

**Desarrollo del Pensamiento Relacional y la Comprensión del Signo Igual: una Experiencia
con Estudiantes de Tercer Año de Primaria**

Luz Dary Páez Sarmiento

Trabajo de Grado para Optar al Título de Magíster en Educación Matemática

Directora

Solange Roa Fuentes

Doctora en ciencias en la especialidad de matemática educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias Básicas

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2019

A mis padres

A ustedes debo mi vida y formación.

Este trabajo es un regalo para ustedes, en agradecimiento al apoyo brindado cada día.

Gracias

A la Dra. Dora Solange Roa Fuentes

Por depositar su confianza en mí proyecto, su disponibilidad cada día y sobre todo por su
motivación, a lo largo de todo el recorrido.

A la Dra. Sandra Evelyn Parada Rico y el Mg. Luis Ángel Pérez Fernández

Por revisar el trabajo y enriquecerlo con sus comentarios.

A los estudiantes que participaron en este proceso

Por haberlo hecho de forma desinteresada.

Y a mi familia

Muy especialmente, por su apoyo incondicional.

Contenido

	Pág.
Introducción	16
1. Problema de Investigación	19
2. Objetivos	22
2.1 Objetivo general.....	22
2.2 Objetivos Específicos.....	22
3. Antecedentes	23
3.1 La noción de igualdad y el concepto de equivalencia	23
3.2 Perspectivas Institucionales	28
3.2.1 Una Perspectiva Nacional.	28
3.2.2 Una Perspectiva Internacional.	30
4. Elementos Teóricos: Pensamiento relacional y sus niveles de desarrollo	35
4.1 La Noción de Igualdad y el Concepto de Equivalencia.....	35
4.2 Pensamiento Relacional	36
5. Metodología	41

5.1 Participantes.....	41
5.2 Instrumentos.....	42
5.2.1 Prueba Diagnóstica.	42
5.2.2 Grabaciones de Audio y Video	44
5.2.3 Entrevista.	44
5.2.4 Hojas de Trabajo de los Estudiantes	44
5.2.5 Notas por parte del Investigador.	45
5.3 Proceso Metodológico	45
5.3.1 Diseño y Análisis a priori de Tareas.....	46
5.3.1.1 Prueba Diagnóstica.	48
5.3.1.2 Usando Regletas.....	54
5.3.1.3 Jugando con Balanzas.	57
5.3.1.4 Cuadrados Mágicos.....	63
5.3.1.5 Resolviendo Problemas.....	65
5.3.2 Implementación de Tareas y desarrollo de la Actividad.....	68
5.3.3 Recolección y Selección de Datos.	71
5.3.4 Análisis de Datos.	71
 6. Análisis de Resultados	 71
6.1 Prueba Diagnóstica	72
6.1.1 Tareas con Igualdades caracterizadas a Nivel 2.	72
6.1.2 Tareas con Igualdades caracterizadas a Nivel 3. Relacional Básico.	73
6.2 Guía de trabajo N°1: Usando regletas.....	85

6.3 Guía de trabajo N°2: Jugando con balanzas	94
6.4 Guía de trabajo N°4: Números mágicos	101
6.5 Guía de trabajo N°4: Resolviendo Problemas	104
6.4 Evidencias de los Niveles Asociados al Pensamiento Relacional	108
6.4.1 Nivel 1. Operacional Rígido.	108
6.4.2 Nivel 2. Operacional Flexible.	108
6.4.3 Nivel 3. Relacional Básico.....	109
6.4.4 Nivel 4: Relacional comparativo.	109
7. Conclusiones	110
Referencias Bibliográficas.....	114
Apéndices.....	116

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1. Tarea realizada por un estudiante.	24
Figura 2. Actividad. Adaptado de: Molina, 2006, p. 63	25
Figura 3. Estructura Metodológica de la Investigación	45
Figura 4. Balanza 1	58
Figura 5. Balanza 2	59
Figura 6. Balanza 3	61
Figura 7. Balanza 4	62
Figura 8. Balanza 6	63
Figura 9. Sesión 1. Guía diagnóstica	70
Figura 10. Tarea resuelta por Leticia	73
Figura 11. Tarea resuelta por Juan D.	73
Figura 12. Tarea resuelta por Alan en la prueba diagnóstica.....	74
Figura 13. Tarea resuelta por Juan F. en la prueba diagnóstica.	75
Figura 14. Tarea resuelta por Alan en la prueba diagnóstica.....	76
Figura 15. Tarea resuelta por Elkin en la prueba diagnóstica.....	76
Figura 16. Tarea resuelta por Maily en la prueba diagnóstica.	77
Figura 17. Tarea resuelta por Alan en la prueba diagnóstica.....	78
Figura 18. Tarea resuelta por Jerónimo en la prueba diagnóstica.....	78
Figura 19. Tarea resuelta por Pedro en la prueba diagnóstica.	80

Figura 20. Tarea resuelta por Jerónimo en la prueba diagnóstica.....	80
Figura 21. Tarea resuelta por Pedro en la prueba diagnóstica.	81
Figura 22. Tarea resuelta por Alan en la prueba diagnóstica.....	82
Figura 23. Tarea realizada por María J. en la prueba diagnóstica.	82
Figura 24. Tarea realizada por Sara en la prueba diagnóstica.	83
Figura 25. Tarea resuelta por Alan en la prueba diagnóstica.....	83
Figura 26. Tarea resuelta por Juan D. en la prueba diagnóstica.	83
Figura 27. Tarea resuelta por María G. en la prueba diagnóstica.	84
Figura 28. Tarea resuelta por Alan en la prueba diagnóstica.....	84
Figura 29. Tarea resuelta por Leticia en el uso de regletas.....	86
Figura 30. Tarea resuelta por Silvia en el uso de regletas.	86
Figura 31. Tarea resuelta por Silvia en el uso de regletas.	87
Figura 32. Tarea resuelta por Santiago U. en el uso de regletas.	87
Figura 33. Tarea resuelta por Santiago U. en el uso de regletas.	88
Figura 34. Tarea resuelta por Alan en el uso de regletas.	88
Figura 35. Representación de divisores	90
Figura 36. Tarea resuelta por Alan en el uso de regletas.	90
Figura 37. Tarea resuelta por María J. en el uso de regletas.....	91
Figura 38. Tarea resuelta por María J. en el uso de regletas.....	92
Figura 39. Tarea resuelta por Silvia en el uso de regletas.	93
Figura 40. Tarea resuelta por Valeria en el uso de balanzas.....	95
Figura 41. Tarea resuelta por Santiago U. en el uso de balanzas.....	95
Figura 42. Tarea resuelta por María J en el uso de balanzas	96

Figura 43. Tarea resuelta por Santiago U. en el uso de balanzas.....	97
Figura 44. Tarea resuelta por Maily en el uso de balanzas.	98
Figura 45. Tarea resuelta por Valeria en el uso de balanzas.....	99
Figura 46. Tarea resuelta por Leticia en el uso de balanzas	99
Figura 47. Tarea resuelta por Pedro en el uso de balanzas	100
Figura 48. Tarea resuelta por Pedro en el uso de balanzas	101
Figura 49. Tarea resuelta por Elkin en el uso de balanzas.....	101
Figura 50. Tarea resuelta por Silvia en el uso de balanzas	102
Figura 51. Tarea resuelta por Leticia con números mágicos	104
Figura 52. Tarea resuelta por Alan en solución de problemas.....	105
Figura 53. Tarea resuelta por Valera en solución de problemas.	105
Figura 54. Tarea resuelta por Alan en solución de problemas.....	106
Figura 55. Tarea resuelta por Pedro en solución de problemas.	107
Figura 56. Tarea resuelta por Santiago U. en solución de problemas.....	108

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1. Instrumento niveles de pensamiento relacional	39

Lista de Apéndices

	Pág.
Apéndice A: Guía N°2	116
Apéndice B. Guía N°3: Jugando con balanzas	119
Apéndice C. Guía N°4. Números Mágicos	122
Apéndice D. Guía N°5	125

Resumen

Título: Desarrollo del Pensamiento Relacional y la Comprensión del Signo Igual: una Experiencia Con Estudiantes de Tercer Año de Primaria*

Autor: Luz Dary Páez Sarmiento**

Palabras Clave: Pensamiento Relacional, Signo de Igual, Equivalencia.

Descripción:

En este trabajo nos proponemos indagar sobre el desarrollo del pensamiento relacional que estudiantes de tercero primaria (8 y 9 años) de un colegio privado del municipio de Floridablanca, Santander (Colombia) evidencian cuando abordan expresiones aritméticas en diferentes contextos que involucran el signo igual como una relación de equivalencia. Para ello, se aplicó un conjunto de tareas que incluyeran el signo igual como relación de equivalencia en diferentes contextos aritméticos.

La metodología adoptada se desarrolla bajo un enfoque cualitativo, haciendo de la conversación en el contexto escolar una herramienta para profundizar en la manera en que piensan los estudiantes, así como reconocer sus fortalezas y debilidades, para luego describir e interpretar el desarrollo de estrategias que realizan en situaciones aritméticas particulares asociadas al Pensamiento Relacional.

Los resultados de esta investigación evidencian que el significado adoptado por los estudiantes acerca del signo igual depende de las tareas que estén realizando, por tanto su nivel de desarrollo del pensamiento relacional se ve reflejado en la solución de tareas relativas a la equivalencia, evidenciamos que el uso de la balanza en un contexto aritmético, permite a los estudiantes pensar en situaciones donde es necesario conservar la equivalencia.

Este trabajo en particular intenta aportar a la intervención en el aula respecto al mejoramiento de acciones específicas del desarrollo del pensamiento relacional tales como identificar relaciones, establecer conjeturas y reconocer patrones, que se cumplen cuando se desarrollan operaciones aritméticas (Molina 2006) que conllevan al estudio de propiedades propias del pensamiento algebraico.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias Exactas. Escuela de Matemáticas. Directora: Ph.D. Solange Roa Fuentes. Doctora en ciencias en la especialidad de matemática educativa

Abstract

Title: Development of Relational Thinking and Understanding of the Equal Sign: an Experience With Students in the Third Year of Primary School*

Author: Luz Dary Páez Sarmiento**

Keywords: Relational Thinking, Equal Sign, Equivalence.

Description:

In this work we propose to investigate the development of relational thinking that students of third primary (8 and 9 years) of a private school in the municipality of Floridablanca, Santander (Colombia) show when they approach arithmetic expressions in different contexts that involve the equal sign as an equivalence relationship. To this end, a set of tasks was applied that included the equal sign as an equivalence relation in different arithmetic contexts.

The methodology adopted is developed under a qualitative approach, making conversation in the school context a tool for deepening the way students think, as well as recognizing their strengths and weaknesses, and then describing and interpreting the development of strategies they carry out in particular arithmetic situations associated with Relational Thinking.

The results of this research show that the meaning adopted by students about the equal sign depends on the tasks they are performing, therefore their level of development of relational thinking is reflected in the solution of tasks related to equivalence, we show that the use of the balance in an arithmetic context, allows students to think in situations where it is necessary to preserve equivalence.

This work in particular tries to contribute to the intervention in the classroom with respect to the improvement of specific actions of the development of relational thought such as identifying relationships, establishing conjectures and recognizing patterns, which are fulfilled when arithmetic operations are developed (Molina 2006) that lead to the study of properties of algebraic thought.

* Bachelor Thesis

** Faculty of Sciences, School of Mathematics, Director: Ph. D. Solange Roa Fuentes, Doctor of Science in the specialty of educational mathematics

Introducción

En matemáticas los signos son utilizados continuamente como parte del lenguaje, por tanto su manejo y comprensión son fundamentales en el desarrollo del pensamiento matemático; como lo asegura Essien y Setati (2006) los significados matemáticos no son transmitidos directamente por los símbolos sin la actividad interpretativa del individuo.

En particular el signo igual, como símbolo matemático, representa un concepto o idea matemática utilizado para indicar una relación de igualdad entre dos expresiones matemáticas que se escriben a ambos lados del signo (Castro y Molina 2007). Dado que la “igualdad” es un término usado cotidianamente, algunos autores como Matthews (2012) se refieren al conocimiento que los estudiantes logran del signo igual, como “igualdad matemática”. Como ha sido documentado desde la Didáctica de las Matemáticas, en el tránsito de la aritmética al álgebra, surgen diversas dificultades en la comprensión y comunicación del lenguaje simbólico (Kieran, 1989), pues no siempre los estudiantes logran afianzar los significados correctos (por ejemplo del signo igual) y como consecuencia, aparece el fracaso en la comprensión de expresiones aritméticas y algebraicas. Por tanto han surgido diversas investigaciones que demuestran que estudiantes de primaria, secundaria y hasta en los primeros niveles de educación superior ven el signo igual como el indicador del resultado de una operación y no como un símbolo que representa una relación de equivalencia (Kieran (1992), Levi y Carpenter (1999), Knuth (2006) y Burgell (2013).

Autores como Kieran y Filloy (1989) indican que si los estudiantes consideraran el signo igual como un símbolo de equivalencia, probablemente podrían evitar recaer en errores tales como violar las propiedades simétrica y transitiva de la igualdad. Como se acaba de plantear, existen dificultades asociadas a la comprensión que los estudiantes pueden desarrollar sobre la igualdad matemática; esto tiene implicaciones importantes en el desarrollo del pensamiento numérico en el pensamiento algebraico. En este sentido Drijvers y Hendrikus (2003) muestran que el álgebra tiene sus raíces en la aritmética y depende fuertemente de su argumentación y relación con distintos objetos matemáticos.

Por tanto en el trabajo que aquí se reporta, el objetivo fue indagar sobre el desarrollo del pensamiento relacional que estudiantes de tercero primaria (8 y 9 años) de un colegio privado del municipio de Floridablanca, Santander (Colombia) evidencian cuando resuelven situaciones relacionadas con el del signo igual. El pensamiento relacional ha sido vinculado con al álgebra temprana, Molina (2006) por ejemplo, muestra que este tipo de pensamiento incluye acciones específicas como: identificar relaciones, establecer conjeturas y reconocer patrones, que se cumplen cuando se desarrollan operaciones aritméticas

De igual manera, se busca diseñar un conjunto de tareas que incluyan el signo igual como relación de equivalencia en diferentes contextos aritméticos que posibiliten la interpretación y el uso adecuado del signo igual para promover el desarrollo del pensamiento relacional en estudiantes de primaria. Es decir, que el estudiante construya resultados a partir de la formulación de hipótesis y relaciones con base en propiedades aritméticas que conllevan al estudio de propiedades propias del pensamiento algebraico.

Además se espera que los estudiantes que participan en este trabajo de aplicación, logren desarrollar estrategias para realizar cálculos aritméticos e interioricen generalidades (propiedades y relaciones) que se encuentran implícitas en situaciones aritméticas particulares.

Este documento está organizado en seis capítulos: el primero Antecedentes, se presenta en dos partes. En la primera se analizan algunos trabajos previos en Didáctica de las Matemáticas que han estudiado la comprensión del signo igual y en la segunda parte, se presenta una mirada de documentos nacionales e internacionales que rigen el trabajo en el aula y que se relacionan con el desarrollo de pensamiento matemático, en particular con el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico. En el segundo capítulo se presenta el problema de investigación y objetivos. En el tercer capítulo titulado “Elementos Teóricos: Pensamiento relacional y sus niveles de desarrollo” se presenta una noción de igualdad y el concepto de equivalencia tomada de Molina (2006), también se define lo que se entiende por pensamiento relacional, sus implicaciones en la educación primaria y los diferentes niveles asociados al tipo de igualdad (Matthews, 2012).

En el cuarto capítulo, se define el método de investigación, el contexto, la población, el diseño metodológico, técnicas e instrumentos que se utilizaron en la recolección de la información, así como el proceso de construcción del análisis a priori y a posteriori de las actividades implementadas. En el capítulo cinco. Análisis de resultado, presentamos algunas evidencias del trabajo de aplicación. Además, analizamos dichas evidencias a la luz del marco teórico adoptado de Matthews et al., (2012). Finalmente, en el sexto capítulo presentamos las conclusiones, donde se mencionan los resultados obtenidos en el proceso de intervención en torno a los objetivos planteados. Además se presentan las referencias bibliográficas en que se sustenta este estudio.

1. Problema de Investigación

Los Estándares Básicos de Competencias (2006) indican dentro del pensamiento numérico y sistemas numéricos, que un estudiante al terminar tercero primaria debería: “reconocer significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, relación, localización entre otros); Describir, comparar y cuantificar situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones” (MEN, 2006, p. 80). Por otro lado, dentro del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, encontramos que al terminar tercero primaria un estudiante debería: “reconocer y generar equivalencias entre expresiones numéricas y describir cómo cambian los símbolos aunque el valor siga igual” (MEN, 2006, p. 81). Respecto a la relación que se establece entre el desarrollo del pensamiento numérico y algebraico, Matthews, Rittle-Johnson, McElldoon y Roger (2012) mencionan la importancia de la igualdad matemática (relación de equivalencia) como un vínculo clave entre dichos pensamientos.

En algunos currículos de instituciones escolares colombianas, los lineamientos en la enseñanza matemática, tienden a separar la aritmética del álgebra, debido a la creencia que la primera parece ser más concreta y por tanto, más sencilla de aprender. Sin embargo, esta enseñanza tradicional en ocasiones conlleva a la discontinuidad entre estas dos disciplinas.

Para Butto y Rojano (2010) la transición de la aritmética al álgebra es un paso crucial para llegar a ideas más complejas y abstractas dentro de las matemáticas escolares. Dichas autoras indican que la mayoría de las dificultades que enfrentan los estudiantes al iniciarse en el estudio del álgebra

se deben a que, por mucho tiempo, ésta ha sido vista como una mera extensión del cálculo numérico al cálculo literal.

Por otra parte, autores como Kieran (1992) y Knuth, Stephens, Mc-Neil y Alibali (2006; 2008) señalan que un requisito necesario en el aprendizaje del álgebra es una adecuada comprensión del signo igual, principalmente como una relación de equivalencia.

En este orden de ideas, se identifica que los estudiantes del colegio Campestre Goyavier, ubicado en Floridablanca Santander, no son ajenos a la problemática expuesta hasta ahora, puesto que se evidencian dificultades en la transición de procesos aritméticos a procesos algebraicos. Una de estas dificultades, se asocia con la comprensión del signo igual, por ejemplo, los estudiantes asumen el signo igual en función de dar una respuesta a una secuencia de operaciones y no de manera relacional, como el indicador de una relación de equivalencia.

Con base en los elementos descritos, se propone la pregunta que guía este proyecto de aplicación:

¿Qué nivel de desarrollo del pensamiento relacional logran estudiantes de tercero primaria cuando participan en una actividad matemática que propicia el estudio del signo igual como una relación de equivalencia?

Se considera que analizar el desarrollo del pensamiento relacional, entendido como un “puente” que permite pasar de lo numérico a lo algebraico, a partir del estudio de los significados que los

estudiantes de tercero de primaria atribuyen al signo igual puede resultar de gran interés para el profesor investigador. Dado que como se mostró en los Antecedentes la construcción de propiedades generales y de acciones específicas que un estudiante puede realizar sobre una igualdad, entendida como una relación de equivalencia, son fundamentales para el desarrollo de pensamiento matemático. Esto da paso al planteamiento del objetivo general:

2. Objetivos

2.1 Objetivo general

Describir los niveles de desarrollo del pensamiento relacional de estudiantes de tercero primaria cuando abordan expresiones aritméticas en diferentes contextos que involucran el signo igual como una relación de equivalencia.

2.2 Objetivos Específicos

- Diseñar y analizar un conjunto de Tareas que incluyan el signo igual como relación de equivalencia en diferentes contextos aritméticos.
- Describir los niveles de desarrollo del pensamiento relacional que evidencian los estudiantes cuando resuelven situaciones relacionadas con el del signo igual.

3. Antecedentes

Este proyecto de aplicación se apoya en diferentes investigaciones y autores que en la Didáctica de las Matemáticas que han estudiado la comprensión del signo igual y en documentos nacionales e internacionales que rigen el trabajo en el aula y que se relacionan con el desarrollo de pensamiento matemático, en particular con el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico.

3.1 La noción de igualdad y el concepto de equivalencia en matemáticas

Diversos investigadores como Kieran (1989), Molina, Castro y Ambrose (2006), Burgell (2013), Burgell y Ochoviet (2015), Parodi, Ochoviet y Lezama (2017) han indagado y analizado las diferentes concepciones que poseen estudiantes de primaria y secundaria en primer nivel, respecto al signo igual y el concepto de equivalencia. Estas investigaciones se han llevado a cabo a través de prácticas de indagación (Szydlik, 2015) como: escuchar, confrontar y cuestionar los planteamientos dados por los estudiantes, sin emitir juicios acerca de lo correcto o incorrecto.

Las investigaciones mencionadas resaltan un aspecto muy importante con respecto al signo igual ($=$), la interpretación dada por los estudiantes en niveles básico, es construida en mayor proporción como una operación y no como el indicador de una relación de equivalencia. Específicamente, los estudiantes conciben el signo igual como un símbolo que da respuesta a operaciones situadas al lado izquierdo de este. Además, dichas investigaciones han reportado que los estudiantes tienden a rechazar igualdades como: $c = a + b$ porque “están al revés” y las

cambian a la forma $c + a = b$ o $a + b = c$. Burgell y Ochoviet (2015) muestran un ejemplo de esto Ver Figura 1.

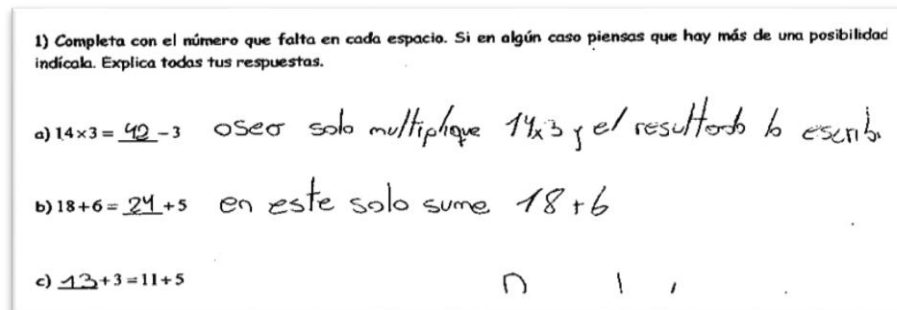


Figura 1. Tarea realizada por un estudiante. Adaptado de: Burgell y Ochoviet 2015, p.83

Como puede verse en la Figura 1, el estudiante interpreta el signo igual en los apartados a. y b. como una cadena de operaciones, seguido de una respuesta, mientras que en el apartado c. interpreta el signo como la expresión de una equivalencia.

En este sentido Molina (2006) indica el signo igual como la representación de un concepto o idea, es un elemento importante en la transición de la aritmética al álgebra; por tanto no tiene un único significado y está ligado al contexto en que se asigne. Molina (2006) como resultado de su trabajo de investigación identifica once significados distintos que los estudiantes pueden atribuir a este signo, como: propuesta de actividad, operador, expresión de una acción, separador, expresión de una equivalencia condicional (ecuación), expresión de una equivalencia, definición de un objeto matemático, expresión de una relación funcional, indicador de cierta conexión, aproximación o asignación de un valor numérico.

Esta clasificación de los significados y usos del signo de igual fue elaborada teniendo en cuenta los significados reconocidos y utilizados por la comunidad matemática, los otorgados por los estudiantes y los planteados en los libros de texto.

