

ESCENARIO DEL CURVATÓN VECTORIAL EN LA
GENERACIÓN DE ANISOTROPÍA ESTADÍSTICA

ANDRÉS AMÉRICO NAVARRO LEÓN

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2012

ESCENARIO DEL CURVATÓN VECTORIAL EN LA GENERACIÓN DE ANISOTROPÍA ESTADÍSTICA

ANDRÉS AMÉRICO NAVARRO LEÓN¹

TESIS DE MAESTRIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN FÍSICA

DIRECTOR
YEINZON RODRÍGUEZ GARCÍA^{1,2}.,Ph.D.

¹ Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación - UIS

² Grupo de Física - Fenomenología de Partículas Elementales y Cosmología - UAN

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2012

Para mi madre Jenny León.

AGRADECIMIENTOS

A mi hermosa reina Albita.

A mi padre Jose Joaquin y mis hermanos Eduardo, pato y joaquito.

A mis dos suegros: Doña Amilde y Toñin por su apoyo en los momentos mas difíciles.

A Doña Olga y el profe Rosselvelt, que siempre me han apoyado en mis estudios y me han acogido como un hijo mas.

Al profesor Yeinzon el cual me apoyo y me apoyará en lo que queda por venir a demás de brindarme su amistad y guiarme en el camino de la ciencia. Al profesor Guillermor González por su colaboración en dudas y que fue un placer haber recibido clases de el.

A mis parceros el ñerin (Jerson) y Framsol, los cuales fueron un gran apoyo en los momentos difíciles, los parceros del GIRG: El Chiquis (Diego), Gabriel, Cristian, John, Liliana, Mauricio, Oscar, Carlos y jose, los cuales compartí muy buenos momentos con unas cervezas (principalmente con el borrachín de diego) o un cafecito con cigarrillo.

RESUMEN

TITULO: ESCENARIO DEL CURVATÓN VECTORIAL EN LA GENERACIÓN DE ANISOTROPÍA ESTADÍSTICA¹.

AUTOR: NAVARRO LEÓN, Andrés Américo².

PALABRAS CLAVES: Cosmología, Inflación vectorial, Dirección preferencial en el Universo, Perturbación primordial en la curvatura, Curvatón.

DESCRIPCIÓN: Teniendo en cuenta los datos observacionales sobre las anisotropías de la radiación cósmica de fondo (RCF) que sugieren la existencia de una dirección preferencial en el Universo, se analizará un campo vectorial masivo con un término cinético no canónico en la acción, acoplado de forma mínima a la gravedad y donde la función cinética y la masa del campo vectorial varían en función del tiempo durante inflación. Este campo vectorial es introducido siguiendo la misma idea del curvatón escalar, el cual no debe afectar la dinámica inflacionaria, ya que su densidad de energía es despreciable durante inflación, comparada con la densidad de energía total en el Universo. Bajo esta hipótesis, el curvatón vectorial será el único campo encargado de generar la perturbación primordial en la curvatura ζ . Con relación al espectro de las perturbaciones del campo vectorial, éstas serán invariantes en escalas de superhorizonte (es decir, no depende del número de onda) debido a la adecuada escogencia de la dependencia temporal de la función cinética y la masa efectiva del campo durante inflación. La dirección preferencial generada por el campo vectorial se ve reflejada en el espectro de ζ , la cual es modulada por la presencia de anisotropía estadística. Esto se analiza principalmente en el caso en donde la masa del campo vectorial crece con el tiempo durante inflación, en donde existe la posibilidad que el campo sea pesado ($M \gg H$) al final de inflación, ocasionando que el proceso de producción de partículas sea prácticamente isótropo, es decir, los espectros longitudinal y transversal sean casi del mismo orden, ocasionando que la anisotropía estadística generada por el campo vectorial no sea excesiva y se encuentre dentro de los límites observacionales, lo cual es del orden de $g_\zeta = 0,290 \pm 0,031$.

¹Tesis de Maestría.

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Yeinzon Rodríguez García (Director).

ABSTRAC

TITLE: VECTOR CURVATON SCENARIO IN THE GENERATION OF STATICAL ANISOTROPY³.

AUTHOR: NAVARRO LEÓ, Andrés Américo⁴.

KEYWORDS: cosmology, vector inflation, Preferred direction in the Universe, Primordial curvature perturbation, Curvaton.

