

EL TRABAJO COLABORATIVO COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA
POTENCIAR EL PROCESO DE COMUNICACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE
PROBLEMAS

JORGE ERNESTO ANGARITA BALLESTEROS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRIA EN PEDAGOGIA
BUCARAMANGA

2017

EL TRABAJO COLABORATIVO COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA
POTENCIAR EL PROCESO DE COMUNICACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE
PROBLEMAS

JORGE ERNESTO ANGARITA BALLESTEROS

Propuesta de trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de
Magíster en Pedagogía

Directora
OLGA LUCÍA DUARTE BOLÍVAR
MsC. En Pedagogía

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRIA EN PEDAGOGIA
BUCARAMANGA

2017

A mi hija Sofía y a mi esposa Carolina

AGRADECIMIENTOS

A Dios por darme fortaleza, sabiduría y paciencia durante todos los momentos de la maestría.

A mi familia por su apoyo incondicional en todos mis proyectos.

A la profesora Olga Lucia Duarte, por sus consejos y orientación en el desarrollo del proyecto.

A mis compañeros de maestría, por su comprensión y apoyo.

Al Ministerio de Educación Nacional, por darme la oportunidad de continuar mí proceso de formación.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	15
1. EL PROBLEMA.....	18
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	18
1.2. JUSTIFICACIÓN.....	20
1.3. OBJETIVOS.....	23
1.3.1 Objetivo General	23
1.3.2 Objetivos específicos	23
2. MARCO TEÓRICO	24
2.1 DETERMINACIÓN DE ANTECEDENTES	24
2.1.1 Antecedentes internacionales.....	24
2.1.2 Antecedentes Nacionales.	25
2.1.3 Antecedentes Locales.....	27
2.2 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	28
2.2.1 La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.....	28
2.2.1.1 El planteamiento y la resolución de problemas.....	30
2.2.1.2 El proceso de comunicación.	31
2.2.2 Estrategias para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.....	34
2.2.2.1 Trabajo colaborativo	34
2.2.3 Secuencia didáctica	37
2.3 FUNDAMENTACIÓN LEGAL.....	38
3. DISEÑO METODOLÓGICO.....	39
3.1 MÉTODO DE INVESTIGACIÓN	39
3.2 DESCRIPCIÓN DEL ESCENARIO DE LOS PARTICIPANTES.....	40

3.3 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN	40
3.4 CRITERIOS ÉTICOS	43
3.5 PROCESO METODOLÓGICO	44
3.5.1 Planificación.....	44
3.5.2 Acción.	45
3.5.3 Evaluación de la acción	45
4. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN.....	46
5. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS.....	61
5.1 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA.....	61
5.1.1 Análisis de resultados del primer momento “individual” de la prueba diagnóstica.....	62
5.1.1.1 Análisis de los resultados en las habilidades del proceso de comunicación.	62
5.1.1.2 Análisis de las estrategias de resolución de problemas.....	79
5.1.2 Análisis de resultados del segundo momento “en grupo” de la prueba diagnóstica.....	81
5.2 ANÁLISIS DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA IMPLEMENTADA	85
5.2.1 Análisis de la primera sesión	85
5.2.2 Análisis de la segunda sesión.....	89
5.2.3 Análisis de la tercera sesión	92
5.2.4 Análisis de la cuarta sesión.....	95
5.2.5 Análisis de la quinta sesión.....	99
5.2.6 Análisis de la sexta sesión.	102
5.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PRUEBA FINAL	105
6. CONCLUSIONES	110
7. RECOMENDACIONES.....	113

BIBLIOGRAFIA.....114

ANEXOS.....120

LISTA DE IMÁGENES

Imagen 1. Respuesta de Estudiante 04	63
Imagen 2. Respuesta Estudiante 10	64
Imagen 3. Respuesta Estudiante 25	64
Imagen 4. Respuesta Estudiante 11	65
Imagen 5 Respuesta Estudiante 04	67
Imagen 6. Respuesta Estudiante 19	67
Imagen 7. Respuesta Estudiantes 08	68
Imagen 8. Respuesta Estudiante 14	69
Imagen 9. Respuesta Estudiante 25	70
Imagen 10. Respuesta Estudiante 02	71
Imagen 11. Respuesta Estudiante 17	72
Imagen 12. Respuesta Estudiante 13	73
Imagen 13. Respuesta Estudiante 03	73
Imagen 14. Respuesta Estudiante 02	74
Imagen 15. Respuesta de Estudiante 10	75
Imagen 16. Respuesta Estudiantes 16	76
Imagen 17. Respuesta Estudiante 10	77
Imagen 18 Respuesta Estudiante 06	78
Imagen 19. Respuesta Estudiante 06	78
Imagen 20. Respuesta Estudiante 06	79
Imagen 21. Respuesta Estudiante 06	79
Imagen 22. Respuesta Estudiante 08	82
Imagen 23. Respuesta Estudiante 02	83
Imagen 24. Respuesta Estudiante 01	84
Imagen 25. Respuesta Estudiante 09	84

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Niveles de la habilidad para interpretar en el proceso de comunicación en la resolución de problemas.	63
Tabla 2. Clasificación de los estudiantes por niveles en la habilidad para interpretar.	63
Tabla 3. Niveles de la habilidad para explicar en el proceso de comunicación en la resolución de problemas.	66
Tabla 4. Clasificación de los estudiantes por niveles en la habilidad para explicar.	66
Tabla 5. Niveles de la habilidad para justificar en el proceso de comunicación en la resolución de problemas.	69
Tabla 6. Clasificación de los estudiantes por niveles en la habilidad para justificar.	69
Tabla 7. Niveles de la habilidad para argumentar en el proceso de comunicación en la resolución de problemas.	71
Tabla 8. Clasificación de los estudiantes por niveles de la habilidad para argumentar.....	72
Tabla 9. Categorización de las estrategias de solución de problemas de conteo..	80
Tabla 10. Categorización de las razones para convencer a otro compañero que su solución es correcta y la más adecuada	80
Tabla 11. Comparación de los niveles de habilidad de la prueba diagnóstica y la prueba final en la habilidad para interpretar problemas de conteo.	108
Tabla 12. Comparación de los niveles de habilidad de la prueba diagnóstica y la prueba final en la habilidad para explicar problemas de conteo.	108
Tabla 13. Comparación de los niveles de habilidad de la prueba diagnóstica y la prueba final en la habilidad para justificar problemas de conteo.....	108
Tabla 14. Comparación de los niveles de habilidad de la prueba diagnóstica y la prueba final en la habilidad para argumentar problemas de conteo.	109

LISTA DE ANEXOS

	pág.
ANEXO A. RUBRICA.....	120
ANEXO B. CONSENTIMIENTO INFORMADO.....	121
ANEXO C. PRUEBA DIAGNOSTICA	124
ANEXO D. CATEGORIZACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONTEO.	127
ANEXO E. CATEGORIZACIÓN DE LAS RAZONES PARA CONVENCER A OTRO COMPAÑERO QUE SU SOLUCIÓN ES CORRECTA Y LA MÁS ADECUADA ..	132

RESUMEN

TÍTULO: EL TRABAJO COLABORATIVO COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA POTENCIAR EL PROCESO DE COMUNICACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS*

AUTOR: JORGE ERNESTO ANGARITA BALLESTEROS**

PALABRAS CLAVE: Resolución de problemas, proceso de comunicación, trabajo colaborativo, pensamiento aleatorio.

DESCRIPCIÓN:

Esta investigación se encauzó en la identificación de las dificultades de los estudiantes en el proceso de comunicación en la resolución de problemas matemáticos y en el análisis de la incidencia del trabajo colaborativo como estrategia didáctica para potenciar el proceso de comunicación en la resolución de problemas relacionados con el pensamiento aleatorio y el sistema de datos, trabajados en el contexto de la vida diaria.

Con el fin de potenciar el proceso de comunicación en la resolución de problemas relacionados con el pensamiento aleatorio, se diseñó e implementó una secuencia didáctica basada en el trabajo colaborativo de Jonhson.

Los resultados de esta investigación muestran las principales dificultades que se identificaron en los estudiantes de décimo grado en el proceso de comunicación en la resolución de problemas matemáticos. En cuanto al trabajo colaborativo se evidenció que éste permitió que algunos estudiantes logaran avanzar en el fortalecimiento de sus habilidades (interpretar, explicar, justificar y argumentar) del proceso de comunicación, al igual que se logró que los estudiantes se involucraran más en su proceso de aprendizaje de las matemáticas, consiguiendo que un grupo significativo de estudiantes se apropiara de las técnicas de conteo y las aplicara en la resolución de problemas relacionados con el pensamiento aleatorio.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias Humanas. Escuela de Educación. Directora: Olga Lucía Duarte Bolívar, Magister en Pedagogía.

ABSTRACT

TITLE: THE COLLABORATIVE WORK AS DIDACTIC STRATEGY TO PROMOTE THE COMMUNICATION PROCESS IN THE PROBLEMS RESOLUTION*

AUTHOR: JORGE ERNESTO ANGARITA BALLESTEROS**

KEY WORDS: Problems resolution, communication processes, collaborative work, randomized thinking.

DESCRIPTION:

This investigation was channelled in the identification of the difficulties of the students in the communication process in the resolution of mathematical problems and in the analysis of the incident of the collaborative work as didactic strategy to promote the process of communication in the problems resolution related to the randomized thinking and the system of information, been employed at the context of the daily life.

In order to promote the communication process in the problems resolution related to the randomized thinking, it was designed and implemented a didactic sequence based on Jonhson's collaborative work.

The results of this investigation show the principal difficulties that were identified in the students of tenth degree in the communication process in the resolution of mathematical problems. As for the collaborative work there was demonstrated that it is allowed that some students achieved to advance in the strengthening of their skills (interpret, make clear, justify and argue) of the communication process, as it achieved that the students were interfering more in their learning process of the mathematics, achieving that a significant group of students was appropriating of the techniques of counting and was applying them in the resolution of problems related to the randomized thinking.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias Humanas. Escuela de Educación. Directora: Olga Lucía Duarte Bolívar, Magister en Pedagogía.

INTRODUCCIÓN

En la sociedad el hombre nunca ha actuado solo, siempre lo ha hecho en compañía con el otro, lo que le ha permitido consolidarse como sociedad y avanzar en su desarrollo, es por esto que en los entornos profesionales para los cuales preparamos a nuestros estudiantes una de las habilidades más relevante es precisamente el trabajo colaborativo, por tal razón es nuestro deber como docentes desarrollarla y qué mejor que con el ejemplo, utilizándola como estrategia didáctica que facilita la adquisición de competencias matemáticas mediante procesos de trabajo activo y participativo.

Otra de las habilidades es la comunicación ya que ellos deben ser capaces de expresar y defender sus ideas con argumentos, interpretar y evaluar las presentadas por otros y lograr persuadir y convencer con argumentos sólidos, competencias que se logran al fortalecer el proceso de comunicación en la resolución de problemas.

En Colombia desde hace varios años el Ministerio de educación Nacional ha planteado con los lineamientos curriculares y los estándares Básicos de Competencias en Matemática, hace necesario modificar el curriculum proponiendo la enseñanza de las matemáticas como un engranaje entre los procesos generales (Razonamiento; Resolución y planteamiento de problemas; Comunicación; Modelación y Elaboración, comparación y ejecución de procedimientos), los conocimientos (pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y sistemas de datos, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos) y el contexto (situaciones problemáticas: de la misma matemática, de la vida diaria, de las otras ciencias).

Es por ello que esta investigación se centra en la identificación de las dificultades de los estudiantes en el proceso de comunicación en la resolución de problemas matemáticos y en el análisis de la incidencia del trabajo colaborativo como estrategia didáctica para potenciar el proceso de comunicación en la resolución de problemas relacionados con el pensamiento aleatorio y el sistema de datos, trabajados en el contexto de la vida diaria.

Este trabajo de investigación está organizado en seis capítulos los cuales se describen brevemente a continuación:

En el primer capítulo “el problema” se presenta el planteamiento del problema de investigación, con base en el análisis de los resultados obtenidos en los últimos años en las pruebas SABER y una prueba sobre resolución de problemas relacionados con el pensamiento numérico, métrico, aleatorio y espacial. También se presenta la justificación de este trabajo y los objetivos generales y específicos.

En el segundo capítulo “marco teórico” se muestran los antecedentes de investigación a nivel internacional, nacional y local, en los cuales se ha aplicado el trabajo colaborativo en la enseñanza, en especial de la matemática; la fundamentación teórica compuesta por: el planteamiento y resolución de problemas planteada por Polya, el proceso de comunicación y sus habilidades planteados por Niño, Montenegro, Duval, Durango, Perelman, el trabajo colaborativo planteado por Johnson, la secuencia didáctica planteada por Zabala y Díaz Barriga; la fundamentación legal tomada de la ley general de educación , los lineamientos curriculares de matemáticas y los estándares básicos de competencias en matemáticas.

En el capítulo tres “diseño metodológico” se define el método de investigación, el escenario de los participantes, las técnicas e instrumentos de recolección de

información, los criterios éticos que se tuvieron en cuenta, y el proceso metodológico.

En el capítulo cuatro “análisis e interpretación de resultados” se presenta el análisis de las soluciones realizadas por los estudiantes a los problemas propuestos en la prueba diagnóstica y la prueba final. La categorización se realizó a la luz del marco teórico, de los estándares básicos de competencias en matemáticas en la que plantea habilidades que deben desarrollar los estudiantes para fortalecer el proceso de comunicación, estas son: habilidad para interpretar, habilidad para explicar, habilidad para justificar y habilidad para argumentar, con el fin de determinar las dificultades de los estudiantes en el proceso de comunicación en la resolución de problemas matemáticos. Igualmente se muestra el análisis de la secuencia didáctica implementada, teniendo en cuenta los cinco componentes que debe tener el trabajo colaborativo propuestos por Jonhson: interdependencia positiva, exigibilidad personal, interacción positiva cara a cara, uso frecuente de habilidades personales y de grupo, y autoanálisis de grupo.

En el capítulo quinto “conclusiones” se mencionan los hallazgos más relevantes de esta investigación, relacionados con el trabajo colaborativo y el proceso de comunicación en la resolución de problemas.

Y finalmente en el capítulo sexto “recomendaciones” se plantean unas sugerencias que permitirán mejorar el proceso de enseñanza de las matemáticas a aquellos profesores que decidan incorporar el trabajo colaborativo como una estrategia didáctica en el aula.

Además se presentan las referencias bibliográficas consultadas y los anexos.

1. EL PROBLEMA

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El Ministerio de Educación Nacional ha realizado esfuerzos por mejorar la educación matemática en Colombia al realizar proyectos como: incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación media de Colombia, educación rural PER, descartes y el foro educativo nacional 2014 “ciudadanos matemáticamente competentes”, además el planteamiento de los estándares básicos de competencias en matemáticas planteados en el año 2006; pero esto no ha sido suficiente ya que la propuesta allí planteada no se ha llevado a la práctica en las aulas de clase, puesto que un porcentaje significativo de los maestros encargados de enseñar la matemática únicamente realizan clases magistrales y no se preocupan por que los estudiantes adquieran un pensamiento matemático (numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional), priorizando la enseñanza de algoritmos y definiciones, los cuales se deben aprender de memoria para la realización de ejercicios, además de considerar que un estudiante sabe matemáticas si logra realizar ejercicios complejos, por lo cual los estudiantes no adquieren el pensamiento matemático y ven la matemática como algo muy difícil y abstracto.

Las pruebas SABER¹, presentadas por los estudiantes de noveno grado en el año 2015 en Colombia, dejan en evidencia las dificultades que ellos tienen para comunicar los conceptos matemáticos, realizar razonamientos y resolver problemas, ya que a nivel nacional el 23% se encuentra en nivel insuficiente, el 53% en nivel mínimo, el 20% en nivel satisfactorio y el 4% en nivel Avanzado; particularmente en el municipio de Girón el 14% se encuentra en nivel insuficiente,

¹ ICFES. Reportes de Jornada Pruebas Saber 3, 5, y 9 [en línea]. 2016. [Citado 15 abr 2016]. Disponible en Internet: <URL: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consulta_ReporteSedeJornada.aspx>

el 56% en nivel mínimo, el 26% en nivel satisfactorio y el 4% en nivel Avanzado; esta situación no es ajena al colegio Integrado Llano Grande ya que los resultados muestran que el 14%² se encuentra en nivel insuficiente, el 70% en nivel mínimo, el 13% en nivel satisfactorio y el 3% en nivel avanzado. Estas dificultades institucionales se pudieron confirmar al analizar los resultados de una prueba diseñada y aplicada en octubre del año 2015 por el investigador sobre resolución de problemas relacionados con el pensamiento numérico, métrico, aleatorio y espacial, a los 60 estudiantes de noveno grado, comprobando que hay dificultades en la resolución de problemas en cuanto a: el método de solución, debido a la ausencia de herramientas, técnicas específicas y pautas generales que les permitan enfrentarse a ellos sin miedo y con cierta garantía de éxito; la ausencia o utilización inapropiada de conceptos, problemática generada por la implementación de metodologías inadecuadas en cuanto a la exposición poco clara y descontextualizada de los contenidos y al ritmo inapropiado de trabajo establecido; la comunicación ya que no se evidencia una buena interpretación de los problemas, al igual que explicaciones y justificaciones poco claras.

Como consecuencia a dicha problemática, se ve la necesidad de implementar estrategias didácticas para la enseñanza de las matemáticas que se ajusten a la evolución y al progreso de los estudiantes para la consecución de aprendizajes significativos, que trasciendan la formulación, comprobación y ejercitación mecánica de procedimientos carentes de significado, y faciliten contextos en donde el estudiante se involucre en actividades que comprenda, que le interesen y le permitan interactuar con sus compañeros. Lo planteado anteriormente lleva a plantear preguntas como: ¿cuáles son las dificultades de los estudiantes para interpretar, explicar, justificar y argumentar a la hora de resolver problemas?, ¿qué características debe tener una propuesta didáctica que propenda por el aprendizaje matemático incentivando el desarrollo personal y social?, ¿cómo

² ICFES. Reportes de Jornada Entidad Territorial, Pruebas Saber 3, 5 y 9 [en línea]. 2016. [Citado 15 abr 2016]. Disponible en Internet: <URL: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/_consultaReporteEntidadTerritorial.aspx>

lograr que los estudiantes asuman la mayor parte de la responsabilidad de su aprendizaje, en la resolución de problemas matemáticos, desarrollando funciones que en la enseñanza tradicional se reservan al docente?, ¿qué efectos tiene la discusión, la ayuda y la colaboración entre estudiantes en el proceso de comunicación al resolver problemas matemáticos?

Con miras a mejorar la práctica docente sobre la enseñanza de la matemática, cabe preguntar ¿qué incidencia tiene la implementación del trabajo colaborativo como estrategia didáctica para potenciar el procesos de comunicación en la resolución de problemas matemáticos?

1.2. JUSTIFICACIÓN

Para lograr una buena educación, esta debe estar íntimamente ligada a la sociedad en la que se encuentra, lo que implica que los fines de la educación dependen de las necesidades y avances sociales, es por esto que la educación matemática debe responder a nuevas demandas globales y nacionales como: las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad, y la formación de ciudadanos competentes; para poder dar solución a las necesidades inmediatas.

De alguna manera la educación en Colombia se está involucrando en este proceso por medio de los estándares básicos de competencias en matemáticas, contruidos por el Ministerio de Educación Nacional, en los cuales se define competencia como “conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores”³, y

³ COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá, Colombia. 2006.

resalta que las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, si no que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos, motivando a los docentes a formar estudiantes competentes en matemáticas e invitándolos a que en los procesos de enseñanza de las matemáticas se asuma la clase como una comunidad de aprendizaje donde docentes y estudiantes interactúan para construir y validar conocimiento, para ejercer la iniciativa y la crítica, y para aplicar ese conocimiento en diversas situaciones y contextos.

Es por esto que recobra una gran importancia la implementación del trabajo colaborativo como estrategia didáctica para potenciar el proceso de comunicación en la resolución de problemas, en la cual los estudiantes trabajan conjuntamente en grupos para alcanzar metas comunes; ayudan a otros, para que todos puedan alcanzar en alguna medida el éxito; buscan información; articulan, explican y argumentan al grupo las ideas propias, llevan a que estas sean más concretas y precisas; y a organizar e integrar más el conocimiento, convirtiéndose en el centro de la clase y el profesor en un facilitador y guía del aprendizaje. Por el contrario, si continuamos utilizando los métodos tradicionales de enseñanza en los cuales se contempla la clase como un entorno en el que el profesor es el encargado de dar la información y cada estudiante debe responder por alcanzar las metas planeadas y convirtiendo al profesor en el centro de la clase, no lograremos formar estudiantes matemáticamente competentes.

Como señalan Scardamalia y Bereiter: “Los estudiantes necesitan aprender profundamente y aprender como aprender, como formular preguntas y seguir líneas de investigación, de tal forma que ellos puedan construir su propio conocimiento a partir de lo que conocen. El conocimiento propio que es discutido

en grupo, motiva la construcción de nuevo conocimiento”⁴ y ratifican la necesidad de que en las clases se implemente el trabajo colaborativo como estrategia didáctica.

En los entornos profesionales para los cuales preparamos a nuestros estudiantes una de las habilidades más relevante es precisamente el trabajo colaborativo, por tal razón es nuestro deber como docentes desarrollarla y qué mejor que con el ejemplo, utilizándola como estrategia didáctica que facilita la adquisición de competencias matemáticas mediante procesos de trabajo activo y participativo.

Otra es la comunicación ya que ellos deben ser capaces de expresar y defender sus ideas con argumentos, interpretar y evaluar las presentadas por otros y lograr persuadir y convencer con argumentos sólidos, competencias que se logran al fortalecer el proceso de comunicación en la resolución de problemas.

La investigadora Ángela María Ramírez Arteaga de la universidad Autónoma de Barcelona en sus estudios realizados en el 2009 ha identificado la comunicación como uno de los procesos más importantes para aprender matemáticas y para resolver problemas, lo que nos ratifica la importancia del proceso de comunicación en la resolución de problemas.

Por consiguiente, al fortalecer el proceso de comunicación en la resolución de problemas, posiblemente se logre en los estudiantes un desempeño reflexivo y crítico en el aprendizaje de las matemáticas, puesto que se permitirá abordar una postura ante el tratamiento y solución de problemas, de forma oral y escrita.

⁴ SCARDAMALIA, M. y BEREITER, C. Two models of classroom learning using a communal database citado por BERMEJO, María; PALENCIA, Cruz y JOSÉ, M. Diseño de un modelo tecnológico para el aprendizaje de lengua castellana: un ejemplo práctico[en línea]. En Didáctica. Lengua y Literatura, 2003, vol. 15, p. 40. [Citado 2 may 2016]. Disponible en Internet: <http://revistas.ucm.es/index.php/DIDA/article/view/DIDA0303110037A/19400>

Por ende, al lograr potenciar el proceso de comunicación en la resolución de problemas en nuestros estudiantes, competencia evaluada por las pruebas SABER, posiblemente el índice sintético de calidad educativa mejorará y se logrará potenciar el plan de mejoramiento institucional.

En el caso de los docentes de matemáticas y en especial los de la institución contarán con un modelo de estrategia didáctica que potencia el proceso de comunicación en la resolución de problemas, el cual podrán adaptar y poner en práctica en su proceso de enseñanza y aprendizaje en el grado en que se desempeñen.

1.3. OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo general. Determinar la incidencia del trabajo colaborativo como estrategia didáctica para potenciar el proceso de comunicación en la resolución de problemas.

1.3.2 Objetivos específicos

- ✓ Identificar las dificultades de los estudiantes en el proceso de comunicación en la resolución de problemas matemáticos.
- ✓ Diseñar e implementar una secuencia didáctica basada en el trabajo colaborativo, para potenciar el proceso de comunicación en la resolución de problemas.
- ✓ Evaluar el efecto en el proceso de comunicación en la resolución de problemas matemáticos en los estudiantes, con la implementación del trabajo colaborativo como estrategia didáctica.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 DETERMINACIÓN DE ANTECEDENTES

En el desarrollo de la búsqueda de antecedentes se tuvieron en cuenta trabajos en los cuales se ha aplicado el trabajo colaborativo en la enseñanza, en especial de la matemática, los cuales aportan elementos importantes sobre la metodología de esta estrategia y sus bondades en el aprendizaje, entre otros aspectos.

2.1.1 Antecedentes internacionales. En España en el 2011, Prieto, Rodríguez, Hernández y Queiruga desarrollaron el proyecto denominado “Experiencias docentes de trabajo colaborativo en distintas áreas de ciencias”⁵ el cual se desarrolló en las asignaturas de física, Climatología, Geología y complementos de matemáticas, donde se le propone a los estudiantes la realización de trabajos en grupo (Evaluables) y se les comunica las condiciones de trabajo, igualmente se les solicita que elijan el tema y el grupo de trabajo teniendo en cuenta que éste debe estar conformado de dos a cinco estudiantes, los cuales deben organizar la dinámica de trabajo, posteriormente se les proporciona un documento con las orientaciones y ayudas para la realización del proyecto, destacando que el desarrollo del trabajo es libre, que cuentan con la asesoría y el acompañamiento del docente y que como resultado de su trabajo deben presentar un póster científico y/o presentación informática que será de apoyo en la comunicación oral de su investigación a sus compañeros. Este gran proyecto dejó ver como el trabajo colaborativo, complementa la enseñanza tradicional desarrollando el autoaprendizaje de los estudiantes, los acerca a la metodología del trabajo de investigación y al reconocimiento de la importancia del pensamiento crítico, genera

⁵ PRIETO CALVO, Cristina; RODRÍGUEZ PUEBLA, Concepción; HERNÁNDEZ ENCINA, Ascensión; Y QUEIRUGA DIOS, Araceli. Experiencias docentes de trabajo colaborativo en distintas áreas de ciencias [en línea]. En: Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información, vol. 12, núm. 4. Universidad de Salamanca. Salamanca, España, 2011, p. 133-146. [Citado 2 may 2016]. Disponible en Internet: <URL: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=201022649009>>

clases más participativas y dinámicas favoreciendo el ambiente de preguntas y discusión y se aprende haciendo.

Igualmente en el año 2012 en España, se desarrolló el estudio denominado “Trabajo colaborativo en el área de matemáticas”⁶ realizado por Aldana Yarlequé Cristhian el cual tenía por objetivo presentar las virtudes y beneficios del aprendizaje colaborativo con respecto a los métodos tradicionales utilizados para producir aprendizajes significativos en el área de matemáticas. Este trabajo se desarrolló con un grupo de 35 estudiantes de la carrera de físico-matemáticas de la universidad nacional de San Cristóbal de Huamanga en la asignatura de álgebra, con los cuales se aplicó la técnica del rompecabezas del trabajo colaborativo para el desarrollo de la temática. Este trabajo permitió ver que el trabajo colaborativo realmente permite que los estudiantes logren aprendizajes significativos en matemáticas, además fortalecen sus capacidades de investigación y trabajo en equipo, y resalta la importancia de utilizar las tecnologías de la información y la comunicación (TIC).

2.1.2 Antecedentes nacionales. En Colombia, también se han desarrollado proyectos de investigación donde se aplica el trabajo colaborativo en la enseñanza para mejorar procesos de aprendizaje.

En Medellín en el año 2015, Leal Acevedo Yudy Milena desarrolló el proyecto “Ambiente virtual de aprendizaje en el área de matemáticas en modelo flexible postprimaria grados sexto y séptimo, para fortalecer el trabajo colaborativo”⁷, con el objetivo de diseñar, desarrollar, implementar y evaluar un ambiente virtual de aprendizaje (AVA) en el área de matemáticas, en el cual la estrategia de la

⁶ ALDANA YARLEQUÉ, Cristhian. Trabajo colaborativo en el área de Matemáticas [en línea]. En: Revista sobre Docencia Universitaria, Vol. 3, Núm. 1, 2012. [Citado 8 abr 2016]. Disponible en Internet: <URL: <http://revistas.pucp.edu.pe/index.php/enblancoynegro/article/view/2889/2815>>

⁷ LEAL ACEVEDO, Yudy Milena. Ambiente virtual de aprendizaje en el área de matemáticas en modelo flexible postprimaria grados sexto y séptimo, para fortalecer el trabajo colaborativo [en línea]. En: Revista Virtual Universidad Católica del Norte, núm. 46, septiembre-diciembre, 2015, p.47-59. Fundación Universitaria Católica del Norte. Medellín, Colombia [Citado 18 abr 2016]. Disponible en Internet: <URL: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=194242285005>>

evaluación y la metodología se desarrollan bajo el trabajo colaborativo. Se siguió una metodología de investigación de métodos mixtos aplicando el método de diseño secuencial explicativo. Los resultados permitieron evidenciar como las TIC son un escenario perfecto para implementar el trabajo colaborativo con el fin de lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes.