Según Molina (2005) es fundamental una adecuada integración del signo igual y la noción de equivalencia en la primera etapa escolar, centrando en el uso y desarrollo del pensamiento relacional; pues este pensamiento busca que el estudiante desarrolle su comprensión de la estructura del sistema de numeración decimal y de las operaciones aritméticas, antes que sea necesario trabajar con variables e incógnitas y que se trabajen de manera explícita las relaciones que subyacen a la aritmética. Las cuales no son habitualmente articuladas en el aula.

Kieran (1981) citado en Molina (2006) indica que el pensamiento relacional radica en la atención que se presta a las propiedades, las operaciones y la transformación de expresiones y operaciones. Por ejemplo, podemos ver el uso del pensamiento relacional en la resolución de la actividad propuesta en la Figura 2, donde se pide calcular la proporción del área sombreada respecto del área total.

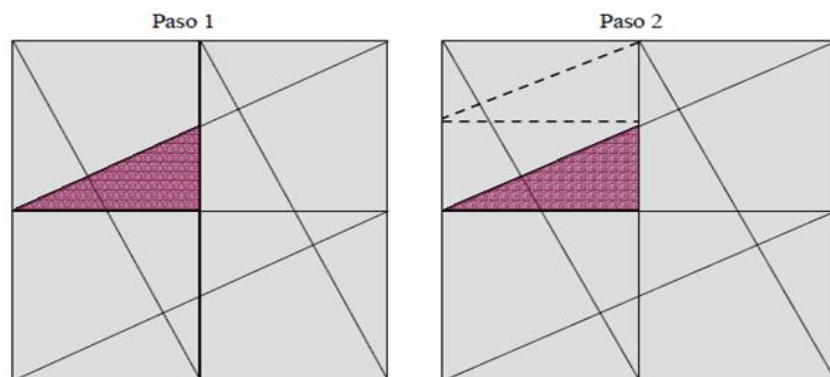


Figura 2. Actividad. Adaptado de: Molina, 2006, p. 63

Según Molina (2006) se pueden distinguir la totalidad de la figura y sus diversas partes, como las líneas que dividen la figura o la forma de la figura sombreada, dependiendo de dónde se dirija la atención. Pueden buscarse relaciones entre el triángulo sombreado y el cuadrado total, entre el triángulo sombreado y el cuadrado total, o entre el triángulo y alguna parte del cuadrado. Estas relaciones pueden no conducir directamente a la respuesta, pero permitirán conocer más a fondo las características y estructura de la figura. Además, llevan a explorar otras relaciones.

En este caso, al relacionar el área del triángulo equivalente a $\frac{1}{4}$ del área del cuadrado que lo contiene, puede observarse que la proporción entre estas áreas es 4: 1 (ver paso 2 de la Figura 2 siendo éste un modo de obtener la respuesta $\frac{1}{16}$). Es así, que “Con el pensamiento relacional, las actividades pasan de tener un enfoque procedimental, centrado en el cálculo de respuestas a un enfoque estructural, centrado en examinar relaciones” (Molina, 2009, p. 143). Este tipo de pensamiento ayuda a minimizar el cálculo de operaciones y hace pensar sobre las propiedades de estas.

La siguiente discusión sobre la igualdad $12 + 7 = 7 + \square$, muestra otro ejemplo de estrategia basada en pensamiento relacional de un estudiante del grado tercero primario de un colegio público de la provincia de Granada, España.

I: Y éste. ¿Quién me lo puede decir? A ver tú.

MT: Siete más doce.

I: ¿Aquí va un doce? ¿Cómo lo has hecho tan rápido? (Algunos alumnos intentan contestar).

Esperad un momento que se lo he preguntado a ella. ¿Cómo lo has hecho tan rápido?

MT: Porque es el mismo número.

I: ¿Es el mismo número? Ah, entonces ¿Qué es lo que ha pasado?

MT: Han cambiado los números de orden.

(Molina, tesis doctoral, 2006, p. 352)

En esta discusión, indica Molina, se observa como MT y varios estudiantes, distinguen la repetición de la operación suma y del término siete en los dos miembros de la igualdad y, a partir de esta observación, obtienen la respuesta haciendo uso de su conocimiento de la propiedad conmutativa de la suma.

El desarrollo del pensamiento relacional indica Molina (2006) surge a medida que un estudiante crea diferentes estrategias para abordar una situación matemática, haciendo uso de relaciones y propiedades en lugar de la aplicación de un método de resolución estandarizado. Además, las tareas centradas en este tipo de pensamiento favorecen un desarrollo básico para el posterior estudio del álgebra formal, ayudando a prevenir dificultades y a desarrollar modos de pensar algebraicamente en los estudiantes.

Investigadores como Carpenter (2003) y Molina (2006) muestran que los estudiantes que desarrollan el pensamiento relacional en situaciones aritméticas tienen mejores resultados a la hora de enfrentarse a situaciones algebraicas, por tanto es favorable desarrollar este pensamiento en estudiantes de primaria.

En este sentido Matthews et al. (2012) indican que la relación de igualdad denotada por el signo igual es un concepto fundamental que sirve como un vínculo clave entre la aritmética y el álgebra. Los autores, sostienen además que una sólida comprensión del signo igual en la enseñanza primaria puede favorecer el aprendizaje del álgebra en la enseñanza secundaria. Simultáneamente Burgell (2013) asegura que se debería proponer actividades que ayuden a los estudiantes a construir una visión relacional del signo igual, presentándoles igualdades abiertas para completar tanto el lado derecho, izquierdo y a ambos lados y sin operaciones explícitas.

3.2 Perspectivas Institucionales

Se presenta a continuación algunos aspectos relacionados con las políticas que rigen el desarrollo del pensamiento matemático, en particular con el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico. Para ello, se tuvo en cuenta documentos del Ministerio de Educación Nacional (MEN, Colombia) y los Principios y Estándares para la Educación Matemática (Thales, 2003).

3.2.1 Una Perspectiva Nacional. Los estándares Básicos de Competencias en Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) proponen el acercamiento al razonamiento algebraico, para ello plantean que:

La comprensión del sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre números, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación, se pueden enriquecer al proponer actividades con magnitudes, cantidades y sus medidas como base para dar significado y comprender mejor los procesos generales relativos al pensamiento numérico y para ligarlo con otros tipos de pensamiento. (MEN, 2006, p.58)

Un aspecto importante en el aprendizaje del álgebra indicado en los estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), es “la ampliación de la notación del lenguaje aritmético, el uso de las propiedades características de los sistemas numéricos (como las propiedades conmutativa y la asociativa de la adición y la multiplicación; y la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición, o el carácter simétrico y transitivo de la igualdad y el carácter antisimétrico y transitivo de la desigualdad)”. A fin de que se pueda desarrollar el pensamiento algebraico, los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) sugieren tener en cuenta algunas consideraciones para la elaboración, comparación, ejercitación de procedimientos aritméticos dentro del sistema de numeración decimal y junto a esto, el reconocimiento de que algunas representaciones son más útiles que otras en ciertas situaciones de resolución de problemas. Además se hace énfasis en que para el desarrollo del pensamiento numérico, se debe tener en cuenta aspectos fundamentales como: “El uso significativo de los números y el sentido numérico que suponen una comprensión profunda del sistema de numeración decimal que permitan a los estudiantes la búsqueda de estrategias propias de la resolución de problemas; así como la comprensión de los distintos significados y aplicaciones de las operaciones en diversos universos numéricos” (MEN, 1998, p. 17).

Mcintosh (1992), citado en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) indica que:

El pensamiento numérico es la comprensión que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones. (MEN, 1998, p. 26)

El pensamiento numérico se desarrolla gradualmente y va evolucionando a medida que los estudiantes tienen la oportunidad de pensar sobre los números, de usarlos en contextos significativos, los cuales, según se manifiesta en los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) permiten configurar las estructuras conceptuales de los diferentes sistemas numéricos necesarios para la Educación Básica y Media y su uso eficaz por medio de los distintos sistemas de numeración con los que se representan.

Otro aspecto fundamental, en el pensamiento numérico es la comprensión de los distintos significados y aplicaciones de las operaciones en diversos universos numéricos, pues estos contribuyen a la comprensión de su modelación, sus propiedades, sus relaciones, su efecto y la relación entre las diferentes operaciones (MEN, 1998, p. 17). De manera que el estudiante sea capaz de detectar regularidades expuestas en expresiones numéricas, y que con sus propias palabras pueda dar razón de su conocimiento matemático sin necesidad de seguir una secuencia de operaciones.

De igual manera en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se indica que es necesario tener en cuenta las cuatro operaciones básicas haciendo énfasis en la lectura y escritura de números, el cálculo mental con cifras que expresen un balance, utilización adecuada del signo igual y el planteamiento de situaciones problema que conlleven a procesos de equivalencia, a través, de la socialización o discusión en torno a estas expresiones (MEN, 2006).

3.2.2 Una Perspectiva Internacional. El Estándar de Números y Operaciones describe el conocimiento y las competencias básicas relativas a contar, a los números y a la aritmética, así

como una forma de comprender los conjuntos numéricos y sus estructuras. Dentro de los Principios y Estándares para la Educación Matemática (Thales, 2003) se plantea que el desarrollo del sentido numérico y la fluidez de cálculo aritmético, constituyen el núcleo de la Educación Matemática en niveles elementales. De esto, el desarrollo del sentido numérico debe ser un proceso continuo, centrando al estudiante en el estudio de las operaciones básicas y el significado de estas. Esto le permite enfrentarse a una gran variedad de problemas en diversas representaciones, que sirvan para que el estudiante logre comprender y dar sentido a las matemáticas. Entonces, los estudiantes deberían empezar a comprender que a través de diferentes modelos para una misma situación, pueden obtenerse resultados iguales; además, que los principios que rigen la resolución de ecuaciones en álgebra coinciden con las propiedades estructurales de los conjuntos numéricos. (Thales, 2003, p. 34)

Thales (2003) propone que en la etapa 3-5 un estudiante debe crear representaciones, tener una recopilación de símbolos matemáticos que puedan conectar con conceptos que exploran. Por ejemplo, usando el signo igual como un punto de equilibrio, para representar relaciones algebraicas y numéricas. En dicho documento se indica que la igualdad es una noción algebraica importante con la que los estudiantes se enfrentan; por tanto es fundamental que empiecen a comprenderla desde los primeros grados escolares como una relación, donde las cantidades a cada lado, son equivalentes. Por ejemplo, en expresiones como: $10 = 4 + 6$ o en $4 + 6 = 5 + 5$. De igual manera el documento de Principios y Estándares para la Educación Matemática indica que no se debe suponer que los estudiantes entienden un diagrama o una igualdad de la misma manera que los adultos (Thales, 2003). Por tanto es fundamental trabajar con los estudiantes problemas que involucren series de sumas y utilizar por ejemplo, una balanza para demostrar las igualdades; así

como utilizar diferentes representaciones que puedan incrementar la comprensión de un objeto matemático. Ya que el fundamento del desarrollo matemático de los niños se establece en los primeros años a través de sus experiencias.

A estas edades, si las matemáticas se conectan adecuadamente a su mundo, son algo más que "prepararlos" para la escuela o adelantarles algo de la aritmética elemental. Las experiencias matemáticas apropiadas los estimulan para explorar ideas relativas a patrones, formas, números y al espacio, con complejidad creciente. (Thales, 2003, p. 77)

Por otro lado, el paso entre la aritmética y el álgebra siempre ha representado dificultades para la mayoría de los estudiantes y es por eso, como lo asegura Molina (2006), que en los últimos años se ha realizado un sin número de investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra, planteándose diferentes propuestas. Una de estas propuestas es el programa *Early-Algebra*, que cual consiste en la introducción del álgebra desde los primeros años de escolaridad, no como asignatura, sino como una manera de pensar y actuar en objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas; pues se considera que los diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica son hábitos mentales importantes que se deben adquirir en la actividad matemática escolar.

Uno de estos autores agrega Molina (2005) son Davis (1985, 1989) y Vergnaud (1988) quienes argumentan la necesidad de iniciar una enseñanza del álgebra en la educación primaria, que

prepare a los estudiantes para abordar aspectos epistemológicos involucrados en la transición de la aritmética al álgebra.

El aprendizaje logrado en la educación primaria en aritmética, se ve reflejado durante la etapa secundaria; por ejemplo, durante el desarrollo del pensamiento algebraico. Es por tanto que este trabajo de aplicación propone realizar un estudio centrado en determinar el tipo de conocimiento que desarrollan los estudiantes de tercero primaria sobre el signo igual en un contexto numérico, que puede dar paso a la construcción de formas de pensar algebraicas.

Respecto al álgebra, es claro que implica mucho más que manipular símbolos para resolver ecuaciones o simplificar expresiones algebraicas. Por ello se requiere que los estudiantes comprendan principios que rigen la manipulación de símbolos y cómo pueden usarse para registrar ideas y ampliar su comprensión de situaciones. En el documento Principios y Estándares para la Educación Matemática (Thales, 2003) el Estándar de Álgebra “se centra en las relaciones entre cantidades incluyendo las funciones, las formas de representación de relaciones matemáticas y el análisis del cambio como herramientas para modelar e interpretar fenómenos de naturaleza matemática, que se encuentran en diferentes contextos” (Thales, 2003, p. 145).

De igual manera, se indica que las relaciones funcionales pueden expresarse usando notación simbólica, ya que esto permite expresar concisamente ideas matemáticas complejas y realizar un análisis del cambio. Para ello, y con el objetivo de facilitar el estudio formal del álgebra, los Principios y Estándares para la Educación Matemática (Thales, 2003) sugieren la introducción del pensamiento algebraico a partir de la etapa Pre-K-2 no como la generalización de la aritmética,

sino como una secuencia que conlleve a la formalización de ideas matemáticas mediante el uso de símbolos.

Algunas investigaciones recomiendan introducir el pensamiento algebraico desde los primeros años de educación (Ambrose, Castro y Molina 2006; Kaput 1999) ya que de esta manera los estudiantes no solo pueden dimensionar las cantidades numéricas, sino que pueden comprender mejor sus propiedades y desarrollar un pensamiento matemático que permite generalizar patrones y relaciones.

En este sentido, los Principios y Estándares para la Educación Matemática (Thales, 2003) sugieren plantear tareas asociadas al pensamiento algebraico, tales como representar variables mediante un recuadro, una letra o un símbolo. Del mismo modo Butto y Rojano (2010), afirman que es necesario que los estudiantes perciban la simbología y las operaciones aritméticas de manera distinta a la que se cultiva tradicionalmente en la escuela primaria, para que, sobre ese nuevo modo de pensamiento aritmético, puedan construir las nociones básicas del álgebra. Del mismo modo Gómez (1995) plantea que el álgebra y la aritmética no son sistemas matemáticos aislados; de hecho el álgebra generaliza a la aritmética, apropiándose de su lenguaje horizontal con igualdades y paréntesis. Por tanto, la enseñanza de estas sub áreas de la matemática debería organizarse evitando saltos, rupturas o cortes didácticos entre ellos, respetando naturalmente la naturaleza secuencial de ambos sistemas matemáticos.

4. Elementos Teóricos: Pensamiento relacional y sus niveles de desarrollo

Como se ha descrito en sesiones anteriores, la comprensión del signo igual como indicador de relación de equivalencia es fundamental para el desarrollo del pensamiento relacional, dado que sirve como un vínculo clave entre la aritmética y el álgebra.

En este capítulo se presentan los elementos teóricos que permiten analizar la comprensión del signo igual. En primer lugar, se presenta una noción de igualdad y el concepto de equivalencia tomada de Molina (2006), buscando precisar cómo se entienden estos conceptos a lo largo del presente trabajo. En segundo lugar, se define lo que se entiende por pensamiento relacional, sus implicaciones en la educación primaria y los diferentes niveles asociados al tipo de igualdad (Matthews, 2012).

4.1 La Noción de Igualdad y el Concepto de Equivalencia

Al parecer no existe una definición específica de igualdad y equivalencia. Estos términos son manejados muchas veces como sinónimos, lo que marca la complejidad de la comprensión del signo igual. Sobre este caso particular, Molina (2006) plasma en su trabajo de doctorado un análisis realizado desde diferentes puntos de vista y de una manera organizada presenta los diversos significados que se le asignan a los términos igualdad y equivalencia, y como resultado a este estudio, propone las siguientes definiciones:

Igualdad: es el “modo gráfico de relacionar en la escritura dos expresiones o representaciones que refieren a un mismo objeto matemático, escribiendo entre ellas un signo igual, así como a la relación que existe entre ellas”. (p. 115)

Esta autora, denomina igualdades numéricas abiertas como aquellas igualdades que presentan alguna incógnita o valor desconocido, $(9 - 5 = \square + 4)$; e igualdades numéricas cerradas $(13 + 8 = 20 + 1 = 21)$, a las que, por el contrario, incluyen todos los términos. En este trabajo se consideran igualdades tanto abiertas como cerradas. Además, estas igualdades únicamente están formadas por números naturales.

Según Lindvall e Ibarra (1980), “puede decirse que los estudiantes no poseen una verdadera comprensión del signo igual y de las ecuaciones hasta que muestran cierta maestría en las igualdades abiertas” (p. 50).

Equivalencia: Toda relación que cumpla las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Molina (2006) destaca que la relación de equivalencia definida para ecuaciones, afirmaciones o fórmulas son equivalentes “cuando son simultáneamente verdaderas o falsas para cada conjunto admisible de valores de ciertos parámetros”. (p. 115)

4.2 Pensamiento Relacional

El pensamiento relacional se encuentra estrechamente vinculado con la enseñanza del álgebra y se centra principalmente en identificar relaciones y propiedades, donde no simplemente se halla una

respuesta a través cálculos; por tanto se considera como la capacidad que tiene un estudiante de apreciar datos importantes, relacionarlos con otros objetos matemáticos mediante conceptos que él ya maneja. Para Fernández (2016) este pensamiento implica centrarse en las relaciones entre las operaciones aritméticas y sus propiedades fundamentales, en lugar de únicamente en el cálculo.

Carpenter, Levi, Franke y Koehler (2005) definen el pensamiento relacional, como el pensamiento que permite estudiar las expresiones y ecuaciones en su totalidad. Este pensamiento implica el uso de propiedades de las operaciones básicas para transformar las expresiones matemáticas en lugar de simplemente calcular una respuesta siguiendo una secuencia de procedimientos. Dicho autores indican que no necesariamente se requiere una comprensión completa de propiedades y definiciones formales, sino es el uso de propiedades básicas utilizadas para reducir los cálculos complejos a cálculos más sencillos, que pueden llevarse a cabo utilizando procedimientos conocidos.

Para Molina (2006) una persona usa pensamiento relacional, cuando encuentra relaciones que le permiten transformar una secuencia de actividades en otra más sencilla, mediante la aplicación de propiedades básicas; sin necesariamente realizar explícitamente las operaciones expresadas.

La actividad intelectual (interna) consistente en examinar objetos o situaciones matemáticas, considerándolas como totalidades, detectar de manera espontánea o buscar relaciones entre ellos y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, es decir, para alcanzar un objetivo. (Molina, 2006, p. 62).

De acuerdo con lo anterior, un estudiante cuando desarrolla pensamiento relacional no solo determina relaciones existentes entre diferentes objetos matemáticos, sino además construye relaciones entre las operaciones y los números involucrados en una determinada actividad, manteniendo el cálculo de las operaciones en un segundo plano. El desarrollo de este pensamiento, asegura Molina (2006) está estrechamente ligado al trabajo algebraico, pues este se enfoca en la relación de expresiones semejantes, la resolución de igualdades, ecuaciones, inecuaciones y desigualdades o en la comparación de expresiones. Además, ayuda a disminuir el enfoque computacional frecuente en la enseñanza de la aritmética, el cual es considerado una de las principales causas de algunas dificultades en el aprendizaje del álgebra.

Matthews et al., (2012) aseguran que una concepción bien desarrollada del signo igual en estudiantes de primaria y secundaria se caracteriza por la comprensión relacional: “darse cuenta de que el signo igual simboliza la igualdad de las expresiones o cantidades representadas por cada lado de una ecuación” (p. 222).

Dependiendo del tipo de la igualdad numérica, Matthews et al., (2012) diseñan un instrumento en el que distinguen cuatro niveles de pensamiento relacional según las concepciones del signo igual que tenga un estudiante. Estas concepciones van desde un sentido operacional hasta concepciones de relación total (Ver Tabla 1).

Tabla 1.

Instrumento niveles de pensamiento relacional

Nivel	Descripción	Estructura(s) de la(s) ecuación(s) central(es)
Nivel 4: Relacional comparativo.	El estudiante resuelve correctamente y evalúa exitosamente ecuaciones comparando las expresiones a ambos lados del signo igual, incluyendo el uso de estrategias de compensación y el reconocimiento de que las relaciones que mantienen la igualdad. Genera consistentemente una interpretación relacional del signo igual.	Ecuaciones que pueden resolver más eficientemente aplicando relaciones simplificadoras: Por ejemplo, sin añadir $67 + 86$, el estudiante puede dar respuesta a la pregunta ¿puede decir si la oración numérica " $67 + 86 = 68 + 85$ " es verdadera o falsa?
Nivel 3: Relacional Básico.	El estudiante resuelve y evalúa con éxito estructuras de ecuaciones con operaciones a ambos lados del signo igual. Reconoce la definición relacional del signo igual como correcta.	Operaciones en ambos lados: $a + b = c + d$ $a + b - c = d + e$
Nivel 2: Operacional Flexible.	El estudiante, resuelve, evalúa y relaciona con éxito estructuras de ecuaciones que tienen alguna particularidad. Sin embargo, sigue prevaleciendo una visión operativa del signo igual.	Operaciones a la derecha: $c = a + b$. Sin operaciones: $a = a$. La incógnita se sitúa antes del signo igual. $\square = a + b$
Nivel 1: Operacional Rígido.	El estudiante solo tienen éxito con ecuaciones de estructura: Cadena de operaciones, seguido del signo igual y respuesta. Define el signo igual como una cadena de operaciones.	Operaciones a la izquierda: (incluso cuando el espacio en blanco está delante del signo igual) $a + b = \square$ $a + \square = c$

Fuente: Matthews et al. (2012, p. 224).

Iniciando en orden ascendente en la Tabla 1 se encuentra el Nivel 1, Operacional Rígido. En este nivel un estudiante que tenga una visión única del signo igual solo logra resolver igualdades abiertas cuya estructura se compone por una cadena de operaciones, el signo igual y una respuesta. Es decir, cuando las operaciones se sitúan al lado izquierdo del signo igual ($a + b = \square$) o incluso cuando el espacio en blanco se sitúa antes del signo igual ($a + \square = b$). Eso quiere decir que por ejemplo, que en las igualdades del tipo $8 + 4 = \square + 5$ para el estudiante con visión operacional el resultado es 12 (suma de 8 y 4) o 17 (suma de todos los términos).

Esta visión operacional del signo igual puede continuar, pero si se torna más flexible con respecto a la estructura de una igualdad numérica, da lugar al nivel 2, operacional flexible. En el cual, un estudiante resuelve y evalúa con éxito igualdades abiertas con operaciones a la derecha, es decir, el espacio en blanco se sitúa antes $\square = a + b$ o después $a + b = \square$ del signo igual.

El siguiente paso en la evolución en la comprensión del signo igual y uso del pensamiento relacional es el nivel 3, Relacional básico. En este nivel, se empieza a observar los primeros signos de pensamiento relacional, donde el estudiante resuelve y evalúa con éxito igualdades abiertas cuya estructura mantiene operaciones a ambos lados del signo igual. $(a + b = \square + d; a + \square = c + d)$. Es decir, la visión operacional queda desplazada.