DESCRIPTION: Taking into account the experimental data measurements for the anisotropic cosmic microwave background (CMB), which, suggest a mainly direction for the universe, we have analyzed a vectorial mass field with a non-canonic kinetic term in the action, minimally coupled to the gravity and where the kinetic function and the mass of the vectorial field are time dependent functions during the the inflation. This vectorial field is introduced following the scalar curvaton idea which should not affect the inflationary dynamics, since its corresponding energy density is negligible during the inflation, comparing with the universe total energy density. Therefore, the vectorial curvaton would be the only field responsible for the primordial perturbation in the curvature ζ . The spectrum for the vectorial field perturbations are taken invariant on the super-horizon scale, i.e. the spectrum does not depend on the wave number, due to the suitable chosen of the kinetic time-dependent function and effective mass for the field during the inflation. The direction generated by the vectorial field is reflected on the ζ spectrum, which is modulated by the presence of an anisotropic statistics. The latter is studied mainly in case of a vectorial field mass increasing with time during the inflation, where there is the possibility of a heavy field ($M \gg H$) at the end of the inflation, causing an isotropic particles production, i.e. the longitudinal and transversal spectra are approximately on the same order of magnitude, in order to find the anisotropic statistics generated by the vectorial field within the observed limits, which are on the order of $g_\zeta = 0,290 \pm 0,031$.

³Research Project.

⁴Faculty of Science, School of Physics, Yeinzon Rodríguez (Advisor).

TABLA DE CONTENIDO

1	INTRODUCCIÓN	14
2	ORIGEN DE LA PERTURBACIÓN PRIMORDIAL EN LA CURVATURA	18
2.1	Perturbación en la Curvatura	19
2.1.1	El Formalismo δN	22
2.1.2	Perturbación en la Densidad de Energía	23
2.2	Propiedades Estadísticas de la Perturbación en la Curvatura	24
2.2.1	Homogeneidad Estadística	26
2.2.2	Isotropía Estadística	26
2.2.3	Gaussianidad	27
2.2.4	Anisotropía Estadística y no Gaussianidad	28
2.3	Generación de la Perturbación en la Curvatura	29
2.4	El Escenario del Curvatón	30
2.4.1	Espectro de las Perturbaciones del Curvatón	32
2.4.2	Generación de ζ en el Escenario del Curvatón	35

3	PERTURBACIÓN PRIMORDIAL EN LA CURVATURA A PARTIR DE CAMPOS VECTORIALES	39
3.1	Espectro de las Perturbaciones para un Campo Vectorial	41
3.2	Espectro de ζ	44
3.3	El Escenario del Curvatón Vectorial	46
3.4	Curvatón Vectorial con un Terminio Cinético Dependiente del Tiempo .	47
3.4.1	Ecuaciones de Movimiento	48
3.4.2	Espectro transversal	50
3.4.3	Espectro Longitudinal	52
3.5	Caso: $\alpha = -4$ y $\beta = 1$	54
3.5.1	Componente Transversal	55
3.5.2	Componente Longitudinal	55
3.6	Evolucion del Modo Cero	56
3.6.1	Durante Inflación	58
3.6.2	Después de Inflación	59
3.7	Anisotropía Estadística en el Escenario del Curvatón Vectorial	60
3.8	Física del Curvatón Vectorial	63
4	CONCLUSIONES	65
	APÉNDICES	67
A	ECUACIONES DE CAMPO	69

A.1	Ecuación de Campo para el Campo Vectorial \mathbf{A}	69
A.2	Ecuaciones de Campo para las Perturbaciones del Campo Vectorial \mathbf{A} .	73
B	SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE CAMPO PARA LOS MODOS w_+ Y w_{\parallel} EN EL CASO: $\alpha = -4$ y $\beta = 1$	75
B.1	Solución de la Ecuación de Campo para w_+	75
B.2	Solución de la Ecuación de Campo para w_{\parallel}	79
B.3	Relación entre los Espectros de las Perturbaciones Longitudinal y Transversal durante Inflación	83
C	EVOLUCIÓN DEL MODO CERO	86
C.1	Durante Inflación	86
C.1.1	Caso: $\alpha = -4$	86
C.2	Despues de Inflación	87
C.2.1	Evolución de H	87
C.2.2	Solución a la ecuación de campo del modo cero \mathbf{W}	88
D	CONTRIBUCIÓN DEL CAMPO VECTORIAL AL ESPECTRO DE ζ	92
	REFERENCIAS	94

