguntas que suscitan después de la intervención.

Las sesiones de intervención programadas en esta investigación se desarrollaron con la metodología de Comunidad Matemática, trabajando por etapas dentro de la clase, primero se realiza la fase individual.

Figura 29. trabajo individual



En esta etapa los estudiantes se enfrentan a una Tarea matemática orientada al desarrollo del pensamiento funcional, el tiempo promedio para el trabajo individual son 45 minutos, este tiempo es empleado por estudiantes para realizar procedimientos y conjeturar en torno a las posibles soluciones de las Tareas que se proponen, como se observa en la fotografía en este tiempo no hay interacciones, los estudiantes registran en sus hojas de trabajo las respuestas y procesos que llevarán a consideración a la segunda etapa, el trabajo colectivo.

Inicialmente los escolares solicitan muchas indicaciones al docente, sobre los ejercicios, sobre las posibles respuestas y sobre la aprobación de lo que tienen registrado en sus hojas de trabajo, pero a medida que se van dando las sesiones estos comprenden que dentro de la Comunidad Matemática ellos son sujetos activos y que todo lo que puedan aportar correcto o incorrecto siempre es información valiosa. Por otra parte el maestro al enfrentarse a este cambio en la dinámica de clase, debe acoplarse a su nueva forma de responder y no lanzar juicios de aprobación o rechazo sobre los que hacen los niños en clase.

La segunda etapa es el trabajo colectivo, propuesto en equipos de 4 personas, en esta Comunidad Matemática los grupos eran estables, no sufrían modificaciones de una sesión a otra.

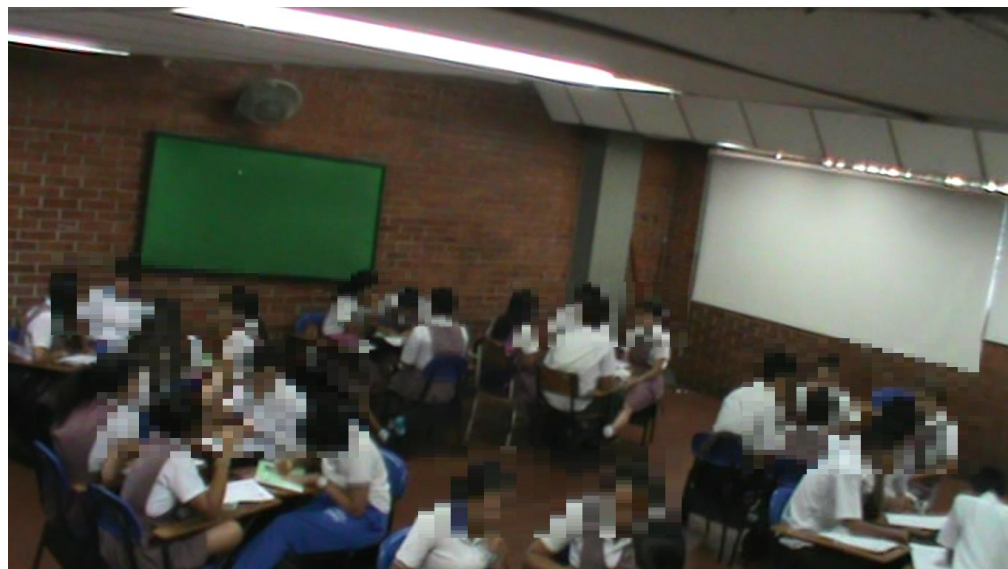
Figura 30. Trabajo colectivo 1



Este trabajo tiene una duración promedio de 30 minutos, es aquí donde los estudiantes interactúan primeramente, donde exponen sus posibles soluciones y argumentos de las mismas, en ocasiones se encuentran en los colectivos, discusiones en torno a una solución propuesta, pero es ahí donde los argumentos

y contenidos matemáticos que sustentan los procesos para hallar las respuestas, emergen. En este espacio defender su posición frente a la solución e incluso el aceptar el error, hace parte de los procesos argumentativos propios de la competencia comunicativa en matemáticas.

Figura 31. trabajo colectivo 2



Por último se trabaja de manera grupal, es aquí donde los estudiantes muestran a todos los participantes de la Comunidad Matemática sus producciones intelectuales, sus respuestas y los razonamientos que los llevaron a ellas, la mayor prueba de interacción entre semejantes y la presentación de argumentos matemáticos válidos para que sus premisas sean aceptadas por la comunidad.

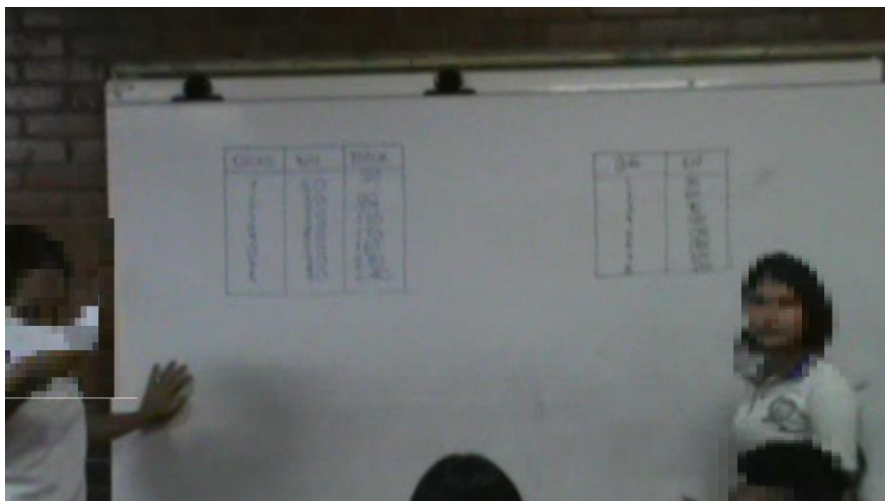
Figura 32. Trabajo grupal 1



En esta etapa, los estudiantes en las primeras sesiones de intervención eran bastante tímidos a la hora de exponer sus posibles soluciones, mostraron cierta aversión por el tablero y un gran temor de ser juzgados por sus compañeros si sus respuestas no eran correctas, el maestro actuó como mediador de estos temores y señaló en varias ocasiones que se podían encontrar distintos procedimientos que llevaran a la comunidad a una misma respuesta.

La interacción entre semejantes y la construcción de conocimiento colectivo, es una premisa que se desarrolló en esta investigación, el aceptar o refutar las soluciones a las tareas propuestas y convencer al otro o admitir sus argumentos para la solución de una tarea, evidenció un interés por parte de los estudiantes al querer poner en manifiesto sus conocimientos matemáticos para emitir una juicio o una respuesta.

Figura 33. Trabajo grupal 2



Como se observa en la foto, se presentaban diferentes formas de representación para las Tareas, esto llevó a una discusión de tipo académico con argumentos matemáticos, que les permitieran a los participantes de la comunidad elegir cual representación era la más adecuada para la Tarea. Este tipo de debates se hicieron cotidianos a la hora de discutir las posibles soluciones planteadas y generó un interés de los escolares por participar activamente en estas discusiones.

Observar el manejo que sus compañeros le dieron a algunas funciones y como usaron los sistemas de representación, mostraron a los estudiantes otras formas de resolver ejercicios, e incluso de aclarar dudas que plantearon durante la etapa grupal, donde se evidenciaron las relaciones funcionales correspondencia, covariación y recurrencia al pasar de una representación a otra.

La comunidad matemática aportó a los estudiantes habilidades comunicativas, argumentativas y de razonamiento, donde se identificó un sujeto activo a la hora de discutir sus ideas matemáticas, esto despertó un especial interés y disponibilidad para estudiar matemáticas.