Finalmente en el nivel 4, Relacional comparativo, la comprensión del signo igual y pensamiento relacional es total. El estudiante reconoce la relación de equivalencia entre los dos lados del signo igual. Resuelve correctamente y evalúa igualdades abiertas comparando las expresiones en los dos lados del signo igual, usando estrategias de compensación.

Matthews et al., (2012) afirma que en el último nivel, un estudiante puede llegar al resultado sin la necesidad de hacer operaciones grandes o incluso sin hacer ninguna. Sin embargo, se requiere que los estudiantes evidencien estrategias o razonamientos explícitamente relacionales.

Teniendo en cuenta los niveles de desarrollo del pensamiento relacional y el objetivo de esta investigación, se utilizan igualdades numéricas abiertas y cerradas que permitan discutir y analizar los planteamientos y estrategias utilizadas por los estudiantes en su desarrollo del pensamiento

relacional. Investigadores como (Fernández, 2015, p. 16) indican que el pensamiento relacional conlleva tener una visión relacional del signo igual (lo que implica comprenderlo como un signo que indica un equilibrio entre la parte derecha e izquierda) y centrarse en las relaciones entre las operaciones aritméticas y sus propiedades fundamentales, en lugar de únicamente en el cálculo. Por tanto, el interés de la investigación buscó describir el uso y la interpretación del signo igual, a través de actividades que fortalezcan el desarrollo del pensamiento relacional.

5. Metodología

Este trabajo se desarrolla bajo un enfoque cualitativo, el cual busca identificar evidencias que analizadas a la luz de los elementos teóricos presentados en la sección anterior, permitan responder la pregunta propuesta y alcanzar los objetivos planteados.

5.1 Participantes

El desarrollo de esta investigación se llevó a cabo con diecisiete (17) estudiantes de tercero primaria con edades comprendidas entre los 8 y 9 años de un colegio privado de Floridablanca (Santander, Colombia), que presta servicios educativos a estudiantes con niveles socioeconómicos medio y alto (4, 5, y 6) en los niveles de pre-escolar, básica primaria y bachillerato, cuya propuesta educativa está enfocada en el arte a través de la ciencia.

5.2 Instrumentos

Inicialmente se diseña y aplica una prueba diagnóstica con dos tipos de tareas: completar y comprobar (ver Anexo 1). Con las cuales se busca determinar la comprensión del signo igual por parte de los estudiantes e identificar las estrategias empleadas y las dificultades en la resolución de diversos tipos de igualdades.

Con la finalidad de obtener la mayor cantidad posible de información, los instrumentos a utilizar para la recolección de los datos se tomó cuatro guías de trabajo, los vídeos de clase y entrevistas semiestructuradas. A continuación presentamos y describimos cada uno de los medios a usar para llevar a cabo este fin.

5.2.1 Prueba Diagnóstica. Esta prueba se realizó teniendo en cuenta equivalencias numéricas (Igualdades abiertas) con espacios en blanco donde aparecen operaciones a los dos lados de la igualdad ($a + b = \square + d$, $a + \square = c + d$, $\square + a = c + d$ y $a + b = \square + d$) con el objetivo que el estudiante pueda realizar operaciones y observar si en ambos miembros se obtiene o no el mismo valor. Cabe aclarar que el contexto a trabajar en esta investigación es el conjunto de los números naturales dado que los estudiantes están en tercero primaria.

La primera tarea (Prueba diagnóstica) incluye igualdades abiertas; es decir igualdades que presentan algún término desconocido, donde los estudiantes deben completar con un número, de tal manera que se obtenga una igualdad numérica. En estas igualdades, las operaciones se deben

realizar no solo del lado izquierdo, sino del derecho o a ambos lados. A continuación se presenta las igualdades usadas en la primera tarea.

a. $9 - 5 = \square + 4$

b. $\square = 23 - 11$

c. $14 + \square = 12 + 5$

d. $14 - 6 = \square + 5$

e. $21 + 6 = 6 + \square$

f. $90 \div 3 = \square + 3 = \square$

En el segundo grupo de tareas se plantea una lista de igualdades para que los estudiantes expliquen la veracidad de las expresiones usando propiedades y justificando sus respuestas. Dicho grupo de tareas se emplea con el fin de promover en los estudiantes la comprensión del signo igual, de tal manera que se puedan identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes haciendo uso de su pensamiento relacional en la resolución de las igualdades. Estas se muestran a continuación.

a. $16 = 7 + 9$

b. $5 + 9 = 14 \div 2 = 7$

c. $51 + 51 = 50 + 52$

d. $9 = 9$

e. $31 - 19 = 31 - 17 - 2$

f. $24 + 0 = 25$

5.2.2 Grabaciones de Audio y Video. Se usa para dar seguimiento al objeto de estudio y la reconstrucción de lo vivenciado en el aula de clase; las grabaciones de audio y video es en sí mismo son una herramienta de reconstrucción, ya que se captan, transforman y reelaboran hechos o situaciones, permitiendo que se utilice como un registro que facilita la posterior transcripción del material obtenido.

5.2.3 Entrevista. Se usa en cada una de las sesiones para entrevistar a aquellos estudiantes cuyas respuestas sean útiles para profundizar, ya sea por la originalidad, o porque dichas respuestas representan interpretaciones que desde la perspectiva teórica descrita anteriormente. De tal manera que se logre analizar los diferentes significados que otorgan al signo igual y las técnicas empleadas en la solución de las diferentes tareas propuestas. Como lo aseguran Díaz Torruco y Martínez (2013) la entrevista permite “obtener información más completa y profunda, además presenta la posibilidad de aclarar dudas durante el proceso, asegurando respuestas más útiles”.

5.2.4 Hojas de Trabajo de los Estudiantes. Se toman en cuenta como sustento de las producciones los estudiantes y como soporte para las transcripciones de los videos o de las grabaciones de audio.

Estas hojas de trabajo son las tareas que se propone como actividades donde los estudiantes puedan comparar objetos separados por el signo igual, de manera que puedan establecer relaciones entre los objetos matemáticos, identifiquen regularidades y reconozcan propiedades básicas de las operaciones que más adelante le serán de utilidad sobre todo a la hora del trabajo algebraico.

5.2.5 Notas por parte del Investigador. Estas notas tienen como objetivo llevar registro y elaborar anotaciones durante los eventos hacer resumen de cada uno de los episodios del experimento y llevar a cabo el análisis de este. Además, contar con una narración de los hechos ocurridos (qué, quién, cómo, cuándo y dónde) (Baptista et al., 2006).

5.3 Proceso Metodológico

Para cumplir con los objetivos de la implementación, se propuso y desarrolló una metodología compuesta por cuatro etapas: Diseño y análisis de Tareas; Implementación de las Tareas y desarrollo de la Actividad; Recolección y Selección de datos, e Interpretación y análisis teórico de los datos cuyo desarrollo se detalla a continuación (Ver Figura 3).

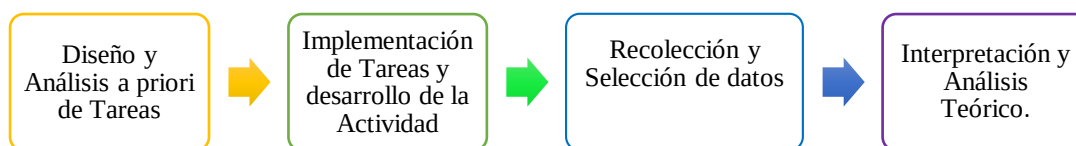


Figura 3. Estructura Metodológica de la Investigación

Como se muestra en la Figura 3, la primera etapa se centra en el diseño y análisis de Tareas que son retroalimentadas por la aplicación completa de las etapas de la investigación. La aplicación de esta metodología le permite al profesor-investigador presentar un conjunto de Tareas matemáticas validadas que potencian el desarrollo del pensamiento relacional. Para llevar a cabo esta metodología, se presenta una descripción de las principales características de cada una de las etapas.

En este sentido, acordamos realizar la investigación en primera persona. Esto, porque como dice Ball (2000), asumiendo el rol de profesor-investigador se tendrá un mayor conocimiento del grupo en general y de cada estudiante en particular; así como también, un cabal conocimiento del enfoque de enseñanza implementado hasta el momento de realizar la investigación. Esto nos permitirá identificar, por ejemplo, si la disposición y la manera en que piensan los estudiantes al participar del estudio, son acordes a lo mostrado en el trascurso habitual del curso. Asimismo, estamos en condiciones de minimizar los riesgos que según Ball, implica esta perspectiva de investigación.

5.3.1 Diseño y Análisis a priori de Tareas. Para el diseño de las actividades se tuvo en cuenta los objetivos del currículo, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), respecto al pensamiento numérico y sistemas algebraicos y analíticos. Además de los resultados obtenidos de la aplicación de la prueba Diagnóstica que será analizada con detalle en el desarrollo de esta Etapa.

Es importante aclarar que en este proyecto de aplicación se hace una distinción entre la Tarea y la Actividad en términos de Radford (2011). En este sentido el diseño de las Tareas es potestad del profesor-investigador quien planifica y tiene una idea de lo que puede llegar a suceder en el aula. Pero es a través de la Actividad que dicha tarea promueve que los estudiantes pueden progresivamente tomar conciencia de los significados culturales que han sido históricamente constituidos.

El diseño se centra en la construcción de una prueba diagnóstica y cuatro guías de trabajo, que comprenden diferentes tipos de tareas. La prueba diagnóstica, contiene dos tipos de tareas caracterizadas por pertenecer a los diferentes niveles de pensamiento relacional, de acuerdo a la clasificación de Matthews (2012). Seis igualdades abiertas o aquellas que presentan un término desconocido para completar con un número y así lograr obtener una igualdad numérica e igualdades cerradas, expresiones que pueden ser verdaderas o falsas.

Con esta tarea se busca evaluar la comprensión del signo igual e identificar las estrategias empleadas en la resolución dada por cada estudiante. La primera guía de trabajo, se llevó a cabo con las regletas de Cuisenaire. Se esperaba que los estudiantes identificaran las características en común de los trenes que se pueden formar: según la composición y descomposición de cantidades (trenes). La guía de trabajo número tres, se basa en situaciones problema haciendo uso de balanzas; esta guía tuvo como objetivo comparar expresiones o cantidades representadas en cada lado de una igualdad. Para la realización de esta guía de trabajo, inicialmente se trabajó con la aplicación gratuita pesa pensando propuesta en [file:///C:/Users/USUARIO/AppData/Local/Temp/Rar\\$EXa0.953/problematic/menuppal.html](file:///C:/Users/USUARIO/AppData/Local/Temp/Rar$EXa0.953/problematic/menuppal.html) con el objetivo que el estudiante comparará expresiones o cantidades representadas en cada lado de la igualdad y así, se familiarizaran con tareas que requieren equilibrarse. Para ello, los estudiantes resolvieron 12 situaciones problemáticas consistentes en intercambiar objetos situados a la derecha de la balanza o la izquierda. La cuarta guía de trabajo denominada “cuadrados mágicos” tuvo como objetivo que los estudiantes acomodaran ciertos números o expresiones que cumplieran una suma dada; con esto se esperaba evidenciar en los estudiantes sus habilidades para evaluar y resolver con éxito estructuras de ecuaciones con operaciones a ambos lados del signo igual tales como: $a + b = c + d$ y $a +$

$b - c = d + e$. La última guía de trabajo se basa en situaciones problema. Esta guía se diseñó teniendo en cuenta que el estudiante debía evaluar y resolver las igualdades numéricas comparando expresiones a ambos lados del signo igual. Se esperaba que incluyeran el uso de estrategias de compensación y el reconocimiento de las relaciones que mantienen la igualdad.

A continuación realizamos el análisis a priori de cada una de estas tareas, teniendo en cuenta los elementos teóricos que sustentan esta investigación.

5.3.1.1 Prueba Diagnóstica. Las igualdades de la primera parte de la prueba fueron tomadas de Molina (2006). Esta prueba comprende principalmente dos tipos de tareas: seis igualdades abiertas (presentan algún término desconocido), y seis cerradas (completas). Con esta tarea en términos de Radford (2013) se busca evaluar la comprensión del signo igual por parte de los estudiantes e identificar las estrategias empleadas y las dificultades en la resolución de diversos tipos de igualdades. En estas igualdades, las operaciones se deben realizar no solo del lado izquierdo, sino del derecho o a ambos lados. El significado del signo igual es el de equivalencia numérica ya que un estudiante puede realizar operaciones y determinar si en los dos lados de la igualdad se obtiene o no el mismo número.

Para el primer tipo de tareas, se plantean expresiones con un espacio en blanco (cantidad desconocida) para completar con un número, de tal manera que se obtenga una igualdad numérica. La indicación dada es completar con el número que hace verdadera cada igualdad, explicando cada respuesta. A continuación se presenta un análisis de los posibles procedimientos de los estudiantes en cada tarea y la propiedad en que pueden basarse asociada al pensamiento relacional.

Tarea 1 (a) y (e):

Completa con el número que hace verdadera cada igualdad. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

a. (a) $9 - 5 = \square + 4$ y (e) $14 - 6 = \square + 5$

Nivel 3: Relacional Básico. El estudiante resuelve y evalúa con éxito estructuras de ecuaciones con operaciones a ambos lados del signo igual. ($a + b = c + d$)

Propiedad o manera de resolver: (a) Elemento neutro de la suma. (e) compensación.

Posibles respuestas o procedimientos: El estudiante puede operar las cantidades a la izquierda, e indicar el resultado a la derecha del signo, es decir, $9 - 5 = \boxed{4} + 4$.

Tarea 1 (b):

Completa con el número que hace verdadera cada igualdad. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

$$\square = 23 - 11$$

Nivel 2: Operacional Flexible: El estudiante, resuelve, evalúa y relaciona con éxito estructuras de ecuaciones que tienen alguna particularidad. Sin embargo, sigue prevaleciendo una visión operativa del signo igual. En este caso, la incógnita se sitúa antes del signo igual. $\square = a + b$

Propiedad o manera de resolver: Magnitud o simetría de la igualdad.

Tarea 1 (c):

Completa con el número que hace verdadera cada igualdad. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

$$14 + \square = 12 + 5$$

Posibles respuestas o procedimientos: Se podría esperar que el estudiante tome el signo igual como un símbolo que separa una secuencia de operaciones y su resultado, sin importar que este se encuentre a la derecha del signo igual.

Nivel 3: Relacional Básico. El estudiante resuelve y evalúa con éxito estructuras de ecuaciones con operaciones a ambos lados del signo igual. ($a + b = c + d$)

Propiedad o manera de resolver: Compensación.

Posibles respuestas o procedimientos: Se podría esperar que el estudiante observe que a ambos lados de la igualdad, las expresiones se refieren al mismo objeto matemático, es decir, tienen el mismo valor numérico.

Tarea 1 (d):

Completa con el número que hace verdadera cada igualdad. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

$$21 + 6 = 6 + \square$$

Nivel 3: Relacional Básico. El estudiante resuelve y evalúa con éxito estructuras de ecuaciones con operaciones a ambos lados del signo igual. ($a + b = b + a$)

Propiedad o manera de resolver: Propiedad conmutativa de la suma.

Posibles respuestas o procedimientos: Se podría esperar que el estudiante observe que a ambos lados de la igualdad, las expresiones se refieren al mismo objeto matemático, en este caso particular el significado se presenta cuando la igualdad expresa la propiedad conmutativa.

Tarea 1 (f):

Completa con el número que hace verdadera cada igualdad. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

$$90 \div 3 = \square + 3 = \square$$

Nivel 3: Relacional Básico. El estudiante resuelve y evalúa con éxito estructuras de ecuaciones con operaciones a ambos lados del signo igual. ($a + b - c = d + e$)

Propiedad o manera de resolver: Magnitud o simetría de la igualdad.

Posibles respuestas o procedimientos: En este caso se podría esperar que el estudiante utilice el signo igual como un separado de pasos a realizar. Molina et al. (2007) indican que este significado del signo igual es matemáticamente incorrecto, pues vincula expresiones que en un contexto dado pueden no tener relación alguna, y ser solamente pasos sucesivos en la resolución de una actividad.

En el segundo grupo de tareas se plantea una lista de igualdades para que los estudiantes expliquen la veracidad de las expresiones usando propiedades y justificando sus respuestas. Dicho grupo de tareas se emplea con el fin de promover en los estudiantes la comprensión del signo igual, de tal manera que se puedan identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes haciendo uso del pensamiento relacional en la resolución de las igualdades.

Nivel 4: Relacional comparativo. Las actividades de la tarea N°2 se incluyen en este nivel, donde se espera que el estudiante resuelva correctamente y evalúa exitosamente ecuaciones comparando las expresiones a ambos lados del signo igual, incluyendo el uso de estrategias de compensación y el reconocimiento de que las relaciones que mantienen la igualdad. Generan consistentemente una interpretación relacional del signo igual.

Tarea 2: (a)

Observa las siguientes igualdades. Luego indica en cada una, si es verdadera (V) o falsa (F). Si es verdadera, explica por qué y en las que sean falsas indica donde está el error.

$$16 = 7 + 9$$

Propiedad o manera de resolver: (Verdadera) Propiedad simétrica en la igualdad.

Posibles respuestas o procedimientos: El estudiante puede tomar el signo igual como un símbolo que separa una secuencia de operaciones y su resultado, sin importar que este se encuentre a la derecha del signo igual. Se espera que el estudiante relacione los resultados en ambos lados de la igualdad, tomando como referencia la operación a realizar al lado derecho del signo igual.

Tarea 2: (b)

Observa las siguientes igualdades. Luego indica en cada una, si es verdadera (V) o falsa (F). Si es verdadera, explica por qué y en las que sean falsas indica donde está el error.

$$5 + 9 = 14 \div 2 = 7$$

Propiedad o manera de resolver: (Falsa). Puesto que no cumple con la propiedad de transitividad. En otras palabras no hay relación de equivalencia.

Posibles respuestas o procedimientos: El estudiante puede utilizar el signo igual como un “separador de pasos a realizar”. Molina et al. (2007) indican que este significado del signo igual es matemáticamente incorrecto, pues vincula expresiones que en un contexto dado pueden no tener relación alguna, y ser solamente pasos sucesivos en la resolución de una actividad.

En otro caso, se espera que el estudiante al resolver los puntos anteriores, realice las operaciones de suma y división, para relacionar los valores dados.

Tarea 2: (c) y (e)

Observa las siguientes igualdades. Luego indica en cada una, si es verdadera (V) o falsa (F). Si es verdadera, explica por qué y en las que sean falsas indica donde está el error.

$$51 + 51 = 50 + 52$$

Propiedad o manera de resolver: (Verdadera). Ley de compensación.

Posibles respuestas o procedimientos: El estudiante puede determinar que a ambos lados de la igualdad, las expresiones se refieren a la misma cantidad. En este caso particular el significado se presenta cuando la igualdad presenta la ley de compensación.

Tarea 2: (d)

Observa las siguientes igualdades. Luego indica en cada una, si es verdadera (V) o falsa (F). Si es verdadera, explica por qué y en las que sean falsas indica donde está el error.

$$9 = 9$$

Propiedad o manera de resolver: (Verdadera). Propiedad reflexiva.

Posibles respuestas o procedimientos: El estudiante puede indicar inmediatamente que esta igualdad es verdadera; pues se está representando el mismo representante como objeto matemático.

Tarea 2: (f)

Observa las siguientes igualdades. Luego indica en cada una, si es verdadera (V) o falsa (F). Si es verdadera, explica por qué y en las que sean falsas indica donde está el error.

$$24 + 0 = 25$$

Propiedad o manera de resolver: (Falsa). Propiedad modulativa.

Posibles respuestas o procedimientos: Se espera que el estudiante utilice las propiedades del cero como elemento neutro de la suma.

5.3.1.2 Usando Regletas. En la organización de las tareas se propone actividades donde los estudiantes puedan comparar objetos separados por el signo igual, de manera que puedan establecer relaciones entre los objetos matemáticos, identifiquen regularidades y reconozcan propiedades básicas de las operaciones que más adelante le serán de utilidad sobre todo a la hora del trabajo algebraico.

Con el propósito de incluir aspectos manipulables, concretos y prácticos de donde se puede dar paso a lo simbólico, abstracto y formal, dentro de las actividades se propone la manipulación de material concreto. Como las regletas Cuisenaire y las balanzas numéricas que pueden ser de utilidad en el desarrollo del pensamiento relacional. Estos recursos didácticos pueden facilitar la comprensión del signo igual como relación de equivalencia (Fernández, 2016); dado que relacionan la noción de equivalencia, conteo y reconocimiento del signo igual como elemento fundamental a la hora de realizar descomposición de cantidades.

En esta tarea, se espera que el estudiante resuelva, evalúe y codifique con éxito estructuras de ecuaciones que tienen alguna particularidad, haciendo uso de operaciones. Es decir, que realice operaciones a la derecha, tales como $c = a + b$ y sin operaciones $a = a$. Es decir, que el estudiante se encuentre en el Nivel 2: Operacional Flexible.

Tareas 1, 2 y 3:

1. Construye trenes con vagones de igual color que tengan la misma longitud de la regleta azul. ¿Cuántos trenes de diferente color puedes construir?
2. Vamos a unir una regleta azul y una rosada para construir un tren matemático. ¿Puedes construir otros trenes con otras regletas con la misma longitud? ¿Cuáles? Constrúyelos y dibújalos
3. Elige una regleta, por ejemplo la amarilla, ¿puedes formar trenes de con otras regletas que tengan la misma longitud que la seleccionada? ¿Cuántos trenes puedes construir? Dibújalos. ¿Consideras que hay otros trenes con esta característica? ¿Cuáles?

En las tareas 1, 2 y 3 se solicita al estudiante que forme trenes con regletas distintas, pero de la misma longitud a la dada. Se busca que el estudiante identifique las características en común de los trenes, es decir, que una cantidad determinada se puede escribir como otras de igual longitud. Para resolver esta tarea, el estudiante tendrá que buscar regletas que, añadidas al tren inicial, formen trenes de la misma longitud. A partir de una solución, podría encontrar diferentes resultados ya que, dentro de su elección tendrá cantidades con dos o más de dos divisores. Esto lo determina la composición y descomposición de números.

Tarea 4:

Forma ahora trenes monocolors con regletas cuya longitud sea siempre la misma. Por ejemplo puedes formar un tren con dos vagones azules y otro con tres vagones verde oscuro.

- a. Busca las regletas que equivalen a dos de otro color.
- b. Busca las regletas que equivalen a tres de otro color.

¿Puedes construir otros trenes con las mismas características? ¿Cuáles? Dibújalos.

En la cuarta tarea se plantea al estudiante formar trenes monocolor, de tal manera que entre ellos tengan la misma longitud. Para resolver esta tarea, el estudiante tendrá que buscar regletas que, comparadas al tren inicial, tengan la misma longitud, podría encontrar diferentes resultados ya que, dentro de su elección tendrá cantidades con dos o más de dos múltiplos en común. Esto lo determina la composición de la regleta.

Por ejemplo la marrón (cuyo valor numérico es 8). Al buscar una regleta determinada, de tal forma que con varias de esta misma regleta se pueda construir un tren igual de largo que la regleta marrón. Se espera que el estudiante construya los trenes con dos regletas rosadas, cuatro rojas, ocho blancas y con una marrón.

Tareas 5:

Elige una regleta, según tu preferencia. Ahora, construye un tren con dos regletas del color que elegiste ¿Es posible elegir otra regleta que tenga la misma longitud del tren formado? ¿Qué características deben tener los trenes formados?