En Chía, Cundinamarca en el año 2014, Orduz Sandoval Doris Liliana desarrolló el proyecto “Comunicación en el aula, una experiencia desde la matemática”⁸ con el objetivo de lograr que los estudiantes mejoren su proceso de comunicación matemática oral y escrita para que sean capaces de entender enunciados, consolidar información y resolver problemas propios del área. Para lo cual empleó tres estrategias que fueron la creación y uso de un diccionario, un portafolio matemático y la aplicación de trabajo colaborativo. Los resultados mostraron que el trabajo colaborativo promueve la autonomía del estudiante y fortalece el proceso de comunicación matemática.

Igualmente en esta misma ciudad en el año 2014, Vásquez Gómez Norberto Alejandro desarrolló el proyecto “¿Qué nuevas estrategias puedo implementar como docente de matemáticas para mejorar el bajo rendimiento de los estudiantes de sexto grado del colegio Luis López de Mesa en el área?”⁹, con el objetivo de identificar las causas del bajo rendimiento e implementar estrategias que me permitan transmitir el conocimiento matemático de una manera efectiva, logrando mejorar los resultados. Para lo cual implementó la estrategia del trabajo colaborativo (trabajo con monitores), frases motivadoras y comunicación con padres de familia, con las cuales logró mejorar el rendimiento académico y desde

⁸ ORDUZ SANDOVAL, Doris Liliana. Comunicación en el aula una experiencia desde matemáticas (Tesis Especialización en Pedagogía e Investigación en el Aula) [en línea]. Universidad de la sabana, Facultad de Educación [Citado 20 abr 2016]. Disponible en Internet: <URL: [http://intellectum.unisabana.edu.co/bitstream/handle/10818/11671/Doris%20Liliana%20orduz%20Sandoval%20\(tesis\).pdf?sequence=1](http://intellectum.unisabana.edu.co/bitstream/handle/10818/11671/Doris%20Liliana%20orduz%20Sandoval%20(tesis).pdf?sequence=1)>.

⁹ VÁSQUEZ GÓMEZ, Norberto Alejandro. ¿Qué nuevas estrategias puedo implementar como docente de matemáticas para mejorar el bajo rendimiento de los alumnos de sexto grado del Colegio Luis López de Mesa en el área? (Tesis Especialización en pedagogía e investigación en el aula) [en línea]. Universidad de la Sabana, Facultad de Educación. Bogotá, 2014. [Citado 20 abr 2016]. Disponible en Internet: <URL: <http://intellectum.unisabana.edu.co/bitstream/handle/10818/11663/Norberto%20Alejandro%20Vasquez%20Gomez%20%28tesis%29.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>.

luego el aprendizaje de las matemáticas, siendo el trabajo colaborativo la principal estrategia.

2.1.3 Antecedentes locales. A nivel local se encuentran estudios sobre aplicación de la estrategia del trabajo colaborativo para la enseñanza de la matemática.

En el año 2004, en la Universidad Industrial de Santander, Bula Gustavo Alfredo realizó el trabajo “Aprendizaje de conceptos de la teoría de probabilidad a través del aprendizaje colaborativo”¹⁰ en el cual propone una estrategia didáctica para enseñar conceptos de probabilidad a los estudiantes de ingeniería industrial, bajo un ambiente de aprendizaje colaborativo, utilizando como estrategia de enseñanza la resolución de problemas. Él concluye que la estrategia de enseñanza basada en los conceptos previos, que implique una interacción entre individuos (trabajo colaborativo), y en los que se promueva la búsqueda continua por medio de los interrogantes permanentes, puede ofrecer mayores probabilidades de éxito, que aquellas en que estos componentes no se consideran.

Posteriormente en el año 2007, en la Universidad Industrial de Santander, Quintanilla Piña Edgar desarrolló el estudio: “El trabajo colaborativo como pilar estratégico de la educación en los niveles introductorio de la Universidad Industrial de Santander”¹¹ el cual tenía como objetivo aportar estrategias dinámicas para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la física; en el cual planteó una actividad teórico práctica basada en el aprendizaje colaborativo a partir de un desafío físico, concluyendo que de esta forma se logran verdaderos aprendizajes significativos, se potencia la creatividad, la recursividad y el liderazgo.

¹⁰ BULA, Gustavo Alfredo. Aprendizaje de conceptos de la teoría de probabilidad a través del aprendizaje colaborativo [en línea]. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2004 [Citado 28 abr 2016]. Disponible en Internet: <URL: http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/pags/cat/popup/pa_detalle_matbib.jsp?parametros=131252|%20|8|11>.

¹¹ QUINTANILLA PINILLA, Edgar. El trabajo colaborativo como pilar estratégico de la educación en los niveles introductorio de la Universidad Industrial de Santander [en línea]. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2007. [Citado 3 may 2016] Disponible en Internet: <URL:http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/pags/cat/popup/pa_detalle_matbib.jsp?parametros=143839|%20|2|3>.

Se encuentra posteriormente, que en la Tecnológica FITEC en el año 2012, Valderrama Moreno Juddy Amparo desarrolló el proyecto “El trabajo colaborativo, una estrategia para aprender matemáticas”¹². En el estudio se planteó un proyecto de aula para la enseñanza de las matemáticas basado en el trabajo colaborativo, llegando a la conclusión que de esta manera se logra la construcción y comprensión de los saberes matemáticos trabajados y además un agrado por el aprendizaje del área.

2.2 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Teniendo en cuenta la problemática planteada, las teorías que sustentan el proyecto están relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y las estrategias para la enseñanza de las matemáticas, entre ellas el trabajo colaborativo.

2.2.1 La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En la enseñanza se han dado una variedad de “etapas” debido a los diferentes enfoques epistemológicos (racionalismo, empirismo y el constructivismo), de los cuales emanaron diferentes teorías del aprendizaje, en la que se destacan las teorías conductuales del aprendizaje (condicionamiento clásico de Pavlov, y el condicionamiento operante de Skinner) y las teorías cognitivas del aprendizaje (teoría del aprendizaje de Piaget, Bruner, Ausubel, Gagné, Vigotsky), lo que ha afectado directamente el currículo. De esta propuesta, no se ha excluido la educación matemática, identificada en los últimos años con la formulación, planteamiento y resolución de problemas, para brindar al estudiante la oportunidad de enfocar sus actividades hacia el planteamiento de hipótesis y preguntas que le permitan reflexionar y resolver interrogantes sobre el tema, criticar y valorar los resultados, exponer y defender sus puntos de vista y escuchar a sus compañeros,

¹² VALDERRAMA MORENO, Judy Amparo. El trabajo colaborativo, una estrategia para aprender matemáticas [en línea]. Fitec, Vol. 2, No. 2, 2012. [Citado 20 abr 2016]. Disponible en Internet: <URL: <http://www.fitecvirtual.org/ojs-2.3.6/index.php/FITEC/article/view/77>>.

exigiéndole al profesor diseñar actividades y crear espacios que le permitan al estudiante desarrollar lo anteriormente expuesto, pero lo cual debe tener en cuenta las habilidades y conocimientos que tengan los estudiantes.

Si analizamos el desempeño matemático de los estudiantes es importante responder la pregunta ¿qué significa que un estudiante aprenda matemáticas?, una respuesta muy conocida relaciona el aprendizaje con la acumulación de conceptos y habilidades, acomodados en una secuencia ordenada; es decir, “aprender matemáticas significa identificar los artefactos de la disciplina, esto es, sus conceptos y sus procedimientos, aquí las matemáticas se ven como un cuerpo de conocimientos acotado y estático que el estudiante tiene que dominar vía la mecanización”.¹³ Sin embargo, esta concepción ha sido cuestionada y han empezado a surgir otras perspectivas acerca del aprendizaje de las matemáticas, por ejemplo, la idea de que el aprender matemáticas se relaciona con que el estudiante desarrolle o construya las ideas matemáticas involucrándose en las actividades propias de la disciplina.

Otra opinión es la planteada en los estándares básicos de competencias en matemáticas exponiendo que los estudiantes sean competentes, para lo cual deben desarrollar los procesos de: formulación y resolución de problemas, modelación, comunicación, razonamiento, y formulación comparación y ejercitación de procedimientos.

Igualmente la organización para la cooperación y el desarrollo económico (OCDE) en su programa PISA plantea “la competencia matemática se refiere a la capacidad del estudiante para razonar, analizar y comunicar operaciones matemáticas. Es, por lo tanto, un concepto que excede al mero conocimiento de la

¹³ SANTOS, Luis Manuel. Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. México. D.C. Ed. Ibero América, 1997.

terminología y las operaciones matemáticas e implica la capacidad de utilizar el razonamiento matemático en la solución de problemas de la vida cotidiana"¹⁴

2.2.1.1 El planteamiento y la resolución de problemas. Aclarar conceptos como, qué es un problema, es necesario puesto que la formulación y resolución de problemas es uno de los ejes de esta investigación.

Una situación puede ser un problema para algunas personas pero para otras no, ya que resolver esa situación para algunos puede que le demande esfuerzo, mientras para otros es simplemente una rutina o algo que no les causa dificultad, lo que lo convertiría en un simple ejercicio, e incluso si deciden evadirlo desde luego que dejaría de ser problema.

Para aclarar un poco, analicemos el significado que le da Polya al término “tener un problema significa buscar conscientemente alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar”¹⁵, bajo estas consideraciones para que una situación sea un problema debe ser reconocida como tal, propiciar un interés y deseo de ser solucionada, y no presentar caminos o estrategias de solución inmediatas.

Otro concepto es el de ejercicio, que según lo anterior, sería una situación para la cual existe un camino que lleva a dar una solución de forma inmediata, sin importar lo tedioso que pueda ser, de tal forma que solo exige tener memorizados algunos algoritmos, por lo cual no me llevaría a obtener aprendizajes significativos. Uno de los principales autores que ha trabajado esta propuesta es Polya, quien menciona algunas etapas en la resolución de un problema como son:

¹⁴ Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos OCDE. El programa PISA de la OCDE, Qué es y para qué sirve [en línea]. Paris: OCDE. [Citado 20 abr 2016]. Disponible en Internet: <http://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf>

¹⁵ POLYA, Georges. Como plantear y resolver problemas. México. Editorial Trillas, 1965.

- Entendimiento del problema: En esta etapa básicamente se debe representar y entender las condiciones del problema, para lo cual por lo menos debemos sacar la información que trae el problema (datos), las incógnitas, las condiciones que relacionan los datos, entre otros.
- Diseño de un plan: es la etapa donde se plantea las hipótesis y se escogen las estrategias a utilizar. Es bueno pensar en problemas conocidos que se parezcan o relacionen con él, o de pronto en dividir o simplificar el problema.
- Ejecución del plan: Como su nombre lo indica, consiste en poner a prueba los hipótesis y ejecutar las estrategias, realizando una evaluación permanente en la cual se mire si realmente, la hipótesis es verdadera o su comprobación no me complica más el problema.
- Evaluación de la solución: Es la etapa donde se revisan los cálculos y procedimientos, donde se mira si dicha solución es coherente con las condiciones del problema.

2.2.1.2 El proceso de comunicación. Teniendo en cuenta los estándares básicos de competencias en matemáticas que plantean: “las matemáticas no son un lenguaje, pero ellas pueden construirse, refinarse y comunicarse a través de diferentes lenguajes con los que se expresan y representan, se leen y se escriben, se hablan y se escuchan. La adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas ha de ser un proceso deliberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos, conceptos y simbolizaciones, para tomar conciencia de las conexiones entre ellos y para propiciar el trabajo colectivo, en el que los estudiantes compartan el significado de las palabras, frases, gráficos y símbolos, aprecien la necesidad de tener acuerdos colectivos y aun universales y valoren la eficiencia, eficacia, y economía de los lenguajes matemáticos”¹⁶.

¹⁶ COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá, Colombia. 2006.

Esto nos hace ver la importancia que tiene este proceso en la resolución de problemas y en la enseñanza de las matemáticas. Se hace indispensable identificar algunas habilidades que deben desarrollar los estudiantes para fortalecer el proceso de comunicación, estas son: habilidad para interpretar, habilidad para explicar, habilidad para justificar y habilidad para argumentar.

- **Habilidad para interpretar.** Al consultar algunos autores que describen esta habilidad encontramos a Niño quien plantea “que la interpretación es un acto consiente en la captura de una información presente en un contexto determinado, atribuyéndole un significado dentro de un campo del conocimiento, lo cual se hace a partir de las experiencias previas del individuo”¹⁷. igualmente Montenegro menciona “que la interpretación de un problema significa atribuir significado a las condiciones iniciales del problema, de modo que todas las expresiones lógicas estructuradas en él adquieran sentido, lo cual encierra distinguir los elementos primarios que intervienen en el enunciado y las relaciones lógicas que se dan entre ellas”¹⁸.

Teniendo en cuenta lo planteado por estos autores en este estudio se considerará la habilidad de interpretación de un problema como la capacidad de los estudiantes para identificar la pregunta, los datos y las variables que proporciona el problema, al igual que las relaciones existentes entre ellas, teniendo en cuenta el contexto y sus experiencias previas.

- **Habilidad para explicar.** Si se parte de la definición de explicar que consiste en hacer conocer o comprender la razón o causa de una cosa a alguien de manera clara y precisa, y de la definición planteada por Duval “la explicación es una actividad reflexiva en relación a otra, entonces la explicación es un

¹⁷ NIÑO ROJAS, V. M. Competencias en la comunicación. Hacia las prácticas del discurso. Bogotá, Colombia. Ecoe ediciones. 2005.

¹⁸ MONTENEGRO, E. Modelo para la estructuración y formación de habilidades lógicas a través del análisis matemático. Editorial Académica Española, 2012.

medio explícito que dispone el profesor o el estudiante para unir o enlazar las ideas. Da una o más razones para volver comprensible un dato, un fenómeno, un resultado, un comportamiento”¹⁹ o lo planteado por la NCTM²⁰ que los estudiantes deben ser capaces de explicar los métodos que han empleado en la solución de un problema, pueden aprender a explicar sus respuestas y a ser capaces de explicar por qué. Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente en esta investigación se entenderá la habilidad para explicar cómo la capacidad del estudiante para exponer sus ideas y razones para volver comprensible un dato, una variable o un resultado con palabras claras o ejemplos.

- **Habilidad para justificar.** El MEN considera que una de las habilidades importantes que debe desarrollar un estudiante es la justificación ya que ellos deben justificar las estrategias y los procedimientos empleados en la resolución de un problema. Uno de los autores que la define es Durango, Parra, Toro, y Zapata que plantean “el contexto de justificación hace referencia a las actividades y procesos en los que el estudiante emplea argumentos matemáticos para validar los enunciados. Aquí se incluyen las pruebas y las demostraciones”²¹. Teniendo en cuenta estos aportes en esta investigación se entenderá la habilidad para justificar como la capacidad del estudiante para sustentar una idea o un procedimiento, aceptar o refutar un resultado por medio de contenidos matemáticos o contraejemplos.
- **Habilidad para argumentar.** Perelman menciona “argumentar es intentar de convencer o persuadir, de forma razonada de las tesis que se tienen por ciertas”²², teniendo en cuenta estos aportes en esta investigación se

¹⁹ DUVAL, R. Gráficas y ecuaciones. La articulación de dos registros. 1999.

²⁰ National Council of Teachers of Mathematics, NCTM. Resumen Ejecutivo: Principios y Estándares para la Educación Matemática [en línea]. 2000. [Citado 20 abr 2016]. Disponible en Internet: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/archivos/RE_NCTM.pdf

²¹ DURANGO, J. PARRA, M TORO, J. ZAPATA, M. Contextos de descubrimiento y justificación en la clase de matemáticas. Revista virtual Universidad Católica del Norte. 2010.

²² PERELMAN, C. y OLBRECH-TYLECA, L. Tratado de argumentación. Barcelona, España, 1988.

entenderá la habilidad para argumentar como la capacidad del estudiante para convencer o persuadir a sus compañeros que su estrategia de solución del problema es la más adecuada, dando razones y utilizando adecuadamente el lenguaje matemático.

2.2.2 Estrategias para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En el transcurso de la historia el hombre ha logrado su evolución gracias a la cooperación entre ellos, es por esto que el proceso de enseñanza y aprendizaje no puede desconocerlo. En el desarrollo de las teorías cognitivas autores como Piaget en su teoría y en especial cuando plantea el conflicto cognitivo deja en evidencia que cuando dos niños discuten sobre una tarea de aprendizaje, surgen conflictos cognitivos, y mediante ella se logra detectar el razonamiento inadecuado, permitiendo lograr la reestructuración. Igualmente Vigotsky plantea la zona de desarrollo próximo, la cual define como la distancia entre la capacidad real de resolver un problema de forma individual y la capacidad potencial de resolverlo con la ayuda o colaboración de otro, con lo que se pueden lograr aprendizajes significativos, dejando en evidencia la necesidad de utilizar la estrategia de trabajo colaborativo en la enseñanza.

2.2.2.1 Trabajo colaborativo. En la enseñanza de las matemáticas se ha enfatizado la formulación y resolución de problemas como medio para lograr aprendizajes significativos, los cuales son enfrentados por los estudiantes de manera individual o grupal, pero es reconocido que formar grupos de trabajo no garantiza el éxito en la solución del problema, ya que ellos pueden simplemente ignorar a sus compañeros o peor aún obstaculizarlos, como lo plantea Johnson, “algunos grupos de aprendizaje cooperativo facilitan el aprendizaje de los estudiantes y mejoran la calidad de vida del aula. Otros entorpecen el aprendizaje y provocan insatisfacción y falta de armonía en la clase”²³ , es por esto que el

²³ JOHNSON, David. JOHNSON, Roger. El aprendizaje cooperativo en el aula. Buenos Aires. Editorial Paidós, 1999.

docente debe organizar grupos colaborativos y no solo grupos de trabajo, pero esta tarea nos lleva a preguntarnos ¿cómo lo hacemos?, el mismo autor nos propone tres tipos de grupos:

- **Grupos informales:** los cuales funcionan por poco tiempo, donde los estudiantes hablan de tres a cinco minutos antes o después de realizar una tarea de aprendizaje.
- **Grupos formales:** los cuales funcionan para una o varias clases, donde los estudiantes trabajan juntos para lograr metas comunes, garantizando el éxito de cada una de las metas de aprendizaje, de todos los integrantes.
- **Grupo de base:** los cuales funcionan por largos períodos (un año escolar), los cuales se caracterizan por ser heterogéneos, con miembros permanentes, los cuales deben apoyar, darse aliento y respaldo con el fin de tener éxito escolar.

De esta forma, el trabajo colaborativo genera aprendizaje colaborativo, definido por Jonhson como “un conjunto de métodos de instrucción para aplicación en los pequeños grupos, de entrenamiento y desarrollo de habilidades mixtas (aprendizaje y desarrollo personal y social), donde cada miembro del grupo es responsable tanto de su aprendizaje como el de los restantes miembros del grupo”²⁴, lo que implica que los estudiantes al resolver un problema por medio de la discusión logran en el grupo un mejor entendimiento de él, y al tener que articular, explicar y convencer al grupo de su hipótesis y de la estrategia a utilizar los lleva a que éstas sea más concretas y precisas, además se plantearán varias hipótesis, las cuales serán ejecutadas y evaluadas con la colaboración del grupo, lo que los llevará a fortalecer su proceso de comunicación en la resolución de problemas.

²⁴ Ibíd., p. 20

Igualmente Jonhson nos propone cinco componentes que debe tener el trabajo colaborativo:

- **Interdependencia positiva**, el éxito depende de todos los integrantes del grupo. Una estrategia que puede utilizar el docente es crear recompensas colectivas, tanto por el desempeño individual como grupal.
- **Exigibilidad personal** ante el grupo y ante el profesor. Para lograrlo el docente puede realizar preguntas individuales durante el trabajo de grupo y realizar la elección al azar del representante del grupo que expone los resultados.
- **Interacción positiva cara a cara**, la cual se logra cuando un miembro del grupo le explica o enseña a otro, o cuando se presentan discusiones entre ellos.
- **Uso frecuente de habilidades interpersonales y de grupo**: comunicarse, escuchar, organizar el trabajo, tomar decisiones y resolver conflictos.
- **Autoanálisis de grupo**: identificación de fortalezas y debilidades, y creación de propuestas de mejora.

Cabe destacar que en esta propuesta el docente comparte su autoridad ya que permite que los estudiantes elijan entre diferentes opciones de actividades, con el fin de motivarlos, al igual que los hace partícipes del proceso de evaluación, su responsabilidad se centra en lograr que los estudiantes utilicen sus conocimientos y habilidades, las compartan con los demás miembros del equipo, además potenciar en ellos la capacidad de escucha y de reflexión, participando en discusiones significativas, asimismo debe realizar la planeación de la clase donde

se evidencien los criterios de éxito, las tareas con sus respectivos objetivos, la explicación de los conceptos, teoremas, y en general de los saberes a trabajar.

Los estudiantes por su parte son responsables, líderes, motivados y colaborativos, y en el trabajo en grupos colaborativos comparten, escuchan, proponen, reflexionan y evalúan, además se preocupan por que cada miembro del equipo logre el éxito en su tarea de aprendizaje fortaleciendo de esta manera sus propios aprendizajes.

2.2.3 Secuencia didáctica. Por lo planteado anteriormente, los docentes deben planear las clases de manera diferente a lo habitual, lo que los lleva a tener mayor compromiso; de ahí que la elaboración de secuencias didácticas se convierta en uno de los medios más adecuados para estructurar la estrategia de trabajo colaborativo.

Zabala plantea que una secuencia didáctica es “un conjunto de actividades ordenadas, estructuradas, y articuladas para la consecución de unos objetivos educativos que tienen un principio y un final conocidos tanto por el profesorado como por el alumnado”²⁵, lo que los lleva a plantear problemas y no ejercicios rutinarios que logren vincular sus conocimientos previos con algún interrogante que provenga de la vida real con información de un objeto de conocimiento o concepto matemático.

Díaz Barriga²⁶ propone que la secuencia didáctica debe tener aspectos como: asignatura, contenidos, duración de la secuencia, número de sesiones y tiempo, autor, propósitos y orientaciones generales para la evaluación, al igual que tres tipos de actividades: de apertura, de desarrollo y de cierre.

²⁵ ZABALA VIDIELLA, Antoni. La práctica educativa. Como enseñar. México, 2008.

²⁶ DÍAZ BARRIGA, Ángel. Secuencias de aprendizaje. ¿Un problema del enfoque de competencias o un reencuentro con perspectivas didácticas?. México. 2013.

2.3 FUNDAMENTACIÓN LEGAL

En la ley General de educación en su artículo cinco plantea los fines de la educación, entre los cuales se encuentran:

La adquisición y generación de los conocimientos científicos y técnicos más avanzados, humanísticos, históricos, sociales, geográficos, y estéticos, mediante la apropiación de hábitos intelectuales, adecuados para el desarrollo del saber; el acceso al conocimiento, la ciencia, la técnica y demás bienes y valores de la cultura, el fomento de la investigación y el estímulo a la creación artística en sus diferentes manifestaciones²⁷.

Por tanto se hace necesario la enseñanza de las matemáticas en el colegio, posteriormente el Ministerio de Educación Nacional plantea los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias en matemáticas en los cuales se propone la enseñanza de las matemáticas como un engranaje entre los procesos generales (razonamiento; resolución y planteamiento de problemas; comunicación; modelación y elaboración, comparación y ejecución de procedimientos), los conocimientos (pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y sistemas de datos, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos) y el contexto (situaciones problemáticas: de la misma matemática, de la vida diaria, de las otras ciencias), por lo que en esta investigación se trabajó: el proceso general de comunicación, los conocimientos pensamiento aleatorio y sistemas de datos, y el contexto problemas de la vida diaria.

²⁷ COLOMBIA. CONGRESO DE LA REPUBLICA. Ley 115 de 1994: Ley General de educación. Diario Oficial No. 41.214 de 8 de febrero de 1994. Artículo 7.

3. DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

Esta investigación se desarrolló desde un enfoque de tipo cualitativo, porque en términos generales, se pretendió “comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto, buscando de esta manera comprender la perspectiva de los participantes acerca de los fenómenos que los rodea y profundizar en sus experiencia, perspectivas, opiniones y significados”²⁸. De esta manera, la investigación cualitativa permitió describir y comprender la incidencia que tuvo el trabajo colaborativo como estrategia didáctica para potenciar el proceso de comunicación en la resolución de problemas.

Coherente con el objetivo de la investigación se utilizó como diseño metodológico la investigación acción, teniendo como referentes a Alberich quien la define como “un método de estudio que busca obtener resultados fiables y útiles para mejorar situaciones colectivas, basando la investigación en los participantes de los propios colectivos a investigar”²⁹, y a Elliott que se refiere a ella como “una reflexión sobre las acciones humanas y las situaciones sociales vividas por el profesorado que tiene como objetivo ampliar la comprensión (diagnóstico) de los docentes y de sus problemas prácticos. Las acciones van encaminadas a modificar la situación una vez que se logre una comprensión más profunda de los problemas”³⁰.

Bajo esta perspectiva, el docente investigador aplicó la estrategia basada en el trabajo colaborativo a un grupo de estudiantes de grado décimo, los cuales

²⁸MARTINO, Massiell, investigación cualitativa según Sampieri, Collado y Lucio, 2012.

²⁹ALBERICH, Tomás. IAP, Redes y Mapas Sociales: Desde la Investigación a la Intervención Social, Portularia, Universidad de Huelva, 2008.

³⁰ ELLIOT, Jhon. “El cambio educativo desde la investigación – acción”. Madrid: Morata, 1991.

participaron activamente en el estudio, con el fin de fortalecer el proceso de comunicación en la resolución de problemas.

3.2 DESCRIPCIÓN DEL ESCENARIO DE LOS PARTICIPANTES

La investigación se desarrolló en el Colegio Integrado Llano Grande de carácter oficial, ubicado en la zona rural del Municipio San Juan Girón, el cual ofrece en su sede principal cobertura de la básica secundaria y media vocacional con énfasis en agroecología y desarrollo humano, atendiendo una población aproximada de 416 estudiantes en la jornada única. La jornada única está dividida por grados de sexto a once.

La investigación se realizó con los 25 estudiantes del curso 10-1, quienes oscilan en las edades de 14 a 17 años, junto con la participación del docente investigador durante todo el proceso de la investigación.

3.3 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Las técnicas que se utilizaron para obtener la información de esta investigación fueron:

Observación Participante. Para McKernan, “la observación participante es la práctica de hacer investigación tomando parte en la vida del grupo social o institución que se está investigando, es decir, el investigador es un miembro normal del grupo y se relaciona con las actividades, los acontecimientos, los comportamientos y la cultura de éste”³¹. Durante la investigación se utilizó este tipo de observación, la cual se centró en los comportamientos, actitudes, preguntas y respuestas de los estudiantes durante el período de intervención en el aula.

³¹ MCKERMAN, J. Investigación – acción y curriculum. Madrid: Morata, 1996. p. 9.

Análisis de documentos. Elliott manifiesta que:

Los documentos pueden facilitar información importante sobre las cuestiones y problemas sometidos a investigar. Algunos de ellos pueden ser: programas y esquemas de trabajo; informes sobre el currículum de grupos y comisiones de trabajo de la escuela; hojas de exámenes y pruebas utilizadas; fichas de trabajo y hojas de tareas, apartados utilizados de los libros de texto y muestras de trabajos escritos por alumnos³².

En esta investigación se utilizó el análisis de documentos tales como: trabajos de investigación en los cuales se ha aplicado el trabajo colaborativo en la enseñanza de la matemática; artículos de internet relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y las estrategias para la enseñanza de las matemáticas, programa PISA y resultados de pruebas saber; textos relacionados con: la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, proceso de comunicación, trabajo colaborativo, investigación cualitativa e investigación acción y los estándares básicos de competencias en matemáticas, durante todo el proceso con el fin de evaluar los avances en el desarrollo de las habilidades para interpretar, explicar, justificar y argumentar a la hora de resolver problemas.

Secuencia didáctica. Zabala plantea que una secuencia didáctica es “un conjunto de actividades ordenadas, estructuradas, y articuladas para la consecución de unos objetivos educativos que tienen un principio y un final conocidos tanto por el profesorado como por el alumnado”³³. En esta investigación se utilizó la secuencia didáctica “¡Trabajemos juntos, aprendamos a contar!” en el proceso de intervención, adjunta en el proceso de planificación descrito más adelante.

³² ELLIOT, Jhon. Op. Cit, p. 12.

³³ ZABALA VIDIELLA, Antoni. Op. Cit, p. 16.

Cuestionario. García define el cuestionario como “un sistema de preguntas ordenadas con coherencia, con sentido lógico y psicológico, expresado con lenguaje sencillo y claro. Permite la recolección de datos a partir de las fuentes primarias”³⁴. Se utilizó en el diagnóstico de la investigación, con el fin de recoger los datos que permitieron identificar las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver problemas de conteo y los argumentos de los estudiantes para convencer a sus compañeros que su solución es correcta y la más adecuada.

