La Comprensión de la Derivada como Razón de Cambio: Habilidades Cognitivas Vinculadas al Estudio Covariacional

César Augusto Rodríguez Plata

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Educación Matemática

Director:

Jorge Enrique Fiallo Leal

Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Codirectora:

Edith Johanna Mendoza Higuera

Magíster en Ciencias Especialidad Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2020

Dedicatoria

A Edel, mi madre, quien, a pesar de las dificultades de la vida, me enseñó a ser una buena persona y hoy es mi principal motivo para seguir adelante.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por permitirme cumplir este objetivo de mi vida.

A mis padres, Edel y César, por su apoyo incondicional en todo momento.

A mi hermana y demás integrantes de mi familia, por el apoyo que siempre me brindan.

Al Dr. Jorge Enrique Fiallo Leal, mi director de tesis, quien, con su experiencia, motivación, paciencia y apoyo, me ayudó a continuar con mis estudios.

A la Mg. Edith Johanna Mendoza Higuera, mi codirectora; gracias a sus aportes, a su apoyo, su dedicación, a sus consejos y paciencia, fue posible lograr esta meta.

A mis evaluadores, Mg. Luis Ángel Pérez Fernández y Dr. Jhony Alexander Villa Ochoa, por los aportes realizados, que enriquecieron mi proceso de aprendizaje como investigador.

A la Escuela de Matemáticas de la UIS y al grupo de investigación EDUMAT-UIS, por el apoyo brindado para asistir a eventos académicos y así enriquecer mi aprendizaje como investigador de la educación matemática.

A los profesores y a mis compañeros de la Maestría de la Escuela de Matemáticas por sus críticas constructivas.

A Felipe, Guillermo, Cristhian, la selección de fútbol sala UIS y todas las personas que estuvieron, en algún momento, para escucharme y alentarme a continuar con mis estudios.

A todos ustedes, ¡Gracias!

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Lista de Apéndices

Resumen

Título: La comprensión de la derivada como razón de cambio: habilidades cognitivas vinculadas al estudio covariacional*

Autor: César Augusto Rodríguez Plata**

Palabras clave: derivada, habilidades cognitivas, razonamiento covariacional, procesos matemáticos, entrevistas basadas en tareas.

Resumen:

Literatura referente a la enseñanza y aprendizaje de la derivada en educación matemática reporta que los estudiantes presentan dificultades cuando resuelven problemas de cambio y variación; esta experiencia muestra que algunos estudiantes que asisten al curso de cálculo diferencial de la Universidad Industrial de Santander no son ajenos a esta problemática. Para atender a esta problemática, se plantea como objetivo: caracterizar las habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos del razonamiento covariacional, para la comprensión de la derivada como razón de cambio en estudiantes de cálculo diferencial.

Con base en las perspectivas teóricas del razonamiento covariacional, el estudio dinámico del cambio y la variación y de la metodología de entrevistas basadas en tareas, se estructura el diseño e implementación de cuatro actividades que direccionan la solución a una situación problema que involucra la derivada.

A partir de los datos recogidos y su respectivo análisis, se caracterizan las habilidades cognitivas planteadas a priori. Se destaca la relación entre las habilidades y se describen mediante sus diferentes representaciones. En este sentido, podemos afirmar, en general, que las habilidades y los correspondientes descriptores asociados a los procesos matemáticos deben ser vistos como complementarios y los comportamientos que se exponen aluden en torno a la representación física de la derivada como velocidad.

Finalmente, con los resultados encontrados en esta investigación se espera contribuir a la teorización de los aprendizajes en los estudiantes a través de dicho curso y, especialmente, aportar al solventar la problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo.

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal

Abstract

Title: The comprehension of the derivative as ratio of change: cognitive abilities linked to the covariational study*

Autor: César Augusto Rodríguez Plata**

Key words: derivative, cognitive abilities, covariational reasoning, mathematical processes, interviews based on tasks.

Summary:

The literature regarding the teaching and learning of the derivative in mathematical education reports that students present difficulties when they solve problems about change and variation, this experience shows that some of the students who attend the differential calculus course of the Industrial University of Santander are not alienated from this issue. In order to meet this issue, one objective was set: to characterize the cognitive abilities associated to the mathematical processes of the covariational reasoning for the comprehension of the derivative as the ratio of change in students of differential calculus.

Based on the theoretical perspectives of the Covariational Reasoning, the dynamic study of change and variation, and the methodology of task-based interviews, it was structured the design and implementation of four activities that address the solution of a problematic situation that involves the derivative.

From the data collected and its corresponding analysis, the cognitive abilities stated a priori were characterized. It is highlighted the relations amongst the abilities and they are described through different representations. In this way, we can assert that, in general, the abilities and the corresponding descriptors associated to the mathematical processes should be seen as complementary and the behaviors that are exposed refer to the physical representation of the derivative as the speed.

Finally, with the results found in this research it is expected to contribute to the theorization of the learning processes of the students through the previously mentioned course, and specially to contribute to solve the problem of teaching and learning of calculus.

---

* Degree work

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. PhD. Jorge Enrique Fiallo Leal

Introducción

Según el Ministerio de Educación Nacional, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se hace fundamental el uso de diversos procesos generales, los cuales permiten ser matemáticamente competente: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar y formular; comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos (MEN, 2006). Del mismo modo, el MEN argumenta que, para alcanzar tal competencia, se requiere de ambientes de aprendizaje que involucren situaciones problema, significativas y comprensivas, que permitan el avance a niveles de competencia más complejos. Complementariamente, se debe entender como competencia al conjunto de conocimientos, actitudes, comportamientos, compresiones, disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras relacionadas entre sí para obtener un desempeño positivo y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores.

Basados en las ideas anteriores, Fiallo y Parada (2018) plantean que el estudio del cambio y la variación implica estimular el desarrollo de habilidades cognitivas asociadas a procesos matemáticos, en los que se explore y se resuelvan situaciones de variación con la ayuda de herramientas computacionales. Para el estudio del cambio y la variación, es esencial poder relacionar y cuantificar los atributos en él. Por lo tanto, la enseñanza y aprendizaje de la derivada es indispensable, ya que, con tal objeto matemático, es posible cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación, la derivada indica cómo y cuánto se mueve un objeto es un instante de tiempo.

La presente investigación está orientada a documentar el fenómeno relacionado con las habilidades cognitivas que poseen algunos estudiantes para sustentar la comprensión en la definición de la derivada en un punto. A partir del trabajo realizado por tres estudiantes de primer nivel universitario, se realiza una descripción y un análisis sobre los procesos matemáticos, en el que se indaga por las habilidades cognitivas empleadas por los mismos para resolver una situación problema. Esta situación se presenta a través del diseño y desarrollo de cuatro tareas basadas en las ideas de cambio y variación. Se asume un enfoque de investigación cualitativo, con un análisis de tipo descriptivo e interpretativo, basados en los trabajos de Marilyn Carlson, Jorge E. Fiallo, Sandra E. Parada y colaboradores.

Así, este trabajo se sitúa en un contexto cognitivo, y estudia de manera general la relación entre los diferentes procesos matemáticos, el descubrimiento y la activación de las habilidades cognitivas en torno a la definición de la derivada en un punto; estudio que, sin ser exhaustivo, incluye aspectos sobre la comunicación, los procedimientos, la representación y el razonamiento y demostración de la derivada como razón de cambio.

El documento está organizado de la siguiente manera, en el primer capítulo se da a conocer el ámbito donde se plantea la pregunta y objetivo, los antecedentes y la delimitación del problema de investigación. En el segundo capítulo, se presentan los referentes teóricos que constituyen la fundamentación base para la descripción e interpretación de los datos. En el tercer capítulo, se precisa la metodología y la forma como se usa lo expresado en la etapa anterior. En el cuarto capítulo, se presentan los resultados del análisis de los datos con relación a la caracterización de las habilidades cognitivas activadas por los estudiantes seleccionados. En el quinto y último capítulo se dan las conclusiones del estudio. Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas y los anexos.

1. Planteamiento de la investigación

En la primera sección de este capítulo se describe la problemática actual que contextualiza y permite plantear explícitamente la pregunta de investigación; en la segunda, se presenta de manera concisa los antecedentes sobre el tema específico; y en la tercera y última, se presenta una delimitación del problema.

1.1. Ámbito de investigación

El cálculo es reconocido porque permite encontrar las leyes que cuantifican el cambio, medir y predecir cualquier fenómeno y las variaciones que lo producen. La derivada se destaca por la relación entre la razón de cambio y el límite del cociente incremental (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008), la cual permite cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica (Vrancken y Engler, 2014).

Ahora bien, investigadores dentro de la línea de la enseñanza y aprendizaje del cálculo, han creado diferentes conceptos íntimamente relacionados al pensamiento variacional para tratar la problemática que relaciona la comprensión de la derivada. Artigue (1995) afirma que, si bien se puede enseñar a los estudiantes a aplicar reglas de derivadas y a resolver problemas estándar, se encuentran dificultades para hacerlos adquirir una comprensión propia de este concepto. Dificultades como: la coordinación entre las diferentes formas de representación de la derivada (Habre y Abboud, 2006), el entendimiento de aspectos variacionales como la velocidad, rapidez o aceleración (Dolores, Chi, Canul, Cantú y Pastor, 2009) o el predominio de procedimientos basados en manipulaciones algebraicas (Cantoral, 2013) han sido reportadas en las últimas décadas.

Con respecto a este último, Cantoral (2013) indica que se requiere de una verdadera ruptura con las formas algebraicas de tratamiento de este objeto matemático para dar lugar a las ideas que sustentan su definición: el cambio y la variación. Pero para lograr tal ruptura se hace necesario conocer los aspectos que inciden en la comprensión de una definición que representa un objeto matemático, como el de la derivada (Figura 1).

Figura 1

Definición de la derivada[1]

La derivada de una función $y = f(x)$ en x está dada por

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siempre que el límite exista.

Azcárate y Camacho (2000) afirman que saberse de memoria la definición que representa un objeto matemático no garantiza comprender su significado; de hecho, comprender requiere asociar ciertos significados a la palabra que designa el concepto formado, en palabras de Tall y Vinner, un esquema conceptual. Según estos autores, el esquema conceptual es entendido como:

> La estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto y que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y procesos asociados al concepto; se construye a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo y va cambiando según el individuo madura y halla nuevos estímulos (citado en Azcárate y Camacho, 2003, p.137).

Para lo anterior, Artigue (2003) asevera que los primeros resultados sobre el esquema conceptual de los estudiantes inician en investigaciones en áreas específicas como el cálculo. Tales

[1] Cálculo de una variable Transcendentes Tempranas (Zill y Wright, 2011, p. 122)

estudios tuvieron la finalidad de profundizar sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal, área que, para entonces, era percibida como uno de los orígenes del fracaso a nivel universitario.

Dificultades, similares a las anteriores, han sido evidenciadas por el investigador de la Universidad Industrial de Santander (UIS) encargado de este proyecto y, por tanto, se lleva a cabo este estudio con la intención de impactar positivamente en la enseñanza y aprendizaje del concepto de la derivada en estudiantes a nivel universitario.

En diferentes instituciones de educación superior, como la UIS, la estructura temática de los primeros cursos de cálculo, en los que se involucra la derivada, suele tener aspectos invariantes, el más destacable: el ordenamiento temático.

> Se inicia con el estudio de los conjuntos de números, se sigue de una introducción de las funciones y sus límites, se analiza la continuidad como una propiedad puntual y global de las funciones y termina con la derivada y la integral (Cantoral, 2000, p. 8).

Dicha organización no es ajena a lo que se plantea actualmente en la UIS para el curso de cálculo I, referido a los temas del cálculo diferencial. Hasta el momento, el programa para el curso de cálculo I es orientado por el libro de Cálculo de una variable Transcendentes Tempranas de Zill y Wright (2011). El programa es organizado por los capítulos de Funciones, Límite de una función y finalmente La derivada, con sus respectivas secciones. Para cada sesión de clase se propone una sección del libro con algunos ejercicios sugeridos. Ímaz y Moreno (2010) señalan que este tipo de libros para el cálculo diferencial se han dedicado a presentar demostraciones a los teoremas más importantes, pero no se realiza discusión sobre la comprensión de los conceptos que abarca y mucho menos sobre el proceso de demostración. Además, según estos autores, en estos libros se hace el intento por explicar cada regla, lo que da entender que el único objetivo es deducir la regla de elaboración para practicar con ejercicios.

A partir de las vivencias del investigador, lo indicado en el párrafo anterior no ha sido indiferente para lo que sucede en algunas aulas de la UIS, para lo cual es posible relacionarse con lo que Cuevas, Rodríguez y Gonzáles (2014) mencionan como la enseñanza operativa:

> Este tipo de enseñanza se plantean esquemas y modelos algorítmicos de resolución en donde se busca que el estudiante reproduzca los patrones operativos de acuerdo con los esquemas en que fue ilustrado, cabe anotar que en esta exposición el significado de los conceptos queda ausente y la aplicación de la derivada se reduce a transformar expresiones algebraicas mediante reglas de derivada (p. 158).

De esta manera, si se logra que los estudiantes deriven, es probable que no sean capaces de darle sentido al proceso que realizan. En este orden de ideas, Dolores (citado en Villa, 2011) expresa que los estudiantes difícilmente logran reconocer las ideas asociadas a la derivada en la resolución de problemas sobre el cambio y la variación, a pesar de que en los problemas de este tipo se encuentra la esencia del concepto.

Debido a la pertinencia con respecto a la visión a acerca de la enseñanza del cálculo que se presenta en este trabajo de investigación, se ha elegido la noción de razonamiento covariacional, desarrollado por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2003a). La concepción de dichos autores se encuentra acorde a lo planteado por Vasco (2006) para la reforma curricular en Colombia, en donde se describe como:

> El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables

internas de tal manera que covarien en forma semejante a los patrones de covariación de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad (p. 139).

El razonamiento covariacional caracterizado por las actividades cognitivas relacionadas a la coordinación de magnitudes variables, permite catalogar comportamientos visibles en los estudiantes cuando estos se involucran en situaciones de cambio y variación (Carlson et al., 2003a). Actividades, desde la identificación del cambio entre magnitudes hasta la definición de la razón de cambio instantánea, son consideradas para conceptualizar la derivada en el presente trabajo de investigación.

Por otra parte, es pertinente reconocer la importancia de las representaciones en el aprendizaje del cálculo (Hitt, 2003). Para desarrollar el pensamiento variacional se debe tener en cuenta la inclusión de resolución de problemas que promuevan el análisis de situaciones de cambio y variación, lo anterior a través de diferentes sistemas de representación como el numérico, simbólico, gráfico y verbal: ya que la calidad de la comprensión del fenómeno de variación dependerá de las relaciones que el estudiante pueda establecer entre las representaciones (Fiallo y Parada, 2014).

A lo que el Ministerio de Educación Nacional complementa: “Lo anterior es posible mediante la presentación de simulaciones a los estudiantes o mediante la petición de producir una simulación a partir de las representaciones” (MEN, 2004). Para el logro de estas metas, se incorpora el uso de tecnologías digitales en diferentes proyectos o programas académicos, dando como resultados contribuciones sobre cómo y cuándo las tecnologías digitales permiten aproximarse significativamente a los objetos matemáticos del cálculo. Autores como Hitt (2003), Tall (2009), Geiger, Forgasz, Tan, Calder y Hill (2011), Moreno (2014) Cuevas y Pluvinage, Kaput, Blanton y Moreno, Hitt, Machin y Rivero, Guin y Trouche (citado en Parada, Conde y

Fiallo, 2016), entre muchos otros, preponderan la necesidad de incorporar las tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de las nociones del cálculo y del álgebra, pues le aportan herramientas para visualizar, explorar y conjeturar dinámicamente los objetos matemáticos.

Con respecto a lo anterior, Fiallo y Parada (2018) plantearon un curso-laboratorio precálculo, con el objetivo de aportar a la solución de la problemática expuesta en la UIS. El curso está fundamentado en elementos teóricos y metodológicos relacionados al pensamiento variacional en la que incluyen las tecnologías digitales, esto con el objetivo de favorecer en los estudiantes el desarrollo de habilidades cognitivas asociadas a los procesos de comunicar, representar, elaborar, comparar y ejercitar procedimientos, razonar y demostrar. Cabe aclarar que en su propuesta, el proceso de formulación, tratamiento y resolución de problemas es asumido como el proceso central, para el cual los demás son usados como vehículo de apoyo para la resolución los mismos, que involucran el cambio, la aproximación y la tendencia.

De las ideas referidas anteriormente, surgen algunos interrogantes:

- ¿Qué comportamientos en los estudiantes son propios en la comprensión de la derivada?
- ¿Qué actividades, acciones o habilidades, a nivel cognitivo, surgen en los estudiantes para la comprensión de la derivada como razón de cambio?
- ¿Qué criterios permiten caracterizar tales actividades, acciones o habilidades?

Si bien el presente estudio de investigación no se centra en las tecnologías digitales, es pertinente incluirlas, para así darle continuidad a las ideas que han sido desarrolladas en el curso de precálculo de la UIS. Asimismo, se plantea el diseño e implementación de talleres para el curso de cálculo I, con la intención de determinar criterios que puedan ser usados en la comprensión de la derivada como razón de cambio en las aulas universitarias.

Este estudio está orientado por la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Cuáles son las habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos del razonamiento covariacional, para la comprensión de la derivada como razón de cambio en estudiantes de cálculo diferencial?

La cual se pretende responder, a partir el siguiente objetivo de investigación:

- Caracterizar las habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos del razonamiento covariacional, para la comprensión de la derivada como razón de cambio en estudiantes de cálculo diferencial.

1.2. Antecedentes

Debido a que para la presente investigación se ha elegido el razonamiento covariacional desarrollado por Carlson et al. (2003a) para la conceptualización de la derivada, es importante considerar las ideas que se plantean actualmente en torno a los elementos conceptuales que lo sustentan.

En Thompson y Carlson (2017) se exponen y se analizan los conceptos de variación, covariación y función como formas fundamentales de pensar matemáticamente. Los autores establecen una relación entre las ideas de variación y covariación de la siguiente manera:

1. Se analiza el razonamiento variacional y covariacional de los estudiantes de forma independientemente.

2. Se analiza sobre cómo los estudiantes coordinan las imágenes de los valores de las magnitudes variables, enfocándose en su forma de razonar de manera variacional y en las formas en que construyen los objetos multiplicativos de dichos valores.

Para entender estas ideas, los autores aclaran que la variación de una cantidad proviene de una persona que piensa, concreta o abstractamente, en una sola cantidad cuyo valor varía (Thompson y Carlson, 2017). En el caso de la covariación, según la Teoría de Thompson, una persona razona de forma covariacional cuando tiene en su mente una imagen sostenida de dos cantidades que varían simultáneamente; lo anterior implica el acoplamiento de las dos cantidades, de modo que se forma un objeto multiplicativo de los dos. Una persona forma un objeto multiplicativo a partir de dos objetos, cuando une mentalmente sus atributos para crear un nuevo objeto conceptual, que es, simultáneamente, uno y el otro (Thompson y Carlson, 2017).

Respecto a estas ideas, Johnson (2015) documenta, años atrás, acerca de cómo un estudiante cambia del razonamiento variacional al covariacional. En su estudio, resalta que un estudiante puede estar involucrado en el razonamiento variacional cuando interpreta situaciones que involucran dos cantidades que covarían. Por tanto, el autor recomienda que se deben diseñar tareas que incorporen: representaciones dinámicas que puedan brindar oportunidades a los estudiantes para imaginar dos cantidades que varían, incluir cantidades no temporales de los mismos espacios de medida y propiciar la interacción entre estudiantes que poseen razonamiento variacional con los del covariacional, para ayudar a entender y darle sentido a las situaciones que se proponen en la tarea.

Con respecto al aprendizaje del cálculo, Thompson y Carlson (2017) mencionan que el cuerpo de ideas que componen el cálculo, incluidas las ecuaciones diferenciales, pueden enmarcarse en dos problemas primordiales que tienen como fundamento el razonamiento covariacional:

1. Se sabe qué tan rápido está cambiando una cantidad en cada momento para saber cuánto está cambiando en cada momento.
2. Se sabe cuánta cantidad hay en cada momento para saber qué tan rápido está cambiando en todo momento.

Estos problemas fundamentales están vinculados con las ideas de razón de cambio, la acumulación y la relación funcional, las cuales el razonamiento covariacional es fundamental para todos ellos (Thompson y Carlson, 2017).

El marco de Carlson et al. (2003a) elaboró la conjetura de que el razonamiento covariacional puede desarrollarse en niveles determinados por acciones mentales que se vuelven más sofisticadas con respecto a la naturaleza de la coordinación de los valores de dos magnitudes variables. Su marco amplió el significado de covariación para incluir la razón de cambio promedio e instantánea de una cantidad respecto de otra, ya que los valores de las dos cantidades varían simultáneamente en este proceso (Thompson y Carlson, 2017). El interés de Carlson et al. (2003a) por incluir la razón de cambio en su marco de covariación se debe al querer comprender cómo los estudiantes la entienden en intervalos sucesivos del dominio de una función; de igual manera, los autores se interesaron por describir cómo un estudiante puede justificar el cambio de la concavidad de un gráfico y la construcción de una curva suave. Así, estos autores describieron que los estudiantes podían anticipar que para cualquier intervalo de cambio fijo se podrían considerar refinamientos de la razón de cambio promedio de la función en intervalos cada vez más pequeños. Posteriormente, el estudio de Engelke (2007) corroboró y extendió este hallazgo a problemas relacionados con las razones de cambio.

Carlson y colaboradores han investigado sobre el desarrollo del razonamiento covariacional. En sus estudios se encuentra el artículo “Integrating a Models and Modeling Perspective With Existing Research and Practice” (Carlson, Larsen y Lesh, 2003b), en el que integran la perspectiva de modelado para diseñar o modificar tareas con el fin de incorporar los seis principios generadores de modelos de Lesh y su equipo de trabajo. Entre dichos principios se encuentran el de la realidad, la construcción de un modelo, la autoevaluación, la documentación, la construcción, la generalización de construcciones y, por último, el de simplicidad. Como seguimiento a este estudio, a lo largo de los últimos años han desarrollado actividades generadoras de modelos para promover en los estudiantes la comprensión de los principales hilos conceptuales del cálculo inicial (Carlson et al., 2003b).

A partir del resultado de estos diseños, Carlson, Madison y West (2015) establecen habilidades fundamentales de razonamiento y comprensión para el aprendizaje del cálculo a través de la taxonomía CCR (por sus siglas en inglés, Calculus Concept Readiness, que significa preparación de los conceptos del cálculo); entre las habilidades de comprensión se encuentran el representar e interpretar los patrones de crecimiento y decrecimiento de las funciones, comprender el uso de conceptos como cantidad, variable, razón de cambio promedio, composición y transformación de funciones, función inversa y las ideas centrales de la trigonometría. Entre las habilidades de razonamiento se tiene el proporcional, el concepto de función y el razonamiento covariacional. Para este último, Thompson y Carlson (2017) proponen que las formas en que el razonamiento covariacional se desarrolla en el pensamiento de los estudiantes son un problema teórico principal que requiere mayor investigación desde muchas perspectivas; por tal motivo, es pertinente el desarrollo de la presente investigación.

Con respecto a las habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos en la resolución de problemas que involucran el cambio y la variación, se han realizado estudios en la UIS, en los que se analizan los comportamientos de los estudiantes durante la implementación y desarrollo de los talleres que hacen parte del curso de precálculo.

Hasta el momento se cuenta con investigaciones que han centrado su atención en reportar descriptores sobre el pensamiento variacional de los estudiantes de manera general. Cada trabajo ha tenido su enfoque hacia uno de los procesos matemáticos en el que, de forma directa o indirecta, han permitido obtener información sobre las habilidades cognitivas que pueden tener o activar los estudiantes, cuando se enfrentan a situaciones problema en las que conoce, aplica e interactúa con los objetos matemáticos propios del cálculo. Entre los trabajos sobre el proceso de comunicación están: los de Suárez y Rojas (2013) y Gómez (2018); sobre la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos están: Barajas (2015) y Santamaría (2017); sobre el proceso de representación: Rueda (2016) y acerca de los procesos de argumentación y demostración: López (2017). Ya que estos trabajos hacen parte de la fundamentación teórica del presente estudio, sus hallazgos serán expuestos en el siguiente capítulo.

Con los resultados presentados en dichas investigaciones y la implementación del curso de precálculo, se ha escrito el libro Estudio dinámico del cambio y la variación por Fiallo y Parada (2018). A través de los estudios locales y de las experiencias vividas por los profesores que han impartido el curso, los autores narran y explican, no solo los elementos teóricos y metodológicos del curso, sino también los aspectos a considerar para favorecer las habilidades cognitivas de los estudiantes, convirtiéndose así en un referente para la práctica docente y futuras investigaciones.

En relación con el objeto matemático en cuestión, hay algunos trabajos de investigación que realizan propuestas con o sin el apoyo de tecnologías digitales para la enseñanza y aprendizaje de la derivada como razón de cambio. Desde una perspectiva del pensamiento variacional se encuentran los realizados por García y Dolores (2011); Villa (2011); Cuevas (2014) y Vrancken y Engler (2014), en los que indican que el proceso de aprendizaje depende de exhibir diferentes representaciones de la derivada y de propiciar el trabajo activo en los estudiantes, con el fin de fomentar la comprensión de la derivada como razón de cambio. Con respecto a esto, entre sus hallazgos, Harel, Selden y Selden (2006) dejan en evidencia cómo las distintas representaciones de la derivada se aprenden de forma distinta. Por lo tanto, estos autores manifiestan la importancia de comprender la derivada mediante observaciones entre las definiciones equivalentes y sus diferentes representaciones (citado en Rojas, 2019).

Entre las investigaciones que utilizan elementos conceptuales de la covariación se encuentran las realizadas por Dolores y Salgado (2009); Villa-Ochoa (2012), Ramos (2014) y Rueda y Parada (2016) los cuales proponen realizar cuestionamientos a los estudiantes sobre: ¿qué cambia?, ¿cómo cambia?, ¿cuánto cambia?, ¿a qué razón cambia? y ¿cómo se comporta globalmente eso que cambia?, en las situaciones problema que involucra la derivada como razón de cambio. Con los anteriores trabajos fue posible tener un acercamiento inicial sobre algunos comportamientos que los estudiantes manifiestan al aprender la derivada como razón de cambio.

1.3. Delimitación del problema

Esta investigación pretende describir lo relacionado a las habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos del cambio y la variación y explicitar elementos de análisis sobre dichas habilidades. Se parte de que la verbalización sobre lo que se piensa proporciona información, no solo desde lo escrito, sino también a partir de la interacción con otros. Como opción metodológica se trabaja la entrevista estructurada basada en tareas, realizada en un pequeño grupo de estudiantes de primer nivel universitario.

El trabajo basado en tareas para el pequeño grupo permite una mayor interacción, lo cual posibilita identificar las interpretaciones realizadas sobre los objetos matemáticos involucrados en las producciones que dan respuesta a la tarea. Además, con este tipo de trabajo se hace factible reconocer algunas ideas que sustentan o no la activación de las habilidades cognitivas y la relación entre estas.

Según Goldin (2000), en el diseño de investigación, basado en estas ideas, se hace necesario distinguir lo que está controlado parcial o totalmente de lo que no lo está; por ejemplo, se realiza un control sobre las tareas, sobre las preguntas y sugerencias de la entrevista, el lugar y el tiempo destinado, pero no siempre es posible controlar la comprensión de los estudiantes, los cuales podrían tener efectos significativos en la indagación. Por otra parte, este autor afirma que se debe diferenciar lo que se observa de lo que se infiere.

2. Fundamentación teórica

El análisis de las producciones de los estudiantes reportado en esta investigación se realiza desde dos propuestas teóricas, con elementos conceptuales diferenciados entre sí, pero con un aspecto en común que los articula: las operaciones mentales que una persona realiza ante tareas que involucran el cambio entre magnitudes. Por una parte, la noción de razonamiento covariacional de Carlson et al. (2003a) permite realizar designaciones que posibilitan distinguir y describir el objeto matemático de estudio. A su vez, la propuesta del Estudio dinámico del cambio y la variación de Fiallo y Parada (2018), es utilizada para describir y explicar las producciones de los estudiantes, en la que no solo se reconocen hechos cognitivos, sino también la relación e interacción entre ellos. Para estos últimos autores, el estudio de la variación implica favorecer el desarrollo de los procesos matemáticos en lo que se exploren y se resuelvan situaciones de variación.

En la primera sección, se realiza una presentación sobre los conceptos a manera general de la fundamentación teórica asumida para esta investigación: el razonamiento covariacional y los procesos matemáticos en el estudio del cambio y la variación. En las dos siguientes secciones de este capítulo se presenta la descripción de cada uno de los enfoques mencionados, en la que se resaltan, los conceptos que fueron seleccionados para el desarrollo de la investigación.

2.1. Perspectiva teórica general

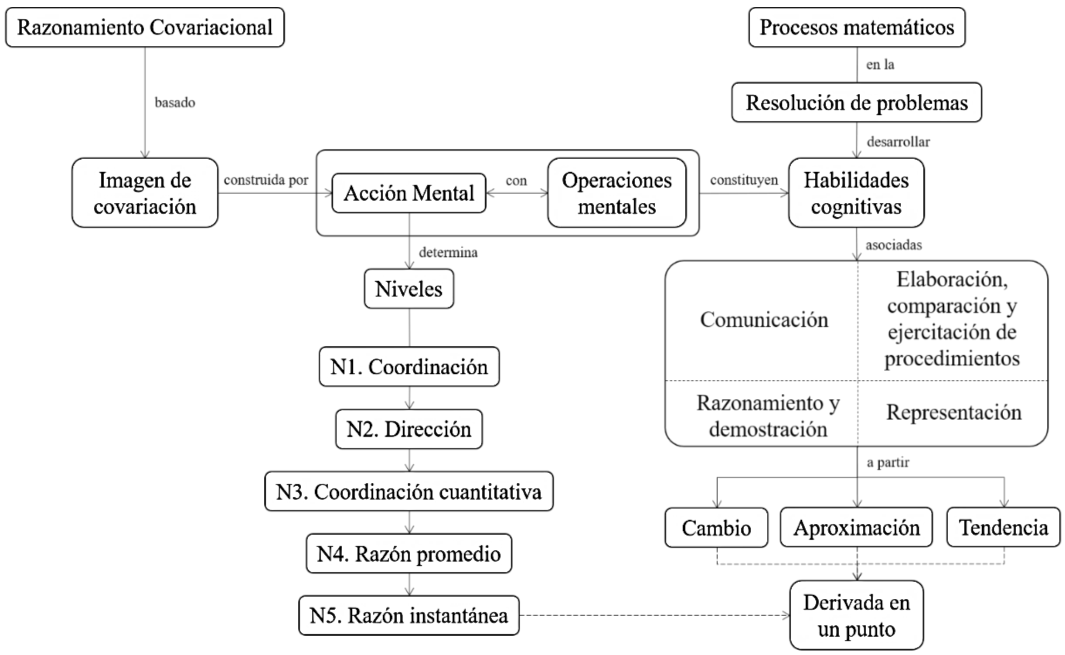
El análisis de las producciones de los estudiantes, las cuales serán llamadas expresiones externas (escritas o verbales), es orientado por la identificación de las operaciones mentales que las producen. Particularmente, en aquellas operaciones mentales que una persona usa para la solución de una tarea que involucra la derivada como razón de cambio. Por ende, se necesita activar acciones mentales que permitan movilizar operaciones en la mente del estudiante, con el fin de usar conceptos relacionados al cambio entre magnitudes. Si las acciones mentales se manifiestan con operaciones mentales específicas, se propone que dará como resultado la activación de habilidades cognitivas, las cuales pueden desarrollarse con la práctica.

De acuerdo con lo anterior, se articulan conceptos teóricos que permitan inferir sobre el pensamiento del estudiante, y por consiguiente caracterizar las habilidades cognitivas identificadas en la comprensión de la derivada como razón de cambio. Para explicar este hecho, se han seleccionado las acciones mentales del razonamiento covariacional (Carlson et al., 2003a) y las habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos del cambio y la variación (Fiallo y Parada, 2018), los cuales direccionarán la comprensión de la derivada en un punto como razón de cambio instantánea.

La articulación entre el razonamiento covariacional y las habilidades cognitivas es posible por lo cognitivo de sus constructos teóricos y la relación explícita con el pensamiento variacional. La figura 2 muestra la conexión entre los constructos teóricos seleccionados:

Figura 2

Fundamentación teórica



Si el estudiante realiza cuestionamientos para dar solución a una situación problema que implique la variación entre dos magnitudes, él activa en su mente acciones mentales relacionadas con la coordinación de sus cantidades que varían (Carlson et al., 2003a). Dichas acciones al ser organizadas de modo secuencial (niveles del razonamiento covariacional) con operaciones mentales específicas, tales que, con la práctica y la experiencia, es posible aceptar que da paso a diversas habilidades cognitivas asociadas a procesos matemáticos, las cuales pueden ser usadas en situaciones problema donde la derivada hace parte de la solución. Para entender las ideas anteriores, en las siguientes secciones, de manera particular, se describen los conceptos que las sustentan.

2.2. Razonamiento covariacional

> "A partir de una posición vertical contra una pared, desde su parte inferior, una escalera se separa de la pared a una razón constante. Describa la velocidad de la parte superior de la escalera a mediada que ésta se desliza hacia abajo sobre la pared. Justifique su afirmación" (Carlson et al., 2003, p. 145).

El “problema de la escalera” es una situación que implica la variación entre dos magnitudes, la distancia vertical y el tiempo. Es una situación en la que se tiene que “imaginar” el deslizamiento de la escalera y notar que, a medida que el tiempo transcurre, la distancia vertical cambia. Para describir y justificar de manera aceptable el comportamiento de la velocidad (representación física de la derivada), inicialmente, hay que relacionar y cuantificar los cambios de la distancia vertical con los cambios en el tiempo, a medida que se desliza la escalera a razón constante. Posteriormente, se debe plantear y analizar las razones de cambio promedio entre los incrementos (cantidad de cambio) de la distancia vertical y el tiempo, quienes dan cuenta de la velocidad de la parte superior.

Para apreciar y distinguir estos cambios, se necesitan comportamientos consientes de la coordinación y la relación que poseen las cantidades de las magnitudes que varían en la situación; es así como se describe el razonamiento covariacional. En palabras de los autores se entiende como razonamiento covariacional a “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (Carlson et al., 2003a, p. 124).

Con respecto a lo anterior, los autores proponen un marco conceptual de covariación como herramienta analítica con la cual evaluar el pensamiento covariacional de los estudiantes, a través de un grupo de acciones mentales asignadas a cinco niveles.

2.2.1. Acción mental

Las acciones mentales que considera el marco conceptual de Carlson et al. (2003a) son descritas y fundamentadas, principalmente, en la destreza de coordinar dos variables. Las acciones mentales determinan la construcción de imágenes de covariación. El constructo de este tipo de imagen está basado en la perspectiva de Thompson, en la que lo establece como “dinámico, que se origina en acciones corporales y movimientos de la atención, y como fuente y el vehículo de operaciones mentales" (citado en Carlson et al., 2003a, p. 124). Por tanto, los autores resaltan que, a medida que la imagen de covariación se desarrolla en la persona, sustenta un razonamiento covariacional más sofisticado.