En la quinta tarea se indica al estudiante que elija una regleta cualquiera por ejemplo la amarilla (cuyo valor es 5), y de acuerdo a esto, busque otras regletas que tengan la misma longitud de la anterior.

Se busca que el estudiante por ensayo y error. A través de la comparación, identifique que los trenes formados a lo más se pueden representar de seis formas, es decir, como la representación de sus divisores.

Tareas 6:

Completa los trenes con el nombre de la regleta que consideres cumple la condición dada.

En la sexta tarea, se plantea relaciones de equivalencia entre longitudes de las regletas. Esta tarea se propone con el objetivo de promover la representación simbólica que podría tener un tren matemático, así mismo identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes haciendo uso del pensamiento relacional en el planteamiento de estas equivalencias.

Se busca que después de varias predicciones y comprobaciones, el estudiante cree nuevas expresiones de representación similares, manteniendo la estructura de las expresiones aritméticas dadas.

Cabe aclarar que en las anteriormente mencionadas un estudiante al no tener en cuenta el mismo objeto matemático (tren de regletas) como una posible respuesta, su nivel de pensamiento relacional estaría ubicado en el **Nivel 1: Operacional Rígido**. Es decir, el estudiante solo tiene en cuenta la estructura de igualdad como una cadena de operaciones, seguido de una respuesta.

5.3.1.3 Jugando con Balanzas. Las actividades con balanzas son recursos didácticos que pueden facilitar la comprensión del signo igual como relación de equivalencia. En particular Fernández (2016), plantea que crean oportunidades para el desarrollo del pensamiento relacional.

Por lo anterior, consideramos presentar la aplicación (equilibrio con números), en la cual los estudiantes encontrarán balanzas que se pueden equilibrar intercambiando un solo par de números y otras en las que hay que cambiar tres o más pares.

Esta aplicación, propone 26 situaciones problemáticas consistentes en intercambiar pares de números. Este intercambio, se realiza al pulsar uno o más números de los situados a la derecha de la balanza o la izquierda. Esta actividad se llevará a cabo en la sala de cómputo de la institución, y cada estudiante tendrá un equipo para realizar su trabajo. El objetivo es que el estudiante compare expresiones o cantidades representadas en cada lado de la igualdad.

Después de que el estudiante interactúe, con la aplicación (equilibrio con números). Se propone situaciones problema haciendo uso de balanzas.

A continuación se presenta un análisis de los posibles procedimientos de los estudiantes en cada tarea y la propiedad en que se pueden basarse asociada al pensamiento relacional.

Tarea 1:
Observa la balanza. Luego, determina el valor que podría tener el balón de futbol.

Nivel 2: Operacional Flexible. Se requiere que el estudiante encuentre el valor desconocido (valor de la pelota de futbol) situado antes del signo igual. ($\square = a + b$)

Propiedad o manera de resolver: Propiedad aditiva de la igualdad

Posibles respuestas o procedimientos: Se espera que el estudiante, elimine dos pelotas de softbol de cada uno de los platos de la balanza. Para luego indicar, que el balón de futbol tiene el mismo peso que dos pelotas de softbol.

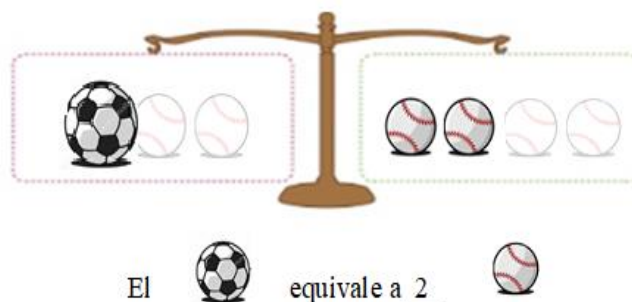


Figura 4. Balanza 1

Tarea 2:
¿Cuántos tornillos hay que poner en la tercera balanza para que quede equilibrada?

Nivel 3: Relacional Básico ya que el estudiante debe aplicar propiedades relacionales y estructurales del semigrupo de los naturales. Godino, Aké y Gonzato (2012). De tipo $a + b = c + d$ o de la forma $a + b - c = d + e$

Propiedad o manera de resolver: Propiedad aditiva de la igualdad y Propiedad simétrica de la igualdad.

Posibles respuestas o procedimientos: Se espera que el estudiante observe que en la segunda balanza se encuentra 3 destornilladores, los cuales pesan igual que 6 tornillos; luego que 1 destornillador pesa igual que 2 tornillos. Por último, que en la primera balanza hay 14 tornillos en el plato de la derecha. Ahora, si quita el destornillador habrá que quitar 2 tornillos para que se mantenga el equilibrio. Luego en la tercera balanza hay que poner 12 (tornillos).

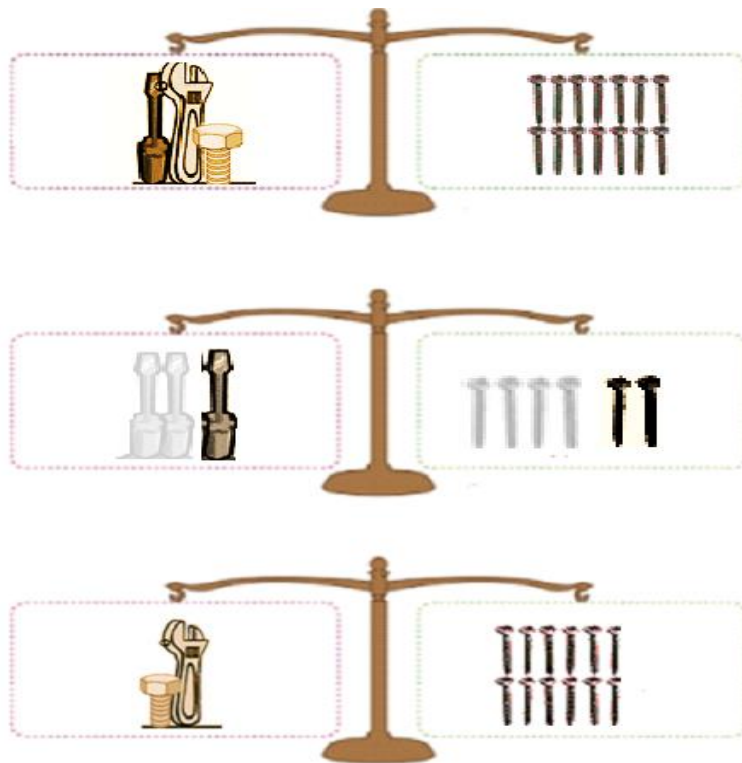


Figura 1. Balanza 2

Tarea 3:

Observa las figuras:

- a. Describe lo que ves ¿Qué observas en la balanza 1?, ¿Qué observas en la balanza 2?
- b. ¿Conoces las balanzas? ¿Qué tipos de balanzas conoces?
- c. ¿De qué trata la situación?
- d. ¿Nos ayudaría las balanzas que utilizamos en Inicio?, ¿Por qué?
- e. ¿Puedes calcular el peso de una piña y de una sandia? ¿Cuánto pesa cada fruta?

Nivel 4: Relacional comparativo

El estudiante debe evaluar y resolver las igualdades numéricas es comparando las expresiones a ambos lados del signo igual incluyendo el uso de estrategias de compensación y el reconocimiento de las relaciones que mantienen la igualdad.

Propiedad o manera de resolver: Propiedad aditiva de la igualdad Compensación

Posibles respuestas o procedimientos: Se espera que el estudiante, identifique que la balanza 1 contiene una sandía más y una piña menos que la balanza 2 y la diferencia es de 4 libras. Por otro lado, una de las piñas de la balanza 2 se convierte de repente en una sandía y gana 4 libras de peso, por lo tanto la diferencia de peso entre una sandía y una piña es de 4 libras.

Luego, si cambiamos todas las sandías de la balanza superior por piñas tendríamos entonces que 7 piñas y 16 libras se equilibran con 37 libras.

Ahora quitamos 16 libras de ambos extremos de la balanza y tenemos que 7 piñas se equilibran con 21 libras lo que demuestra que cada piña pesa 3 libras y por lo tanto cada sandía pesa 7 libras.

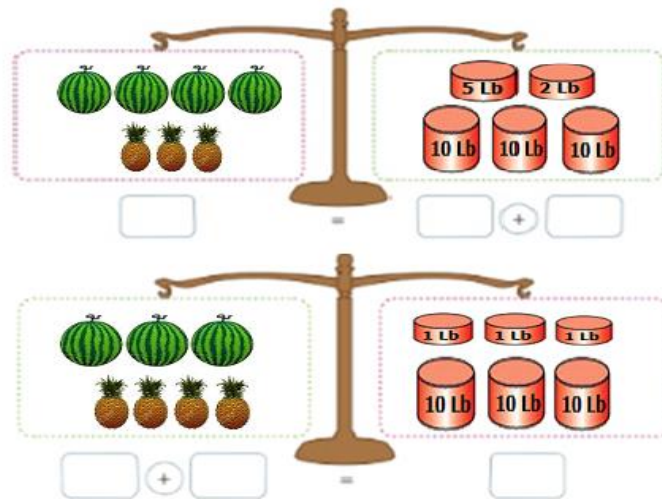


Figura 6. Balanza 3

Esta tarea es tomada y ajustada de los pasatiempos de Sam Loyd.

Tarea 4:

Observa las siguientes balanzas

- ¿Qué observas en la balanza?
- Consideras que está equilibrada. ¿Por qué?
- En el caso de no estar equilibrada ¿Qué podrías hacer para equilibrarla?

Nivel 3: Relacional Básico.

El estudiante debe evaluar y resolver las igualdades numéricas es comparando las expresiones a ambos lados del signo igual incluyendo el uso de estrategias de compensación y el reconocimiento de las relaciones que mantienen la igualdad.

Propiedad o manera de resolver: Compensación y Propiedad aditiva de la igualdad

Posibles respuestas o procedimientos: Se espera que el estudiante dibuje o borre bolitas para así equilibrar la balanza. El estudiante puede determinar que los bloques mas grandes, tienen 10

bolitas. Por lo tanto debe agregar o quitar la cantidad necesaria de bolitas para que se equilibre la balanza. Es decir, se espera que escriba y evalúe las igualdades cuya estructura mantiene operaciones a ambos lados del signo igual. ($a + b = \square + d$; $a + \square = c + d$).

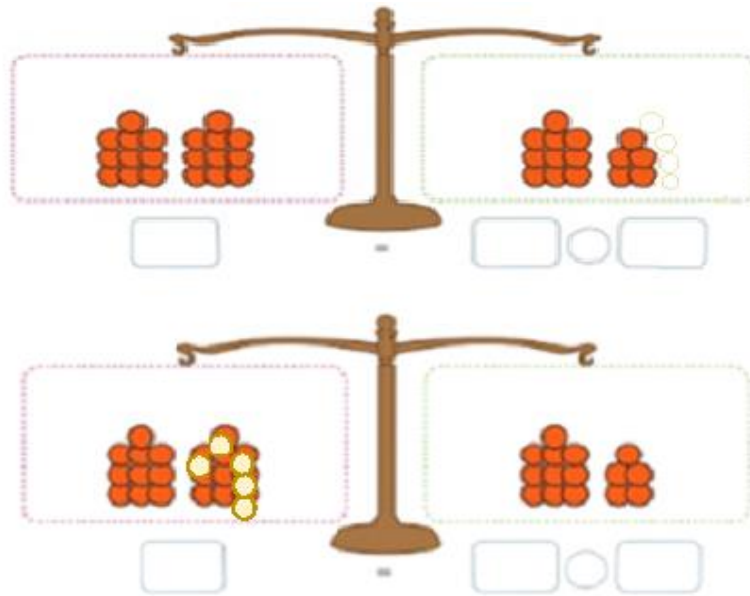


Figura 7. Balanza 4

Nivel 3: Relacional Básico. El estudiante debe evaluar y resolver las igualdades numéricas comparando las expresiones a ambos lados del signo igual incluyendo el uso de estrategias de compensación y el reconocimiento de las relaciones que mantienen la igualdad.

Propiedad o manera de resolver: Compensación y Propiedad aditiva de la igualdad

Posibles respuestas o procedimientos: Se espera que el estudiante dibuje o borre cubos para así equilibrar la balanza. Acá se espera que el estudiante represente el valor desconocido de una igualdad e interprete datos y relacionados en el problema. Para ello, espera que el estudiante dibuje o elimine cubos hasta equilibrar la balanza.



Figura 2. Balanza 6

Por ejemplo para la balanza de Valentina, se espera que el estudiante tenga en cuenta que una bolsa más trece cubos equivale a veintiséis cubos.  + 13 = 26. Por tanto, si retira trece cubos del plato derecho de la balanza, podrá determinar la cantidad de cubos metidos en la bolsa.

5.3.1.4 Cuadrados Mágicos. Los problemas denominados “cuadrados mágicos”, que podrían utilizarse para trabajar las nociones de igualdad (numérica y algebraica) y equilibrio. Albendea (2011)

Tomando un cuadrado mágico, tiene como objetivo acomodar ciertos números o expresiones que cumplen que la suma de cualquier conjunto en línea, es siempre la misma.

En este conjunto de tareas, los estudiantes deberán ubicar los números del uno (1) al nueve (9) en los cuadros, de tal manera que al sumar en línea obtengan una determinada cantidad.

Tarea 1:

Ubica en los círculos los números del uno (1) al seis (6), de tal manera que al sumar cada tres valores de los lados sea nueve (9).

Nivel 2: Operacional Flexible. Se requiere que el estudiante plantee y resuelva igualdades de tipo. ($\square = a + b$) antes o después ($a + b = \square$) del signo igual.

Propiedad o manera de resolver: Compensación

Posibles respuestas o procedimientos: Se espera que el estudiante, a partir del número 6 ubicado en la parte inferior del arreglo, encuentre dos números que al sumarlos de como resultado 3. Es decir, el residuo de la resta entre lo solicitado (12) y el dato (6).

Tareas 2 a 7:

Ubica en los círculos los números del uno al..., de tal manera que al sumar cada tres valores de los lados sea...

Nivel 3: Relacional Básico ya que el estudiante debe plantear, evaluar y resolver igualdades de tipo.

$$a + b = c + d$$

$$a + b - c = d + e, a + b = c + d \text{ y}$$

$$a + b - c = d + e$$

Propiedad o manera de resolver: Compensación

Posibles respuestas o procedimientos: Se espera que el estudiante encuentre todas las sumas posibles que dan un mismo resultado. Para ello, se requiere que el estudiante rellene con el número que quiera la casilla del centro de la línea y complete el resto con números, de tal forma que al hacer las operaciones den siempre el resultado que has puesto en el centro del diagrama. A medida que el estudiante vaya desarrollando la actividad, el nivel de la tarea va aumentando. El estudiante evalúa y resuelve correctamente la tarea, al incluir el uso de estrategias de compensación y el

reconocimiento de que las relaciones que mantienen la igualdad. En este caso, resuelve más eficientemente aplicando relaciones simplificadoras.

Tarea 8:

En cada casilla tienes que colocar un número del uno (1) al nueve (9), de modo que el número en cada círculo sea equivalente a la suma de los cuatro recuadros de los lados, y la suma de los cuadrados del mismo color sea el de los círculos de abajo.

Nivel 4: Relacional comparativo

Propiedad o manera de resolver: Compensación

Posibles respuestas o procedimientos: Se espera que por medio de ensayo y error, el estudiante ubique los números del 1 al 9 en los círculos de un cuadrado 3 x 3, de modo que el número en cada círculo sea equivalente a la suma de los cuatro recuadros adyacentes. Además, la suma de los cuadrados de colores iguales debe encajar también con el resultado facilitado en tres círculos dados en la parte inferior de la figura.

Se espera que el estudiante, inicialmente realice las tres posibles combinaciones con las que puede obtener en la suma 8

1	7	5	3
---	---	---	---

6	2
---	---

 observe que no puede tomar los números 6 y 2, ya que el 6 está ubicado en la parte superior derecha. Seguidamente se espera que el estudiante tenga en cuenta que la suma de los

en color naranja oscuro.



tres números tomados

5.3.1.5 Resolviendo Problemas. Para Molina (2005) las relaciones son los conceptos e ideas en los que se centra la atención del estudiante, para dar respuesta a un determinado problema. Se considera las cuatro tareas de Nivel 4 (Relacional comparativo) teniendo en cuenta que el

estudiante debe evaluar y resolver las igualdades numéricas comparando las expresiones a ambos lados del signo igual incluyendo el uso de estrategias de compensación y el reconocimiento de las relaciones que mantienen la igualdad.

Tarea 1:

La clave de la caja fuerte

He querido abrir mi caja fuerte y no me acordaba de mi clave secreta. Menos mal que tenía unas pequeñas notas para recordarla. Mi clave tenía cinco cifras que voy a llamar a, b, c, d y e

Propiedad o manera de resolver: Escribimos las indicaciones que no dan las notas en forma de pequeñas ecuaciones:

$$a + b = 17$$

$$b + c = 15$$

$$c + d = 15$$

$$d + e = 9$$

$$a + e = 8$$

Al sumar todas las ecuaciones. De esta forma se obtiene: $2a + 2b + 2c + 2d + 2e = 64$. Por tanto, $a + b + c + d + e = 32$. Con este resultado podemos ir despejando todas las incógnitas utilizando para eso las cinco ecuaciones anteriores:

$$(a + b) + (c + d) + e = 32 = 17 + 15 + e \text{ luego } e = 0$$

$$(a + b) + c + (d + e) = 32 = 17 + c + 9 \text{ luego } c = 6$$

$$a + (b + c) + (d + e) = 32 = a + 15 + 9 \text{ luego } a = 8$$

$$d + e = 9 \text{ luego } d = 9$$

$$a + b = 17 \text{ luego } b = 9$$

Por tanto, la clave secreta es:

8 9 6 9 0

Posibles respuestas o procedimientos:

Se podría esperar que el estudiante plantee las ecuaciones $a + b = 17$, $b + c = 15$, $c + d = 15$, $d + e = 9$ y $a + e = 8$. Seguidamente ubique aleatoriamente dígitos y por mediante estrategias de compensación logre determinar los números que cumplan la condición.

Tarea 2:

De los siete patos metidos en un cajón ¿Cuántos picos y patas hay en el cajón?

Propiedad o manera de resolver:

7 patos x 2 patas = 14 patas

7 patos x 1 pico = 7 picos

Posibles respuestas o procedimientos: Se espera que el estudiante tenga en cuenta que se tiene siete (7) patos y cada pato tiene dos (2) patas por tanto, se tendría 14 patas. Por otro lado, como cada pato tiene un pico, se tendría siete (7) picos.

Tarea 3:

Una ranita cae en un pozo de 30 metros de profundidad. En su afán por salir, en el día sube 3 metros. Pero en la noche, resbala y baja 2 metros. ¿Cuántos días tardará la rana en salir del pozo?

Propiedad o manera de resolver: Teniendo en cuenta que al día 27 la ranita ha subido 81 metros ($27 \times 3 = 81$) y ha descendido 54 metros ($27 \times 2 = 54$). Por tanto, la ranita a los 27 metros ($81 - 54 = 27$) ha avanzado 27 metros, en este caso al día 28 avanza los 30 metros.

Posibles respuestas o procedimientos: Se podría esperar que el estudiante note que el día 26 se encuentra a 4 metros de la salida, el día 27 estaría a 2 metros de la salida. Por tanto, el día 28 saldría del pozo.

5.3.2 Implementación de Tareas y desarrollo de la Actividad. Con base en el diseño y el análisis a priori sustentado en la etapa anterior, se hace la implementación de las Tareas en el aula, las cuales se resolvieron en siete sesiones de trabajo por un grupo heterogéneo de diecisiete estudiantes que cursaban tercero primaria con edades comprendidas entre los 8 y 9 años.

Se buscó para el desarrollo de la Actividad, que cada estudiante encontrará en el salón de clase un ambiente que le permitiera pensar y razonar sobre las estrategias involucradas en la solución de una tarea matemática, razonar sobre ellas y comunicar sus ideas. Se buscó un ambiente que permitiera la formulación de ideas, el desarrollo de argumentos, la validez, verificación y en su medida la demostración que aquello que se propone como verdadero (Santos-Trigo, 2007). Considerando que propiciar la discusión en relación a la temática abordada, permite profundizar en los significados que le atribuyen los estudiantes al signo igual.

La mayor parte de las actividades se llevaron a cabo de manera individual, pues se buscaba evidenciar el nivel de desarrollo del pensamiento relacional de los estudiantes. Se realizaron

videos de las sesiones y de las respuestas dadas por estudiantes; para esto se cuenta el permiso de los acudientes. Además, se tomó nota de lo ocurrido en el aula y se recogieron las hojas de trabajo de los estudiantes.

Inicialmente se aplicó el test diagnóstico; se les indicó a los estudiantes que con estas actividades se buscaba fortalecer sus habilidades para resolver tareas en matemáticas, y por ende no serían evaluadas, los estudiantes dispusieron de 90 minutos para responderlo. Como se mencionó anteriormente cada estudiante trabajó individualmente (ver Figura 9), recurriendo a estrategias como conteo con los dedos y realizando operaciones escritas en sus hojas de trabajo.

La primera parte de la guía de trabajo fue muy bien aceptada por los estudiantes, indicando que solo debían realizar sumas o restas. Al finalizar esta tarea, se pudo evidenciar que existe una cantidad limitada de estudiantes que logra evaluar y resolver exitosamente ecuaciones comparando las expresiones a ambos lados del signo igual, para generar así, una interpretación relacional del signo igual. Vemos que el nivel más desarrollado, es el Nivel 1 (Operacional Rígido) donde los estudiantes definen el significado signo igual como una cadena de operaciones. Es decir, evalúan y resuelven ecuaciones de tipo $a + b = \square$ y $a + \square = c$. En este sentido, podemos evidenciar la interpretación dada por los estudiantes en niveles básico, es construida en mayor proporción como una operación y no como el indicador de una relación de equivalencia, aspecto mencionado por investigadores como Burgell (2013), Molina (2005) y Parodi, Ochoviet y Lezama (2017) con respecto al signo igual (=).



Figura 9. Sesión 1. Guía diagnóstica

Para la actividad número dos “trabajo con regletas”; se tenía estipulado un tiempo de 180 minutos, distribuidos en dos sesiones consecutivas de 90 minutos cada una. Sin embargo, estas tareas se realizaron en tres sesiones: dos de 90 minutos y una de 45 minutos. Cada estudiante trabajó individualmente las dos primeras sesiones y en la tercera sesión se dispuso a trabajar en parejas con la finalidad de discutir (entrevista) en el aula sobre la relación que pueden realizar los estudiantes de una cantidad determinada a partir de los diferentes resultados obtenidos según la composición y descomposición de cantidades (trenes) y así poder profundizar en los significados que le atribuyen al signo igual, contribuyendo así con el objetivo de esta investigación. De este tipo de tarea podemos indicar que los niveles de pensamiento relacional de esta población varía entre el Nivel 1 (Operacional Rígido) y el Nivel 2 (Operacional Flexible). Para finalizar se hizo entrega a cada estudiante de la guía 4, con la finalidad de que cada uno plasmara sus respuestas.

Por último, con la guía número cinco se buscó indagar la habilidad de los estudiantes a la hora de evaluar y resolver situaciones problemas sencillos sin hacer uso necesariamente de igualdades numéricas abiertas.

5.3.3 Recolección y Selección de Datos. La recolección de datos es un aspecto significativo en este proceso de aplicación, pues permiten describir con precisión las interacciones ocurridas en el aula y la evolución por parte de los estudiantes. En esta investigación, la recolección de datos se enfoca en analizar las guías de trabajo, videos, notas del investigador y discusiones realizadas por los estudiantes sobre los usos y significados del signo de igual en situaciones aritméticas.