Al tener este espacio los estudiantes organizaron sus ideas de manera convincente; sus argumentos e intervenciones fueron razonables y contribuyeron al crecimiento como participantes de la comunidad. Pensar, razonar ordenadamente, emitir un concepto, evaluar, argumentar fueron formas de ser partícipe de esta comunidad y esto logró que los estudiantes construyeran sus propias ideas matemáticas y así ponerlas en consideración e incluso considerar las de sus iguales.

5.5 ENTREVISTAS

Para la fase final de este proyecto se realizaron un grupo de entrevistas semi estructuradas con 8 participantes organizados en parejas. Se inicia con el desarrollo de una Tarea donde se espera los estudiantes evidencien una transición entre los diferentes sistemas de representación y las tres relaciones funcionales, correspondencia, recurrencia y covariación propuestas por Smith 2008, el reconocimiento de variables dependientes e independientes según sea el caso en la práctica.

La entrevista comprende una tarea donde se define una función lineal con 4 incisos para solucionar, en ella se busca pasar primeramente de la representación tabular en la que se presenta la información inicial, a la representación verbal, establecer la relación funcional de correspondencia para algunos valores particulares, trabajar seguidamente con la representación gráfica, que permite evidenciar el reconocimiento de la variable dependiente y la independiente al ser ubicadas en el gráfico, y la recurrencia para variables separadas y covariación al realizar la ubicación de los puntos en el plano cartesiano; para finalizar se solicita la representación simbólica (algebraica) que a lo largo del proceso ha sido bastante compleja para los participantes, es necesario que esta emerja de sus propias conjeturas y el trabajo con las diferentes relaciones y representaciones.

5.5.1 Presentación de la entrevista Algunas instrucciones importantes:

Lea atentamente las situaciones que a continuación se plantea, escriba claramente los razonamientos que realice para resolver cada una de las preguntas aquí solicitadas, entre más detallada este la información, más útil será para este estudio.

En un laboratorio de fisiología, al medir durante cierto tiempo los litros de sangres que bombea el corazón de una persona cuyo peso es de 70 kg, se obtuvieron los siguientes datos:

Tabla 13. Datos

Litros de sangre que bombea el corazón	20	35	50	60
Tiempo en minutos	4	7	10	12

1. Explica con tus palabras que te dice la información de la tabla
2. Cuanta sangre ha bombeado el corazón después de 30, 50 y 100 minutos.
3. Realiza una gráfica que muestre la relación de los datos mencionados
4. Puedes encontrar una expresión para encontrar la cantidad de sangre que bombea el corazón en cualquier cantidad de minutos.

Análisis a priori

1. Explica con tus palabras que te dice la información de la tabla

Se espera que los estudiantes construyan una representación verbal que permite utilizar el lenguaje natural para exponer las relaciones que se observan en la tabla, que permitan expresar el proceso de razonamiento para obtener tales resultados.

La relación funcional planteada en la situación de la tabla expresada en su representación simbólica, es $f(t) = 5t$, siendo t el tiempo en minutos y $f(t)$ el número de litros de sangre que bombea el corazón.

La representación verbal es útil para enunciar situaciones y para la solución de las mismas, se espera que los estudiantes expresen de manera verbal (dado que es una entrevista), la relación existente entre las variables, para mostrar que logran hacer un cambio de representación desde la representación tabular.

El uso del lenguaje cotidiano es una herramienta clave para este tipo de solución, expresiones como “en 4 minutos bombea 20 litros de sangre, en 7 minutos bombea 35 y así sucesivamente” o “si en 4 minutos bombea 20 litros y en 7, 35 se puede decir que bombea 5 litros por minuto, es decir que los litros aumentan de 5 en 5 y los minutos de 1 en 1” lenguaje que puede evidenciar la comprensión de las relaciones funcionales consignadas en la tabla.

2. Cuanta sangre ha bombeado el corazón después de 30, 50 y 100 minutos.

3.

Después de encontrar las relaciones de recurrencia para las variables por separado (dependencia e independencia), se espera que puedan establecer la correspondencia para los valores solicitados:

Para 30 minutos, $5 \times 30 = 150$ litros

Para 50 minutos, $5 \times 50 = 250$ litros

Para 100 minutos, $5 \times 100 = 500$ litros

Y relación de covariación al comprender que si la variable independiente cambia, la variable dependiente también lo hace y su cambio depende del valor que tome la primera.

4. Realiza una gráfica que muestre la relación de los datos mencionados

Como se menciona con anterioridad este es un cambio de representación ya se solicitó la verbal y se entregó la tabular ahora se espera la representación gráfica.

5. Puedes encontrar una expresión para encontrar la cantidad de sangre que bombea el corazón en cualquier cantidad de minutos.

Por último se solicita el cambio de representación a la representación simbólica (algebraica) “representaciones de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas informáticos y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento”⁵⁴, para el caso esta función, se expresa lo numérico con el 5 y el símbolo algebraico o variable con la m para este caso particular (aunque puede ser a elección de quien resuelve el nombre que desee colocar a la variable); la operación de multiplicación que describe el valor para cualquier tiempo determinado y establecer con esta la cantidad de litros de sangre bombeados por el corazón.

Luego la expresión que se espera es

$$f(m) = 5m \text{ o } L = 5m$$

5.5.2 Análisis de las entrevistas En esta sección se analizarán las actividades realizadas por los estudiantes en al participar de las entrevistas.

Al solicitar el cambio de representación del tabular al verbal se encuentra que los estudiantes pueden pasar de una representación a otra identificando relaciones funcionales de correspondencia entre valores al mencionar la relación entre la cantidad de sangre que bombea el corazón después de determinada cantidad de

⁵⁴ RICO, Op Cit. p 8

minutos (tiempo), la relación funcional de recurrencia se evidencia cuando los estudiantes mencionan que por cada minuto el corazón bombea 5 litros, relación que les permite establecer la recurrencia para la variable dependiente de 5 en 5 y para la variable independiente de uno en uno, así mismo la relación de covariación es evidente al establecer que el cambio en la variable independiente, genera un resultado diferente para la variable dependiente, es decir son cantidades que covarían.

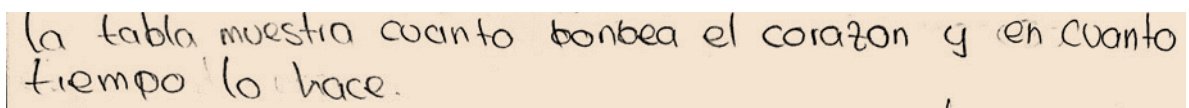
Tabla 14. Transcripción de entrevista número 1

Entrevista 1 minutos 2 al minutos 7:40.	
Entrevistador	Se obtienen los siguientes datos ¿qué ven ustedes ahí?
WKR	Una tabla con
Entrevistador	Una tabla, ¿Qué registra a tabla?
BAP	Los litros de sangre que bombea el corazón y el tiempo en minutos
Entrevistador	Listo los litros de sangre que bombea el corazón y el tiempo en minutos está claro eso, entonces esta tarea nos implica cuatro ítems por cumplir. Entonces el primer ítem es explicar con sus palabras que le dice la información que está en esa tabla, entonces ustedes ahí miraran los valores, pensaran y listo en el segundo cuanto a bombeado el corazón después de treinta, cincuenta y cien minutos, en el tercero puedes encontrar una expresión para encontrar la cantidad de sangre que bombea el corazón en cualquier cantidad de minutos. Y dejamos de ultima realiza una gráfica que muestre la relación de los datos mencionados. Listo entonces a trabajar en una sola hojita trabajan ambas
WKR	Bueno si es 20 cuarenta minutos.
BAP	Cuatro
WKR	Eso cuatro, veinte cuatro minutos, treintaicinco, siete
BAP y WKR	Discuten en voz baja los valores de la tabla
WKR	De veinte a treintaicinco serian veinte, veinticinco, treinta, a no veinticinco y treinta de treintaicinco a cincuenta
BAP	De cuatro a siete son tres y de veinte a treintaicinco de son de cinco en cinco veinticinco, treinta y treintaicinco son tres suma de cinco en cinco