Los instrumentos que se utilizaron fueron los siguientes:

Diario de campo. Elliot considera que “el diario de campo debe contener narraciones sobre las observaciones, sentimientos, reacciones, interpretaciones, reflexiones, corazonadas, hipótesis y explicaciones personales. Estas narraciones no sólo deben informar sobre los “hechos escuetos” de la situación, sino transmitir la sensación de estar participando en ellos”³⁵. Durante el diagnóstico, fase de intervención en el aula y la prueba final, se utilizó este instrumento para registrar todo lo que ocurrió en cada una de las sesiones programadas. Además se utilizó la videocámara para tener imágenes del trabajo realizado por los estudiantes en el aula.

Protocolos de cuestionario, el protocolo de la secuencia didáctica y el material realizado por los estudiantes, como informes y presentaciones. Estos instrumentos se utilizaron durante el diagnóstico, fase de intervención en el aula y la prueba final. Las actividades que se presentaron en la secuencia didácticas se estructuraron teniendo en cuenta las actividades planteadas por Díaz Barriga³⁶.

³⁴ GARCÍA, F. Recomendaciones metodológicas para el diseño de cuestionario. México, 2002. P.7.

³⁵ ELLIOT, J., Op. Cit., p. 5.

³⁶ DÍAZ BARRIGA, Ángel. Op, Cit.

Rúbricas. Definidas por Fernández March como “guías de puntuación usadas en la evaluación del desempeño de los estudiantes que describen las características específicas de un producto, proyecto o tarea en varios niveles de rendimiento, con el fin de clarificar lo que se espera del trabajo del estudiante, de valorar su ejecución y de facilitar la proporción de feedback”³⁷, por lo tanto los registros se realizaron a través de una rúbrica (Anexo A) que contenían los principales aspectos de la categorización

3.4 CRITERIOS ÉTICOS

McKernan³⁸, constata que toda investigación debe contar con criterios éticos, para mantener su objetividad, para ello esta investigación se basó en los siguientes:

- ✓ Se informó a los directivos y estudiantes acerca del propósito y los objetivos de la investigación.
- ✓ Se solicitó permiso de los directivos de la institución y los padres de familia para desarrollar la investigación (Anexo B).
- ✓ Los datos recolectados durante la investigación fueron confidenciales.
- ✓ Se codificaron los estudiantes participantes, con el fin de conservar su identidad.
- ✓ Se informó periódicamente a los directivos y estudiantes el avance de la investigación.

³⁷ FERNÁNDEZ MARRCH, A. La evaluación orientada al aprendizaje en un modelo de formación por competencias en la educación universitaria. En: Revista de docencia universitaria. 2010. p. 24.

³⁸ MCKERMAN, J. Investigación – acción y curriculum. Madrid: Morata, 1996.

3.5 PROCESO METODOLÓGICO

En el proceso de la investigación se tuvo en cuenta el modelo de Elliott que toma como punto de partida el modelo cíclico de Lewin. Se tuvo en cuenta tres momentos: planificación, acción y evaluación de la acción.

3.5.1 Planificación. La planificación del proceso de investigación se desarrolló en tres etapas:

Documentación. En esta etapa se realizó un análisis y revisión de documentos que sustentaron los aspectos a tener en cuenta en la elaboración del diagnóstico, la prueba final y el diseño de la estrategia didáctica basada en el trabajo colaborativo y en el proceso de comunicación matemática en la resolución de problemas.

Diseño del diagnóstico. Se diseñó una prueba diagnóstica (Anexo C) la cual estuvo conformada por tres problemas de la vida cotidiana, en los cuales los estudiantes debieron utilizar conocimientos matemáticos relacionados con el pensamiento aleatorio para resolverlos. Esta prueba se aplicó en dos momentos: en el primero los 25 estudiantes de décimo grado, desarrollaron la prueba de forma individual con el propósito de identificar las dificultades de los estudiantes en el proceso de comunicación matemática, relacionados con la interpretación, explicación, justificación y argumentación al momento de resolver el problemas; en el segundo momento se organizaron en ocho grupos, los cuales desarrollaron la misma prueba, para poder determinar si trabajaban de manera colaborativa o si su forma de interactuar presentaba las características de este tipo de trabajo.

Diseño de la estrategia. A partir de los resultados del diagnóstico, se determinaron las categorías emergentes que llevaron a la validación del problema de investigación, y el diseño de la secuencia didáctica.

3.5.2 Acción. En esta investigación se trabajaron ocho sesiones de clase. En la primera sesión los estudiantes desarrollaron una prueba diagnóstica de forma individual, la cual entregaron; seguidamente se reunieron con un grupo de compañeros para socializar y debatir el trabajo realizado y llegar a acuerdos con el fin de entregar una solución.

En las siguientes siete sesiones de clase se aplicó la secuencia didáctica de forma colaborativa. En la última sesión de la secuencia didáctica los estudiantes individualmente desarrollaron una prueba similar al diagnóstico.

3.5.3 Evaluación de la acción. Se pretendió establecer de qué manera influyó el trabajo colaborativo en el fortalecimiento del proceso de comunicación en la resolución de problemas matemáticos en los estudiantes a través de la aplicación y desarrollo de la secuencia didáctica. La evaluación se hizo en tres momentos: antes (por medio de la prueba diagnóstica), durante (evaluación formativa en la aplicación de la secuencia didáctica) y después de la intervención (a través de una prueba final, similar a la diagnóstica).

4. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN

Para la realización de la intervención se diseñó y aplicó una secuencia didáctica que contiene: asignatura, matemáticas; contenidos, técnicas de conteo; duración de la secuencia, Siete sesiones de clase (20,5 horas); autor, Jorge Ernesto Angarita Ballesteros; propósitos y orientaciones generales para la evaluación. Al igual que tres tipos de actividades: de apertura denominada ¡Inténtalo, tú podrás!, en la cual se presenta un problema para determinar los preconceptos de los estudiantes sobre conteo; de desarrollo ¡Fortalécete, te gustará! , donde se presentan doce problemas que llevaron a los estudiantes a conceptualizar las técnicas de conteo y a fortalecer sus habilidades del proceso de comunicación (interpretar, explicar, justificar y argumentar); y de cierre ¡Ve más lejos, lo tienes! donde se presentaron cuatro problemas con el objetivo de evaluar la apropiación de las técnicas de conteo y su aplicación en la resolución de problemas, al igual que las habilidades del proceso de comunicación. A continuación se aprecia la totalidad de la secuencia didáctica:

COLEGIO INTEGRADO LLANO GRANDE

Secuencia didáctica

¡Trabajemos juntos, aprendamos a contar!



Asignatura: Matemáticas

Contenidos: Técnicas de conteo

Duración: Siete sesiones de clase (20,5 horas).

Autor: Jorge Ernesto Angarita Ballesteros.

Propósitos

- ✓ **Cognitivo:** Identifica el orden y la repetición en un experimento aleatorio.
- ✓ **Procedimental:** Resuelve situaciones utilizando conceptos de conteo e interpreta, explica, justifica y argumenta sus respuestas.
- ✓ **Actitudinal:** Participa activamente en las discusiones y trabaja de manera colaborativa.

Orientaciones generales para la evaluación:

La evaluación fue continua y se tuvo en cuenta las siguientes evidencias:

- ✓ El informe de cada una de las seis primeras sesiones. (Valor 30%)
- ✓ El informe de la séptima sesión. (Valor 40%)
- ✓ La participación en las plenarios y en los grupos de trabajo colaborativo, por medio de una autoevaluación y coevaluación por parte de sus compañeros. (Valor 30%).

¡Inténtalo, tú podrás!

Primera sesión: 2,5 horas El estudiante de forma individual desarrolló la actividad (problema) en 60 minutos, posteriormente contó con 60 minutos para reunirse con el grupo colaborativo y discutir lo planteado para llegar a un acuerdo, en los últimos 30 minutos un representante del grupo escogido por el profesor, socializó a sus compañeros lo que hicieron, el profesor le dijo a los estudiantes que es importante convencer a los demás compañeros que su solución es correcta y no debió pasar primero a los estudiantes que les quedó bien el problema, sino por el contrario al que tuvo errores o soluciones incompletas y desde luego al que encontró una solución distinta.

El profesor pasó por cada uno de los grupos a escuchar las discusiones y las orientó por medio de preguntas, tratando de llevar a los estudiantes a darse cuenta de que el orden (se va o no a utilizar asta) y la repetición (banderas bicolor) se deben tener en cuenta para resolver el problema, al igual que motivó e

involucró a los estudiantes que tienen poca o nula participación en las discusiones. De ninguna manera les sugirió posibles caminos de solución, pero si le ejemplificó con problemas similares, a los estudiantes que no encontraron ningún camino. El profesor le proporcionó hojas de cuatro colores para que los estudiantes construyeran las banderas.

Problema: ¿Cuántas banderas bicolors se pueden formar si tiene 10 lienzos de tela de diferente color? Contesta la pregunta en dos casos:

- ✓ Se va a utilizar un asta.
- ✓ No se va a utilizar asta.
- a. ¿Qué información proporciona el problema?
- b. ¿Qué información desconoce?
- c. Construir una bandera.
- d. ¿Cuántas banderas bicolor se pueden formar si tiene 4 lienzos de diferente color?, Debe construirlas. Justifique su respuesta.
- e. ¿Cuántas banderas bicolors se pueden formar si tiene 5 lienzos de diferente color? Justifique su respuesta.
- f. ¿Y si tiene 6 lienzos de diferente color? Justifique su respuesta.
- g. ¿Sería posible saber la cantidad de banderas bicolor que se pueden formar sin necesidad de sacar el espacio muestral? Justifique su respuesta.
- h. ¿Cuál es la respuesta del problema?

¡Fortalécete, te gustará!

Segunda sesión: 3 horas El estudiante de forma individual desarrollo la actividad (problemas) en 30 minutos, posteriormente se reunió con el grupo colaborativo para discutir lo planteado y ponerse de acuerdo, para lo cual contó con 120 minutos. En el tiempo restante, un representante del grupo escogido por el profesor socializó a sus compañeros lo que hicieron, el profesor dijo a los estudiantes que es importante convencer a los demás compañeros que su

estrategia es la más adecuada y no paso primero a los estudiantes que les quedó bien el problema, sino por el contrario al que tuvo errores o soluciones incompletas y desde luego al que encontró una solución distinta.

El profesor pasó por cada uno de los grupos a escuchar las discusiones y las orientó por medio de preguntas, al igual que en la socialización, tratando de llevar a los estudiantes a darse cuenta que el orden importa en las opciones y que se permite repetición, al igual que motivó e involucró a los estudiantes que tuvieron poca o nula participación en las discusiones. De ninguna manera les sugirió posibles caminos de solución, pero si le ejemplificó con problemas similares, en el caso de que los estudiantes no encuentren ningún camino.

Problema 1. Los Estudiantes de Décimo Grado son invitados a participar en un encuentro de emprendimiento el cual presenta la siguiente programación:

7:30 - 9:00 a.m. Conferencias

- Liderazgo.
- Trabajo colaborativo.
- Riesgos.

9:00- 9:30 a.m. Refrigerio.

9:30-11:30 a.m Seminarios.

- Las redes virtuales.
- Bolsas de empleo.

11:30-12:00 m. Stand.

- Cooperativas.
- Empresas de comunicación.
- Universidades.

Cada uno de los invitados debe asistir a una conferencia, un seminario y visitar un stand. ¿Cuántas opciones tienen cada uno de los participantes para organizar su recorrido en el encuentro?

- a. ¿Qué información proporciona el problema?
- b. ¿Qué información desconoce?
- c. Escriba un posible recorrido de uno de los participantes.
- d. Si un estudiante asistió a la conferencia de liderazgo, ¿cuántas opciones tiene para terminar su recorrido en el encuentro? Justifique su respuesta.
- e. ¿Sería posible saber la cantidad de opciones que tiene un participante sin necesidad de sacar el espacio muestral? Justifique su respuesta.
- f. ¿Cuál es la respuesta del problema?

Problema 2. En la cafetería del colegio ofrecen seis clases de empanadas, cinco sabores de gaseosas y dos presentaciones de perros calientes: con salsas y sin salsas. Si un estudiante decide comprar una empanada y una gaseosa. ¿De cuántas maneras distintas puede realizar el pedido?

- a. ¿Qué información proporciona el problema?
- b. ¿Qué información desconoce?
- c. Escriba un posible pedido de un estudiante.
- d. Si un estudiante pide una empanada mixta, ¿Cuántas opciones tiene para completar su pedido? Justifique su respuesta.
- e. ¿Sería posible saber la cantidad de opciones que tiene un estudiante sin necesidad de sacar el espacio muestral? Justifique su respuesta.
- f. ¿Cuál es la respuesta del problema?

Tercera sesión: 3 horas El estudiante de forma individual desarrolló la actividad (problemas) en 20 minutos, posteriormente se reunió con el grupo colaborativo para discutir lo planteado y ponerse de acuerdo, para lo cual contó con 100

minutos. En los siguientes 60 minutos, un representante del grupo escogido por el profesor (diferente al que pasó en la sesión anterior) socializó a sus compañeros lo que hicieron, el profesor le dijo a los estudiantes que es importante convencer a los demás compañeros que su estrategia es la más adecuada, y no pasó primero a los estudiantes que les quedó bien el problema, sino por el contrario al que tuvo errores o soluciones incompletas y desde luego al que encontró una solución distinta.

El profesor pasó por cada uno de los grupos a escuchar las discusiones y las orientó por medio de preguntas, al igual que en la socialización, tratando de llevar a los estudiantes a darse cuenta que el orden importa en las opciones y que se permite repetición y los llevó a buscar una generalización, de la misma forma motivó e involucró a los estudiantes que tuvieron poca o nula participación en las discusiones. De ninguna manera les sugirió posibles caminos de solución, pero si le ejemplificó con problemas similares, en el caso de los estudiantes que no encuentren ningún camino. Al final concluyó que esa generalización que encontraron es una técnica de conteo que se llama principio de multiplicación, la cual se puede utilizar en experimentos aleatorios como los presentados en los problemas anteriores en los cuales importa el orden en que se escriben los elementos y además estos se pueden repetir.

Problema 1. La evaluación de matemáticas consta de 10 preguntas de opción múltiple, de las cuales cada una tiene cuatro opciones de respuesta. ¿De cuántas formas distintas un estudiante puede marcar una respuesta para cada pregunta?

- a. ¿Qué información proporciona el problema?
- b. ¿Qué información desconoce?
- c. Escriba una forma de responder la evaluación.

- d. ¿De cuántas formas distintas un estudiante puede marcar una respuesta para cada pregunta, si la evaluación costa de tres preguntas? Justifique su respuesta.
- e. ¿De cuántas formas distintas un estudiante puede marcar una respuesta para cada pregunta, si la evaluación costa de cinco preguntas? Justifique su respuesta.
- f. ¿Sería posible saber la cantidad de formas distintas en que un estudiante puede marcar una respuesta para cada pregunta sin necesidad de sacar el espacio muestral? Justifique su respuesta.
- g. ¿Cuál es la respuesta del problema?

Problema 2. Por seguridad, en un supermercado, colocan códigos de barras a los artículos, los cuales contienen tres letras y cuatro números. Si los productos de aseo deben empezar con la letra A y terminar en cifra par. ¿Cuántos códigos de barras puede construir el supermercado para los productos de aseo?

- a. ¿Qué información proporciona el problema?
- b. ¿Qué información desconoce?
- c. Escriba un código de barras.
- d. Si los códigos constan de una letra y dos números ¿Cuántos códigos de barras puede construir el supermercado para los productos de aseo? Justifique su respuesta.
- e. Si los códigos constan de dos letras y tres números ¿Cuántos códigos de barras puede construir el supermercado para los productos de aseo? Justifique su respuesta.
- f. ¿Sería posible saber la cantidad de códigos de barras que el supermercado puede construir para los productos de aseo sin necesidad de sacar el espacio muestral? Justifique su respuesta.
- g. ¿Cuál es la respuesta del problema?

Cuarta sesión: 3,5 horas El estudiante de forma individual desarrolló la actividad (problemas) en 30 minutos, posteriormente se reunió con el grupo colaborativo para discutir lo planteado y ponerse de acuerdo, para lo cual contó con 120 minutos. En los siguientes 60 minutos, un representante del grupo escogido por el profesor socializó a sus compañeros lo que hicieron, el profesor dijo a los estudiantes que es importante convencer a los demás compañeros que su estrategia es la más adecuada, y no paso primero a los estudiantes que les quedó bien el problema, sino por el contrario al que tiene errores o soluciones incompletas y desde luego al que encontró una solución distinta.

El profesor paso por cada uno de los grupos a escuchar las discusiones y las orientó por medio de preguntas al igual que en la socialización, tratando de llevar a los estudiantes a darse cuenta que el orden importa en las opciones, que se permite o no repetición y que de un conjunto se escoge un subconjunto, al igual que motivó e involucró a los estudiantes que tienen poca o nula participación en las discusiones. De ninguna manera les sugirió posibles caminos de solución, pero si les ejemplifico con problemas similares, en el caso de los estudiantes que no encontraron ningún camino. Al final concluyó que esa generalización que encontraron, es otra técnica de conteo que se llama permutación, la cual se puede utilizar en experimentos aleatorios como los presentados en los problemas anteriores en los cuales importa el orden en que se escriben los elementos y además estos no se pueden repetir.

Problema 1. El concejo estudiantil está conformado por un representante de cada curso, el cual en su primera reunión debe escoger el presidente y el secretario. Si el colegio cuenta con 14 cursos. ¿De cuántas formas se pueden elegir el presidente y el secretario del concejo estudiantil?

- a. ¿Qué información proporciona el problema?
- b. ¿Qué información desconoce?

- c. Escriba una posible elección para los cargos de presidente y secretario.
- d. Si fueran cinco cursos ¿de cuántas formas se pueden elegir el presidente y el secretario del concejo estudiantil? Justifique su respuesta.
- e. Si fueran siete cursos ¿de cuántas formas se pueden elegir el presidente y el secretario del concejo estudiantil? Justifique su respuesta.
- f. ¿Sería posible saber la cantidad de formas distintas en que se pueden elegir el presidente y el secretario del concejo estudiantil, sin necesidad de sacar el espacio muestral? Justifique su respuesta.
- g. ¿Cuál es la respuesta del problema?

Problema 2. ¿De cuántas maneras distintas se pueden asignar 10 estudiantes de servicio social a cuatro padres de familia, para que los capaciten en TIC, sabiendo que a cada estudiante solo se le puede asignar un padre de familia?

- a. ¿Qué información proporciona el problema?
- b. ¿Qué información desconoce?
- c. Escriba una asignación.
- d. ¿Cuál sería la respuesta si fueran 5 estudiantes? Justifique su respuesta.
- e. ¿Y si fueran 7 estudiantes? Justifique su respuesta.
- f. ¿Sería posible saber la cantidad de formas distintas en que se pueden elegir el presidente y el secretario del concejo estudiantil, sin necesidad de sacar el espacio muestral? Justifique su respuesta.
- g. ¿Cuál es la respuesta del problema?

Problema 3. En una familia de doce personas se acuerda que cada día se encarguen tres de las tareas domésticas. ¿Cuántos tríos distintos se pueden formar?

- a. ¿Qué información proporciona el problema?
- b. ¿Qué información desconoce?

- c. Escriba un trío.
- d. Si fueran cuatro personas ¿Cuántos tríos distintos se pueden formar? Justifique su respuesta.
- e. Si fueran seis personas ¿Cuántos tríos distintos se pueden formar? Justifique su respuesta.
- f. ¿Y si fueran siete personas? Justifique su respuesta.
- g. ¿Sería posible saber la cantidad de formas distintas en que se pueden elegir el trío, sin necesidad de sacar el espacio muestral? Justifique su respuesta.
- h. ¿Cuál es la respuesta del problema?

Quinta sesión: 2 horas El estudiante de forma individual desarrolló la actividad (problemas) en 20 minutos, posteriormente se reunió con el grupo colaborativo para discutir lo planteado y ponerse de acuerdo, para lo cual contó con 60 minutos. En los siguientes 40 minutos, un representante del grupo escogido por el profesor (diferente al que pasó en la sesión anterior) socializó a sus compañeros lo que hicieron, el profesor dijo a los estudiantes que es importante convencer a los demás compañeros que su estrategia es la más adecuada, y no pasó primero a los estudiantes que les quedó bien el problema, sino por el contrario al que tiene errores o soluciones incompletas y desde luego al que encontró una solución distinta.

El profesor pasó por cada uno de los grupos a escuchar las discusiones y las orientó por medio de preguntas, al igual que en la plenaria, tratando de llevar a los estudiantes a darse cuenta que el orden importa o no en las opciones y que se permite o no repetición, con el fin de que descubran si las técnicas vistas son o no apropiadas, al igual que motivó e involucró a los estudiantes que tienen poca o nula participación en las discusiones. De ninguna manera les sugirió posibles caminos de soluciones, pero si les ejemplificó con problemas similares, en el caso de los estudiantes que no encontraron ningún camino.

Problema 1. Juan se inventa una lotería que funcione en su colegio, en la cual el ganador puede venir de particular toda la semana y reclamar las onces en cafetería gratis. Un boleto de la lotería sería por ejemplo CJ13. ¿Cuántos boletos fabrica Juan para su lotería?

- a. ¿Qué información proporciona el problema?
- b. ¿Qué información desconoce?
- c. ¿Cuál sería la regla para construir los boletos? Justifique su respuesta.
- d. ¿Cuántos boletos fabrica Juan para su lotería, si estos fuesen con una letra y un número? Justifique su respuesta.
- e. ¿Y si fueran dos letras y un número? Justifique su respuesta.
- f. ¿Cuál es la respuesta del problema?

Problema 2. El baloto es un juego de azar, en el cual una persona al comprar un boleto debe escoger seis números diferentes del 1 al 45. ¿De cuántas formas puede una persona jugar el baloto?

- a. ¿Qué información proporciona el problema?
- b. ¿Qué información desconoce?
- c. ¿Cómo sería un boleto del baloto?
- d. ¿De cuántas formas puede una persona jugar el baloto si se deben escoger solo dos números diferentes del 1 al 45? Justifique su respuesta.
- e. ¿De cuántas formas puede una persona jugar el baloto si se deben escoger solo cuatro números diferentes del 1 al 45? Justifique su respuesta.
- f. ¿Cuál es la respuesta del problema?

Sexta sesión: 3,5 horas El estudiante de forma individual desarrolló la actividad (problemas) en 30 minutos, posteriormente se reunió con el grupo colaborativo para discutir lo planteado y ponerse de acuerdo, para lo cual contó con 120 minutos. En el tiempo restante, un representante del grupo escogido por el

profesor socializó a sus compañeros lo que hicieron, el profesor dijo a los estudiantes que es importante convencer a los demás compañeros que su estrategia es la más adecuada, y no pasó primero a los estudiantes que les quedó bien el problema, sino por el contrario al que tiene errores o soluciones incompletas y desde luego al que encontró una solución distinta.

El profesor pasó por cada uno de los grupos a escuchar las discusiones y las orientó por medio de preguntas, al igual que en la plenaria tratando de llevar a los estudiantes a darse cuenta que el orden no importa en las opciones, que no se permite repetición y que de un conjunto se escoge un subconjunto, al igual que motivó e involucró a los estudiantes que tenían poca o nula participación en las discusiones. De ninguna manera les sugirió posibles caminos de solución, pero si le ejemplifico con problemas similares, en el caso de los estudiantes que no encuentren ningún camino. Al final concluyó que esa generalización que encontraron, es otra técnica de conteo que se llama combinación, la cual se puede utilizar en experimentos aleatorios como los presentados en los problemas anteriores en los cuales no importa el orden en que se escriben los elementos y además estos no se pueden repetir.

Problema 1. El profesor de español propone a los estudiantes de décimo un listado de 10 libros de lectura, y les dice que deben escoger tres de ellos para ser leídos en el periodo. ¿De cuántas formas puede un estudiante seleccionar los tres libros?

- a. ¿Qué información proporciona el problema?
- b. ¿Qué información desconoce?
- c. Escriba una selección de los libros.
- d. ¿De cuántas formas puede un estudiante seleccionar los tres libros, si la lista fuera de cinco libros? Justifique su respuesta.

- e. ¿De cuántas formas puede un estudiante seleccionar los tres libros, si la lista fuera de siete libros? Justifique su respuesta.
- f. ¿Sería posible saber la cantidad de formas en que puede un estudiante seleccionar los tres libros, sin necesidad de sacar el espacio muestral? Justifique su respuesta.
- g. ¿Cuál es la respuesta del problema?

Problema 2. Una heladería cuenta con sabores de chocolate, vainilla, ron con pasas, café, fresa, mora y chicle. Camilo decide comprar un cono de tres sabores diferentes, ¿De cuántas formas puede pedirlo?

- a. ¿Qué información proporciona el problema?
- b. ¿Qué información desconoce?
- c. Escribe un pedido.
- d. Si en la heladería solo existieran tres sabores, ¿De cuántas formas podría realizar el pedido? Justifique su respuesta.
- e. Si en la heladería solo existieran cinco sabores, ¿De cuántas formas podría realizar el pedido? Justifique su respuesta.
- f. ¿Sería posible saber la cantidad de formas en que se puede realizar el pedido sin necesidad de sacar el espacio muestral? Justifique su respuesta.
- g. ¿Cuál es la respuesta del problema?

Problema 3. En el colegio se realizará la olimpiada de matemáticas, en la cual se premiará a los ocho mejores. ¿De cuántas formas podrán distribuirse ocho premios iguales entre los 25 participantes?, ¿Y si los premios fueran diferentes?

- a. ¿Qué información proporciona el problema?
- b. ¿Qué información desconoce?
- c. Escribe una forma en la cual se pueden entregar los premios.

- d. Si fueran 10 participantes, ¿De cuantas formas podrán distribuirse los premios? Justifique su respuesta.
- e. Si fueran 12 participantes, ¿De cuantas formas podrán distribuirse los premios? Justifique su respuesta.
- f. ¿Sería posible saber la cantidad de formas en que se puede distribuir los premios sin necesidad de sacar el espacio muestral? Justifique su respuesta.
- g. ¿Cuál es la respuesta del problema?

¡Ve más lejos, lo tienes!

Séptima sesión: 3 horas El estudiante de forma individual desarrolló la actividad (problemas) en 120 minutos, cabe destacar que la valoración fue individual pero cada uno recibió un incentivo de 10 décimas en la valoración, cuando todos los integrantes del grupo colaborativo lograron sacar mínimo la valoración de tres, posteriormente un estudiante escogido por el profesor(uno por cada problema) socializó a sus compañeros lo que hizo, el profesor dijo a los estudiantes que es importante convencer a los demás compañeros que su estrategia es la más adecuada, y no pasó primero a los estudiantes que les quedó bien el problema, sino por el contrario al que tiene errores o soluciones incompletas y desde luego al que encontró una solución distinta. El profesor pasó por los puestos incentivando el trabajo y orientando su solución por medio de preguntas.

Problema 1. ¿Cuántos números de siete cifras no tienen ni ceros ni unos?

- a. ¿Qué información proporciona el problema?
- b. ¿Qué información desconoce?
- c. Escriba un número de siete cifras que no tenga ceros ni unos.
- d. ¿Cuál es la respuesta del problema? Justifique su respuesta

Problema 2. Sofía va al parque de atracciones de mundo aventura y su papá le compra un pasaporte zafiro, el cual cuenta con desprendibles para ingresar a cualquiera de las 27 atracciones solo una vez, por falta de tiempo su papá le pide que escoja 12 de ellas. ¿De cuántas formas puede Sofía escoger las atracciones en las cuales se va a montar?

- a. ¿Qué información proporciona el problema?
- b. ¿Qué información desconoce?
- c. Escriba una forma en que Sofía escogería las atracciones en las cuales se va a montar.
- d. ¿Cuál es la respuesta del problema? Justifique su respuesta

Problema 3. El profesor Jorge tiene cinco manillas diferentes y siete dijes diferentes. ¿De cuántas maneras diferentes puede el profesor Jorge darle a cada uno de sus dos estudiantes más destacados una manilla y a cada una de sus tres alumnas más destacadas un dije?

- a. ¿Qué información proporciona el problema?
- b. ¿Qué información desconoce?
- c. Escriba una manera en la cual el profesor Jorge les entrega las manillas y los dijes a sus estudiantes más destacados y a sus alumnas más destacadas.
- d. ¿Cuál es la respuesta del problema? Justifique su respuesta

Problema 4. Marcos tiene 15 amigos y todos los días de la semana invita a uno de ellos a montar bicicleta. ¿De cuántas formas puede Marcos organizar las invitaciones?