En este proceso escuchar a los estudiantes, confrontarlos y analizar los argumentos que exponen para convencer a los otros, es un aspecto fundamental, puesto que con ello se podía identificar fortalezas y dificultades que presentaban al momento de realizar las tareas.

5.3.4 Análisis de Datos. Se presenta el análisis del proceso de los estudiantes referente al pensamiento relacional, cuando abordan expresiones aritméticas en diferentes contextos que involucran el signo igual como una relación de equivalencia.

6. Análisis de Resultados

En este capítulo presentamos algunas evidencias del trabajo de aplicación resultado de implementar las tareas propuestas y de realizar una serie de entrevistas a un grupo de estudiantes de tercero primaria (8 y 9 años). Además, analizamos dichas evidencias a la luz del marco teórico adoptado de Matthews et al., (2012) estructurando datos que nos permitirán, junto al análisis de otras evidencias, responder la pregunta de investigación y cumplir con los objetivos propuestos.

El análisis se realizó con una revisión exploratoria del trabajo realizado por todos los estudiantes en cada una de las tareas; iniciando con la prueba diagnóstica, la cual permitió valorar la comprensión del signo igual por parte de los estudiantes, identificar las estrategias empleadas y las dificultades en la resolución de diversos tipos de igualdades.

Nos fijamos en todas las respuestas de los estudiantes para luego clasificarlas según el nivel de pensamiento relacional, categorizadas por Matthews et al., (2012, p.224). Al finalizar cada tabla, planteamos algunas consideraciones globales que surgen del análisis realizado.

6.1 Prueba Diagnóstica

6.1.1 Tareas con Igualdades caracterizadas a Nivel 2. Operacional Flexible, Cuya estructura es $___ = b + c$.

Tarea 1 (b):

Completa con el número que hace verdadera cada igualdad. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

$$\square = 23 - 11$$

Con esta tarea (completar) se evidenció buenos resultados. El 76,4% correspondiente a trece estudiantes lograron tomar el signo igual como un símbolo que separa una secuencia de operaciones y su resultado, sin importar que este se encontrara a la derecha del signo igual (Nivel 2. Operacional Flexible), respondió acertadamente y el 23,5%. Es decir, cuatro estudiantes de esta población toman una visión única del signo igual (Nivel 1. Operacional Rígido), cuya estructura se compone por una cadena de operaciones, el signo igual y seguido por la respuesta. Es decir,

cuando las operaciones se sitúan al lado izquierdo del signo igual ($a + b = \square$) o incluso cuando el espacio en blanco se sitúa antes del signo igual ($a + \square = b$).

Como ejemplo, Leticia quien tomó el signo igual como un símbolo que separa una secuencia de operaciones, resolvió exitosamente la igualdad abierta cuya estructura es $\square = a + b$.

1. Completa con el número que hace verdadera cada igualdad. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

b. $\boxed{12} = 23 - 11$

Figura 3. Tarea resuelta por Leticia

1. Completa con el número que hace verdadera cada igualdad. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

b. $\boxed{34} = 23 - 11$

Figura 11. Tarea resuelta por Juan D.

Juan D. aunque también tomó el signo igual como un símbolo que separa una secuencia de operaciones, no logró resolver la igualdad con éxito, ya que como vemos en su respuesta suma los números dados a Matthews et al (2012) al lado derecho de la igualdad en lugar de restarlos.

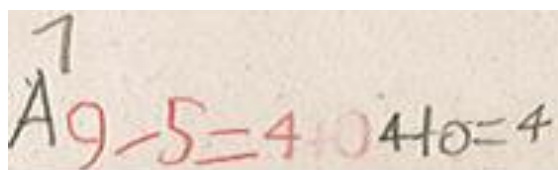
6.1.2 Tareas con Igualdades caracterizadas a Nivel 3. Relacional Básico. Se presentó a los estudiantes cuatro tareas cuyas estructuras están descritas en la tabla, expuestas por Matthews et al (2012) dentro del Nivel 3. Y cuyo objetivo fue averiguar el nivel de desarrollo del pensamiento relacional que tenían los participantes en relación a este tipo de igualdades.

$$a + b = _ + c \quad a + _ = b + c \quad a + b = c + _ \quad a + b = _ + c = _$$

$$9 - 5 = _ + 4 \quad 14 + _ = 12 + 5 \quad 21 + 6 = 6 + _ \quad 90 \div 3 = _ + 3 = _$$

Con respecto a los ítem (a) $9 - 5 = \square + 4$ y (e) $14 - 6 = \square + 5$, los resultados no fueron los más acertados. Concretamente el 12% de los estudiantes respondió acertadamente (Nivel 3. Relacional Básico) puesto que reconocieron la definición relacional del signo igual como correcta, es decir lograron relacionar, evaluar y resolver con éxito la ecuación con operaciones a ambos lados del signo igual.

El ítem *a* fue respondido correctamente solo por dos estudiantes Alan y Leticia, a modo de ejemplo tomamos la Tarea resuelta por Alan (Ver Figura 12), quien en la primera igualdad abierta hizo uso de la propiedad modulativa para dar justificación.



1. Completa con el número que hace verdadera cada igualdad. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

a. $9 - 5 = \boxed{4} + 4$

Figura 12. Tarea resuelta por Alan en la prueba diagnóstica.

Sin embargo el 88% de la población toma una visión única del signo igual; cuya estructura se compone por una cadena de operaciones y el signo igual seguido por una respuesta (Nivel 1). Es

decir, cuando las operaciones se sitúan al lado izquierdo del signo igual ($a + b = \square$) o incluso cuando el espacio en blanco se sitúa antes del signo igual ($a + \square = b$).

Vemos en repetidas ocasiones que los estudiantes tienden a operar las cantidades a la izquierda del signo igual, e indican el resultado a la derecha, $9 - 5 = \square + 4$ o en algunos casos, realizan una cadena de operaciones dando a conocer el resultado de operar $9 - 5 = \square + 4 = 8$ sin tener en cuenta que el valor que tienen a la izquierda del signo igual no representa el mismo objeto matemático que tienen a la derecha de este.

Por ejemplo, Juan F. operó las cantidades a la izquierda del signo igual, y por tanto escribió el resultado a la derecha del signo igual. Es decir, el estudiante busca dar solución a igualdades con estructura ($a + b = \square$) donde las operaciones se sitúan al lado izquierdo del signo igual

1. Completa con el número que hace verdadera cada igualdad. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

a. $9 - 5 = \square + 4$

Figura 4. Tarea resuelta por Juan F. en la prueba diagnóstica.

Con la igualdad abierta $14 + \square = 12 + 5$, respondida por doce estudiantes, de los cuales seis evaluaron y resolvieron con éxito la igualdad abierta cuya estructura mantiene operaciones a ambos lados del signo igual, se podría indicar que en estos estudiantes se ha desplazado en cierta parte la visión operacional, lo cual permite asociar su nivel de pensamiento relacional en operacional flexible (Nivel 3) pues lograron relacionar, evaluar y resolver exitosamente estructuras de ecuaciones con la particularidad $a + \square = c + d$, observaron que a ambos lados de la igualdad,

las expresiones se refieren al mismo objeto matemático, es decir, tienen el mismo valor numérico, que en términos de nuestro marco teórico, se da inicio al reconocimiento de la definición relacional del signo igual. Ejemplo de ello es Alan, de quien se muestra la tarea resuelta.

1. Completa con el número que hace verdadera cada igualdad. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

c. $14 + \boxed{3} = 12 + 5$

Figura 14. Tarea resuelta por Alan en la prueba diagnóstica.

Por otra parte, los otros seis estudiantes mantienen una visión operacional (Nivel 1) tal como se presenta a continuación en la respuesta de Elkin.

1. Completa con el número que hace verdadera cada igualdad. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

c. $14 + \boxed{17} = 12 + 5 = 17$

Figura 15. Tarea resuelta por Elkin en la prueba diagnóstica.

Este estudiante no logró relacionar las expresiones dadas a ambos lados de la igualdad, pues operó las cantidades dadas al lado derecho del signo igual $14 + \boxed{17} = 12 + 5$ e indicó que el número que hace verdadera la igualdad es 17.

En el ítem $21 + 6 = 6 + \boxed{}$, se esperaba que los estudiantes logaran observar, relacionar y resolver con éxito esta igualdad cuya estructura está compuesta por operaciones a ambos lados del signo igual ($a + b = b + a$). Además, con la característica que esta expresa la propiedad

conmutativa de la suma. Como podemos ver en la tabla 9, solo el 11,7% lograron este objetivo. El 76,4% correspondiente a trece estudiantes, sumaron todos los términos ubicados al lado izquierdo del signo igual y escribieron la respuesta al lado derecho de este tal como se observa a continuación.

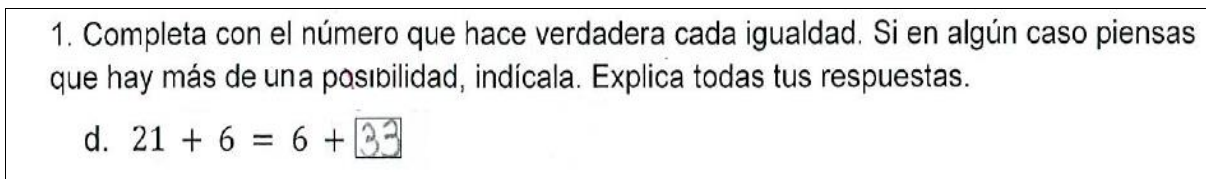


Figura 16. Tarea resuelta por Maily en la prueba diagnóstica.

Teniendo en cuenta este tipo de respuestas y a la luz del marco teórico adoptado de Matthews et al (2012) consideramos que este grupo de estudiantes toma una visión única del signo igual (Nivel 1); cuya estructura se compone por una cadena de operaciones y el signo igual seguido por la respuesta, pues suman todos los términos ubicados al lado izquierdo del signo igual y escriben la respuesta al lado derecho de este $21 + 6 = 6 + 33$.

La igualdad abierta $90 \div 3 = \square + 3 = \square$. No fue contestada por 58,8% de la población. De los estudiantes que respondieron a esta parte de la tarea, solo el 11,7% (2 estudiantes) aunque resolvieron de manera operacional la primera parte, al lado izquierdo operaron las cantidades y lograron resolver con éxito esta primera parte, seguido de esto escriben el resultado al lado derecho del signo. Luego, sin tener éxito resolvieron la igualdad que se encontraban al lado derecho, y por ultimo terminan escribiendo el resultado a la derecha del siguiente signo igual. Sin embargo, sin tener éxito resolvieron la igualdad que se encontraba al lado derecho de este terminan escribiendo el resultado a la derecha del siguiente signo igual.

1. Completa con el número que hace verdadera cada igualdad. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

f. $90 \div 3 = \boxed{30} + 3 = \boxed{33}$

Figura 17. Tarea resuelta por Alan en la prueba diagnóstica.

Por otra parte el 29,4% de la población, utilizó el signo igual como un separador de pasos a realizar o cadena de operaciones, de acuerdo a esto Matthews et al (2012), indica que estos errores son el resultado de la exposición casi exclusiva del formato estándar (indicado)-operaciones- signo igual-respuesta (por ejemplo, $4 + 5 = 9$), podemos ver en esta investigación que parte de esta población restan las cantidades y escriben el resultado al lado derecho. Siguiendo este procedimiento, suman las cantidades expuestas después del signo, y escribe el resultado, viendo las dos igualdades como una cadena de operaciones consecutivas. Por tanto, la interpretación del signo igual como una señal de operador, conlleva al estudiante a rechazar ecuaciones de tipo $a = a$ y de tipo $a + b = a + a + c$ y pensar en estas como falsas o absurdas. A continuación se muestra la respuesta de Jerónimo quien realiza la suma de todos los términos de la izquierda y seguidamente escribe el resultado al lado derecho de la igualdad, el cual visto desde nuestro marco teórico, el estudiante solo tienen éxito con ecuaciones de estructura: Cadena de operaciones, seguido del signo igual y respuesta, perteneciente al Nivel 1(Operacional Rígido).

1. Completa con el número que hace verdadera cada igualdad. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

f. $90 \div 3 = \boxed{93} + 3 = \boxed{96}$

Figura 18. Tarea resuelta por Jerónimo en la prueba diagnóstica.

En términos de Molina (2006) esta interpretación del signo igual, sujeta a expresiones que en un contexto dado pueden no tener relación alguna, y ser solamente pasos sucesivos en la resolución de una actividad.

La siguiente tarea, es un poco más complicada que la anterior. Se clasifica para el nivel 4 (Relacional comparativo) y se empleó con el fin de determinar en los estudiantes la comprensión que estos tienen del signo igual. Al aplicarla, se esperaba que los estudiantes compararan las expresiones a ambos lados del signo igual, e hicieran uso de estrategias de compensación y reconocimiento de las relaciones que mantienen la igualdad, para así determinar la veracidad o falsedad de estas expresiones. De acuerdo a esto, realizaremos un análisis de los niveles de pensamiento relacional según Matthews et al (2012) de esta población.

Con la igualdad cerrada $16 = 7 + 9$, logramos determinar que el 82,3% de la población tomó el signo igual como un símbolo que separa una secuencia de operaciones y su resultado. Es decir, como una cadena de operaciones que se sitúan únicamente al lado izquierdo del signo igual ($a + b = \boxed{}$) que visto desde la categorización Matthews et al (2012), el nivel de desarrollo del pensamiento relacional por parte de este grupo de estudiantes en su concepción del signo igual, se encuentra en el Nivel 1 (Operacional Rígido). Por otro lado, 14 de los 17 estudiantes lograron determinar de manera correcta el valor de verdad de la igualdad. A continuación, mostramos la respuesta de Pedro quien logró determinar con éxito el valor de verdad de esta igualdad, aplicando sin enunciar la propiedad simétrica en la igualdad.

2. Observa las siguientes igualdades. Luego indica en cada una, si es verdadera (V) o falsa (F). Si es verdadera, explica porqué y en las que sean falsas indica donde está el error.

16 = 7 + 9 porque 16 es el resultado de 7 + 9

Figura 19. Tarea resuelta por Pedro en la prueba diagnóstica.

Al aplicar esta igualdad ($5 + 9 = 14 \div 2 = 7$) se esperaba que los estudiantes realizaran las operaciones de suma y división, para relacionar los valores dados e indicaran que esta expresión es falsa puesto que no cumple con la propiedad de transitividad o que no se da una relación de equivalencia. Solo un estudiante (Jerónimo) logró evaluar y determinar con éxito este propósito.

Es decir, este estudiante logra tener una comprensión relacional comparativa del signo igual (Nivel 4).

7+9 da 16. Jerónimo 3A
siete mas nueve da dieciseis pero
siete mas nueve no da siete

Figura 20. Tarea resuelta por Jerónimo en la prueba diagnóstica.

Por otro lado, vemos en la tabla anterior que el 58,8% se encuentra en el Nivel 1 (Operacional Rígido), con lo cual podemos indicar que esta población define el signo igual como una cadena de operaciones, fijando su mirada en una única parte de la igualdad. Es decir, tomaron la igualdad como una cadena de operaciones. Ejemplo de ello, presentamos la tarea resuelta por Pedro quien considera solo una parte de la igualdad e indica que esta expresión es verdadera ya que $5 + 9 = 14$. En este orden de ideas, el estudiante no reconoce que la igualdad matemática es un ejemplo

de una relación de equivalencia y por lo tanto satisface las propiedades simétrica, reflexiva y transitiva.

A handwritten note on lined paper that reads "si por que 5+9 da 14". The text is written in a cursive, somewhat messy style with dark ink.

Figura 21. Tarea resuelta por Pedro en la prueba diagnóstica.

Juan D. quien intenta dar respuesta a esta igualdad. Para ello, menciona en su entrevista:

Juan D: Esta me parece dificil

PI: ¿Por qué te parece dificil?

Juan D: Porque yo se que 5 mas 9 da 14 pero no sé si 14 dividido da 7, pero como 5 mas 9 da 14, entonces 14 dividido en 2.... Debe dar ese numero

PI: Esta bien!

Vemos que Juan D. no analiza sus argumentos al justificar si es verdadera o falsa, recae en el error de sumar todos los objetos dados

Con respecto a la igualdad cerrada $51 + 51 = 50 + 52$, solo doce estudiantes dieron respuesta de los cuales seis vistos desde la categorización propuesta en nuestro marco teórico se muestran en un Nivel 4 (Relacional Comparativo). Es decir, lograron comparar e identificar con éxito la relación de equivalencia entre los dos lados del signo igual. Ejemplo de ello, Alan quien opera las dos cantidades dadas a ambos lados del signo igual e indica que estas expresiones son equivalentes puesto que el resultado es el mismo. Para evidenciar las estrategias o razonamiento explícitamente relacional de este estudiante, se realizó una breve entrevista.

PI: ¿Tu respuesta es verdadero, por qué lo consideras así?

Alan: Es verdadero porque 51 más 51 da 102... y 50 más 52 da 102...

PI: ¿Qué significado tiene que de 102?

Alan: Pues que las sumas tienen el mismo resultado

PI: ¡Sí! Está bien.

Handwritten text on a piece of paper: $C. 51+51=50+52$ y por que $51+51$ da 102 y $52+50=102$

Figura 5. Tarea resuelta por Alan en la prueba diagnóstica.

Por otro lado, exponemos la respuesta de María J. (Figura 16) quien manifiesta que esta expresión es falsa, dado que la suma de los datos dados al lado izquierdo no puede ser menor que uno de los sumandos. Como vemos, la estudiante define el signo igual como una cadena de operaciones situadas al lado izquierdo de este ($a + b = \square$), estructura correspondiente al Nivel 1 (Operacional Rígido), puesto que busca resolver igualdades abiertas cuya estructura se compone por una cadena de operaciones, el signo igual y seguido por la respuesta.

Handwritten text on a piece of paper: $C. no se puede$ porque un numero mayor no puede dar un numero menor
por ejemplo $51+51=50$

Figura 6. Tarea realizada por María J. en la prueba diagnóstica.

Llama la atención del investigador la igualdad cerrada $9 = 9$ Puesto que para el 70,5% de la población esta expresión es falsa porque a su parecer no hay otro u otros números que permitan

operar las cantidades dadas o simplemente porque no aparece un signo que determine una operación Nivel 1 (Operacional Rígido). Al parecer gran parte de la población no determina la reflexividad de este objeto matemático como identidad estricta. Por ejemplo Sara indica en su respuesta que esta expresión es falsa puesto que no existe un signo que indique la operación a realizar.

Handwritten text on a piece of paper: "9=9, ES falso porque no es suma". The text is written in dark ink on a light-colored, slightly textured paper.

Figura 7. Tarea realizada por Sara en la prueba diagnóstica.

Por otra parte, el 29,4% logró reconocer la reflexividad de este objeto matemático, es decir lograron determinar que se está representando el mismo objeto matemático. A continuación, mostramos la respuesta de Alan y Juan D, de quienes se podría decir que reconocen la relación de equivalencia entre los dos lados del signo igual. Por tanto, han desarrollado un Nivel 4 (Relacional comparativo).

Handwritten text on a piece of paper: "9=9 v porque nueve es igual a nueve". The text is written in dark ink on a light-colored, slightly textured paper.

Figura 8. Tarea resuelta por Alan en la prueba diagnóstica.

Handwritten text on a piece of paper: "es verdadero Por que 9 es lo mismo". The text is written in dark ink on a light-colored, slightly textured paper.

Figura 9. Tarea resuelta por Juan D. en la prueba diagnóstica.

En búsqueda de indagar sobre el reconocimiento y uso de las propiedades del cero como elemento neutro de la suma e indicar el valor de verdad de una expresión, se planteó el ítem $24 + 0 = 25$.

De ello, podemos indicar que el 11,7% de la población (2 estudiantes) logró reconocer la relación de equivalencia entre los dos lados del signo igual, generando así una interpretación relacional del signo igual. Ejemplo de esto son los argumentos de María G. y Pedro, quienes sin indicar que cero es el elemento neutro de la suma, logran determinar la veracidad de la igualdad.

F f. $24 + 0 = 25$ porque $24 + 0$ da 24

esta mal porque $24 + 0$ da 24
pero muestra queda 25.

Figura 27. Tarea resuelta por María G. en la prueba diagnóstica.

Sin embargo vemos que el 35,2% logra estar cerca a nivel, pues reconocen la definición relacional del signo igual como correcta mas no dan los suficientes argumentos que determinen la falsedad de la expresión $24 + 0 = 25$. Por tanto se describen en el Nivel 3 (Relacional Básico) Alan por ejemplo, determina con éxito el valor de verdad de la expresión mas no los argumentos consistentes de una interpretación relacional del signo igual.

F $24 + 0 = 25$ F porque $24 + 0$ no da 25

Figura 10. Tarea resuelta por Alan en la prueba diagnóstica.

6.2 Guía de trabajo N°1: Usando regletas

Tareas 1, 2 y 3:

1. Construye trenes con vagones de igual color que tengan la misma longitud de la regleta azul. ¿Cuántos trenes de diferente color puedes construir?
2. Vamos a unir una regleta azul y una rosada para construir un tren matemático, como se muestra en la figura.
3. Elige una regleta, por ejemplo la amarilla, ¿puedes formar trenes de igual longitud con otras regletas que tengan la misma longitud que la seleccionada? ¿Cuántos trenes puedes construir? Dibújalos. ¿Consideras que hay otros trenes con esta característica? ¿Cuáles?

En las tareas 1, 2 y 3 se solicitó a los estudiantes que formaran trenes con regletas distintas, pero de la misma longitud a la dada. Se buscaba que la población identificara las características en común de los trenes, es decir, que una cantidad determinada se pudiera escribir como otras de igual longitud. Para resolver esta tarea, el estudiante tenía que buscar regletas que, añadidas al tren inicial, formara trenes de la misma longitud, donde a partir de una solución, podía encontrar diferentes resultados ya que, dentro de su elección tenía cantidades con dos o más de dos divisores. Esto determinado por la composición y descomposición de números.

En el ítem 1 de la tarea dos se buscaba que los estudiantes construyeran trenes con vagones de igual color; dichos trenes debían tener la misma longitud de la regleta azul. Además se esperaba que identificaran cuántos trenes de diferente color podrían construir. Es importante resaltar que la mayoría de la población es decir el 47.05% presentó dificultad al momento de ejecutar esta tarea, ya que formaron cada tren con vagones de diferentes colores. Distinguimos soluciones como añadir regletas al tren inicial, de modo que se formen trenes de la misma longitud, dada, vemos la repuesta de Leticia quien indica que “Se puede formar un tren con una regleta amarilla y una rosada. Pues, la amarilla corresponde a cinco (5) y la rosada a (4)”. Sin embargo, parte de estas

construcciones no cumple con las características indicadas (vagones del mismo color que tengan la misma longitud de la regleta azul). Como es el caso de Leticia y Silvia los cuales se muestran a continuación:

Primer Puntio
1 café y una blanca
1 negra y 1 roja
1 amarilla y 1 rosada

Figura 29. Tarea resuelta por Leticia en el uso de regletas.