Entrevista 1 minutos 2 al minutos 7:40.	
WKR	Pero no cuente el veinte cuéntelo desde el veinticinco
BAP	Veinticinco, treinta, treintaicinco por eso
WKR	Pero pa llegar yo le estoy diciendo contando los que estamos diciendo
BAP	Ahí me está pidiendo para 30, 50 y 100
Entrevistador	Pero en el primero al fin que definieron
BAP	La tabla muestra el filtro de sangre y en cuanto tiempo lo hace
Entrevistador	¿El filtro? ¿Dónde dice filtro?
BAP	Ahí dice
Entrevistador	Litros de sangre
BAP	Litros ajajja
Entrevistador	Entonces que dice la tabla
BAP	Entonces cuantos litros bombea el corazón y en cuanto tiempo lo hace
WKR	Bueno pero ahí estaba la idea, porque borra todo
BAP	Pues para que me quede bien
WKR	Pero solo era cambiar a litros y ya
BAP	No porque yo estaba mirando y no me queda bien

Al revisar las entrevistas se encuentran más datos para identificar las relaciones funcionales de las que hacen uso los estudiantes, pues si se observa la imagen # que muestra el registro de las estudiantes ante esta Tarea contiene menos información que la relacionada en la transcripción de la entrevista.

Figura 34. Producción BAP y WKR entrevista 1



la tabla muestra cuanto bombea el corazón y en cuanto tiempo lo hace.

Esta imagen solo relaciona dos cantidades mientras que la conversación que sostiene las participantes, da cuenta de la relación funcional de correspondencia, recurrencia y covariación.

Figura 35. Producción AFT y BO entrevista 4

Actividad

! Al mirar la tabla se bombean 5^{litros} por un minuto, en 4 minutos bombear 20 litros de sangre, con 7, 25, con 10.50 y con 12, 60. lo constante es que bombear 5 litros por un minuto

Como se puede observar la representación verbal de estos estudiantes es más detallada, menciona la correspondencia para valores relacionados en la tabla, establecen una relación funcional de recurrencia al mencionar que la constante es cinco y que bombea esos 5 en un minuto.

En el ítem dos de la tarea se solicitó establecer la relación funcional de correspondencia entre variables para valores como 30, 50 y 100. Los estudiantes han reconocido la recurrencia para y , estableciendo que es de cinco en cinco así logran darse cuenta que es constante el aumento de 5 litros de sangre por medio de operaciones de división entre variables, un acercamiento al concepto de pendiente. Realizan la multiplicación de $30 \times 5 = 150$, $50 \times 5 = 250$ y $100 \times 5 = 500$ estableciendo los valores correspondientes para 30, 50 y 100, esta relación funcional se evidencia por parte de los cuatro grupos entrevistados y son un elemento evidente que caracteriza el desarrollo del pensamiento funcional.

Tabla 15. Transcripción de entrevista número 3

Entrevista 2 del minuto 8:32 a 13:31	
JJS	Mire lo que yo le digo es que, voy hacer una pregunta.
LPC	Uisshh
JJS	Mire la comparación que hay : 35 dividido en 7
LPC	Da...
JJS	$7 \times 5 = 35$ A 35 CERO; $20/4 = 5$ a cero entonces ambos nos dio cero, entonces este también lo podemos dividir también nos va a dar 5, y lo que yo quiero decir es que a 20 le

Entrevista 2 del minuto 8:32 a 13:31	
	sumamos 3 veces 5 ósea 3 quintos entonces son 15, entendiste baby.
LPC	Listo.
JJS	Sigamos con el 2do punto: Cuanta sangre bombea el corazón entre 30, 50 y 100 minutos
LPC	50x3
JJS	50X3= 150.
LPC	Por qué por 3?
JJS	Porque 50 es igual a 10 minutos, 50 litros son 10 minutos. Entonces 10 veces 10 minutos no, 3 veces 10 minutos son 30 minutos ,
LPC	A... entonces por eso por 3.
JJS	Entonces son 150 y acá son 250; primero va este luego este.
LPC	A entonces en 100 minutos seria...
JJS	Serian 500 porque ya tenemos esta, entonces esta la multiplicamos por 2 y nos da 500, entonces escriba usted.
LPC	Como es la pregunta.....Ósea.....
JJS	¿Cuánta sangre bombea un corazón después de 30, 50 y 100 minutos? , escriba ahí : .Después de 30 minutos el corazón bombea 150 litros de sangre; ahora haga lo mismo
LPC	Y después de 100 minutos....
JJS	El corazón bombea 500 litros de sangre...

Figura 36. Produccion BAP y WKR entrevista 1

$$\begin{array}{r} 2 \text{ } 30 \times \text{ en treinta minutos bombea } 150 \text{ litros} \\ \text{ } \frac{5}{150} \text{ de sangre} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \times \text{ en 50 minutos bombea } 250 \text{ litros de} \\ \text{ } \frac{5}{250} \text{ sangre} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \times \text{ en 100 minutos bombea } 500 \text{ litros} \\ \text{ } \frac{5}{500} \text{ de sangre} \end{array}$$

La imagen anterior muestra las operaciones que realizan los estudiantes para establecer el valor que corresponde a cada uno de los valores señalados, se evidencia claridad en la relación funcional de correspondencia entre variables y de la misma forma la relación de recurrencia para la variable dependiente al usar 5 en cada una de las multiplicaciones.

El tercer ítem de la tarea solicita la representación algebraica o simbólica, después de establecer la relación funcional de recurrencia para la variable dependiente litros de sangre que bombea el corazón, se identifica como constante en la función el número 5 y a partir de esta constante se identifica un valor que es variable a quienes los participantes llaman M, los estudiantes también se refieren a ella como cualquier número, es así como emerge la representación simbólica o algebraica para esta Tarea que corresponde a la expresión $M \times 5 = L$, donde cinco constante en M es variable y depende de L. Se evidencia la relación funcional de covariación al hablar de dependencia entre variables y establecer que el valor de una depende de la otra y por lo tanto si un valor cambia el resultado también.

La siguiente transcripción de una parte de la entrevista 4 muestra como los estudiantes aun cuando ya conocen lo que es variable y lo que es constante en la función objeto de la Tarea, generar la representación simbólica o algebraica de la función así como discuten las relaciones funcionales inmersas en ella.

Tabla 16. Transcripción de entrevista número 4

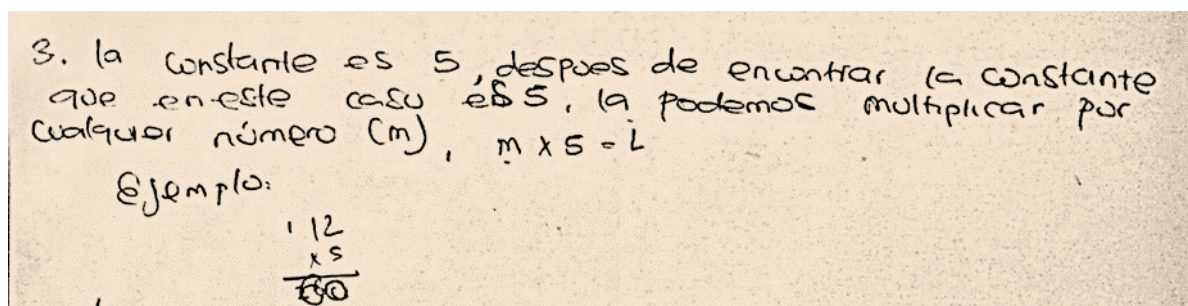
Entrevista 4 del minuto 9:22 a 16:20	
Entrevistador	¿Qué dice el tercer punto?
AFT	Puedes encontrar una expresión para encontrar la cantidad de sangre que bombea en cualquier cantidad de minutos?... si
Entrevistador	Que bombea en cualquier cantidad de minutos, Sí; como lo podemos hacer Andrés, ¿qué dices tú?
AFT	Si porque si ya sabemos que... en 1 minuto bombea 5 litros, pues ya se puede hacer la multiplicación entonces por cualquier número.