- a. ¿Qué información proporciona el problema?
- b. ¿Qué información desconoce?
- c. Escriba una organización de invitaciones.
- d. ¿Cuál es la respuesta del problema? Justifique su respuesta

5. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo se presenta el análisis y la categorización de las soluciones realizadas por los estudiantes a los problemas propuestos en la prueba diagnóstica y la prueba final. La categorización se realizó a la luz del marco teórico, de los estándares básicos de competencias en matemáticas en la que plantea habilidades que deben desarrollar los estudiantes para fortalecer el proceso de comunicación, estas son: habilidad para interpretar, habilidad para explicar, habilidad para justificar y habilidad para argumentar, con el fin de determinar las dificultades de los estudiantes en el proceso de comunicación en la resolución de problemas matemáticos. Igualmente se muestra el análisis de la secuencia didáctica implementada, teniendo en cuenta los cinco componentes que debe tener el trabajo colaborativo propuestos por Jonhson: interdependencia positiva, exigibilidad personal, interacción positiva cara a cara, uso frecuente de habilidades personales y de grupo, y autoanálisis de grupo.

5.1 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

El análisis de las soluciones realizadas por los estudiantes de décimo grado a los problemas propuestos en la prueba diagnóstica permitió identificar: algunas de las dificultades que presentaron al resolver problemas de conteo; unos niveles en las habilidades del proceso de comunicación en la resolución de problemas matemáticos, los cuales permitieron identificar el nivel en que se encuentran los estudiantes respecto a su habilidad para interpretar, explicar, justificar y argumentar; las estrategias de los estudiantes para resolver problemas de conteo, y los argumentos del estudiante para convencer a sus compañeros que su solución es correcta y la más adecuada. Como la aplicación de la prueba diagnóstica estuvo estructurada en dos momentos, se realizó el análisis del primer momento “Individual”, y posteriormente el segundo momento “en grupo”.

5.1.1 Análisis de resultados del primer momento “individual” de la prueba diagnóstica. En este momento de la prueba donde los 25 estudiantes de décimo grado resolvieron tres problemas de conteo de forma individual se evidenció nerviosismo en algunos estudiantes, ya que se observaron actitudes como: jugar con el pelo, arrugar las cejas, morder el lápiz, mover las piernas, rascarse la cabeza. Otro aspecto observado consistió en que algunos estudiantes intentaban resolver el problema sin revisar las preguntas e indicaciones que este tenía y es a lo que están acostumbrados. Adicionalmente, se notó un cambio de actitud en el trabajo, mayor compromiso, con respecto a las clases cotidianas por la influencia de la cámara.

5.1.1.1 Análisis de los resultados en las habilidades del proceso de comunicación. Se analizó el proceso de comunicación en la resolución de problemas que requiere: habilidad para interpretar, habilidad para explicar, habilidad para justificar y habilidad para argumentar.

- **La habilidad para interpretar** que según Montenegro (1999) y Niño (2005) es la capacidad de los estudiantes para identificar la pregunta, los datos y las variables que proporciona el problema, al igual que las relaciones existentes entre ellas, teniendo en cuenta el contexto y sus experiencias previas.

Al realizar el análisis de las respuestas dadas a las preguntas *¿Qué información le proporciona el problema?, y ¿Qué información desconoce? ¿Existe alguna relación entre los datos conocidos y los datos desconocidos?* presentes en los tres problemas, se observó que algunos estudiantes solo identificaban algunos datos que proporcionaba el problema, otros además identificaban la pregunta y algunas variables y los demás lograron interpretar el problema, lo que permitió establecer unos niveles como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 1. Niveles de la habilidad para interpretar en el proceso de comunicación en la resolución de problemas.

Nivel Habilidad	Alto	Medio	Bajo
Interpretar	Identifica la pregunta, los datos y las variables que proporcionan el problema y las relaciones existentes entre ellas, teniendo en cuenta el contexto y sus experiencias previas.	Identifica la pregunta y algunos datos y variables que proporciona el problema, teniendo en cuenta el contexto y sus experiencias previas.	Identifica algunos datos que proporciona el problema, teniendo en cuenta el contexto y sus experiencias previas.

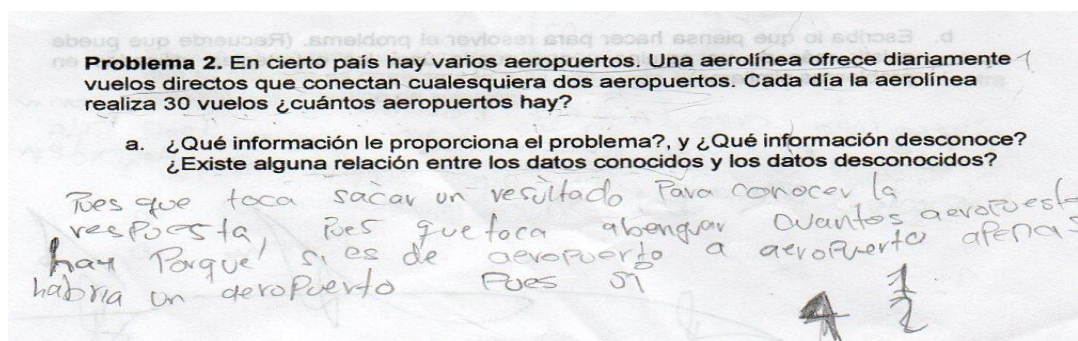
Al realizar la clasificación de los estudiantes respecto a la habilidad para interpretar se obtuvieron los siguientes resultados, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 2. Clasificación de los estudiantes por niveles en la habilidad para interpretar.

Nivel	Número de estudiantes	Porcentaje
Alto	2	8
Medio	15	60
Bajo	8	32

Lo que permite ver que 8 (32%) estudiantes se encuentran en nivel bajo, presentando dificultad para interpretar en la resolución de problemas, como se evidencia en las siguientes respuestas dadas por unos estudiantes:

Imagen 1. Respuesta Estudiante 04

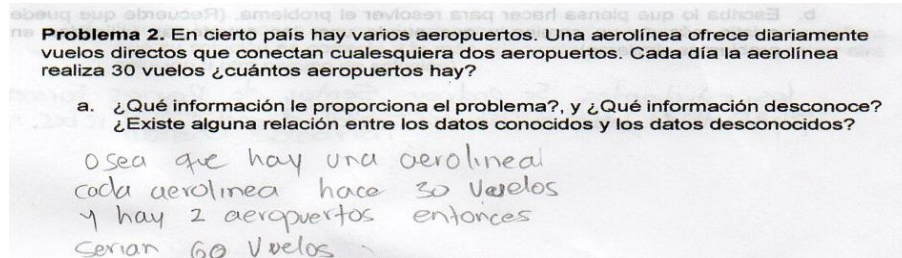


Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 04

Se observa que solo identifica la pregunta y no reconoce la información que le proporciona el problema, únicamente transcribe la pregunta, pero realmente no la entiende lo que se evidencia por la información que presenta después.

Observemos otra respuesta dada por otro estudiante:

Imagen 2. Respuesta Estudiante 10

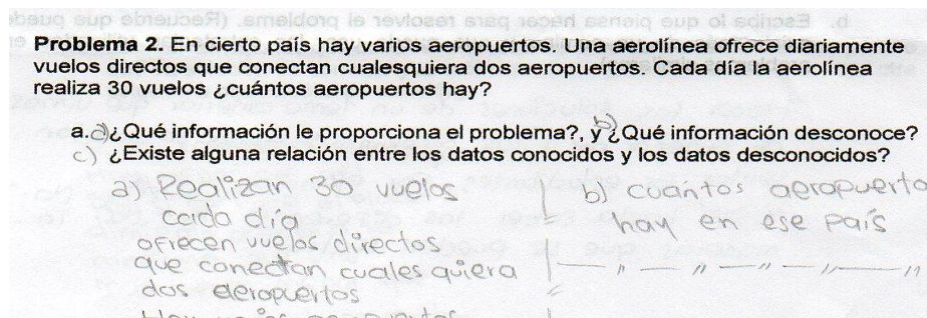


Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 10

En este caso el estudiante deduce información que no proporciona el problema, como que hay una aerolínea lo cual es falso, solo identifica que una aerolínea realiza 30 vuelos y no identifica la pregunta, sino por el contrario deduce la respuesta, que “hay dos aeropuertos”.

Igualmente existen 15 (60%) estudiantes que alcanzan un nivel medio en la habilidad para interpretar en la resolución de problemas, como se evidencia en la siguiente respuesta dada por un estudiante:

Imagen 3. Respuesta Estudiante 25

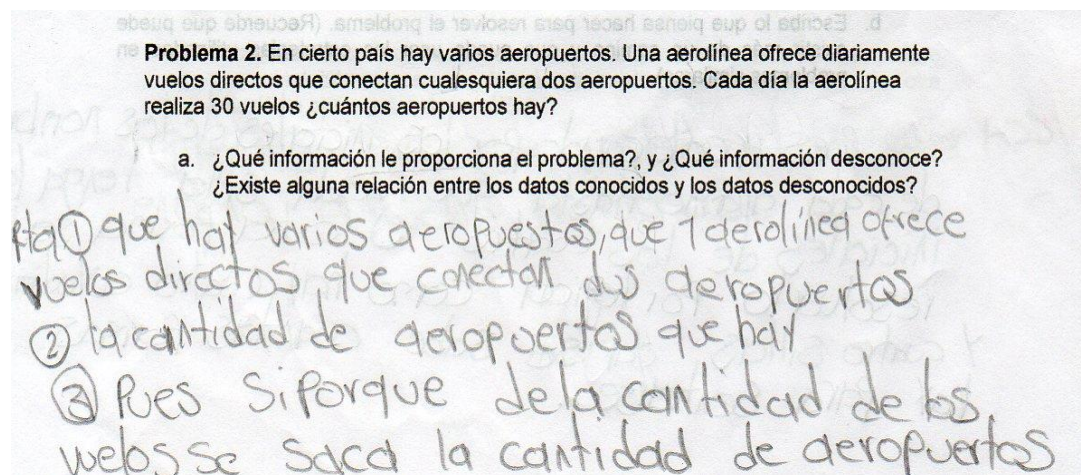


Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 25

En esta se logra observar que el estudiante identifica la pregunta “cuántos aeropuertos hay en ese país” y datos como “realizan 30 vuelos cada día, ofrecen vuelos directos que conectan cualesquiera dos aeropuertos y hay varios aeropuertos”.

Y un porcentaje muy pequeño 2 (8%) estudiantes que demuestran un nivel alto en la habilidad para interpretar en la resolución de problemas, como se evidencia en la siguiente respuesta dada por un estudiante:

Imagen 4. Respuesta Estudiante 11



Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 11

En este caso se evidencia que el estudiante identifica la pregunta “la cantidad de aeropuertos que hay”, los datos “que hay varios aeropuertos, que una aerolínea ofrece vuelos directos que conectan dos aeropuertos” y logra identificar relaciones entre ellos “pues si porque de la cantidad de los vuelos saca la cantidad de aeropuertos”.

- **La habilidad para explicar** que según Duval (1999) es la capacidad del estudiante para exponer sus ideas y razones para volver comprensible un dato, una variable o un resultado con palabras claras o ejemplos.

Al realizar el análisis de las respuestas dadas a la indicación, *escriba lo que piensa hacer para resolver el problema*, presente en los tres problemas se identificó que unos estudiantes solo expresan algunos datos que le proporciona el problema, otros plantean una estrategia pero esta no es muy clara y los demás lograron explicar el problema, lo que permitió establecer unos niveles como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 3. Niveles de la habilidad para explicar en el proceso de comunicación en la resolución de problemas.

Nivel Habilidad	Alto	Medio	Bajo
Explicar	Expresa con sus palabras o por medio de ejemplos la información que proporciona el problema y las estrategias para resolverlo.	Expresa con sus palabras o por medio de ejemplos alguna información que proporciona el problema y plantea alguna estrategia para resolverlo.	Expresa con sus palabras o por medio de ejemplos alguna información que proporciona el problema.

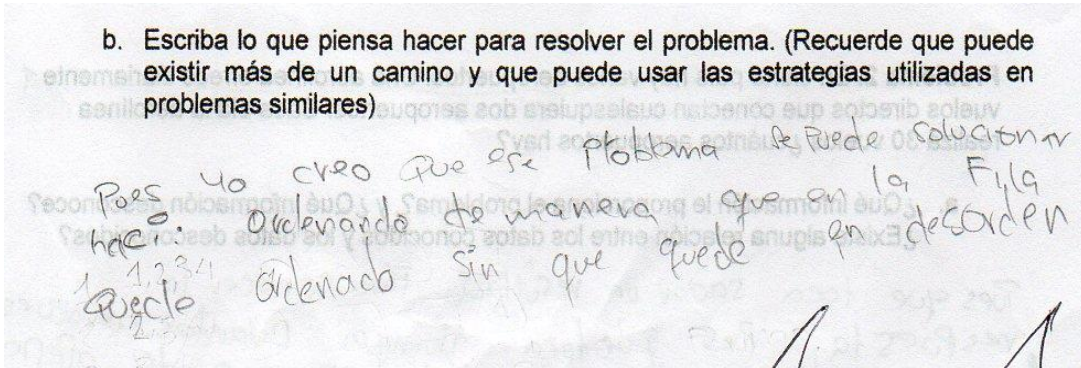
Al realizar la clasificación de los estudiantes respecto a la habilidad para explicar se obtuvieron los siguientes resultados, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 4. Clasificación de los estudiantes por niveles en la habilidad para explicar.

Nivel	Número de estudiantes	Porcentaje
Alto	4	16
Medio	9	36
Bajo	12	48

Lo que evidencia que un porcentaje significativo, 12 (48%) estudiantes se encuentran en el nivel bajo, presentando dificultad para explicar en la resolución de problemas, como se refleja en la siguiente respuesta dada por un estudiante en el problema 1:

Imagen 5 Respuesta Estudiante 04

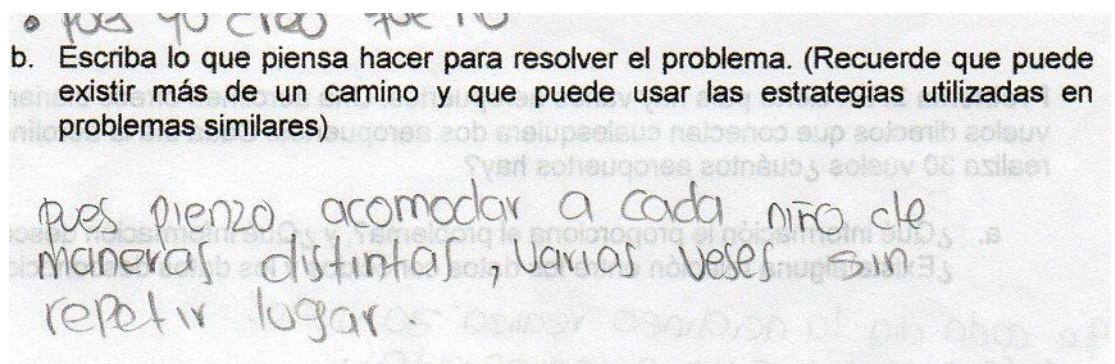


Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 04

Podemos ver que el estudiante solo logra expresar que hay una fila, información que proporciona el problema, pero no logra plantear una estrategia para resolverlo.

Se pudo observar que 9 (36%) estudiantes logran un nivel medio en la habilidad para explicar, como podemos ver en el siguiente ejemplo:

Imagen 6. Respuesta Estudiante 19

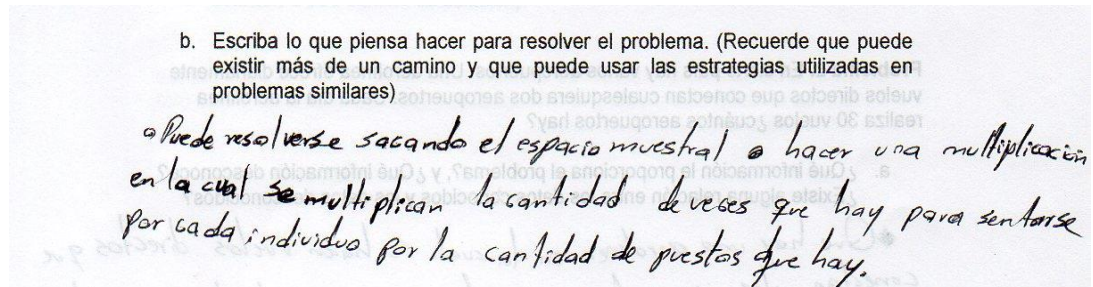


Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 19

Nótese que el estudiante plantea una posible estrategia para resolver el problema, aunque esta no es muy clara ya que no dice cómo sabrá si ya tiene todas las maneras, que es lo que nos pide el problema.

Y solo 4 (16%) estudiantes lograron alcanzar el nivel alto en la habilidad para explicar, como se evidencia en la siguiente respuesta dada por un estudiante:

Imagen 7. Respuesta Estudiantes 08



Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 08

Donde podemos ver que plantea una estrategia para resolver el problema y además tiene en cuenta la información del problema.

- **La habilidad para justificar** que según Durango, Parra, Toro, y Zapata (2010) es la capacidad del estudiante para sustentar una idea o un procedimiento, aceptar o refutar un resultado por medio de contenidos matemáticos o contraejemplos.

Al realizar el análisis de las respuestas dadas a la indicación, *realice lo que pensó y de la respuesta*, presente en los tres problemas, se identificó que algunos estudiantes no utilizan contenidos matemáticos para sustentar los procedimientos, otros los utilizan en ocasiones y los demás lograron justificar el problema, lo que permitió establecer unos niveles como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 5. Niveles de la habilidad para justificar en el proceso de comunicación en la resolución de problemas.

Nivel Habilidad	Alto	Medio	Bajo
Justificar	Utiliza contenidos matemáticos para sustentar los procedimientos y las ideas que utiliza para resolver el problema.	Utiliza contenidos matemáticos para sustentar algunos procedimientos y algunas ideas que utiliza para resolver el problema.	No utiliza contenidos matemáticos para sustentar los procedimientos y las ideas que utiliza para resolver el problema.

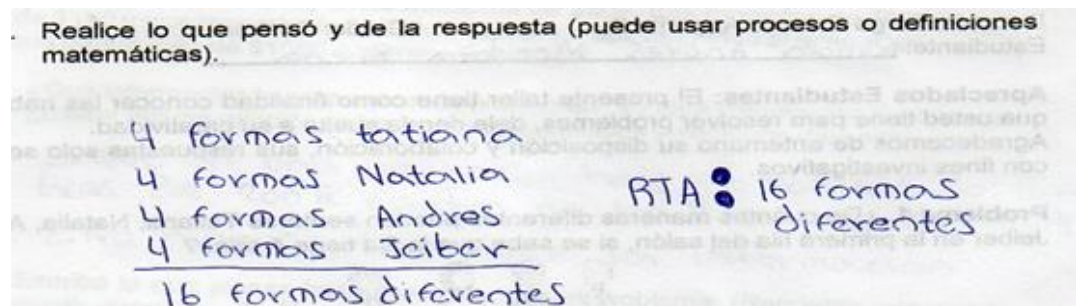
Al realizar la clasificación de los estudiantes respecto a la habilidad para justificar se obtuvieron los siguientes resultados, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 6. Clasificación de los estudiantes por niveles en la habilidad para justificar.

Nivel	Número de estudiantes	Porcentaje
Alto	5	20
Medio	3	12
Bajo	17	68

Lo que muestra que un porcentaje significativo 17 (68%) estudiantes se encuentran en el nivel bajo, presentando dificultad para justificar en la resolución de problemas, como se evidencia en las siguientes respuestas dadas por unos estudiantes en el problema 1:

Imagen 8. Respuesta Estudiante 14

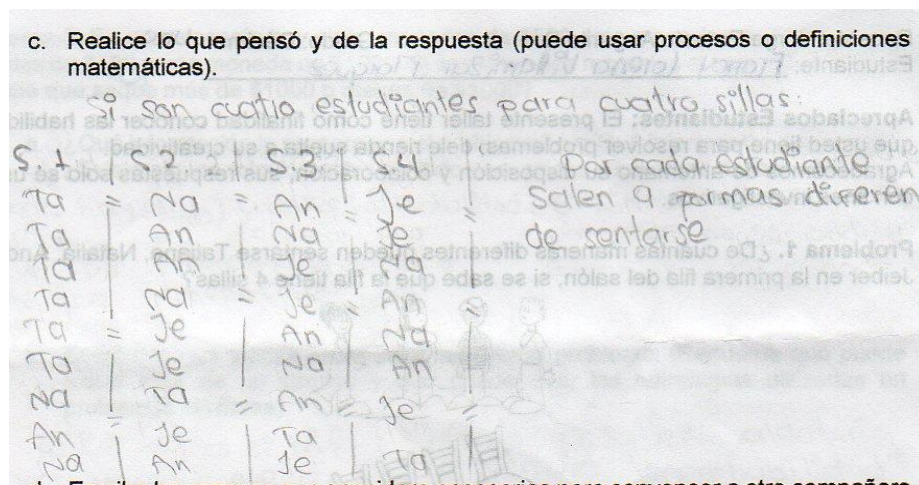


Tomado de la prueba del estudiante 14

Donde se puede percibir que el estudiante dio una respuesta planteando las formas de cada niño sin utilizar ningún contenido matemático para sustentarlo y luego arbitrariamente las suma, obteniendo de esta forma su respuesta.

Tan solo 3 (12%) estudiantes logra alcanzar un nivel medio en la habilidad para justificar en la resolución de problemas, ya que realizan tablas (contenido matemático) para representar las respuestas como podemos ver en el siguiente ejemplo, sin embargo, no resuelve el problema:

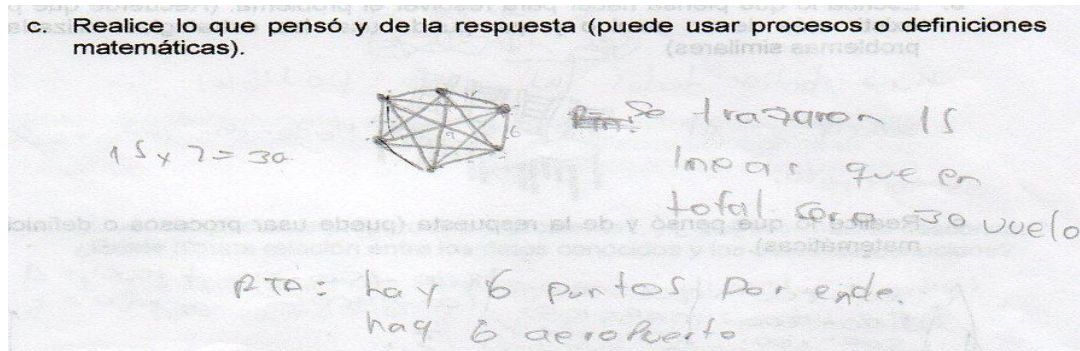
Imagen 9. Respuesta Estudiante 25



Tomado de la prueba del estudiante 25

Y 5 (20%) estudiantes logran el nivel alto en la habilidad para justificar en la resolución de problemas, como podemos evidenciarlo en la respuesta del estudiante al problema dos, donde utiliza representaciones gráficas (contenido matemático) para representar los aeropuertos y los vuelos, operaciones (contenido matemático) “15x2” para encontrar el total de vuelos, al igual que el conteo (contenido matemático) de líneas y puntos para lograr encontrar la respuesta interrelacionando las variables y los datos.

Imagen 10. Respuesta Estudiante 02



Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 02

- **La habilidad para argumentar** que según Perelman (1998) es la capacidad del estudiante para convencer o persuadir a sus compañeros que su estrategia de solución del problema es la más adecuada, dando razones y utilizando adecuadamente el lenguaje matemático.

Al realizar el análisis de las respuestas dadas a la indicación, *escriba las razones que considere necesarias para convencer a otro compañero que su solución es correcta y la más adecuada*, presente en los tres problemas se identificó que algunos estudiantes no lograrían convencer a sus compañeros, otros lo harían dándole razones sin utilizar contenidos matemáticos y los demás lograrían argumentar el problema, lo que permitió establecer unos niveles como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 7. Niveles de la habilidad para argumentar en el proceso de comunicación en la resolución de problemas.

Nivel Habilidad	Alto	Medio	Bajo
Argumentar	Convence o persuade a sus compañeros que su estrategia de solución del problema es la más adecuada, dando razones y utilizando adecuadamente el lenguaje matemático.	Convence o persuade a sus compañeros que su estrategia de solución del problema es la más adecuada, dando razones.	No logra Convencer o persuadir a sus compañeros que su estrategia de solución del problema es la más adecuada.

Al realizar la clasificación de los estudiantes respecto a la habilidad para argumentar se obtuvieron los siguientes resultados, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 8. Clasificación de los estudiantes por niveles de la habilidad para argumentar.

Nivel	Número de estudiantes	Porcentaje
Alto	1	4
Medio	4	16
Bajo	20	80

Lo que refleja que la mayoría 20 (80%) estudiantes se encuentran en el nivel bajo, por lo que no tiene la habilidad para argumentar en la resolución de problemas, como podemos ver en las siguientes respuestas dadas por algunos estudiantes en el problema 2:

Imagen 11. Respuesta Estudiante 17

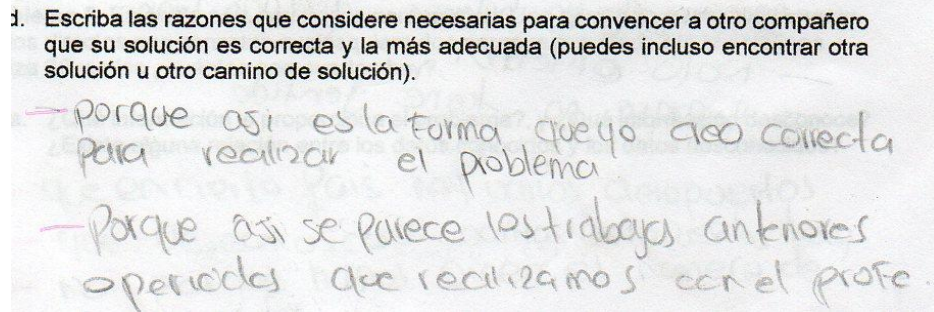
d. Escriba las razones que considere necesarias para convencer a otro compañero que su solución es correcta y la más adecuada (puedes incluso encontrar otra solución u otro camino de solución).

Pues si mi compañero(a) tiene otra respuesta lo hizo diferente.

Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 17

No tiene razones para convencer a su compañero que su respuesta es correcta ni que su estrategia es la más adecuada, simplemente acepta que él también tiene razón y ya.

Imagen 12. Respuesta Estudiante 13

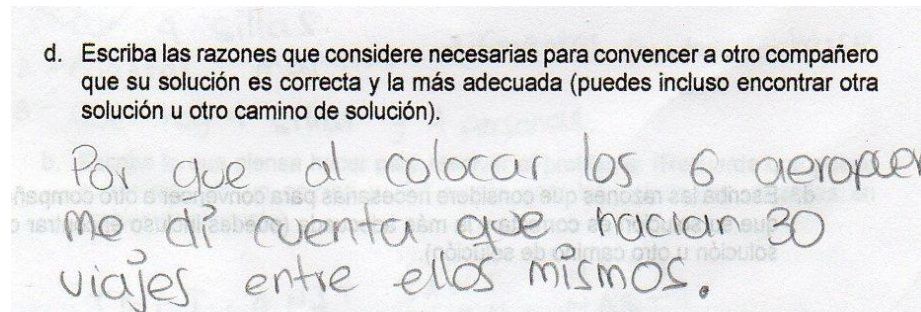


Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 13

Este estudiante no tiene razones para poder convencer a su compañero, por eso simplemente dice que lo que él hizo es correcto y ya, además pone como soporte al profesor ya que él tiene razón y punto.

Tan solo 4 (16%) estudiantes lograron alcanzar un nivel medio en la habilidad para argumentar en la resolución de problemas, como se puede evidenciar en el siguiente ejemplo, donde el estudiante expone las razones con las que lograría convencer a sus compañeros de que su estrategia es adecuada y por ende se tiene la seguridad de obtener una respuesta correcta:

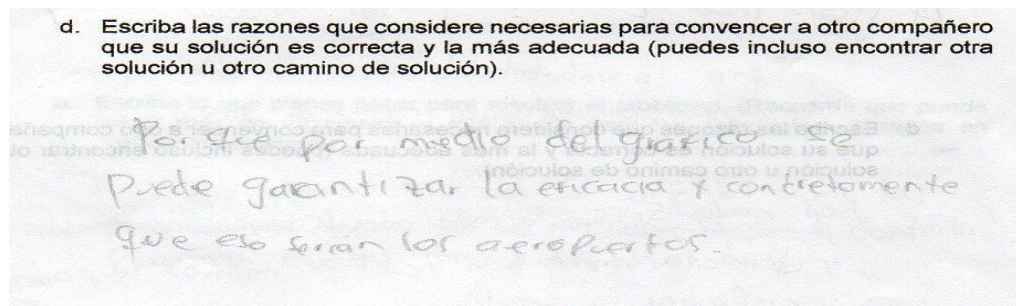
Imagen 13. Respuesta Estudiante 03



Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 03

Y únicamente 1 (4%) estudiante logró alcanzar un nivel alto en la habilidad para argumentar en la resolución de problemas, como se puede evidenciar en el siguiente ejemplo, donde el estudiante utilizó el gráfico (lenguaje matemático) para demostrarle a sus compañeros que su respuesta es correcta y de esa manera convencerlos.