LISTA DE FIGURAS

- 2.1 **Evolución de las densidades de energía en el escenario del curvatón.** La gráfica continua representa la evolución de la densidad de energía del inflatón ρ_ϕ y la de dos puntos-línea la del curvatón ρ_ρ . Durante inflación la densidad del curvatón es despreciable. Después de inflación (denotado por “fin”) $\rho_\phi \propto a^{-4}$ y ρ_σ permanece constante. Cuando $m_\sigma \sim H$, el curvatón empieza las oscilaciones (denotado por “osc”) y un tiempo después $\rho_\sigma \propto a^3$. En algún momento (denotado por “dom”) la densidad del curvatón domina el universo y un tiempo después (denotado por “dec”) el curvatón decae en el baño térmico del Big Bang. 31
- 3.1 **Mapa de las perturbaciones generadas por un campo vectorial.** Estas simulaciones corresponden a los posibles patrones que tendría la temperatura en la RCF que pueden derivarse de la anisotropía en el espectro de la RCF. La imagen izquierda muestra una señal isótropa, donde la producción de partículas es prácticamente isótropa ocasionando que el espectro de las perturbaciones en la curvatura se estadísticamente isótropo es decir: $g_\zeta = 0$. Por otro lado, sí la producción de partículas es anisótropa La imagen central e izquierda muestra el caso en el que $g_\zeta = 1$. La imagen centra muestra una dirección preferencial horizontal mientras que la imagen derecha muestra una dirección preferencial vertical. (Cortesía de Mindaugas Karčiauskas). 46

3.2 **Evolucion de las densidades de energía en el escenario del curvatón vectorial.** La gráfica continua representa la evolución de la densidad de energía del inflatón ρ_ϕ y la de dos puntos-linea la del curvatón ρ_W . Durante inflación la densidad de energía del curvatón es despreciable. Después de inflación (denotado por “fin”) $\rho_\phi \propto a^{-4}$ y $\rho_W \propto a^{-3}$. En algún momento (denotado por “dom”) la densidad de energía del curvatón vectorial domina la densidad de energía del universo y un tiempo después (denotado por “dec”) el curvatón vectorial decae en el baño térmico del Big Bang.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

El descubrimiento en 1929 por Edwin Hubble del corrimiento al rojo de la luz proveniente de las galaxias [1], con lo cual se sugiere un Universo en expansión, y el descubrimiento en 1965 por Penzias y Wilson de la radiación cósmica de fondo (RCF) [2], corresponden a las evidencias observacionales que permiten entender que el Universo empezó de un estado denso y caliente, y que dan sólidas bases a la teoría que explica el origen y la evolución de nuestro Universo: el modelo estándar del Big Bang o la teoría del Big Bang caliente [3]. Pero esta teoría ha de enfrentar varios problemas importantes: los problemas de planitud, horizonte y reliquias no deseadas, los cuales generan un conflicto con las observaciones. Por esta razón, en 1981 Alan Guth [4] propone una idea elegante para la solución de los problemas mencionados anteriormente, una época anterior al Big Bang en el cual el Universo experimentó una expansión acelerada, llamada “inflación”, en la cual el universo pudo haberse expandido en forma exponencial. Durante el período inflacionario esta expansión fue generada por un hipotético campo escalar llamado el inflatón. Tal expansión ocasionó que el tamaño físico del universo creciera tanto que llegó a ser mucho más grande que la distancia que la luz podría haber viajado desde el Big Bang (es decir, nuestro Universo observable); en consecuencia, cualquier inhomogeneidad que precedió inflación fue eliminada y se llegó al Universo suave y uniforme que observamos hoy en día. Pero si el universo fuera perfectamente uniforme no existirían estructuras a gran escala (galaxias, cúmulos y supercúmulos). Por tanto, debe haber una desviación en la uniformidad del universo, lo que puede dar lugar a la generación de estructura a gran escala. En la época en que el universo fue dominado por la materia, las inhomogeneidades en la densidad primordial fueron

amplificadas por la gravedad y se convirtieron en la estructura que vemos hoy [5]. En consecuencia, se necesita una perturbación primordial en la densidad de energía y la existencia de estas perturbaciones se refleja en las anisotropías de la RCF mediante el efecto Sachs-Wolfe [6]. La época inflacionaria fija un valor a las perturbaciones en la densidad de energía del campo escalar que domina durante inflación, ocasionando que estas perturbaciones adquieran un carácter clásico [7], generando así, las anisotropías en la densidad de energía. La prueba fehaciente de las anisotropías en la RCF fue su detección por primera vez por el satélite artificial COBE [8] y su ratificación por la sonda Wilkinson de anisotropías en microondas WMAP [9]. En consecuencia, inflación puede ser responsable de las anisotropías observadas en la radiación cósmica de fondo y la generación de estructura a gran escala.

La doble tarea del campo escalar (inflatón) que domina durante inflación: la de resolver los problemas estándar de la cosmología y la generación de la estructura a gran escala, la cual depende de la forma del potencial y la teoría de la gravedad durante inflación (generalmente se considera gravedad de Einstein) es muy restrictiva, descartando modelos inflacionarios bien motivados pero que son incapaces de generar estructura a gran escala [10]. Una alternativa es que durante inflación se tenga en cuenta más de un campo escalar [11, 12, 13]. Este campo escalar adicional llamado curvatón, sólo se encargará de generar estructura a gran escala y en cambio el inflatón, se encargará de generar inflación. Esta visión del Universo temprano ha dado una gran información fenomenológica del Universo que observamos hoy en día, y poder contrastarla con las evidencias observacionales que tenemos acerca de la RCF le ha otorgado una base fuerte a los modelos inflacionarios con más de un campo escalar. Algo importante también para agregar es el hecho que el curvatón no debe afectar la dinámica de la inflación, por ende su densidad de energía, comparada con la densidad de energía total, es despreciable durante inflación, por lo que debemos considerarlo en un período después de inflación, cuando su contribución a la densidad de energía puede aumentar, lo que permite que las escalas de energías durante inflación puede ser del orden de TeV [14, 15, 16, 17] que se puede acceder en el LHC (gran colisionador de hadrones) [18].