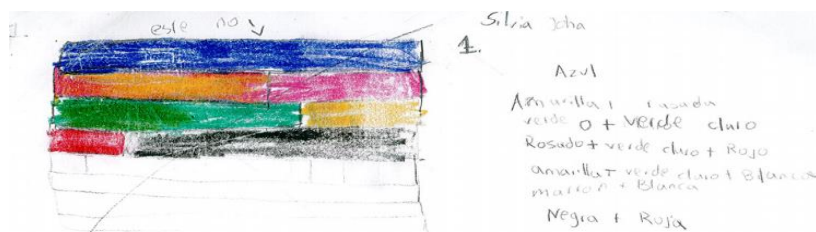


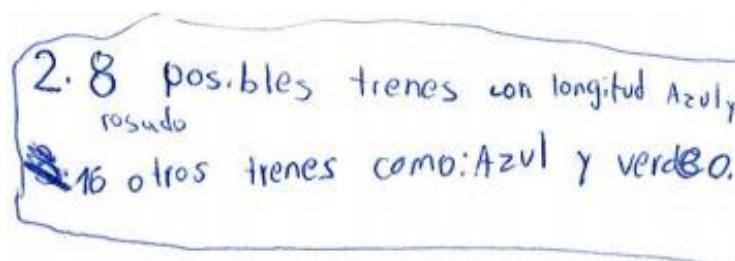
Figura 30. Tarea resuelta por Silvia en el uso de regletas.

Tarea 2:

Vamos a unir una regleta azul y una rosada para construir un tren matemático. ¿Puedes construir otros trenes con otras regletas con la misma longitud? ¿Cuáles? Constrúyelos y dibújalos

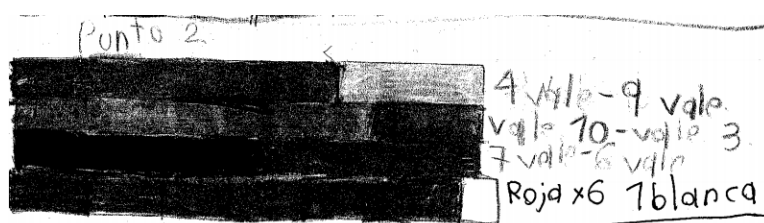
En el ítem 2 de la tarea dos, los estudiantes debían unir una regleta azul y una rosada formando un tren matemático, y a partir de este nuevo tren analizar si podrían construir otros trenes con otras regletas de diferentes colores de tal forma que mantuvieran la longitud del tren matemático inicial. En este caso el 64,70% de la población tuvo dificultad puesto que no lograron formar los trenes con la misma longitud del tren dado. Por otro lado, el 29,41% de la población realizó algunas

combinaciones no acertadas a lo solicitado y sin justificar su razonamiento, en este caso indicamos que el nivel de desarrollo del pensamiento relacional es Operacional Rígido (Nivel 1), puesto que los estudiantes solo buscaban dar respuesta a esta tarea. Algunos de los casos a exponer son los de Silvia y Santiago U. quienes indican una determinada cantidad sin evaluar su relación de equivalencia con otros trenes.



2.8 posibles trenes con longitud Azul y rosado
16 otros trenes como: Azul y verde.

Figura 31. Tarea resuelta por Silvia en el uso de regletas.



Punto 2
4 v. 10 - 9 v. 10
v. 10 - 10 - v. 10 3
7 v. 10 - 6 v. 10
Roja x6 Blanca

Figura 32. Tarea resuelta por Santiago U. en el uso de regletas.

Tarea 3

Elije una regleta, por ejemplo la amarilla, ¿puedes formar trenes de con otras regletas que tengan la misma longitud que la seleccionada? ¿Cuántos trenes puedes construir?

Dibújalos.

¿Consideras que hay otros trenes con esta característica? ¿Cuáles?

En la tercera tarea, el estudiante debía escoger una regleta del color que él quisiera y a partir de esta, formar trenes de esta misma longitud e indicar de cuantas formas sería posible tomar

diferentes trenes de regletas que cumplieran la condición dada. Podemos observar que la mayoría de la población 58,82% logró el objetivo propuesto, como se muestra en las actividades realizadas por Santiago U. quien a partir de una solución, logró encontrar diferentes resultados ya que, dentro de su elección logró determinar cantidades con dos o más de dos divisores sin indicar necesariamente este proceso.

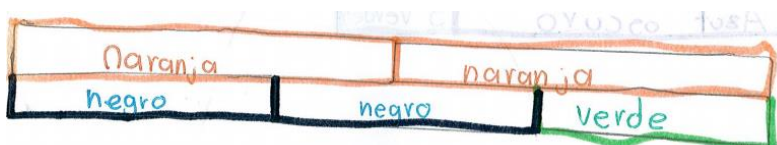


Figura 33. Tarea resuelta por Santiago U. en el uso de regletas.

Otro ejemplo de solución es la de Alan, quien toma la regleta amarilla, e indica que los trenes que puede formar con igual longitud son once. Entre los cuales, tiene en cuenta la misma regleta o tren (propiedad conmutativa).

- | | |
|----------------|--------------------|
| 3. 1. Amarillo | 6. blanco rojo x 2 |
| 2. rojo verde | 7. Amarillo |
| 3. verde rojo | 8. rojo x 2 |
| 4. rosa | 9. rojo |
| 5. verde | 10. |

Figura 11. Tarea resuelta por Alan en el uso de regletas.

Muy pocos estudiantes identificaron las características en común de los trenes. Solo tres estudiantes lograron identificar y describir que una cantidad determinada se puede escribir como otras de igual longitud.

Tarea 4:

Forma ahora trenes monocolors con regletas cuya longitud sea siempre la misma. Por ejemplo puedes formar un tren con dos vagones azules y otro con tres vagones verde oscuro.

c. Busca las regletas que equivalen a dos de otro color.

d. Busca las regletas que equivalen a tres de otro color.

¿Puedes construir otros trenes con las mismas características? ¿Cuáles? Dibújalos.

En la cuarta tarea se plantea al estudiante formar trenes monocolor, de tal manera que entre ellos tengan la misma longitud. Para resolver esta tarea, el estudiante debía buscar regletas que, comparadas al tren inicial, tuvieran la misma longitud, para ello, se podía encontrar diferentes resultados ya que, dentro de alguna elección (regleta) tendría dos o más de dos múltiplos en común.

Por ejemplo la marrón (cuyo valor numérico es 8). Al buscar una regleta determinada, de tal forma que con varias de esta misma regleta podría construir un tren igual de largo que la regleta marrón. Se esperaba que el estudiante construyera los trenes con dos regletas rosadas, cuatro rojas, ocho blancas y con una marrón.

Es decir, a través de la comparación identificar que los trenes formados a lo más se pueden representar de seis formas, es decir, como la representación de sus divisores. (Ver Figura 35)



Figura 35. Representación de divisores

Esta tarea se hizo un poco más compleja para los estudiantes, puesto que debían formar trenes monocolor, de tal manera que entre ellos tengan la misma longitud. El 41,17% de estudiantes no realizaron la actividad, este porcentaje no se encuentra registrado en la tabla debido a que no registran ningún nivel de desarrollo de pensamiento relacional. Por otro lado, el 47,05% de la población reconocieron las relaciones que mantienen la igualdad (Nivel 2) Operacional Flexible. Esto se puede evidenciar en estudiantes como Alan y María J. quienes al tomar una determinada regleta (según su elección) lograron construir los trenes con la misma longitud a la seleccionada e indicar que pueden construir cuatro más, pero no indican cuáles son. En este caso, los estudiantes no lograron determinar que dentro de su elección tendrían cantidades con dos o más de dos múltiplos en común.

De acuerdo a esto, en términos de Matthews et al (2012) aunque prevalezca una visión operacional flexible (Nivel 2) en este tipo de tareas, este grupo de estudiantes logró determinar otras representaciones de un mismo objeto matemático.

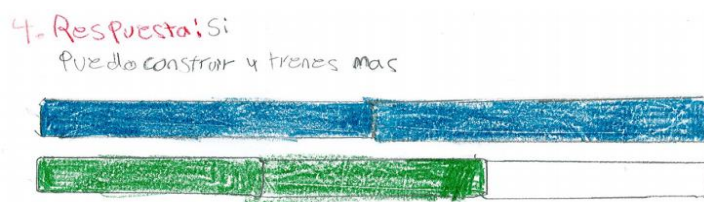


Figura 36. Tarea resuelta por Alan en el uso de regletas.

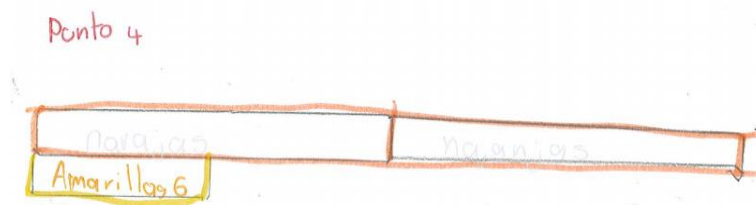
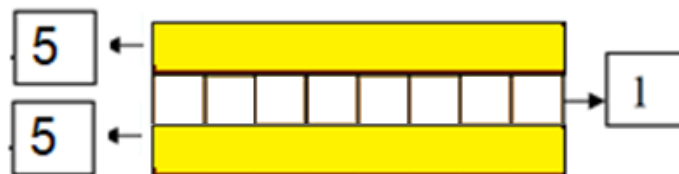


Figura 12. Tarea resuelta por María J. en el uso de regletas.

En este caso, María J. describe dos trenes que cumplen la condición inicial (Regletas monocolor). Sin embargo, no identifica un tren monocolor (una regleta) que tenga la misma longitud que dos o tres de un mismo color, vemos que la estudiante, resuelve, evalúa y relaciona con éxito estructuras de ecuaciones que tienen alguna particularidad. Sin embargo, sigue prevaleciendo una visión operacional del signo igual (Nivel 2) Operacional Flexible.

Tarea 5:

Elige una regleta, según tu preferencia. Ahora, construye un tren con dos regletas del color que elegiste ¿Es posible elegir otra regleta que tenga la misma longitud del tren formado? ¿Qué características deben tener los trenes formados?



En la tarea cinco, que en la anterior debían elegir una regleta según su preferencia y luego construir un tren con dos regletas del color que se eligió, observamos que el 41.17% de la población (siete estudiantes) pudo determinar que si era posible hallar otras regletas que tuvieran la misma longitud del tren formado. Se observó construcciones como la de Juan D. quien indica que con un

tren monocolor con dos (2) regletas naranjada. De esta construcción, los estudiantes indican que pueden construir el tren equivalente cuyos vagones corresponden a tres regletas negras.

Vemos que esta visión operacional (Nivel 2) del signo igual continua, pero si se torna más flexible con respecto a la tarea dada ya que los estudiantes lograron evaluar e identificar que las regletas cuya longitud era igual a la anterior.

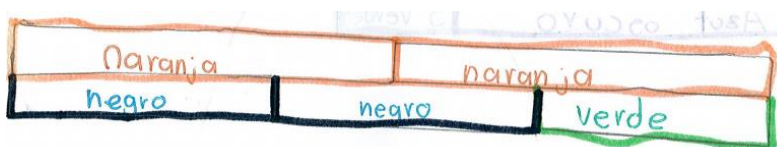


Figura 38. Tarea resuelta por María J. en el uso de regletas.

Tarea 6:

Completa los trenes con el nombre de la regleta que consideres cumple la condición dada.

Esta tarea se propuso con el objetivo de promover la representación simbólica que podría tener un objeto matemático (tren de regletas), así mismo identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes haciendo uso del pensamiento relacional en el planteamiento de estas equivalencias.

Podemos observar que el 17,64% de los estudiantes tuvieron éxito al evaluar y relacionar las estructuras de ecuaciones (completar) donde la incógnita o termino desconocido se sitúa antes o después del signo igual ($\square = a + b$, $a + b = \square$). Esta visión operacional del signo igual puede continuar, pero si se torna más flexible con respecto a la estructura de ecuación (completar), lo cual da lugar al (Nivel 2) operacional flexible.

Por el contrario el 52,94% de los estudiantes no tuvieron éxito al evaluar y relacionar las estructuras de ecuaciones puesto que la suma de las longitudes de los vagones no lograba cumplir la característica solicitada, es decir con longitudes de los vagones de referencia. Uno de ellos es Juan F, de quien se presenta la ejecución de esta tarea.

✓ Dos regletas naranjas y una blanca tienen la misma longitud que cuatro blancas, una negra y una naranjada.

✓ marrón y una regleta blanca, tienen la misma longitud que tres regletas blanca y verde = Rosada X

✓ Una regleta marrón y una amarilla, tienen la misma longitud que dos regletas amarillas y una verde clara.

✓ Una regleta verde y dos regletas azules, tienen la misma longitud que 8 verdes clara.

✓ Si tienes una regleta rosada y añades una regleta amarilla, estas tendrán la misma longitud que una Azul

✓ Si tienes la regleta verde clara y tu compañero la regleta rosada, ¿por cuál regleta la pueden sustituir? una negra

✓ Tienes la regleta amarilla, si le añades la regleta rosada, ¿a cuál regleta equivale? Azul

✓ Si tienes una regleta azul y dos regletas rojas, ¿cuáles regletas podrían tener la misma longitud? naranja y verde claro

✓ Si le colocas a la regleta rosada dos regletas verdes, ¿cuáles regletas podrían tener la misma longitud? 10

✓ Tienes 4 regletas blancas y tu compañero tiene 5 regletas más que tú. Entonces, ¿cuántas regletas blancas tiene tu compañero.

(2) Azul + rosada es = naranja más verde clarito
Azul + rosada es = 2 amarillos más 1 verde clarito

Figura 39. Tarea resuelta por Silvia en el uso de regletas.

Cabe aclarar que en las tareas anteriormente mencionadas un estudiante al no tener en cuenta el mismo objeto matemático (tren de regletas) como una posible respuesta, su nivel de pensamiento relacional estaría ubicado en el **Nivel 1: Operacional Rígido**. Donde el estudiante solo tiene en

cuenta la estructura de igualdad como una cadena de operaciones, seguido de una respuesta o **Nivel 2: Operacional Flexible**, donde el estudiante, resuelve, evalúa y relaciona con éxito estructuras de ecuaciones que tienen alguna particularidad. Sin embargo, sigue prevaleciendo una visión operativa del signo igual.

Solo dos estudiantes lograron resolver la mayoría de estas tareas, por lo cual se podría decir que en este tipo de tarea aunque prevalece una visión operativa del signo igual en ellos, tuvieron mayor éxito que sus compañeros.

6.3 Guía de trabajo N°2: Jugando con balanzas

Tarea 1:
Observa la balanza. Luego, determina el valor que podría tener el balón de futbol.

En este ítem, se buscaba que los estudiantes encontraran el valor desconocido (valor de la pelota de futbol) situado antes del signo igual. ($\square = a + b$) utilizando la propiedad aditiva de la igualdad. Para ello, los estudiantes tenían que eliminar dos pelotas de softbol en cada uno de los platos de la balanza e indicar el peso de cada pelota. Como podemos ver gran parte de la población 76,4% tiene una visión operacional del signo igual, al tener solo tienen éxito con ecuaciones de estructura:

Cadena de operaciones, seguido del signo igual y respuesta. Nivel 1 (Operacional Rígido). De este porcentaje diez de los diecisiete participantes lograron determinar el valor de la pelota de softbol, pero no lograron dar justificación a su respuesta. Por otro lado, cuatro de los diecisiete

participantes lograron determinar la particularidad en los dos lados de la igualdad. Es decir, determinaron que el balón de futbol tiene el mismo peso que dos pelotas pequeñas, como por ejemplo Valeria quien logra determinar que al lado izquierdo del signo igual.

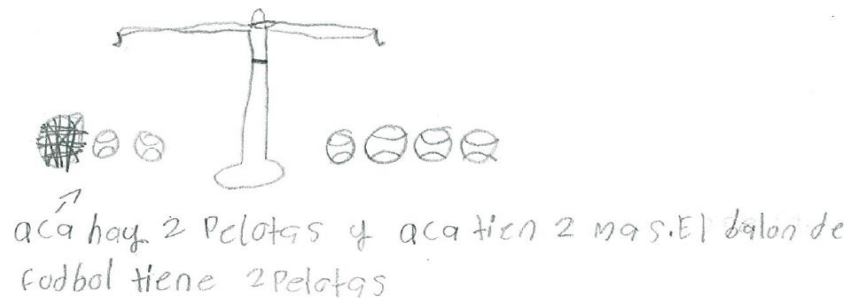


Figura 13. Tarea resuelta por Valeria en el uso de balanzas.

Tarea 2:

¿Cuántos tornillos hay que poner en la tercera balanza para que quede equilibrada?

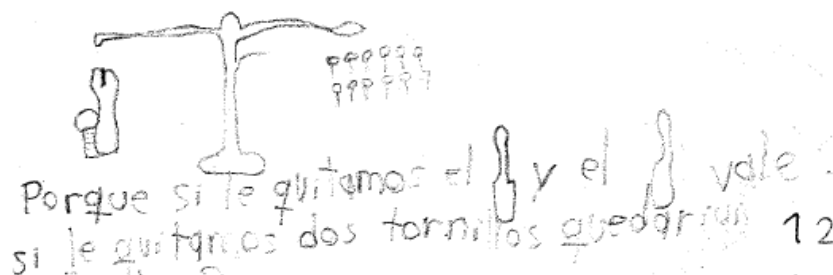


Figura 41. Tarea resuelta por Santiago U. en el uso de balanzas

Con este ítem se pudo determinar que solo dos estudiantes (11,7%) logran alcanzar un Nivel 3 (Relacional Básico) pues reconocen la relación de equivalencia entre los dos platos de la balanza. Es decir, lograron determinar la cantidad necesaria de tornillos que debían colocar en la balanza para que quedara equilibrada, uno de ellos es Santiago U. quien indica que al quitar el destornillador y dos tornillos logra determinar la cantidad necesaria de tornillos para equilibrarla.

El 70,5 % responde cual es la cantidad de tornillos que equilibran la balanza. Sin embargo, este valor no satisface el número correspondiente de tornillos que equilibran la balanza. En este caso, podríamos decir que el nivel de desarrollo del pensamiento de este grupo de estudiantes es Operacional Rígido (Nivel 1) ya que no lograron tener éxito con esta estructura de ecuación ejemplo de esto tomamos a María J. quien indica que la balanza se equilibra con once clavos.

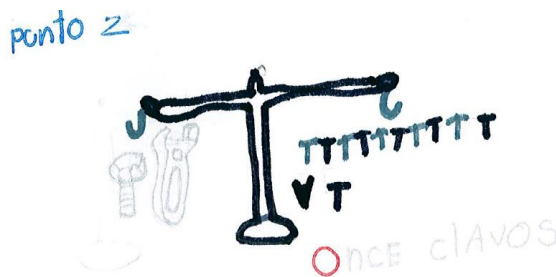


Figura 42. Tarea resuelta por María J en el uso de balanzas

Tarea 3:

Observa las figuras:

- Describe lo que ves ¿Qué observas en la balanza 1?, ¿Qué observas en la balanza 2?
- ¿Conoces las balanzas? ¿Qué tipos de balanzas conoces?
- ¿De qué trata la situación?
- ¿Nos ayudaría las balanzas que utilizamos en Inicio?, ¿Por qué?
- ¿Puedes calcular el peso de una piña y de una sandia? ¿Cuánto pesa cada fruta?

Este ítem fue respondido por trece de los diecisiete participantes, los cuales describen lo visto en la hoja de trabajo, la mayoría reconoce que debe equilibrar las balanzas. Sin embargo, ninguno logró determinar el valor para estas quedaran equilibradas. Algunos estudiantes no reconocen las relaciones que mantienen la igualdad, ni las cantidades dadas a operar pues definieron el signo igual como una cadena de operaciones, seguido del signo igual y por último la respuesta (Nivel 1).

Por ejemplo algunos sumaron los objetos dados en la derecha del signo igual y seguido de este, escribieron el resultado de esta operación. Se presenta la tarea resuelta por Santiago U, quien manifiesta que en la primera balanza cada sandia pesa cinco y dos piñas debe pesar ocho libras y la tercera una libra. Seguidamente, indica que en la balanza dos, cada una de las tres sandias pesa diez libras y de las cuatro piñas, tres podrían pesar una libra cada una y la cuarto cero libras. En este caso, se podría decir que el estudiante define el signo igual como una cadena de operaciones. Sin tener éxito al resolver o equilibrar el peso de las balanzas.

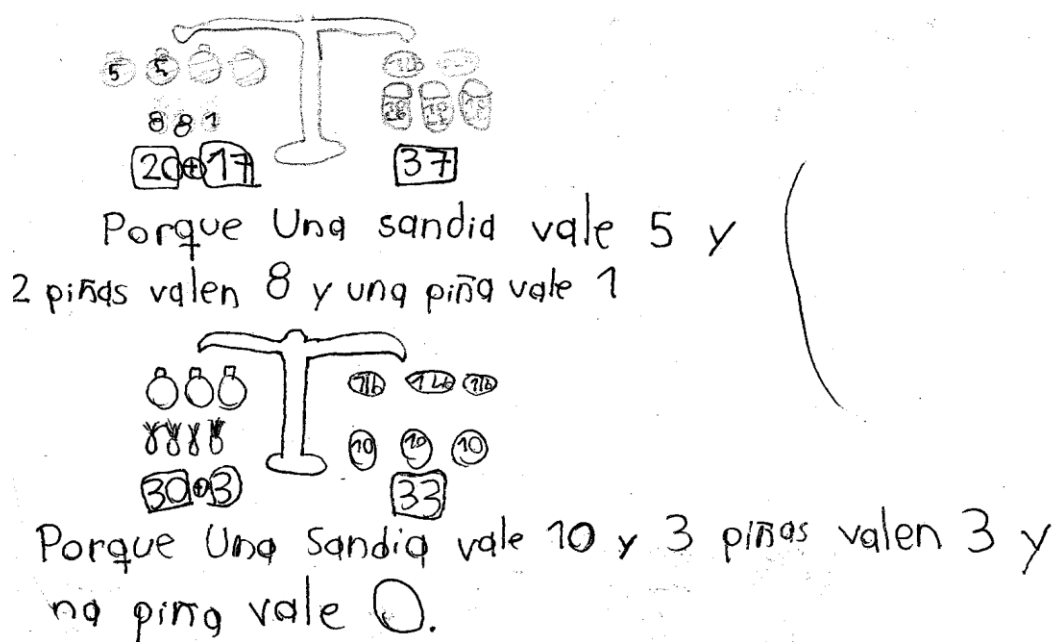


Figura 14. Tarea resuelta por Santiago U. en el uso de balanzas

Presentamos también la solución de Maily, quien describe en su dibujo que cuatro sandias pesan diez libras (escribe el número 10) y agregado a tres piñas que pesan tres libras (escribe el número 3), esto da como resultado treinta y siete libras. Del mismo modo en la balanza dos, indica que tres sandias pesan diez libras (escribe el número 10) y agregado a cuatro piñas que pesan tres libras (escribe el número 3), esto da como resultado treinta y tres libras.

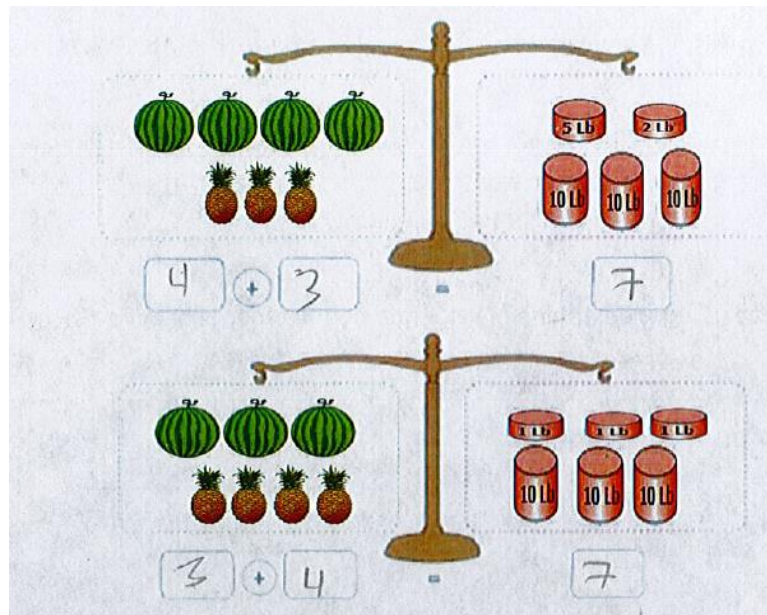


Figura 44. Tarea resuelta por Maily en el uso de balanzas.