Carlson y sus colaboradores consideran estas acciones mentales como evolutivas, y conjeturan y muestran en sus estudios que es posible desarrollarlas (Carlson et al., 2003a). Debido a este hecho, estructuran niveles de razonamiento covariacional y las acciones mentales que sustentan cada uno de estos. Estas últimas, han sido seleccionadas para ser identificadas en el análisis de las expresiones externas de los estudiantes en el desarrollo de la presente investigación. Cabe aclarar, que dar evidencias del desarrollo de estos niveles no es un objetivo principal de esta investigación, pero se admite que hay una contribución de carácter experimental que sustenta el desarrollo de estos.

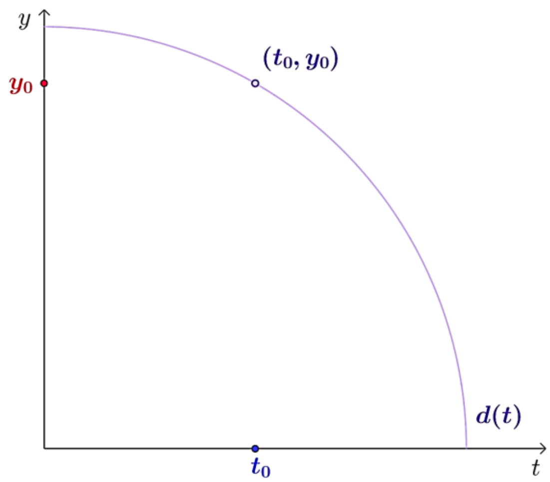
Para exponer los niveles del razonamiento covariacional y describir, principalmente, las acciones mentales que sustentan cada uno de los niveles, se retoma el "problema de la escalera". A través de las representaciones gráfica, verbal, simbólica, numérica y física de la derivada en un punto (Roundy, Dray, Manogue, Wagner y Weber, 2015) se presentan las ideas que caracterizan a las acciones mentales en la solución de tal situación.

2.2.2. Niveles del razonamiento covariacional

Nivel de coordinación (N1): según los autores, un estudiante estará en N1 al elegir los ejes para las variables (Figura 3), al escucharlo expresar de manera consciente que: a medida que el tiempo cambia la distancia vertical cambia; o que dado un valor en el tiempo t_0 se tiene un valor en la distancia vertical y_0; es decir, $y = d(t)$, en la que d es la relación de interdependencia (Fiallo y Parada, 2018). Con lo anterior, el estudiante coordina el tiempo con los cambios en la distancia vertical. En términos de los autores, N1 se sustenta por la acción mental 1 (AM1), descrita como la "Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra" (Carlson et al., 2003a, p.128).

Figura 3

Nivel de coordinación

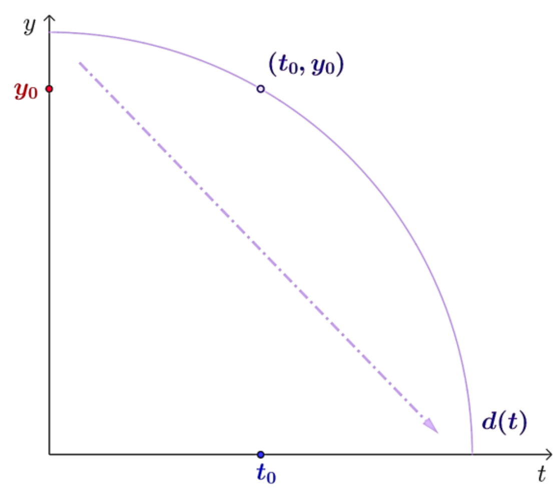


Nivel de dirección (N2): para estar en el N2, el estudiante no solo debe manifestar AM1, sino también construir o señalar con una línea recta decreciente la dirección del cambio (Figura 4), verbalizar que, a medida que el tiempo transcurre, la distancia vertical disminuye, o visto simbólicamente como: para un valor en el tiempo t_n y un incremento cualquiera en el tiempo Δt y el incremento en la distancia vertical definido por $\Delta y_n = d(t_n + \Delta t) - d(t_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\Delta y_n < 0$ entonces, la distancia vertical disminuye. Por tanto, el estudiante coordina la dirección del cambio de la distancia vertical a medida que el tiempo transcurre. N2 se sustenta por

AM1 y la acción mental 2 (AM2) referida como la "Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable" (Carlson et al., 2003a, p. 128).

Figura 4

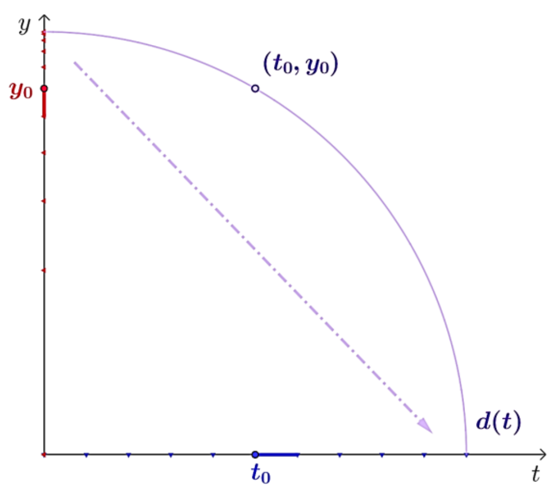
Nivel de dirección



Nivel de coordinación cuantitativa (N3): el estudiante se sitúa en el N3 si localiza puntos en la gráfica o si coloca marcas de la distancia vertical, para mostrar que el valor de los incrementos en la distancia vertical son cada vez más pequeños (o cada vez más grandes con signo negativo) al tocar el suelo (Figura 5), al escucharlos expresar su consciencia sobre cómo cambia la distancia vertical mientras considera incrementos de igual cantidad en el tiempo o simbólicamente como: para Δy_n y Δy_{n+1}, se tiene que $\Delta y_n > \Delta y_{n+1}$ entonces, la cantidad del cambio en la distancia vertical decrece; con esto, el estudiante coordina la cantidad del cambio en la distancia vertical con la cantidad del cambio constante en el tiempo. N3 se sustenta por AM1, AM2 y la acción mental 3 (AM3), definida como la "Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable" (Carlson et al., 2003a, p. 128).

Figura 5

Nivel de coordinación cuantitativa

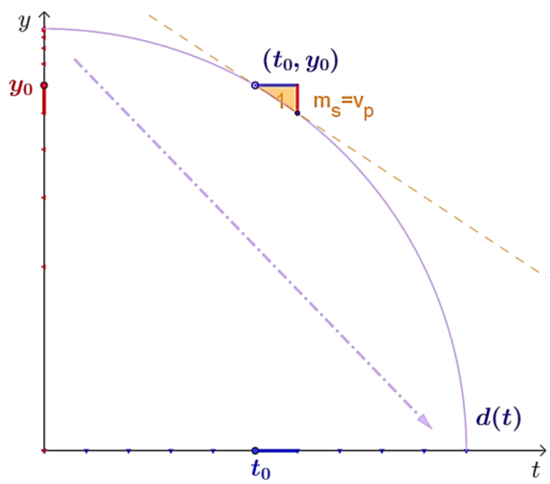


Nivel de razón promedio (N4): para el N4, el estudiante puede construir segmentos de recta, uno tras de otro en la gráfica (Figura 6), para la cual indica el valor de la pendiente de la recta secante correspondiente a la velocidad promedio, razón de cambio promedio de la distancia vertical respecto al tiempo, con la que decrece la distancia vertical, al expresar verbalmente su consciencia sobre que la velocidad promedio disminuye cada vez más; o simbólicamente como:

para las razones $\frac{\Delta y_n}{\Delta t}$ y $\frac{\Delta y_{n+1}}{\Delta t}$, se tiene que $\frac{\Delta y_n}{\Delta t} > \frac{\Delta y_{n+1}}{\Delta t}$ entonces la velocidad promedio de la distancia vertical decrece. Con lo anterior, el estudiante coordina la razón de cambio promedio de la distancia vertical respecto al tiempo. Según los autores, N4 se sustenta por AM1, AM2, AM3 y por la acción mental 4 (AM4), definida como la "Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada" (Carlson et al., 2003a, p. 128).

Figura 6

Nivel de razón promedio



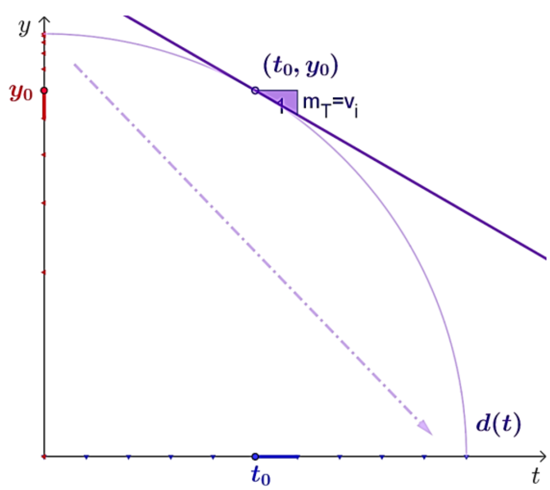
Nivel de razón instantánea (N5): en el N5, el estudiante debe manifestar consciencia sobre la construcción de rectas tangentes (Figura 7), en la que sus pendientes representan la velocidad instantánea con la que decrece la distancia vertical. En otras palabras, se refiere a que existe una recta tangente a un punto $(t_0, d(t_0))$ tal que el valor de la pendiente representa la velocidad en el instante t_0. Además, el estudiante podría verbalizar la naturaleza cambiante de la velocidad en la distancia vertical, mientras imagina el cambio continuo en el tiempo o simbólicamente como: para todo t_0 en el dominio y $y_0 = d(t_0)$ existe la razón de cambio instantánea definida por

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t},$$

la cual representa tanto la pendiente de la recta tangente como la velocidad para cada instante de tiempo. Con respecto a lo anterior, se hace énfasis en que el estudiante se encuentra en el N5 solo si demuestra que la razón de cambio instantánea resulta de considerar intervalos de tiempo cada vez más pequeños ($\Delta t \to 0$) cercanos a t_0. Asimismo, la imagen de N5 debe sustentar comportamientos del porqué un punto de inflexión indica el punto exacto donde cambia la razón de cambio instantánea creciente a ser decreciente o lo contrario, de ser el caso. En síntesis, el N5 incluye las anteriores acciones mentales y la acción mental 5 (AM5), definida como la "Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función" (Carlson et al., 2003a, p. 128).

Figura 7

Nivel de razón instantánea



2.3. Procesos matemáticos en el estudio dinámico del cambio y la variación

Inicialmente, en esta sección se presentan, de manera general, los elementos básicos de la propuesta del Estudio dinámico del cambio y la variación (Fiallo y Parada, 2018). Posteriormente, se expone lo que se entenderá como habilidad cognitiva, junto con la presentación de las diversas habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos, las cuales que son consideradas en la presente investigación.

En Parada et al. (2016) y Fiallo y Parada (2018) se exponen las reflexiones teóricas y metodológicas que se han incorporado al diseño de un curso laboratorio de precálculo. Los autores asumen el proceso de formulación, tratamiento y resolución de problemas como el proceso central, para el cual los demás, como son los de comunicación, formulación, comparación y ejercitación de procedimientos, representación, y razonamiento y demostración sirven como soporte para afrontar situaciones problema que involucran la función, el límite o la derivada; agrupados desde las ideas del cambio, la aproximación y la tendencia como núcleos conceptuales.

Para lo anterior, los estudiantes recurren a ciertas habilidades cognitivas asociadas a cada uno de estos procesos. Cabe aclarar que tales procesos no deben interpretarse de manera independiente, sino que todos los procesos son dependientes y complementarios entre sí.

2.3.1. Habilidad cognitiva

Como resultado de la implementación del curso de precálculo han surgido investigaciones que estudian los diferentes procesos matemáticos con respecto al cambio y la variación, las cuales sustentan las ideas acerca de las habilidades cognitivas. Basados en estos estudios se asume lo descrito por Rueda (2016) como habilidad cognitiva:

> Consiste en las operaciones mentales que resultan de la coordinación de acciones tendientes a la consecución de un objetivo ligado a una rama del conocimiento institucionalizado. De la misma forma, consideramos habilidad cognitiva las acciones que un individuo puede desarrollar para interactuar con un objeto que él mismo puede identificar como objeto de estudio. (p. 57).

Según lo descrito en el párrafo anterior, las acciones que permiten conseguir ese objetivo ligado a una rama del conocimiento institucionalizado, la derivada, son las acciones mentales del razonamiento covariacional descritas con anterioridad. Además, como menciona anteriormente, al activar tales acciones el estudiante hará uso de operaciones mentales que posteriormente serán interpretadas como las habilidades cognitivas en la comprensión de la derivada como razón de cambio.

A partir del resultado de investigaciones, se exponen habilidades, las cuales han sido estimuladas a partir de la solución de situaciones problema que involucran aspectos variacionales durante la implementación y desarrollo del curso de precálculo.

2.3.2 Proceso de comunicación

En Principios y Estándares para la Educación Matemática, se explica que, a través de la comunicación, las ideas llegan a ser objeto de reflexión, perfeccionamiento, discusión y rectificación. Lo anterior es posible si los estudiantes comparten lo que piensan y escuchan a los demás; de este modo, se consigue dar un significado y permanencia a las ideas matemáticas, y a su vez generar comprensión y desarrollo del lenguaje para expresarlas (NCTM, 2003). Además, plantea que los estudiantes comunican matemáticas cuando trabajan en grupos cooperativos, cuando explican un algoritmo para resolver ecuaciones, cuando construyen y explican una representación gráfica de un fenómeno del mundo real o cuando proponen conjeturas sobre una figura geométrica (citado en MEN, 1998).

Por consiguiente, se debe tener en cuenta que "Específicamente en un curso de Cálculo Diferencial, un estudiante necesitará comunicar ideas relacionadas con el cambio, la variación, la interdependencia, la aproximación y la tendencia para tratar los conceptos de función, límites y derivadas" (Parada et al., 2016, p. 1037).

Ahora bien, a partir de los trabajos de Suárez y Rojas (2013) y Gómez (2018) se seleccionan las habilidades de interpretar, explicar y justificar para este proceso, las cuales se describen a continuación:

Interpretar: se conoce como interpretar a la capacidad de identificar los datos, las incógnitas, las condiciones del problema o encontrar datos no explícitos en el enunciado. Por otra parte, influye cuando el estudiante hace uso de estos elementos que le permiten llegar a la solución del problema. Al mismo tiempo, se presenta como la competencia para comprender y dar sentido a la estructura de un problema (expresado en lenguaje verbal o matemático); así como la de entender o leer demostraciones, definiciones, gráficos, mapas o esquemas matemáticos en los que se plantean argumentos y/o procesos de un objeto matemático de estudio. Es pertinente destacar que la interpretación es una habilidad esencial a cualquiera de los procesos matemáticas.

Explicar: implica describir de forma ordenada las ideas asociadas a un objeto de conocimiento con palabras claras o ejemplos, en las que se expresen el porqué de un proceso, con la finalidad de hacer inteligible a otro ese objeto matemático.

Justificar: es el proceso que desarrolla un estudiante para sustentar una idea a través de argumentos en los que se establecen relaciones y se examinan su aceptabilidad; del mismo modo explica el porqué de un proceso, acepta o refuta una conclusión por medio de razones relevantes como la aplicación de una proposición, la realización de un procedimiento y la utilización de un contraejemplo.

Con base en las explicaciones anteriores, es posible identificar en las descripciones las operaciones mentales involucradas en dichas habilidades, por consiguiente, se presentan de manera condensada en la siguiente tabla para favorecer el análisis del proceso de comunicación:

Tabla 1

Habilidades cognitivas asociadas al proceso de comunicación

Proceso matemáticos	**Habilidad cognitiva**	**Operaciones mentales**
Comunicación	Interpretar	Identificar y explicitar información.
	Explicar	Describir una idea relacionada a un objeto matemático.
	Justificar	Exponer argumentos aceptables para sustentar una idea relacionada a un objeto matemático.

2.3.3. Proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos

En el Estudio dinámico del cambio y la variación se hace referencia a este proceso como la creación y uso de procedimientos a modo de “actuaciones, destrezas, estrategias, métodos, técnicas, usos y aplicaciones diversas que un estudiante realiza para resolver problemas de manera cada más hábil e independiente” (Fiallo y Parada, 2018, p. 42).

Asimismo, de los trabajos de Barajas (2015) y Santamaría (2017) se plantean las habilidades ligadas a los procedimientos aritméticos, métricos, geométricos y analíticos, los cuales se describen en los apartados:

Procedimientos aritméticos: son los encargados de relacionar el dominio del número y la estructura del sistema de numeración decimal, esto a partir de la realización de operaciones básicas, especialmente con números racionales y el uso de sus propiedades y de las relaciones entre ellas.

Procedimientos métricos: conlleva a generar, seleccionar, estimar y usar las unidades de medida para cada magnitud, en la que se calculen y se utilicen diferentes procesos e instrumentos en la toma de medidas de las magnitudes más usuales como longitud, tiempo, velocidad, aceleración, amplitud, capacidad, peso o superficie.

Procedimientos geométricos: comprende el uso de atributos y propiedades en las figuras y objetos geométricos, esto mediante el dibujo y la construcción de representaciones en las mismas y su ubicación en el plano o espacio; del mismo modo, se tienen en cuenta las nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo, perpendicularidad y la clasificación de ángulos y polígonos. También cabe resaltar la importancia de relacionar estas propiedades geométricas con expresiones numéricas y algebraicas.

Procedimientos analíticos: tiene que ver con el reconocimiento de regularidades y patrones, la identificación de magnitudes variables y el uso y modificación de expresiones algebraicas de una forma a otra. Lo anterior se evidencia cuando los estudiantes pueden describir y modelar fenómenos de cambio y dependencia en contextos aritméticos y geométricos a través de las funciones, gráficas y tablas.

En este orden de ideas, es posible identificar las operaciones mentales involucradas en dichos procedimientos, como resultado, se presentan de manera condensada en la siguiente tabla para sintetizar el análisis del proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos:

Tabla 2

Habilidades cognitivas asociadas al proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos

Proceso matemáticos	Habilidad cognitiva	Operaciones mentales
	Procedimientos aritméticos	Dominar los números (uso de operaciones básicas).

Elaborar, comparar y ejercitar procedimientos	Procedimientos métricos	Generar, estimar, seleccionar y usar unidades de medida.
	Procedimientos geométricos	Relacionar atributos y propiedades de las figuras y objetos geométricos.
	Procedimientos analíticos	Relacionar y modificar expresiones algebraicas empleando sus propiedades.

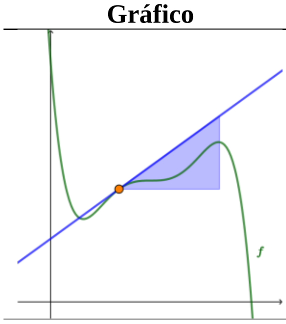
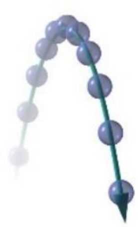
2.3.4. Proceso de representación

Al retomar ideas anteriores, a partir del proyecto Estudio dinámico del cambio y la variación se evidencia la importancia de este proceso. Debido a que los objetos matemáticos tienen una naturaleza semiótica, es decir un propio sistema de signos y, por lo tanto, solo es posible tener un acercamiento con ellos mediante alguna de sus representaciones (citado por Moreno, 2018).

Las habilidades cognitivas resaltan a partir de los sistemas de representación, tales como: aritméticos, geométricos, algebraicos, métricos, gráficos, analíticos, gestuales, etc. En ese orden de ideas y para efectos del diseño de tareas y análisis de la presente, se delimita el contenido de la investigación al utilizar las siguientes las representaciones de la derivada:

Tabla 3

Representaciones de la derivada

Gráfico	**Simbólico**	**Numérico**	**Físico**
	$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Con $x_2 - x_1$ cada vez más pequeño	
Pendiente de la recta tangente en un punto	Límite del cociente incremental	Razón de cambio instantánea	La velocidad

Cada una de las representaciones mostradas en la tabla 1 compara los "contextos" dentro los cuales se puede pensar en la derivada (Roundy et al., 2015). Cabe aclarar, que para la representación verbal de la derivada, esta estará subyacente al verbalizar tanto la razón de cambio como la velocidad. Para estas últimas, se debe tener en cuenta que la representación numérica de la derivada está estrechamente ligada, pero a la vez es distinta de la representación física. Esta representación inicia a través de una razón de cambio $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ donde se entiende que los valores en esta expresión son valores numéricos (Roundy et al., 2015). Para lo anterior, se hace uso de la tabulación, con el fin de mostrar los valores numéricos que pude tomar dicha razón. La representación física de la derivada es considerada como el proceso de medirla. Claramente, el concepto no requiere realizar una medición, solo imaginarla. Obtener una medición numérica requiere del uso de su representación, y describir la medición puede involucrar una representación verbal o gráfica (Roundy et al., 2015). La representación física de la derivada suele percibirse directamente como aquella a la que los científicos suelen darles nombres como: compresibilidad, conductividad térmica y, para el caso de este trabajo, la velocidad, entendida como la relación entre el espacio o la distancia que recorre un objeto y el tiempo que invierte para ello.

Las habilidades consideras para el proceso de representación según Rueda (2016) son:

Reconocer: se entiende como reconocimiento a las acciones en que el individuo puede determinar, por asociación o por recuperación del contexto codificado, cuál o cuáles representaciones se asocian a un objeto matemático previamente presentado. Son las acciones en las que el individuo manifiesta ya sea de manera verbal, escrita o gestual que puede asociar los comportamientos, situaciones presentadas, gráficos o tablas en una situación de variación o cambio con los objetos matemáticos que son propios de este tipo de situaciones.

Interpretar: al interpretar una representación de un objeto matemático, el estudiante extrae de esta y en cualquiera de los registros de representación, alguna información que le permita inferir, tomar decisiones, comunicar o argumentar para dar solución a una determinada actividad relacionada con situaciones de cambio y variación.

Construir: se refiere al acto de generar algo nuevo, es decir, la construcción de una tabla, determinar una expresión algebraica, realizar una gráfica, verbalizar y utilizar el movimiento del cuerpo, todo esto a partir de los datos.

Transformar: comprende las acciones que un individuo realiza sobre una representación inicialmente dada para obtener una nueva, ya sea: de tratamiento (en el mismo registro) o de conversión (entre registros diferentes), en las que estas representaciones conserven una parte o todo el contenido de la representación inicial.

Coordinar: se genera una coordinación cuando el individuo, es capaz de determinar y diferenciar de forma consciente el tipo de información que cada representación de un objeto matemático le brinda, cuál o cuáles de estos registros son más útiles al momento de dar solución a una situación problema

Sobre la base de las descripciones anteriores, es posible identificar las operaciones mentales implicadas en dichas habilidades, por ende, se presentan de manera concisa en la siguiente tabla:

Tabla 4

Habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación

Proceso matemáticos	**Habilidad cognitiva**	**Operaciones mentales**
Representación	Reconocer	Asociar dos o más representaciones de un objeto matemático.
	Interpretar	Extraer información de una representación de un objeto matemático.
	Construir	Generar una representación de un objeto matemático.
	Transformar	Realizar transformaciones de conversión y tratamiento entre representaciones.
	Coordinar	Diferenciar entre un objeto matemático y cualquiera de sus representaciones.

2.3.5. Proceso de razonamiento y demostración

Toda actividad matemática implica investigar conjeturas, según los Principios y Estándares para la Educación Matemática, es conveniente que los estudiantes puedan contestar preguntas como: ¿por qué funciona esto?, ¿funciona siempre?, ¿algunas veces?, ¿nunca?, ¿por qué? y este es el principal camino para el descubrimiento (2000).

López (2017) en su proyecto analiza la manera en la que los estudiantes de un curso de precálculo argumentan y demuestran para solucionar situaciones problema que implican cambio y variación. Pedemonte menciona que la diferencia entre la argumentación y la demostración radica en que la primera se refiere a todo el proceso que está relacionado con el planteamiento de la conjetura, y la segunda al proceso que la valida (citado en López, 2017). Además, cuando el estudiante resuelve problemas de demostración, argumenta para convencer (a él mismo o a los demás) de la veracidad de la conjetura que ha planteado, lo que queda es construir la demostración que le permita validar esa conjetura.

A partir de las ideas anteriores y lo expuesto por Parada et al. (2016), con relación a las habilidades cognitivas de argumentar y demostrar, se tiene en cuenta que:

Argumentar: para realizar una argumentación el estudiante, debe evaluar, convencer (a él mismo o a los demás) o defender una afirmación matemática o los resultados obtenidos, por medio de razones relevantes; asimismo, va acompañada del uso adecuado del lenguaje y del discurso matemático.

Demostrar: se manifiesta que cuando a los estudiantes se les exige explicar, verificar, justificar o validar sus conclusiones a partir de reglas y procedimientos teóricos se promueve la habilidad de demostración.

Como producto de la interpretación de las ideas previas, es posible identificar las operaciones mentales involucradas en dichas habilidades, como resultado, se presentan de manera condensada en la siguiente tabla:

Tabla 5

Habilidades cognitivas asociadas al proceso de razonamiento y demostración

Proceso matemáticos	**Habilidad cognitiva**	**Operaciones mentales**
Razonamiento y demostración	Argumentar	Evaluar la veracidad de una afirmación matemática.
	Demostrar	Validar con reglas y procedimientos teóricos.

3. Diseño de la investigación

En la metodología de investigación descrita por Goetz y Leocompte (1988), mencionan cómo la fiabilidad del proceso investigativo mejora mediante la obtención de la mayor cantidad de información de la situación en que se desarrolla la experiencia, tanto en la selección de la población como los métodos de recolección de datos y el análisis de los mismos; asimismo, posibilita la revisión del estudio para otros investigadores (citado en Rojas, 2012). Se maneja una investigación con enfoque cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo, diseñada para realizar análisis en un contexto real del fenómeno, descrito y relacionado con las habilidades cognitivas que una persona activa para comprender la derivada como razón de cambio. Del mismo modo, es posible mejorar su validez mediante la comparación de datos de forma permanente y una descripción detallada del análisis realizado.

Es pertinente resaltar, que la verbalización de los métodos de pensamiento proporciona información relevante, no solo cuando se habla de materiales escritos, sino también de la interacción. En los primeros se puede contar con tareas, actividades o cuestionarios y en el siguiente pueden ser los generados por grupos pequeños por medio de entrevistas. Como metodología, se trabaja la entrevista estructurada basada en tareas (Goldin, 2000):

> Las entrevistas estructuradas basadas en tareas para el estudio del comportamiento matemático implican mínimamente un sujeto (solucionador de problemas) y un investigador (el clínico), interactuando en relación con una o más tareas (preguntas, problemas o actividades) introducidas para el sujeto por el investigador de una manera planificada de antemano. El último componente justifica el término basado en tareas. Así que las interacciones de los sujetos no son sólo con los entrevistadores, sino con el entorno de la tarea. La entrevista en grupo con dos o más sujetos cae también en el ámbito de esta discusión, lo que lleva a la necesidad de ampliar nuestras interpretaciones de algunas de las ideas (Goldin, 2000, p. 519).

En lo que respecta a la entrevista grupal, esta crea un ambiente “artificial” para cada uno de los entrevistados, donde el entrevistador debe atender de manera permanente a cada uno de ellos de forma individual; estas personas pueden interactuar entre sí, coincidir u oponerse debido a las afirmaciones y argumentos que planteen sus pares. Por otra parte, los entrevistados tienen la posibilidad de recolectar y analizar información adicional, no solamente de sus propios argumentos planteados, sino también de los datos acerca de tareas, actividades o cuestionarios propuestos.

Siguiendo el orden de ideas planteado por Goldin (2000) del párrafo anterior, es necesario considerar ciertas precauciones, como posibles contingencias que pueden darse durante el desarrollo, de la entrevista como preguntas retrospectivas. También se anticipa que, en algún momento, se hace necesario ajustar o modificar la entrevista debido a que puede surgir una situación que sea considerada importante para la investigación. Según este autor, la entrevista basada en tareas es diferenciada porque:

> (…) hace posible poner el foco de interés de la investigación más directamente en los procesos del sujeto al enfrentar la tarea matemática, más que sólo en los patrones de las respuestas correctas o incorrectas que ellos producen, por lo tanto, hay la posibilidad de ahondar en una variedad de tópicos importantes con más profundidad de la que es posible por otros medios experimentales (Goldin, 2000, p. 520).

Ahora bien, durante este capítulo se describe toda la información sobre el contexto en el cual se desarrolla toda la investigación, a partir de la caracterización a priori de las habilidades cognitivas, los criterios de selección de la población y diseño de instrumentos, como también los métodos de recolección y análisis de los datos.

3.1. Aspectos generales

Desde una perspectiva más general, resulta importante tener en cuenta que Zill y Wright (2011) proponen situaciones problema para el curso de cálculo, tanto para explicar como para practicar la derivada. En ellas se encuentran las que son explícitamente de transformación, principalmente, las transformaciones a modo de tratamiento en la representación simbólica de los objetos matemáticos, como aplicar reglas de derivación; y las transformaciones a modo de conversión, entre las representaciones numéricas, gráficas y simbólicas. Por otro lado, están las situaciones que utilizan contextos propios de la geometría, como el problema de la recta tangente y las situaciones relacionadas con los fenómenos de la física, donde implican la comparación de magnitudes variables, como la velocidad o la aceleración encontradas en el movimiento de partículas o el llenado y vaciado de recipientes.

La enseñanza del cálculo diferencial en la UIS se determinada por los contenidos del libro *Cálculo de una variable trascendente tempranas* (Zill y Wright, 2011). La derivada se presenta en el mismo, como el límite del cociente diferencial en la que se destacan tres aspectos:

1. Lo relacionado con la pendiente de la recta tangente en un punto, la razón de cambio y velocidad instantánea para un valor en el dominio de la función que describe un movimiento.
2. Las condiciones de existencia de la derivada en un punto, siendo esta un límite, depende de la tendencia y las aproximaciones, tanto por “izquierda” (menores), como por “derecha” (mayores) al punto.
3. La generalidad de encontrar cualquier derivada en un punto.

A partir de lo anterior, se ha elegido el lanzamiento vertical, esta noción aparece en el campo de la física, a manera de ser un movimiento rectilíneo uniforme acelerado, en el que se lanza un cuerpo u objeto verticalmente con cierta velocidad inicial desde cierta altura y no encuentra resistencia alguna en su camino. Podemos distinguir dos casos, según el sistema de referencia considerado, hacia arriba o hacia abajo. Se ha elegido el lanzamiento vertical hacia arriba en la que la velocidad inicial es mayor que cero y existe una aceleración que en este caso es la gravedad. A medida que asciende, su velocidad va descendiendo hasta llegar a 0 (altura máxima). Desde ese momento, su velocidad es negativa y comienza a descender. Su selección es debido a que permite identificar las diferentes acciones mentales, desde la identificación de las magnitudes variables, pasando por la dirección y cuantificación del cambio (decreciente) hasta la posibilidad de determinar la velocidad instantánea del objeto; además, este fenómeno es familiar para los estudiantes debido al conocimiento de este durante su etapa escolar.

3.2. Aspectos metodológicos específicos

3.2.1. Caracterización a priori de las habilidades cognitivas

Las habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos del cambio y la variación, descritas en el capítulo anterior, fueron adaptadas a los comportamientos y operaciones mentales que podrían realizar los estudiantes al estimular las diferentes acciones mentales pertenecientes a los niveles del razonamiento covariacional. Para su asignación y elaboración, se han tenido en cuenta los antecedentes de diversas investigaciones (reportadas en el capítulo de antecedentes, capítulo 1) que estudian la compresión de la derivada.

A continuación, se presentan en la siguiente tabla, diferentes habilidades cognitivas asignadas a las acciones mentales del razonamiento covariacional:

Tabla 6

Habilidades cognitivas a priori para la comprensión de la derivada como razón de cambio

Acciones mentales del razonamiento covariacional	**Comunicar sobre un valor de la derivada**	**Elaborar, comparar y ejercitar procedimientos para analizar un valor de la derivada**	**Representar un valor de la derivada**	**Razonar y demostrar sobre un valor de la derivada**
	Habilidades cognitivas			
AM1	Interpretar			
AM2	Explicar			
AM3		Reconocer	P. Aritméticos	
AM4	Justificar	Interpretar	P. Métricos	Argumentar
		Construir	P. Geométricos	
		Transformar		
AM5		Coordinar	P. Analíticos	Demostrar

En la tabla anterior, se observan las diferentes acciones mentales del razonamiento covariacional (primera columna), son estos los que direccionan la solución del problema. En las demás columnas, se asignan las habilidades cognitivas asociadas a los procesos, agrupados en: comunicar, razonar y demostrar un valor de la derivada, en representar un valor de la derivada y en elaborar, comparar y ejercitar procedimientos para analizar un valor de la derivada.

En este orden de ideas, se caracterizan a priori (dadas las descripciones en el capítulo anterior agrupadas para los procesos) las siguientes habilidades para el razonamiento covariacional.

Procesos de comunicación, razonamiento y demostración: para poder llegar a demostrar que la velocidad instantánea es el límite de la razón de cambio de las magnitudes variables, se necesita que el estudiante identifique y explicite las magnitudes variables del problema (AM1), que describa tanto la dirección del cambio en las magnitudes variables (AM2) como la relación de la cantidad de sus incrementos (AM3), ya sea directa o inversa; esto le permite inferir sobre el valor de la velocidad que posee el objeto en determinado contexto. Y, finalmente, debe poder justificar y argumentar por qué el planteamiento de la razón, entre los incrementos, da cuenta de la velocidad promedio (AM4), y el límite de la misma: la velocidad instantánea (AM5).

Proceso de elaboración, ejercitación y comparación de procedimientos: debido al enfoque sobre el objeto matemático de estudio, las habilidades asociadas a los procedimientos determinan el valor de la velocidad instantánea. Por tanto, se presupone que no se activan las acciones mentales AM1, AM2, AM3; sino que, a partir de la AM4 se presentan los procedimientos para establecer la razón de cambio, ya sea la razón numérica de la diferencia de los valores de las magnitudes variables o la pendiente de la recta secante. Posteriormente, se analizan las razones de cambio promedio a través de la reducción del incremento en la magnitud variable independiente, y así poder realizar el límite, en donde mediante procedimientos analíticos, como el tratamiento de expresiones algebraicas, es posible hallar la tendencia a un valor de la velocidad

Proceso de representación: para este proceso no se hace explícita habilidad alguna en las primeras acciones mentales, debido a que el objeto matemático de estudio, la derivada y sus representaciones se hacen "tangibles" cuando se construye la comparación de los incrementos de las variables involucradas, a través de una razón, la cual alude a la cuantificación de los cambios (incrementos) en las magnitudes variables (AM3), se direcciona hacia la representación numérica como razón (AM4) y puente para interpretar, construir, transformar y coordinar las diferentes representaciones de un valor de la derivada (AM5).

3.2.2. Población

La selección de los casos de estudio se establece de manera intencional. Para esto se realizaron tutorías durante el curso de cálculo I de primer nivel universitario, en donde el profesor-investigador también cumple el papel de tutor. Durante una tutoría se realiza la resolución de ejercicios y problemas propuestos en el libro guía, semana a semana, a partir de los temas del curso que corresponden.

En la selección se consideraron criterios preestablecidos orientados a elegir estudiantes que presenten comportamientos heterogéneos al momento de darle solución a situaciones relacionadas con los temas de funciones y límites. Se seleccionaron tres casos de estudio con características diferentes. Uno de los estudiantes, el cual llamaremos Álvaro, hace uso frecuente de procedimientos analíticos en los cuales siempre se preocupa por encontrar expresiones algebraicas (simbólicas) para solucionar las situaciones. Otro estudiante, Sofía, aborda de manera práctica las situaciones, por ejemplo, la toma y uso de tablas de valores. Finalmente, María, quien presenta comportamientos tanto analíticos como prácticos.