Entrevista 4 del minuto 9:22 a 16:20	
Entrevistador	Listo. ¿Entonces como seria la forma para escribir eso?
AFT	¿Multiplicando?
Entrevistador	¿Cómo se hace? ¿Cómo lo hemos hecho siempre? Cuando yo digo que busque una expresión para encontrar cualquiera estoy pidiendo que escriban una que...
AFT	Una multiplicación....
Entrevistador	¿Una multiplicación necesariamente?
AFT	NO.... Puede ser también una suma.
Entrevistador	Puede ser una suma, en este caso pues es una multiplicación, sí... Pero eso tiene un nombre. ¿Cómo se llama?
AFT	¿Variable?
Entrevistador	Variable es lo vas a poner ¿a qué?
AFT	A multiplicar...
Entrevistador	A multiplicar.... Y las variables las estas escribiendo ¿con qué?
AFT	Esta (señalan la hoja de trabajo)
BON	El 5 es constante....
Entrevistador	¿Entonces como lo van a escribir?
AFT	No se ...
Entrevistador	Si la constante es 5.... Tengo que ponerlo ¿cómo una variable o una constante?
BON	Como una constante...
Entrevistador	¿Y las constantes como se ponen? Como aparecen... ¿Cómo se llama la constante?
BON	5..
Entrevistador	Entonces colóquela. Listo... ¿Qué otra cosa necesita saber? Se acuerda que en algún momento nosotros hablábamos en el ejemplo del peregrino; que decía que en 'T' minutos.... Y le pusimos a minutos 'T'....

Entrevista 4 del minuto 9:22 a 16:20	
	¿Aquí que podemos hacer entonces?
AFT	¿Podemos poner 'M'?
Entrevistador	Por ejemplo... Me parece una muy buena elección, de paso...
AFT	Pero ahí dice: ¿Puedes encontrar una expresión para encontrar la cantidad de sangre que bombea en cualquier cantidad de minutos?
Entrevistador	¿Entonces como queda la expresión?
AFT	Que después de encontrar la constante, ya se puede multiplicar por cualquier número...
Entrevistador	Y entonces, cualquier número ¿cómo lo va a simbolizar?
AFT	Por la M....
Entrevistador	Entonces escríbalo.....
BON	Cantidad es 5....
AFT	Que si porque después de encontrar la constante, que en este caso es 5; ya la podemos multiplicar por cualquier numero en él.
Entrevistador	Entonces ¿como quedaría la ecuación o la formula escrita?
AFT	Quedaría: MX5
Entrevistador	Si pero m x 5 igual a quien, el resultado que es lo que mide allá, el resultado me da ¿Qué?
AFT	Litros
Entrevistador	Los litros entonces ahora simbolicen eso
AFT	Con la L
Entrevistador	Con la letra que le quieran poner Entonces ahora probemos la fórmula con algún número a ver si sirve o no sirve
BON	12 x 5
Entrevistador	Eso ¿cuánto es?
AFT	12X5= 60, si sirve si funciona.
Entrevistador	Ósea que se cumple o no se cumple lo que ustedes quieren plantear ¿sirve o no sirve? ¿Es o no es una función? Ustedes mismo me acabaron de decir que si sirve que si funciona, yo puedo decir que es o que no es una función.
AFT	Si porque hay está pidiendo que si se puede encontrar una expresión para encontrar la cantidad de litros de sangre.
Entrevistador	Ósea que si es una función... Y en esa función que ustedes escribieron, ¿cuáles son las cosas

Entrevista 4 del minuto 9:22 a 16:20	
	variables?
BON	La L
Entrevistador	¿Y?
AFT	Y la L...
Entrevistador	¿Quién depende de quién?
AFT	La M de la L depende de la M lo que da en el resultado
Entrevistador	Entonces quien es el que depende de quien
AFT Y BON	La M de la L
Entrevistador	Ustedes me están dando una afirmación chistosísima porque primero me dicen una cosa y después me dicen otra.
BON	Profe por que la M depende el resultado de la M
Entrevistador	A entonces ¿quién depende de quién?
AFT Y BON	La L de la M
Entrevistador	Claro porque el valor que tome L depende del valor que tome quien
AFT Y BON	La M
Entrevistador	Entonces quien es independiente, ¿quién puede tomar el valor que ella defina?
BON	La M
Entrevistador	La M, por que el 5 ¿es?
BON	Constante.

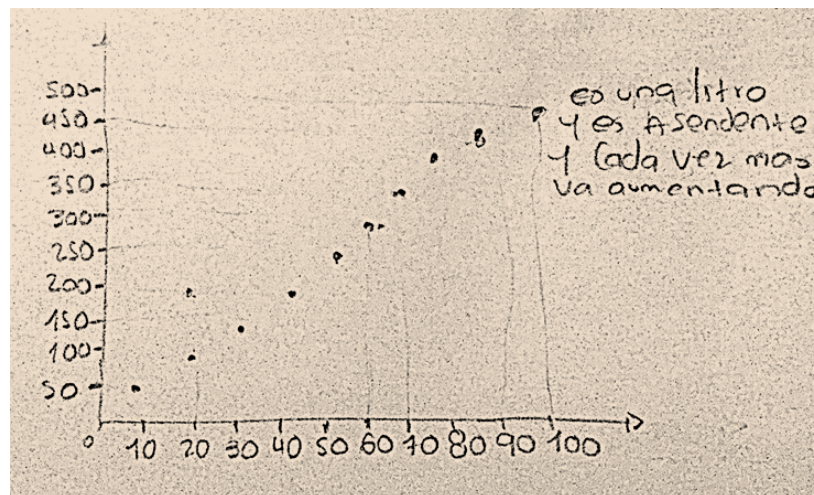
Figura 37. produccion BON y AFT entrevista 4



La Tarea sollicita la representación simbólica o algebraica que registran los estudiantes en sus hojas de proceso, al leer la entrevista se evidencia que este tipo de representacion emerge de la construccion coletiva de los participantes y la identificación de la relación fucional de covariación.

La representación gráfica se genera partir del dominio de la relación funcional de correspondencia donde los estudiantes establecen los pares ordenados, es decir la imagen correspondiente para cada elemento del dominio en este caso se generan dos valores de 1 en 1 para los minutos y de 5 en 5 para los litros de sangre bombeada, esto evidencia la relación funcional de recurrencia entre variables, se encuentran tabulaciones a una escala mayor pero que genera el mismo modelo lineal.

Figura 38. Produccion CCA y DV entrevista 2



De igual forma expresa la relación funcional de covariación al expresar que es ascendente, en términos de los estudiantes para referirse a una función creciente a lo que también refiere que va aumentando para los dos valores.