Tarea 4:

Observa las siguientes balanzas

- ¿Qué observas en la balanza?
- Consideras que está equilibrada. ¿Por qué?
- En el caso de no estar equilibrada ¿Qué podrías hacer para equilibrarla?

La mayor parte de los estudiantes determina que la balanza no está equilibrada puesto que uno de los platos tiene menos peso que la otra, e indican que esta se equilibra agregando bolitas, de igual manera lograron indicar la cantidad necesaria de bolitas para que las balanzas se pudieran equilibrar. Es decir, evaluaron y resolvieron exitosamente las expresiones, comparando cantidades a ambos lados del signo igual incluyendo el uso de estrategias de compensación (Nivel 4) Relacional comparativo. Esto se puede evidenciar en estudiantes como Valeria quien compara las expresiones en los dos lados del signo igual, y usando estrategias de compensación como agregar una determinada cantidad que le permita equilibrar los platos de la balanza.

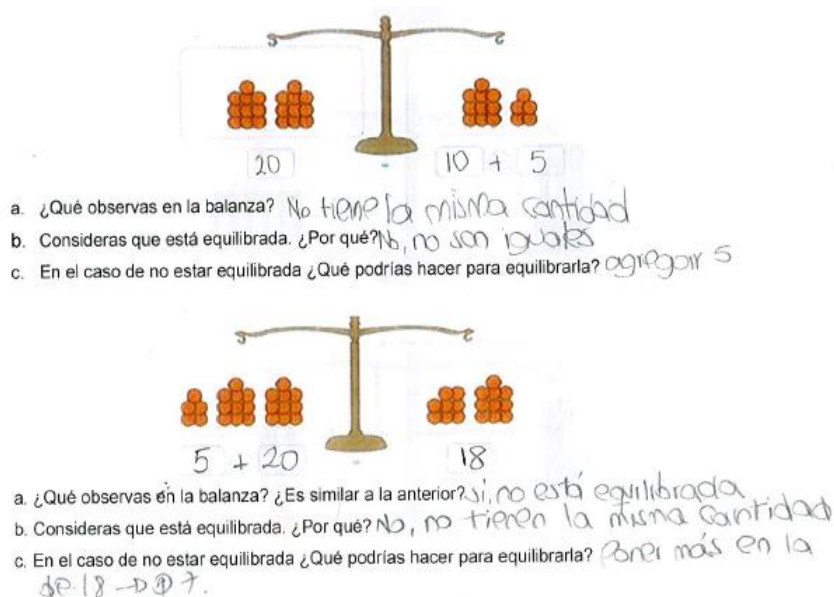


Figura 45. Tarea resuelta por Valeria en el uso de balanzas

Del mismo modo esta Leticia, pero que a diferencia de sus compañeros indica que esta se equilibra quitando “esferas” bolitas para así, equilibrar las balanzas.

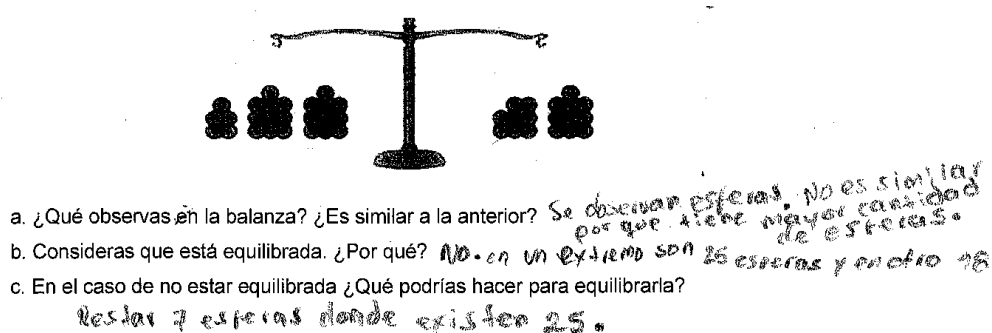


Figura 15. Tarea resuelta por Leticia en el uso de balanzas

Por otro lado se puede evidenciar una visión única del signo igual, 29,4 % de los estudiantes tales como Pedro, operaron las cantidades dadas a un lado de la ecuación “balanza” y escribieron

el resultado al otro. Notamos que el estudiante define el signo igual como una cadena de operaciones, seguido del signo igual y respuesta (Nivel 1).

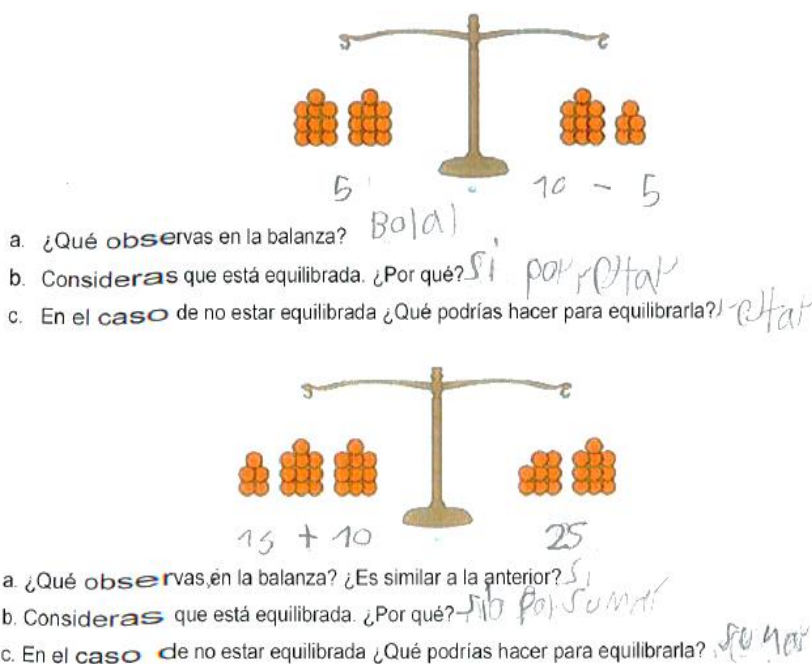


Figura 47. Tarea resuelta por Pedro en el uso de balanzas

Tarea 5:

Jorge y Valentina son hermanos y les gusta jugar con sus balanzas. Cada uno propuso un desafío, que consiste en descubrir cuántos cubitos de material hay escondidos en cada bolsa que poseen. Tanto Jorge como Valentina escondieron algunos cubitos en ellas y luego equilibraron la balanza. ¿Cuántos cubitos escondidos hay en la bolsa de Jorge y cuántos en la de Valentina?

Este ítem fue motivo de interés para la población, el 64,7 % dibujó o borró cubos para así equilibrar la balanza. Por ejemplo Pedro relacionó y resolvió las igualdades numéricas comparando las expresiones a ambos lados del signo igual incluyendo el uso de estrategias de compensación y el reconocimiento de las relaciones que mantienen la igualdad.

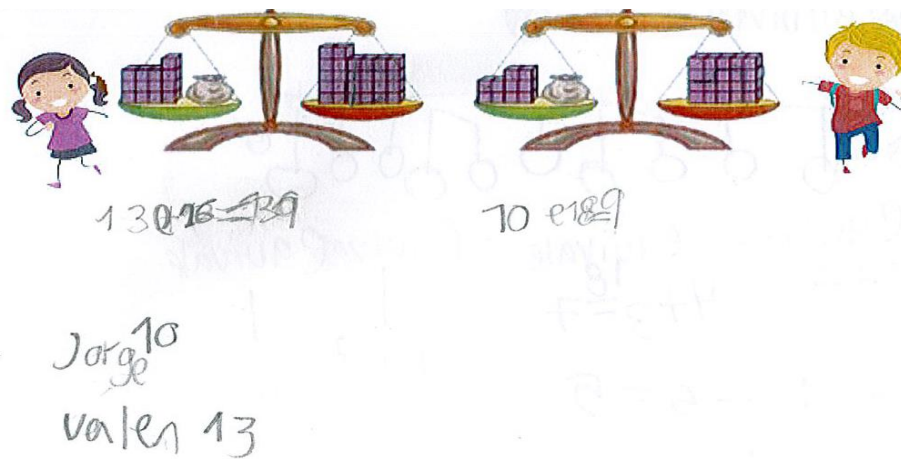


Figura 48. Tarea resuelta por Pedro en el uso de balanzas

El siguiente grupo 17,6 % de la población no logró evaluar y resolver las igualdades correctamente, no lograron tener éxito al comparar las expresiones dadas en las balanzas. Se destaca que parte de esta población, escribieron valores sin tener en cuenta los pesos en los platos de la balanza. Por ejemplo Elkin cuenta de dos en dos e indicando que la bolsa de Valentina contiene 12 fichas.

valentino en la bolsa tiene 12 fichas
contando en 2 en 2
Jorge en la bolsa tiene 10
fichas

Figura 16. Tarea resuelta por Elkin en el uso de balanzas

6.4 Guía de trabajo N°4: Números mágicos

Tarea 1 a 7

Ubica en los círculos los números del... al...de tal manera que al sumar cada tres valores de los lados sea

Estas tareas fueron resueltas por todo el grupo. Los estudiantes manifiestan empatía con problemas de este tipo. Esto es, actividades de poca lectura y las determinadas por una cadena de operaciones donde evalúan y resuelven con éxito estructuras de ecuaciones que tienen alguna particularidad, prevaleciendo una visión operacional del signo igual (Operacional Flexible), como podemos ver en la tabla el 100% de la población tuvo éxito evaluando y resolviendo igualdades abiertas de tipo $(\square = a + b)$ o $(a + b = \square)$. Se puede observar en el trabajo realizado por Silvia.

Guía N°4
NÚMEROS MÁGICOS

1. Ubica en los círculos los números del uno (1) al seis (6), de tal manera que al sumar cada tres valores de los lados sea nueve (9).

2. Ubica los números del uno (1) al siete (7), de modo que la suma en cada lado sea doce (12).

3. Ubica en los círculos los números del uno (1) al nueve (9), de tal manera que al sumar cada tres valores de forma horizontal o vertical, el resultado sea trece (13).

4. Ubica los números del uno (1) al nueve (9) en los cuadros, de tal manera que al sumar cada tres valores en línea el resultado sea quince (15).

Figura 50. Tarea resuelta por Silvia en el uso de balanzas

Se observó que el 58,8% de la población logró encontrar los valores que cumplieran con lo solicitado en la tarea, ubicaron los números del 1 al 9 en los círculos de un cuadrado 3 x 3, de modo que el número en cada círculo fuese equivalente a la suma de los cuatro recuadros adyacentes. Podemos ver que esta población tuvo éxito con ecuaciones que tienen alguna particularidad, seguido del signo igual y respuesta, ubicando al grupo en el nivel 2 (operacional flexible).

Tarea 8:

En cada casilla tienes que colocar un número del uno (1) al nueve (9), de modo que el número en cada círculo sea equivalente a la suma de los cuatro recuadros de los lados, y la suma de los cuadrados del mismo color sea el de los círculos de abajo.

El 58,8% de la población logró encontrar los valores que cumplieran con lo solicitado en la tarea, ubicaron los números del 1 al 9 en los círculos de un cuadrado 3 x 3, de modo que el número en cada círculo fuese equivalente a la suma de los cuatro recuadros adyacentes, de igual manera que la suma de los cuadrados de colores iguales encajaran con el resultado facilitado en tres círculos dados en la parte inferior de la figura.

Podemos ver que esta población tuvo éxito con ecuaciones que tienen alguna particularidad, seguido del signo igual y respuesta, ubicando al grupo en el Nivel 3 (Relacional Básico).

8. En cada casilla tienes que colocar un número del uno (1) al nueve (9), de modo que el número en cada círculo sea equivalente a la suma de los cuatro recuadros de los lados, y la suma de los cuadrados del mismo color sea el de los círculos de abajo.



Figura 51. Tarea resuelta por Leticia con números mágicos

6.5 Guía de trabajo N°4: Resolviendo Problemas

Tarea 1:

La clave de la caja fuerte

He querido abrir mi caja fuerte y no me acordaba de mi clave secreta. Menos mal que tenía unas pequeñas notas para recordarla. Mi clave tenía cinco cifras que voy a llamar a, b, c, d y e

Se pudo apreciar con esta tarea que el 47% de la población ha desarrollado un pensamiento Relacional Comparativo (Nivel 4), donde a través del uso de estrategias de compensación y el reconocimiento de que las relaciones mantienen la igualdad. Estos estudiantes lograron evaluar y resolver exitosamente los valores que satisfacen las condiciones dadas para la realización de esta tarea. Esto se puede evidenciar en estudiantes como Alan.

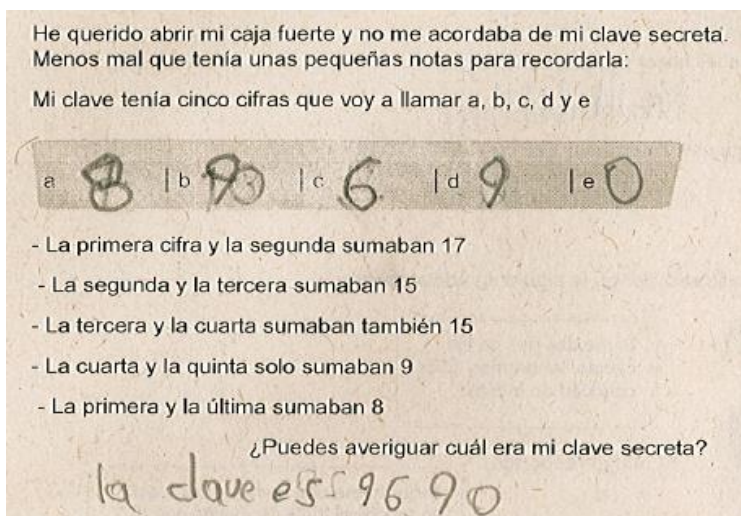


Figura 52. Tarea resuelta por Alan en solución de problemas.

De igual manera se logró observar que el 29,4 % de la población aún se encuentra en el Nivel 1 (Operacional rígido), pues dan respuesta de los dígitos de la caja. Sin embargo, este valor no satisface las condiciones expuestas. Por ejemplo tomamos la respuesta de Valeria, quien indica valores sin relacionarlos con las características solicitadas. Es decir, los elementos no lograron determinar los valores o números que hicieran verdadera la expresión.

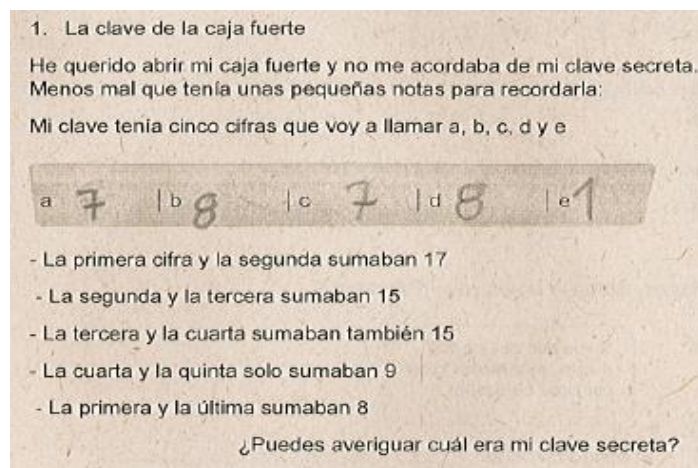


Figura 17. Tarea resuelta por Valera en solución de problemas.

Tarea 2:

De los siete patos metidos en un cajón ¿Cuántos picos y patas hay en el cajón?

Al analizar esta tarea vemos que 64,7% de la población logró reconocer la definición relacional del signo igual como correcta, al evaluar y resolver con éxito el número de patas y picos. Es decir, vemos que se empieza a observar los primeros signos de pensamiento relacional (Relacional Básico), donde el estudiante resuelve y evalúa con éxito igualdades abiertas cuya estructura mantiene operaciones a ambos lados del signo igual como es el caso de Alan, quien indica que para encontrar la cantidad de picos y patas, debe “multiplicar por dos”.

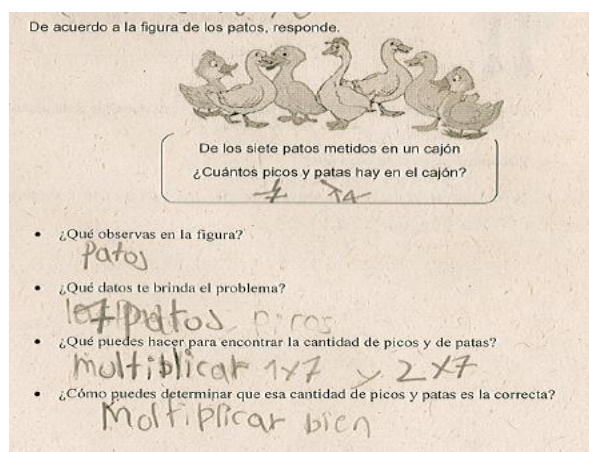


Figura 54. Tarea resuelta por Alan en solución de problemas.

Por otra parte en la respuesta de Pedro vemos que el estudiante no relaciona el valor de las patas como el doble de los picos. En términos de (Carpenter et al 2003), el estudiante no logró relacionar las operaciones aritméticas y sus propiedades fundamentales. Por tanto, podríamos decir que su nivel de pensamiento relacional se encuentra en el Nivel 1 (Operacional Rígido) puesto que

únicamente cuenta la cantidad de picos y patas que logra apreciar, sin hacer relación con la cantidad de patos.

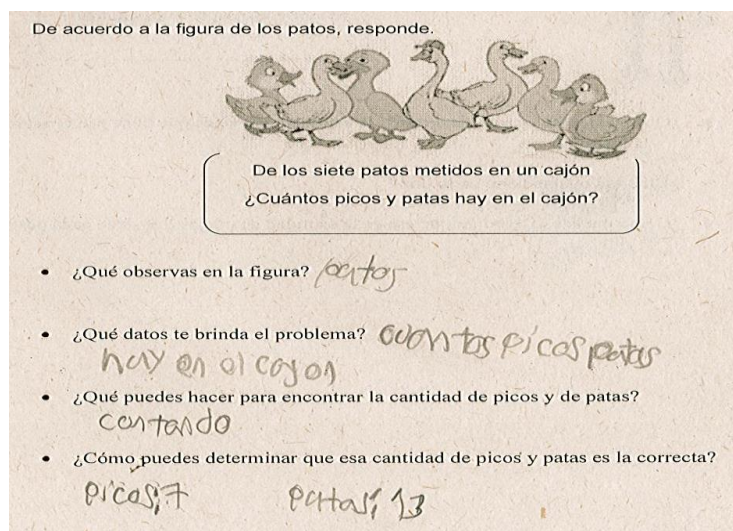


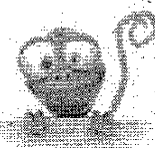
Figura 55. Tarea resuelta por Pedro en solución de problemas.

Tarea 3:

Una ranita cae en un pozo de 30 metros de profundidad. En su afán por salir, en el día sube 3 metros. Pero en la noche, resbala y baja 2 metros. ¿Cuántos días tardará la rana en salir del pozo?

Solo un estudiante logró indicar el número de días que tardaba la rana en salir del pozo. Es decir, vemos que se empieza a observar los primeros signos de pensamiento relacional (Relacional Básico) ya que el estudiante resolvió y evaluó con éxito la situación. Teniendo en cuenta el análisis de la Tabla 51, vemos que el 70,5 % de la población define el signo igual como una cadena de operaciones Nivel 1 (Operacional Rígido), al indicar que la rana tarda 30 días en salir del pozo puesto que al avanzar tres metros en un día y retroceder dos, solo sube un metro por cada día, ejemplo de ello, mostramos a Santiago U.

Una ranita cae en un pozo de 30 metros de profundidad. En su afán por salir, en el día sube 3 metros. pero en la noche, resbala y baja 2 metros. ¿Cuántos días tardará la rana en salir del pozo?



- ¿Qué datos te brinda el problema?

Profundidad

- ¿Qué puedes hacer para determinar los días que demora en salir la rana?

Porque son 3 metros.

- ¿Cómo puedes determinar que esos días tardará en salir?

28 días

Figura 56. Tarea resuelta por Santiago U. en solución de problemas.

6.4 Evidencias de los Niveles Asociados al Pensamiento Relacional

Como se puede ver en el desarrollo de este capítulo, se evidenciaron diferentes niveles del pensamiento relacional descritos por (Matthews et al., 2012) gracias a las tareas diseñadas e implementadas a lo largo de esta investigación. Se presenta algunas generalidades.

6.4.1 Nivel 1. Operacional Rígido. De acuerdo a este nivel de pensamiento, se espera que un estudiante logre determinar el valor de una igualdad dada por la estructura operaciones, signo igual y respuesta. Evidenciamos que al proponer tareas con esta estructura, la población de estudio logra evaluarlas, resolverlas y relacionarlas satisfactoriamente con otras igualdades de este mismo nivel.

6.4.2 Nivel 2. Operacional Flexible. En este nivel, los niños mantienen una visión operacional del signo igual, pero se vuelven algo más flexibles con respecto a los tipos de formatos de

ecuaciones que resuelven correctamente y aceptan como válidas. Al presentarse a los estudiantes tareas relacionadas a este nivel evidenciamos que el 58,8% de la población logró resolver igualdades con la característica $_ = a + b$ "al revés" que no son típicas a las que constantemente resuelven pero que siguen siendo consistentes con una visión operacional del signo igual. Evidenciamos que las tareas donde los estudiantes deban realizar distintas operaciones que por medio de ensayo y error, tales como los denominados "cuadrados mágicos", utilizadas para trabajar las nociones de igualdad (numérica y algebraica) y equilibrio Albendea (2011) son atractivas a los estudiantes y estimulan procesos para el desarrollo avanzado del pensamiento relacional.

6.4.3 Nivel 3. Relacional Básico. En este Nivel 3, los estudiantes comienzan a tener una visión relacional básica del signo igual, aunque no deja de existir una visión operacional. La comprensión relacional inicial de los estudiantes se manifiesta principalmente en su éxito con igualdades con operaciones en ambos lados (por ejemplo, $6 + 4 + 7 = _ + 7$). Al presentarse a los estudiantes tareas relacionadas a este nivel, muy pocos logran dar sentido a la relación de equivalencia que se les propone en tareas con igualdades abiertas donde deben comparar las expresiones, usando estrategias de compensación. Se destaca que al indagar sobre el reconocimiento y uso de las propiedades del cero como elemento neutro de la suma, evidenciamos que el 11,7% de la población logró determinar con éxito este objetivo.