3.2.3. Diseño de instrumentos

Para el diseño de los instrumentos se considera tanto elementos teóricos como metodológicos del curso de precálculo, al igual que la inclusión de las ideas relacionadas a las acciones mentales del razonamiento covariacional para el planteamiento de los ítems. En total se diseñaron cuatro tareas, vistas como actividades (ver Anexo 1 al Anexo 4):

Tabla 7

Estructura del diseño de instrumentos

Parte/Tarea	**Actividad 1** Sobre la introducción a la velocidad	**Actividad 2** Sobre el qué, cómo y cuánto varían	**Actividad 3** Sobre las razones de cambio	**Actividad 4** Sobre la razón de cambió instantánea
1. Trabajo individual	Presentación situación problema	AM1 AM2 AM3	AM4	AM5
2. Trabajo grupal	Socialización de resultados Preguntas de las entrevistas Conclusiones			

Para la actividad 1, se presenta una tarea sobre la introducción a la velocidad, en la se tienen en cuenta los siguientes aspectos para cada apartado:

Trabajo individual: en la primera parte se explicita el problema central del todo el taller. Su estructura se divide en dos fases: la fase 1 relacionada con la fase de Información y exploración libre expuesta en Fiallo y Parada (2018); se plantea el problema que involucra la derivada en un punto como solución, para que los estudiantes intenten resolverlo de manera individual, con apoyo de un archivo en GeoGebra. “En esta fase se espera que los estudiantes perciban la necesidad de utilizar nuevos conceptos” (Fiallo y Parada, 2018, p. 60) y aclaren conceptos vistos en las secciones anteriores del curso de cálculo diferencial. Además, se supone que el profesor-investigador identifica indirectamente las principales dificultades conceptuales, errores generales de los estudiantes, en torno, principalmente, a los conceptos de función y limite, junto con las ideas que tienen de cambio, variación y velocidad.

2. Trabajo grupal: esta fase se conoce como "comunicando y compartiendo", en la que el profesor promueve la participación de los estudiantes con el propósito de que ellos comuniquen las soluciones y las discutan en grupo, las expongan y presenten argumentos (Fiallo y Parada, 2018). En esta fase se espera que las dificultades y los errores emergentes de la actividad 1 (presentación del problema) sean aprovechados para confrontar a los estudiantes, de manera que esto motive la necesidad de ofrecer una solución matemática.

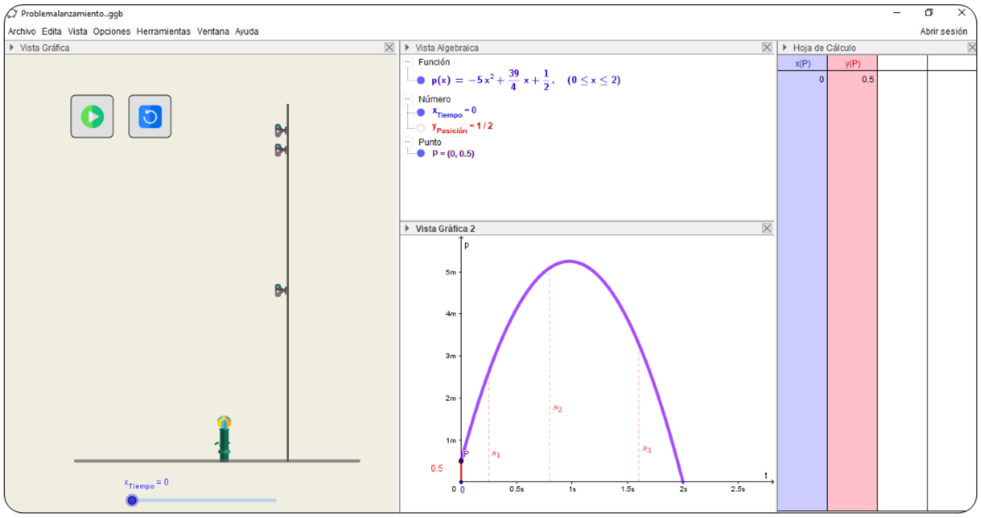
Esta actividad en particular va acompañada de una simulación llamada: Problema lanzamiento: La simulación permite explorar y observar ideas conceptuales de objetos matemáticos mostrados en las vistas que provee el software (algebraica, hoja de cálculo, gráfica) (Figura 8); para así plantear conjeturas y justificar matemáticamente las respuestas que ofrezcan, tanto en las fases de trabajo individual como en las de trabajo grupal.

Este archivo tiene una función similar a los que acompañan a las actividades en el curso de precálculo.[2]

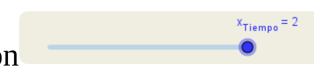
Figura 8

Simulación problema lanzamiento

[2] En la fase de explicitación (Fiallo y Parada, 2018)



Específicamente, en la simulación es posible interactuar de la siguiente manera:

- Animar la simulación, el movimiento del punto P y el registro de datos en la hoja de cálculo con el botón .
- Detener la simulación, el movimiento del punto P y el registro de datos en la hoja de cálculo con el botón .
- Reiniciar la simulación con el botón .
- Ajustar el tiempo deseado deslizando el siguiente botón .
- Registrar el tiempo deseado $x_{Tiempo} = 2$.
- Observar la posición $y_{Posición} = 0$.
- Tener la expresión algebraica (simbólica), gráfica y tabular de la relación de interdependencia de las variables implicadas en el problema.
- Operar y registrar en las columnas de la hoja de cálculo cualquier operación entre los valores mostrados.

A continuación se muestran las tareas y las preguntas que pueden ser tomadas durante el trabajo grupal como parte del guion en la entrevista.

Tarea sobre la introducción a la velocidad (Actividad 1):

1. Una máquina ha lanzado un objeto verticalmente hacia arriba. Antes del lanzamiento, se colocan tres sensores en diferentes posiciones con el fin de determinar la velocidad del objeto en diferentes instantes de tiempo. Los registros tomados por los sensores se muestran en la siguiente tabla:

Sensor	Tiempo $[s]$	Posición $[m]$	Velocidad $[m/s]$
1	0.25	2.625	7.25
2	0.8	5.1	1.75
3	$\frac{8}{5}$	$\frac{33}{10}$	$-\frac{25}{4}$

Registro de sensores

Abra el archivo Problemalanzamiento.ggb y **muestre matemáti**camente que el registro de la velocidad, tomado por cada sensor, es verdadero.

2. **Comunicando y compartiendo**
Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor, después escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.

Durante el desarrollo de esta tarea, se observa y se escuchan los argumentos de los estudiantes, para así realizar preguntas a modo de entrevista sobre relacionadas sobre las ideas de variación y cambio, enfocadas hacia la definición de velocidad y rapidez por parte de los estudiantes: ¿qué es la velocidad?, ¿en qué consiste la velocidad?, ¿distancia sobre tiempo?, ¿qué quiere decir esa “fórmula”?, ¿cuáles son las condiciones para aplicar dicha “fórmula”?, ¿qué es una razón?, ¿qué es el cambio?, y ¿cuáles magnitudes cambian y cuáles permanecen constantes?

Cabe resaltar que para las demás actividades se aplica la misma estructura de los apartados anteriores *trabajo individual* y *trabajo grupal;* sin embargo, al terminar cada actividad se evidencia un avance en cuanto al desarrollo de una la solución al problema.

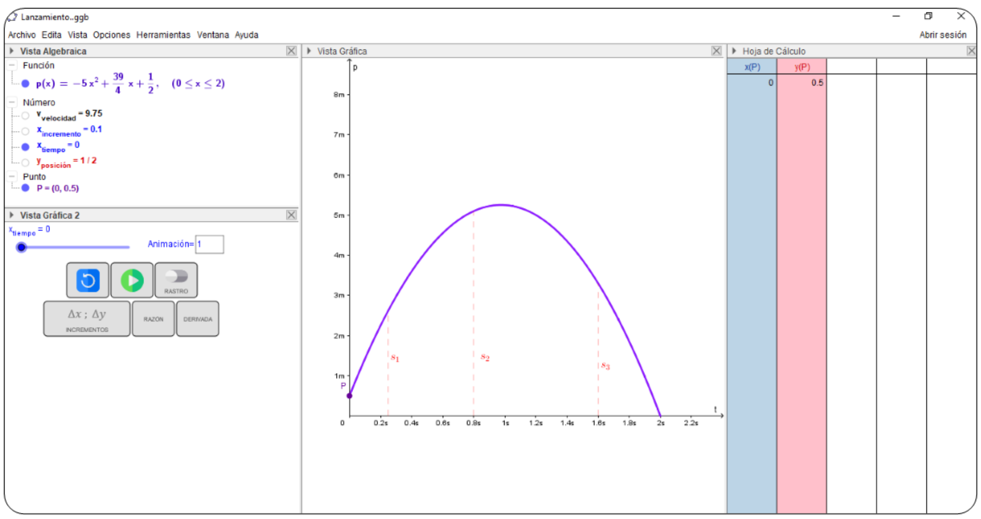
Esta actividad va acompañada de la simulación llamada Lanzamiento: esta simulación acompaña a las actividades en el curso de precálculo (Fiallo y Parada, 2018), en la fase de explicitación, la simulación permite explorar y observar las ideas conceptuales de objetos matemáticos mostrados en las vistas que provee el software (algebraica, hoja de datos, gráfica),

(Figura 9); además, de una configuración específica para observar ideas en torno a los incrementos, razones de cambio promedio, recta secante y pendiente, y la derivada, para así platear conjeturas y justificar matemáticamente las respuestas que ofrezcan, tanto en las fases de trabajo individual como en las de trabajo grupal.

Este archivo tiene una función similar a los que acompañan a las actividades en el curso de precálculo.[3]

Figura 9

Simulación lanzamiento



Además de la configuración del archivo anterior, en este otro, particularmente, es posible realizar y observar:

- Registrar el incremento en el tiempo deseado $x_{incremento} = 0.1$.
- Observar la velocidad del objeto $v_{velocidad} = 9.75$.
- Controlar la velocidad de la animación, con la posibilidad de registrar valores de incrementos menores a 0.05.

[3] En la fase de explicitación (Fiallo y Parada, 2018).

- Activar o desactivar el rastro de los objetos mostrados en la vista gráfica como el punto P y las razones promedio con el botón 
.
- Activar o desactivar una representación gráfica de los incrementos en el tiempo y la posición con el botón 
.
- Activar o desactivar una representación gráfica y simbólica, según el intervalo e incremento de tiempo considerado de la razón promedio con el botón 
.
- Activar o desactivar la representación gráfica de la pendiente de la recta secante y su pendiente sobre la función con el botón 
.
- Activar y desactivar las representaciones de la derivada como pendiente de la recta tangente y la razón de cambio instantánea (solo como cociente entre dy y dx con el botón 
.

A continuación, se exponen las tareas que conforman las actividades 2, 3 y 4

Tarea sobre el qué, cómo y cuánto varían (Actividad 2):

1. Abra el archivo Lanzamiento.ggb y conteste las siguientes preguntas en su hoja de trabajo en el orden en que aparecen los ítems:
   a) ¿Cuáles son las magnitudes variables del problema? ¿Existe una relación de interdependencia entre las magnitudes variables? **¿Por qué?**
   b) ¿Cómo se comportan los valores de la posición respecto al tiempo? **Explique** su respuesta**.**
   c) ¿De cuánto es el incremento en los valores de la posición con respecto al tiempo? **Explique** su respuesta**.**
   d) ¿Cuál es el comportamiento de la cantidad del incremento en los valores de la posición respecto al tiempo? **Justifique** su respuesta**.**

2. **Comunicando y compartiendo**
Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.

Se observan y se escuchan los argumentos de los estudiantes con la finalidad de poder realizar sugerencias como:

- Tome ejemplos de valores para mostrar si aumenta, si disminuyen o si permanecen constantes las magnitudes variables. Explique.
- Tome ejemplos de valores para mostrar el incremento en la posición en cierto intervalo de tiempo.
- Tome, por ejemplo, [0.4,0.5] en el tiempo ¿De cuánto es el incremento en la posición?

…o preguntas a modo de entrevista:

- Según su respuesta, ¿qué puede decir acerca de la velocidad del objeto?
- ¿En qué momentos (intervalos) la velocidad es positiva, en cuáles negativa o constante?, y ¿por qué?
- ¿Cómo se calcula el incremento en la posición? Generalice.
- Consideremos el incremento en el tiempo de igual medida. Calcule varios incrementos en la posición.
- ¿La velocidad es cada vez mayor?, ¿menor?, ¿o permanece constante? Explique.

Tarea sobre las razones de cambio (Actividad 3):

1. Las siguientes preguntas están relacionadas con la razón de cambio promedio de la posición con respecto al tiempo. Resuelva los siguientes ítems en su hoja de trabajo.

a) Calcule los incrementos de los valores en el tiempo (x) y complete las siguientes tablas:

$\Delta \boldsymbol{x_1} =$ ___

$[x_1, x_2]$	$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$
$[0.78, 0.79]$	
$[0.79, 0.8]$	
$[0.8, 0.81]$	
$[0.81, 0.82]$	

Tabla 1

$\Delta \boldsymbol{x_2} =$ ___

$[x_1, x_2]$	$\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}$
$[0.79, 0.795]$	
$[0.795, 0.8]$	
$[0.8, 0.805]$	
$[0.805, 0.81]$	

Tabla 2

$\Delta \boldsymbol{x_3} =$ ___

$[x_1, x_2]$	$\frac{\Delta y_3}{\Delta x_3}$
$[0.798, 0.799]$	
$[0.799, 0.8]$	
$[0.8, 0.801]$	
$[0.801, 0.802]$	

Tabla 3

b) ¿Aproximadamente con qué velocidad se mueve el objeto alrededor de $x = 0.8\ s$? **Justifique** su respuesta**.**

c) Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos de los extremos de los intervalos definidos en las tablas del ítem a). Compare este resultado con los ítems anteriores y escriba una conclusión. **Justifique** su respuesta.

2. **Comunicando y compartiendo**
   Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo

Acompañada de preguntas como:

- ¿Qué es lo que entiende por velocidad?
- ¿Qué tipo de velocidad es?, ¿qué tipo de razón es?, y ¿por qué?
- Dados dos puntos en el plano cartesiano, ¿cómo se calcula la pendiente de la recta que pasa por dichos puntos?
- Active mostrar función (si no lo está) y observe, ¿cómo es la recta que pasa por los puntos?
- ¿Qué relación existe entre la razón promedio, la velocidad promedio y la pendiente de la recta secante? Explique.

Tarea sobre la razón de cambio instantánea (Actividad 4):

1. Las siguientes preguntas están relacionadas con la razón de cambio instantánea de la posición respecto al tiempo. Resuelva los siguientes íitems en su hoja de trabajo.
   a) ¿Qué sucede con la razón de cambio cuando $\Delta x \to 0$? Escriba una expresión analítica que represente la razón de cambio instantánea para $x = 0.8\ s$. **Justifique** su respuesta**.**
   b) ¿Cuál es la velocidad instantánea para $x = 0.8\ s$? **Valide con reglas** su respuesta.
   c) ¿Qué sucede con la recta que pasa por los puntos de los extremos de los intervalos al hacer que $\Delta x \to 0$? ¿Qué sucede con el valor de su pendiente al hacer $\Delta x \to 0$? Escriba una conclusión respecto a la pendiente, la razón de cambio y la velocidad. **Argumente** su respuesta.
2. **Comunicando y compartiendo**
   Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Después, escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.

Y para esta tarea se tienen preguntas como:

- Según la actividad anterior, ¿qué sucede con los incrementos en el tiempo?
- Entonces, ¿qué suceden con los valores de las razones al hacer que los incrementos tiendan a cero?
- ¿Qué entiende por límite de una función en un punto?

- Generalice la expresión para hacer cualquier razón promedio alrededor de x=0.8 s.
- En $r_p = \Delta y/\Delta x$ a, ¿qué es igual Δy? Use lo encontrado en la actividad anterior. Escriba un expresión en que se incluya Δx.
- Si se tiene que $r_p = \frac{y_2 - y_1}{\Delta x}$, ¿qué sería y_1?, y ¿qué sería y_2 en términos del incremento Δx y el $x = 0.8\ s$?
- Resuelva el límite. ¿Cuánto debe dar?
- ¿Qué quiere decir que la velocidad instantánea en $x = 0.8$ s es $1.75\ m/s$? Argumente.
- Observe la vista gráfica y muestre la función (si no lo está), ¿qué sucede con la recta que era secante al hacer el incremento más pequeño (tienda a cero)? Explique.
- Entonces, ¿cómo llamaríamos a esta pendiente si viene de la recta tangente?, ¿qué relación tiene con la razón instantánea?, ¿y con la velocidad instantánea?
- Calcule los demás valores y determine si los sensores están en lo correcto.

3.2.4. Recolección de información

Teniendo en cuenta la importancia de disponer de diversos instrumentos de recolección de información, además de la indagación mediante el desarrollo de tareas, se cuenta con entrevistas grabadas en audio, las cuales fueron realizadas al pequeño grupo seleccionado con base en las respuestas dadas a la tarea propuesta en las diferentes actividades. A partir de los planteamientos de Goldin (2000, p.519):

> (…) se prevé la observación y registro de lo que sucede durante la entrevista para su posterior análisis: a través de grabaciones de audio y/o video, notas de los observadores, y trabajo del sujeto. Explícita previsión se hace también para contingencias, como las que pueden ocurrir a medida que avanza la entrevista, posiblemente por medio de secuencias de ramificación de preguntas heurísticas, sugerencias, problemas relacionados en secuencia, preguntas retrospectivas, u otras intervenciones por parte del clínico [entrevistador].

También se reconoce la importancia a la hora de comprometer a los estudiantes en el desarrollo de la actividad, las tareas fueron trabajadas inicialmente de manera individual (parte 1 de la actividad) por cada uno de los estudiantes. Posteriormente, se realiza una socialización (parte 2 de la actividad) de algunas de las respuestas dadas por el pequeño grupo, los cuales fueron seleccionados por el profesor-investigador con base en la observación realizada por él mismo durante el tiempo de trabajo de los estudiantes.

Previamente al trabajo con las actividades, el profesor-investigador (P) dialoga con los estudiantes y les informa que el trabajo que van a realizar tiene como propósito indagar sobre las diferentes habilidades cognitivas que activan en la solución de situaciones que implican cambio y variación; aclarándoles, que lo más importante para él es conocer los argumentos por los cuales dan una respuesta de una u otra manera, ya que esto permite entender mejor cómo orientar la dinámica en el aula y reconocer posibles dificultades que encuentran los estudiantes en el trabajo, por lo que les solicita para los ítems de las tareas que se les va a entregar para trabajar individualmente sean lo más explícitos posible a la hora de explicar el procedimiento y las razones que apoyan su respuesta.

Con el propósito de aclarar el papel que los estudiantes deben desempeñar en esta actividad, el profesor-investigador les comenta que una vez desarrollen individualmente las actividades, se trabaja para socializar sus respuestas y responder nuevamente la tarea como grupo. Adicionalmente les informa que, teniendo en cuenta la diversidad de posibles interpretaciones y de respuestas encontradas durante la socialización, se seleccionan preguntas a modo de entrevista con el propósito de ampliar la información encontrada en los ítems.

En resumen, la información recolectada se encuentra registrada en:

1. Actividades individuales (y de pequeños grupos),
2. Entrevistas grabadas en video

Cuya producción oral y escrita se constituye en la principal fuente de datos reportados y analizados en esta investigación.

El tiempo de duración de las dos sesiones en las que se realiza el trabajo individual y las diferentes entrevistas se estima entre 20 y 30 minutos para cada una de las tareas, es decir 50 minutos por tarea, dependiendo de la interacción entre los estudiantes y la necesidad de indagar algún aspecto específico reconocido durante el desarrollo de la entrevista, pero debido a la extensión en las dos primeras tareas, se decide dejar hasta un momento y ajustar la entrevista para la sesión y avanzar en la implementación de esta en la siguiente.

Las entrevistas se programan para ser realizadas con el grupos de 3 estudiantes, se reconoce que en estos procesos de interacción es importante tener la posibilidad de contar con más de una interpretación.

Las entrevistas se realizaron en una de las salas de cómputo que dispone la UIS para la Escuela de Matemáticas. Al inicio de cada entrevista, el profesor-investigador saluda a cada uno de los estudiantes, les agradece estar allí y les solicita su autorización para grabar la sesión (la cual fue concedida cada sesión). Inicia preguntando los nombres para realizar el registro respectivo e iniciar la conversación. Se realizaron un total de 4 entrevistas.

3.2.5. Recolección de datos

El proceso de recolección de datos se realiza en tres momentos. El primero de ellos, el profesor-investigador solicita a los estudiantes desarrollar de manera individual las actividades, basados en tareas diseñadas por el mismo; en el otro, el profesor-investigador realiza la entrevista al grupo, la cual fue grabada en video con el propósito de compartir sus respuestas de los ítems y las entrevistas durante la socialización. Si bien el investigador cuenta con un guion para el desarrollo de la entrevista, incorpora algunas preguntas retrospectivas, e incluso algunas insinuaciones para complementar la indagación, y estuvo atento a reconocer situaciones de interés para el propósito de la investigación, formulando preguntas específicas orientadas a contar con más información; y en un tercer momento, se les realizan preguntas retomadas de los ítems o estipuladas para obtener más información, las cuales registran en escrito como conclusiones en la parte de “comunicando y compartiendo”.

3.2.6. Análisis de los datos

Se realiza un análisis de las expresiones externas en el momento de trabajo individual de cada uno de los estudiantes del grupo seleccionado, en relación con cada tarea. El interés se centra en las expresiones externas durante y después de la entrevista del grupo para cada tarea, en la cual se permite la intervención de cada uno de los estudiantes, la interacción entre ellos y el refutar o estar de acuerdo sobre las ideas del otro en relación con los ítems de las tareas o preguntas propuestas en las entrevistas. Se prioriza el momento de la entrevista, “comunicando y compartiendo”, ya que se reconoce que este posibilita el poder compartir y reflexionar ideas sobre los planteamientos iniciales realizados por los otros en cada una de las tareas.

En el análisis se usan los siguientes códigos para hacer referencia a: Ac_a las actividades a, P_b parte b ya sea trabajo individual (1) o grupal (2), E_c, el estudiante c.

En primera instancia se exponen las respuestas a los ítems a través de una rejilla como la tabla 8, con el objetivo de tener una idea general de la experiencia durante el desarrollo de la actividad. En la rejilla se muestra tanto lo trabajado individualmente como las conclusiones a que llegan los estudiantes posterior a la entrevista.

Tabla 8

Rejilla de respuestas

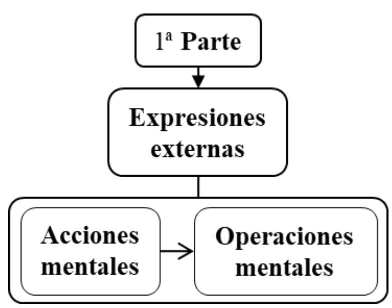
Tarea Actividad	**Instrumento Individual**			**Trabajo en grupo** Entrevista
Ítem/Estudiante	**E_1: Álvaro**	**E_2: Sofía**	**E_3: María**	E_1, E_2 y E_3

Posteriormente, se realiza un análisis de tipo descriptivo a las expresiones externas para cada uno de los momentos de la actividad, trabajo individual y trabajo grupal.

Para la parte 1 se utiliza el siguiente esquema presentado en la siguiente figura:

Figura 10

Acciones y operaciones mentales parte 1 (P_1)



Con el anterior esquema en el que las expresiones externas son originadas por los ítems de la primera parte, se realiza un análisis específico orientado a identificar en las expresiones externas, las acciones y operaciones mentales activadas, con el objetivo de determinar la relación entre estas, para el primer acercamiento de los estudiantes a los ítems de cada actividad. Para señalar las relaciones entre las acciones y operaciones mentales se utiliza una flecha con línea continua, en la que en ocasiones puede utilizarse una referencia de colores para distinguir sobre que ítems se realiza el análisis. Cabe recordar que las operaciones mentales son descriptores relacionados a las habilidades cognitivas expuestas en el capítulo anterior.

Luego, a manera de síntesis se realiza una tabla (Tabla 9), en la que se describen las habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos identificados en la primera parte. Asimismo, con el objetivo de evaluar la entrevista que sigue, se considera si el estudiante presenta o no la habilidad caracterizada en comparación con sus compañeros y como grupo en general.

Tabla 9

Rejilla de síntesis

Proceso	Habilidad cognitiva	Caracterización	Álvaro (E_1)	Sofía (E_2)	María (E_3)	Grupo

Para las entrevistas, sus transcripciones son presentadas con comentarios intercalados sobre el contenido de la conversación y a acerca de diferentes momentos durante la entrevista, para poder contextualizar y ofrecer la mayor información posible sobre la manera en que se actúa para una posible repetición de las actividades por parte de otros investigadores. En las transcripciones la primera columna da el tiempo, en minutos y segundos, la segunda columna la enumeración de cada una de las líneas correspondientes a cada intervención, la tercera al código asignado para el estudiante y para el profesor-investigador; y finalmente, en la última columna, el diálogo asignado para cada línea de la conversación.

Para hacer referencia a las diferentes líneas de la transcripción se usará: $E_{c(d)}$en la que es el estudiante c y la correspondiente línea de diálogo d. Además, en el análisis de las transcripciones de la entrevista se coloca en negrilla la intervención del profesor-investigador (P).

Posteriormente, se utiliza el siguiente esquema para el análisis de la segunda parte:

Figura 11

Acciones y operaciones mentales parte 2 ($\boldsymbol{P_2}$)

En este esquema, a diferencia de la primera parte, se incluye como parte de las expresiones externas los comportamientos y verbalizaciones realizadas durante la entrevista. Para señalar las nuevas relaciones entre acciones y operaciones mentales surgidas durante y posterior a la entrevista, se utiliza una flecha con línea a trozos de color negra para distinguir las nuevas sobre las que fueron identificadas en la primera parte. De igual forma, se utiliza una rejilla como la muestra en la tabla 9, para describir la caracterización de las habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos durante toda la actividad (parte 1 y 2). A fin de evaluar la activación de las habilidades se utilizan los símbolos ✓ y × para describir si hubo activación o no, respectivamente.

4. Desarrollo de la investigación

En las cuatro secciones de este capítulo se realiza un análisis del trabajo de los tres estudiantes seleccionados para cada una de las cuatro tareas propuestas. En dichas secciones se presenta inicialmente una rejilla, en la que se organiza la información correspondiente al trabajo de los tres estudiantes, individual y grupalmente para cada tarea (parte 1); además, se presentan las expresiones externas iniciales de cada estudiante en el desarrollo de los ítems, en las que se resalta la relación entre la acción y las operaciones mentales establecidas por los mismos en el desarrollo de la tarea. En la segunda parte de cada sección, se realiza un análisis descriptivo e interpretativo en los diferentes diálogos de la transcripción de la entrevista correspondiente al trabajo grupal (parte 2). Finalmente, se presentan los descriptores que caracterizan las habilidades cognitivas emergentes, asociadas a los diferentes procesos matemáticos, activadas por cada estudiante durante la entrevista. Para lo anterior, se aclara que, para inferir y seleccionar una habilidad cognitiva y correspondiente proceso, se tuvo en cuenta la preponderancia de las operaciones mentales que la describen, sin ignorar la relación que posee con otros procesos.

Cabe recordar que las cuatro tareas en las cuales se basan dichas entrevistas fueron presentadas mediante actividades para la solución de un mismo problema: sobre la introducción a la velocidad (Actividad 1), otra sobre el qué, cómo y cuánto varían (Actividad 2), sobre las razones de cambio (Actividad 3), y la última, sobre la razón de cambio instantánea (Actividad 4). Cada entrevista se centró en una de las cuatro tareas propuestas.

Como parte del guion establecido para el desarrollo de las actividades, el profesor-investigador inicia con un saludo a los estudiantes, agradece su participación y les solicita la autorización para la toma de datos (escritos y audiovisuales).

4.1. Tarea sobre la introducción a la velocidad (Actividad 1)

A continuación, se muestra la rejilla con la información del trabajo de los estudiantes para la Actividad 1 (Ac_1), en la que se presenta la situación problema, realizado tanto individual como grupalmente. Posteriormente, se presentan las figuras obtenidas a partir de dicha rejilla, correspondientes a las acciones y operaciones mentales activadas y logradas por cada uno de los integrantes del grupo en relación con dicha actividad. Por último, se realiza un análisis de la entrevista, apoyado en la trascripción realizada. En lo que sigue, para hacer referencia a las figuras se usa lo planteado en párrafos anteriores: $\mathrm{Ac_a P_b E_c}$ en la cual los subíndices representan la Actividad a, y para la Parte b ya sea trabajo individual (1) o grupal (2) del Estudiante c. Para hacer referencia a los diferentes segmentos de la transcripción se usa: $\mathrm{E_{c(d)}}$, en la cual es el estudiante c, y la correspondiente línea d. Por ejemplo, el código $\mathrm{E}_{1(21)}$ hace referencia a lo dicho por el estudiante 1, en la línea 21 de la transcripción. El código $\mathrm{E}_{2(4-8,14)}$ hace referencia a lo dicho por el estudiante 2, en las líneas 4 a la 8 y en la 14.

4.1.1. Rejilla de respuestas y figuras de acciones y operaciones mentales

Esta rejilla corresponde al grupo de estudiantes seleccionados Álvaro (E_1), Sofia (E_2) y María (E_3) para la tarea Ac_1, presentación de la situación problema, lanzamiento vertical de un objeto.

Tabla 10

Rejilla de respuestas $\boldsymbol{Ac_1}$

Tarea Introducción a la velocidad **Actividad 1**	**Instrumento Individual**			**Trabajo en grupo** Entrevista
Ítem/Estudiante	$\mathbf{E_1}$**: Álvaro**	$\mathbf{E_2}$**: Sofía**	$\mathbf{E_3}$**: María**	$\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ **y** $\mathbf{E_3}$
Abra el archivo Problemalanzamiento.ggb y muestre matemáticamente que el registro de la velocidad, tomado por cada sensor, es verdadero.	Quiere mostrar la relación entre el tiempo y la posición a través de la expresión $t = V_0/g$ *[describe el significado personal de cada letra, pero no muestra un planteamiento de solución a la situación].*	*[No muestra alguna idea o planteamiento de solución a la situación].*	$f(x) = -5x^2 + \frac{39}{4}x + \frac{1}{2}$ $x_{tiempo} = 0\,s$ es $y_{posición} = 1/2\,m$ *[no continúa con un planteamiento de solución a la situación].*	*[La velocidad como la variación de la posición respecto al tiempo].*

En las siguientes figuras se presentan las operaciones mentales generadas a partir del trabajo realizado por cada uno de los tres estudiantes, de forma individual. En estas figuras se señala, mediante una línea continua, la relación entre las acciones y operaciones mentales activadas e identificadas a partir de los descriptores expuestos en el Capítulo 2 de Fundamentación teórica.

Figura 12

Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_1 P_1 E_1}$

1ª Parte

Actividad 1

1.1. Una máquina ha lanzado un objeto verticalmente hacia arriba. Antes del lanzamiento, se han colocado tres sensores en posiciones distintas con el fin de determinar la velocidad del objeto en diferentes instantes de tiempo. Los registros tomados por los sensores se muestran en la siguiente tabla:

Sensor	Tiempo $[s]$	Posición $[m]$	Velocidad $\left[\frac{m}{s}\right]$
1	0.25	2.625	7.25
2	0.8	5.1	1.75
3	$\frac{8}{5}$	$\frac{33}{10}$	$-\frac{25}{4}$

Registro de sensores.

Abra el archivo Problemalanzamiento.ggb y **muestre matemáticamente** que el registro de la velocidad, tomado por cada sensor, es verdadero.

Expresiones externas

Veamos si las velocidades registradas por cada sensor guardan congruencia con el tiempo y la posición que les corresponde; teniendo encuenta que:

$t = \frac{V_0}{g}$, donde t es el tiempo que lleva ocurrir el fenómeno.

$V_0 \Rightarrow$ velocidad inicial.

$g \rightarrow$ fuerza de gravedad.

Acciones mentales

Operaciones mentales

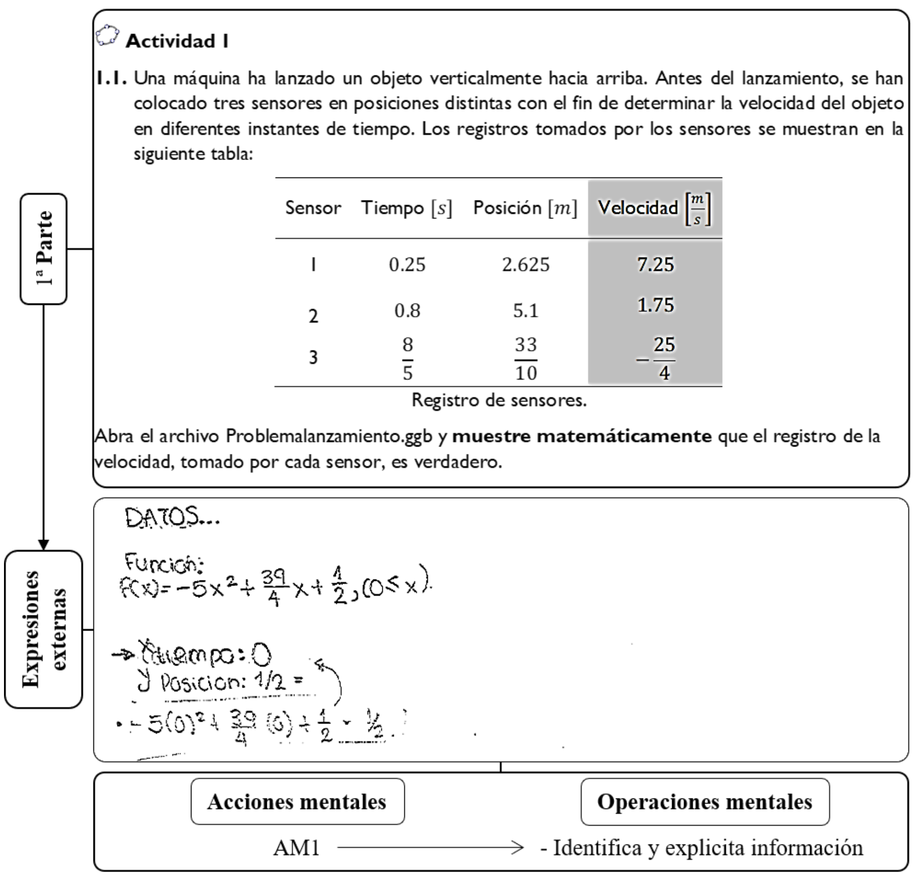
- Identifica y explicita información

En el trabajo realizado individualmente, según Ac_1P_1 E_1, Álvaro (E_1) establece una expresión simbólica que relaciona el tiempo, la velocidad inicial del objeto y la gravedad. La intención del estudiante fue usar la expresión $t = \frac{V_0}{g}$ para comprobar las velocidades según el tiempo y la posición. Al no percibir el error de la expresión anterior, ya que según el movimiento que alude el objeto, la expresión simbólica a considerar es $t = \frac{v_0 - v}{g}$, e incluso al no contar con más información como la velocidad inicial, no pudo continuar. Además, se puede apreciar que en sus expresiones externas inicialmente no se percata de la expresión algebraica que relaciona el tiempo y la posición mostrada en la simulación. Por esta razón, se infiere que sus argumentos corresponden a la operación mental de identificar y explicitar información, pero como la información dada no establece un comportamiento que indique la coordinación de las magnitudes variables tiempo y posición, no se establece relación entre acción y operación mental que brinde la posibilidad de inferir alguna habilidad cognitiva.