Los modelos inflacionarios contruidos a partir de campos escalares para describir nuestro Universo observable han estado de acuerdo con las observaciones, pero hasta que el LCH confirme sí la nueva partícula descubierta corresponde a una partícula escalar o vectorial, la incertidumbre sobre la existencia de los campos escalares fundamentales esta presente [19, 20]. Pero el problema no termina ahí. La precisión con que la sonda WMAP ha elaborado el mapa de las variaciones angulares de la RCF muestra que se han encontrado anomalías [21]; estas sugieren una dirección preferencial de las perturbaciones en la temperatura de la RCF, así como de la estructura a gran escala (por ejemplo, filas de galaxias) [22, 23, 24]. En consecuencia, los modelos inflacionario contruidos a partir de campos escalares no son capaces de reproducir esta nueva posible característica de la RCF. Por lo anteriormente mencionado, es importarte desarrollar modelos inflacionarios que estén en concordancia con las observaciones, es decir, mode-

los que predigan una dirección preferencial en el Universo, ya que en los próximos años la sonda PLANCK [25] ratificará o refutará la existencia de estas anomalías. Una posible solución son los campos vectoriales [26, 27, 28] ya que éstos poseen intrínsecamente la dirección preferencial asociada a esas anomalías en la RCF.

Lo que se pretende hacer es implementar en la idea del curvatón escalar pero en el caso de que éste sea un campo vectorial, el cual contribuye de manera insignificante a la densidad de energía del Universo durante inflación. Después de inflación su densidad aumenta, especialmente cuando la masa del campo del curvatón vectorial (m_σ) sea hace mayor que el parámetro de Hubble ($m_\sigma \gg H$), por lo tanto, su densidad de energía puede dominar (o casi dominar) la densidad de energía del Universo, pero sin que éste genere una expansión anisótropa excesiva [26], favoreciendo así la generación de estructura a gran escala. Pero el hecho de considerar este campo vectorial durante inflación ocasiona que las perturbaciones de este campo sean estadísticamente anisótropas, es decir, los correladores de n puntos de las perturbaciones del campo vectorial del curvatón no son invariantes bajo rotaciones espaciales [28, 29]. En consecuencia, la presencia de la anisotropía estadística conlleva a redefinir el espectro de la perturbación primordial en la curvatura ζ de la siguiente forma [27]

$$\mathcal{P}_\zeta(\mathbf{k}) = \mathcal{P}_\zeta(k) \left[1 + g_\zeta (\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 \right], \quad (1.1)$$

en donde $\mathcal{P}_\zeta(k)$ es el espectro de la perturbación primordial en la curvatura ζ que sólo depende de la magnitud del vector de onda \mathbf{k} , $\hat{\mathbf{k}}$ es el vector de onda unitario, $\hat{\mathbf{d}}$ es el vector unitario a lo largo de la dirección preferencial y g_ζ es el nivel de anisotropía estadística. Estudios precedentes del experimento WMAP han establecido un rango para g_ζ : $g_\zeta = 0,290 \pm 0,031$ [22] que excluye isotropía estadística a más de 9σ . Sin embargo, la dirección preferencial en la anisotropías en la RCF se encuentra cerca del plano del sistema solar, por lo que los autores de la referencia [22] sugieren que este efecto pueda deberse a errores sistemáticos sin resolver [30].

En el presente trabajo se estudiara el escenario del curvatón vectorial [31], en donde un campo vectorial masivo posee un termino cinético no canónico en la acción, acoplado de forma mínima a la gravedad, cuyo fondo es homogéneo e isótropo. El campo vectorial es inspirado en la idea del curvatón [11, 12, 13], en donde la contribución a la densidad de energía de este campo es subdominante durante inflación, razón por la cual, no afectara la dinámica inflacionaria, por lo que se conoce como el escenario del curvatón vectorial. Se analiza la forma como debe ser el termino cinético no canónico dentro de la acción para que los espectros (longitudinal y transversal) de las perturbaciones del campo vectorial sean invariantes de escala, es decir, sean independientes del número de onda k ; para esto, se llevara a cabo un análisis analítico de las solución de las ecuaciones de campo de las perturbaciones longitudinal y transversal del curvatón vectorial, lo que se conoce como el proceso de producción de partículas. Con lo anterior, es posible determinar la forma funcional del termino cinético y de la masa del curvatón vectorial

para lograr la invarianza de escala del espectro. El interés se centrará en mostrar cómo debe ser la evolución de la masa efectiva del curvatón para que sea posible generar anisotropía estadística en el espectro de la perturbación primordial en la curvatura y además la generación, total o parcial, de la perturbación en la curvatura, la cual es responsable de la estructura a gran escala en el Universo.