Imagen 14. Respuesta Estudiante 02



Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 02

Lo que permitió ver que los estudiantes presentaron mayor dificultad en la habilidad para argumentar ya que 20 (80%) estudiantes se encuentran en nivel bajo, es decir no lograrían convencer a sus compañeros que su estrategia de solución es la más adecuada, seguida de la habilidad para justificar, pues 17 (68%) estudiantes no utilizan contenidos matemáticos para sustentar sus procedimientos.

Al analizar el desempeño de cada uno de los estudiantes se evidenció que hay 9 (36%) estudiantes que se encuentran en nivel bajo en todas las habilidades, es el caso del estudiante 10, como se puede evidenciar en las respuestas dadas al problema dos:

Imagen 15. Respuesta de Estudiante 10

Problema 2. En cierto país hay varios aeropuertos. Una aerolínea ofrece diariamente vuelos directos que conectan cualesquiera dos aeropuertos. Cada día la aerolínea realiza 30 vuelos ¿cuántos aeropuertos hay?

a. ¿Qué información le proporciona el problema?, y ¿Qué información desconoce?
¿Existe alguna relación entre los datos conocidos y los datos desconocidos?

osea que hay una aerolinea
cada aerolinea hace 30 vuelos
y hay 2 aeropuertos entonces
Serian 60 Vuelos

b. Escriba lo que piensa hacer para resolver el problema. (Recuerde que puede existir más de un camino y que puede usar las estrategias utilizadas en problemas similares)

2 aeropuertos en una aerolinea se hacen 30
60 Vuelos vuelos y en 1 aeropuerto

c. Realice lo que pensó y de la respuesta (puede usar procesos o definiciones matemáticas).

en cada aerolinea son 30 vuelos que hacen
en un aeropuerto.
y en este caso hay dos aeropuertos
Se arrian 60 Vuelos en total.
y de un vuelo va de a un aeropuerto a otro.

d. Escriba las razones que considere necesarias para convencer a otro compañero que su solución es correcta y la más adecuada (puedes incluso encontrar otra solución u otro camino de solución).

un vuelo va de un aeropuerto a otro

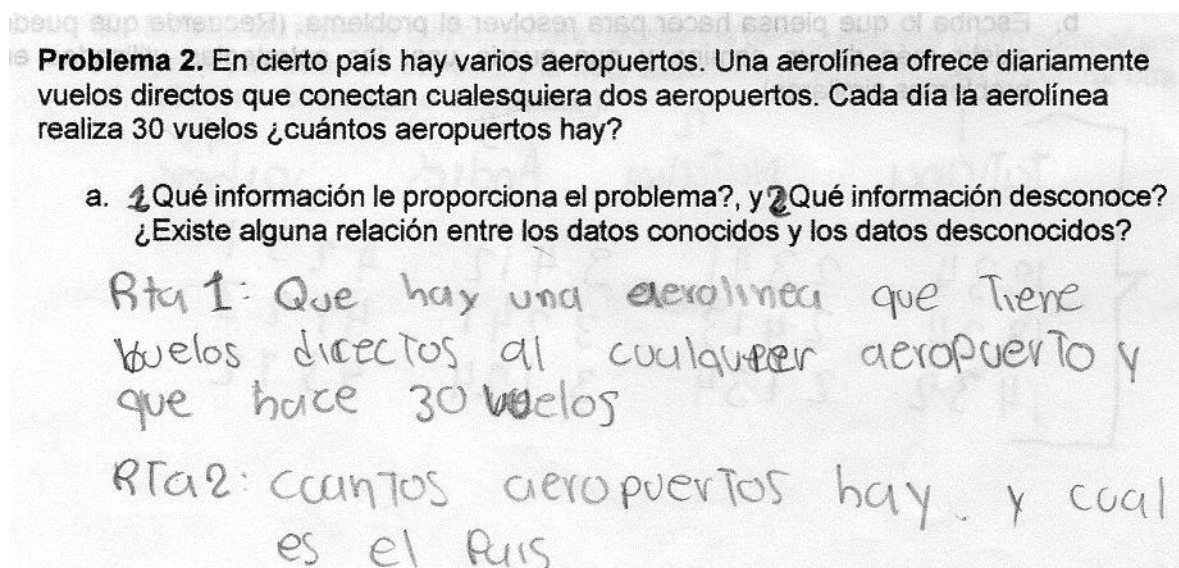
Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 10

Donde se puede ver que el estudiante no tiene la habilidad para: interpretar, ya que solo identifica algunos datos “cada aerolínea hace 30 vuelos” y a partir de ella infiere otra información “hay dos aeropuertos” lo cual es falso y no logró identificar la pregunta, ni la información que proporciona el problema; explicar, porque no logró expresar su estrategia para resolver el problema, únicamente relaciono los vuelos con los aeropuertos; justificar, debido a que no utilizo contenidos matemáticos para sustentar sus procedimientos sino que únicamente relaciono los datos que logró interpretar; argumentar ya que no lograría convencer a sus compañeros que su estrategia es la más adecuada por que no logró resolver el problema por tanto solo presenta la relación que encontró “ un vuelo va de un

aeropuerto a otro”. Lo que permitió ver que al no interpretar el problema, no logra resolverlo.

Otro caso es el del estudiante 16 que se encuentra en nivel medio de la habilidad para interpretación, ya que logra identificar la pregunta y algunos datos que le proporciona el problema, en los tres problemas planteados, como se puede evidenciar en la respuesta dada a uno de ellos:

Imagen 16. Respuesta Estudiantes 16



Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 16

Pero se encuentra en nivel bajo en las demás habilidades y por tanto no logra resolver los problemas, ya que aunque plantea una estrategia, y realiza unas operaciones matemáticas de forma correcta, esta no lo lleva a contestar la pregunta planteada en el problema, como se puede evidenciar en las respuestas dadas al problema dos:

Imagen 17. Respuesta Estudiante 10

b. Escriba lo que piensa hacer para resolver el problema. (Recuerde que puede existir más de un camino y que puede usar las estrategias utilizadas en problemas similares)

Pienso sacar cada cuanto sale un vuelo de aeropuerto si son 24 horas

c. Realice lo que pensó y de la respuesta (puede usar procesos o definiciones matemáticas).

$60 \times 24 = 1.440$ minutos

48 ise esta multiplicación por que cada hora tiene 60 minutos y lo multiplique por las 24 horas del dia.

$1.440m \div 30 = 48$ minutos

al dar me ese resultado divide por los vuelos realizados en el dia para saber cada cuanto sale

d. Escriba las razones que considere necesarias para convencer a otro compañero que su solución es correcta y la más adecuada (puedes incluso encontrar otra solución u otro camino de solución).

Por que al hacer esto tengo mas claro y la respuesta es segura

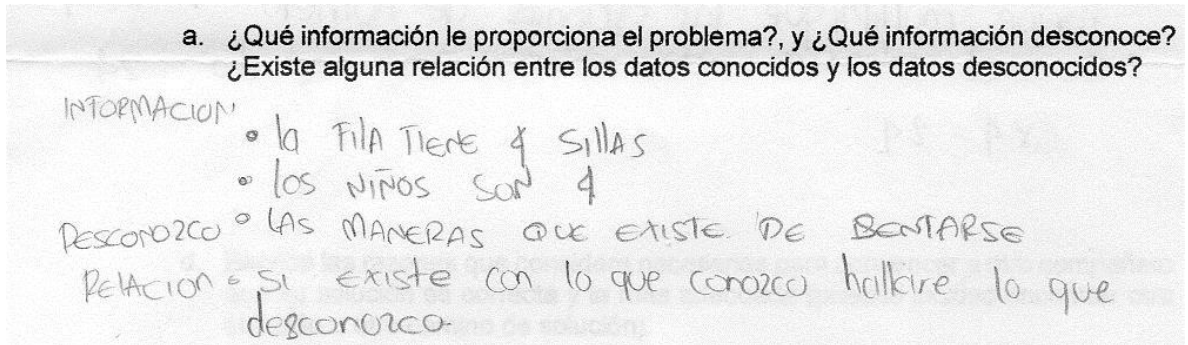
Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 10

Lo que permite ver que el estudiante cambia el problema “cada cuanto sale un vuelo del aeropuerto” para poderlo resolverlo, al no poder plantear una estrategia de solución.

Otro caso es el del estudiante 6, el cual se encuentra en nivel medio en la habilidad para interpretar, ya que logra identificar la pregunta y algunos datos del

problema, pero no logra encontrar relaciones entre ellos, como se evidencia en la respuesta dada al problema 1:

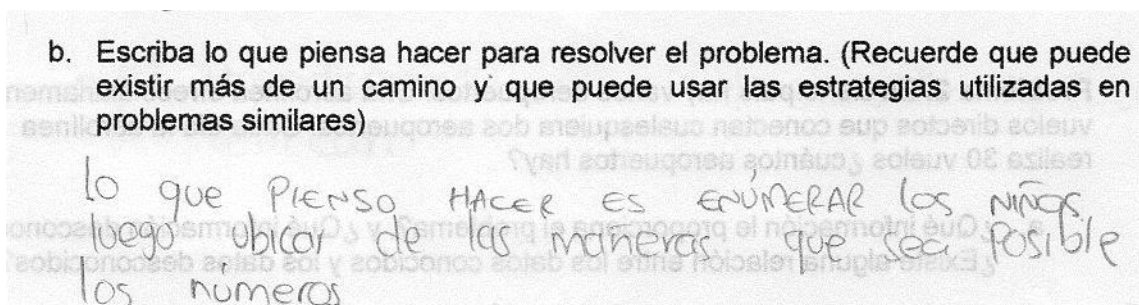
Imagen 18 Respuesta Estudiante 06



Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 06

Igualmente en nivel medio en la habilidad para justificar, ya que plantea una estrategia de solución, sin embargo no es muy específica en como ejecutarla, como se evidencia en la respuesta dada al problema 1:

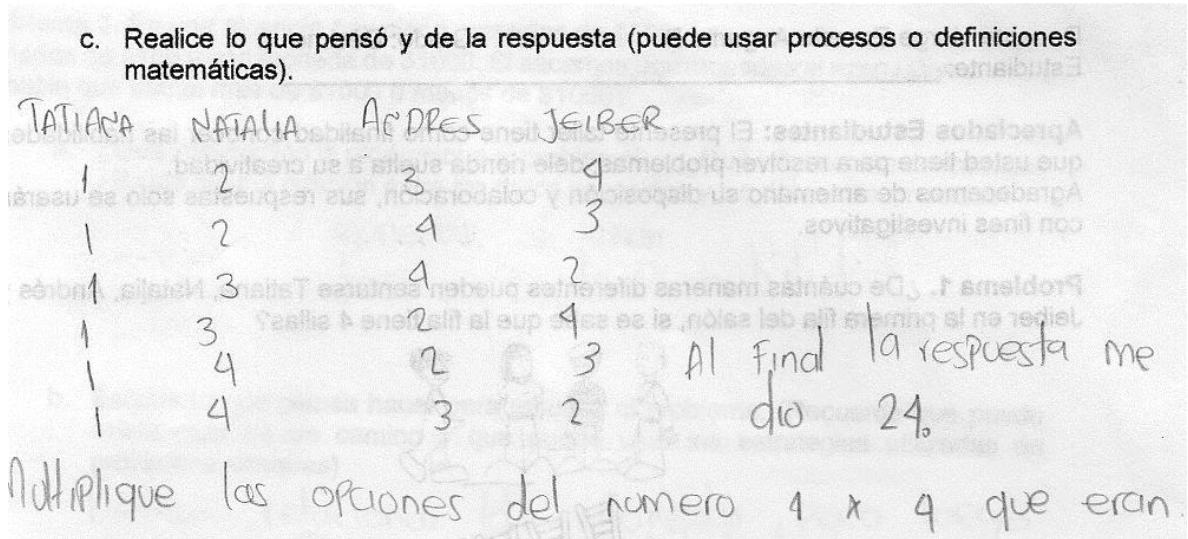
Imagen 19. Respuesta Estudiante 06



Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 06

En nivel alto para justificar ya que utiliza el espacio muestral (contenidos matemáticos) para sustentar sus procedimientos, como se evidencia en la respuesta dada al problema 1:

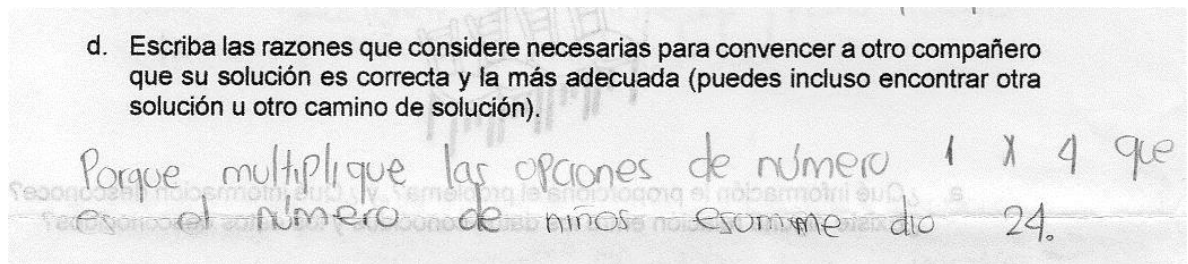
Imagen 20. Respuesta Estudiante 06



Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 06

Pero en nivel bajo en la habilidad para argumentar ya que no lograría convencer a sus compañeros que su solución es la más adecuada debido a la inconsistencia de su argumento, como se evidencia en la respuesta dada al problema 1:

Imagen 21. Respuesta Estudiante 06



Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 06

5.1.1.2 Análisis de las estrategias de resolución de problemas. Igualmente se analizó las respuestas dadas por los estudiantes a la indicación, *escriba lo que piensa hacer para resolver el problema*, se identificó que las estrategias de los estudiantes para resolver un problema de conteo son: visualización de intercambios, asignación de códigos, utilización de tablas, construir gráficos,

construir el espacio muestral, seguir un orden, sumar eventos (Anexo D), como se evidencia en la siguiente tabla:

Tabla 9. Categorización de las estrategias de solución de problemas de conteo

Código	Codificación axial	Codificación selectiva
Intercambiar	Visualización de intercambios	Las representaciones como estrategia para la resolución de problemas de conteo.
Códigos	Asignación de códigos	
Tablas	Utilización de tablas	
Grafico	Construir gráficos	
Espacio muestral	Construir el espacio muestral	El espacio muestral como estrategia para la resolución de problemas de conteo.
Ordenar	Seguir un orden	
Suma	Sumar eventos	

Lo que permite ver que las estrategias para resolver problemas de conteo son: las representaciones o el espacio muestral.

Seguidamente se analizó las respuestas dadas a la indicación, *escriba las razones que considere necesarias para convencer a otro compañero que su solución es correcta y la más adecuada*; se identificó que las razones para convencer a otro compañero que su solución es correcta y la más adecuada son: relatar su solución, decirle que su solución es fácil de entender, discutir la solución, y utilizar contenidos matemáticos (Anexo E), como se evidencia en la siguiente tabla:

Tabla 10. Categorización de las razones para convencer a otro compañero que su solución es correcta y la más adecuada

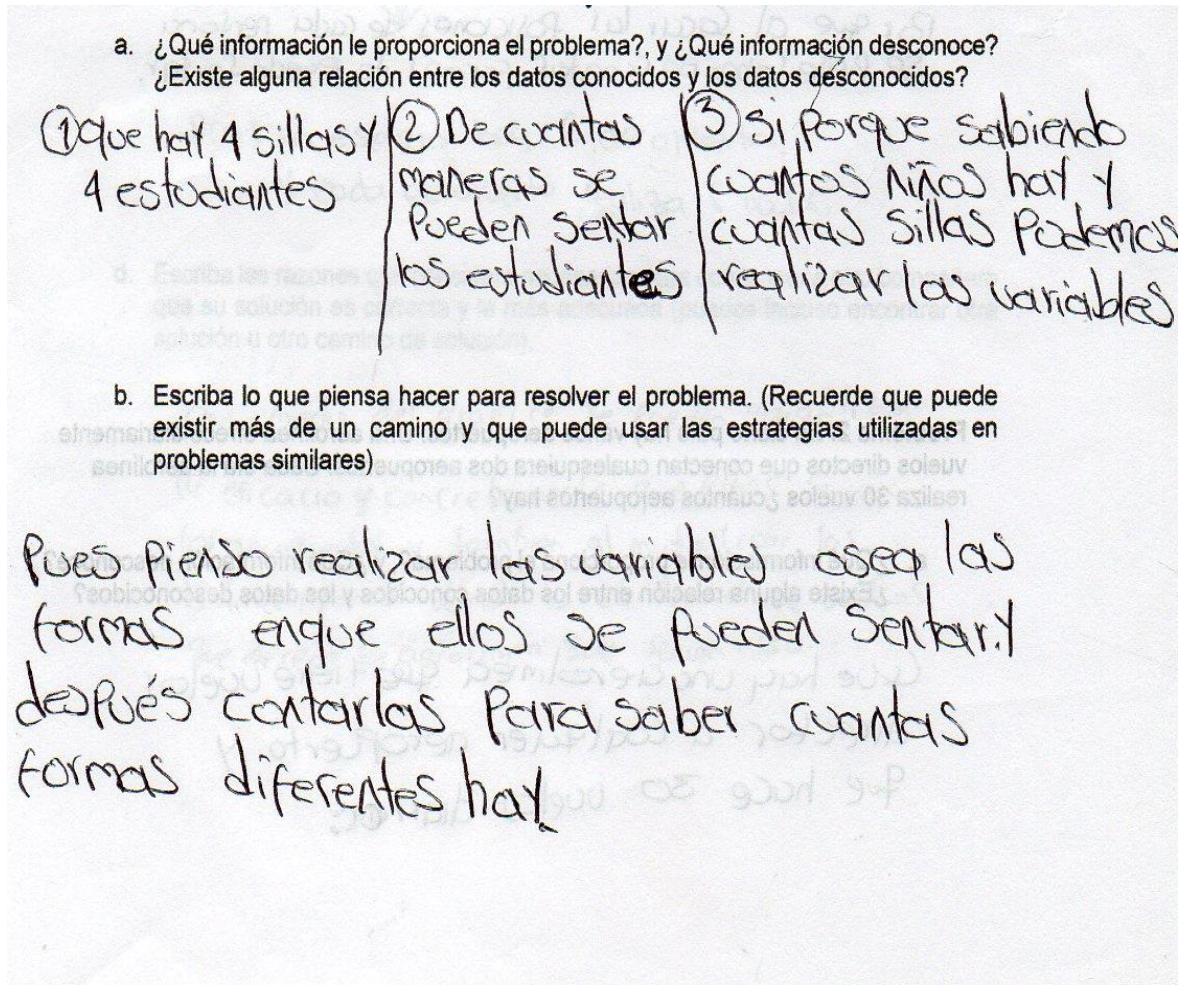
Código	Codificación axial	Codificación selectiva
Relatar.	Relatar su solución.	La estrategia de solución como argumento para convencer a sus compañeros que su solución es correcta y la más adecuada.
Fácil.	Su solución es fácil de entender.	
Dialogo.	Discutir la solución.	
Contenidos.	Utilizar contenidos matemáticos.	El espacio muestral como argumento para convencer a sus compañeros que su solución es correcta y la más adecuada.

Lo que nos permite ver que los estudiantes utilizan su solución o contenidos matemáticos (espacio muestral) para argumentar la solución dada al problema.

5.1.2 Análisis de resultados del segundo momento “en grupo” de la prueba diagnóstica. En este momento de la prueba se les pidió a los estudiantes que conformaran ocho grupos, siete de ellos de tres estudiantes y uno de cuatro estudiantes, con el fin de observar de qué manera trabajaban en grupo. Donde se observó que los estudiantes de buenos desempeños en el área se querían hacer entre ellos y rechazaban a los estudiantes que han presentado desempeño bajo o que se caracterizan por su indisciplina. Los grupos desarrollaron los mismos tres problemas que habían resuelto de forma individual, en el trabajo se observó que en seis de los grupos un estudiante tomó el liderazgo, y solo en dos de ellos se presentó discusión, en los otros se dedicaron a transcribir lo que había hecho el líder, quizás porque consideraban era más competente, que en este caso coincide con estudiantes con buenas calificaciones en matemáticas y en la mayoría de los grupos uno de los integrantes permanece como espectador mientras que los otros dos resuelven los problemas.

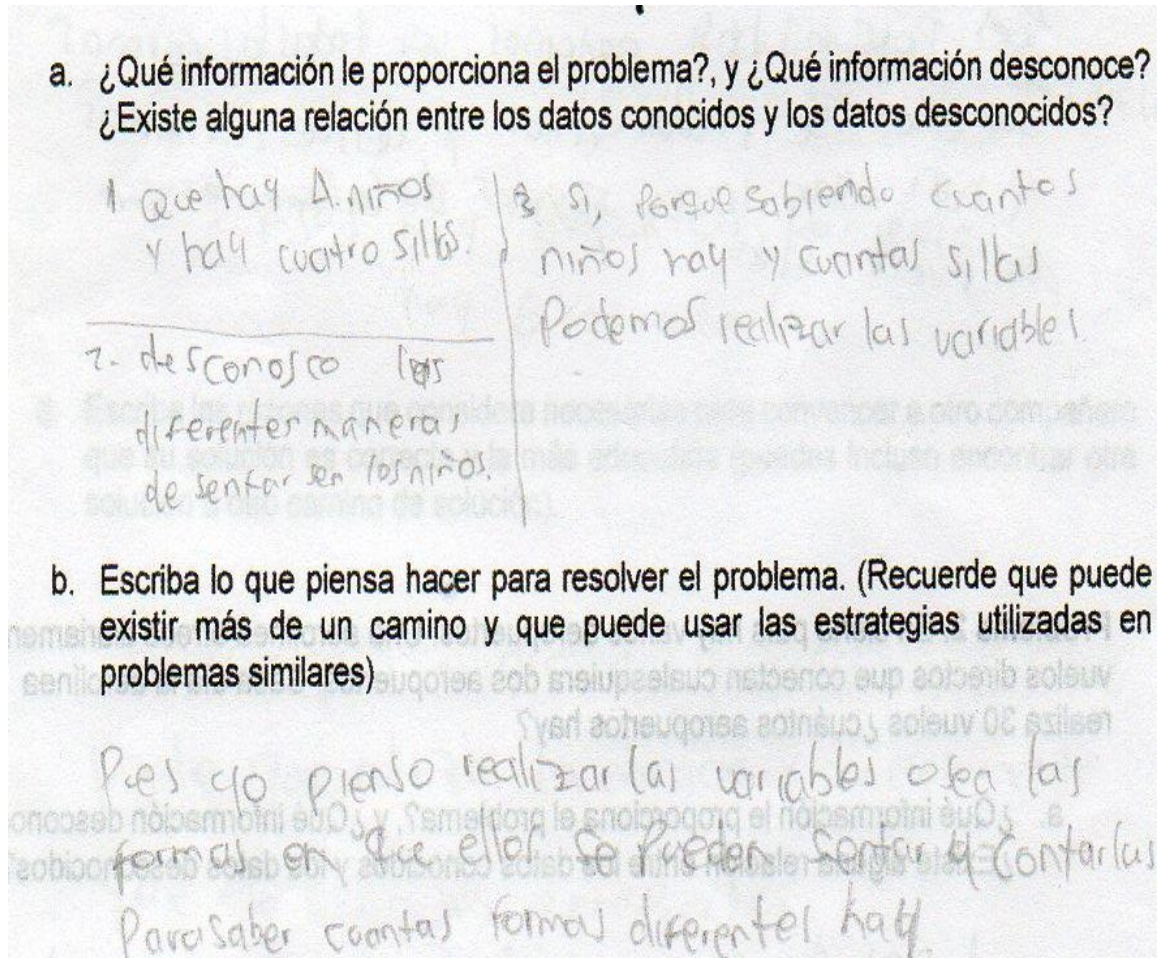
Al analizar las respuestas dadas por los grupos a los problemas se evidenció que en algunos casos las respuestas de los grupos son idénticas a la de uno de los integrantes del grupo (el líder) como se evidencia en el siguiente ejemplo, respuestas al problema 1:

Imagen 22. Respuesta grupo 08



Fuente: Tomado de la prueba del grupo 08

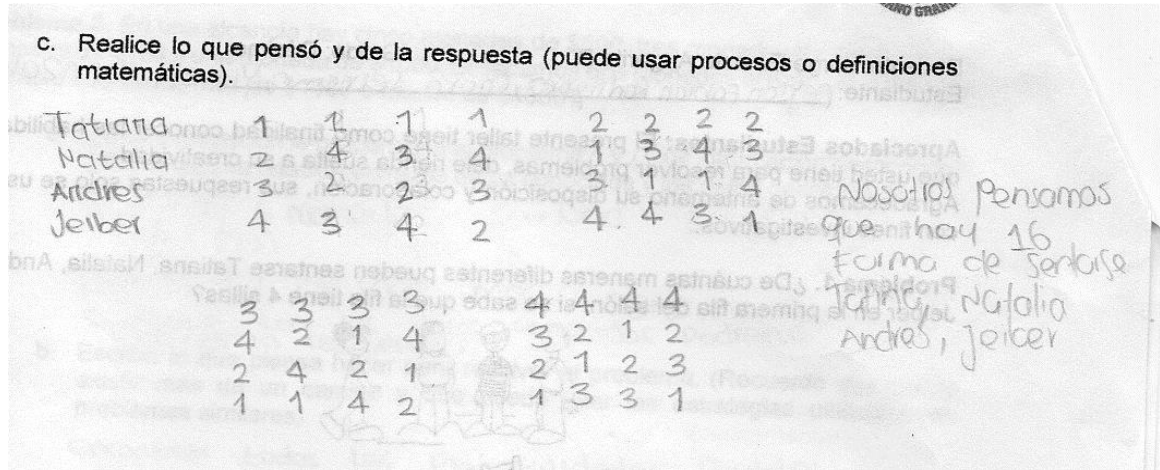
Imagen 23. Respuesta Estudiante 02



Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 02

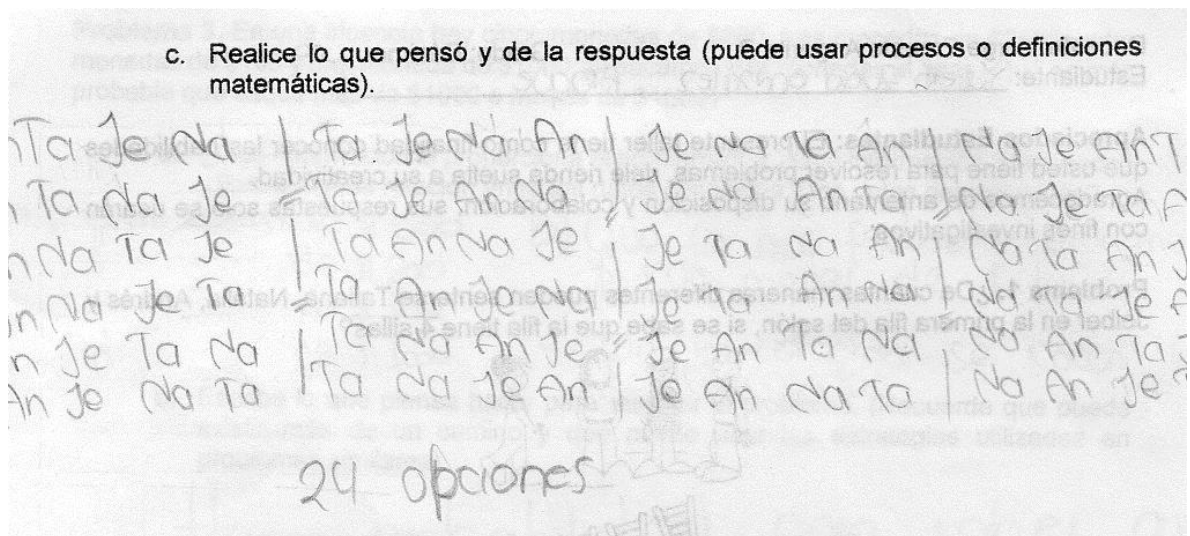
En otros casos, se presentó discusión y llegaron a acuerdos, sin embargo el estudiante que había realizado el problema correctamente se dejó convencer que su respuesta no era la correcta como lo podemos evidenciar en las respuestas dadas en el grupo 1 y el estudiante 09:

Imagen 24. Respuesta grupo 01



Tomado de la prueba del grupo 01

Imagen 25. Respuesta Estudiante 09



Fuente: Tomado de la prueba del estudiante 09

Al analizar los estudiantes no consiguen resolver problemas, ya que no logran interpretar el problema, debido a que únicamente identifican algunos datos y la pregunta, y plantean estrategias sin utilizar contenidos matemáticos para sustentarlas y por tal razón no logran convencer a sus compañeros que su estrategia es adecuada. Es por esto que se hace necesario fortalecer las

habilidades del proceso de comunicación (interpretar, explicar, justificar y argumentar), por medio de espacios en los cuales los estudiantes trabajen conjuntamente en grupos para alcanzar metas comunes, ayudan a otros para que todos puedan alcanzar en alguna medida el éxito en la solución de los problemas, explican y argumentan al grupo sus ideas o estrategias y las presentan de forma concreta y precisa, lo cual se consigue por medio del trabajo colaborativo.