Las relaciones funcionales correspondencia, recurrencia y covariación son evidentes de los estudiantes entrevistados, el paso de una representación a otra con facilidad y en cada una de ellas identificar las relaciones funcionales, son los hallazgos al emplear una entrevista como instrumento de recolección de información pues aun cuando los estudiantes no registran en sus hojas de trabajo todos los procedimientos que emplean para dar solución a una Tarea, si queda el

registro de su interacción académica con el fin de argumentar sus procedimientos y encontrar dar solución a la situación planteada

6. CONCLUSIONES: ASPECTOS GENERALES, TEÓRICOS, METODOLÓGICOS Y PLANTEAMIENTOS EMERGENTES

6.1 ASPECTOS GENERALES

Éste capítulo presenta los resultados obtenidos del proceso de investigación en torno a la caracterización del pensamiento funcional en estudiantes que participan en una comunidad matemática vista desde la perspectiva de Santos Trigo, aplicada en escolares de tercer año de secundaria de un colegio oficial de Bucaramanga, este espacio dio a los escolares la oportunidad de conjeturar, proponer, argumentar y demostrar sus ideas y las de sus compañeros

6.2 ASPECTOS TEÓRICOS

Este apartado muestra los resultados obtenidos después de realizar un análisis de las sesiones de intervención donde los participantes desarrollaron Tareas matemáticas orientadas al reconocimiento de las relaciones funcionales y el uso de los sistemas de representación al interactuar en una comunidad matemática que les permite argumentar, proponer, discutir sus ideas y las de sus compañeros.

6.2.1 Relaciones funcionales Al analizar la prueba diagnóstica, se encuentra que los estudiantes logran establecer relaciones funcionales de correspondencia entre variables cuando la relación funcional es solicitada para valores pequeños o cercanos a los planteados, por ejemplo en el caso de términos (figuras), para los que se solicita el término siguiente, establecen la relación, pero cuando se pide esta misma acción para un término mayor por ejemplo el término 100 los estudiantes no dan cuenta de tal estructura.

Se evidencia que los estudiantes no tienen claridad al dar cuenta de la relación funcional de recurrencia para las variables (dependiente o independiente) asimismo en no tener clara esta relación funcional les dificulta reconocer la relación funcional de covariación al establecer relaciones entre variables.

Al implementar las sesiones de intervención los estudiantes muestran avances al identificar con claridad la relación funcional recurrencia entre variables, relación evidente cuando los participantes manifiestan que la variable cambia, o varía como ellos lo refieren, este avance se evidenció en espacios como las entrevistas, muestran dominio de lo que es un valor constante y esto les da herramientas para plantear soluciones para valores distintos que las variables pueden tomar, esta forma de representar la función implica el dominio de la relación funcional de covariación donde una variable depende la otra como es manifiesto por los estudiantes.

Se evidencia claridad en la relación funcional correspondencia cuando al solicitar valores que se relacionan con cantidades ya sean grandes o pequeñas, los estudiantes realizan operaciones y procesos para dar cuenta de la correspondencia entre valores dados.

En general los estudiantes logran manifestar las tres relaciones funcionales correspondencia, covariación y recurrencia al enfrentarse a una Tarea matemática orientada al desarrollo y caracterización del pensamiento funcional.

6.2.2 Sistemas de representación El uso de sistemas de representación es una forma como los estudiantes dan cuenta de sus razonamientos y procedimientos matemáticos, en este estudio los escolares desarrollaron habilidades para pasar de una representación a otra, una característica de esta población es que no maneja la relación simbólica, que durante el diagnóstico y las primeras sesiones no se encontraron evidencias de su uso y al solicitarla no era de su conocimiento.

Esta emerge después del trabajo con los sistemas de representación tabular Y verbal que les permitieron establecer cantidades constantes (numéricas) y variables (alfanuméricas) para así poder representarla, esto llevó a un proceso de generalización por parte de los estudiantes.

En tercer año de secundaria la representación pictórica no es un sistema de representación muy usado por los estudiantes, estos prefieren usar otros sistemas de representación. La representación gráfica emerge después de dar como punto de partida este tipo de representación, pues los estudiantes logran pasar de una representación a otra partiendo de ella, logran dar características y establecer relaciones funcionales pasando a una representación verbal e incluso tabular, luego para ellos la representación gráfica es una nueva forma de representación.

Como aspecto general los participantes lograron pasar de una representación a otra y dar cuenta de las relaciones funcionales inmersas en las Tareas objeto de esta investigación, el uso y conocimiento de un sistema de representación no es garantía del conocimiento de las relaciones funcionales pues se presentaron procesos donde se encontraba el sistema representación aunque este no correspondía a la función planteada.

6.2.3 Comunidad matemática El cambio del aula regular por un espacio donde todos los participantes pueden aportar ideas, discutir las, argumentarlas y no manejar la figura del maestro como único portador de la verdad absoluta, permite una interacción libre entre los estudiantes, el proponer una respuesta y someterla a convalidación por sus semejantes es un ejercicio que utiliza el error como herramienta para aclarar dudas, el uso de procedimientos matemáticos que ayuden a sustentar las ideas y dar explicación de las mismas es la manera como se someten para ser aceptadas dentro de la comunidad.

El cambio en el rol del docente no es una tarea fácil, convertirse en mediador de interacciones sin dar asentimientos sobre los juicios emitidos por los estudiantes y la veracidad de lo que se discute en la comunidad, se convierte en una actitud difícil de manejar.

El trabajo individual de los estudiantes dentro de la Comunidad Matemática es reflexivo y sirve para que el estudiante quiera someter sus ideas ante sus compañeros y defenderlas con argumentos propios de las matemáticas, al trabajar colectivamente en grupos de 4 personas se genera una interacción que propicia el diálogo y la discusión antes de una puesta en común, llegar a un acuerdo hace parte del logro del trabajo colectivo en una comunidad.

El trabajo del grupo en la puesta en común, permite el aporte de los colectivos y el reconocimiento respuestas que todos tienen aún cuando el proceso para encontrarlas no es el mismo, en todos los casos se da discusión y argumentos con el fin de llegar a convalidar las soluciones usando herramientas y conocimientos matemáticos.

Por último el trabajo en una Comunidad Matemática despertó el interés de los estudiantes para participar y hablar sin temor frente a sus compañeros y volver la clase de matemáticas un espacio para interactuar con libertad y proponer distintas soluciones a contenidos matemáticos

6.3 CONSIDERACIONES DIDÁCTICAS Y METODOLÓGICAS SOBRE LA IMPLEMENTACIÓN DE COMUNIDADES MATEMÁTICAS: ELEMENTOS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES.

Convertir el aula regular en una Comunidad Matemática es dar un aire distinto a la clase en la escuela, el uso de esta metodología permite que los estudiantes sean

quienes propongan soluciones con argumentos propios de las matemáticas, esto es fortalecer las competencias comunicativas y el uso del lenguaje propio de la disciplina, este trabajo aportó al desarrollo no solo del conocimiento matemático, sino al crecimiento personal de quienes la integramos, en ella docente y estudiantes adquirimos habilidades comunicativas y aprendimos del respeto por las ideas de los semejantes, pedagógicamente implicó esfuerzo, dedicación y tiempo de planeación que se vio reflejado al escoger las Tareas que se implementarían en cada sesión, el análisis y retroalimentación continua de procesos de clase hicieron que la labor como docente se enriqueciera y fuera satisfactoria el encontrar que se lograron los objetos planteados.

El trabajo en Comunidad Matemática ha impactado a los docentes de la institución pues consideran que esta estrategia genera resultados y permite la particularización de procesos, individuales, colectivos y grupales, por esto se ha despertado el interés por trabajar características de las funciones no solo lineales sino polinómicas a través de esta estrategia en cuarto grado de secundaria, labor que será implementada por un maestro de la institución, así mismo se compartirá esta experiencia en las jornadas pedagógicas institucionales con el fin de implementar Comunidades Matemáticas en los grados de primaria, para introducir contenidos referentes al pensamiento variacional, pensamiento espacial y la recolección de datos en estadística.