A pesar de que Sofia (E_2) no escribe alguna idea en su hoja de trabajo, no es posible despreciar que la estudiante haya realizado alguna operación mental, como se puede evidenciar líneas más adelante en la entrevista grupal.

Figura 13

Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_1P_1E_3}$



Por otra parte, en su trabajo individual, María (E_3) identifica y hace explícita la expresión algebraica de la función que relaciona las magnitudes variables tiempo y posición, la cual se encontraba en la vista algebraica de la simulación. Además, la estudiante tiene la intención de obtener más datos a partir de la expresión, pero no continúa con algún planteamiento de solución.

Por tanto, se infiere que la estudiante realiza la operación mental de identificar y explicitar información, operación mental relacionada con la habilidad cognitiva de interpretar en el proceso de comunicación. Por ende, dada sus expresiones externas, se puede concluir que hace uso de esta habilidad cognitiva para mostrar un estado de conciencia acerca de la relación entre las magnitudes variables tiempo y posición (AM1).

A manera de síntesis, en relación con el acercamiento inicial a la situación problema, es decir mostrar la veracidad de la velocidad para cada sensor, se cuenta con la siguiente información hacia la caracterización de las habilidades cognitivas:

Tabla 11

Rejilla síntesis inicial de $\boldsymbol{E_1}$, $\boldsymbol{E_2}$ y $\boldsymbol{E_3}$ para $\boldsymbol{Ac_1}$

Proceso	**Habilidad cognitiva**	**Caracterización**	**Álvaro (E_1)**	**Sofía (E_2)**	**María (E_3)**	**Grupo**
Comunicación	Interpretar	Identifica y explicita el cambio entre las magnitudes variables tiempo y posición.	No	No	Sí	No

Uno de los tres estudiantes, presenta la operación mental de identificar y explicitar la relación entre las magnitudes variables tiempo y posición, la cual se relaciona con la habilidad de interpretar asociada al proceso de comunicación. Además, se infiere que las expresiones externas de María (E_3) aluden a la AM1, ya que en sus ideas manifiesta la relación entre las magnitudes variables tiempo y posición. En los casos de Álvaro (E_1) y Sofía (E_2), quienes no manifestaron alguna idea relacionada con el cambio en las magnitudes variables tiempo y posición, se infiere que esto pudo ser porque no tuvieron en cuenta la definición de velocidad. En el trabajo como grupo, una vez socializan sus ideas, los estudiantes relacionan explícitamente la relación del tiempo y la posición, con la velocidad.

4.1.2. Análisis de la entrevista

Las líneas en la transcripción de la entrevista Ac_1 se presentan en cuatro columnas. En la primera se hace referencia al tiempo transcurrido, en la segunda columna al número asignado a la línea de diálogo respectivo y en la tercera la persona que interviene: profesor-investigador: P (en negrilla) y los estudiantes: E_c, cuyo diálogo hecho texto se presenta en la última columna.

El entrevistador finaliza el momento del trabajo individual al cabo de 20 minutos. A continuación, inicia la conversación en relación con la tarea relacionada a la introducción sobre la velocidad, la cual es contenida en A_1. Inicia con preguntas relacionadas al concepto personal de los estudiantes sobre la velocidad, solicita explicaciones con ejemplos e indaga por la información que suministra la simulación que acompaña dicha actividad.

00:50	1	P	**¿Qué se nos pregunta en el problema?**
	2	E_3	La velocidad
	3	P	**Bien, es eso, la velocidad. Por favor, Sofía puedes pasar y compartir sobre lo que entiendes por velocidad. Y los demás pueden intervenir si quieren, aportar o refutar algo de Sofía.**
	4	E_2	Es la aceleración, la rapidez, más que todo es como la rapidez con la que ocurre algo. ¿Si me hago entender? Por ejemplo…
	5	P	**Sí, puede ser, de un ejemplo.**
	6	E_2	Estoy pensando. Sabemos que un objeto que se ha lanzado con un impulso *[realiza una línea horizontal en el tablero]*, una aceleración, ya sea en una línea recta o en un curva, incluso en el vacío, va a describir una trayectoria.
	7	P	**¿Cómo en el problema?**
02:06	8	E_2	Sí. Va a describir una trayectoria y esa trayectoria tiene una rapi…, ósea ese objeto se mueve con cierta rapidez, ósea…
	9	P	**¿Qué es rapidez?**
	10	E_2	Bueno. No se…

En el trabajo individual Sofía (E_2) no expresa alguna idea o planteamiento inicial para dar respuesta a la situación planteada (Tabla 1). Lo anterior se evidencia en la entrevista a través de sus respuestas, ya que mostró falta de claridad para dar una explicación a su idea personal sobre velocidad [$\mathrm{E}_{2(4-10)}$]. Ideas como la aceleración y rapidez surgieron de su diálogo, pero se continúa con el guion establecido para indagar sobre el concepto de velocidad en los estudiantes Acto seguido se le solicita a Álvaro (E_1) que continúe y brinde su opinión al respecto.

	11	P	**Álvaro, ¿usted conoce algo que le diga cómo es la velocidad?**
	12	E_1	Sí. Posición y tiempo.
	13	P	**¿S**abían eso? ¿Están de acuerdo? *[refiriéndose a los demás]*
	14	E_2	Sí. Pero no sé… *[hubo un silencio]*.
	15	P	**Álvaro, ¿quiere compartir lo que entiende por velocidad?**
03:10	16	E_1	La velocidad es la varía… e… Que tanto varía un objeto en su posición a medida que transcurre el tiempo.
	17	P	**Un ejemplo.**
	18	E_1	E… un ejemplo, pues… un carro que va por una carretera.
	19	P	**Listo.**
	20	E_1	E… Entonces…
	21	P	**Ahí tenemos un contexto.**
	22	E_1	Sí el carro, si empezamos a medir desde el momento en que arranca o desde un tiempo t_0 cualquiera, él se va a ir desplazando *[movimiento gestual con las manos]* y el tiempo va a ir contando, ósea va a ir variando el tiempo y la posición, entonces la velocidad consiste en que tanta posición, e… no, que tanto puede variar su posición en el tiempo que le contemos, sí. Eso es.
04:04	23	P	**¿Qué es variar para usted?**
	24	E_1	Cambiar.
	25	P	**Bien. ¿Qué opinan los demás?**
	26	E_2 y E_3	No sí. Está bien.
	27	P	**Deme un ejemplo de una velocidad, por favor. Por ejemplo, tomemos el sensor 2. Dice que la velocidad es $1,75\ m/s$ escriba en el tablero por favor.**
	28	E_1	*[Escribe en el tablero]*
	29	P	**Según lo que usted nos dice, ¿qué quiere decir ese valor?**
	30	E_1	Eso quiere decir que con esa velocidad en un segundo recorro 1,75 m. Eso quiere decir.
	31	P	**¿Y en dos segundos?**
	32	E_1	Pues dos veces lo que recorre en un segundo.
	33	P	**¿Y eso siempre funciona?**
	34	E_1	Si no hay otra fuerza que me esté contrarrestando eso o interactuando en el fenómeno, sí.
	35	P	**¿De qué tipo movimiento estamos hablando?**
	36	E_2	Rectilíneo uniforme
	37	P	**¿Qué está sucediendo en ese fenómeno?**
05:23	38	E_2	Que la velocidad es constante.
	39	P	**Bien. ¿Y para la situación que se plantea, la velocidad es la misma?**
	40	E_1	No. Porque hay algo que esta interactuando en ese fenómeno a parte de la simple velocidad inicial con la que se lanza el objeto.
	41	P	**¿Qué se era eso que interactúa en el problema?**
	42	E_1 y E_3	La gravedad.

Álvaro (E_1) describe su idea de velocidad, al verbalizar, *qué tanto varía un objeto en su posición a medida que transcurre el tiempo* [$E_{1(16)}$]. El argumento anterior es sustentado por el ejemplo descrito líneas más a delante, en la que, a través de un movimiento gestual con sus manos indica el cambio en los valores de la posición [$E_{1(27-38)}$], hecho que manifiesta lo que entiende Álvaro (E_1) como variación, el cambio. Se identifica en Álvaro (E_1) la operación mental de identificar y explicitar la coordinación entre las magnitudes variables tiempo y posición (AM1).

Posteriormente, al preguntar a los demás estudiantes sobre estas ideas, manifestaron que estaban de acuerdo, y en el caso de Sofía (E_2) manifiesta un avance en su interpretación, como se observa en líneas más adelante.

	43	E_1	Una pregunta. Si yo quiero resolverlo, ¿puedo usar aproximaciones de $9{,}8\ m/s^2$?
	44	P	**Puede usar el que usted le parezca. Por otra parte, quisiera saber ¿qué información adicional les dio el archivo? ¿Hay alguna diferencia entre que yo solamente les haya entregado la hoja de trabajo?**
	45	E_1	Primero que el objeto no parte del piso, ¿sí? Que parte de una altura, pero… ¿Cuál otra?
	46	P	**Los demás pueden hablar.**
	47	E_2	Una tabla de valores en la que nos damos cuenta de que el tiempo, ósea la parte de la velocidad, cuando el objeto, en este caso una pelota, está haciendo una posición en cierto tiempo, nos dice cuál es la coordenada de ese punto.
	48	E_3	Y la función.
07:17	49	E_1	Sí, la función posición tiempo del fenómeno.
	50	P	**Bien. Vamos a terminar esta parte, y a modo de conclusión en la hoja de trabajo van a contestar las siguientes preguntas:** - **¿Qué entienden por velocidad?** - **¿Qué necesito para hallar la velocidad?**

Sofía (E_2) al expresar, *nos dice cuál es la coordenada de ese punto* [$E_{2(47)}$] hace referencia explícita de la relación entre las magnitudes variables tiempo y posición (AM1). Se infiere que, a través de los diálogos anteriores durante la entrevista, son los que le permiten percatarse y manifestar abiertamente esta idea.

Con respecto a María (E_3), durante la entrevista tuvo una participación pasiva, pero dio respuesta a las preguntas planteadas en la segunda parte de la actividad (comunicando y compartiendo):

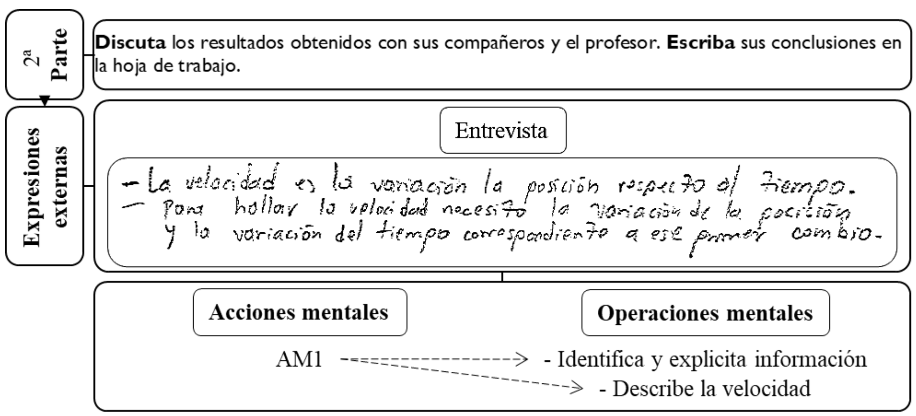
- ¿Qué entienden por velocidad?
- ¿Qué necesito para hallar la velocidad?

4.1.3. Habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos

En las siguientes figuras se presentan las acciones y operaciones mentales logradas por cada uno de los estudiantes, obtenidas a partir del trabajo realizado por estos en su interacción durante la entrevista para Ac_1. Se exponen las expresiones externas y se señala con líneas a trozos en negrilla, la relación entre las acciones y las operaciones mentales identificadas posterior a la entrevista.

Figura 14

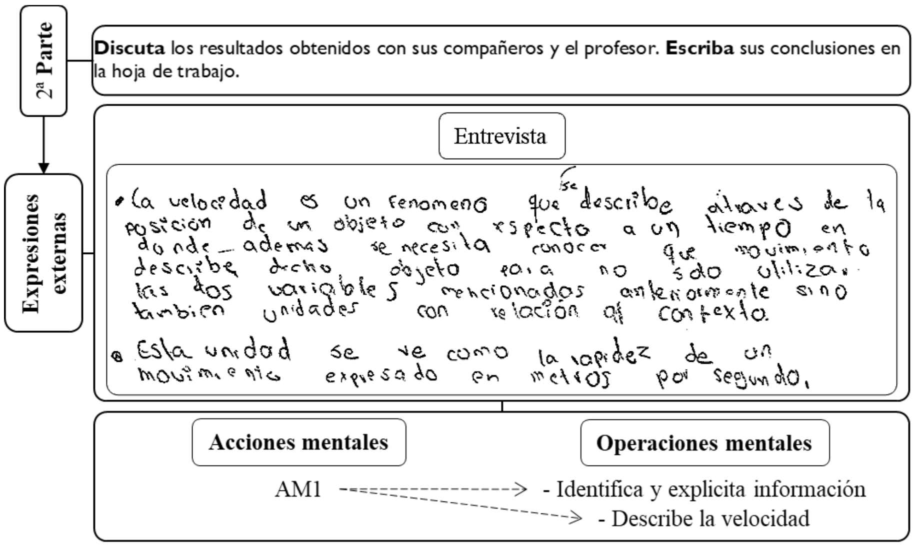
Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_1P_2E_1}$.



En el caso de Álvaro (E_1), y en relación con las operaciones mentales de la primera parte (Figura 1), si bien había explicitado información errónea o no, referente al contexto de la situación problema, durante y posteriormente a la interacción con sus compañeros, manifiesta explícitamente la relación entre las magnitudes variables tiempo y posición (AM1). Por sus diálogos en la entrevista como en sus conclusiones, en que menciona a la velocidad como la variación entre dichas magnitudes variables se infiere que exterioriza las habilidades de interpretar y explicar para el proceso de comunicación.

Figura 15

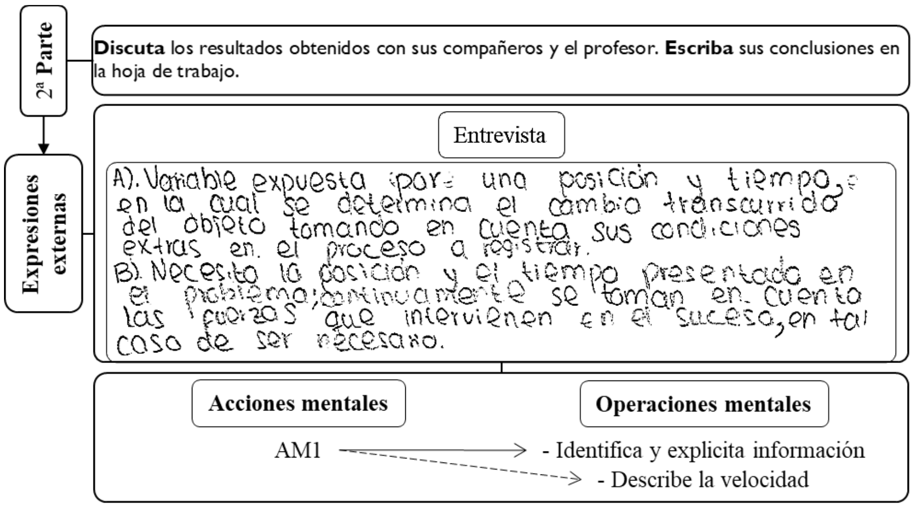
Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_1P_2E_2}$



Para Sofía (E_2), a medida que transcurre la entrevista, toma en consideración los planteamientos de sus compañeros y logra establecer explícitamente la relación entre las magnitudes variables tiempo y posición. Durante la entrevista manifiesta explícitamente cómo la representación tabular de los valores en el tiempo y los valores de la posición del objeto da cuenta de la coordenada del punto que describe el lugar geométrico de la función que describe la posición en términos del tiempo (AM1). Además, el hecho anterior se reitera en la descripción de la velocidad dada en las conclusiones, en la segunda parte, posterior a la entrevista. Por tanto, se logra evidenciar en Sofía (E_2) el uso de las habilidades de interpretar y explicar asociadas al proceso de comunicación.

Figura 16

Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_1P_2E_3}$



En el trabajo realizado individualmente, María (E_3) solo establece explícitamente la relación entre las magnitudes variables tiempo y posición; a pesar de su participación pasiva durante la entrevista, en sus conclusiones tiene en cuenta lo comentado por sus compañeros durante la misma para la descripción de la velocidad.

Los estudiantes para este momento realizan una descripción de la velocidad, sin embargo, en sus ideas, si bien resaltan la relación entre dichas magnitudes variables, no muestran claridad en sus explicaciones sobre qué tener en cuenta para hallarla.

A manera de síntesis, como se ha evidenciado anteriormente, en el trabajo individual solo uno de ellos (María) pudo activar la AM1 al identificar y explicitar la coordinación entre las magnitudes variables tiempo y posición. Posteriormente, en el trabajo realizado como grupo durante la entrevista, las ideas expuestas por unos y otros posibilitaron que compartieran el concepto de la velocidad, expresado por Álvaro como la variación entre la posición con respecto al tiempo.

Posterior a la entrevista, y en relación con las habilidades que se identificaron en los estudiantes, se generan modificaciones en cuanto a la identificación y explicitación de magnitudes variables y surge la descripción de la velocidad, ambas desde una mirada de la AM1. La información obtenida se resume en la siguiente tabla:

Tabla 12

Rejilla síntesis final de $\boldsymbol{E_1}$, $\boldsymbol{E_2}$ y $\boldsymbol{E_3}$ para $\boldsymbol{Ac_1}$

Proceso	Habilidad cognitiva	Caracterización	Álvaro (E_1)	Sofía (E_2)	María (E_3)	Grupo
Comunicación	Interpretar	Identifica y explicita el cambio entre las magnitudes variables tiempo y posición.	✓	✓	Sí	✓
	Explicar	Describe la velocidad como la variación de la posición con respecto al tiempo.	✓	✓	✓	✓

Es importante resaltar que la interacción durante la entrevista grupal generó modificaciones en las interpretaciones realizadas inicialmente por los estudiantes; por una parte, posibilitó que uno de los estudiantes (E_1) expresara su concepto de velocidad y, por otra, que los demás compañeros (E_2 y E_3) lograran tener en cuenta aquellas ideas de variación asociadas a la velocidad.

A continuación, se continúa con las demás tareas las cuales permiten darle solución a la situación problema presentada en párrafos atrás.

4.2 Tarea sobre el qué, cómo y cuánto varían (Actividad 2)

En seguida, se presenta la rejilla con la información del trabajo realizado por los estudiantes para la Actividad 2 (Ac_2), a la tarea sobre el qué, cómo y cuánto varían las magnitudes asociadas a la velocidad. Además, cabe recordar que dicha actividad inicia el planteamiento de solución a la situación problema presentada en la actividad anterior, junto con un archivo con nuevas opciones de interacción y observación, descrito en el capítulo anterior. Posteriormente, se presentan las figuras obtenidas a partir de dicha rejilla, correspondientes a las acciones y operaciones mentales activadas y logradas por cada uno de los integrantes del grupo en relación con la tarea mencionada. Finalmente se realiza un análisis de la entrevista, apoyado en la trascripción realizada.

4.2.1. Rejillas de respuestas y figuras de acciones y operaciones mentales

El grupo sigue integrado por Álvaro ($\mathrm{E_1}$), Sofía ($\mathrm{E_2}$) y María ($\mathrm{E_3}$) para $\mathrm{Ac_2}$.

Tabla 13

Rejilla de respuestas $\boldsymbol{Ac_2}$

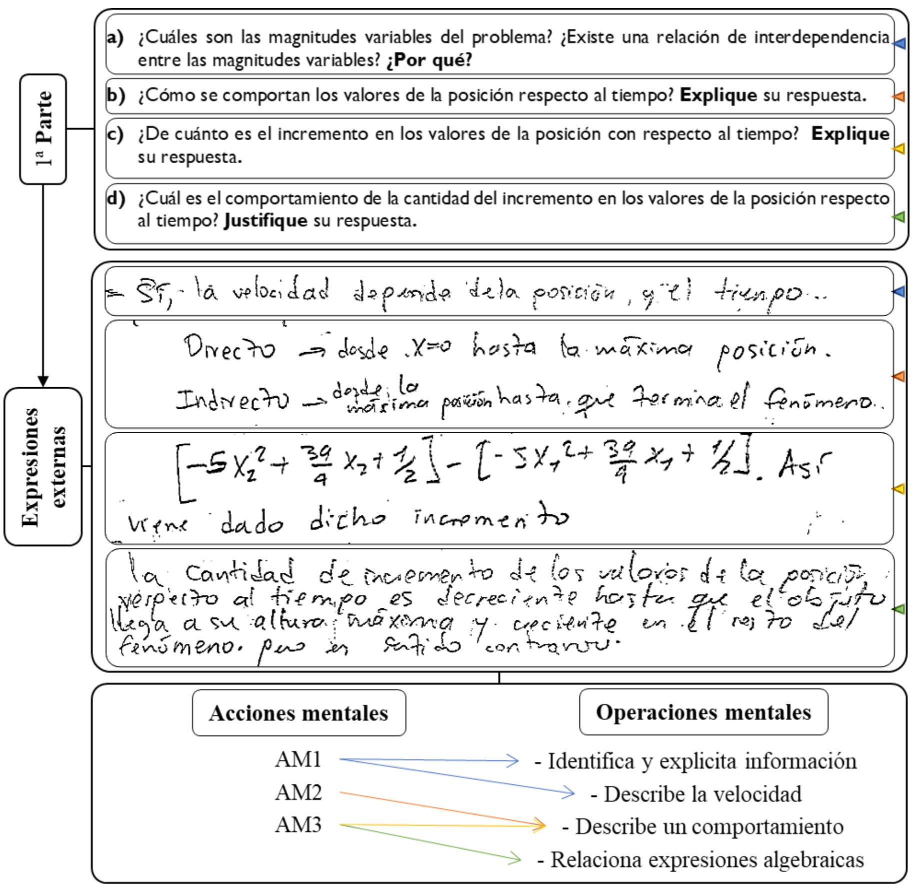
Tarea Qué, cómo y cuánto varían **Actividad 2**	**Instrumento Individual**			**Trabajo en grupo** Entrevista
Ítem/Estudiante	**$\mathbf{E_1}$: Álvaro**	**$\mathbf{E_2}$: Sofía**	**$\mathbf{E_3}$: María**	**$\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ y $\mathbf{E_3}$**
a) ¿Cuáles son las magnitudes variables del problema? ¿Existe una relación de interdependencia entre las magnitudes variables? ¿Por qué?	- Velocidad, posición, tiempo. - Sí, la velocidad depende de la posición y el tiempo. Porque a medida que ocurre el fenómeno estas magnitudes cambian. *[explica empíricamente el cambio].*	- Velocidad del objeto, la distancia y el tiempo. - Sí existe, la velocidad es una magnitud que cambia debido a que siempre es un valor diferente (no constante) y para la obtención de esta se necesita posición y tiempo, si la velocidad cambia, dichas magnitudes también lo harán. *[distancia se refiere a la posición].*	La velocidad, se aprecian los factores que inciden en el sistema como la $y_{posición}$, $x_{incremento}$ y x_{tiempo}. *[identifica a $x_{incremento}$ como variable y explica empíricamente el cambio].*	*[Las magnitudes variables son el tiempo, la posición y la velocidad; en la que la velocidad depende de la posición y el tiempo].*
b) ¿Cómo se comportan los valores de la posición respecto al tiempo? Explique su respuesta.	- Directo: desde $x = 0$ hasta la máxima posición. - Indirecto: desde la máxima posición hasta que termine el fenómeno. *[indirecta se refiere a correlación inversa].*	Sí, la posición cambia, ya sea que aumenta o disminuye. Es debido a que el tiempo depende de la posición y la velocidad que se le aplique al objeto. *[explica empíricamente el cambio].*	Los $y_{posición}$ van en aumento hasta 0,966 en tiempo y a partir de allí los $y_{posición}$ disminuyen.	*[Sí el comportamiento en los valores de la posición aumenta, la velocidad es positiva o si disminuyen la velocidad es negativa].*
c) ¿De cuánto es el incremento en los valores de la posición con respecto al tiempo? Explique su respuesta.	Para un tiempo $t = x_2 - x_1$, le corresponde un incremento de $\left[-5x_2^2 + \frac{39}{4}x_2 + \frac{1}{2}\right] - \left[-5x_1^2 + \frac{39}{4}x_1 + \frac{1}{2}\right]$ *[utiliza la expresión dada para la posición en términos del tiempo].*	*[No muestra una respuesta].*	Datos: inicio, final e intermedio. *[halla la posición para algunos tiempos: $0\,s$, $2\,s$ y $0{,}966\,s$, pero no muestra una respuesta para el incremento].*	*[El incremento en una magnitud variable se calcula a través de la diferencia entre un valor "final" y un valor "inicial"].*
d) ¿Cuál es el comportamiento de la cantidad del incremento en los valores de la posición respecto al tiempo? **Justifique** su respuesta.	Es decreciente hasta que el objeto llega a su altura máxima y creciente en el resto del fenómeno, pero en sentido contario. *[el sentido contrario se refiere a lo negativo de los valores].*	*[No muestra una respuesta].*	*[No muestra una respuesta].*	*[Si el comportamiento en los incrementos de la posición decrece, la velocidad también lo hará. La velocidad como la razón entre el incremento en la posición y el*

incremento en el tiempo].

En las siguientes figuras se presentan las operaciones mentales logradas por cada uno de los estudiantes, obtenidas a partir del trabajo realizados por los mismos de forma individual. Debido a que las siguientes actividades están constituidas por más de una pregunta se hace uso de colores para mostrar la relación tanto de los ítems con las expresiones externas como la relación entre las acciones y operaciones mentales.

Figura 17

Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_2P_1E_1}$

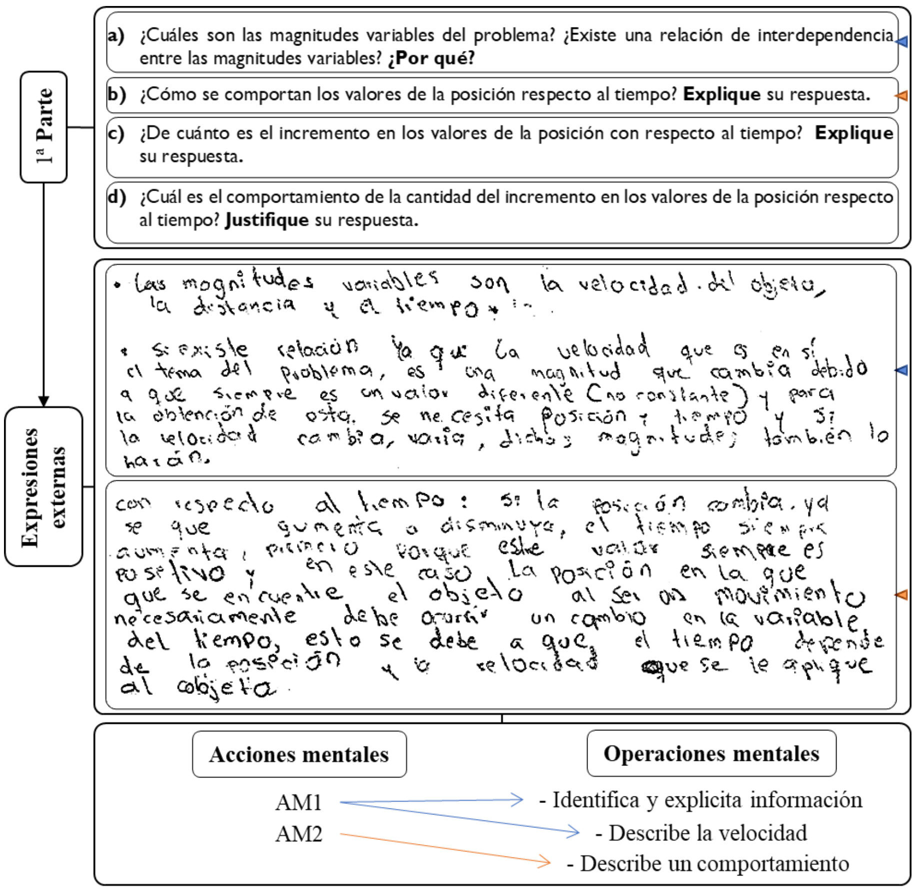


En su trabajo individual, Álvaro (E_1) en el ítem a), nuevamente hace uso de la interpretación y la explicación, habilidades cognitivas que le permiten explicitar y describir la velocidad a partir de la relación entre las magnitudes variables tiempo y posición (AM1). En el ítem b) señala el cómo se comportan los valores de la posición con respecto al tiempo a través de la correlación entre variables directa e inversa. A pesar de que en su lenguaje utiliza lo indirecto para indicar lo inverso, se entiende que hace referencia a la disminución de los valores de la posición respecto al tiempo (AM2). Según lo anterior, el estudiante hace uso de la habilidad cognitiva de explicar asociada al proceso de comunicación, ya que, por su expresión externa, describe que los valores en la posición; primero, aumentan y luego disminuyen.

Para los demás ítems, se deduce que el estudiante al no poder dar una respuesta específica del cuánto es el incremento en la posición respecto al tiempo, hace uso de la operación mental de relacionar expresiones algebraicas con la cantidad del cambio de manera general, es decir, hace uso de la habilidad cognitiva de utilizar procedimientos analíticos. Además, nuevamente hace uso de la explicación para describir el comportamiento de decrecimiento en la cantidad del incremento de la posición respecto al tiempo (AM3). Para describir el comportamiento luego de la altura máxima, utiliza el valor absoluto en los valores del incremento de la posición, para expresar que tales cantidades crecen, pero como Álvaro lo expresa "en sentido contrario", es decir, negativo.

Figura 18

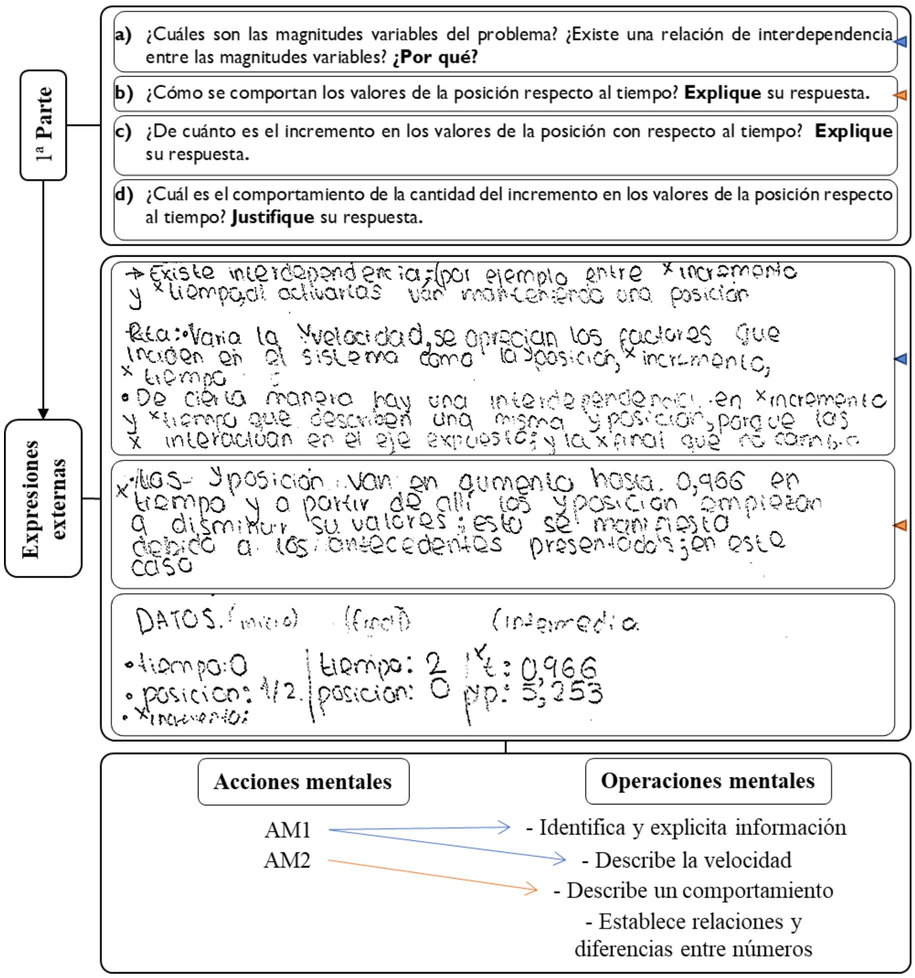
Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_2P_1E_2}$



En su trabajo individual, Sofía (E_2) activa dos acciones y tres operaciones mentales. Explicita y describe la velocidad como la coordinación del cambio de las magnitudes variables tiempo y posición (AM1). Aunque presenta dificultades para describir la interdependencia entre las magnitudes variables tiempo, posición y velocidad, se hace posible identificar en sus expresiones externas la acción mental relacionada a la dirección del cambio (AM2). Por tanto, y a diferencia de Álvaro, Sofía solo manifiesta las habilidades de interpretar y explicar, asociadas al proceso de comunicación.

Figura 19

Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_2P_1E_3}$



Por otra parte, en su trabajo individual, María (E_3) al igual que sus compañeros hace uso de las habilidades de interpretación y explicación a través de la acción mental de coordinar el cambio de las magnitudes variables posición y tiempo (AM1). Además, en este mismo ítem manifiesta que hay una relación de interdependencia entre el tiempo y el incremento en el tiempo, se puede inferir que habla de la relación $\Delta t = t - t_0$ para algún t_0 específico. Debido a que no hay expresiones externas suficientes para asegurar este hecho, no es posible inferir que se trate de la activación de la coordinación cuantitativa del cambio (AM3).

Para el ítem b) describe la dirección del cambio entre las magnitudes variables (AM2) y a diferencia de sus compañeros brinda información adicional como el punto máximo aproximado que puede alcanzar el objeto. Lo anterior, probablemente fue posible a través de la observación de los datos que provee el archivo para el desarrollo de esta actividad. Y finalmente, para el ítem c) se admite que intenta hacer uso de la habilidad cognitiva, relaciona el proceso procedimental al establecer relaciones y diferencias entre números (datos) para mostrar la cantidad de cambio en diferentes momentos (AM3). Pero no se cuenta con la suficiente información para concluir lo anterior.

A manera de síntesis, los tres estudiantes manifestaron las habilidades cognitivas de interpretación y explicación asociadas al proceso de comunicación para mostrar el qué (AM1) varía (posición y tiempo) y el cómo varían las magnitudes involucradas en la solución de la situación problema (AM2). Pero solo Álvaro (E_1) presentó un acercamiento a explicar el comportamiento de la cantidad del cambio en la posición, es decir, el incremento en la posición respecto al tiempo. En resumen, la información emergente para la primera parte de esta actividad puede resumirse así:

Tabla 14

Rejilla síntesis inicial de $\boldsymbol{E_1}$, $\boldsymbol{E_2}$ y $\boldsymbol{E_3}$ para $\boldsymbol{Ac_2}$

Proceso	**Habilidad cognitiva**	**Caracterización**	**Álvaro (E_1)**	**Sofía (E_2)**	**María (E_3)**	**Grupo**
Comunicación	Interpretar	Identifica y explicita el cambio entre las magnitudes variables tiempo y posición.	Sí	Sí	Sí	Sí
	Explicar	Describe la velocidad como la variación de la posición con respecto al tiempo.	Sí	Sí	Sí	Sí
		Describe el comportamiento de los valores en la posición respecto al tiempo.	Sí	Sí	Sí	Sí
		Describe el comportamiento de los incrementos de la posición respecto al tiempo.	Sí	No	No	No
Procedimientos	Analíticos	Relaciona expresiones algebraicas con los incrementos del tiempo y la posición.	Sí	No	No	No

4.2.2. Análisis de la entrevista

Las líneas en la transcripción de la entrevista Ac_2 se presentan en cuatro columnas. En la primera se hace referencia al tiempo transcurrido, en la segunda al número asignado a la línea de diálogo respectivo, y en la tercera, la persona que interviene: profesor-investigador: P (en negrilla) y los estudiantes: $\mathrm{E_c}$, cuyo diálogo hecho texto se presenta en la última columna.