5.2 ANÁLISIS DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA IMPLEMENTADA

En la fase de intervención se implementó una secuencia didáctica basada en el trabajo colaborativo, con el fin de potenciar el proceso de comunicación en la resolución de problemas. La secuencia “¡Trabajemos juntos aprendamos a contar!” está conformada por tres momentos: Inténtalo, tú podrás, con una sesión; Fortalécete, te gustará, con cinco sesiones; y Ve más lejos, lo tienes!, con una sesión (Ver numeral 3.5.1). A continuación se presenta el análisis de cada una de las sesiones teniendo en cuenta los cinco componentes que debe tener el trabajo colaborativo propuestos por Johnson: interdependencia positiva, exigibilidad personal, interacción positiva cara a cara, uso frecuente de habilidades personales y de grupo, y autoanálisis de grupo. Al igual que las habilidades del proceso de comunicación: interpretar, explicar, justificar y argumentar.

5.2.1 Análisis de la primera sesión. Esta sesión se aplicó el 20 y 21 de octubre del 2016 y tuvo una duración de 2.5 horas, donde los estudiantes de forma individual desarrollaron el problema planteado en 60 minutos, tiempo en el cual algunos estudiantes se sentían inseguros, como el estudiante 04 ya que leía y releía el problema sin escribir nada, jugaba con el lapicero, con los dedos y volteaba a mirar al grupo constantemente y le realizaba preguntas al profesor de “como lo resuelvo no entiendo nada”, a lo cual el profesor le sugirió que contestara las preguntas en orden y que eso le ayudaría a resolver el problema. Otros estudiantes compartían lo que habían hecho por unos instantes con el compañero

del lado, hasta que el profesor les recordó que el trabajo era individual y que posteriormente se reunirían en los grupos colaborativos. El profesor pasaba por los puestos contestando preguntas, que en ocasiones eran nuevas preguntas que le ayudaban a aclarar las dudas a los estudiantes, igualmente le realizaba preguntas a los estudiantes que no estaban trabajando.

Al analizar las respuestas dadas por los estudiantes de forma individual se pudo identificar que un porcentaje significativo de ellos se encuentran en nivel medio en la habilidad para interpretar, ya que lograron identificar algunos datos “hay 10 lienzos cada uno de diferente color y tenemos que fabricar banderas bicolors” y la pregunta “Cuántas banderas bicolor pueden salir de los 10 lienzos”. Igualmente se ubican en nivel medio en la habilidad para explicar ya que todos logran construir una bandera, pero no es muy clara la estrategia para resolver el problema. Solo algunos estudiantes utilizaron el espacio muestral para resolver el problema lo que indica que la mayoría de los estudiantes se encuentra en nivel bajo en la habilidad para justificar y solo un estudiante logró generalizar.

Posteriormente se reunieron en los ocho grupos colaborativos durante 60 minutos, tiempo en el cual discutieron lo que cada uno de los integrantes del grupo había realizado, el profesor le proporcionó hojas de cuatro colores a cada uno de los grupos y les insistió que es importante convencer a los demás compañeros que su solución esta correcta y que además él escogería al azar el estudiante que representaría al grupo en la socialización, por lo cual deben discutir entre ustedes sus puntos de vista, explicarle o enseñarle al compañero que no entienda, organizar el trabajo, escuchar a sus compañeros, llegar a acuerdos, y participar activamente todos los integrantes del grupo.

Al analizar el trabajo del grupo 08, se identificó que se empezaron a observar efectos del trabajo colaborativo y su influencia en las habilidades de comunicación, ya que se evidenciaron los componentes:

- **Interdependencia positiva:** Los tres integrantes participaron en la interpretación del problema, sin embargo no identificaron la información “se debe resolver en dos casos, se va a utilizar asta y no se va a utilizar asta”, lo que permitió ver que el grupo se encuentra en el nivel medio en la habilidad para interpretar, nivel en que se encontraban cuando trabajaron de forma individual. Además un estudiante se distrajo constantemente, por lo que es poco lo que le aporta al grupo, también en el momento de construir las banderas con el material concreto dos estudiantes se dedicaron a cortar los papeles y solo un estudiante sigue trabajando en el problema, situaciones que no aportan nada a potenciar sus habilidades de comunicación.
- **Exigibilidad personal:** el profesor se acercó y les preguntó que si la información, se va a utilizar asta o no, la tuvieron en cuenta a lo que un estudiante le responde “ No ya que da lo mismo” y el profesor le presentó la siguiente situación: si ubico la bandera de Girón de tal manera que el color café quede arriba y el amarillo abajo es o no la bandera de Girón, a lo cual los tres le responden “no ya que se debe colocar el amarillo arriba y el café abajo”, por lo cual el profesor les pregunto ¿da lo mismo con asta o sin asta? y los tres discuten al respecto. Más tarde el profesor se acercó y le preguntó al estudiante que estaba distraído ¿saben cuántas banderas salen con cuatro colores?, a lo que él le respondió “6 sin asta y 12 con asta ya que ellos hicieron el espacio muestral” el profesor le preguntó que si está de acuerdo con ellos y él le responde “Claro ahí están todas las opciones no hay más”, lo cual evidencia que sus compañeros mejoraron su habilidad para justificar, al enseñarle como se hacía. En otro momento el profesor se acercó al mismo grupo cuando dos estudiantes estaban discutiendo y uno de ellos dijo “no hagamos el espacio muestral yo ya se la respuesta” el profesor le preguntó ¿Cuál es? a lo que el estudiante le dijo “30 porque 6×5 es 30, cada color se puede combinar con los otros cinco, con el no, no sería bicolor y sin hasta la mitad 15, porque no se combinan” otro compañero dijo “ si es cierto ya hice el espacio muestral y me dio 30” el profesor le preguntó ¿Funciona con los casos

anteriores? él dice “creo que sí, miremos $5 \times 4 = 20$, $4 \times 3 = 12$ sí”. Lo que evidencia que el estudiante 02 mejoró su habilidad para justificar y argumentar.

- **Interacción positiva cara a cara:** en la discusión que se generó por si da lo mismo con asta y sin asta, un estudiante logró convencer a sus compañeros con ejemplos que sí importa, lo que evidencia que en la interacción el estudiante logra potenciar su habilidad para explicar. Igualmente al momento de construir las banderas un estudiante le enseña a sus compañeros como cortar el papel, lo que evidencia que la interacción entre ellos logra que mejoren su habilidad para explicar.
- **Uso frecuente de sus habilidades interpersonales y de grupo:** El grupo decidió que si importaba si se utilizaba asta o no, lo que les permitió la interpretación del problema, y les facilitó encontrar su solución. Un estudiante lideró la construcción de las banderas, y repartió el trabajo, posteriormente decidieron construir el espacio muestral para encontrar la solución, lo que les permitió mejorar la habilidad de justificar.

Igualmente se evidenció que el material concreto (hojas de colores), ocasionó que el proceso se frenara ya que los estudiantes se preocuparon más por la estética que por utilizarlo para evidenciar la respuesta, también al final los grupos que terminaron antes se dedicaron a molestar e interfirieron el trabajo de los que no habían terminado, el profesor se acercó al grupo y les dijo “recuerden que todo el salón son un grupo, por lo tanto debemos aplicar lo mismo que en su pequeño grupo, y con su actitud no les aportan nada” a lo que el estudiante 16 dijo “ si profe que pena no lo volvemos a hacer”.

En los últimos 30 minutos un representante del grupo 03 escogido por el profesor, socializó ante sus compañeros lo que su grupo hizo, al contestar las primeras preguntas se evidenció que el grupo 03 no había interpretado correctamente el problema ya que le faltaba la información “banderas bicolors”, pero esta información si la habían detectado otros grupos. También se pudo ver que el

grupo logró dibujar las banderas y proponer una estrategia de solución utilizando el espacio muestral, lo que permitió identificar que el grupo mejoró su habilidad para explicar y justificar. En la discusión guiada por el profesor por medio de preguntas, también se evidenció que los estudiantes de la clase mejoraron la habilidad para explicar y justificar.

5.2.2 Análisis de la segunda sesión. Esta sesión se aplicó el 21 y 24 de octubre del 2016 y tuvo una duración de 3 horas, donde los estudiantes de forma individual desarrollaron los dos problemas planteados en 30 minutos, tiempo en el cual la mayoría de los estudiantes se dedicó a resolver los problemas sin lograr terminarlos (en su mayoría trabajaron solo el primer problema), sin embargo los estudiantes, 20 y 16 no trabajaron, cuando el profesor les preguntó ¿porque no trabajaban? ellos manifestaron que esperaban a reunirse con sus compañeros del grupo para resolverlos, a lo cual el profesor les dijo que era importante enfrentarse a los problemas de forma individual para poder aportar al grupo cuando se reunirán. El estudiante 04 preguntó “este tiene nota?”, a lo cual el profesó le recordó que el trabajo en los grupos y los informes que presenten se tendrá en cuenta para la evaluación, igualmente algunos estudiantes se sentían inseguros, como el estudiante 22 ya que jugaba con el pelo, la camisa, el lapicero, miraba alrededor en repetidas ocasiones.

Al analizar las respuestas dadas por los estudiantes de forma individual se pudo identificar que un 25% de los estudiantes se encuentran en nivel bajo en interpretación ya que solo identifican algunos datos “la programación y la hora” y no identifican la pregunta, los demás están en nivel medio ya que identifican la pregunta y algunos datos pasando por alto que “cada uno de los invitados debe asistir a una conferencia, un seminario y visitar un stand”. Igualmente se ubican en nivel medio en la habilidad para explicar ya que todos logran construir un posible recorrido, pero no es muy clara la estrategia para resolver el problema. El 40% del grupo se encuentra en nivel medio en la habilidad para justificar ya que utiliza el

espacio muestral (contenido matemático) para sustentar algunos de sus procedimientos, los demás se encuentran en nivel bajo.

Posteriormente se reunieron en los ocho grupos colaborativos durante 120 minutos, tiempo en el cual discutieron lo que cada uno de los integrantes del grupo había realizado, el profesor les insistió que es importante convencer a los demás compañeros que su solución está correcta y que además él escogería al azar el estudiante que representaría al grupo en la socialización.

Al analizar el trabajo del grupo 04, se observó efectos del trabajo colaborativo y su influencia en las habilidades de comunicación, ya que se evidenciaron los componentes:

- **Interdependencia positiva:** Los tres integrantes discuten como sacar la respuesta, el estudiante 14 dice “que los escriban” y los señala con su dedo en la hoja, el estudiante 13 los indica en su hoja, el estudiante 06 dice “pero como encontrarlos sin sacarlos, si miramos con la conferencia de liderazgo salen 6 y con las otras”, la estudiante 13 dice “si para cada una salen 6 entonces son 18 $6+6+6$ ”, el profesor al escucharlas les pregunta, “si un compañero del grupo les pregunta cómo están seguros que no hay más , ustedes que le contestan”, a lo que el estudiante 14 le responde “porque cada seminario tiene tres opciones los stand y entonces cada conferencia seis”, lo que permitió ver que el trabajo colaborativo les ayudo a mejorar su habilidad para explicar. Además el estudiante 14 se distrajo constantemente, por lo que es poco lo que participa en las discusiones, igualmente sucede en casi todos los grupos, situación que no aportan nada a potenciar sus habilidades de comunicación.
- **Exigibilidad personal:** el profesor se acercó al grupo y la estudiante 13 dice “en total son 12 opciones“ y las indica con el dedo sobre su hoja, a lo que la estudiante 06 le dice “no estoy segura, creo que son muchas” el profesor les pregunta ¿hay algún problema con que sean muchas?, la estudiante 06

responde “no!” y el profesor le pregunta “¿Cuál es la respuesta del punto anterior?” y la estudiante 06 responde “son 6 opciones ya que con cada seminario son 3 entonces $3+3$ seis y el profesor le dice “teniendo en cuenta eso contesten la pregunta” por lo que la estudiante 06 dice “ah! para cada conferencia salen 6, luego $6+6+6$ 18 son 18 mire” lo que permitió ver que la estudiante 06 mejoró su habilidad para explicar y justificar.

Al finalizar de resolver los problemas la estudiante 13 dice “ya entendí como hacerlos, pero no me quedó claro está” a lo cual estudiante 06 le dice “mire escoge la de liderazgo, y el seminario de redes entonces se puede con los tres stand, entonces hay salen seis” a lo cual el estudiante 13 dice “a claro, ahora sí”, lo que permitió evidenciar que los estudiantes mejoran su habilidad para explicar.

- **Interacción positiva cara a cara:** el estudiante 14 dice “se desconoce cuántos estudiantes son” a lo que la estudiante 06 le dice “esto no es tan importante porque nos piden sacar las opciones de un participante y ya, por lo que no importa cuántos”, a lo que la estudiante 14 dice “a! si tiene razón” lo que permite ver que la estudiante 14 mejora su interpretación del problema. Los tres estudiantes discuten sobre un posible pedido, el estudiante 14 dice “una empanada mixta y gaseosa”, el estudiante 13 dice “un perro y gaseosa” el estudiante 06 dice “los perros no tienen nada que ver con el problema, ya que el pedido es empanada y gaseosa”, lo que evidencio que los estudiantes mejoraron su habilidad de interpretación.
- **Uso frecuente de sus habilidades interpersonales y de grupo:**
En el problema uno el estudiante 06 organizó el trabajo, el leyó el problema, tomó apuntes y dijo “vamos a mirar la respuesta de cada uno y decidimos que escribir” lo que les permitió discutir e interpretar el problema.

En los últimos 30 minutos un representante del grupo escogido por el profesor, socializó ante sus compañeros lo que su grupo hizo, al contestar las primeras preguntas se evidenció que el grupo había interpretado correctamente el problema también se pudo ver que el grupo logró sacar un recorrido y proponer una estrategia de solución utilizando el espacio muestral, lo que permitió identificar que el grupo mejoró su habilidad para explicar y justificar. En profesor preguntó que si en las opciones era posible colocar liderazgo, cooperativas a lo que el estudiante 01 dijo “no por que debe asistir a una conferencia, un seminario y un stand” y el estudiante 16 dijo “no además por el tiempo” por lo que el profesor dijo “eso implica que no se podía repetir y no lleva un orden”.

El grupo planteó que era posible encontrar la respuesta sin sacar el espacio muestral multiplicando $3 \times 2 \times 3$, pero no dio razones del por qué a lo que el profesor le preguntó a los demás compañeros, el estudiante 06 dice “como cada una de las opciones tiene tres, $2 \times 3 = 6$ y por cada una tiene 6 entonces $3 \times 6 = 18$ ” lo que permitió ver que la estudiante logró generalizar y de esa manera convenció a sus compañeros que su estrategia funcionaba utilizando lenguaje matemático, lo que implica que mejoró su habilidad de argumentar.

5.2.3 Análisis de la tercera sesión. Esta sesión se aplicó el 24, 25 y 26 de octubre del 2016 y tuvo una duración de 3.5 horas, donde los estudiantes de forma individual desarrollaron los dos problemas planteados en 30 minutos, el profesor les insistió que el trabajo que cada uno haga es muy importante ya que son los aportes para el trabajo en los grupos colaborativos, y que además recordaran que debían convencer a sus compañeros que lo que hicieron es correcto y lo más adecuado, los estudiantes trabajaron durante todo el tiempo resolviendo los problemas, aunque solo lograron en su mayoría terminar el primer problema. El estudiante 23 se mostró muy inseguro, ya que en repetidas ocasiones le preguntó al profesor que si lo que había hecho era correcto, a lo que el profesor le manifestó que siguiera desarrollando el problema y cuando se reuniera con el

grupo colaborativo lo discutiera con ellos, además en repetidas ocasiones le preguntaba al estudiante 20.

Al analizar las respuestas dadas por los estudiantes de forma individual al problema uno se pudo identificar que un 85% de los estudiantes se encuentran en nivel alto en interpretación ya que identificaron los datos “la evaluación de matemáticas consta de 10 preguntas, cada una con cuatro opciones de respuesta” y la pregunta “de cuantas formas distintas un estudiante puede marcar una respuesta”, los demás están en nivel bajo ya que identifican solo algunos datos. Igualmente el 80% de los estudiantes se ubican en nivel medio en la habilidad para explicar ya que lograron construir una posible respuesta, pero no es muy clara la estrategia para resolver el problema. Solo algunos estudiantes utilizaron la técnica del producto (contenido matemático) para resolver el problema lo que indica que la mayoría de los estudiantes se encuentra en nivel bajo en la habilidad para justificar.

Posteriormente se reunieron en los mismos ocho grupos colaborativos durante 120 minutos, tiempo en el cual discutieron lo que cada uno de los integrantes del grupo había realizado, el profesor les insistió que es importante convencer a los demás compañeros que su solución esta correcta y que además él escogería al azar el estudiante que representaría al grupo en la socialización.

Al analizar el trabajo del grupo 08, se observó algunos efectos del trabajo colaborativo y su influencia en las habilidades de comunicación, ya que se evidenciaron los componentes:

- **Interdependencia positiva:** El estudiante 16 poco le aportó al grupo, pero se interesó por comprender lo que sus otros dos compañeros hacían para resolver los problemas, ya que en cada momento les preguntó cómo lo hacían hasta entender, lo que implicó que la interdependencia positiva beneficio al

estudiante para que mejorara sus habilidades de comunicación. Además el estudiante 02 encontró el espacio muestral que estaban necesitando y le pidió al estudiante 11 que lo revisara a ver si falta alguna, a lo que el estudiante dijo “son 64 luego 256 64 por 4” seguidamente el estudiante 02 dice “por 4 1024 formas, esas son”, lo que evidenció que el grupo mejoró su habilidad para justificar.

También se logró ver que en algunos momentos el estudiante 02 trabajó en el problema solo, mientras los otros dos realizaban actividades ajenas al trabajo, como jugar con un expografo o con las hojas. Igualmente en algún momento los tres estudiantes se distraen hablando de otras cosas, actitudes que no le aportaban al trabajo del grupo.

- **Exigibilidad personal:** El profesor se acerca al grupo y les preguntó “¿qué información le proporciona el problema?” a lo que el estudiante 11 le respondió correctamente, seguidamente el profesor les preguntó “¿Qué información desconocen?” el estudiante 02 le respondió rápidamente y al preguntarles “¿Cuál sería una forma de responder la evaluación?” el estudiante 16 le respondió correctamente, lo que permitió ver que el grupo se encuentra en un nivel alto en interpretación. En otro momento el profesor se acercó al grupo y le preguntó “¿Cuántas formas encontraron?” a lo que el estudiante 11 respondió “64 formas, con la A salen 16 formas en el espacio muestral, luego se multiplica por 4 porque hay 4 opciones”, lo que evidenció que la estudiante mejoró su habilidad para justificar.
- **Interacción positiva cara a cara:** El estudiante 16 preguntó “¿por qué salen 64? No entiendo” por lo que el estudiante 02 le explica por medio del espacio muestral que por cada letra salen 16 y como hay 4 letras por tanto hay 16 por 4, 64 a lo que el estudiante 02 dice “Ya, ya sé cómo es que salió” lo que permitió evidenciar que el estudiante 02 logró convencerlo utilizando el

espacio muestral (contenidos matemáticos) lo que implicó que mejoró su habilidad para argumentar.

- **Uso frecuente de sus habilidades interpersonales y de grupo:** El estudiante 16 por primera vez toma la vocería, lee el problema, les expone lo que había hecho y les pregunta sus opiniones y lidera la discusión, lo que permitió ver que está mejorando sus habilidades del proceso de comunicación.

En los últimos 60 minutos un representante del grupo escogido por el profesor (diferente a los que ya habían pasado), socializó ante sus compañeros lo que su grupo hizo, al contestar las primeras preguntas se evidenció que el grupo se encontraba en nivel alto de interpretación, ya que lograron identificar la pregunta, los datos y variables que le proporcionaba el problema. También se pudo ver que el grupo logró por medio de ejemplos expresar la información al igual que logró plantear una estrategia de solución utilizando el espacio muestral, lo que permitió ver que se encontraban en nivel medio en la habilidad para explicar. Al intentar de resolver el problema no lo lograron ya que se dieron cuenta que eran muchas y no terminaron ni estaban seguros de cuantos eles faltaba, lo que implica que ese grupo se encuentra en nivel medio en la habilidad para justificar, sin embargo los grupos 02 y 08 lograron generalizar el procedimiento realizando multiplicaciones, proceso con el que lograron convencer a sus compañeros, lo que permitió ver que ellos lograron mejorar sus habilidad para argumentar.

Por medio de preguntas el profesor concluyó que en este problema el orden importa y que permite repetición, y que la generalización que encontraron es una técnica de conteo que se llama principio de multiplicación, la cual funciona cuando se da las dos condiciones encontradas, importa el orden y permite repetición.

5.2.4 Análisis de la cuarta sesión. Esta sesión se aplicó el 26, 31 de octubre y 1 de noviembre del 2016 y tuvo una duración de 4.5 horas, donde los estudiantes de forma individual desarrollaron los tres problemas planteados en 30 minutos, el

profesor les insistió que es necesario realizar el trabajo individual, lo que les facilitaría el trabajo en los grupos colaborativos, y que debían tener presente que debían convencer a sus compañeros que lo que hicieron es correcto y lo más adecuado, dos estudiantes presentaron dificultad para resolver el problema debido a dificultades con comprensión lectora, lo que se evidenció en las preguntas que le realizaban al profesor, adicionalmente algunos estudiantes relacionaban la situación con lo que ellos vivieron en el colegio en la elección del concejo estudiantil y no tenían en cuenta la información que le proporcionaba el problema.

Al analizar las respuestas dadas por los estudiantes de forma individual se identificó que todos los estudiantes resolvieron el problema uno y tan solo los estudiantes 06, 08 y 22 lograron trabajar los dos primeros problemas. En el problema uno se identificó que un 68% de los estudiantes se encuentran en nivel alto en interpretación ya que lograron identificar la pregunta “de cuantas formas se puede escoger el presidente y el secretario”, los datos “el concejo estudiantil está formado por un representante de cada curso, existen 14 cursos, se debe elegir un presidente y un secretario”, y los demás en nivel Medio ya que identificaron la pregunta y algunos datos del problema. El 60% de los estudiantes se ubican en nivel medio en la habilidad para explicar ya que lograron construir una posible elección “presidente: Carlos de 9-1, secretario Carlos de 11”, pero no es muy clara la estrategia para resolver el problema. El 50 % de los estudiantes utilizaron la técnica del producto o el espacio muestral (contenido matemático) para resolver el problema lo que indica que se encuentran en nivel medio en la habilidad para justificar y los demás se encuentran en nivel bajo.

Seguidamente se reunieron en los grupos colaborativos que venían trabajando durante 180 minutos, tiempo en el cual discutieron lo que cada uno de los integrantes del grupo había realizado, el profesor les insistió nuevamente que es importante convencer a los demás compañeros que su solución esta correcta y que además él escogería al azar el estudiante que representaría al grupo en la

socialización, por lo que todos los integrantes del grupo se deben apropiarse de lo que hagan para resolver el problema.

Al analizar el trabajo del grupo 04, que en este caso está conformado por dos estudiantes ya que el compañero se enfermó de meningitis por lo que estará ausente el resto del trabajo de la secuencia didáctica, se observó algunos efectos del trabajo colaborativo y su influencia en las habilidades de comunicación, ya que se evidenciaron los componentes:

- **Interdependencia positiva:** El estudiante 13 no participó mucho en la discusión haciendo aportes para resolver el problema, sin embargo estuvo atento a lo que su compañero decía y cuando no entendía le preguntaba, lo que hizo que el estudiante 06 mejorara sus habilidades de comunicación. En el tercer problema la estudiante 13 tomó la voz y empezó a sacar el espacio muestral, el cual iba siendo revisado por el estudiante 06 hasta que lograron ponerse de acuerdo que estaba correcto, lo que implicó que los estudiantes mejoraran su habilidad para justificar.
- **Exigibilidad personal:** El profesor se acercó al grupo y observó el trabajo de los estudiantes y les preguntó “¿Por qué no está 1 con 1?” a lo que el estudiante 06 le contestó “ Porque es el mismo estudiante y no puede ser presidente y secretario al tiempo” el profesor les preguntó “¿Por qué no está el 2 con el 1”, a lo que el estudiante 06 le respondió “porque está el 1 con el 2” , el profesor les dice “entonces es lo mismo que usted sea la presidente y su compañera la secretaria a que su compañera sea la presidente y usted la secretaria”, seguidamente la estudiante 06 dijo “ ya, entonces son 20 porque se pueden también al revés 10 por 2” lo que evidenció que el estudiante mejoró su habilidad para explicar y justificar. Más tarde el profesor se acercó nuevamente al grupo y les preguntó “ ¿podrían saber cuántos son sin sacar el espacio muestral?” a lo que la estudiante 06 le respondió “ si, mire “ y le mostró el espacio muestral y le dijo “ si son 5 salen 4, 3, 2, 1 $10 \times 2 = 20$, si son

7 6, 5, 4, 3, 2, 1 $21 \times 2 = 42$, y si son 14 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 $91 \times 2 = 182$; lo que evidenció que la estudiante mejoró su habilidad para argumentar ya que logró convencer a su grupo y al profesor dando razones y utilizando adecuadamente el lenguaje matemático.

- **Interacción positiva cara a cara:** para escribir una posible elección en el problema uno la estudiante 06 dice “ curso 1, curso 2” a lo que la estudiante 13 dice “mejor grado y curso”, por lo que la estudiante 06 dice “yo pensé curso 1, curso 2, y hasta curso 14, por tanto se puede curso 1, curso 2 o también curso 10, curso 11 como quiera , da lo mismo” a lo que la estudiante 13 dijo “ ah! si, ya “lo que permitió evidenciar su avance en la habilidad para explicar. En otro momento la estudiante 06 le explicó a su compañera como está sacando las opciones, lo que le permitió darse cuenta que se estaba equivocando y de esta manera mejorar su habilidad para explicar.
- **Uso frecuente de sus habilidades interpersonales y de grupo:** El estudiante 06 organizó el trabajo, dio sus respuestas y le preguntó a su compañera las suyas, discutieron hasta lograr ponerse de acuerdo lo que les permitió mejorar sus habilidades para explicar.

En los últimos 60 minutos un representante del grupo escogido por el profesor (diferente a los que ya habían pasado), el estudiante 07 socializó ante sus compañeros lo que su grupo hizo para resolver el primer problema, al contestar las primeras preguntas se evidenció que el grupo se encontraba en nivel alto de interpretación, ya que lograron identificar la pregunta, los datos y variables que le proporcionaba el problema. También se pudo ver que el grupo logró escribir una posible elección (p_1, s_1) al igual que logró plantear una estrategia de solución utilizando el espacio muestral, aunque no logró resolver el problema lo que permitió ver que se encontraban en nivel medio en la habilidad para explicar. Al intentar resolver el problema no lo lograron, ya que se dieron cuenta que eran muchas y no terminaron ni estaban seguros de cuantas les faltaban, lo que implica que ese grupo se encuentra en nivel medio en la habilidad para justificar. El

estudiante 22 logró convencer a sus compañeros que su respuesta era correcta utilizando el espacio muestral y multiplicaciones lo que permitió ver que mejoró su habilidad para argumentar. En el segundo problema el estudiante 02 logró resolver el problema utilizando el espacio muestral y multiplicaciones y le argumentó a sus compañeros de la siguiente manera “cuando son 5 estudiantes se hace $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$, miren ABCP ABCJ, como son 5 la última quedan dos entonces $2 \times 3 = 6$, en la columna B se puede cambiar por las cuatro letras luego $2 \times 3 \times 4 = 24$ y la letra A se puede cambiar por cualquiera de las 5 entonces $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ ” a lo que el profesor le preguntó “¿si son seis funciona?” y el estudiante dijo “claro serian $3 \times 4 \times 5 \times 6 = 360$ ya que al final sobran 3 no dos y se hace el mismo proceso”, lo que permitió ver el avance en la habilidad para argumentar del estudiante. Utilizando la misma estrategia el estudiante 02 le explico a sus compañeros la solución del problema tres así “si son cuatro integrantes seria $4 \times 3 \times 2 = 24$, si son seis personas en la familia seria $6 \times 5 \times 4 = 120$, si fueran siete personas en la familia entonces seria $7 \times 6 \times 5 = 210$ y como el problema dice que son doce seria $12 \times 11 \times 10 = 1320$ y ya”

Por medio de preguntas el profesor concluyó que en este problema el orden importa y que no permite repetición, y les explico el significado de $n!$ “si quiero sacar el factorial de un numero debo multiplicar el número por todos sus antecesores por ejemplo: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ o $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ luego la respuesta del problema anterior se podría representar así $10!/6!$ ”, por tanto la generalización que encontraron es una técnica de conteo que se llama permutación, la cual funciona cuando se da las dos condiciones encontradas, importa el orden y no permite repetición.