Es satisfactorio registrar los hallazgos y la evolución de los estudiantes que participaron de este proyecto de investigación y que se despierte el interés por parte de los maestros que están alrededor queriendo implementar este tipo de estrategias metodológicas al observar resultados favorables en los procesos académicos de los participantes.

Este trabajo fue admitido por el comité académico de la reunión latinoamericana de matemática educativa RELME en su versión número 32 y será socializado en

la modalidad reporte de investigación y comunicación breve, el RELME es un evento internacional que reúne un gran número de investigadores en el campo de la didáctica de las matemáticas, se realiza de manera anual y este año la sede se le asignó a la universidad de Medellín en Colombia. Esto garantiza la trascendencia de este proyecto y su conocimiento por la comunidad matemática latinoamericana.

BIBLIOGRAFÍA

AMAYA DE ARMAS, Tulio R.; MEDINA RIVILLA, Antonio. Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal. *Educación matemática*, 2013, vol. 25, no 2, p. 119-140.

BLANTON, Maria; KAPUT, James. Elementary grades students' capacity for functional thinking. En *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 2004. p. 135-142.

BLANTON, Maria, et al. A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2015, vol. 46, no 5.

BRIZUELA, Bárbara M.; LARA-ROTH, Susanna. Additive relations and function tables. *The Journal of Mathematical Behavior*, 2001, vol. 20, no 3, p. 309-319.

CAI, Jinfa; KNUTH, Eric (ed.). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Springer Science & Business Media, 2011.

CANTORAL, R. Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. México: Secretaría de educación pública, 2013.

CAÑADAS, M. C.; FUENTES, S. Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio. 2015, p 211-220.

CAÑADAS, María C.; FIGUEIRAS, Lourdes. Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y aprendizaje*, 2011, vol. 34, no 4, p. 409-425.

CAÑADAS, María C.; MOLINA, Marta. Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. 2016.

CASTRO, Encarnación; CAÑADAS, María C.; MOLINA, Marta. El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, 2010, vol. 54.

CARRAHER, David W.; SCHLIEMANN, Analucia D.; SCHWARTZ, J. Early algebra is not the same as algebra early. 2008.

DOORMAN, Michiel; DRIJVERS, Paul. Algebra in function. En *Secondary algebra education*. SensePublishers, 2011.

FUENTES, Sandra. *Pensamiento funcional de alumnos de primero de educación primaria: un estudio exploratorio*. 2014. Tesis Doctoral. Universidad de Granada

GODINO, Juan D.; FONT, Vicenç. Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, 2003.

KAPUT, James J. Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by" algebrafying" the K-12 curriculum. US Department of Education, Office of Educational Research and Improvement, Educational Resources Information Center, 2000.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE, Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012 Matemáticas, Lectura y Ciencias, Instituto Nacional de Evaluación Educativa, Madrid, 2013

MOLINA, Marta. Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. 2009.

NOSS, Richard; HEALY, Lulu; HOYLES, Celia. The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. Educational studies in mathematics, 1997, vol. 33, no 2, p. 203-233.

RADFORD, Luis. Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza: hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. 2013.P. 41

RICO, Luis. La competencia matemática en PISA. pna, 2007, vol. 1, no 2

RUEDA, N. Habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación. Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas de la UIS, Bucaramanga. 2016

SANTOS TRIGO, Luz Manuel. La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos. Trillas, 2007.

SCHWARTZ, Judah; YERUSHALMY, Michal. Getting students to function in and with algebra. The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, 1992, no 25.

SIERRA VÁZQUEZ, Modesto; GONZÁLEZ ASTUDILLO, María Teresa; LÓPEZ ESTEBAN, Carmen. Funciones: traducción entre representaciones. 1998.

SMITH, Eric. Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. 2008.

THALES, S. A. E. M. Principios y Estándares para la Educación Matemáticas. *Sevilla, SAEM Thales*, 2003, p. 226

VRANCKEN, Silvia, et al. Estudio de las funciones en situaciones variacionales. Resultados de la implementación de una secuencia de actividades. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 2014, vol. 15, no 1. Recuperado de: https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ARTICULOS_V15_N1_2014/RevistaDigital_Vrancken_V15_n1_2014/RevistaDigital_Vrancken_V15_n1_2014.pdf

ANEXOS

Anexo A. Consentimiento informado a padres de familia

Yo _____, identificado(a) con cédula de ciudadanía No. _____ de _____, representante legal de _____, estudiante del grado octavo; he sido informado(a) sobre la participación de mi hijo(a) y/o acudido(a), en la investigación del docente **ANA MARÍA CORREAL JURADO**, de la Maestría en Pedagogía de la Universidad Industrial de Santander, bajo la dirección de la PhD . **SOLANGE ROA FUENTES**. El objetivo de este estudio es: **La construcción de una Comunidad Matemática en el aula como estrategia para potenciar el desarrollo de pensamiento funcional.**

Si usted autoriza la participación del estudiante, a éste se le pedirá responder una prueba diagnóstica, participar en las sesiones del proyecto y responder a una encuesta semiestructurada; todo esto con el fin de transformar el proceso de aprendizaje del estudiante. Tenga en cuenta que las sesiones del proyecto serán grabadas para realizar un análisis del proceso; sin embargo, la información recolectada es confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación. Las respuestas serán codificadas usando un número de identificación y, por lo tanto, serán anónimas.

Si tiene alguna duda sobre este proyecto, puede hacer preguntas en cualquier momento.

Luego de haber sido informado(a) sobre las condiciones de participación del estudiante, entiendo que:

- Los resultados del proyecto de investigación no tendrán repercusiones en las calificaciones o actividades escolares.
- La participación del estudiante no generará ningún gasto, ni recibiré remuneración alguna por su participación.
- No habrá ninguna sanción en caso que no se autorice la participación del estudiante.
- Los videos o grabaciones de las sesiones de clase, serán utilizados únicamente con fines pedagógicos y como evidencia de la práctica educativa del docente.

Atendiendo a la normatividad vigente sobre consentimientos informados (Ley 1581 de 2012 y Decreto 1377 de 2012) y de forma consciente y voluntaria:

[] **DOY EL CONSENTIMIENTO** [] **NO DOY EL CONSENTIMIENTO**

Desde ya le agradezco su valiosa participación.

Nombre del padre de familia

Firma del padre de familia

Nombre de mi hijo(a) participante

Fecha:

Anexo B. Asentimiento informado a estudiantes

Yo, _____ estudiante del grado octavo del Instituto Santo Ángel de Bucaramanga, acepto participar voluntariamente en la investigación dirigida por el docente **ANA MARÍA CORREAL JURADO**. He sido informado(a) que el objetivo principal de este estudio es: **La construcción de una Comunidad Matemática en el aula como estrategia para potenciar el desarrollo de pensamiento funcional**

Me han indicado también que tendré que responder una prueba diagnóstica, participar en las sesiones del proyecto y finalmente contestar una entrevista semiestructurada.