Capítulo 2

ORIGEN DE LA PERTURBACIÓN PRIMORDIAL EN LA CURVATURA

A pesar del éxito de inflación en la solución de los problemas de la cosmología estándar, se hizo aun más importante debido a su capacidad de ampliar las fluctuaciones cuánticas de los campos que se encontraban en el espacio-tiempo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), haciéndolas clásicas y casi constantes después de la salida de las escalas del horizonte de partículas [3, 5, 6]. Estas fluctuaciones cuánticas corresponden a las pequeñas inhomogeneidades en la densidad de energía, las que son responsables a través de la atracción gravitacional de la estructura a gran escala que vemos hoy en día en el Universo. Estas inhomogeneidades han dejado su huella en la RCF en el momento de la recombinación: las anisotropías en la RCF ($\delta T/T_0$ ¹) están directamente relacionadas con la perturbación en la curvatura espacial ζ mediante el efecto Sachs-Wolfe [6], donde tales perturbaciones cuánticas pueden ser debidas a uno o varios campos escalares, vectoriales o espinoriales:

$$\left(\frac{\delta T}{T_0}\right)_k = \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_k = -\frac{1}{5}\zeta_k, \quad (2.1)$$

donde k hace referencia a los modos de la perturbación. Cabe añadir, que los astrónomos trabajan con la cantidad observable $\delta T/T_0$ y los cosmólogos trabajan con la cantidad ζ .

¹La perturbación δx en cualquier cantidad x , será considerada a primer orden en la teoría de perturbaciones cosmológicas. La cantidad sin perturbar se denota por el subíndice 0

Por lo tanto, vemos que para dar una explicación física acerca de las perturbaciones en la densidad de energía, las cuales se encuentran conectadas directamente con la perturbación en la curvatura como se expresa en (2.1), la mejor opción son las fluctuaciones cuánticas durante una era inflacionaria en el Universo temprano. Esas perturbaciones se extienden desde escalas extremadamente cortas a escalas mas grandes que el tamaño del Universo observable. Debido a que la gravedad conecta la geometría del Universo con su contenido material, las pequeñas fluctuaciones del campo del inflatón están íntimamente relacionadas a fluctuaciones de la métrica del espacio-tiempo dando lugar a perturbaciones en la curvatura. El conocimiento del origen de la estructura en el Universo es dado una vez el Universo empieza a ser dominado por la materia, en el cual toman importancia las inhomogeneidades de la densidad de energía las cuales son amplificadas por la gravedad. En este capítulo se resume una forma cualitativa de generar la perturbación en la curvatura.

SECTION 2.1

Perturbación en la Curvatura

El estudio de las perturbaciones cosmológicas (por ejemplo, la evolución de las perturbaciones en la densidad de energía, las del campo o la presión) radica en la evolución de un espacio-tiempo que no presente homogeneidad e isotropía, para lo cual, se analiza la evolución de las diferencias entre dos espacio-tiempos, uno en el cual será el objeto de estudio y dos, el espacio-tiempo de fondo o referencia. Para nuestro estudio el sistema de referencia de fondo es el espacio-tiempo plano de FRW. El elemento de línea para tal métrica es [32, 33, 34]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (2.2)$$

donde $a(t)$ es el factor de expansión. Para empezar a hablar de perturbaciones, necesitamos especificar el espacio-tiempo, para esto es necesario establecer las coordenadas que definen un *threading* de espacio-tiempo en líneas (corresponden a coordenadas espaciales fijas \mathbf{x}) y un *slicing* en hipersuperficies (corresponden a la coordenada fija del tiempo t). Si consideramos un universo sin perturbaciones, hay un unico *threading* y *slicing* preferido. El *threading* preferido consiste en líneas de mundo comóviles; observadores en el que las lines de mundo se mueven con la expansión. Estas líneas de mundo son geodésicas (caída libre), y corresponden a la expansión uniforme que en términos técnicos significa que tienen *shear* y vorticidad cero. En este caso el *slicing* es ortogonal al *threading*. En el *slicing* preferido todas las cantidades son homogéneas, en particular, la densidad de energía y la curvatura espacial. Podemos resumir diciendo que, el *slicing*

preferido es comóvil (es decir, ortogonal a las líneas de mundo comóvil), plano y tiene densidad de energía uniforme [5].