El profesor-investigador (P) finaliza el trabajo individual al cabo de 20 minutos. Este inicia la conversación en relación con los ítems contenidos en Ac_2. Como parte del guion establecido para la entrevista, se realizan preguntas enfocadas a describir la velocidad según las respuestas de los estudiantes a los ítems planteados. Es pertinente aclarar que el trabajo grupal en Ac_2 es dividido en dos momentos debido a la culminación del tiempo disponible para el lugar de trabajo.

	1	P	**Pasa para la primera parte, ¿listo? Escribe las respuestas que colocaste en la hoja de trabajo. ¿Cómo dice la primera pregunta?**
	2	E_3	¿Cuáles son las magnitudes variables del problema? ¿Existe alguna relación de interdependencia …?
	3	P	**Vamos con la primera pregunta que aparece en el enunciado. ¿Cuáles son …?**
00:55	4	E_3	La velocidad cambia. ¿Escribo lo que coloque en la hoja?
	5	P	**Si tranquila. En resumen, si prefieres.**
	6	E_3	Inicialmente puse que la velocidad.
	7	P	**¿Por qué?**
	8	E_3	Pues cambia. Pues pude apreciar eso.
	9	P	**¿Qué más pudiste apreciar? ¿Es la única magnitud variable del problema? ¿Qué opinan los demás?**
02:23	10	E_1	La velocidad depende de la posición y el tiempo.
	11	E_3	Si.
	12	P	**Escribamos esas.**
	13	E_3	A pues sí, yo decía que era la velocidad de una manera relevante. Porque estas van cambiando en el contexto.
	14	P	**Entonces ¿el tiempo, la posición son magnitudes variables?**
	15	E_3	Sí. Porque cambian.
	16	P	**¿Qué fue lo que dijiste sobre la velocidad? *[refiriéndose a E_1]***
	17	E_1	Ella depende de la posición y el tiempo.
	18	E_3	Sí, ella depende.

En el trabajo individual María (E_3) centra su atención en la velocidad al momento de identificar y explicitar las variables [$E_{3(6-8)}$] en la primera pregunta del ítem a). Para lo anterior, se hace posible inferir que es debido a que el archivo disponible para esta actividad, aparecen los valores dinámicos para la velocidad, tiempo, posición e incremento. Para este último, menciona que es una magnitud variable, y esto fue debido a la interacción con el deslizador que se encuentra para este en el archivo. Acto seguido, a través de la intervención de Álvaro (E_1) es posible explicitar las magnitudes variables tiempo y posición (AM1) [$E_{1(10)}$]. Lo anterior, permite a María expresar que sí las había identificado [$E_{3(28)}$].

	19	P	**¿Existe una relación de interdependencia entre las magnitudes variables? Entonces aquí lo vamos a hacer por partes. ¿Existe una relación entre el tiempo y la posición?**
	20	E_1, E_2 y E_3	Sí. Sí, la función.
	21	P	**¿Cómo así?**
03:14	22	E_1	La función la describe.
	23	P	**¿Cuál función?**
	24	E_1	La que nos da el archivo.
	25	P	**Vamos a escribirlo con otro color, porque creo que no se alcanza a ver, con el negro por favor. Listo. Vamos a escribir la función.**

26	E_1	*[E_3 escribe]* $-5x^2 + \frac{39}{4}x + \frac{1}{2}$. Donde x es mayor igual a un medio.
27	P	**Está expresión la indica el archivo. ¿Y esa es la función para el problema?**
28	E_3	Pues de cierta forma estaba mirando en el ejercicio anterior *[actividad anterior]*, tiene que ver con tiempo y posición. Por ejemplo, cuando el tiempo es cero pues se utiliza la función da la posición, por procesos matemáticos, nos daría la posición.
29	P	**Listo. Vuelvo y pregunto, nos dan esta expresión, ¿es la función para el problema?**
30	E_1	E …
31	E_2	Teniendo el tiempo al remplazarlo en la función vamos a tener es la posición que va a tener el objeto.

Para la segunda pregunta del ítem a) se dio una respuesta unánime entre el grupo para la relación entre el tiempo y la posición, la función [$E_{1,2,3(20-31)}$]. Lo anterior lo confirma María (E_3) al mencionar que según la actividad anterior ella se percata que la expresión dada por el archivo permite hallar la posición dada un tiempo específico [$E_{3(28)}$]. Lo relacionado a la pregunta que se plantea en la línea 28, los estudiantes describen que la expresión dada por el archivo describe más de lo que se tiene en el fenómeno del lanzamiento vertical y deciden restringir el tiempo hasta menor o igual a 2 segundos.

Álvaro (E_1) manifiesta la interdependencia entre la velocidad y el tiempo y la posición [$E_{1(35)}$]. Con respecto a lo que entienden por relación de interdependencia, los estudiantes la describen como aquella donde una magnitud variable está conectada a otra. Ideas que aluden al concepto de función que poseen, las cuales fueron utilizadas para favorecer el desarrollo de las tareas al encontrar una relación de interdependencia entre la velocidad y el tiempo [$E_{1,2(37-39)}$].

	32	P	**¿Quién sería x?**
06:10	33	E_2	El tiempo.
	34	P	**Especifiquemos quien es x en el tablero. Eso bien. ¿Por qué creen que es importante tener esto?**
	35	E_1	Precisamente la velocidad depende de esas dos variables.
	36	P	**Bien. ¿Entonces que vamos a encontrar? ¿Puede existir una relación de interdependencia entre quienes?**
	37	E_1	Entre …
	38	E_2	El tiempo …
	39	E_1	Tiempo y velocidad.

	40	P	**Listo, tranquilas. Vamos con el siguiente ítem. ¿Cómo se comportan los valores de la posición respecto al tiempo? Explica tu respuesta. ¿Qué escribiste?**
	41	E_3	Pues que, yo puse algo como que, miré …
08:15	42	P	**Léelo tranquila.**
	43	E_3	La y posición va en aumento hasta que se llega a un tope de $0{,}966$ e … donde ahí se tiene la mayor posición que puede, y a partir de allí que eso era como 5, … *[se refiere a la posición]*, yo no sé en qué tiempo, a partir de allí la y posición empieza a disminuir los valores, y eso fue lo que pude evidenciar.
	44	P	**Ella nos está diciendo que en un primer tramo los valores …**
	45	E_3	Van en aumento.
	46	P	**Y después …**
	47	E_3	Disminuyen.
	48	P	**¿Los demás están de acuerdo?**
	49	E_2	Sí.
	50	P	**¿Tú qué opinas?**
	51	E_1	Yo puse fue que, hasta el punto máximo de la posición, e … tenían un comportamiento directo respecto al tiempo, a medida que el tiempo avanzaba …

María (E_3) verbaliza el comportamiento de los valores en la posición respecto al tiempo (AM2). Además, brinda información sobre el valor máximo que puede llegar a tener, resultado de la exploración en el archivo [$E_{3(43)}$]. Por lo anterior, se decide dividir el fenómeno en dos tramos, momentos o intervalos bajo la descripción de que los valores, primero aumentan y luego disminuyen., hecho que confirman sus compañeros Sofía [$E_{2(49)}$] y Álvaro [$E_{1(51)}$]. Enseguida, se les pregunta por la velocidad según el comportamiento identificado.

11:26	52	P	**Bien. Según lo que ustedes entienden por velocidad, que de hecho han tenido una muy buena idea, solo en el tramo que es positivo, o como lo hemos dicho que aumentan, ¿qué podemos decir de la velocidad?**
	53	E_1, E_2 y E_3	*[se produce un silencio]*
	54	P	**Vamos a poner un ejemplo: 10 kilómetros por hora, inicio el recorrido, ¿qué quiere decir? Voy a recorrer en una hora …**
	55	E_3	$10\ km$.
	56	P	Bien eso es lo que me indica. ¿Avance? ¿Recorrí una distancia de manera positiva?
	57	E_1 y E_2	Sí.
	58	P	**Digamos que ahora iré más lento, a 5 kilómetros por hora. ¿Qué quiere decir? ¿Sigo aumentando la distancia recorrida?**
	59	E_1	Sí, sí.
	60	P	**Y de un momento a otro empiezo a ir a menos 10 kilómetros por hora. ¿Hacia dónde me voy?**
	61	E_2	Hacia atrás.

	62	P	**Eso sucede si tenemos un sistema de referencia. Entonces si los valores de la posición aumentan es por qué la velocidad ¿Qué?**
14:27	63	E_1	No puedo decir nada, hay velocidad simplemente positiva.
	64	P	**Eso. Ya. Si los valores aumentan la velocidad es positiva. ¿Y si los valores disminuyen?**
	65	E_2	Es negativa.
	66	P	**¿Están de acuerdo?**
	67	E_1, E_2 y E_3	Sí, sí.
	68	E_2	Incluso allí en la tabla, se ve.
	69	P	**Es de entender que es lo que sucede.**

Se produce un silencio por parte de los estudiantes al preguntarles sobre la velocidad según el comportamiento de aumento en los valores de la posición, se planea un ejemplo para que noten la relación entre dicho comportamiento y el valor que puede tener la velocidad para algún valor de ese intervalo [$E_{1(54-61)}$]. Probablemente por lo trivial del caso, los estudiantes no expresan en primera medida que si los valores en la posición aumentaban indicaba que la velocidad es positiva y caso contrario si es negativa. Pero luego, a través del ejemplo logran establecerlo e incluso estar de acuerdo [$E_{1,2,3(63-67)}$].

Antes de finalizar el tiempo asignado para la primera sesión, se alcanza a conversar sobre en qué consiste el incremento y sobre lo que refiere el ítem c) al preguntarnos sobre cuánto es el incremento; es decir, una cantidad para este. Ideas que fueron tomadas en la siguiente sesión a través de una tarea asignada al grupo durante la entrevista, con relación a los datos dados en la presentación del problema y la implicación de los comportamientos observados durante el trabajo individual.

20:30	70	P	**Vamos a decirlo que en el primer momento del fenómeno $0,8$ ¿en qué momento esta del fenómeno? María tu habías dicho que más o menos el punto máximo ¿era en que valor?**
	71	E_3	0,966.
	72	P	**Entonces $0,8$ esta en el primer momento y por tanto debe ser positiva la velocidad, como se puede apreciar en el registro. ¿Qué sucede cuando analizamos los incrementos?**
21:03	73	E_1	Que decrecen los valores de la posición.
	74	P	**¿Qué sucede con los valores de la velocidad?**
	75	E_3	La velocidad también.
	76	P	**¿Y en el registro se cumple eso?**

	77	E_1, E_2 y E_3	Sí.

El profesor-investigador destaca la importancia de apreciar el comportamiento en los valores de la posición y cómo estos tienen implicación en la velocidad del objeto para el valor en el tiempo $0{,}8\ s$ [$P_{(72)}$]. Posteriormente, se pregunta por el comportamiento de los incrementos, en la que Álvaro (E_1) menciona lo escrito en el trabajo individual: *decrecen los valores de la posición* [$E_{1(73)}$]. Acto seguido, se pregunta por cómo este comportamiento influye en la velocidad, en la que María (E_3) asimila un comportamiento similar para este [$E_{3(75)}$].

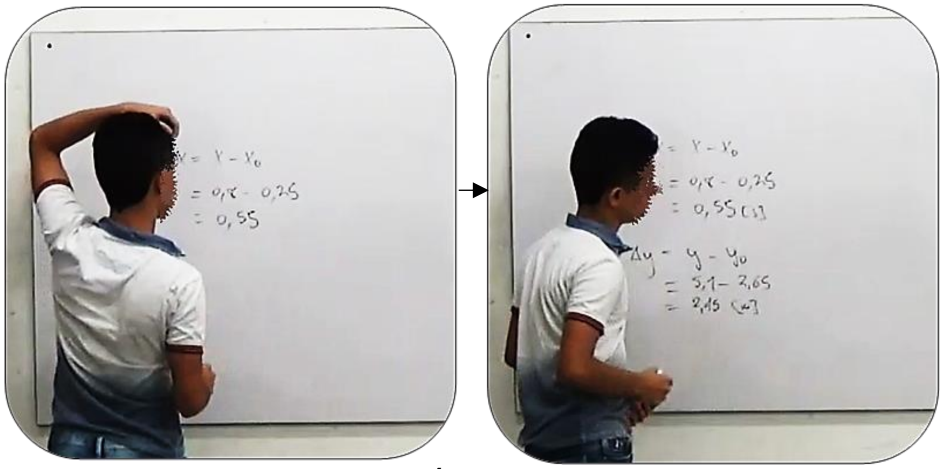
Con el objetivo de corroborar la información obtenida anteriormente, se propone la tarea de encontrar la velocidad promedio para el intervalo entre el primer y segundo sensor con tiempos de $0{,}25\ s$ y $0{,}8\ s$ respectivamente.

	78	P	**Vas a pasar al tablero y vamos a suponer que hay un incremento entre el sensor 1 y el sensor 2 *[se refiere a E_2]*. Con los datos que hay en la tabla quiero que me muestres cómo calcular el incremento en el tiempo y el incremento en la posición. ¿Listo? Sino tranquila que los compañeros te ayudan.**
	79	E_1	Utiliza la diferencia.
	80	E_2	¿Eso como el tiempo, pero con la posición?
	81	E_1	La misma sí. ¿Entre el sensor1 y el sensor 2?
	82	P	**Sí.**
22:43	83	E_1	El incremento en el tiempo es e … *[coge el marcador].*
	84	P	**¿Ya sabe con qué signo podemos escribirlo?**
	85	E_1	*[Hace el símbolo Δ].*
	86	P	**Exacto.**
	87	E_1	Suponiendo que este es un valor inicial. ¿Lo puedo escribir de una vez?
	88	P	**Como quiera. Tranquilo.**

Inicialmente se le solicita a Sofía (E_2) que muestre como calcular los incrementos, pero ante la duda de su compañera, Álvaro (E_1) toma la iniciativa y muestra cómo calcularlos. Durante la conversación manifiesta expresiones que permiten inferir que el estudiante realiza, en primera instancia, una lectura sobre el tema tratado en la sesión anterior, evidencia de ello es la forma de referirse al incremento con el símbolo Δ [$E_{1(85)}$].

Figura 20

Trabajo sobre los incrementos durante la entrevista de $\boldsymbol{Ac_2E_1P_2}$



En la imagen 1 se puede apreciar cómo Álvaro (E_1) hace uso de expresiones algebraicas para denotar el incremento para dos valores en el tiempo. Junto con sus compañeros calculan los valores que les permiten encontrar los incrementos, tanto para el tiempo como para la posición a través de sus respectivas imágenes.

	89	P	**Eso, bien. Les pregunto. Tengo los incrementos. ¿Puedo dar una velocidad para ese incremento de tiempo?**
	90	E_1	Sí.
	91	P	**¿Cómo?**
24:22	92	E_1	E... ¿Para ese incremento de tiempo? Pues esta, *[señala el incremento en la posición]* comparando la posición con el tiempo como razón.
	93	P	**Muéstrenos.**

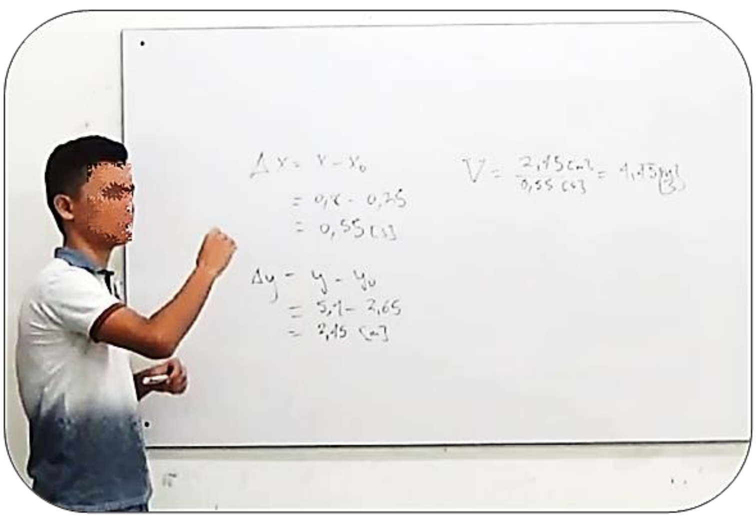
Acto seguido, se les pregunta si es posible encontrar una velocidad para ese incremento de tiempo entre el sensor 1 y el sensor 2, a lo que Álvaro responde que (E_1)se obtiene: *comparando la posición con el tiempo como razón* [$\mathrm{E}_{1(92)}$]. Se destaca el dominio que tiene el estudiante por la forma en la que muestra cómo encontrar una velocidad promedio para dicho intervalo. Además, el estudiante se refiere a la existencia de velocidades instantáneas (Imagen 2) y que la velocidad media es el resultado del promedio de todas estas [$\mathrm{E}_{1(102-104)}$].

24:57	94	E_1	Entonces e … digamos … *[escribe V].*
	95	P	**¿Por qué V?**
	96	E_1	Sí, velocidad.
	97	P	**¿Por qué?**

	98	E_1	Porque la velocidad es la razón [*escribe la razón con los valores obtenidos anteriormente].*
	99	E_3	4,45 periódico.
	100	E_1	*[Escribe las unidades correspondientes].*
	101	P	**¿Qué quiere decir que en ese incremento de tiempo la velocidad sea $4,45\ \mathrm{m}/s$?**
	102	E_1	Que la velocidad media en este intervalo de tiempo fue esa.
	103	P	**¿Qué significa que sea media?**
	104	E_1	Que es el promedio de todas las velocidad instantáneas.
	105	P	**Es decir que si yo tomo un valor de $0,3$ por ejemplo.**
	106	E_1	Eso tiene una velocidad instantánea.

Figura 21

Trabajo sobre la razón de cambio durante la entrevista de $\boldsymbol{Ac_2E_1P_2}$



Antes de dar paso a la tercera tarea sobre las razones de cambio (A_3), los estudiantes expresan y se corrigen entre sí para asignarle una velocidad a un valor que se encuentra entre el intervalo analizado a través de la velocidad promedio [$E_{1,2,3(108-111)}$].

	107	P	**¿O promedio? Con la información que tenemos, un valor aproximado para $0,3$ segundos, ¿cuál podría ser? Los demás también pueden participar.**
26:19	108	E_3	Esa. Si está en ese intervalo.
	109	P	**Exacto es por lo que usted dice que es promedio.**

110	E_1	¿Para 0,3 que me decía usted?
111	E_2	Que la de 0,3 cuánto seria. Y nosotros sacamos la velocidad promedio para un intervalo y ese está ahí.

Finalmente, se les solicita a los estudiantes contestar las siguientes preguntas para la parte de “comunicando y compartiendo”:

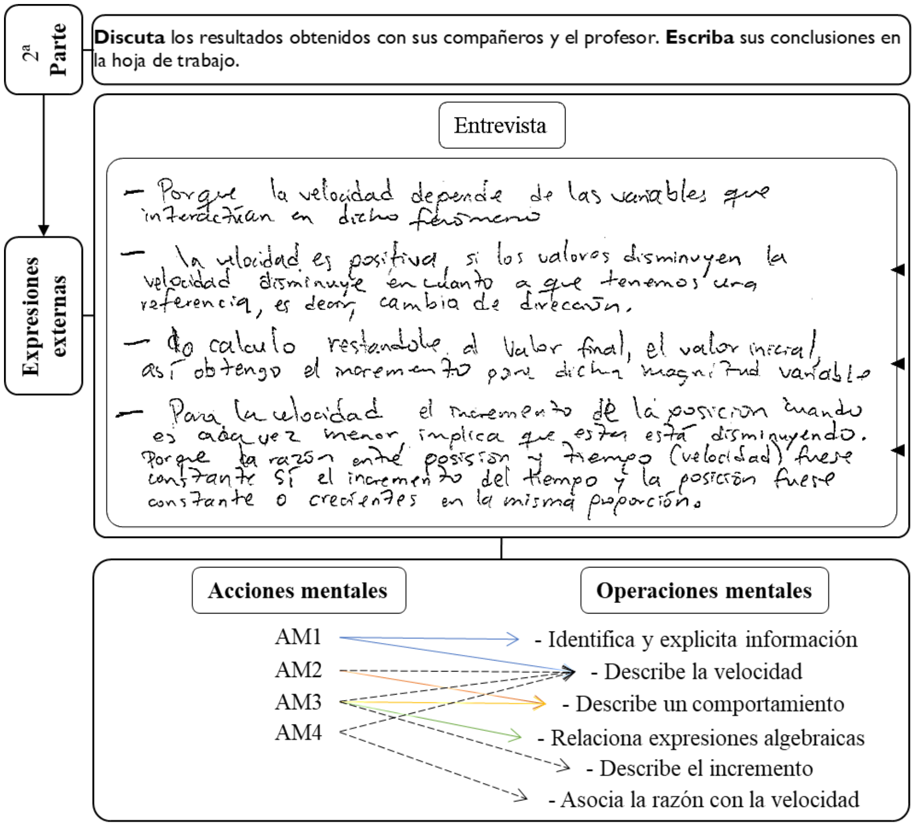
- ¿Cuál es la importancia de conocer las magnitudes variables en la situación problema?
- ¿Qué sucede con la velocidad si los valores de la posición aumentan o disminuyen?
- ¿Cómo se calcula un incremento?
- ¿Qué sucede con la velocidad si los incrementos en la posición son cada vez mayores o cada vez menores?

4.2.3. Habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos

En las siguientes figuras se presentan las acciones y operaciones mentales activadas por cada uno de los estudiantes, obtenidas a partir del trabajo realizado en grupo por dichos estudiantes. En estas figuras, mediante una línea continua, se señala la relación entre las acciones y operaciones mentales establecidas en la primera parte por cada uno de ellos. Las nuevas relaciones entre acciones y operaciones mentales, evidenciadas durante la entrevista en la interacción con sus compañeros y en las expresiones externas, son señaladas en la figura por líneas a trozos en color negro.

Figura 22

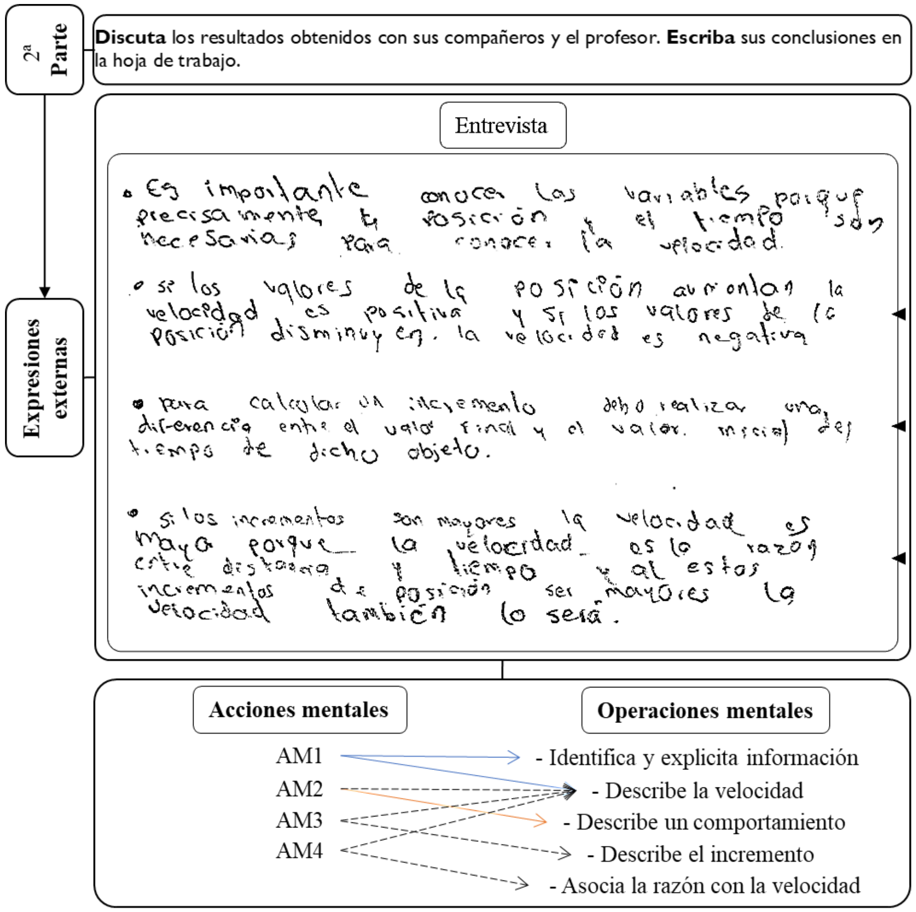
Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_2P_2E_1}$



Después de interactuar con sus compañeros, Álvaro (E_1) en sus conclusiones logra describir la velocidad según el comportamiento de los valores de la posición (AM2). A pesar de que desde un inicio no se percata de este hecho, junto con sus compañeros y la intervención de María (E_3), le permite describir los incrementos en las magnitudes variables y por ende describir a la velocidad a partir de estas (AM3). En su participación se evidencia cómo asocia la razón de cambio con la velocidad promedio (AM4), lo cual muestra el uso de la habilidad de explicar asociada al proceso de comunicación, y el reconocimiento de la representación de la derivada como razón.

Figura 23

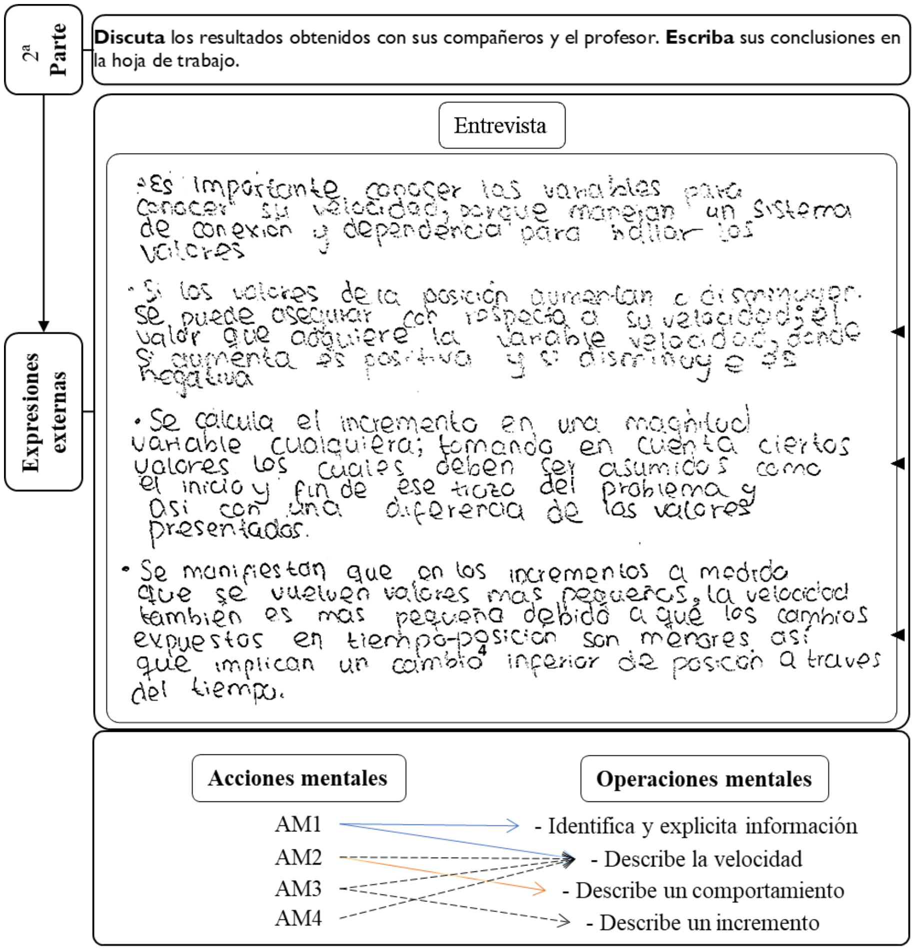
Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_2P_2E_2}$



Tras la entrevista, Sofía (E_2) logra asociar la razón de cambio con la velocidad (AM4) y por consiguiente describir la velocidad promedio. Lo anterior fue debido a la participación de sus compañeros, al compartir sus respuestas corrobora cómo se comportan los valores en la posición (AM2) y se percata de los incrementos en la posición para así lograr describir la velocidad (AM3). Contrariamente a su compañero Álvaro (E_1), que sí logra, desde el trabajo individual, relacionar expresiones algebraicas con los incrementos, Sofía manifiesta la habilidad de explicar con la intención de comunicar la manera en que se calculan.

Figura 24

Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_2P_2E_3}$



María, (E_3) al igual que sus compañeros, por medio de la entrevista, consigue usar la habilidad de explicar el cálculo de los incrementos en las magnitudes variables (AM3). A través de sus descripciones se puede evidenciar cómo logra indicar que la velocidad es vista como la comparación entre el tiempo y la posición, pero es posible inferir que en ese momento lo hace sin ser totalmente consciente que se refiere a la razón (AM4).

A manera de síntesis, después de la interacción en la entrevista, se evidencia que los estudiantes, describen la velocidad a través del análisis del comportamiento de los valores e incrementos en la posición. Lo anterior fue posible ya que, Álvaro (E_1) y Sofía (E_2), consiguen asociar la razón con la velocidad.

Tabla 15

Rejilla síntesis final de $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ y $\mathbf{E_3}$ para $\mathbf{Ac_2}$

Proceso	Habilidad cognitiva	Caracterización	Álvaro (E_1)	Sofía (E_2)	María (E_3)	Grupo
Comunicación	Interpretar	Identifica y explicita el cambio entre las magnitudes variables tiempo y posición.	Sí	Sí	Sí	Sí
	Explicar	Describe la velocidad como la variación de la posición con respecto al tiempo.	Sí	Sí	Sí	Sí
		Describe el comportamiento de los valores en la posición respecto al tiempo.	Sí	Sí	Sí	Sí
		Describe la velocidad según el comportamiento de los valores de la posición respecto al tiempo.	✓	✓	✓	✓
		Describe el cálculo de un incremento en una magnitud variable.	✓	✓	✓	✓
		Describe el comportamiento de los incrementos de la posición.	Sí	×	×	×
		Describe la velocidad según el comportamiento de los incrementos de la posición.	✓	✓	✓	✓
		Describe la velocidad como la razón de cambio promedio entre la posición respecto al tiempo.	✓	✓	✓	✓
Procedimientos	Analíticos	Relaciona expresiones algebraicas con los incrementos del tiempo y la posición.	Sí	×	×	×
Representación	Reconocer	Asocia la razón de cambio con la velocidad.	✓	✓	×	✓

4.3. Tarea sobre las razones de cambio (Actividad 3)

A continuación, se presenta la rejilla con la información del trabajo realizado por los estudiantes para la Actividad 3 (Ac_3), a la tarea sobre las razones de cambio como velocidad. Asimismo, cabe aclarar que dicha actividad continúa con el planteamiento de solución a la situación problema presentada en la primera actividad, junto con el mismo archivo utilizado en la actividad anterior. En seguida, se presentan las figuras obtenidas a partir de dicha rejilla, correspondientes a las acciones y operaciones mentales activadas y logradas por cada uno de los estudiantes del grupo en relación con dicha actividad. Posteriormente se realiza un análisis de la entrevista, apoyado en la trascripción realizada.

4.3.1. Rejilla de respuestas y figuras de acciones y operaciones mentales

Esta rejilla corresponde nuevamente al grupo de estudiantes Álvaro (E_1), Sofía (E_2) y María (E_3) para la tarea Ac_3.

Tabla 16

Rejilla de respuestas $\mathbf{Ac_3}$

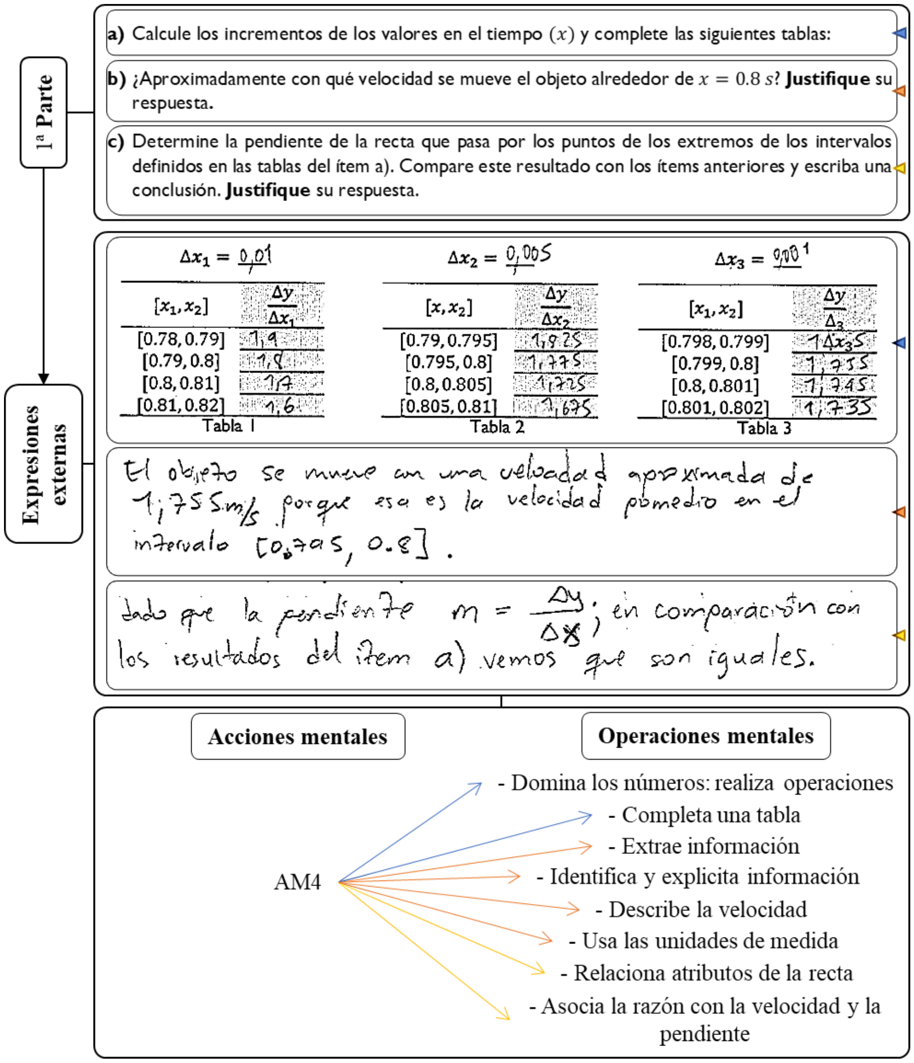
Tarea Razones de cambio **Actividad 3**	**Instrumento Individual**			**Trabajo en grupo** Entrevista
Ítem/Estudiante	**E_1: Álvaro**	**E_2: Sofía**	**E_3: María**	**E_1, E_2 y E_3**
a) Calcule los incrementos de los valores en el tiempo (x) y complete las siguientes tablas:	*[La tabla se encuentra completa].* La forma en la que hallé los valores a dichas tablas fue en una columna, saqué la longitud del intervalo a tratar y finalmente una columna correspondiente a la comparación de los valores Δy con Δx.	*[La tabla se encuentra completa].* Programa.	*[La tabla se encuentra completa].*	*[Están de acuerdo con los valores para las razones promedio alrededor de* 0,8 *s encontrados en las tablas].*

b) Aproximadamente, ¿con qué velocidad se mueve el objeto alrededor de $x = 0{,}8\ s$? Justifique su respuesta.	El objeto se mueve con una velocidad aproximada de $1{,}755\ m/s$ porque esa es la velocidad promedio en el intervalo $[0{,}795\ , 0{,}8]$.	Velocidad $= 1{,}75$ $V = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	$1{,}75\ (m/s)$: se puede denotar según el mecanismo de lanzamiento la velocidad obtenida en $x = 0{,}8\ s$; además, se realizan las fórmulas usando: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ entonces se obtiene: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}035}{0{,}02} = 1.75\ \left[\frac{m}{s}\right]$	*[Las idea de aproximación y tendencia surgen y concluyen una velocidad de $1{,}75\ m/s$ para el objeto en $0{,}8\ s$].*
c) Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos de los extremos de los intervalos definidos en las tablas del ítem a). Compare este resultado con el del ítem anterior y escriba una conclusión. Justifique su respuesta.	Dado que la pendiente $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; en comparación con los resultados del ítem a) vemos que son iguales.	*[No muestra una respuesta]*	Se mantienen en estos intervalos la velocidad promedio contando con el ejercicio anterior.	*[Relacionan la razón de cambio promedio con la velocidad y los atributos de la recta: pendiente, secante].*

En las siguientes figuras se presentan las operaciones mentales logradas por cada uno de los tres estudiantes, obtenidas de su trabajo individual. Nuevamente, como en la tarea anterior, en estas figuras se señalan mediante una línea continua, la relación entre las acciones y operaciones mentales activadas e identificadas, con el uso de colores.