Reconozco que la información que yo provea en el curso de esta investigación es estrictamente confidencial y no será usada para ningún otro propósito fuera de los de este estudio sin mi consentimiento. He sido informado de que puedo hacer preguntas sobre el proyecto en cualquier momento, sin que esto acarree perjuicio alguno para mi persona. De tener preguntas sobre mi participación en este estudio, puedo realizar contacto con quien lo dirige al correo **any.correal.jurado@gmail.com**

Firma del Participante

Fecha

Anexo C. Consentimiento participante

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA



CONSENTIMIENTO INFORMADO A PADRES DE FAMILIA

Yo Gerley Ivonne Arenas, identificado(a) con cédula de ciudadanía No. 63523854 de B/manga, representante legal de Lizeth Paola Carmona Aparicio, estudiante del grado octavo; he sido informado(a) sobre la participación de mi hijo(a) y/o acudido(a), en la investigación del docente **ANA MARÍA CORREAL JURADO**, de la Maestría en Pedagogía de la Universidad Industrial de Santander, bajo la dirección de la PhD **SOLANGE ROA FUENTES**. El objetivo de este estudio es: **La construcción de una Comunidad Matemática en el aula como estrategia para potenciar el desarrollo de pensamiento funcional.**

Si usted autoriza la participación del estudiante, a éste se le pedirá responder una prueba diagnóstica, participar en las sesiones del proyecto y responder a una encuesta semiestructurada; todo esto con el fin de transformar el proceso de aprendizaje del estudiante. Tenga en cuenta que las sesiones del proyecto serán grabadas para realizar un análisis del proceso; sin embargo, la información recolectada es confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación. Las respuestas serán codificadas usando un número de identificación y, por lo tanto, serán anónimas.

Si tiene alguna duda sobre este proyecto, puede hacer preguntas en cualquier momento.

Luego de haber sido informado(a) sobre las condiciones de participación del estudiante, entiendo que:

Anexo D. Asentamiento participante

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA



- Los resultados del proyecto de investigación no tendrán repercusiones en las calificaciones o actividades escolares.
- La participación del estudiante no generará ningún gasto, ni recibirá remuneración alguna por su participación.
- No habrá ninguna sanción en caso que no se autorice la participación del estudiante.
- Los videos o grabaciones de las sesiones de clase, serán utilizados únicamente con fines pedagógicos y como evidencia de la práctica educativa del docente.

Atendiendo a la normatividad vigente sobre consentimientos informados (Ley 1581 de 2012 y Decreto 1377 de 2012) y de forma consciente y voluntaria:

[X] DOY EL CONSENTIMIENTO [] NO DOY EL CONSENTIMIENTO

Desde ya le agradezco su valiosa participación.

Nombre del padre de familia

Gerley Arenas Doria.

Firma del padre de familia

Gerley Arenas A.

Nombre de mi hijo(a) participante

Lizeth Paola Carmona A.

Fecha:

20-10-2017

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA



ASENTIMIENTO INFORMADO A ESTUDIANTES

Yo, Jose Julian Santos Neira estudiante del grado octavo del Instituto Santo Ángel de Bucaramanga, acepto participar voluntariamente en la investigación dirigida por el docente **ANA MARÍA CORREAL JURADO**. He sido informado(a) que el objetivo principal de este estudio es: **La construcción de una Comunidad Matemática en el aula como estrategia para potenciar el desarrollo de pensamiento funcional**

Me han indicado también que tendré que responder una prueba diagnóstica, participar en las sesiones del proyecto y finalmente contestar una entrevista semiestructurada.

Reconozco que la información que yo provea en el curso de esta investigación es estrictamente confidencial y no será usada para ningún otro propósito fuera de los de este estudio sin mi consentimiento. He sido informado de que puedo hacer preguntas sobre el proyecto en cualquier momento, sin que esto acarree perjuicio alguno para mi persona. De tener preguntas sobre mi participación en este estudio, puedo realizar contacto con quien lo dirige al correo **any.correal.jurado@gmail.com**

Firma del Participante

Fecha

Julian Santos.

20-10-2017

Anexo E. Prueba Diagnostica



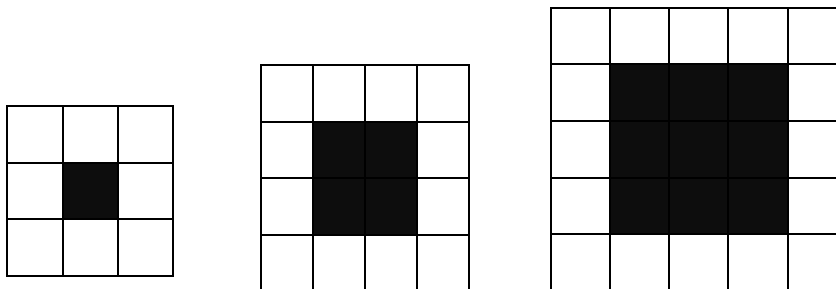
Prueba diagnostica	
Docente: Ana María Correal Jurado	Grado 8 3
Estudiante:	

Algunas instrucciones importantes:

Lea atentamente cada una de las situaciones que a continuación se plantean, escriba claramente los razonamientos que realice para resolver cada una de las preguntas aquí solicitadas, entre más detallada este esta información, más útil será para este estudio.

1. Charles vio anuncios de dos compañías de teléfonos móviles, la compañía keep in touch ofrece servicios con una tarifa básica de 20 dólares al mes, más 10 centavos por cada minuto. La chit-chat no tiene tarifa mensual, pero cobra 45 centavos de dólar por cada minuto. Ambas compañías dispone de tecnología que les permite precisar el tiempo empleado; no redondean por arriba al minuto ms próximo, como hacen muchos de sus competidores. Compárense las facturaciones de las dos compañías durante un mes.
 - a. ¿Cuánto cobraría cada compañía por 25 minutos?
 - b. ¿y por 100 minutos?
 - c. Realice una tabla comparativa, donde relaciones los valores encontrados en la información del problema.

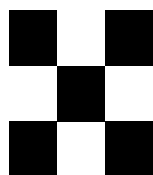
- d. ¿Cómo puedes calcular el costo de un número cualquiera de minutos, con el plan de keep in touch?
 - e. ¿Cómo puedes calcular el costo de un número cualquiera de minutos, con el plan de chit-chat?
 - f. ¿Qué compañía resulta más barata si usas el teléfono con poca frecuencia?
 - g. ¿y si lo usas frecuentemente?
 - h. Si no puedes gastar más de 50 dólares al mes, pero quieres hablar tantos minutos como sea posible, ¿Qué compañía deberás elegir?
 - i. ¿hay un número de minutos cuyo costo sea igual en ambas compañías?
2. Un conjunto de piscinas se va rodear con un borde de baldosas de cerámica. El borde tiene el ancho de una baldosa. La siguiente secuencia de figuras representa la primeras tres piscinas. Las baldosas sombreadas representan el área superficial del agua dentro de la piscina.



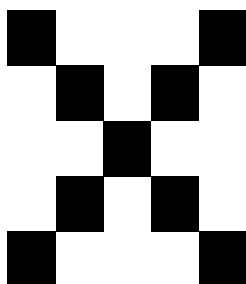
- a. Siguiendo la secuencia dibuja la piscina que sigue.
- b. Si la cantidad de agua de la piscina cubre 64 baldosas, ¿Cuántas baldosas necesitarías para rodear esa piscina? Escribe cómo llegas a la respuesta.
- c. Si tienes 28 baldosas para rodear una piscina, ¿Cuáles son las dimensiones dela piscina?
- d. Encuentra un método para hallar la cantidad de baldosas del borde de cualquier piscina.

e. Escribe cómo le explicarías a tu mejor amigo o amiga cómo calcular el área de cualquier piscina de la secuencia

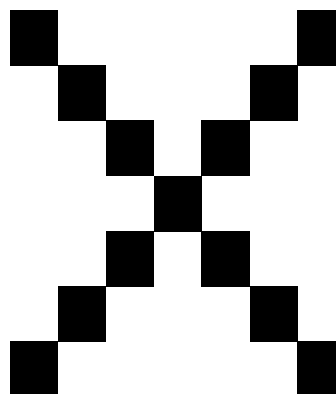
3. Cuadrados cruzados: Un cuadrado tiene cuatro esquinas o vértices. A continuación se presentan tres términos de una secuencia de figuras formadas por cuadrados.