En presencia de perturbaciones, es imposible encontrar coordenadas con las características mencionadas anteriormente para un universo sin perturbar. Con el fin de aplicar teoría de perturbaciones cosmológicas, se requiere que la ecuación (2.2) se recupere en el límite en ausencia de perturbaciones. Una escogencia de coordenadas que satisfaga este requerimiento es llamado *gauge*. Una vez que el *gauge* se halla escogido, el universo perturbado es descrito por un conjunto de funciones que dependen de la posición. En el Universo sin perturbar, las funciones correspondientes tienden a desaparecer o a tener valores homogéneos. En consecuencia, la perturbación $\delta f(\mathbf{x}, t)$ de una función dada se define como la diferencia entre su valor $f(\mathbf{x}, t)$ en el universo perturbado, y su valor $f(t)$ en el universo sin perturbar (fondo)

$$f(\mathbf{x}, t) = f(t) + \delta f(\mathbf{x}, t), \quad (2.3)$$

donde \mathbf{x} indica coordenadas espaciales x^i . Ahora, consideremos un cambio de *gauge* que sólo afecta la coordenada del tiempo (cambiando sólo el *slicing*);

$$\tilde{t}(t, \mathbf{x}) = t + \delta t(t, \mathbf{x}). \quad (2.4)$$

Esto es solo un nuevo etiquetado de los puntos en el espacio-tiempo perturbado. El nuevo etiquetado no cambia f en un punto dado, pero cambia su separación en el fondo más una perturbación. Haciendo la primera separación en el *gauge* viejo y luego en el nuevo, se tiene

$$f(t) + \delta f(\mathbf{x}, t) = f(\tilde{t}) + \widetilde{\delta f}(\mathbf{x}, t), \quad (2.5)$$

por lo tanto

$$\widetilde{\delta f}(\mathbf{x}, t) - \delta f(\mathbf{x}, t) = f(t) - f(\tilde{t}). \quad (2.6)$$

El lado derecho es la diferencia entre los valores sin perturbar que a primer orden es $-f\dot{\delta}t$. En consecuencia, la transformación de *gauge* de las perturbaciones es

$$\widetilde{\delta f}(\mathbf{x}, t) - \delta f(\mathbf{x}, t) = -\dot{f}(\mathbf{x})\delta t(\mathbf{x}, t). \quad (2.7)$$

El análisis anterior se aplica a cualquier cantidad cuya definición en un momento dado es independiente de la elección de las coordenadas.

Con lo anterior en mente, se define la perturbación en la curvatura primero suavizando² el tensor métrico y el tensor momentum-energía en una escala comóvil R y consideramos el régimen de superhorizonte $aR > H^{-1}$. La presión y la densidad de energía se suavizan en la misma escala. En esta hipótesis, es razonable que la escala del suavizado es la

²Suavizar una función $g(\mathbf{x})$ significa que en cada lugar se sustituye por el promedio dentro de una esfera de radio R .

más grande escala de interés cosmológico, en donde los gradientes espaciales del tensor métrico y del tensor momentum-energía suavizados son despreciables. Como resultado, la evolución de estas cantidades en cada lugar comóvil serán homogéneos; en virtud de esta hipótesis, el Universo en cada posición se desarrollará como un “universo separado”, homogéneo e isótropo. Ahora, consideremos un *gauge* donde el *threading* es comóvil y el *slicing* tiene densidad de energía uniforme y, considerando la suposición de universos separados, el *threading* será ortogonal al *slicing*, con lo que la métrica espacial puede ser escrita como

$$g_{ij} = a^2(\mathbf{x}, t)\gamma_{ij}(\mathbf{x}) \quad (2.8)$$

con

$$a(\mathbf{x}, t) \equiv a(t)e^{\zeta(\mathbf{x}, t)}, \quad \gamma_{ij} \equiv (Ie^h)_{ij}, \quad (2.9)$$

donde I es la matriz identidad y γ tiene determinante uno o de forma equivalente, h no tiene traza. Dentro de la suposición de universos separados, es posible elegir las coordenadas de tal forma que $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$. Para hacer esto posible, γ_{ij} y h_{ij} deben ser independientes del tiempo [5]. La función ζ y h definen la perturbación en la curvatura en el *slicing*. Si la perturbación tensorial h es insignificante, ζ determina la perturbación en la curvatura. En la práctica, “perturbación en la curvatura” se toma como referencia sólo a ζ . A partir de lo anterior, $a(\mathbf{x}, t)$ es definido como un factor de expansión local, en donde la perturbación en la curvatura es definida como $\zeta = \delta(\ln a)$.