Figura 25

Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_3P_1E_1}$



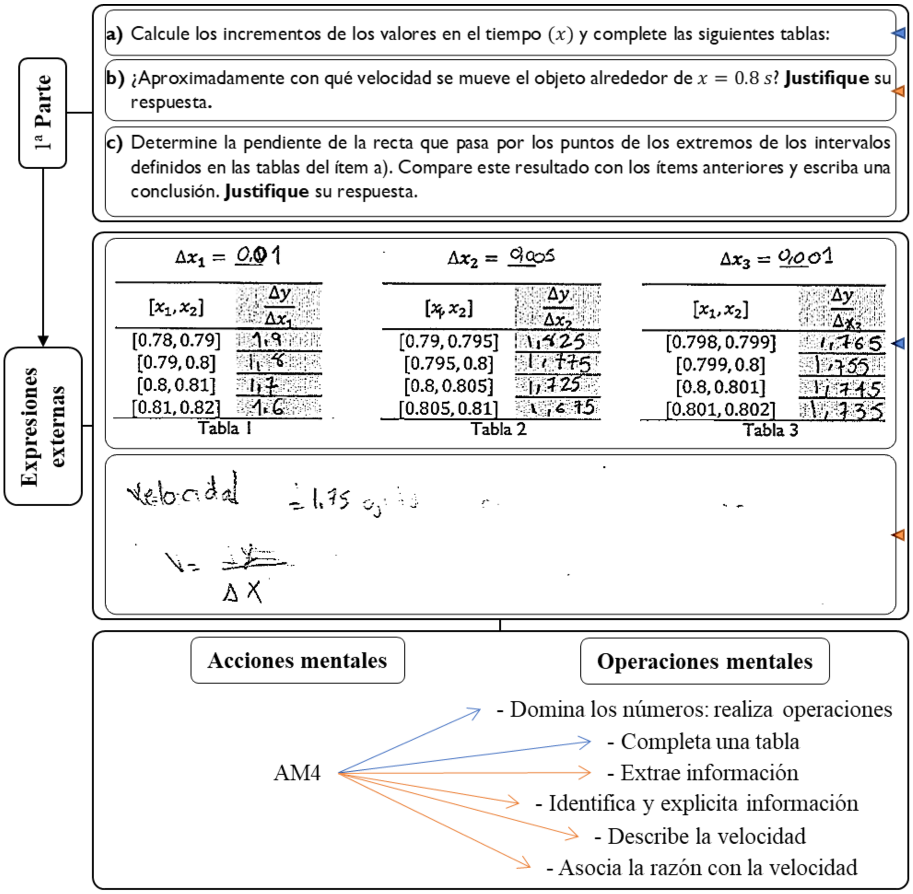
Álvaro (E_1) activa la razón de cambio promedio durante el desarrollo de su trabajo individual para Ac_3 (AM4). En sus expresiones externas se evidencia la realización de la tabla propuesta para el ítem a) en la que utiliza las herramientas disponibles en el archivo para completar dicha tabla. Lo anterior, fue posible a partir de la observación del profesor-investigador durante la sesión. Por tanto, al no ser explícito el uso de lápiz y papel, no es posible ignorar que el estudiante posee un dominio de los números para realizar operaciones, a pesar de que use herramientas computacionales para cumplir con el ítem. Por otro lado, a pesar de que la tabla hace parte del ítem, el hecho de completarla y encontrar razones alrededor de un valor permite generar una representación numérica; tales expresiones externas hacen parte de encontrar la velocidad instantánea en un valor en el tiempo. En este orden de ideas, es posible inferir que el estudiante hace uso de procedimientos aritméticos e inicia la construcción de la representación numérica de la derivada para encontrar la velocidad instantánea, habilidades asociadas a los procesos de elaboración y comparación de procedimientos y representación.

En el siguiente ítem, Álvaro extrae información tras completar la tabla, y la identifica y explicita con el objetivo de describir la velocidad alrededor del valor $0{,}8\,s$. Se piensa que al completar la tabla iba a percatarse de la tendencia a un valor para las razones de cambio dada la aproximación con intervalos más y más pequeños cercanos a $0{,}8$, pero en sus expresiones externas menciona una velocidad de $1{,}755\ m/s$ debido a que este fue el resultado obtenido en el intervalo $[0{,}795\,, 0{,}8]$, es decir, una velocidad media o promedio (AM4). Además, es de destacar que el estudiante hace uso de las unidades de medida, lo que permite inferir su estado de consciencia sobre quienes está actuando, el tiempo y la posición. Por tanto, habilidades como: interpretar, explicar y usar procedimientos métricos asociados a la comunicación, representación y la elaboración de procedimientos, se pueden evidenciar a partir de sus expresiones externas iniciales.

Finalmente, para el ítem c) Álvaro es consciente de la relación entre la pendiente de una recta y los valores obtenidos en el ítem a), es decir, las razones de cambio promedio (AM4). Según sus expresiones externas, es posible inferir el uso de atributos de la recta propios de la geometría y reconocimiento de representaciones al asociar la razón con la velocidad y la pendiente de la recta que pasa por los puntos de los intervalos, obtenidos alrededor de un valor en particular. Dichas habilidades se asocian a los procesos de comparación de procedimientos y representación respectivamente.

Figura 26

Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_3P_1E_2}$



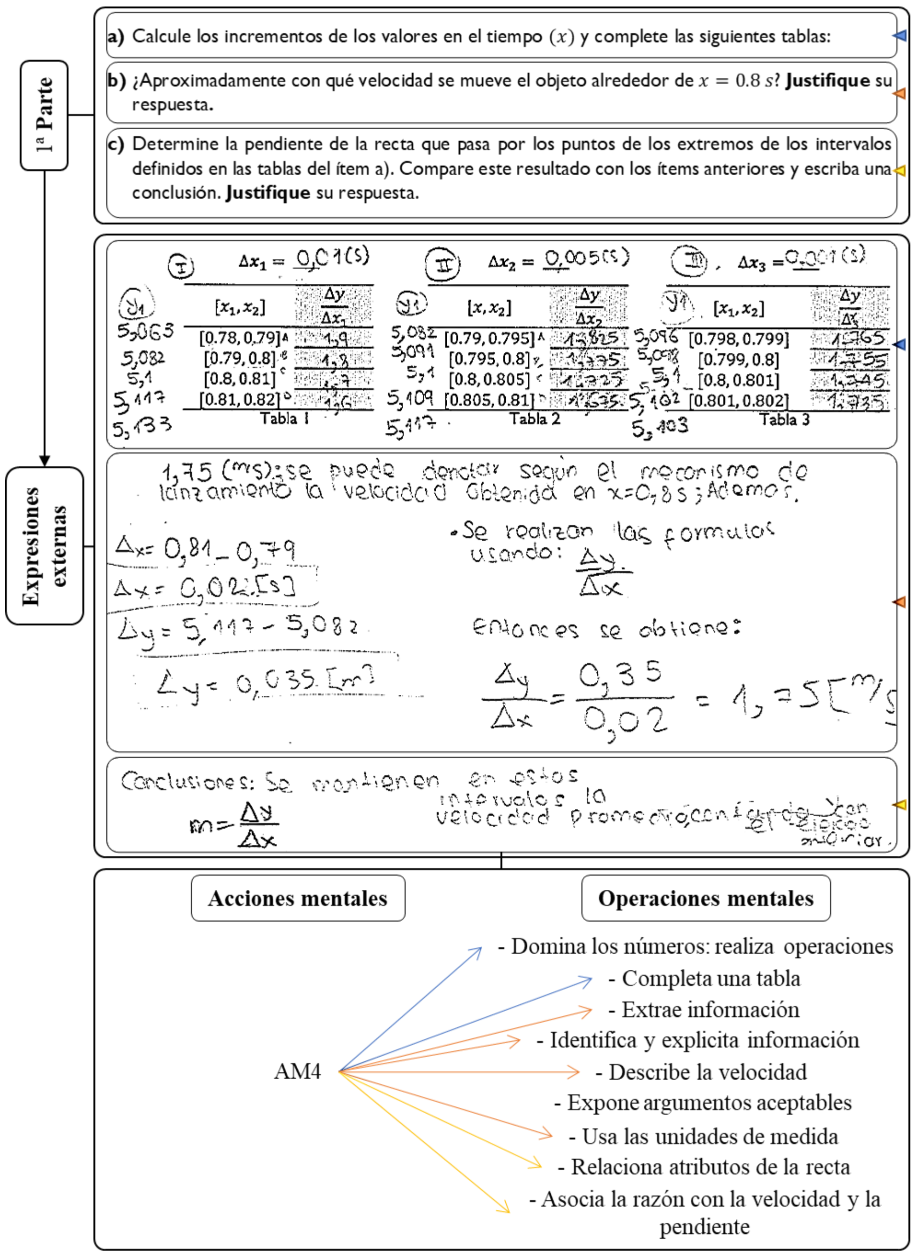
Sofía (E_2) en su trabajo individual, al igual que Álvaro (E_1), manifiesta un dominio de los números y realiza operaciones a través de las herramientas computacionales para completar la tabla relacionada a encontrar razones de cambio promedio (AM4). Por otra parte, se infiere que, al realizar la tabla, la estudiante extrae información para identificar y explicitar una aproximación a la velocidad para 0,8 s. A diferencia de Álvaro, Sofía no menciona o tiene presente las unidades de medida para la velocidad en sus expresiones externas, por tanto, no es posible hablar del uso de los procedimientos métricos por parte del estudiante.

Podría pensarse que a partir de examinar intervalos más y más pequeños la estudiante aproxima una velocidad de 1,75 m/s, es decir, pensar en una razón de cambio instantánea (AM5).

Pero al no contar con suficientes expresiones externas, no es posible afirmar que las habilidades de reconocer, interpretar y explicar asociadas a la representación y comunicación fueron usadas.

Figura 27

Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_3P_1E_3}$



En su trabajo individual, María (E_3) comparte expresiones externas con Álvaro (E_1) y Sofía (E_2) en las que se destacan las habilidades de usar procedimientos aritméticos y construir la representación numérica de la derivada, la razón de cambio promedio (AM4). Además, reconoce la relación entre las representaciones física (velocidad) y gráfica (pendiente) de la misma.

En cuanto al ítem b), es interesante ver que para interpretar y explicar la velocidad aproximada en $0{,}8\ s$ no solo extrae información para explicitar la velocidad, sino que intenta mostrar argumentos que se pueden considerar aceptables si se contara con más información. Lo anterior, es debido a que existe una relación a su conjetura de considerar incrementos que incluyan al valor $0{,}8\ s$, no como los propuestos en la tabla que son por "izquierda" menores o por "derecha" mayores a este valor. Dicha relación podría referirse a las ideas que sustentan el teorema del valor medio para derivadas, en el que establece que cuando una función g es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b), entonces debe haber por lo menos un punto sobre la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es la misma que la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $\left(a, g(a)\right)$ y $(b, g(b))$. Hay que recordar que la palabra medio se refiere a un promedio; es decir, que el valor de la velocidad en algún instante es el mismo que la razón de cambio promedio de la función sobre el intervalo.

A manera de síntesis, en relación con el planteamiento de solución de la situación problema, los tres estudiantes hicieron uso de las habilidades cognitivas relacionadas al uso de procedimientos aritméticos para generar la representación numérica de la derivada a través de las razones de cambio promedio para describir a la velocidad (AM4). Pero solo Álvaro (E_1) y María (E_3) inician un acercamiento para relacionar estas representaciones, en especial, cuando consideran atributos de la recta como su pendiente. En resumen, se cuenta con la siguiente información:

Tabla 17

Rejilla síntesis inicial de $\boldsymbol{E_1}$, $\boldsymbol{E_2}$ y $\boldsymbol{E_3}$ para $\boldsymbol{Ac_3}$

Proceso	Habilidad cognitiva	Caracterización	Álvaro (E_1)	Sofía (E_2)	María (E_3)	Grupo
Comunicación	Interpretar	Identifica y explicita la razón de cambio promedio.	Sí	Sí	Sí	Sí
	Explicar	Describe la velocidad como la razón de cambio promedio entre la posición respecto al tiempo.	Sí	Sí	Sí	Sí
Procedimientos	Aritméticos	Domina los números: determina y emplea las razones.	Sí	Sí	Sí	Sí
	Métricos	Selecciona y usa las unidades de medida para denotar la velocidad promedio.	Sí	No	Sí	Sí
	Geométricos	Relaciona atributos de la recta: su pendiente.	Sí	No	Sí	Sí
Representación	Construir	Genera la representación numérica de la razón de cambio promedio a partir de una tabla.	Sí	Sí	Sí	Sí
	Interpretar	Extrae información de la representación numérica de la razón de cambio promedio.	Sí	Sí	Sí	Sí
	Reconocer	Asocia la razón de cambio promedio con la velocidad media y la pendiente de la recta secante.	Sí	Sí	Sí	Sí

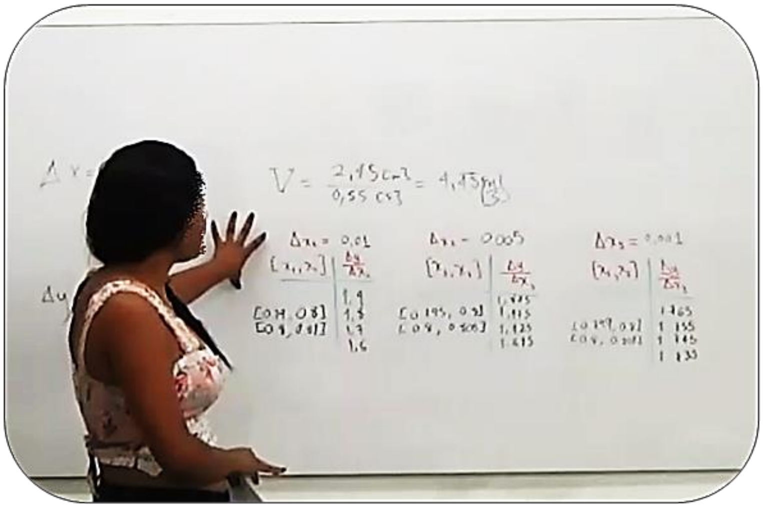
4.3.2. Análisis de la entrevista

Las líneas en la transcripción de la entrevista Ac_3 se presentan en cuatro columnas. En la primera se hace referencia al tiempo transcurrido, en la segunda columna al número asignado a la línea de dialogo respectivo y en la tercera a la persona que interviene: profesor-investigador: P (en negrilla) y los estudiantes: E_c, cuyo diálogo hecho texto se presenta en la última columna.

Posterior al trabajo individual, se le solicita a Sofía (E_2) que complete la tabla en el tablero. Se le pide que escriba solo los intervalos del medio, los cuales hacen referencia a las aproximaciones a $0{,}8\ s$ por "izquierda" y por "derecha, es decir, menores y mayores al valor como se puede observar en la imagen 1. Los anterior con el objetivo de centrar la entrevista hacia la tendencia que generan las razones al ir reduciendo el incremento en el tiempo a valores cercanos a $0{,}8\ s$.

Figura 28

Trabajo sobre las razones de cambio de $\boldsymbol{Ac_3P_1E_2}$



A continuación, se le pregunta por cómo halla esos valores, en la que manifiesta que utiliza las herramientas del archivo utilizando "la fórmula" de la razón; es decir el cociente entre los incrementos de la posición respecto al tiempo [$\mathrm{E}_{2(2-7)}$].

	1	P	**¿Cómo hallaste los valores?**
03:02	2	E_2	Utilicé el programa. Con la fórmula de la razón y escribía el valor del tiempo que necesitaba.
	3	P	**¿Y los decimales?**
	4	E_2	Sí, yo los coloque, los aproxime.
	5	P	**Bien. ¿La segunda está bien?**
	6	E_1	Sí.
	7	E_2	*[Describe cómo usar la hoja de cálculo cambiando el incremento en el tiempo].*
	8	P	**Coloquemos los intervalos de la mitad.**
	9	E_2	*[Escribe en el tablero].*
	10	P	**Gracias. Y en la última.**
	11	E_3	Entonces yo tengo que revisar por qué no lo hice bien.

María (E_3) expresa que probablemente comete un error, pero al hacer una revisión de su hoja de trabajo concluye que no fue así. Acto seguido, se les pregunta por la velocidad aproximada que puede tener el objeto al cabo de $0{,}8\,s$. Álvaro (E_1) tiene la idea de que al calcular las velocidades promedio alrededor de determinado valor, no es posible asignarle uno que se encuentre por debajo del mismo, en este caso de $0{,}8\,s$, y por tanto concluye que es $1{,}755\,m/s$

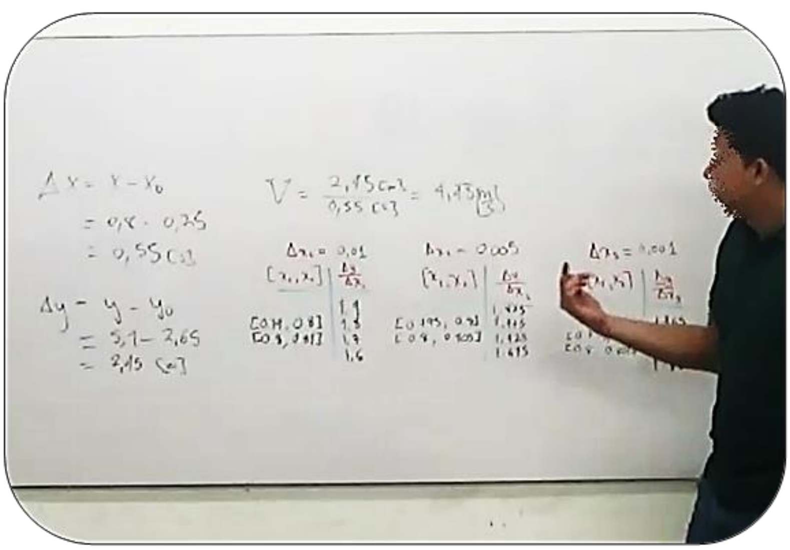
[$E_{1(13)}$]. Con respecto a lo anterior, probablemente se deba a la misma dinámica del problema; la velocidad al ser positiva debe indicar que el objeto se dirige hacia "adelante", que se dispone a recorrer una posición ascendente, y por tanto el estudiante no cree que pueda ser esta.

	12	P	**Por eso habíamos dicho que tanto el tiempo como el incremento podíamos darle el valor que quisiéramos. Tranquilos no importa si nos equivocamos aquí tenemos en el tablero la información. Listo. La siguiente pregunta. ¿Aproximadamente con que velocidad se mueve el objeto alrededor de $0,8\ s$? ¿Con qué velocidad? Si ustedes ven esta información …**
05:55	13	E_1	1,755.
	14	P	**¿Y por qué no puede ser $1,745$?**
	15	E_1	Porque en los promedios no se tiene en cuenta los primeros valores.
	16	P	**¿Por qué? ¿Y el segundo sí?**
	17	E_1	Sí.
06:42	18	P	**¿Seguro? Vamos a mirar que sucede con los incrementos *[se señalan los incrementos].***
	19	E_2 y E_3	Disminuyen.

Para avanzar con la entrevista, se les solicita a los estudiantes observar los incrementos tomados para cada una de las tablas, como se puede observar en la imagen 2. Rápidamente Sofía (E_2) y María (E_3) verbalizan que disminuyen [$E_{23(19)}$].

Figura 29

Trabajo grupal sobre las razones de cambio en Ac_3P_2



06:53	20	P	**¿Que estoy haciendo aquí? *[señala la tabla* $\mathbf{0,79}$*,* $\mathbf{0,795}$*,* $\mathbf{0,799}$*].***
	21	E_1	Disminuyendo el incremento.
	22	P	**Podría ser una opción.**
	23	E_2	Entonces yo podría haber sacado un promedio de esas tres para ver dado una velocidad
	24	P	**No porque no es necesario, si sacas un promedio de los tres ¿qué se estaría haciendo? Habrá que ponerle sentido. Si ustedes me dicen que el incremento se vuelve más pequeño. Volveré a preguntar. ¿Qué sucede con estos valores $\mathbf{0,79}$, $\mathbf{0,795}$, $\mathbf{0,799}$?**
09:32	25	E_2	Dando una aproximación
	26	P	**¿Hacia quién? ¿Hacia dónde?**
	27	E_2	Hacia el punto.
	28	E_1	**¿Aproximaciones hacia dónde?**
	29	E_2	0,8.
	30	P	**¿Y por este lado? *[se refiere a los valores mayores a* $\mathbf{0,8}$*].***
	31	E_2	También.
10:08	32	E_1	Se hace más fina la razón, la velocidad, se vuelve más exacta.
	33	P	**¿A nadie le dio curiosidad de colocar un incremento más pequeño a ver qué pasaba?**
	34	E_1	No, ya sabía que …
	35	P	**¿Ya sabía qué?**
	36	E_1	La velocidad
	37	P	**Pero la velocidad en $\mathbf{0,8}$ es $\mathbf{1,755}$ o $\mathbf{1,745}$?**
	38	E_1	1 …
	39	P	**Tomen un incremento más pequeño que este *[el último de la tabla].***
11:01	40	E_1	La distancia, la aproximación es la misma, digamos, entre el valor que está por debajo y el que está por encima.
	41	E_2	Es que …
	42	E_1	La diferencia entre el valor real, digamos es como un límite, es lo que yo me estoy acercando por un lado y por el otro, van a tender al mismo.
11:33	43	E_2	Yo lo que digo ahí, yo también hice lo mismo de agregar … hacerlo más pequeño, obviamente salen más decimales, entonces …
	44	E_1	Habría un margen de error.
	45	E_2	Por ejemplo, con 0,0001 la velocidad se convertía en 1,7495 entonces se aproxima a 1,75.

En primera instancia Álvaro (E_1) expresa que al observar los valores de $0{,}79$, $0{,}795$ y $0{,}799$ se disminuye el incremento [$E_{1(21)}$]. Pero como se puede evidenciar líneas más adelante en la conversación con Sofía (E_2), al destacar la idea de aproximación hacia un valor, en este caso a $0{,}8\ s$, a través de la disminución de los incrementos alrededor de este valor, tanto por “izquierda” como por “derecha” [$E_{2(25-31)}$], Álvaro manifiesta de forma verbal que: *se hace más fina la razón, la velocidad se vuelve más exacta* [$E_{1(32)}$]. Posteriormente, se retoma la pregunta planteada sobre si la velocidad para el objeto en $0{,}8\ s$ es $1{,}755\ m/s$ o $1{,}745\ m/s$, en la que Álvaro duda de dar una respuesta y, por tanto, surgen las ideas de aproximación y tendencia a un valor. Lo anterior resulta de plantear y encontrar una razón con un incremento más pequeño y cercano a $0{,}8\ s$ que el dado en las tablas [$\mathrm{E}_{1,2(40-45)}$].

	46	P	**¿En qué consiste un límite?**
	47	E_1	En ver cómo se comporta la función a valores aproximados a cierto punto.
	48	P	**¿Y cómo se hace eso?**
	49	E_1	Cuando me acerco a ambos lados.
	50	P	**¿Me acerco? ¿Hay aproximaciones?**
	51	E_1	Sí.
	52	P	**¿Y qué generan esas aproximaciones?**
12:30	53	E_1	Un valor.
	54	P	**¿En dónde?**
	55	E_1	En… las imágenes.
	56	P	**Eso sería el caso para el límite de una función. Yo realizo aproximaciones a un punto y cuando observo las imágenes, ¿qué se genera?**
	57	E_2	Una aproximación a otro punto.
	58	P	**Hablaríamos de tendencia a un valor. De hecho, una aproximación es una tendencia. El proceso que estoy haciendo aquí *[señala las tablas]* estoy aproximando y tendiendo a valor de $0{,}8$. Y en el caso de las funciones tendería a un valor en las imágenes que pueda o no que exista. ¿Pero de quién estamos hablando?**
13:41	59	E_1	De una razón.
	60	P	**Ahora para este problema, si yo me acerco por derecha o por izquierda, ¿es lo mismo o es diferente?**
	61	E_1	Al valor al que tienden es el mismo.
	62	P	**Entonces si es el mismo. Entonces no importa quien tome si las razones por derecha o las razones por izquierda. Bien. Aun no me han dado un valor para la velocidad en $0{,}8$. Ese es el siguiente paso.**

Al identificar el límite que se origina al analizar las razones alrededor de $0{,}8\ s$, se le pregunta a Álvaro (E_1) por sus ideas asociadas a este objeto matemático. En su descripción se destacan las ideas, como se describió anteriormente, sobre la aproximación y la tendencia en los valores para el dominio de una función [$\mathrm{E}_{1(47-57)}$]. Lo anterior es aplicado a los resultados obtenidos al completar las tablas, en la que para este caso quien origina una tendencia no son las imágenes de una función sino las razones que se generan alrededor del valor analizado previamente [$\mathrm{E}_{1(59-61)}$].

Para el ítem c), Álvaro (E_1) verbaliza: *porque tienen la misma fórmula, la misma expresión*, refiriéndose a que la pendiente de la recta secante es igual a la velocidad promedio para los mismo intervalos dados en el ítem a) [$\mathrm{E}_{1(64-68)}$]. Por consiguiente los demás estudiantes se percatan de esto como Sofía (E_2) a pesar de no haber contestado en el momento del trabajo individual [$\mathrm{E}_{2(69)}$]; y al confirmar María (E_3) su relación con la velocidad [$\mathrm{E}_{3(71)}$].

	63	P	**Bueno y la pregunta ¿qué sucede con las ... rectas *[se lee el enunciado]*? ¿Qué encontraron?**
16:07	64	E_1	Que la pendiente es igual a la velocidad.
	65	P	**¿Por qué?**
	66	E_1	Porque tienen la misma fórmula, la misma expresión.
	67	P	**¿Tú no alcanzaste a responder? *[se dirige a E_2]***
	68	E_1	Se definen igual.
	69	E_2	Pero sí, tienen la misma.
	70	P	**Sí, en este caso ... *[señala el tablero]*, tu cuando lo estabas haciendo, la encontraste *[se refiere a E_3]* ¿sí o no? De hecho, aquí el *[se refiere al archivo]* nos da el intervalo; en cierto intervalo, la velocidad promedio es ... y si trazo la recta que pasa por los puntos y hallo la pendiente ¿qué me da?**
	71	E_3	La velocidad.
	72	P	**Me da la misma, entonces si yo les digo, esto tiene un nombre, y de hecho ahí está el nombre *[indica la pantalla del archivo]*.**
	73	E_2	Recta secante.
	74	P	**¿Ustedes han escuchado que es secante? Por geometría.**
	75	E_2	La recta que corta en dos puntos.
	76	E_3	Cierto, y así se le llama.
	77	P	**Y ustedes notaron que pasa con la recta cuando hacían el incremento más pequeño.**
18;25	78	E_1	Parecía hacerse tangente.
	79	P	**¿Y qué es tangente?**
	80	E_1	Toca un punto, ósea la distancia …
	81	E_2	Tangente es perpendicular a un círculo.
	82	P	**Es a una circunferencia.**
	83	E_1	Que toque en un solo punto, y los puntos cercanos a él son de la recta.

Atributos y propiedades propios de la geometría sobre las rectas y las circunferencias son discutidas en la conversación con los estudiantes. Las ideas que asocian a la recta secante [$\mathrm{E}_{2(75)}$] y a la recta tangente [$\mathrm{E}_{1(78,83)}$] son consideradas para relacionar a la velocidad promedio o razón de cambio promedio a un ambiente gráfico como la pendiente de la recta secante.

Finalmente, se les solicita retomar las preguntas de los ítems b) y c) como conclusiones en la parte de “comunicando y compartiendo”:

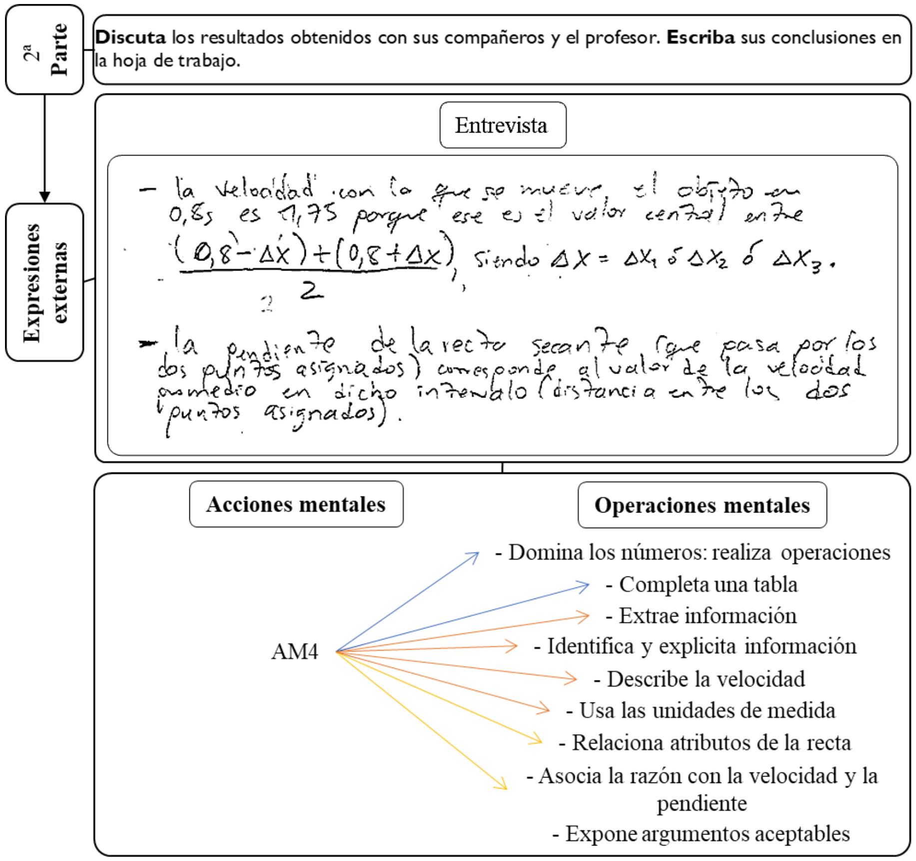
- ¿Aproximadamente con qué velocidad se mueve el objeto alrededor de $x = 0{,}8\ s$?
- Compare este resultado con el del ítem anterior y escriba una conclusión. Justifique su respuesta.

4.3.3. Habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos

En las siguientes figuras se presentan las acciones y operaciones mentales logradas por cada uno de los estudiantes, obtenidas a partir del trabajo realizado por estos en su interacción durante la entrevista para Ac_3. Se exponen las expresiones externas y se señala con líneas a trozos en color negro la relación entre las acciones y las operaciones mentales identificadas luego la entrevista.

Figura 30

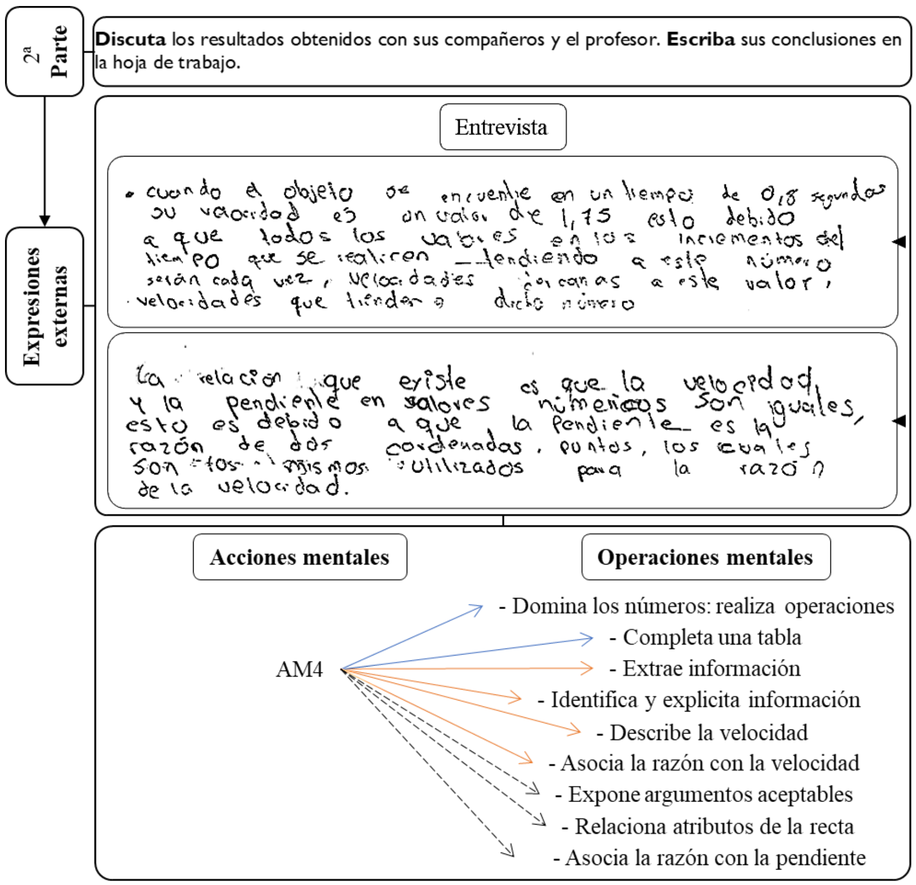
Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_3P_2E_1}$



En el trabajo realizado individualmente, Álvaro (E_1) manifiesta acciones y operaciones mentales que le permitieron discutir durante la entrevista en torno a la tendencia a un valor por parte de las razones al aproximarse a 0,8 s. En la entrevista expresa su idea de límite, la cual realiza una adaptación hacia el comportamiento de las razones de cambio promedio (AM4). Si bien logra describir la velocidad promedio de la razón de cambio, extraer información de la representación numérica de la derivada en un punto y hasta explicitar la velocidad para 0,8, no logra establecer argumentos aceptables para justificar el valor de la velocidad “aproximada”. En sus argumentos intenta mostrar el valor medio de la razón promedio alrededor de 0,8 s, como sucede con María (E_3) en su trabajo individual. Finalmente, en sus conclusiones establece el reconocimiento de las diferentes representaciones de la derivada.