5.2.5 Análisis de la quinta sesión. Esta sesión se aplicó el 2 de noviembre del 2016 y tuvo una duración de 2 horas, donde los estudiantes de forma individual desarrollaron los dos problemas planteados en 20 minutos, el profesor les insistió las respuestas deben estar acompañadas con los procedimientos necesarios para

convencer a sus compañeros que su solución es la más adecuada, el estudiante 23 manifestó “hay que pensar mucho y no estoy acostumbrado a eso en clase, casi nunca nos colocan tantos problemas” por lo que no quería trabajar, además ya estaban terminando año y querían salir rápido a vacaciones.

Al analizar las respuestas dadas por los estudiantes de forma individual se identificó que el 68% de los estudiantes no resolvieron ningún problema, los demás resolvieron los dos problemas. En los dos problemas se identificó que un 28% de los estudiantes se encuentran en nivel alto en la habilidad para interpretar ya que lograron identificar la pregunta y los datos que le proporcionaban los problemas. El 8% de los estudiantes se ubican en nivel medio en la habilidad para explicar ya que logran expresar por medio de ejemplos la información que les proporciona el problema, pero no es muy clara la estrategia para resolver el problema. El 16% de los estudiantes utilizaron las técnicas de conteo (contenido matemático) para resolver el problema lo que indica que se encuentran en nivel alto en la habilidad para justificar.

Seguidamente se reunieron en los grupos colaborativos que venían trabajando durante 60 minutos, tiempo en el cual discutieron lo que cada uno de los integrantes del grupo había realizado, cabe destacar que en dos de los grupos se dividieron los problemas para que les rindiera más y luego explicaron lo que habían hecho, lo que no evidenció un verdadero trabajo colaborativo. El profesor les insistió nuevamente que es importante convencer a los demás compañeros que su solución esta correcta y que además él escogería al azar el estudiante que representaría al grupo en la socialización, por lo que todos los integrantes del grupo se deben apropiarse de lo que hagan para resolver el problema.

Al analizar el trabajo del grupo 08, se observó algunos efectos del trabajo colaborativo y su influencia en las habilidades de comunicación, ya que se evidenciaron los componentes:

- **Interdependencia positiva:** El estudiante 11 lee el problema uno y toma apuntes, los tres discuten las dos primeras preguntas y dan la respuesta correctamente, el estudiante 16 dice “que debe comenzar por dos letras y terminar en dos números” a lo que el estudiante 02 dice “si estoy de acuerdo” lo que permitió ver que los estudiantes mejoraron su habilidad de interpretación.
- **Exigibilidad personal:** Al resolver el problema uno el estudiante 16 dice “se utiliza el principio de multiplicación” a lo que el estudiante dos dice “si, por que importa el orden y permite repetir, $27 \times 27 \times 10 \times 10$ son dos letras y dos números” lo que evidenció que mejoró sus habilidad para justificar ya que utilizó contenidos matemáticos (técnicas de conteo, principio de multiplicación) para sustentar sus procedimientos.
- **Interacción positiva cara a cara:** al resolver el problemas dos el estudiante 16 preguntó “¿Por qué se puede repetir?” a lo que el estudiante 02 le dijo “el problema dice que son seis números diferentes” a lo que el estudiante 16 dijo “a claro” lo que le permitió mejorar su interpretación del problema. El estudiante 02 le preguntó al estudiante 16 “¿Por qué son 45×44 ?” a lo que el estudiante le respondió “porque cada uno de los 45 números se puede combinar con los otro 44 ya que con el mismo no se puede” lo que evidenció que logró mejorar sus habilidad para explicar.
- **Uso frecuente de sus habilidades interpersonales y de grupo:** el estudiante 11 tomo la vocería de leer los problemas, tomar apuntes y generar la discusión, lo que les permitió resolver el problema.

En los últimos 40 minutos un representante del grupo escogido por el profesor (diferente a los que ya habían pasado), el estudiante 18 socializó ante sus compañeros lo que su grupo hizo para resolver el primer problema, al contestar las primeras preguntas se evidenció que el grupo se encontraba en nivel alto de interpretación, ya que lograron identificar la pregunta “Cuántos boletos se pueden fabricar”, los datos y variables que le proporcionaba el problema. También se

pudo ver que el grupo logró identificar la regla de construcción al igual que logró plantear una estrategia de solución utilizando el principio de multiplicación como se evidencia cuando el profesor le preguntó “¿Cuántos boletos puede fabricar si fuere una letra y un número?” A lo que él dice “ $27 \times 10 = 270$, ya que se puede repetir las letras o los números e importa el orden ya que el boleto cj13 es diferente al jc13 por ejemplo, por lo que puedo utilizar el principio de multiplicación”, lo que permitió ver que mejoró su habilidad para justificar ya que utilizó contenidos matemáticos (principio de multiplicación) para sustentar sus procedimientos.

El estudiante 03 logró convencer a sus compañeros que su respuesta era correcta utilizando permutaciones como se evidenció en su respuesta “ $P(45,23) = 45! / (45-2)! = 45 \times 44$ ” a lo que el profesor le preguntó “¿Por qué utilizó las permutaciones y no el principio de multiplicación?” a lo que el estudiante respondió “porque importa el orden y no permite repetición” lo que permitió ver que mejoró su habilidad para argumentar.

5.2.6 Análisis de la sexta sesión. Esta sesión se aplicó el 4 y 8 de noviembre del 2016 y tuvo una duración de 3.5 horas, donde los estudiantes de forma individual desarrollaron los tres problemas planteados en 30 minutos, el profesor les insistió que es importante convencer a sus compañeros que su estrategia funciona para resolver el problema y es la más adecuada, el estudiante 20 manifestó “no desayune y tengo hambre, a si no trabajo” y efectivamente no realizó el trabajo individual.

Al analizar las respuestas dadas por los estudiantes de forma individual se identificó que el 60% de los estudiantes resolvieron un problema, el 28% dos problemas y el 12% los tres problemas. En los problemas que cada uno resolvió se identificó que un 96% de los estudiantes se encuentran en nivel alto en la habilidad para interpretar ya que lograron identificar la pregunta y los datos que le

proporcionaban los problemas. El 94% de los estudiantes se ubican en nivel medio en la habilidad para explicar ya que logran expresar por medio de ejemplos la información que les proporciona el problema, pero no es muy clara la estrategia para resolver el problema, ya que plantean algunas estrategias como construir el espacio muestral pero no logran resolver el problema y tan solo el estudiante 02 plantea la estrategia de realizar el espacio muestral, sumas y productos, logrando resolver el problema, lo que nos permitió identificar que se encontraba en nivel alto en la habilidad para explicar y justificar.

Posteriormente se reunieron en los grupos colaborativos que venían trabajando durante 120 minutos, tiempo en el cual cuatro de los grupos discutieron lo que cada uno de los integrantes del grupo había realizado, y los otros solo dos de los integrantes discutieron mientras el otro integrante casi no participó, un integrante del grupo 05 fue a otro grupo a preguntar ya que en el grupo les pareció difícil y no entendían, igualmente en algunos grupos utilizaban las técnicas de conteo trabajadas sin analizar las condiciones, lo que no les permitió resolver el problema correctamente. El profesor les insistió nuevamente que es importante convencer a los demás compañeros que su solución esta correcta y que además él escogería al azar el estudiante que representaría al grupo en la socialización, por lo que todos los integrantes del grupo se deben apropiar de lo que hagan para resolver el problema.

Al analizar el trabajo del grupo 04, se observó algunos efectos del trabajo colaborativo y su influencia en las habilidades de comunicación, ya que se evidenciaron los componentes:

- **Interdependencia positiva:** El estudiante 06 dijo “tenemos que mirar si cumple alguna de las dos condiciones, importa el orden” a lo que el estudiante 13 contestó “no importa” luego la estudiante 06 dijo “tampoco hay repetición verdad” a lo que la estudiante 13 preguntó “¿Por qué?” y el estudiante 06

respondió “porque una opción no es tres veces crónicas de una muerte anunciada, leería el mismo libro” y el estudiante 13 dijo “ a sí” luego el estudiante 06 dijo “entonces no podemos utilizar ninguna de las técnicas de conteo que vimos, hay que utilizar el espacio muestral” lo que evidenció que los estudiantes mejoraron su habilidad para interpretar y explicar.

- **Exigibilidad personal:** El profesor se acercó al grupo y les preguntó “¿les funcionó el método” a lo que el estudiante 06 le dijo “si mire, vamos sacando la de cada uno y las sumamos, con 5 sale una 5,6,7, con el 4 tres puede ir con cada una , luego con 3 cinco , con el 2 diez y con el 1 quince, la sumamos 35 y ya” lo que evidenció que la estudiante mejoró su habilidad para justificar ya que utilizó contenidos matemáticos (espacio muestral y sumas) para sustentar sus procedimientos.

El profesor se acercó nuevamente al grupo y la estudiante 06 le dijo “este problema es igual al anterior, ya que nos están pidiendo grupos de tres y también tenemos cinco sabores” el profesor le preguntó “¿importa el orden?” a lo que le respondió “no importa el orden y tampoco permite repetición” el profesor le dijo “entonces son las mismas condiciones” el estudiante dijo “ si, luego es la misma respuesta” el profesor le dijo “ seria la misma respuesta” el estudiante dijo “ si, ya que nos piden helados de tres sabores y tenemos cinco sabores y en la anterior nos pedían grupos de tres libros y teníamos cinco libros” lo que evidenció una mejoría en la habilidad de interpretar ya que identificó la pregunta, los datos y las variables.

- **Interacción positiva cara a cara:** El estudiante 06 le preguntó “¿Con cinco libros cuántas le salieron?” a lo que la estudiante 13 le respondió “nueve” la estudiante 06 le dijo “no miré” y le mostró el espacio muestral, luego el estudiante 13 dijo “a si me equivoque me faltó 3, 4,5” lo que permitió ver que el estudiante mejoro su habilidad para justificar ya que utilizó contenidos matemáticos (espacio muestral) para sustentar sus procedimientos.

- **Uso frecuente de sus habilidades interpersonales y de grupo:** en el desarrollo de los problemas el estudiante 06 lee el problema, toma apuntes y dirige la discusión, analizando las condiciones orden y repetición, lo que permitió ver que el estudiante mejora su habilidad de interpretación.

En los últimos 60 minutos un representante del grupo escogido por el profesor (diferente a los que ya habían pasado), el estudiante 25 socializó ante sus compañeros lo que su grupo hizo para resolver el primer problema, al contestar las primeras preguntas se evidenció que el grupo se encontraba en nivel alto de interpretación, ya que lograron identificar la pregunta “De cuantas formas puede seleccionar los tres libros”, los datos y variables que le proporcionaba el problema. También se pudo ver que el grupo logró identificar y escribir una selección al igual que logró plantear una estrategia de solución por medio del espacio muestral lo que permitió ver que mejoraron su habilidad para explicar y como utilizó contenidos matemáticos (espacio muestral) para sustentar sus procedimientos evidenció que la habilidad para justificar mejoró.

El profesor por medio de preguntas llevó a los estudiantes a identificar que en los problemas trabajados no importaba el orden y no se permitía repetición, que además la diferencia con la permutación era que en este caso no importaba el orden, por lo cual le iban quitando una en cada columna por lo tanto eso lo podemos escribir como un factorial, entonces el problema se puede resolver como el de permutaciones pero quitándole las que se repiten , quedando entonces $C(N,n) = N!/(N-n)!n!$.

5.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PRUEBA FINAL

El análisis de las soluciones realizadas por los 24 estudiantes de décimo grado a los cuatro problemas propuestos en la prueba final permitió identificar el nivel en que se encuentran los estudiantes respecto a su habilidad para interpretar,

explicar, justificar y argumentar; las estrategias de los estudiantes para resolver problemas de conteo.

En el primer problema 19 (79%) estudiantes lograron resolver el problema y los demás no lograron dar una respuesta correcta. Todos los estudiantes alcanzaron un nivel alto en la habilidad para interpretar ya que identificaron la pregunta, los datos y las variables que proporcionaba el problema, igualmente alcanzaron un nivel alto en la habilidad para explicar ya que pudieron escribir un número con la información del problema y plantear una estrategia de solución. 18 (75%) estudiantes alcanzaron un nivel alto ya que utilizaron contenidos matemáticos (principio de multiplicación) para sustentar los procedimientos que utilizaron para resolver el problema, lo que permite ver que mejoraron su habilidad para justificar.

En el segundo problema 10 (42%) estudiantes resolvieron el problema y los otros no lo lograron. Todos los estudiantes lograron identificar la pregunta, los datos y las variables del problema lo que permite ver que tienen la habilidad para interpretar, 20 (84%) estudiantes lograron ejemplificar la información y plantear una estrategia de solución aunque la mitad de ellos la plantean confusa, lo que evidenció que 10(42%) estudiantes se encuentran en nivel medio, 10(42%) estudiantes en nivel alto y los demás estudiantes en nivel bajo en la habilidad para explicar. En la habilidad para justificar se evidenció que 10(42%) estudiantes se encuentran en nivel alto ya que utilizaron contenidos matemáticos (combinatorias) para sustentar sus procedimientos, y 5(21%) estudiantes en nivel medio ya que lograron identificar que no importaba el orden y no se permite repetición pero utilizaron otra técnica de conteo diferente, los demás estudiantes no utilizaron contenidos matemáticos para sustentar sus procedimientos, lo que nos permitió ver que se encuentran en nivel bajo en la habilidad para justificar.

En el tercer problema ningún estudiante logró resolver el problema correctamente, sin embargo todos los estudiantes lograron identificar la pregunta, los datos y las

variables que le presentaba el problema, por tanto se evidenció que los estudiantes se encuentran en nivel alto en la habilidad para interpretar, 22(92%) estudiante lograron escribir un ejemplo de la información del problema y plantear una estrategia de solución, lo que evidenció que se encontraban en nivel medio en la habilidad para explicar, los otros 2 (8%) estudiantes se encuentran en nivel bajo ya que solo expresaron algunos datos con ejemplos pero no plantearon ninguna estrategia de solución. 15(63%) estudiantes utilizaron contenidos matemáticos (técnicas de conteo, permutaciones) para sustentar sus procedimientos aunque esta técnica no era apropiada, lo que mostró que los estudiantes estaban en nivel medio en la habilidad para justificar y 9(37%) estudiantes no utilizaron ningún contenido matemático para sustentar sus procedimientos, lo que evidenció que se encuentran en nivel bajo en la habilidad para justificar.

En el cuarto problema 12 (50%) estudiantes lograron resolver el problema correctamente y 12 (50%) no lo lograron. 22 (92%) estudiantes lograron identificar la pregunta, los datos y las variables que proporciona el problema, lo que permitió ver que los estudiantes se encuentran en nivel alto en interpretación, y tan solo 2(8%) estudiantes solo lograron identificar algunos datos del problema , lo que evidenció que se encuentran en nivel bajo en la habilidad para interpretar. 19 (79%) estudiantes lograron ejemplificar la información que proporcionaba el problema y plantear una estrategia de solución lo que los ubicó en el nivel alto en la habilidad para explicar y los otros 5(21%) estudiantes tan solo lograron ejemplificar los datos del problema y no plantearon una estrategia de solución lo que los ubicó en el nivel medio. 12(50%) estudiantes lograron sustentar los procedimientos que utilizaron para resolver el problema por medio de contenidos matemáticos (técnicas de conteo permutación) lo que evidenció que mejoraron su habilidad para justificar quedando en el nivel alto.

En la socialización de los problemas al grupo se logró ver que 5 (21%) estudiantes lograron convencer a sus compañeros que su soluciones eran correctas y su

estrategia la más adecuada utilizando las técnicas de conteo apropiadas y justificando su utilización utilizando un lenguaje matemático, por lo que se ubicaron en nivel alto. Otros 7(29%) estudiantes se ubicaron en nivel medio ya que convencieron a sus compañeros de grupo colaborativo que su estrategia era la más adecuada y que su solución era correcta, puesto que utilizado alguna técnica de conteo y los demás no lograron convencer a sus compañeros que su solución era la más adecuada, ubicándolos en nivel bajo.

Al comparar los la clasificación de los estudiantes por niveles de habilidad en cada uno de las habilidades obtenidos en la prueba diagnóstica y la prueba final se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 11. Comparación de los niveles de habilidad de la prueba diagnóstica y la prueba final en la habilidad para interpretar problemas de conteo.

Nivel	Prueba diagnóstica		Prueba final	
	Número de estudiantes	Porcentaje	Número de estudiantes	Porcentaje
Alto	2	8	24	100
Medio	15	60	0	0
Bajo	8	32	0	0

Tabla 12. Comparación de los niveles de habilidad de la prueba diagnóstica y la prueba final en la habilidad para explicar problemas de conteo.

Nivel	Prueba diagnostica		Prueba final	
	Número de estudiantes	Porcentaje	Número de estudiantes	Porcentaje
Alto	4	16	13	54
Medio	9	36	9	38
Bajo	12	48	2	8

Tabla 13. Comparación de los niveles de habilidad de la prueba diagnóstica y la prueba final en la habilidad para justificar problemas de conteo.

Nivel	Prueba diagnostica		Prueba final	
	Número de estudiantes	Porcentaje	Número de estudiantes	Porcentaje
Alto	5	20	10	42
Medio	3	12	7	29
Bajo	17	68	7	29

Tabla 14. Comparación de los niveles de habilidad de la prueba diagnóstica y la prueba final en la habilidad para argumentar problemas de conteo.

Nivel	Prueba diagnostica		Prueba final	
	Número de estudiantes	Porcentaje	Número de estudiantes	Porcentaje
Alto	1	4	5	21
Medio	4	16	7	29
Bajo	20	80	12	50

Lo que permitió ver que al implementar el trabajo colaborativo como estrategia didáctica la mitad de los estudiantes logró resolver los problemas planteados, al final todos los estudiantes lograron un nivel alto en la habilidad para interpretar, ya que un 42% de los estudiantes mejoraron su nivel en la habilidad para explicar, un 39% mejoraron la habilidad para justificar, y un 30% mejoro la habilidad para argumentar, lo que evidencia que la estrategia implementada incidió en el mejoramiento de las habilidades del proceso de comunicación de algunos estudiantes, unos más que otros.

6. CONCLUSIONES

- Las principales dificultades que se identificaron en los estudiantes de décimo grado en el proceso de comunicación en la resolución de problemas matemáticos son las siguientes:

En la habilidad para interpretar: La mayoría de los estudiantes no logran identificar todos los datos y variables que le proporciona el problema e identifican la pregunta pero no la comprenden.

En la habilidad para explicar: Un porcentaje significativo de los estudiantes no logran expresar con sus palabras la información que le proporciona el problema, ni plantean una estrategia de solución clara.

En la habilidad para justificar: La mayoría de los estudiantes no utilizan contenidos matemáticos para sustentar los procedimientos utilizados para resolver los problemas.

En la habilidad para argumentar: La mayoría de los estudiantes no logran convencer a sus compañeros que su estrategia de solución del problema es la más adecuada, ya que solo se limitan a decir que ellos tiene la razón y ya, o aceptan que sus compañeros la tienen.

- La estrategia implementada “Trabajo colaborativo” incidió en que algunos estudiantes lograran avanzar en el fortalecimiento de sus habilidades (interpretar, explicar, justificar y argumentar) del proceso de comunicación, como se evidencia al revisar cada componentes que tiene el trabajo colaborativo:

Interdependencia positiva: La que motivó a la participación activa de los tres integrantes del grupo en la resolución de los problemas, discutiendo sobre la información que le proporciona el problema, los ejemplos y las estrategias de solución, lo que les permitió potenciar sus habilidades de interpretar, explicar y justificar, sin embargo en la mayoría de los grupos no se logró completamente ya que uno de los integrantes poco participó en las discusiones.

Exigibilidad personal: En la cual el profesor le realizó preguntas a cada estudiante sobre la información del problema o las estrategias que están utilizando, llevándolos a utilizar contenidos matemáticos para sustentar sus procedimientos, permitiendo que los estudiantes mejoren su habilidad para justificar, igualmente los estudiantes trataron de convencer a sus compañeros o al profesor que su idea era correcta y adecuada , utilizando contenidos matemáticos, lo que hizo que mejoraran su habilidad para argumentar. Debido que un estudiante escogido al azar fue el responsable de exponer ante sus compañeros el trabajo realizado en el grupo, los estudiantes que poco participaban o aportaban a la solución de los problemas, al finalizar les pedían a sus compañeros que les explicaran lo que habían hecho, lo que fortaleció la habilidad para explicar y justificar sus compañeros.

Interacción positiva cara a cara: La que generó discusión entre ellos, donde uno de los estudiantes lograba convencer al otro que estaba equivocado por medio de contenidos matemáticos (espacio muestral, técnica de conteo, productos), lo que fortaleció su habilidad para justificar y argumentar, igualmente uno de los estudiantes del grupo le enseñó a su compañero como construir el espacio muestral o encontrarlo realizando multiplicaciones, lo que le permitió fortalecer su habilidad para explicar y justificar.

Uso frecuente de habilidades interpersonales y de grupo: En la mayoría de los grupos uno de los estudiantes toma la vocería, lee el problema, toma apuntes,

presenta su punto de vista y dirige las decisiones, toman decisiones relacionadas con, el orden y la permite, lo que les permitió fortalecer su habilidad para interpretar, cabe destacar que no siempre fue el mismo estudiante. Igualmente al contrastar los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica y la prueba final se evidencia que los estudiantes lograron mejorar el nivel en las habilidades especialmente en la habilidad para interpretar, explicar y justificar.

- El trabajo colaborativo propicio que los estudiantes se involucren más en su proceso de aprendizaje de las matemáticas, logrando que un grupo significativo de estudiantes se apropiará de las técnicas de conteo y las aplicara en la resolución de problemas relacionados con el pensamiento aleatorio.
- El trabajo bajo el enfoque de resolución de problemas realizado en la propuesta causo choque en un principio, sin embargo al finalizar fue aceptado por algunos de los estudiantes, generando en ellos satisfacción de lograr construir por si mismos los conceptos matemáticos trabajados

7. RECOMENDACIONES

- La estrategia del trabajo colaborativo, no es acogida fácilmente por los estudiantes, es por esto que se debe implementar en el proceso de enseñanza de las matemáticas de manera constante, con el fin de que los estudiantes se apropien de cada uno de los componentes, permitiéndoles fortalecer el aprendizaje de las matemáticas.
- Cuando se constituyan grupos colaborativos se debe tener presente las habilidades interpersonales y de grupo, al igual que las competencias matemáticas de los estudiantes, con el fin de que todos los estudiantes puedan realizar variedad de aportes durante su trabajo con el grupo colaborativo.
- Cada vez que se termine una actividad realizada con la estrategia del trabajo colaborativo, es necesario que el grupo colaborativo realice un autoanálisis, con el fin de que identifiquen sus fortalezas, debilidades y puedan plantear una propuesta de mejora, con el fin de que su próximo trabajo se más eficiente.
- El trabajo bajo el enfoque de resolución de problemas es necesariamente un proceso, este no se logra de un momento a otro, es por esto que se debe implementar desde el preescolar hasta la media vocacional, para poder generar en los estudiantes su aceptación y aprovechamiento en su proceso de aprendizaje de las matemáticas.

BIBLIOGRAFIA

ALBERICH, Tomás. IAP, Redes y Mapas Sociales: Desde la Investigación a la Intervención Social, Portularia, Universidad de Huelva, 2008.

ALDANA YARLEQUÉ, Cristhian. Trabajo colaborativo en el área de Matemáticas [en línea]. En: Revista sobre Docencia Universitaria, Vol. 3, Núm. 1, 2012. [Citado 8 abr 2016]. Disponible en Internet: <URL:<http://revistas.pucp.edu.pe/index.php/enblancoynegro/article/view/2889/2815>>.

AREA, M. Unidad didáctica e investigación en el aula. Las palmas de gran canarias, 1993.

BLAIKIE, N.W.H. A Critique of the use of triangulation in social research, Quality and Quantity, 1996.

BROUSSEAU, G. Educación y didáctica de las matemáticas. México, 1999.

BULA, Gustavo Alfredo. Aprendizaje de conceptos de la teoría de probabilidad a través del aprendizaje colaborativo [en línea]. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2004 [Citado 28 abr 2016]. Disponible en Internet: <URL: http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/pags/cat/popup/pa_detalle_matbib.jsp?parametros=131252|8|11>.

COLOMBIA. CONGRESO DE LA REPUBLICA. Ley 115 de 1994: Ley General de educación. Diario Oficial No. 41.214 de 8 de febrero de 1994. Artículo 7.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá, Colombia. 2006.

DÍAZ BARRIGA, Ángel. Secuencias de aprendizaje. ¿Un problema del enfoque de competencias o un reencuentro con perspectivas didácticas?. México. 2013.

DURANGO, J. PARRA, M TORO, J. ZAPATA, M. Contextos de descubrimiento y justificación en la clase de matemáticas. Revista virtual Universidad Católica del Norte. 2010.

DUVAL, R. Gráficas y ecuaciones. La articulación de dos registros. 1999.

ELLIOT, Jhon. “El cambio educativo desde la investigación – acción”. Madrid: Morata, 1991.

FERNÁNDEZ MARRCH, A. La evaluación orientada al aprendizaje en un modelo de formación por competencias en la educación universitaria. Revista de docencia universitaria, 2010.

GARCÍA, F. Recomendaciones metodológicas para el diseño de cuestionario. México, 2002.

ICFES. Reportes de Jornada Entidad Territorial, Pruebas Saber 3, 5 y 9 [en línea]. 2016. [Citado 15 abr 2016]. Disponible en Internet: <URL: <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEntidadTerritorial.aspx>>.

_____. Reportes de Jornada Pruebas Saber 3, 5, y 9 [en línea]. 2016 [Citado 15 abr 2016]. Disponible en Internet: <URL: <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteSedeJornada.aspx>>.

JOHNSON, David. JOHNSON, Roger. El aprendizaje cooperativo en el aula. Buenos Aires. Editorial Paidós, 1999.

LEAL ACEVEDO, Yudy Milena. Ambiente virtual de aprendizaje en el área de matemáticas en modelo flexible postprimaria grados sexto y séptimo, para fortalecer el trabajo colaborativo [en línea]. En: Revista Virtual Universidad Católica del Norte, núm. 46, septiembre-diciembre, 2015, p.47-59. Fundación Universitaria Católica del Norte. Medellín, Colombia [Citado 18 abr 2016]. Disponible en Internet: <URL: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=194242285005>>.

MARTINO, Massiell, investigación cualitativa según Sampieri, Collado y Lucio, 2012.

MCKERMAN, J. Investigación – acción y curriculum. Madrid: Morata, 1996.

MCKERMAN, J. Investigación – acción y curriculum. Madrid: Morata, 1996.

MONTENEGRO, E. Modelo para la estructuración y formación de habilidades lógicas a través del análisis matemático. Editorial Académica Española, 2012.

National Council of Teachers of Mathematics, NCTM. Resumen Ejecutivo: Principios y Estándares para la Educación Matemática [en línea]. 2000. [Citado 20 abr 2016]. Disponible en Internet:http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/archivos/RE_NCTM.pdf

NIÑO ROJAS, V. M. Competencias en la comunicación. Hacia las prácticas del discurso. Bogotá, Colombia. Ecoe ediciones. 2005.

ORDUZ SANDOVAL, Doris Liliana. Comunicación en el aula una experiencia desde matemáticas [en línea]. Universidad de la sabana, Facultad de Educación, Tesis Especialización en Pedagogía e Investigación en el Aula [Citado 20 abr 2016]. Disponible en Internet: <URL: <http://intellectum.unisabana.edu.co/bitstream/>

handle/10818/11671/Doris%20Liliana%20Orduz%20Sandoval%20(tesis).pdf?sequence=1>

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos OCDE. El programa PISA de la OCDE, Qué es y para qué sirve [en línea]. Paris: OCDE. [Citado 20 abr 2016]. Disponible en Internet: <http://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf>

PERELMAN, C. y OLBRECH-TYLECA, L. Tratado de argumentación. Barcelona, España, 1988.

POLYA, Georges. Como plantear y resolver problemas. México. Editorial Trillas, 1965.