En virtud de la hipótesis de los universos separados, y trabajando en un *slicing* de densidad de energía uniforme, la ecuación de continuidad $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$ puede ser escrita como

$$\dot{\rho}(t) = -3 \frac{\dot{a}(\mathbf{x}, t)}{a(\mathbf{x}, t)} [\rho(t) + p(\mathbf{x}, t)] \quad (2.10)$$

$$= -3 \left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + \dot{\zeta}(\mathbf{x}, t) \right] [\rho(t) + p(\mathbf{x}, t)], \quad (2.11)$$

donde se ha utilizado la definición (2.9) y el hecho de que estamos trabajando en un *slicing* de densidad energía uniforme. Ahora, recordemos que la condición adiabática establece que la presión es una única función de la densidad de energía, $p = p(\rho)$, entonces la dependencia espacial de p desaparece, y en consecuencia $\dot{\zeta} = 0$. Por lo tanto $\zeta(\mathbf{x})$ es una cantidad conservada en escalas de superhorizonte. Si p no satisface la condición adiabática, esto puede ser resultado de la interacción de diferentes fluidos, por lo tanto el valor de $\dot{\zeta}$ dependería del modelo escogido para describir el contenido del Universo.

2.1.1 El Formalismo δN

Las ecuaciones (2.8) y (2.9) definen a ζ en términos de la métrica espacial en un *slicing* de densidad de energía uniforme. En un *slicing* generico la métrica espacial se puede escribir en forma similar

$$\tilde{g}_{ij} = \tilde{a}^2(\mathbf{x}, t) \tilde{\gamma}_{ij}(\mathbf{x}, t), \quad (2.12)$$

donde

$$\tilde{a}(\mathbf{x}, t) \equiv a(t)e^{\psi(\mathbf{x}, t)}, \quad \tilde{\gamma}_{ij}(\mathbf{x}) \equiv \left(Ie^{\tilde{h}} \right)_{ij}. \quad (2.13)$$

Se define el número de e -folds local entre dos *slicing* genericos

$$N(\mathbf{x}, t_2, t_1) = \ln \left(\frac{\tilde{a}(\mathbf{x}, t_2)}{\tilde{a}(\mathbf{x}, t_1)} \right) = \ln \left(\frac{a(t_2)e^{\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t_2)}}{a(t_1)e^{\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t_1)}} \right) \quad (2.14)$$

$$= \ln \left(\frac{a(t_1)}{a(t_2)} \right) + \tilde{\psi}(\mathbf{x}, t_2) - \tilde{\psi}(\mathbf{x}, t_1). \quad (2.15)$$

Ahora, si $\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t_2)$ es definido en un *slicing* de densidad de energía uniforme, entonces $\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t_2) = \zeta(\mathbf{x}, t_2)$, y si $\psi(\mathbf{x}, t_1)$ en un *slicing* plano, entonces $\psi(\mathbf{x}, t_1) = 0$. Partiendo de un *slicing* plano, donde el factor de escala es definido localmente homogéneo, y terminado en un *slicing* de densidad de energía uniforme, tenemos

$$\zeta(\mathbf{x}, t_2) = N(\mathbf{x}, t_1, t_2) - N_0(t_1, t_2), \quad (2.16)$$

donde $N_0(t_1, t_2)$ es el número de e -folds para el fondo en expansión. Se observa que ζ es independiente de t_1 , es decir, el cálculo de ζ es independiente de la época inicial, por que cuando se pasa de un *slicing* plano a otro la expansión es uniforme.

A partir de la ecuación anterior se define la perturbación en la curvatura $\zeta(\mathbf{x}, t)$, como la perturbación en el número de e -folds de la expansión local, partiendo de un *slicing* plano y terminando en un *slicing* de densidad de energía uniforme en un tiempo t :

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \delta N(\mathbf{x}, t). \quad (2.17)$$

Asumiendo que la expansión local del Universo está determinado, únicamente por un campo escalar, $\delta N(\mathbf{x}, t) = N(\phi(\mathbf{x}, t))$; bajo la suposición de inflación del tipo *slow-roll* [35] es posible despreciar el término cinético del campo, $\dot{\phi}(\mathbf{x}, t)$. En consecuencia la ecuación (2.16) es posible escribirla como

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = N(\phi(\mathbf{x}, t)) - N(\phi(t)). \quad (2.18)$$

Tomando la expresión anterior para obtener una serie para ζ haciendo uso del teorema de Taylor, se obtiene la siguiente expresión:

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = N_\phi \delta\phi + \frac{1}{2} N_{\phi\phi} (\delta\phi)^2 + \dots, \quad (2.19)$$

donde $N_\phi \equiv \partial N(\phi(t))/\partial\phi$ y $N_{\phi\phi} \equiv \partial^2 N(\phi(t))/\partial\phi^2$. Las derivadas se evalúan en los valores sin perturbar de N , y la perturbación en el campo se evalúa en un *slicing* plano. Este resultado puede ser generalizado para el caso de múltiples campos escalares, cuando $N(\mathbf{x}, t) = N(\phi_1(\mathbf{x}, t), \phi_2(\mathbf{x}, t), \dots)$, en cuyo caso la ecuación (2.19) se convierte en