Figura 31

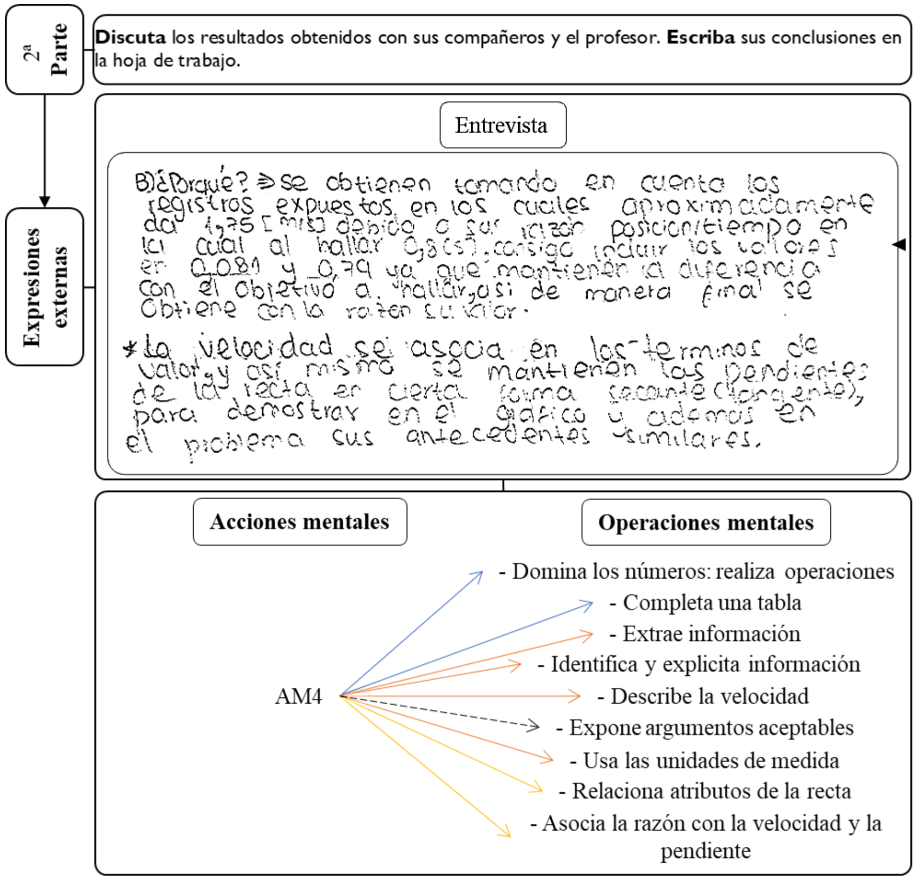
Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_3P_2E_2}$



En sus conclusiones, Sofía (E_2) expone argumentos de consideración aceptables para dar un valor a la velocidad “aproximada” de $1{,}75\ m/s$ para $0{,}8\ s$. Sus argumentos son el resultado de la interacción con sus compañeros, en la que con las habilidades en sus procedimientos aritméticos completan y extraen información de la representación numérica de la derivada. Además, a pesar de que no lo expresa en su trabajo individual, reconoce la “formula” de la pendiente y la asocia a la razón de cambio promedio (AM4).

Figura 32

Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_3P_2E_3}$



Si bien, en sus expresiones externas, María (E_3) manifiesta reconocer las representaciones de la derivada en un punto, logra concluir al igual que Sofía (E_2), que las razones de cambio promedio son el producto del calcularlas usando incrementos cada vez más pequeños alrededor de $0{,}8\ s$, un valor de $1{,}75\ m/s$.

A manera de síntesis, después de la interacción en la entrevista, en relación con las habilidades cognitivas de hacer uso de procedimientos aritméticos, de interpretar la representación numérica de la derivada, explicar la velocidad como razón de cambio promedio y considerar las ideas de aproximación y tendencias, es decir, el límite; dos de los tres estudiantes (Sofía y María) lograron justificar el valor "aproximado" de la velocidad en un valor en el tiempo.

Tabla 18

Rejilla síntesis final de $\boldsymbol{E_1}$, $\boldsymbol{E_2}$ y $\boldsymbol{E_3}$ para $\boldsymbol{Ac_3}$

Proceso	Habilidad cognitiva	Caracterización	Álvaro (E_1)	Sofía (E_2)	María (E_3)	Grupo
Comunicación	Interpretar	Identifica y explicita la razón de cambio promedio.	Sí	Sí	Sí	Sí
	Explicar	Describe la velocidad como la razón de cambio promedio entre la posición respecto al tiempo.	Sí	Sí	Sí	Sí
	Justificar	Expone argumentos aceptables para mostrar la tendencia a un valor en las razones de cambio promedio.	×	✓	✓	✓
Procedimientos	Aritméticos	Domina los números: determina y emplea las razones.	Sí	Sí	Sí	Sí
	Métricos	Selecciona y usa las unidades de medida para denotar la velocidad promedio.	Sí	×	Sí	Sí
	Geométricos	Relaciona atributos de la recta secante: su pendiente.	Sí	✓	Sí	Sí
Representación	Construir	Genera la representación numérica de la razón de cambio promedio a partir de una tabla.	Sí	Sí	Sí	Sí
	Interpretar	Extrae información de la representación numérica de la razón de cambio promedio.	Sí	Sí	Sí	Sí
	Reconocer	Asocia la razón de cambio promedio con la velocidad media y la pendiente de la recta secante.	Sí	Sí	Sí	Sí

4.4. Tarea sobre la razón de cambio instantánea (Actividad 4)

En seguida, se presenta la rejilla con la información del trabajo realizado por los estudiantes para la actividad 4 (Ac_4), a la tarea sobre la razón de cambio instantánea como velocidad para un tiempo en particular. Además, esta actividad da por finalizadas las tareas, y por consiguiente permite la solución a la situación problema presentada en la primera actividad. Posteriormente, se presentan las figuras obtenidas a partir de dicha rejilla, correspondientes a las acciones y operaciones mentales activadas y logradas por cada uno de los integrantes del grupo en relación con a la tarea mencionada. Por último, se realiza un análisis de la entrevista, apoyado en la trascripción realizada.

4.4.1. Rejilla de respuestas y figuras de acciones y operaciones mentales

Respuestas del grupo integrado por Álvaro (E_1), Sofía (E_2) y María (E_3) para la tarea Ac_4.

Tabla 19

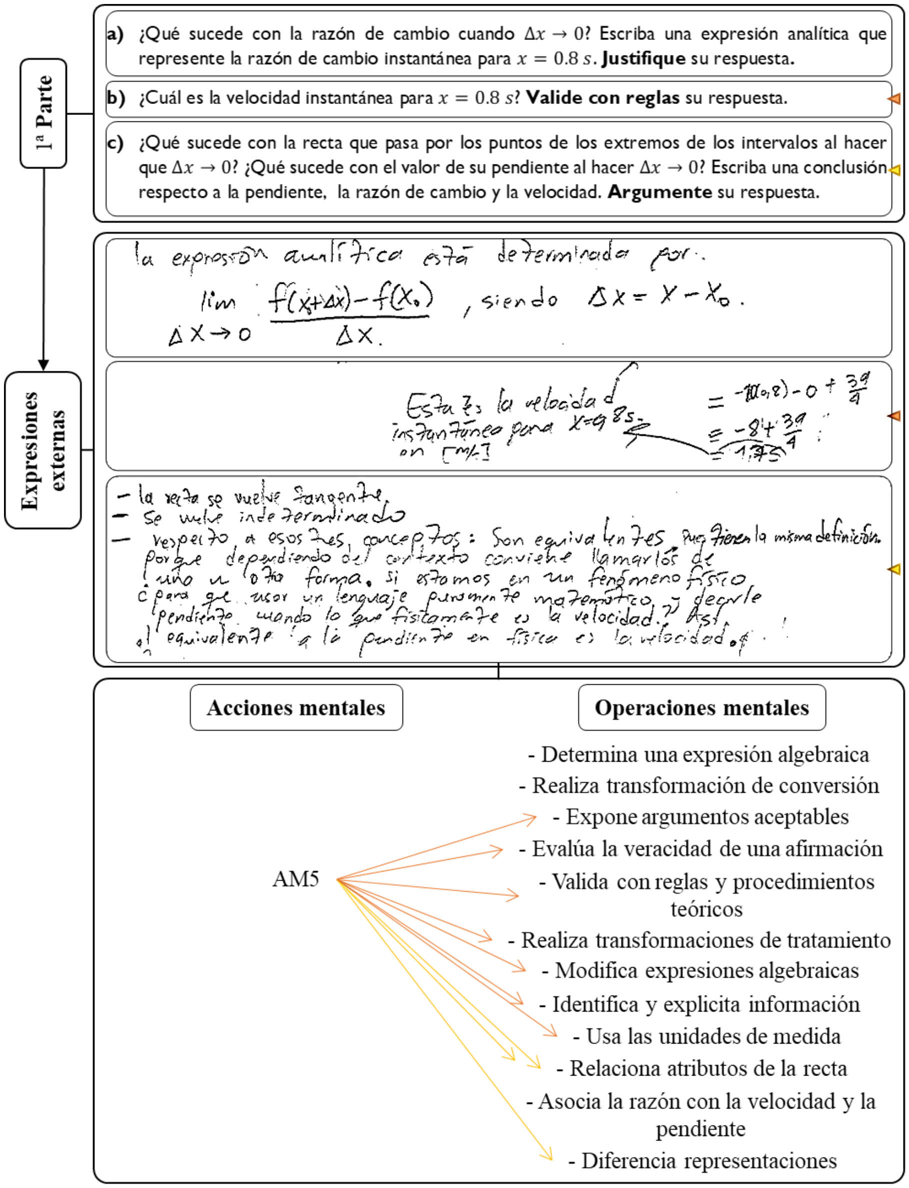
Rejilla de respuestas $\boldsymbol{Ac_4}$

Tarea Razón de cambio instantánea **Actividad 2**	**Instrumento Individual**			**Trabajo en grupo** Entrevista
Ítem/Estudiante	**E_1: Álvaro**	**E_2: Sofía**	**E_3: María**	**E_1, E_2 y E_3**
a) ¿Qué sucede con la razón de cambio cuando $\Delta x \to 0$? Escriba una expresión analítica que represente la razón de cambio instantánea para $x = 0{,}8\ s$.	La expresión analítica está determinada por $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ *[No realiza un planteamiento para llegar a esa expresión].*	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5{,}1 -}{0{,}8 - (0{,}8 - \Delta x)}$	Con respecto a la gráfica se puede denotar que el tiempo (0,8) mantiene su posición (5,1); de manera continua se tiene $0{,}8 - \Delta x$ con $5{,}1 - \Delta y$ así $\frac{5{,}1-\Delta y}{0{,}8-\Delta x}$.	*[Se realiza la conversión para plantear la expresión algebraica que permite encontrar la velocidad instantánea para* $0{,}8\ s$*].*
b) ¿Cuál es la velocidad instantánea para $x = 0{,}8\ s$? Valide con reglas su respuesta.	Dicha velocidad la encontramos con la expresión anterior, Así: Con $x_0 = 0{,}8\ s$ *[realiza procedimientos analíticos].* Esta es la velocidad instantánea para $x_0 = 0.8\ s$ en $\mathrm{m/s} = 1{,}75$.	*[No muestra una respuesta]*	Se aprecia la velocidad $1{,}75\ (m/s)$ de manera inicial.	*[Se determina el valor de la velocidad instantánea de*$1{,}75\ m/s$ *para* $0{,}8\ s$*].*
c) ¿Qué sucede con la recta que pasa por los puntos de los extremos de los intervalos al hacer que $\Delta x \to 0$? ¿Qué sucede con el valor de su pendiente al hacer $\Delta x \to 0$? Escriba una conclusión respecto a la pendiente, la razón de cambio y la velocidad. Argumente su respuesta.	- La recta se vuelve tangente. - Se vuelve indeterminado. - Respectos a esos conceptos: son equivalentes, pues tienen la misma definición. Porque dependiendo del contexto conviene llamarlos de una u otra forma.	*[No muestra una respuesta]*	*[No muestra una respuesta]*	*[Se observa como la velocidad instantánea se relaciona con la pendiente de la recta tangente].*

En las siguientes figuras se presentan las operaciones mentales logradas por cada uno de los estudiantes, obtenidas a partir del trabajo realizado por los mismos. También se señala con colores, mediante una línea continua, la relación entre las acciones y operaciones mentales activadas e identificadas.

Figura 33

Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_4 P_1 E_1}$



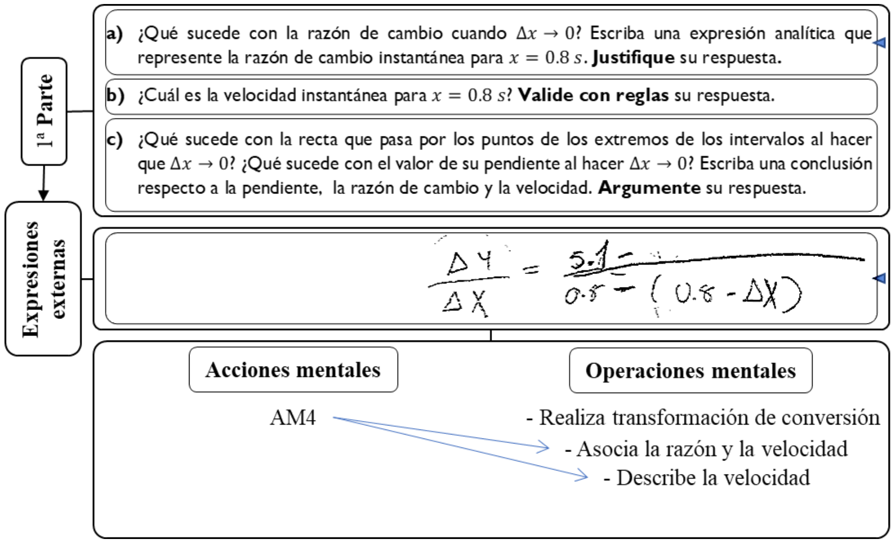
Álvaro (E_1) plantea la representación simbólica de la derivada, la cual permite encontrar la velocidad en un instante de tiempo, como se muestra en la figura anterior correspondiente a Ac_4. Puede pensarse que para obtener tal representación, el estudiante debe realizar una transformación de conversión entre la representación numérica presentada en las tablas de la tarea anterior y la representación simbólica. Pero al no contar con expresiones externas que sustenten el hecho anterior no es posible asignar tales habilidades.

Por otra parte, a pesar de lo descrito en el párrafo anterior, es posible aceptar los argumentos que presenta para evaluar la veracidad de la velocidad concluida en la tarea para $0{,}8\,s$. En sus argumentos utiliza reglas y procedimientos propios del álgebra para modificar y transformar a modo de tratamiento, la representación simbólica de la derivada, permitiéndole identificar y explicitar la velocidad instantánea en $0{,}8\,s$, en la que destaca su magnitud m/s. En este orden de ideas, se hace posible hablar de las habilidades como: interpretar y justificar, argumentar y demostrar, asociadas a la comunicación y razonamiento y demostración; como también las habilidades de transformar y el uso de la medida y los procedimientos analíticos asociados a los procesos de representación y elaboración de comparación de procedimientos.

Con respecto al último ítem de Ac_4, es viable concluir que, como resultado del desarrollo de las tareas anteriores y la interacción entre sus compañeros durante las entrevistas, el estudiante alcanza a evidenciar las diferentes representaciones de la derivada. El estudiante muestra en su estado de consciencia la relación de los atributos tales como: la recta, la pendiente y la asociación con la razón y la velocidad. Expresiones que permiten inferir que el estudiante activa en su mente la habilidad de coordinar las representaciones para el proceso de representación.

Figura 34

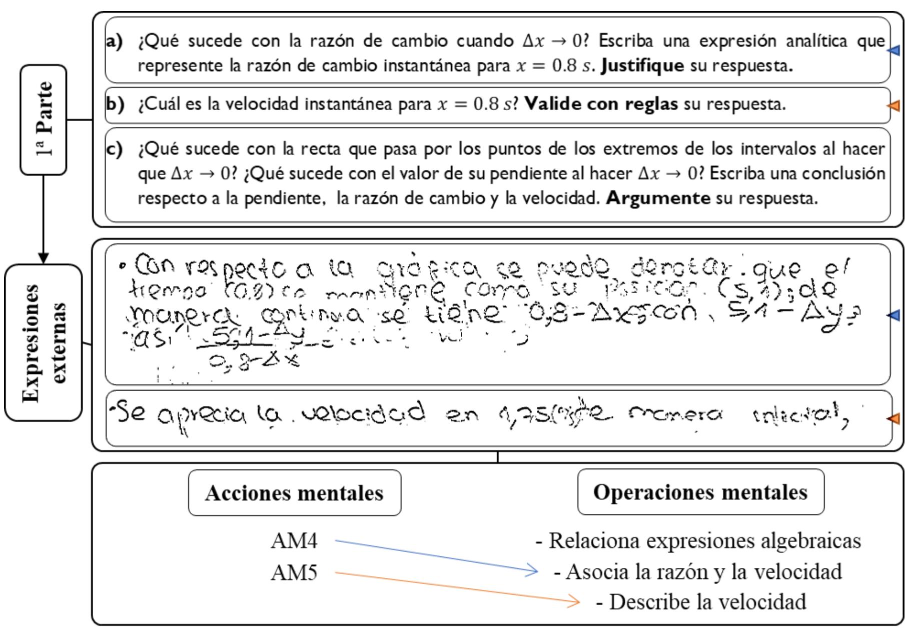
Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_4P_1E_2}$



A diferencia de Álvaro (E_1), Sofía (E_2) inicia sin tener éxito con una transformación a modo de conversión para una representación simbólica de la velocidad instantánea. Pero lo que es posible inferir, es asocia la razón de cambio promedio (AM4) con la velocidad.

Figura 35

Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_4P_1E_3}$



Por otra parte, María (E_3) en su trabajo individual, a diferencia de Sofía (E_2), en la que hace el intento por relacionar y transformar la información obtenida de la representación numérica (al completar las tablas del ítem anterior), busca relacionar expresiones algebraicas con la razón de cambio, pero sin tener éxito. Lo anterior es debido a que el cociente que plantea no es el de los incrementos de la posición con respecto al tiempo, sino el cociente de las variables posición y tiempo. Finalmente, en el ítem b) mantiene su afirmación del valor de $1{,}75\, m/s$ para $0{,}8\, s$ sin mostrar argumentos aceptables en la que argumente y demuestre dicho valor.

A manera de síntesis, en relación con la situación problema, muestra la veracidad de la velocidad para cada sensor, y se cuenta con la siguiente información hacia la caracterización de las habilidades cognitivas:

Tabla 20

Rejilla síntesis inicial de $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ y $\mathbf{E_3}$ para $\mathbf{Ac_4}$

Proceso	Habilidad cognitiva	Caracterización	Álvaro (E_1)	Sofía (E_2)	María (E_3)	Grupo
Comunicación	Interpretar	Identifica y explicita la velocidad como la razón de cambio instantánea entre la posición y el tiempo.	Sí	No	No	No
	Explicar	Describe la velocidad como la razón de cambio promedio entre la posición respecto al tiempo.	-	Sí	No	Sí
		Describe la velocidad como la razón de cambio instantánea entre la posición respecto al tiempo.	-	-	Sí	Sí
	Justificar	Expone argumentos aceptables para sustentar el valor de la velocidad instantánea.	Sí	No	No	No
Procedimientos	Métricos	Selecciona y usa las unidades de medida para denotar la velocidad instantánea.	Sí	No	No	No
	Geométricos	Relaciona atributos de la recta tangente: su pendiente.	Sí	No	No	No
	Analíticos	Modifica expresiones algebraicas de una forma a otra.	Sí	No	No	No
Representación	Transformar	Realiza transformaciones de tratamiento sobre la representación simbólica de la derivada en un punto.	Sí	No	No	No
	Reconocer	Asocia la razón de cambio promedio con la velocidad media y la pendiente de la recta secante.	Sí	No	No	No
		Asocia la razón de cambio instantánea con la velocidad instantánea y la pendiente de la recta tangente.	-	Sí	Sí	Sí
	Coordinar	Diferencia las representaciones de la derivada en un punto.	Sí	No	No	No
Razonamiento y demostración	Argumentar	Evalúa la veracidad del valor de la velocidad instantánea.	Sí	No	No	No
	Demostrar	Valida con reglas y procedimientos teóricos el valor de la velocidad instantánea.	Sí	No	No	No

Álvaro (E_1) logra justificar, argumentar y demostrar el valor de la velocidad para el instante 0,8 (AM5). En su trabajo individual utiliza procedimientos de transformación a manera de tratamiento sobre la representación simbólica de la derivada a diferencia de los otros dos estudiantes. Pero se observa que según sus expresiones externas no se evidencia un planteamiento para llegar a tal expresión, ideas que son consideradas durante la entrevista.

4.4.2. Análisis de la entrevista

Las líneas en la transcripción de la entrevista A_{c4} se presentan en cuatro columnas. En la primera se hace referencia al tiempo transcurrido, en la segunda al número asignado a la línea de diálogo respectivo, y la tercera a la persona que interviene: profesor-investigador: P (en negrilla) y los estudiantes: E_{c}, cuyo diálogo hecho texto se presenta en la última columna.

Antes de iniciar con la entrevista, se realiza una intervención como guía durante la actividad con el objetivo de guiar a Sofía (E_2) a plantear la expresión simbólica que permita determinar la velocidad instantánea para $0{,}8\ s$. Además, debido a lo expresado por Álvaro (E_1) en su trabajo individual sobre el ítem a); es decir, la expresión simbólica que permite determinar la velocidad instantánea para $0{,}8\ s$, la entrevista es orientada a encontrar tal expresión.

	1	P	**¿Nos vas a ayudar?** ***[se refiere a E_1].*** **Borremos el tablero. Listo. Bien. Paso por paso. Y los demás le van a ayudar, él puede que tenga algo. ¿Listo? Vamos a buscar estar de acuerdo y entender.** **La pregunta dice, que sucede con la razón de cambio. Entonces primero la razón de cambio. ¿Cómo escribimos simbólicamente la razón de cambio?**
04:16	2	E_2	$\Delta y/\Delta x$.
	3	E_1	*[Escribe en el tablero].*
	4	P	**Bien. Ya sabemos cómo se calcula Δy.**
	5	E_2	Dados dos puntos.
	6	P	**Bien. Sí.**
	7	E_1	*[Escribe en el tablero $\Delta y = y - y_0$].*
	8	P	**¿Y Δx?**
	9	E_1	*[Escribe en el tablero $\Delta x = x - x_0$].*
	10	P	**Bien. ¿Quién es y para x?**
	11	E_3	5,1.
	12	P	No queremos valores, y seria 5,1, pero quien es 5.1 para 0,8 s.
	13	E_3	Es la posición.
	14	E_1	¿Como así 5,1?
	15	P	**Yo pregunte qué es y para x.**
	16	E_2	Sí, ósea si x es 0,8, la posición, la imagen es 5,1. Entonces sería la imagen.
	17	P	**Listo. Para ese valor, y de hecho eso sería como un ejemplo. Pero como lo tenemos escrito sería para cualquiera. ¿Cómo seria y en terminos de x?**
06:13	18	E_1	y es igual a $f(x)$.
	19	P	¿Cómo es $f(x)$?
	20	E_1	*[Escribe la representación simbólica de la función].*

En primera medida, la entrevista inicia con preguntas relacionadas a las ideas concluidas en tareas anteriores (A_2 y A_3) con el objetivo de utilizar expresiones algebraicas que permitan plantear la representación simbólica de la derivada. Expresiones para la razón [$E_{2(2)}$], para los incrementos en la posición y el tiempo [$E_{1(7-9)}$] y la función que determina la posición en términos del tiempo [$E_{1(18)}$]son escritas para todos en el tablero.

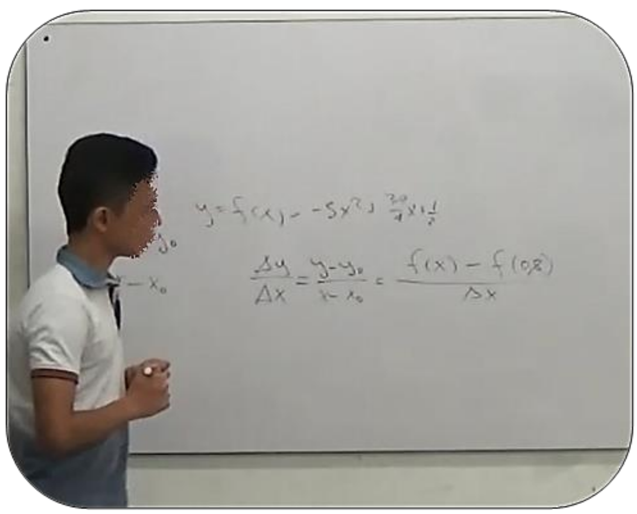
	21	P	**Bien. Ya tenemos quien es y es terminos de x. Si ustedes recuerdan del tema de funciones, cuando modelan en términos de una variable, o en función de una variable, es decir, que solo hay dos variables; ahí tenemos tres porque x es variable, es el tiempo, y es variable porque es posición, y ¿quién más es variable?**
07:09	22	E_1	Ahí la pendiente, la razón, la velocidad. Hay que elegir dos de esas tres, y estoy volviendo la velocidad en términos del tiempo, de x.
	23	P	**Para el punto que nos están pidiendo ¿quién es x_0?**
	24	E_1	El 0,8.
	25	P	**¿Quién sería y_0?**
	26	E_1	La imagen.
	27	P	**Bien. Volvamos a escribir la razón $\Delta y/\Delta x$ *[escribe en el tablero E_1].* Bien, igual y línea del cociente. Remplacemos. ¿Quién es y en términos de x?**
	28	E_1	$f(x)$.
	29	P	**Volvamos para que ustedes lo puedan apreciar. ¿Quién es Δy …?**
08:27	30	E_1	$y - y_0$ *[escribe en el tablero].*
	31	P	**¿Y abajo? *[se refiere al denominador]***
	32	E_1	*[Escribe en el tablero $x - x_0$].*
	33	P	**¿Quién es y?**
	34	E_1	$f(x)$ *[escribe $-f(0,8)$].*
	35	P	**¿Por qué coloco $f(0,8)$?**
	36	E_1	Porque es la imagen de 0,8.
	37	P	**Podríamos haber colocado 5, 1 y pues se referiría a lo mismo. Ahora pensemos, a quien estamos analizando. ¿A quién estamos tendiendo a cero?**
	38	E_1	A esta distancia *[señala en el tablero $x - x_0$].*
	39	P	**Bien. ¿Quién es esa distancia?**
	40	E_2	Δx.
	41	P	**Escribamos ese valor porque es quien vamos a hacer tender a cero. ¿Qué era lo que me decías? *[se dirige a E_2 y refiriéndose al trabajo realizado de forma individual].***
09:48	42	E_2	Que se volvía una indeterminación.
	43	P	**Veamos a ver qué pasa.**
	44	E_1	*[Escribe en el tablero $f(x) - f(0,8)/\Delta x$].*

El objetivo de la entrevista es obtener una expresión algebraica, por tanto, se enfatiza en realizar una transformación a modo de conversión entre lo observado en la tarea anterior, en la representación numérica de la derivada y la representación simbólica de esta. Para ello el diálogo con los estudiantes es orientado a identificar sobre quién se iba actuar. Inicialmente se resalta que se necesita una expresión en la que el tiempo permita encontrar la velocidad [$\mathrm{E}_{1(22-36)}$], para luego encontrar una, a través de una trasformación a modo de tratamiento, en la que se pueda hacer tender a cero el incremento como resultado de la tarea anterior [$\mathrm{E}_{1(38-40)}$]. Sofía (E_2), al observar lo escrito por su compañero Álvaro (E_1), y de hecho de su intento por determinar la expresión durante su trabajo individual verbaliza: *que se volvía una indeterminación* [$\mathrm{E}_{2(42)}$] aludiendo al hecho de que luego de plantear la expresión el objetivo es quitar tal indeterminación.

Finalmente se llega a la expresión que involucra la razón de cambio promedio en términos del incremento Δx, como se puede observar en la imagen 1. Para ello se retoma la expresión del incremento en el tiempo y al realizar una sustitución fue posible obtenerla.

Figura 36

Trabajo sobre la razón de cambio instantánea en $\boldsymbol{Ac_4P_2}$



	45	P	**¿Qué tipo de razón, velocidad o pendiente tenemos hasta el momento? No puede ser cualquiera.**
	46	E_1	La pendiente en este punto.
12:53	47	P	**¿Qué tipo de pendiente? ¿Qué representa $\Delta y/\Delta x$?**
	48	E_2	Una pendiente secante.
	49	P	**Esa es una opción. Pendiente de la recta …**

	50	E_2	Secante.
	51	P	**¿Qué otra opción tenemos?**
	52	E_2	La razón.
	53	P	**¿La razón de qué?**
	54	E_2	Posición con respecto al tiempo.
	55	P	**¿Qué característica tiene esa razón?**
	56	E_1	La razón de la posición en el tiempo 0,8.
	57	E_2	**La velocidad.**
	58	P	Otra opción. ¿Qué tipo de velocidad?
	59	E_2	Instantánea.
14:13	60	E_1	Media.
	61	P	**¿Por qué media? Díselo a ella.**
	62	E_1	Porque es un intervalo.
	63	P	**¿En qué intervalo?**
	64	E_1	De 0,8 más Δx.
	65	P	**¿Es una velocidad cómo?**
	66	E_2	Media.
	67	P	**O promedio, o una razón de ...**
	68	E_1	Cambio.
	69	P	**¿De qué? Una razón de cambio media.**
15:08	70	E_1	Velocidad media, razón de cambio media.
	71	E_2	Y pendiente de la recta secante.

Tras obtener la expresión de la razón de cambio promedio en términos del incremento en el tiempo, se realizan preguntas orientadas a guiar al estudiante a percatarse de las diferentes representaciones de la derivada, velocidad promedio, razón de cambio de cambio promedio y la pendiente de la recta de la recta secante [$E_{1(47-71)}$].

	72	P	**Son todas ellas al tiempo. ¿Qué observamos cuando Δx se volvía cero?**
	73	E_1	Había una indeterminación.
	74	P	**¿Qué sucede con la razón de cambio cuando Δx se hacía cero? Lo notamos en la actividad anterior.**
15:30	75	E_1	Se aproximaba a un valor.
	76	P	**¿Un valor para quién?**
	77	E_1 y E_2	Para la imagen.
	78	P	**¿Para la imagen de quién? Colóquenle sentido.**
	79	E_1	Perdón. Para la razón en ese punto.
	80	P	**Bien.**
	81	E_1	O la velocidad en ese punto...
	82	P	**Eso es un intervalo y lo tenemos claro. Cuando se hacía cero Δx, el incremento, se daba un valor para la velocidad. ¿Bien que nos hace falta en la expresión para obtener ese valor en ese instante?**
16:15	83	E_1	Que Δx tienda a cero.
	84	P	**¿Y qué necesito para aplicar eso?**
	85	E_1	Un límite.
	86	P	**¿Cómo quedaría? ¿Qué le agregamos a esa expresión?**
	87	EP_1	*[Escribe en el tablero* $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ *...].*

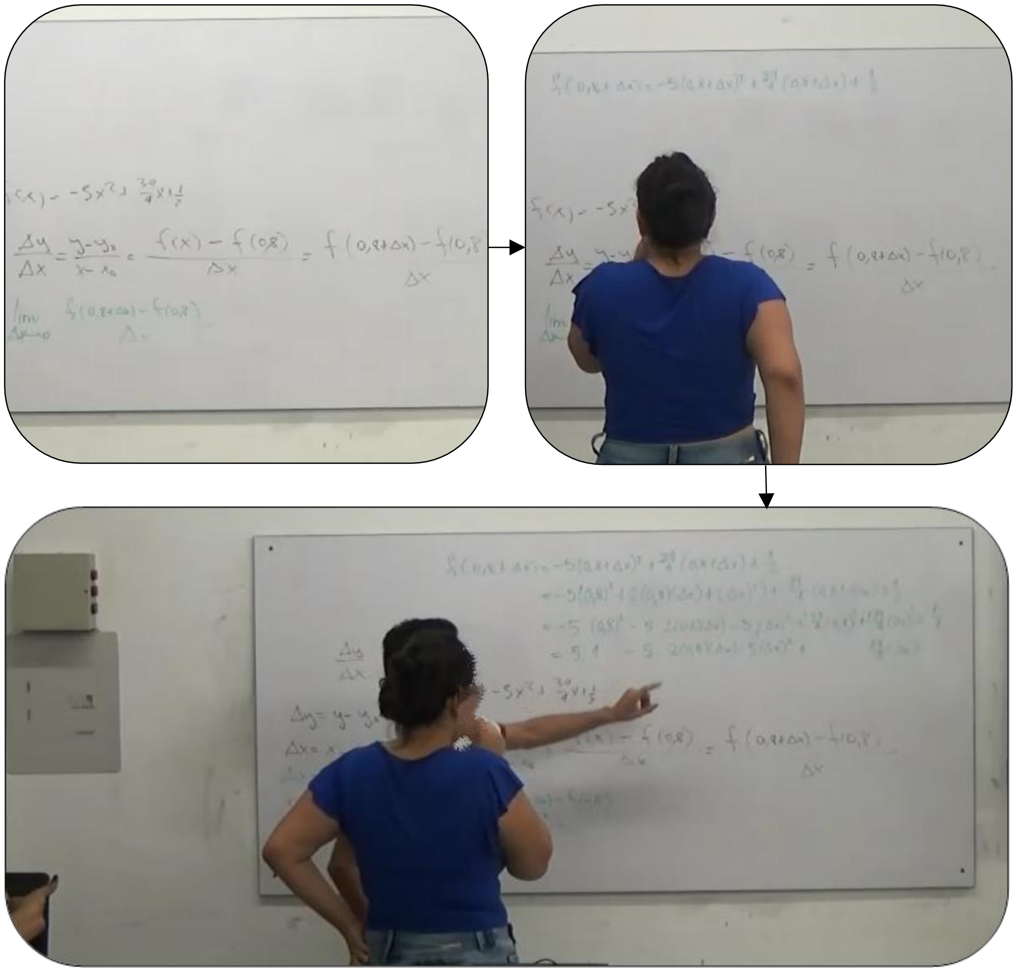
	88	E_2	A … ya.
	89	P	**Listo. ¿Qué diferencia hay la de arriba con la de abajo?** ***[se refiere a las expresiones].***
	90	E_1	Pues que aquí Δx tiende a cero.
	91	P	**¿Y qué sucede cuando Δx tiende a cero?**
17:01	92	E_1	Pues que es la instantánea.
	93	P	**Bien sí, así se le llama.**
	94	E_2	¿Y esa es la derivada?
	95	P	**Con calma.**
	96	E_2	Es que eso ya lo había visto en algún lado.
	97	P	Ahora será usarla. ¿Se le mide? *[se refiere a E_1].*

Acto seguido, se brindan orientaciones a los estudiantes para obtener la expresión que permita encontrar la velocidad instantánea al valor en el tiempo de $0{,}8\,s$ a través del límite concluido en la tarea anterior. Para ello se recuerda la tendencia a un valor por parte de las razones alrededor de $0{,}8\,s$ [$E_{1(75)}$], en la que Álvaro (E_1) lo describe como: *la velocidad en ese punto* [$E_{1(79-81)}$]. Posteriormente, se resalta la diferencia entre la expresión anterior (razón de cambio promedio) y la obtenida al aplicarle el límite (razón de cambio instantánea) [$E_{1(92)}$], a la que Sofía (E_2) pareció entender [$E_{2(88)}$].