PRIETO CALVO, Cristina; RODRÍGUEZ PUEBLA, Concepción; HERNÁNDEZ ENCINA, Ascensión; Y QUEIRUGA DIOS, Araceli. Experiencias docentes de trabajo colaborativo en distintas áreas de ciencias [en línea]. En: Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información, vol. 12, núm. 4. Universidad de Salamanca. Salamanca, España, 2011, p. 133-146. [Citado 2 may 2016]. Disponible en Internet: <URL: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=201022649009>>

PRIETO CALVO, Cristina; RODRÍGUEZ PUEBLA, Concepción; HERNÁNDEZ ENCINA, Ascensión; Y QUEIRUGA DIOS, Araceli. Experiencias docentes de trabajo colaborativo en distintas áreas de ciencias [en línea]. En: Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información, vol. 12, núm. 4, 2011, p. 133-146. Universidad de Salamanca. Salamanca, España [Citado 2 may 2016]. Disponible en Internet: <URL: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=201022649009>>

QUINTANILLA PINILLA, Edgar. El trabajo colaborativo como pilar estratégico de la educación en los niveles introductorio de la Universidad Industrial de Santander [en línea]. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2007. [Citado 3 may 2016] Disponible en Internet: <URL:http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/pags/cat/popup/pa_detalle_matbib.jsp?parametros=143839|2|3>.

SANTOS, Luis Manuel. Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. México. D.C. Ed. Ibero América, 1997.

SCARDAMALIA, M. y BEREITER, C. Two models of classroom learning using a communal database citado por BERMEJO, María; PALENCIA, Cruz y JOSÉ, M. Diseño de un modelo tecnológico para el aprendizaje de lengua castellana: un ejemplo práctico[en línea]. En Didáctica. Lengua y Literatura, 2003, vol. 15, p. 40. [Citado 2 may 2016]. Disponible en Internet: <http://revistas.ucm.es/index.php/DIDA/article/view/DIDA0303110037A/19400>

VALDERRAMA MORENO, Judy Amparo. El trabajo colaborativo, una estrategia para aprender matemáticas [en línea]. Fitec, Vol. 2, No. 2, 2012. [Citado 20 abr 2016]. Disponible en Internet: <URL: <http://www.fitecvirtual.org/ojs-2.3.6/index.php/FITEC/article/view/77>>.

VÁSQUEZ GÓMEZ, Norberto Alejandro. ¿Qué nuevas estrategias puedo implementar como docente de matemáticas para mejorar el bajo rendimiento de los alumnos de sexto grado del Colegio Luis López de Mesa en el área? (Tesis Especialización en pedagogía e investigación en el aula) [en línea]. Universidad de la Sabana, Facultad de Educación. Bogotá, 2014. [Citado 20 abr 2016]. Disponible en Internet: <URL:<http://intellectum.unisabana.edu.co/bitstream/handle/10818/11663/Norberto%20Alejandro%20Vasquez%20Gomez%20%28tesis%29.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>.

VÁSQUEZ GÓMEZ, Norberto Alejandro. ¿Qué nuevas estrategias puedo implementar como docente de matemáticas para mejorar el bajo rendimiento de los estudiantes de sexto grado del Colegio Luis López de Mesa en el área? [en línea]. Universidad de la Sabana, Facultad de Educación, Tesis Especialización en pedagogía e investigación en el aula, Bogotá, 2014 [Citado 20 abr 2016]. Disponible en Internet: <URL:<http://intellectum.unisabana.edu.co/bitstream/handle/10818/11663/Norberto%20Alejandro%20Vasquez%20Gomez%20%28tesis%29.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>.

ZABALA VIDIELLA, Antoni. La práctica educativa. Como enseñar, México, 2008.

ANEXOS

ANEXO A. RÚBRICA

Nivel Habilidad	Alto	Medio	Bajo
Interpretar	Identifica la pregunta, los datos y las variables que proporciona el problema y las relaciones existentes entre ellas, teniendo en cuenta el contexto y sus experiencias previas.	Identifica la pregunta y algunos datos y variables que proporciona el problema, teniendo en cuenta el contexto y sus experiencias previas.	Identifica algunos datos que proporciona el problema, teniendo en cuenta el contexto y sus experiencias previas.
Explicar	Expresa con sus palabras o por medio de ejemplos la información que proporciona el problema y las estrategias para resolverlo.	Expresa con sus palabras o por medio de ejemplos alguna información que proporciona el problema y plantea alguna estrategia para resolverlo.	Expresa con sus palabras o por medio de ejemplos alguna información que proporciona el problema.
Justificar	Utiliza contenidos matemáticos para sustentar los procedimientos y las ideas que utiliza para resolver el problema.	Utiliza contenidos matemáticos para sustentar algunos procedimientos y algunas ideas que utiliza para resolver el problema.	No utiliza contenidos matemáticos para sustentar los procedimientos y las ideas que utiliza para resolver el problema.
Argumentar	Convince o persuade a sus compañeros que su estrategia de solución del problema es la más adecuada, dando razones y utilizando adecuadamente el lenguaje matemático.	Convince o persuade a sus compañeros que su estrategia de solución del problema es la más adecuada, dando razones.	No logra Convencer o persuadir a sus compañeros que su estrategia de solución del problema es la más adecuada.



ANEXO B. CONSENTIMIENTO INFORMADO

COLEGIO INTEGRADO LLANO GRANDE

Consentimiento Informado



Institución educativa: Colegio Integrado Llano Grande.

Código Dane: 268307000540

Municipio: San Juan Girón.

Docente Investigador: Jorge Ernesto Angarita Ballesteros.

C.C: 91.391.221 de Barichara.

Yo _____ mayor de edad, () madre, () Padre o () representante legal del estudiante, _____ de _____ años de edad, he sido informado(a) acerca de la participación en la investigación correspondiente al proyecto “el trabajo colaborativo como estrategia didáctica para potenciar el proceso de comunicación en la resolución de problemas” el cual se requiere para que el profesor de mi hijo(a) culmine los estudios de Maestría, que realiza con la Universidad Industrial de Santander. Luego de haber sido informado(a) sobre las condiciones de la participación de mi hijo(a) en la investigación, resuelto todas las inquietudes y comprendido en su totalidad la información sobre esta actividad, entiendo que:

- La participación de mi hijo(a) en la investigación no generará ningún gasto, ni recibiremos remuneración alguna por su participación.
- No habrá ninguna sanción para mi hijo(a) en caso de que no autoricemos su participación.
- La identidad de mi hijo(a) no será publicada y las imágenes y sonidos registrados en las grabación se utilizarán únicamente para fines investigativos.

Atendiendo a la normatividad vigente sobre consentimientos informados, y de forma consciente y voluntaria () Doy el consentimiento () NO Doy

el consentimiento, para la participación de mi hijo (a) en la investigación del docente en las instalaciones de la Institución Educativa donde estudia.

Ciudad y fecha: _____

Nombre del Padre:

C.C. #:

Nombre de la Madre:

C.C. #:

Nombre del representante legal

C.C. #:



COLEGIO INTEGRADO LLANO GRANDE

Consentimiento Informado



Institución educativa: Colegio Integrado Llano Grande.
Código Dane: 268307000540
Municipio: San Juan Girón.
Docente Investigador: Jorge Ernesto Angarita Ballesteros.
C.C: 91.391.221 de Barichara.

Yo Nagda Leonor Araque mayor de edad, (X) madre, () Padre o () representante legal del estudiante, Yulieth Zuley Gonzalez Araque de 15 años de edad, he sido informado(a) acerca de la participación en la investigación correspondiente al proyecto "el trabajo colaborativo como estrategia didáctica para potenciar el proceso de comunicación en la resolución de problemas" el cual se requiere para que el profesor de mi hijo(a) culmine los estudios de Maestría, que realiza con la Universidad Industrial de Santander.

Luego de haber sido informado(a) sobre las condiciones de la participación de mi hijo(a) en la investigación, resuelto todas las inquietudes y comprendido en su totalidad la información sobre esta actividad, entiendo que:

La participación de mi hijo(a) en la investigación no generará ningún gasto, ni recibiremos remuneración alguna por su participación.

No habrá ninguna sanción para mi hijo(a) en caso de que no autoricemos su participación.

La identidad de mi hijo(a) no será publicada y las imágenes y sonidos registrados en las grabación se utilizarán únicamente para fines investigativos.

Atendiendo a la normatividad vigente sobre consentimientos informados, y de forma consciente y voluntaria (X) Doy el consentimiento () NO Doy el consentimiento, para la participación de mi hijo (a) en la investigación del docente en las instalaciones de la Institución Educativa donde estudia.

Ciudad y fecha: Girón 10 de octubre de 2016

Nombre del Padre:
C.C. #:

Nagda Araque
Nombre de la Madre: Nagda Leonor Araque
C.C. #: 63.498.466

Nombre del representante legal
C.C. #:



ANEXO C. PRUEBA DIAGNOSTICA
COLEGIO INTEGRADO LLANO GRANDE
Prueba diagnóstica



Docente: Jorge Ernesto Angarita B.

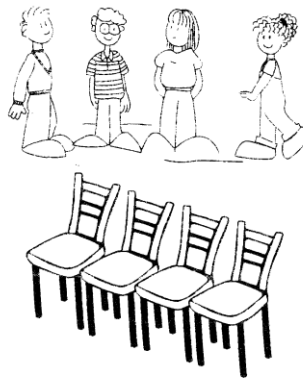
Grado: Décimo

Estudiante: _____

Apreciados Estudiantes: El presente taller tiene como finalidad conocer las habilidades que usted tiene para resolver problemas, dele rienda suelta a su creatividad.

Agradecemos de antemano su disposición y colaboración, sus respuestas solo se usarán con fines investigativos.

Problema 1. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse Tatiana, Natalia, Andrés y Jeiber en la primera fila del salón, si se sabe que la fila tiene 4 sillas?



- ¿Qué información le proporciona el problema?, y ¿Qué información desconoce? ¿Existe alguna relación entre los datos conocidos y los datos desconocidos?
- Escriba lo que piensa hacer para resolver el problema. (Recuerde que puede existir más de un camino y que puede usar las estrategias utilizadas en problemas similares)

- c. Realice lo que pensó y de la respuesta (puede usar procesos o definiciones matemáticas).
- d. Escriba las razones que considere necesarias para convencer a otro compañero que su solución es correcta y la más adecuada (puedes incluso encontrar otra solución u otro camino de solución).

Problema 2. En cierto país hay varios aeropuertos. Una aerolínea ofrece diariamente vuelos directos que conectan cualesquiera dos aeropuertos. Cada día la aerolínea realiza 30 vuelos ¿cuántos aeropuertos hay?

- a. ¿Qué información le proporciona el problema?, y ¿Qué información desconoce? ¿Existe alguna relación entre los datos conocidos y los datos desconocidos?
- b. Escriba lo que piensa hacer para resolver el problema. (Recuerde que puede existir más de un camino y que puede usar las estrategias utilizadas en problemas similares)
- c. Realice lo que pensó y de la respuesta (puede usar procesos o definiciones matemáticas).
- d. Escriba las razones que considere necesarias para convencer a otro compañero que su solución es correcta y la más adecuada (puedes incluso encontrar otra solución u otro camino de solución).

Problema 3. En una alcancía hay cinco monedas de \$500, tres monedas de \$200, cuatro monedas de \$100 y una moneda de \$1000. Si sacamos dos monedas al azar ¿Qué es más probable que saque más de \$1000 o menos de \$1000?

- a. ¿Qué información le proporciona el problema?, y ¿Qué información desconoce? ¿Existe alguna relación entre los datos conocidos y los datos desconocidos?

- b. Escriba lo que piensa hacer para resolver el problema. (Recuerde que puede existir más de un camino y que puede usar las estrategias utilizadas en problemas similares)
- c. Realice lo que pensó y de la respuesta (puede usar procesos o definiciones matemáticas).
- d. Escriba las razones que considere necesarias para convencer a otro compañero que su solución es correcta y la más adecuada (puedes incluso encontrar otra solución u otro camino de solución).

ANEXO D. CATEGORIZACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONTEO.

Prueba diagnóstica aplicada a 25 estudiantes de décimo grado de un colegio público del municipio de Girón Santander.

Pregunta: Escriba lo que piensa hacer para resolver el problema.

Código	Respuesta
E23 Intercambiar	Empezar a sacarlos corriendo uno por uno y empezar a combinar.
E07 Códigos	Escribir el nombre de cada uno de los estudiantes para luego colocarlos en la silla de diferentes formas y así saber las respuestas.
E02 E. M	Pues yo pienso realizar variables o sea las formas en que ellos se pueden sentar y contarlas para saber cuántas formas diferentes hay.
E13 Intercambiar	Enumerar las sillas, sentar a los chicos, ir cambiándolos de sillas y sacar el resultado.
E17 N.C	Pues si se puede, se coloca cada niño en una silla, pues creo que lo que se debe hacer es una silla.
E03 Grafico	Hacer un gráfico con los datos y así poder solucionar el problema.
E18 Intercambiar	Pues lo primero que debemos realizar es unir la cantidad de sillas con la cantidad de personas y luego realizar algunos intercambios hasta encontrar una gran probabilidad entre las personas y las sillas.
E01 N.C	Multipliación
E05 Tablas	Enumerar las sillas y hacer una tabla y poner los datos de este modo y que no se repitan los datos en una misma fila.(1, t, n, j, a)
E09 Tablas	Ubicar a Jeiber, Andrés, Tatiana y Nathalia en diferentes sillas de la forma más ordenada para hacerlo es ubicándolo en una tabla.
E06 Códigos	Lo que pienso hacer es enumerar los niños luego ubicar de las maneras que sea posible los números.
E15 Ordenar	Hacer un orden como la probabilidad por ejemplo Tatiana, Nathalia, Andrés, Jeiber. Y así sucesivamente hasta que ya no haya más opciones y estén todas.
E04 N.C	Ordenando de manera que en la fila quede ordenado sin que quede en desorden.
E11 Códigos	Pues ir colocando por las iniciales de los nombres de cada estudiante hasta que cada silla tenga las iniciales de los cuatro u otra forma sería resolverlo por lógica como hay 4 estudiantes y 4 sillas ya se saben cuántas formas hay para sentarse.
E20 N.C	Encontrar posibles resultados para que los niños se sienten.
E16 E. M	Sacando todos los resultados y en el orden en el que se pueden sentar los niños.
E24 N.C	Se pueden ordenar en orden alfabético o de mayor a menor, pero esa información no la sabemos o primero de las damas.
E25	Hacer las soluciones de un tema anterior que vimos de ordenar por filas o columnas

Ordenar	como se podrían sentar los estudiantes, por ejemplo JE, AI, NA, DA y así hasta saber las diferentes maneras que se pueden sentar.
E14 Suma	Una suma primero miré de cuantas formas diferentes se podría sentar Tatiana luego seguí el mismo procedimiento con las tres.
E19 Intercambiar	Pues pienso acomodar a cada niño de manera distintas varias veces sin repetir lugar.
E10 N.C	Los estudiantes se pueden sentar de varias formas, puede ser de lado o normal o sea derecho y a revés.
E12 Suma	Yo hice una suma, cogí las cuatro sillas y las cuatro personas y cada persona la fui rotando por cada silla
E21 N.C	Sacar todas las probabilidades posibles.
E22 N.C	Hacer un ejercicio de probabilidad donde puedo ubicar de varias formas en las cuatro sillas a las cuatro personas.
E08 E. M	Sacando el espacio maestral. Hacer una multiplicación en la cual se multiplica la cantidad de veces que hay para sentarse por cada individuo por la cantidad de puestos que hay.

	Intercambiar
	Códigos
	Tablas
	Espacio muestral
	Ordenar
	Grafico
	Suma
	No corresponde

Estrategias del estudiante para resolver un problema de conteo.

Visualización de intercambios

1. Los estudiantes para resolver el problema ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse Tatiana, Natalia, Andrés y Jeiber en la primera fila del salón, si se sabe que la fila tiene 4 sillas?, piensan hacer intercambios, “Pues lo primero que debemos realizar es unir la cantidad de sillas con la cantidad de personas y luego realizar algunos intercambios hasta encontrar una gran probabilidad entre las personas y las sillas”, “acomodar a cada niño de manera distintas varias veces sin repetir lugar”, “sentar a los chicos, ir cambiándolos de sillas y sacar el resultado”, “corriendo uno por uno y empezar a combinar”.

Se observa en este primer acercamiento que los estudiantes conciben una idea intuitiva de acercarse a la solución del problema realizándolo de manera concreta.

Asignación de códigos

2. **Los** estudiantes para resolver el problema ¿De cuantas maneras diferentes pueden sentarse Tatiana, Natalia, Andrés y Jeiber en la primera fila del salón, si se sabe que la fila tiene 4 sillas?, piensan asignar códigos a los elementos que intervienen en el problema, “Escribir el nombre de cada uno de los estudiantes para luego colocarlos en la silla de diferentes formas y así saber las respuestas”, “enumerar los niños luego ubicar de las maneras que sea posible los números”, “ir colocando por las iniciales de los nombres de cada alumno hasta que cada silla tenga las iniciales de los cuatro”

Se observa que los estudiantes utilizan asignación de códigos y con estos realizar los intercambios para encontrar la solución del problema.

Utilización de tablas

3. **Los** estudiantes para resolver el problema ¿De cuantas maneras diferentes pueden sentarse Tatiana, Natalia, Andrés y Jeiber en la primera fila del salón, si se sabe que la fila tiene 4 sillas?, piensan utilizar tablas, “Enumerar las sillas y hacer una tabla y poner los datos de este modo (t, n, j, a) y que no se repitan los datos en una misma fila”, “Ubicar a Jeiber, Andrés, Tatiana y Nathalia en diferentes sillas de la forma más ordenada para hacerlo es ubicándolo en una tabla”

Se observa que los estudiantes utilizan representaciones para resolver el problema.

Construir el espacio muestral

4. **Los** estudiantes para resolver el problema ¿De cuantas maneras diferentes pueden sentarse Tatiana, Natalia, Andrés y Jeiber en la primera fila del salón, si se sabe que la fila tiene 4 sillas?, piensan construir el espacio muestral, “Sacando el espacio maestral. Hacer una multiplicación en la cual se multiplica la cantidad de veces que hay para sentarse por cada individuo por la cantidad de puestos que hay”, “Sacando todos los resultados y en el orden en el que se pueden sentar los

niños” o “realizar variables o sea las formas en que ellos se pueden sentar y contarlas para saber cuántas formas diferentes hay”

Se puede evidenciar que los estudiantes construyen el espacio muestral para resolver el problema.

Seguir un orden

5. **Los** estudiantes para resolver el problema ¿De cuantas maneras diferentes pueden sentarse Tatiana, Natalia, Andrés y Jeiber en la primera fila del salón, si se sabe que la fila tiene 4 sillas?, piensan seguir un orden “Hacer las soluciones de un tema anterior que vimos de ordenar por filas o columnas como se podrían sentar los estudiantes, por ejemplo JE, AI, NA, DA y así hasta saber las diferentes maneras que se pueden sentar”, al igual que “Hacer un orden como la probabilidad por ejemplo Tatiana, Nathalia, Andrés, Jeiber. Y así sucesivamente hasta que ya no haya más opciones y estén todas”

Se puede observar que los estudiantes siguen un orden para sacar las posibles opciones y de esta forma estar seguros que las encontraron todas.

Construir gráficos

6. **Los** estudiantes para resolver el problema ¿De cuantas maneras diferentes pueden sentarse Tatiana, Natalia, Andrés y Jeiber en la primera fila del salón, si se sabe que la fila tiene 4 sillas?, piensan construir gráficos, “hacer un gráfico con los datos y así poder solucionar el problema”

Se observa que un estudiante opta por construir un gráfico como herramienta para visualizar las opciones y de esta manera resolver el problema.

Sumar eventos

Los estudiantes para resolver el problema ¿De cuantas maneras diferentes pueden sentarse Tatiana, Natalia, Andrés y Jeiber en la primera fila del salón, si se sabe que la fila tiene 4 sillas?, piensan encontrar las opciones que tiene un estudiante y luego sumarlas, “Una suma primero miré de cuantas formas

diferentes se podría sentar Tatiana luego seguí el mismo procedimiento con las tres” o “Yo hice una suma, cogí las cuatro sillas y las cuatro personas y cada persona la fui rotando por cada silla”.

Se observa que los estudiantes descomponen el problema y luego plantean una suma para encontrar la solución del problema.

Código	Codificación axial	Codificación selectiva
Intercambiar	Visualización de intercambios	Las representaciones como estrategia para la resolución de problemas de conteo.
Códigos	Asignación de códigos	
Tablas	Utilización de tablas	
Grafico	Construir gráficos	
Espacio muestral	Construir el espacio muestral	El espacio muestral como estrategia para la resolución de problemas de conteo.
Ordenar	Seguir un orden	
Suma	Sumar eventos	

ANEXO E. CATEGORIZACIÓN DE LAS RAZONES PARA CONVENCER A OTRO COMPAÑERO QUE SU SOLUCIÓN ES CORRECTA Y LA MÁS ADECUADA

Prueba diagnóstica aplicada a 25 estudiantes de décimo grado de un colegio público del municipio de Girón Santander.

Pregunta: Escriba las razones que considere necesarias.

Código	Respuesta
E17 N. C	Pues si mi compañero lo hizo diferente no la puedo convencer a lo que yo hice.
E13 Fácil	Pues es un proceso un poquito largo y fácil para poder solucionarlo, porque me pareció más fácil, y por último creo que está bien.
E02 Relatar	Pues porque así podemos ver todas las formas que ellos se pueden sentar y después contarlas y así estar cien por ciento seguros de las formas que se pueden sentar.
E07 Relatar	Pues que realice una especie de tabla donde horizontalmente no se repitan los nombres así se puede encontrar una respuesta fácilmente.
E23 Diálogo	Pues que lo hagamos juntos para que se dé cuenta de las combinaciones que se han hecho con cada posición.
E08 Relatar	Porque de esta manera se comprueba usando el espacio muestral y después sabemos cuántos puestos tenemos así que solo nos queda multiplicarlos por estos.
E22 Relatar	Pues mi solución es correcta ya que estoy ubicando claramente y de forma ordenada todas las personas en cada silla y en ningún momento se repite la persona en la silla.
E21 Relatar	Pues creo que es correcto porque una de las formas para resolverlo es la probabilidad, saque todas las probabilidades posibles y conté cuantas probabilidades eran posibles.
E12 Fácil	Que es muy fácil de la forma que lo hice porque es más entendible para unos compañeros porque también rote a los dibujos por cada silla y encontré la respuesta.
E10 N. C	Por ejemplo todos se sentarían de una misma manera de lado a lado hacia delante o hacia atrás.
E19 Relatar	Pues porque si solo hay cuatro niños y cuatro sillas por más que intercambien si no los hacemos repetir lugar pues cada niño se va a sentar en todas las sillas una vez.
E13 Relatar	Mis razones de convencimiento son que démonos de cuenta que hay cuatro sillas y cada uno se puede sentar en las cuatro sillas, si intercambiasen de puestos cada uno se sentarían en cuatro sillas diferentes.
E25 Relatar	Pues mi razón es la solución aleatoria que dependiendo de cada niño se puede sentar nueve maneras diferentes en cada silla.
E24 N. C	
E16 Relatar	Porque al sacar las posiciones de cada persona se puede saber de cuantas formas se puede sentar.
E20 Contenidos	Porque se sacan las estadísticas y si sale y es más sencilla y nos da igual posiblemente está bien hecha.
E11 Diálogo	Porque si no lo entiende entonces tratamos de buscar la respuesta de esta forma y por lógica sería multiplicar $4 \times 1 = 4$ y de una está la respuesta.

E04 N. C	Pues esta fue la lógica más importante que vi para poderlos ubicar pero no se sabe si puedan haber otro tipo de respuestas.
E15 N. C	Pues creo que esta es la solución correcta porque con problemas matemáticos por ejemplo suma, resta, etc no se hace se hace son las variables y por eso creo que debía ser la respuesta correcta y la manera más fácil y sencilla de resolver este problema.
E06 Relatar	Porque multiplique las opciones de número 1x4 que es el número de niños eso me dio 24. $6 \times 4 = 24$.
E09 Contenidos	Por cada estudiante tiene seis opciones si multiplicamos las opciones por el número de estudiantes hallamos el resultado y sacando el espacio muestral nos da lo mismo.
E05 N. C	Entender bien el tema para poder resolver bien los problemas y así hacerlo bien. Se pueden hacer de muchas maneras.
E01 Relatar	Por cada estudiante tiene seis opciones si multiplicamos las opciones por el número de estudiantes hallamos el resultado.
E18 Diálogo	Pues lo primero que debemos realizar es volverlo a corregir, y observando que este muy bien relacionado la cantidad de sillas con el total número de personas. También es importante observar y dialogar paso a paso como se realizó este problema.
E03 Relatar	Pues yo lo que pienso que es la mejor manera es ir en orden como lo puedo comprobar en las respuestas anteriores.

	Relatar.
	Fácil.
	Diálogo.
	Contenidos.
	No corresponde

Argumentos del estudiante para convencer a sus compañeros que su solución es correcta y la más adecuada.

Relatar su solución.

1. Los estudiantes para convencer a sus compañeros que su solución es correcta, piensan relatarles su solución, “realice una especie de tabla donde horizontalmente no se repitan los nombres así se puede encontrar una respuesta fácilmente”, “pues porque si solo hay cuatro niños y cuatro sillas por más que intercambien si no los hacemos repetir lugar pues cada niño se va a sentar en todas las sillas una vez”, “sacar las posiciones de cada persona se puede saber de cuantas formas se puede sentar”, “ver todas las formas que ellos se pueden sentar y después contarlas y así estar cien por ciento seguros de las formas que se pueden sentar”, “usando el espacio muestral y después sabemos cuántos puestos

tenemos así que solo nos queda multiplicarlos por estos”, “ubicando claramente y de forma ordenada todas las personas en cada silla y en ningún momento se repite la persona en la silla”, “saque todas las probabilidades posibles y conté cuantas probabilidades eran posibles”, “démonos de cuenta que hay cuatro sillas y cada uno se puede sentar en las cuatro sillas, si intercambiasen de puestos cada uno se sentarían en cuatro sillas diferentes”, “la solución aleatoria que dependiendo de cada niño se puede sentar nueve maneras diferentes en cada silla”, “multiplique las opciones de número 1×4 que es el número de niños eso me dio $24. 6 \times 4 = 24$ ”, “Por cada estudiante tiene seis opciones si multiplicamos las opciones por el número de estudiantes hallamos el resultado”, “lo que pienso que es la mejor manera es ir en orden como lo puedo comprobar en las respuestas anteriores”.

Se puede observar que los estudiantes consideran que su solución es correcta y basta con relatarles a sus compañeros su solución para que ellos se convenzan que es la más adecuada.

Su solución es fácil de entender.

2. **Los** estudiantes para convencer a sus compañeros que su solución es correcta, piensan que su solución es fácil de entender, “que es muy fácil de la forma que lo hice porque es más entendible para unos compañeros porque también rote a los dibujos por cada silla y encontré la respuesta”, además “es un proceso un poquito largo y fácil para poder solucionarlo, porque me pareció más fácil, y por último creo que está bien”.

Se puede observar que los estudiantes consideran que su solución es fácil de entender por la estrategia que utilizaron, lo cual les permitiría que sus compañeros se convencieran de que su solución es la más adecuada.

Discutir la solución.

3. Los estudiantes para convencer a sus compañeros que su solución es correcta, piensan discutir la solución con él, con el fin de que se dé cuenta de la estrategia que utilizo, “que lo hagamos juntos para que se dé cuenta de las combinaciones que se han hecho con cada posición”, “tratamos de buscar la respuesta de esta forma y por lógica sería multiplicar $4 \times 1 = 4$ y de una está la respuesta”, “lo primero que debemos realizar es volverlo a corregir, y observando que este muy bien relacionado la cantidad de sillas con el total número de personas. También es importante observar y dialogar paso a paso como se realizó este problema”.

Se puede observar que los estudiantes consideran que discutir la estrategia utilizada con su compañero logrará convencerlo de que su solución es la más adecuada.

Utilizar contenidos matemáticos.

4. Los estudiantes para convencer a sus compañeros que su solución es correcta, piensan utilizar contenidos matemáticos, “por cada estudiante tiene seis opciones si multiplicamos las opciones por el número de estudiantes hallamos el resultado y sacando el espacio muestral nos da lo mismo”, “Porque se sacan las estadísticas y si sale y es más sencilla y nos da igual posiblemente está bien hecha”.

Se puede observar que los estudiantes utilizan el espacio muestral o la estadística para convencer a su compañero que su solución es correcta.

Código	Codificación axial	Codificación selectiva
Relatar.	Relatar su solución.	La estrategia de solución como argumento para convencer a sus compañeros que su solución es correcta y la más adecuada.
Fácil.	Su solución es fácil de entender.	
Dialogo.	Discutir la solución.	
Contenidos.	Utilizar contenidos matemáticos.	El espacio muestral como argumento para convencer a sus compañeros que su solución es correcta y la más adecuada.