6.4.4 Nivel 4: Relacional comparativo. Para Molina (2005) las relaciones son los conceptos e ideas en los que se centra la atención del estudiante, para dar respuesta a un determinado problema. Por tanto, en esta investigación se consideró situaciones problema para evidenciar si al terminar una serie de tareas anteriormente establecidas, el estudiante lograba evaluar y resolver las igualdades numéricas comparando las expresiones a ambos lados del signo igual incluyendo el uso de

estrategias de compensación y el reconocimiento de las relaciones que mantienen la igualdad. De acuerdo a esto, se evidenció que una pequeña parte de la población. El 43%, mantiene una visión operacional del signo igual más flexible con respecto a la estructura de una igualdad numérica en este tipo de tareas. Por otra parte, se evidencia el uso de estrategias de compensación y el reconocimiento de que las relaciones mantienen la igualdad, lo cual nos lleva a concluir que un estudiante que pueda dar una interpretación relacional del signo igual en determinada tarea no significa necesariamente que haya abandonado una visión operativa del signo igual.

7. Conclusiones

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en el proceso de intervención en torno a la caracterización, descripción y análisis de los niveles de desarrollo del pensamiento relacional de estudiantes de tercero primaria cuando abordan expresiones aritméticas en diferentes contextos que involucran el signo igual como una relación de equivalencia. Además se da respuesta a la pregunta ¿qué nivel de desarrollo del pensamiento relacional logran estos estudiantes cuando participan en una actividad que propicia el estudio del signo igual como una relación de equivalencia?

Referente a nuestro primer objetivo diseñar y analizar un conjunto de tareas que incluyan el signo igual como relación de equivalencia en diferentes contextos aritméticos. El análisis de los datos recogidos ha permitido identificar el uso de diversas estrategias por parte de los estudiantes al resolver tareas que incluyen el signo igual como relación de equivalencia. En el proceso de

resolución, se evidenció que los estudiantes comparaban el valor numérico de ambos miembros y detectaban alguna característica particular o relación entre los elementos. Un ejemplo de ello es Valeria quien en la tarea cuatro de la actividad tres, indica que las balanzas no estaban equilibradas y por tanto debe agregar tantos elementos como sea necesario para lograrlo.

Por otro lado, mediante la aplicación de las distintas tareas, los estudiantes pudieron establecer relaciones en consonancia con la comprensión y aplicación de propiedades de las operaciones básicas (suma, resta y multiplicación); lo cual, además de propiciar el desarrollo del Pensamiento Relacional, permitió vincular experiencias cercanas de los estudiantes para el aprendizaje de las matemáticas. Tal es el caso de la balanza en un contexto aritmético, ya que permitió a los estudiantes pensar en situaciones donde era necesario conservar la equivalencia. Este tipo de tareas no solo contribuyó a la conceptualización de la estrategia de resolución de tareas relacionadas en la compensación propias del Nivel 4 (Relacional Comparativo) categorizado en Matthews et al (2012), sino para decidir el valor de verdad de una igualdad sin llevar cabo una serie de operaciones. Del mismo modo, acertamos con Fernández (2016) que la actividad con material concreto (Regletas de Cuisenaire) es un recurso didáctico que puede facilitar la comprensión del signo igual como relación de equivalencia, pues aunque no todos los estudiantes lograron completar las tareas se logró observar la mediación para las siguientes.

Se identificó que las tareas de tipo “cuadrados mágicos” descritas por Albendea (2011), que podrían utilizarse para trabajar las nociones de igualdad (numérica y algebraica) y equilibrio y cuyo objetivo es completar con números o expresiones que cumplen determinada característica, despierta el interés del estudiante y motiva al desarrollo de la actividad matemática, puesto que no

le implica extraer y comprender información de un texto. Este tipo de situación permite identificar a este grupo de estudiantes en el Nivel 2 (Operacional Flexible) donde el estudiante evalúa, relaciona y resuelve con éxito estructuras de ecuaciones que tienen alguna particularidad. Sin embargo, sigue prevaleciendo una visión operativa del signo igual (Matthews et al., 2012).

La última actividad, enfocada a la resolución de cuatro situaciones problema donde se esperaba que el estudiante tuviese en cuenta que debía relacionar y resolver las igualdades numéricas comparando las expresiones a ambos lados del signo igual y utilizar estrategias de compensación. Con los resultados obtenidos podemos apreciar que el 47% de la población ha logrado desarrollar un nivel de Pensamiento Comparativo (Nivel 4). De esto, y en concordancia con Molina (2005) las relaciones son los conceptos e ideas en los que se centra la atención del estudiante, para dar respuesta a un determinado problema. Por tanto, podemos indicar que a medida que los estudiantes reconocen las propiedades de las operaciones en términos de las relaciones que representan, logran determinar el verdadero sentido de igualdades y equivalencias en situaciones problemas.

En concordancia a estas conclusiones y de acuerdo con el segundo objetivo, describir los niveles de desarrollo del pensamiento relacional que evidencian los estudiantes cuando resuelven situaciones relacionadas con el signo igual. Encontramos que el significado adoptado por los estudiantes acerca de este signo depende de las tareas que estén realizando, aunque sean capaces de entender el signo igual como relación de una equivalencia, también en determinados momentos siguen viéndolo como operador.

En relación a las dificultades, cuando los estudiantes de tercero primaria trabajan en contexto aritmético, identificamos algunos obstáculos que en mayor o menor medida, guardan relación con la comprensión del signo igual. Algunos de estos ya han sido reportados en investigaciones mencionadas en el capítulo de antecedentes, lo que aporta consistencia a nuestro trabajo. Dichas dificultades están asociadas con igualdades numéricas cuya estructura viene dada por $a + b = c + d$ o $a + \square = c + d$ (Burgell y Ochoviet, 2015). Gran parte de la población, tiende a operar las cantidades dadas al lado derecho o izquierdo del signo igual y escribir una respuesta. Es decir, toman el signo igual como un símbolo que separa una secuencia de operaciones.

Desde el punto de vista curricular, el trabajo y desarrollo del pensamiento relacional en la educación primaria es fundamental. Ya que los es a través de este tipo de pensamiento que un estudiante identifica las relaciones de un objeto matemático y logra hallar una solución, sin remitirse netamente a una secuencia de operaciones. Por otro lado, el desarrollo y el uso del Pensamiento Relacional establecen una integración de nuevos modos de pensamiento algebraico más prácticos y significativos.

Concordamos con Matthews et al (2012) que un estudiante que pueda dar una interpretación relacional del signo igual en determinada tarea no significa necesariamente que haya abandonado una visión operativa del signo igual.

Referencias Bibliográficas

- Burgell, F. (2013) ¿qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de primer año del ciclo básico de enseñanza media? aportes para pensar los cimientos del álgebra. *Actas del CIBEM*. (7) 39-50
- Burgell, F., Ochoviet, C. (2015) Significados del signo de igual y aspectos de su enseñanza. Un estudio realizado con estudiantes de primer año de enseñanza secundaria y sus profesores. *Enseñanza de las Ciencias*, 1-22
- Butto y Rojano (2010) Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática* 22, (3), 55-86
- Castro y Molina (2009). Desarrollo de Pensamiento Relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación Matemática*, vol. 19, núm. 2, agosto de 2007, pp. 67-94
- Fernández (2016). Pensamiento relacional en primaria: el papel del maestro. *Uno*, 73, pp. 14-22.
- Kieran, C. & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias*, 7(3), pp. 229-240.
- Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra, In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan, 390-419.
- Knuth, E., Stephens A., Mc-Neil, N., & Alibali, M. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations.

- Martínez M. (1998). *La investigación cualitativa etnográfica en educación*. México: Trillas. 65-68.
- Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K. y Tailor, R. (2012). Measure for Measure: What Combining Diverse Measures Reveals About Children's Understanding of the Equal Sign as an Indicator of Mathematical Equality. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 220-254.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) 2006 Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). Lineamientos curriculares para el área de matemáticas.
- Molina (2006). *Desarrollo de Pensamiento Relacional y Comprensión del Signo igual por Alumnos de Tercero de Educación Primaria. Tesis doctoral*. Granada: Universidad de Granada.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática.
- Parodi, S., Ochoviet, C., Lezama, J., (2017) La comprensión del signo de igual en la entrada al álgebra: el diseño de tareas y la conversación en la clase de matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(3), 51-67.
- Radford (2011) Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking,

Apéndices

Apéndice A: Guía N°2

Usando regletas de Cuisenaire.

1. Construye trenes con vagones de igual color que tengan la misma longitud de la regleta azul. ¿Cuántos trenes de diferente color puedes construir?



2. Vamos a unir una regleta azul y una rosada para construir un tren matemático, como se muestra en la figura.



3. ¿Puedes construir otros trenes con otras regletas con la misma longitud? ¿Cuáles?
Constrúyelos y dibújalos

4. Elige una regleta, por ejemplo la amarilla, ¿puedes formar trenes de con otras regletas que tengan la misma longitud que la seleccionada? ¿Cuántos trenes puedes construir? Dibújalos.

¿Consideras que hay otros trenes con esta característica? ¿Cuáles?

5. Forma ahora trenes monocolors con regletas cuya longitud sea siempre la misma. Por ejemplo puedes formar un tren con dos vagones azules y otro con tres vagones verde oscuro.

- a. Busca las regletas que equivalen a dos de otro color.
- b. Busca las regletas que equivalen a tres de otro color.

¿Puedes construir otros trenes con las mismas características? ¿Cuáles? Dibújalos.

6. Elige una regleta, según tu preferencia. Ahora, construye un tren con dos regletas del color que elegiste ¿Es posible elegir otra regleta que tenga la misma longitud del tren formado? ¿Qué características deben tener los trenes formados?

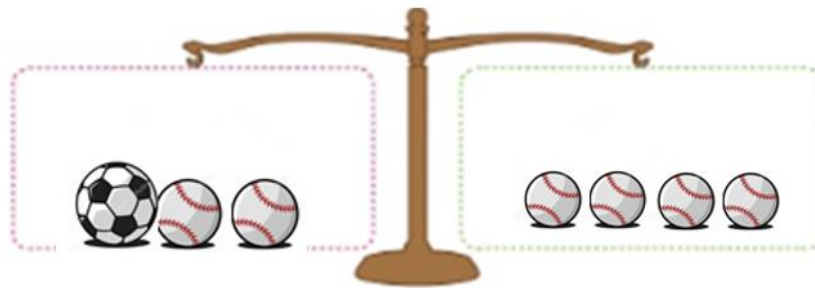
7. Completa los trenes con el nombre de la regleta que consideres cumple la condición dada.

- ✓ Dos regletas naranjas y una _____ tienen la misma longitud que cuatro blancas, una negra y una naranjada.
- ✓ _____ y una regleta blanca, tienen la misma longitud que tres regletas
- ✓ Una regleta marrón y una amarilla, tienen la misma longitud que dos regletas _____ y una verde clara.

- ✓ Una regleta_____ y dos regletas azules, tienen la misma longitud que _____ verdes clara.
- ✓ Si tienes una regleta rosada y añades una regleta amarilla, estas tendrán la misma longitud que una _____
- ✓ Si tienes la regleta verde clara y tu compañero la regleta rosada, ¿por cuál regleta la pueden sustituir?
- ✓ Tienes la regleta amarilla, si le añades la regleta rosada, ¿a cuál regleta equivale?
- ✓ Si tienes una regleta azul y dos regletas rojas, ¿cuáles regletas podrían tener la misma longitud?
- ✓ Si le colocas a la regleta rosada dos regletas verdes, ¿cuáles regletas podrían tener la misma longitud?
- ✓ Tienes 4 regletas blancas y tu compañero tiene 5 regletas más que tú. Entonces, ¿cuántas regletas blancas tiene tu compañero

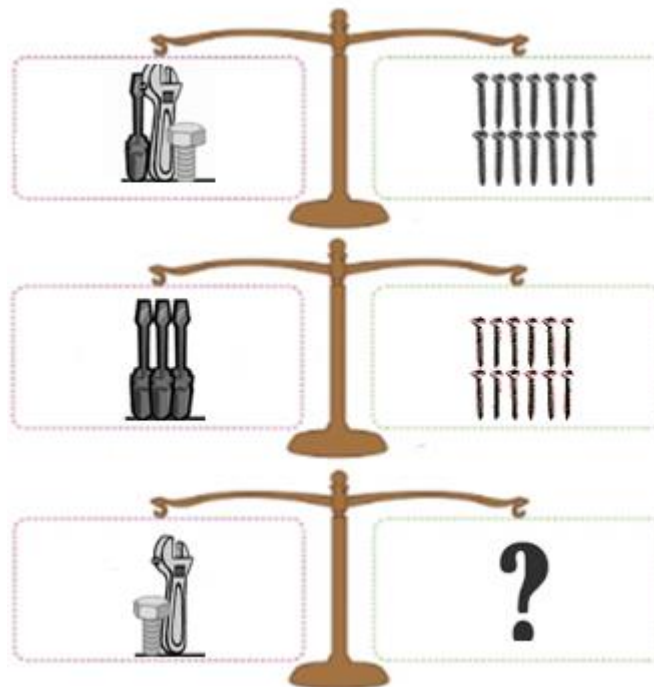
Apéndice B. Guía N°3: Jugando con balanzas

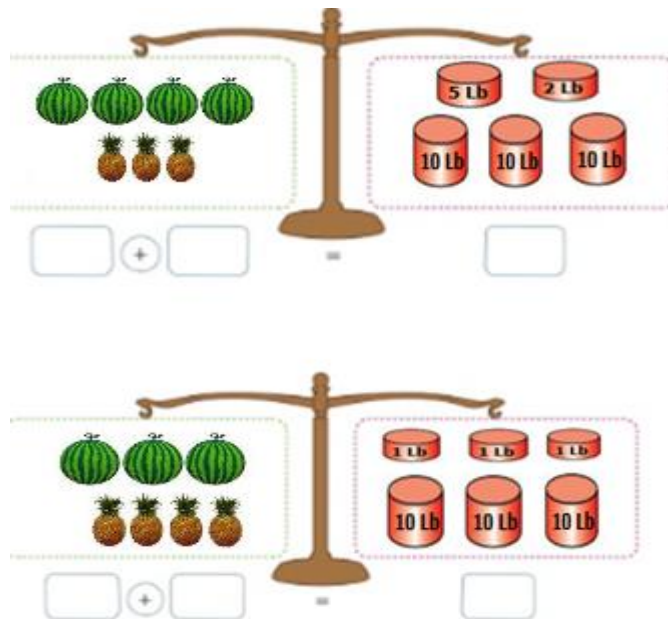
1. Observa la balanza. Luego, determina el valor que podría tener el balón de fútbol.



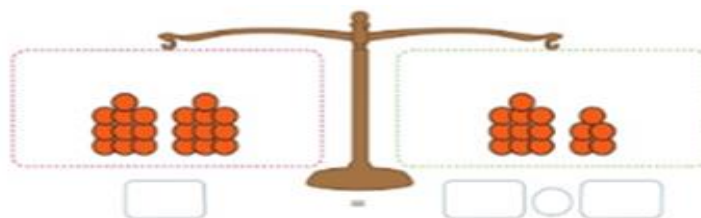
El  equivale a _____ 

2. ¿Cuántos tornillos hay que poner en la tercera balanza para que quede equilibrada?

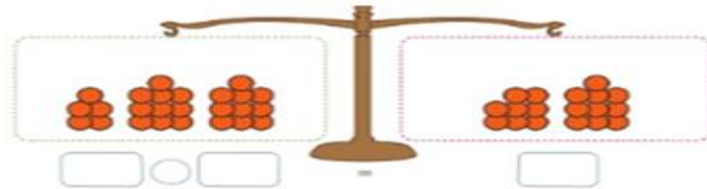


3. Observa la siguiente figura:

- Describe lo que ves en la figura ¿Qué observas en la balanza 1?, ¿Qué observas en la balanza 2?
- ¿Conoces las balanzas? ¿Qué tipos de balanzas conoces?
- ¿De qué trata la situación?
- ¿Nos ayudaría las balanzas que utilizamos en Inicio?, ¿Por qué?
- ¿Puedes calcular el peso de una piña y de una sandia? ¿Cuánto pesa cada fruta?
- ¿Qué podemos hacer para responder correctamente las preguntas?

4. Observa las siguientes balanzas.

- a. ¿Qué observas en la balanza?
- b. Consideras que está equilibrada. ¿Por qué?
- c. En el caso de no estar equilibrada ¿Qué podrías hacer para equilibrarla?



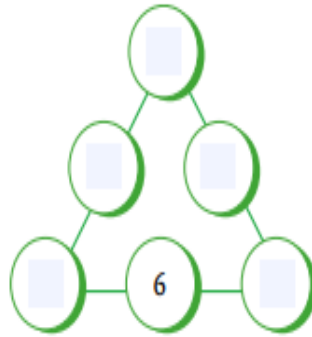
- a. ¿Qué observas en la balanza? ¿Es similar a la anterior?
- b. Consideras que está equilibrada. ¿Por qué?
- c. En el caso de no estar equilibrada ¿Qué podrías hacer para equilibrarla?

5. Jorge y Valentina son hermanos y les gusta jugar con sus balanzas. Cada uno propuso un desafío, que consiste en descubrir cuántos cubitos de material hay escondidos en cada bolsa que poseen. Tanto Jorge como Valentina escondieron algunos cubitos en ellas y luego equilibraron la balanza. ¿Cuántos cubitos escondidos hay en la bolsa de Jorge y cuántos en la de Valentina?

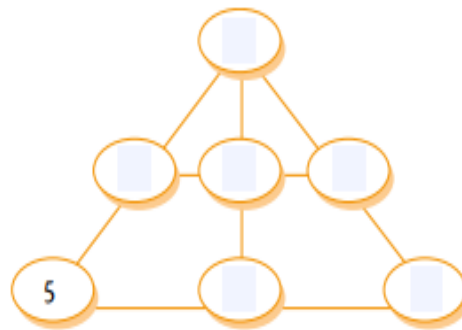


Apéndice C. Guía N°4. Números Mágicos

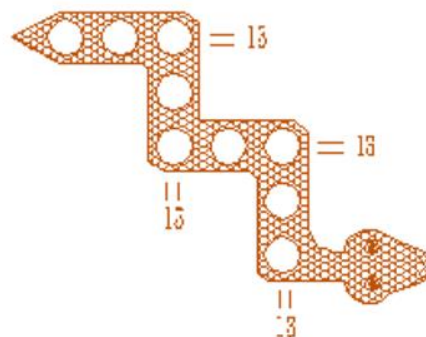
1. Ubica en los círculos los números del uno (1) al seis (6), de tal manera que al sumar cada tres valores de los lados sea nueve (9).



2. Ubica los números del uno (1) al siete (7), de modo que la suma en cada lado sea doce (12).



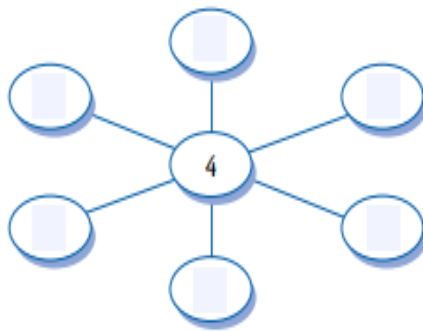
3. Ubica en los círculos los números del uno (1) al nueve (9), de tal manera que al sumar cada tres valores de forma horizontal o vertical, el resultado sea trece (13).



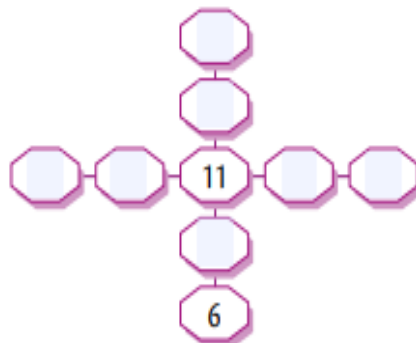
4. Ubica los números del uno (1) al nueve (9) en los cuadros, de tal manera que al sumar cada tres valores en línea el resultado sea quince (15).



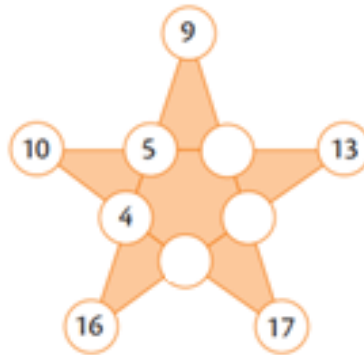
5. Ordena los números del cuatro (4) al diez (10), de modo que la suma de cada línea sea diecinueve (19).



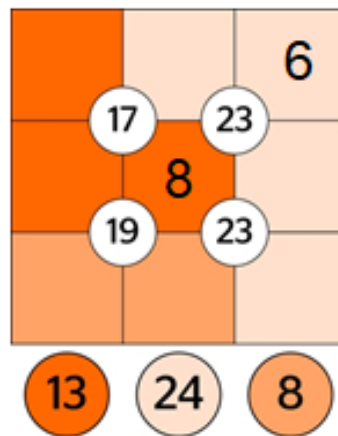
6. Ordena los números del tres (3) al once (11), de manera que la suma de cada línea sea treinta y siete (37).



7. Esta es una estrella mágica: la suma de cuatro números en línea es la misma. Determina cuáles son los números que representan los espacios en blanco.



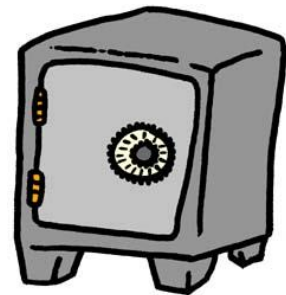
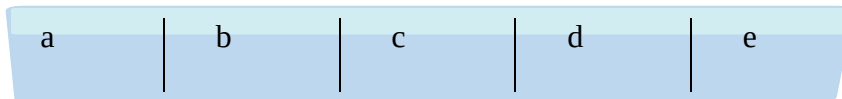
8. En cada casilla tienes que colocar un número del uno (1) al nueve (9), de modo que el número en cada círculo sea equivalente a la suma de los cuatro cuadrados de los lados, y la suma de los cuadrados del mismo color sea el de los círculos de abajo.



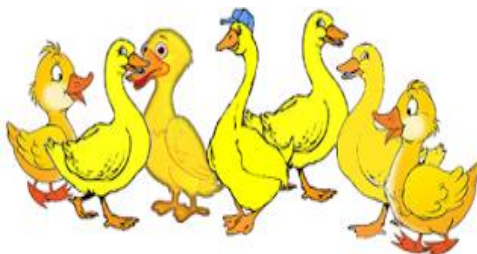
Apéndice D. Guía N°5**1. La clave de la caja fuerte**

He querido abrir mi caja fuerte y no me acordaba de mi clave secreta. Menos mal que tenía unas pequeñas notas para recordarla:

Mi clave tenía cinco cifras que voy a llamar a, b, c, d y e



1. La primera cifra y la segunda sumaban 17
2. La segunda y la tercera sumaban 15
3. La tercera y la cuarta sumaban también 15
4. La cuarta y la quinta solo sumaban 9
5. La primera y la última sumaban 8
6. ¿Puedes averiguar cuál era mi clave secreta?

2. De acuerdo a la figura de los patos, responde.

De los siete patos metidos en un cajón
¿Cuántos picos y patas hay en el cajón?

- ¿Qué observas en la figura?
- ¿Qué datos te brinda el problema?
- ¿Qué puedes hacer para encontrar la cantidad de picos y de patas?
- ¿Cómo puedes determinar que esa cantidad de picos y patas es la correcta?

3. Lee la siguiente información

Una ranita cae en un pozo de 30 metros de profundidad. En su afán por salir, en el día sube 3 metros. Pero en la noche, resbala y baja 2 metros. ¿Cuántos días tardará la rana en salir del pozo?



- ¿Qué datos te brinda el problema?
- ¿Qué puedes hacer para determinar los días que demora en salir la rana?
- ¿Cómo puedes determinar que esos días tardará en salir?