Término 1



Término 2



Término 3

- Dibuja las figuras que aparecen en los términos 4 y 5 de la secuencia. Explique cómo encuentra dichas figuras.
- Si extendemos el patrón basado en las figuras anteriores de la secuencia, ¿Qué figura aparece en el término 10? Dibújala y explica cómo la encuentre.
- ¿Cuántos cuadrados tiene el término 5, 6 y 7? ¿Cuántos cuadrados tiene el término 25? Y ¿cuántos cuadrados tiene el término 100? Explica ampliamente cómo encuentras las respuestas.
- Escribe cómo le explicarías a la profesora Ana María cómo puede encontrar el número de cuadrados de cualquier término de la secuencia.

Anexo F. Sesión 1



Sesión 1	
Docente: Ana María Correal Jurado	Grado 8 3
Estudiante:	

Algunas instrucciones importantes:

Lea atentamente cada una de las situaciones que a continuación se plantean, escriba claramente los razonamientos que realice para resolver cada una de las preguntas aquí solicitadas, entre más detallada este esta información, más útil será para este estudio.

1. En febrero del 2000 el costo de enviar una carta por correo era 33 pesos por el primer gramo, y 22 pesos adicionales por cada gramo o fracción de esta hasta 13 gramos.
 - a) ¿Cuál es el valor de envío de una carta si se sabe esta pesa 5 gramos?
 - b) ¿Cuál es el valor de envío de una carta si se sabe esta pesa 7.2 gramos?
 - c) Elabora una tabla de valores para representar la situación
 - d) Si C es el costo en pesos de enviar una carta y P su peso en gramos, puedes encontrar una expresión que relacione estos dos valores.
 - e) Realiza una gráfica donde se relacione la información de esta situación

2. La banda del instituto Santo Ángel está organizando un concierto. La clase de octavo se encarga de los refrescos. Uno de los que va a servir es jugo de frutas. Un experto proporciono a los estudiantes 2 recetas que llevan soda y jugo de uva.

Receta A
3 copas de jugo de uvas
5 copas de soda.

Receta B
1 copas de jugo de uvas
4 copas de soda.

- a) Si se necesitan 10 copas de refresco ¿Cuántas copas de jugo de uvas se necesitan para cada receta?
- b) Si se necesitan 10 copas de refresco ¿Cuántas copas de soda se necesitan para cada receta?
- c) Si se necesitan 120 copas de refresco ¿Cuántas copas de jugo de uvas se necesitan para cada receta?
- d) Si se necesitan 120 copas de refresco ¿Cuántas copas de soda se necesitan para cada receta?
- e) Organiza la información de esta situación en una tabla de valores
- f) Puedes encontrar una expresión que me permita encontrar la cantidad de copas jugo de uvas para cualquier cantidad de refresco.
- g) Puedes encontrar una expresión que me permita encontrar la cantidad de copas de soda para cualquier cantidad de refresco.
- h) Realiza una gráfica donde se relacione la información de esta situación

Anexo G. Sesión 2

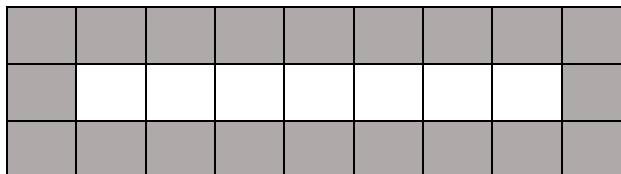
	INSTITUTO SANTO ANGEL Bucaramanga <i>"Todos en todo mejorando la calidad de vida"</i>	
---	---	---

Sesión 2	
Docente: Ana María Correal Jurado	Grado 8 3
Estudiante:	

Algunas instrucciones importantes:

Lea atentamente cada una de las situaciones que a continuación se plantean, escriba claramente los razonamientos que realice para resolver cada una de las preguntas aquí solicitadas, entre más detallada este esta información, más útil será para este estudio.

1. Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen.



El colegio contrata a una empresa para reforme los pasillo de las tres plantas del colegio. Te pedimos que ayudes a los albañiles a contestar algunas preguntas que necesitan responder para hacer este trabajo.

- a. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?
- b. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?
- c. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?
- d. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?
- e. Ahora hazlo de una forma diferente y explícalo aquí.
- f. Los albañiles de una empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas?
- g. En uno de los pasillos, por error los albañiles han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 20 baldosas grises, ¿cuántas baldosas blancas necesitan?
- h. En otro pasillo los albañiles también han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 56 baldosas grises, ¿cuántas baldosas blancas necesitan?

Anexo H. Sesión 3



INSTITUTO SANTO ANGEL
Bucaramanga
"Todos en todo mejorando la calidad de vida"



Sesión 3	
Docente: Ana María Correal Jurado	Grado 8 3
Estudiante:	

Algunas instrucciones importantes:

Lea atentamente cada una de las situaciones que a continuación se plantean, escriba claramente los razonamientos que realice para resolver cada una de las preguntas aquí solicitadas, entre más detallada este esta información, más útil será para este estudio.

Área -perímetro de un rectángulo.

Existen infinitos rectángulos de área 60 cm^2 y diferente perímetro cada uno. Completa la siguiente tabla:

Recuerde que el área de un rectángulo, es el producto de la media de la base por la altura, y el perímetro es la suma de la medida de sus lados.

Base	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30
Altura										

1. Haz la gráfica de la función anterior utilizando el eje de abscisas para representar la base de los rectángulos y el eje de ordenadas para las alturas.
2. Escribe la expresión algebraica de las alturas en función de las bases.

Anexo I. Sesión 4

	INSTITUTO SANTO ÁNGEL Bucaramanga <i>"Todos en todo mejorando la calidad de vida"</i>		
---	---	---	---

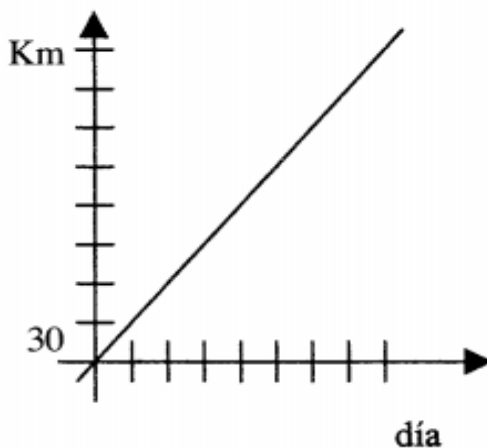
Sesión 4	
Docente: Ana María Correal Jurado	Grado 8 3
Estudiante:	

Algunas instrucciones importantes:

Lea atentamente cada una de las situaciones que a continuación se plantean, escriba claramente los razonamientos que realice para resolver cada una de las preguntas aquí solicitadas, entre más detallada este esta información, más útil será para este estudio.

El peregrino.

Un peregrino quiere cubrir la distancia de Astorga a Santiago de 240 km. La siguiente gráfica ilustra la progresión después de t días:



1. Describe la situación con tus propias palabras.
2. ¿Qué distancia ha recorrido durante el primer día y cuánto le falta para llegar a Santiago?
3. ¿Qué distancia ha recorrido durante el segundo día y cuánto le falta para llegar a Santiago?
4. Construye una tabla que represente la distancia recorrida cada día.
5. ¿Cuánto habrá recorrido después de t días? ¿Cuánto le queda para llegar a su destino?
6. Haz un gráfico de la distancia que le queda por recorrer en función de los días.