Cabe destacar lo expresado por Sofía al verbalizar: *es que eso ya lo había visto en algún lado* [$E_{2(96)}$], hecho que no es posible ignorar que suceda en todo proceso de enseñanza y aprendizaje, en la que los estudiantes por iniciativa propia realizan una consulta del tema a tratar en clase.

Figura 37

Trabajo grupal sobre la razón de cambio instantánea en $\boldsymbol{Ac_4P_2}$



Con la expresión que permite encontrar la velocidad instantánea en $0{,}8\,s$ a través del trabajo grupal, aplican transformaciones a modo de tratamiento con procedimientos analíticos y aritméticos, logran determinar y, por consiguiente, mostrar que el sensor 2 marca la velocidad correcta de $1{,}75\ m/s$, como se puede observar en la Imagen 3.

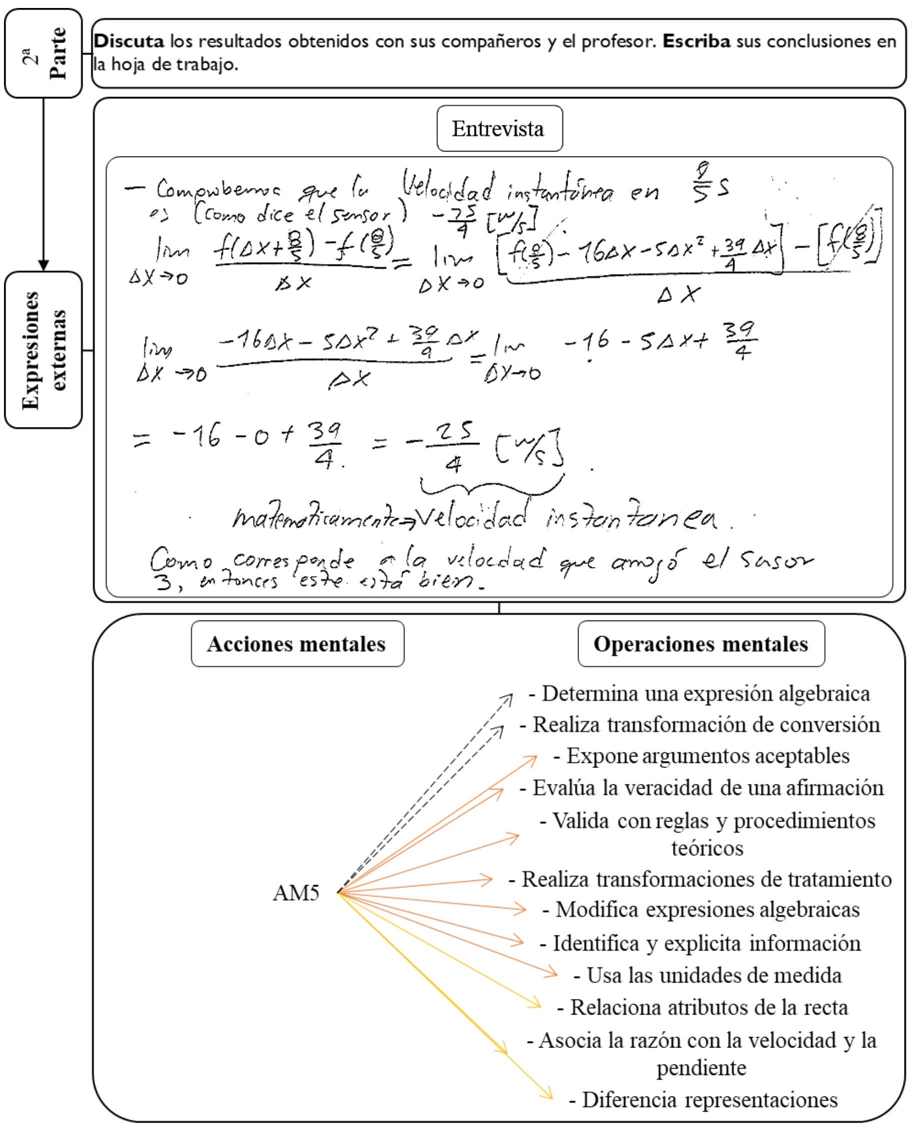
Finalmente, se les solicita a los estudiantes mostrar la veracidad del sensor 3. Con lo anterior, se concluyen las tareas relacionadas a la solución del problema del lanzamiento vertical presentado en la primera actividad.

4.4.3. Habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos

En las siguientes figuras se presentan las acciones y operaciones mentales activadas por cada uno de los estudiantes, obtenidas a partir del trabajo realizado en grupo por estos. Se exponen las expresiones externas y se señala con líneas a trozos en color negro, la relación entre las acciones y las operaciones mentales identificadas luego la entrevista.

Figura 38

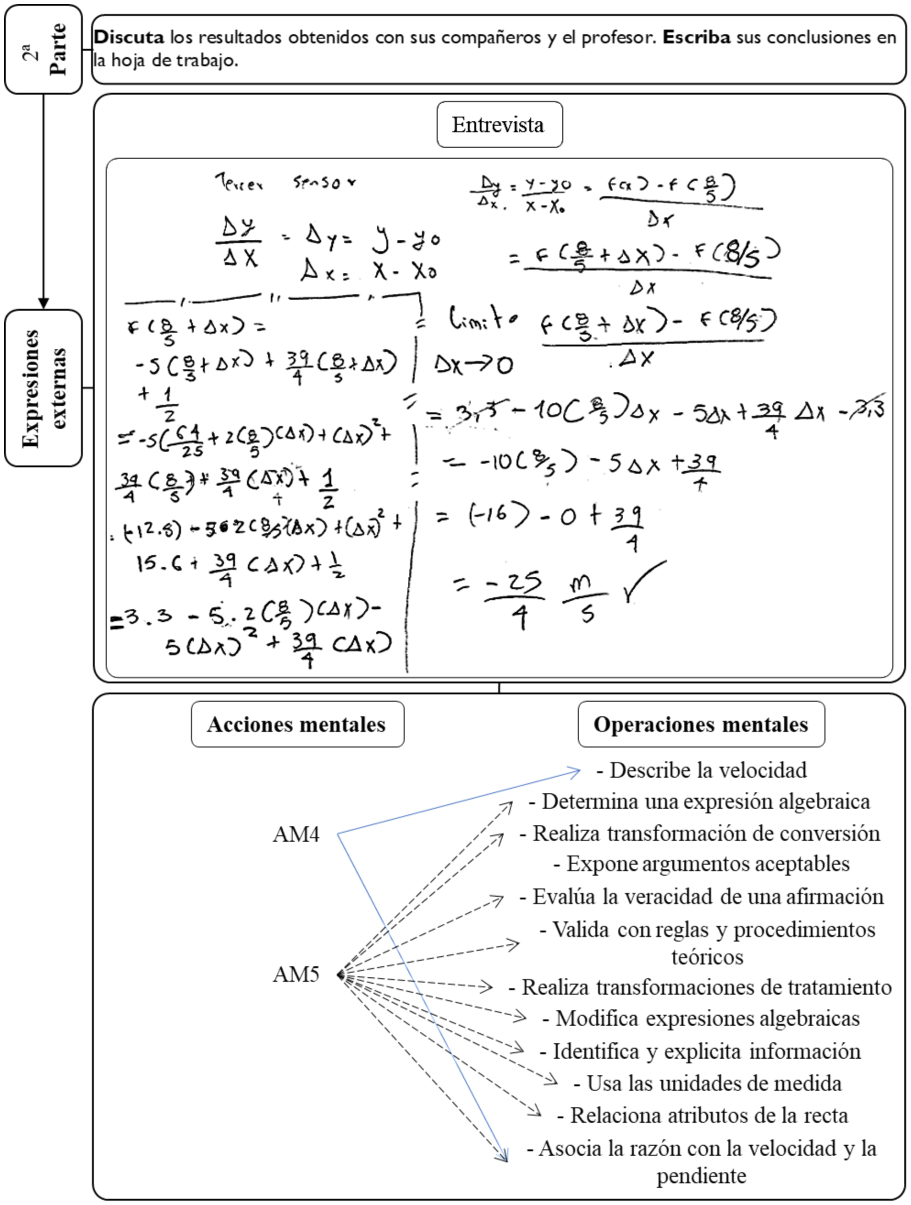
Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_4P_2E_1}$



Inicialmente, en su trabajo individual, Álvaro (E_1) logra explicitar la representación simbólica de la razón de cambio instantánea y durante la entrevista logra plantear y determinar dicha expresión algebraica a través de las habilidad de transformar. En la conversión de la representación numérica, Álvaro relaciona expresiones algebraicas con los incrementos, y así plantea la razón de cambio enfocado en Δx para luego hacer tender a cero. Además, durante la entrevista se corrobora su habilidad de diferenciar las representaciones de la derivada en un punto permitiéndole alcanzar la coordinación entre razón de cambio instantánea, la pendiente de la recta tangente y la velocidad instantánea. En sus conclusiones, muestra nuevamente sus habilidades para argumentar y demostrar el valor de la velocidad para el tercer sensor. Entre sus argumentos se aprecian las habilidades de transformar y usar procedimientos analíticos para identificar y explicitar la velocidad instantánea de $-\frac{25}{4}\ m/s$ para $\frac{8}{5}\ s$.

Figura 39

Acciones y operaciones mentales de $\mathbf{Ac_4P_2E_2}$

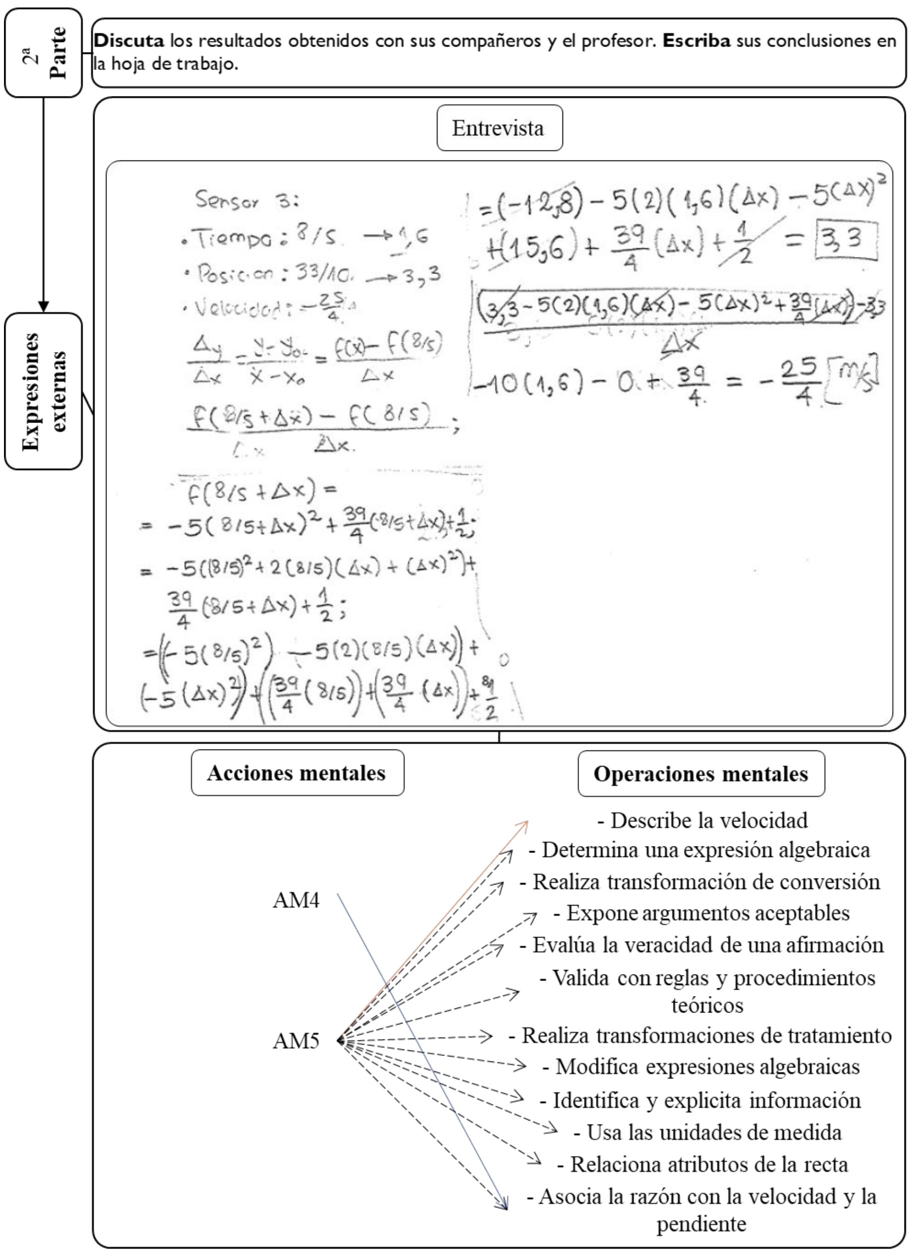


En su trabajo individual, Sofía ($\mathrm{E_2}$) mantiene la descripción de la velocidad desde la razón de cambio promedio a pesar de que en la tarea anterior ya manifiesta la habilidad de explicar. Posteriormente, a través de la participación de Álvaro, muestra su habilidad de tratamiento en la que adapta y modifica la representación simbólica para encontrar la velocidad instantánea en $\frac{8}{5}\ s$.

Con lo anterior, Sofía justifica el valor de $-\frac{25}{4}\ m/s$, en la que esta vez sí hace uso de la unidades de medida. Además, es posible inferir que durante aquellos procedimientos piensa en convencerse de sus argumentos y para ello hace uso de reglas que le permiten acercarse a este hecho.

Figura 40

Acciones y operaciones mentales de $\boldsymbol{Ac_4P_2E_3}$



Desde su trabajo individual, María (E_3) puede considerar que utiliza la habilidad de explicar para acercarse a explicitar la velocidad instantánea. Pero con la entrevista y la participación de Álvaro (E_1), al igual que Sofía (E_2) muestra las habilidades para argumentar y demostrar el valor de la velocidad instantánea para el tercer sensor.

A manera de síntesis, como se ha evidenciado anteriormente, en el trabajo individual de cada uno de los tres estudiantes, solo uno de ellos (Álvaro) pudo mostrar sus habilidades cognitivas para argumentar y demostrar la velocidad instantánea para un valor en particular, las cuales están asociadas al proceso razonamiento y demostración. La información obtenida se resume en la siguiente tabla:

Tabla 21

Rejilla síntesis final de $\boldsymbol{E_1}$, $\boldsymbol{E_2}$ *y* $\boldsymbol{E_3}$ *para* $\boldsymbol{Ac_4}$

Proceso	Habilidad cognitiva	Caracterización	Álvaro ($\mathbf{E_1}$)	Sofía ($\mathbf{E_2}$)	María ($\mathbf{E_3}$)	Grupo
Comunicación	Interpretar	Identifica y explicita la velocidad como la razón de cambio instantánea entre la posición y el tiempo.	Sí	✓	✓	✓
	Justificar	Expone argumentos aceptables para sustentar el valor de la velocidad instantánea.	Sí	✓	✓	✓
Procedimientos	Métricos	Selecciona y usa las unidades de medida para denotar la velocidad instantánea.	Sí	✓	✓	✓
	Geométricos	Relaciona atributos de la recta tangente: su pendiente.	Sí	✓	✓	✓
	Analíticos	Modifica expresiones algebraicas de una forma a otra.	Sí	✓	✓	✓
Representación	Construir	Determina la representación simbólica de la derivada en un punto.	✓	✓	✓	✓
	Transformar	Realiza transformaciones de conversión entre representaciones de la derivada en un punto.	✓	✓	✓	✓
		Realiza transformaciones de tratamiento sobre la representación simbólica de la derivada en un punto.	Sí	✓	✓	✓
	Reconocer	Asocia la razón de cambio instantánea con la velocidad instantánea y la pendiente de la recta tangente.	Sí	✓	✓	✓
	Coordinar	Diferencia las representaciones de la derivada en un punto.	Sí	×	×	×
Razonamiento y demostración	Argumentar	Evalúa la veracidad del valor de la velocidad instantánea.	Sí	✓	✓	✓
	Demostrar	Valida con reglas y procedimientos teóricos el valor de la velocidad instantánea.	Sí	✓	✓	✓

Es importante resaltar que el proceso de interacción durante la entrevista genera acciones y operaciones mentales, tales como para que los demás estudiantes logren manifestar dichas habilidades. Además, con la entrevista se consigue discutir sobre las representaciones de la derivada en un punto, lo cual permite que las estudiantes Sofía (E_2) y María (E_3) sean conscientes de reconocerlas y en el caso de Álvaro (E_1) coordinarlas.

5. Conclusiones

En el trabajo realizado por los estudiantes seleccionados Álvaro (E_1), Sofía (E_2) y María (E_3), en relación con las tareas propuestas, se evidencia, desde el análisis de estas, la activación de acciones y operaciones mentales, las cuales, permiten determinar elementos que aportan a la caracterización de las habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos del razonamiento covariacional, para la comprensión de la derivada como razón de cambio en estudiantes de cálculo diferencial.

En el capítulo anterior se presenta evidencia, por parte de los estudiantes, que si bien desde un inicio no logran aproximarse a un planteamiento de solución, fue a través de las tareas (actividades), sus entrevistas e interacciones en grupo, las que permiten lograr que ellos analicen la velocidad como la razón de cambio instantánea entre la posición y el tiempo.

Las conclusiones de la presente investigación se exponen en dos secciones en las que se muestra, en primer lugar, el contraste entre la caracterización de las habilidades cognitivas *a priori*, y las emergentes, corroboradas a partir del análisis de los datos y, en segundo lugar, se presentan las perspectivas para futuras investigaciones.

5.1 Caracterización de las habilidades cognitivas para la comprensión de la derivada como razón de cambio

A partir de los resultados encontrados en las diferentes secciones del capítulo anterior, se caracterizan las habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos para la comprensión de la derivada como razón de cambio, mediante la explicitación de los descriptores que surgen, a lo largo del análisis de los datos que se realiza, en comparación con las habilidades planteadas en el capítulo de Diseño de la investigación.

Cabe aclarar que, para cada una de las habilidades y correspondientes descriptores asociados a los procesos matemáticos, deben ser vistos como complementarios entre sí, se puede evidenciar en lo que se pretende exponer a continuación. Además, hay que recordar que los comportamientos que se exponen aluden en torno a la representación física de la derivada como velocidad.

5.1.1. Habilidades para comunicar la derivada como razón de cambio

A través del análisis de los resultados obtenidos, se aprecia que, a diferencia de lo que se considera con anterioridad para la habilidad de interpretar, no solo se presenta al activar las primeras acciones mentales, ya sea en comportamiento de forma verbal o escrita, ya que durante todo el desarrollo de las tareas, se evidencia la necesidad de identificar y explicitar las ideas asociadas a la derivada como razón de cambio. En este orden de ideas, la habilidad para explicar la derivada como razón de cambio se encuentra en permanente activación, ya que, a través de esta, es posible describir la velocidad para definirla. Para la habilidad de justificar un valor de la derivada, se confirma que dicha habilidad es indispensable para presentar argumentos aceptables al encontrar la velocidad instantánea.

Finalmente, se presentan una serie de descriptores para las anteriores habilidades, a modo de conclusión, a través de los resultados obtenidos al final de los apartados en el capítulo anterior:

Interpretar: es la capacidad de identificar y explicitar un valor de la derivada, vista como la velocidad instantánea, en la que el estudiante es consciente del uso de las razones de cambio promedio entre las magnitudes variables, tiempo y posición. Lo anterior es posible mediante el análisis de la representación numérica vista desde una tabla o la relación que se establece con la pendiente de la recta tangente.

Explicar: para explicar la derivada como razón de cambio instantánea, se requiere describir tanto los comportamientos de los valores de la posición, como sus incrementos con respecto al tiempo en el que estos resalten aspectos propios de la velocidad, como el signo y su propio comportamiento.

Justificar: son las acciones que permiten exponer argumentos aceptables para indicar un valor de la derivada, en la que no solo se aceptan procedimientos analíticos, sino aquellos que son resultado de la experimentación con las razones de cambio promedio al considerar incrementos cada vez más pequeños.

5.1.2. Habilidades procedimentales para analizar la derivada como razón de cambio

Mediante el análisis de las expresiones externas de los estudiantes, en cuanto los procedimientos: aritméticos, geométricos, métricos y analíticos, es posible concluir que estos son empleados de forma conjunta para determinar un valor de la derivada. Por tanto, se identifica una correlación entre estos. Es pertinente aclarar que la correlación de los procedimientos se genera a partir de determinar, medir, atribuir y expresar elementos propios de la aritmética, la medición, la geometría y el álgebra, respectivamente, para encontrar el valor de la derivada, la cual se expresa de la siguiente forma:

Aplicar procedimientos: trata de dominar los números y sus operaciones, no solo a través de lápiz y papel, sino mediante la destreza de utilizar herramientas computacionales que permitan determinar y emplear las razones de cambio. Lo anterior, con el objetivo de relacionar expresiones algebraicas con los incrementos del tiempo y de la posición, en las que, a través de su propia modificación (transformaciones a modo de tratamiento), por ejemplo, el uso de la propiedad distributiva o el cálculo de binomios con exponentes positivos. Loa anterior, posibilita medir y relacionar atributos geométricos como la pendiente de la recta tangente en el proceso de analizar la velocidad.

5.1.3. Habilidades para representar la derivada como razón de cambio

Al promover el uso de diferentes registros de representación, ya sea en mayor o menor medida a lo largo del desarrollo de las tareas, en los estudiantes es posible identificar las habilidades asociadas a este proceso. En el que no solo el reconocimiento de la derivada como razón de cambio se origina en un momento de las actividades, sino que es gracias a la construcción, interpretación y transformación de las diferentes representaciones la que hace posible el poder coordinarlas.

Desde una perspectiva más específica, los descriptores que caracterizan las habilidades del proceso de representación de la derivada como razón de cambio son:

Reconocer: se refiere a la capacidad de poder asociar, durante el análisis de un fenómeno variacional, la razón de cambio instantánea, la pendiente de la recta tangente y un valor de la velocidad.

Construir: son las acciones implicadas al generar cualquiera de las representaciones de la derivada; ya sea la numérica, a través de una tabla; o la simbólica, por medio de transformaciones.

Interpretar: es extraer información de algunas de las representaciones de la derivada, como por ejemplo, dada la representación numérica de esta a través de una tabla, identificar y explicitar un valor de la velocidad, resultado de observar las imágenes de las razones de cambio promedio al considerar intervalos más pequeños.

Transformar: realizar transformaciones, tanto de conversión como de tratamiento entre representaciones de la derivada, principalmente entre la numérica y la simbólica para determinar una velocidad instantánea.

Coordinar: se trata de poder alcanzar un estado de conciencia en el que se puedan diferenciar las diversas representaciones de la derivada para usarlas en diferentes contextos.

5.1.4. Habilidades para razonar y demostrar la derivada como razón de cambio

Para las habilidades cognitivas de este proceso, se resalta el vínculo entre las descritas en apartados anteriores, en los que la activación de la interpretación, explicación y la justificación, permite argumentar y, por tanto, evaluar la veracidad de una velocidad instantánea a través de sus representaciones y procedimientos subyacentes. Además cabe aclarar que la demostración no solo alude a la aplicación de reglas y procedimientos teóricos, sino al desarrollo de convencerse y convencer a los demás acerca del valor de la derivada, es decir, se reconoce la conexión entre la argumentación y demostración.

Argumentar: evaluar la veracidad del valor de la derivada a través de las acciones implicadas para comunicar, elaborar y comparar procedimientos y representar la velocidad instantánea.

Demostrar: consiste en validar, mediante reglas y procedimientos teóricos, el valor de la velocidad instantánea, en la que se presente un estado de conciencia sobre los procesos subyacentes en la inclusión de las ideas de cambio y variación.

5.2. Perspectivas para futuras investigaciones

Este estudio, no solo pretende aportar elementos teóricos para la caracterización de las habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos del estudio del cambio y la variación y en la comprensión de la derivada como razón de cambio, sino también como propuesta que facilite el entendimiento de la derivada en las aulas universitarias, por tanto, se invita a continuar con las investigaciones en la línea de la Didáctica del cálculo en la que permita ampliar y complementar la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje de la derivada.

De forma particular, según los resultados de esta investigación, se originan interrogantes sobre el impacto de las tecnologías digitales en el desarrollo de la comprensión de la derivada, al igual que el rediseño de las tareas con el objetivo de incluir acercamientos sobre la representación gráfica de la misma, es decir, como la pendiente de la recta tangente.

Así como se han planteado una serie de habilidades para los diferentes procesos (comunicar, elaborar, comparar y ejercitar procedimientos, representar y razonar y demostrar) para la comprensión de la derivada se sugiere indagar, ya sea desde un proceso en particular para este objeto matemático, como para otros como el de función y límite.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Eds.). *Ingeniería didáctica en la educación Matemática* (pp.97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 117-134.

Azcárate, C., y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 135-139.

Barajas, C. (2015). *Elaboración, Comparación Y Ejercitación de Procedimientos: Una mirada desde la Resolución de Problemas que implican Fenómenos de Variación*. (Tesis de maestría no publicada). CICATA, Instituto Politécnico Nacional. México.

Cantoral, R. (2000). Pensamiento matemático avanzado: Una revisión de los enfoques a la investigación sobre Didáctica del Análisis. En R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanís, R. Rodríguez y A. Garza (Eds.). *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp. 205-218). México: Editorial Trillas.

Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. México: Secretaría de Educación Pública.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2003a). *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio*. *EMA*, *8*(2), 121-156.

Carlson, M., Larsen, S., & Lesh, R. (2003b). Integrating a models and modeling perspective with existing research and practice. *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*, 465-478.

Carlson, M. P., Madison, B., & West, R. D. (2015). A study of students' readiness to learn calculus. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 1*(2), 209-233.

Cuevas, A., Rodríguez, A. y González O. (2014). *Introducción al concepto de derivada de una función real con apoyo de las tecnologías digitales. El Cálculo y su Enseñanza*, *5*(5), 157-164.

Dolores, C., Chi, A., Canul, E., Cantú, C., & Pastor, C. (2009). *De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática*. Unión, 18, 41-57.

Dolores, C, & Salgado G. (2009). *Elementos para la graficación covariacional*. *Revista Números, 72*, 63-74.

Engelke Infante, N. M. (2007). *Students' understanding of related rates problems in calculus* (Doctoral dissertation, Arizona State University).

Fiallo, J. y Parada, S. (2014). *Curso de precálculo apoyado en el uso de geogebra para el desarrollo del pensamiento variacional*. *Revista Científica*, *3*(20), 56-71.

Fiallo, J, E, & Parada, S, E, (2018). *Estudio dinámico de la variación y el cambio.* Colombia: Universidad Industrial de Santander.

García, M. y Dolores, C. (2011). *Derivada: una propuesta para su comprensión*. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Gómez, J. (2018). *Proceso comunicativo en matemáticas de estudiantes de primer nivel universitario: aproximaciones desde un curso de precálculo*. Tesis de Maestría en Educación Matemática, no publicada. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En Kelly, A. y Lesh, R. (eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education (*pp. 517-545*).* New Jersey-London: LEA

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. The Journal of Mathematical Behavior, 25(1), 57-72.

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*. XI Meeting of Middle Higher Level Mathematics Teachers. Michoacan University San Nicolas de Hidalgo, Morelia, México.

Ímaz, C. y Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo: las trampas del rigor*. México: Editorial Trillas

Johnson, H. L. (2015). *Task design: Fostering Secondary Students' Shifts from Variational to Covariational Reasoning*. In Beswick, K.., Muir, T., & Wells, J. (Eds.). *Proceedings of 39 The Psychology of Mathematics Education conference*, Vol. 3, pp. 129-136. Hobart, Australia: PME.

López, E. (2017*). Procesos de argumentación y de demostración de estudiantes en un curso de precállculo*. Tesis de Maestría en Educación Matemática, no publicada. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional MEN. (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales.* Bogotá, Colombia: MEN.

Ministerio de Educación Nacional, (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Bogotá, Colombia: MEN.

NCTM. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción de M. Fernández (Traducción de la versión del 2000 del NCTM). SAEM Thales. Sevilla.

Parada, S., Conde, L., y Fiallo, J. (2016). *Mediación Digital e Interdisciplinariedad: una Aproximación al Estudio de la Variación*. *Bolema, 30*(56), 1031-1051.

Ramos, L. (2014). *Elementos teóricos para analizar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante*. *El Cálculo y su Enseñanza*, *5*(5), 107-124.

Rojas, P. J. (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos* (Doctoral dissertation, Tesis doctoral no publicada, Bogotà, Colombia, Universidad Distrital Francisco José de Caldas).

Rojas, I. E. P. (2019). *Un modelo para la comprensión de la derivada en su perspectiva local: un estudio de casos en el contexto universitario* (Doctoral dissertation, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso).

Roundy, D., Dray, T., Manogue, C. A., Wagner, J. F., & Weber, E. (2015, March). An extended theoretical framework for the concept of derivative. In Proceedings of the 18th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (pp. 838-843).

Rueda, N. (2016). *Habilidades Cognitivas Asociadas al Proceso de Representación de Fenómenos de Variación*. (Tesis de Maestría en Educación Matemática, no publicada). Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

Rueda, N. y Parada, S. (2016). Razonamiento covariacional en situaciones de optimización modeladas por Ambientes de Geometría Dinámica. Uni-pluriversidad, 16(1), 51-63.

Sánchez–Matamorros, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La compresión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-296.

Santamaría, A. (2017). *Habilidades procedimentales desarrolladas por estudiantes beneficiarios de un programa de acompañamiento en matemáticas*. (Tesis de Maestría en Educación Matemática, no publicada). Universidad Industrial de Santander. Colombia.

Suárez, S.R. y Rojas, S.J. (2013). *Experiencias didácticas con estudiantes de once grado alrededor de sus competencias comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad*. (Trabajo de grado). Universidad Industrial de Santander. Colombia.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). *Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically*. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (pp. 134-148). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Villa, J. (2011). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren* (Tesis doctoral). Universidad de Antioquia. Medellín.

Villa-Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED, (31).*

Vrancken, S., y Engler, A. (2014). Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: Resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Boletim de Educação Matemática*. *28*(48), 449-468.

Zill, D., y Wright, W. (2011). *Cálculo de una variable Trascendentes tempranas*. México: Editorial Mc Graw Hill.

Apéndices

Apéndice A. Actividad 1

Universidad Industrial de Santander

Cálculo I

Maestría en Educación Matemática

Escuela de Matemáticas

Lanzamiento vertical

Actividad 1

1.1. Una máquina ha lanzado un objeto verticalmente hacia arriba. Antes del lanzamiento, se han colocado tres sensores en posiciones distintas con el fin de determinar la velocidad del objeto en diferentes instantes de tiempo. Los registros tomados por los sensores se muestran en la siguiente tabla:

Sensor	Tiempo $[s]$	Posición $[m]$	Velocidad $\left[\frac{m}{s}\right]$
1	0.25	2.625	7.25
2	0.8	5.1	1.75
3	$\frac{8}{5}$	$\frac{33}{10}$	$-\frac{25}{4}$

Registro de sensores.

Abra el archivo Problemalanzamiento.ggb y **muestre matemáticamente** que el registro de la velocidad, tomado por cada sensor, es verdadero.

Cálculo I

Maestría en Educación Matemática

Escuela de Matemáticas

Lanzamiento vertical

1.2. Comunicando y compartiendo

Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Después **escriba** sus conclusiones en la hoja de trabajo.

Apéndice B. Actividad 2

Universidad Industrial de Santander

Cálculo I

Maestría en Educación Matemática

Escuela de Matemáticas

Lanzamiento vertical

Actividad 2

2.1. Abra el archivo Lanzamiento.ggb y conteste las siguientes preguntas en su hoja de trabajo en el orden en que aparecen los ítems:

a) ¿Cuáles son las magnitudes variables del problema? ¿Existe una relación de interdependencia entre las magnitudes variables? **¿Por qué?**

b) ¿Cómo se comportan los valores de la posición respecto al tiempo? **Explique** su respuesta.

c) ¿De cuánto es el incremento en los valores de la posición con respecto al tiempo? **Explique** su respuesta.

Universidad Industrial de Santander

Cálculo I

Maestría en Educación Matemática

Escuela de Matemáticas

Lanzamiento vertical

d) ¿Cuál es el comportamiento de la cantidad del incremento en los valores de la posición respecto al tiempo? **Justifique** su respuesta**.**

2.2. Comunicando y compartiendo

Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. **Escriba** sus conclusiones en la hoja de trabajo.

Apéndice C. Actividad 3

Universidad Industrial de Santander

Cálculo I

Maestría en Educación Matemática

Escuela de Matemáticas

Lanzamiento vertical

Actividad 3

3.1. Las siguientes preguntas están relacionadas con la razón de cambio promedio de la posición con respecto al tiempo. Resuelva los siguientes ítems en su hoja de trabajo.

a) Calcule los incrementos de los valores en el tiempo (x) y complete las siguientes tablas:

$\Delta x_1 =$ ___

$[x_1, x_2]$	$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$
$[0.78, 0.79]$	
$[0.79, 0.8]$	
$[0.8, 0.81]$	
$[0.81, 0.82]$	

Tabla 1

$\Delta x_2 =$ ___

$[x_1, x_2]$	$\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}$
$[0.79, 0.795]$	
$[0.795, 0.8]$	
$[0.8, 0.805]$	
$[0.805, 0.81]$	

Tabla 2

$\Delta x_3 =$ ___

$[x_1, x_2]$	$\frac{\Delta y_3}{\Delta x_3}$
$[0.798, 0.799]$	
$[0.799, 0.8]$	
$[0.8, 0.801]$	
$[0.801, 0.802]$	

Tabla 3

b) ¿Aproximadamente con qué velocidad se mueve el objeto alrededor de $x = 0.8\ s$? **Justifique** su respuesta**.**

Universidad Industrial de Santander

Cálculo I

Maestría en Educación Matemática

Escuela de Matemáticas

Lanzamiento vertical

c) Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos de los extremos de los intervalos definidos en las tablas del ítem a). Compare este resultado con los ítems anteriores y escriba una conclusión. **Justifique** su respuesta.

3.2. Comunicando y compartiendo

Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Después, **escriba** sus conclusiones en la hoja de trabajo.

Apéndice D. Actividad 4

Cálculo I

Maestría en Educación Matemática

Escuela de Matemáticas

Lanzamiento vertical

Actividad 4

4.1. Las siguientes preguntas están relacionadas con la razón de cambio instantánea de la posición respecto al tiempo. Resuelva los siguientes iítems en su hoja de trabajo.

a) ¿Qué sucede con la razón de cambio cuando $\Delta x \rightarrow 0$? Escriba una expresión analítica que represente la razón de cambio instantánea para $x = 0.8\ s$. **Justifique** su respuesta.

b) ¿Cuál es la velocidad instantánea para $x = 0.8\ s$? **Valide con reglas** su respuesta.

Lanzamiento vertical

c) ¿Qué sucede con la recta que pasa por los puntos de los extremos de los intervalos al hacer que $\Delta x \to 0$? ¿Qué sucede con el valor de su pendiente al hacer $\Delta x \to 0$? Escriba una conclusión respecto a la pendiente, la razón de cambio y la velocidad. **Argumente** su respuesta.

4.2. Comunicando y compartiendo

Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Después, **escriba** sus conclusiones en la hoja de trabajo.