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \sum_I N_I \delta\phi_I + \frac{1}{2} \sum_{IJ} N_{IJ} \delta\phi_I \delta\phi_J + \dots \quad (2.20)$$

Por otro lado, si suponemos que uno o más campos vectoriales también afectan la evolución de la tasa de expansión local, la perturbación en la curvatura, en el caso más simple donde ζ es generada por un campo escalar y un campo vectorial, y suponiendo que la expansión anisótropa del universo es despreciable, puede calcularse hasta términos de orden cuadrático por medio de la siguiente expansión [28]

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{x}) &\equiv \delta N(\phi(\mathbf{x}), A_i, t) \\ &= N_\phi \delta\phi + N_A^i \delta A_i + \frac{1}{2} N_{\phi\phi} (\delta\phi)^2 + N_{\phi A}^i \delta\phi \delta A_i + \frac{1}{2} N_{AA}^{ij} \delta A_i \delta A_j, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde

$$N_\phi \equiv \frac{\partial N}{\partial\phi}, \quad N_A^i \equiv \frac{\partial N}{\partial A_i}, \quad N_{\phi\phi} \equiv \frac{\partial^2 N}{\partial\phi^2}, \quad N_{AA}^{ij} \equiv \frac{\partial^2 N}{\partial A_i \partial A_j}, \quad N_{\phi A}^i \equiv \frac{\partial^2 N}{\partial\phi \partial A_i}, \quad (2.22)$$

siendo ϕ es el campo escalar y \mathbf{A} es el campo vectorial, donde i denota los índices espaciales que van de 1 a 3.

2.1.2 Perturbación en la Densidad de Energía

Se ha mostrado cómo calcular la perturbación en la curvatura ζ mediante el formalismo δN ; donde ζ se conserva en escalas de superhorizonte siempre y cuando la presión dependa únicamente de la densidad de energía total (condición adiabática) [36]. Sin embargo, el principal interés está en las pequeñas perturbaciones en la densidad de energía, que a la entrada de las escalas al horizonte forman la estructura a gran escala en el Universo. Para establecer una conexión entre la perturbación en la curvatura ζ y la perturbación en la densidad de energía, vamos a utilizar el límite de pequeñas perturbaciones a primer orden. Si consideramos un cambio en el *slicing*, de uno de densidad de energía uniforme a uno genérico (ψ), la expresión (2.15) queda

$$\delta N(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t) - \zeta(\mathbf{x}, t). \quad (2.23)$$

Definiendo en número de *e-folds* como $N(\mathbf{x}, t) = \int H(\mathbf{x}, t) dt$ y considerando perturbaciones a primer orden, resulta

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = -\psi(\mathbf{x}, t) + H(t) \delta t(\mathbf{x}, t). \quad (2.24)$$

A partir de la ecuación (2.7), la perturbación en la densidad es dada por

$$\delta\rho(\mathbf{x}, t) = -\dot{\rho}(t)\delta t(\mathbf{x}, t). \quad (2.25)$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores, encontramos

$$\zeta = -\psi - H \frac{\delta\rho(\mathbf{x}, t)}{\dot{\rho}(t)} = \psi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho(\mathbf{x}, t)}{\rho + p}, \quad (2.26)$$

donde en la última se ha utilizado la ecuación de continuidad para un Universo de FRW. Por lo tanto, se obtuvo la ecuación de transformación que va desde un *slicing* de densidad de energía uniforme a uno generico. Una elección importante de este ultimo es el *slicing* plano, $\psi = 0$, para el cual se obtiene

$$\zeta = -H \frac{\delta\rho}{\dot{\rho}} = \frac{1}{3} \frac{\delta\rho}{\rho + p}. \quad (2.27)$$

De igual forma es posible definir la perturbación en la densidad de energía cuando ésta es alimentada por varios fluidos no interactuantes: se puede definir un *slicing* de densidad de energía uniforme para cada fluido, entonces, si no hay intercambio de energía entre los diferentes fluidos, la ecuación (2.27) se puede reescribir como

$$\zeta_n = -H \frac{\delta\rho_n}{\dot{\rho}_n} = \frac{1}{3} \frac{\delta\rho_n}{\rho_n + p_n}, \quad (2.28)$$

donde el índice n es para cada fluido en particular y $\delta\rho_n$ es la perturbación en la densidad de energía para dicho fluido en un *slicing* plano. Usando $\delta\rho = \sum_n \delta\rho_n$ se puede calcular la perturbación total en la curvatura a partir de la ecuación (2.27)

$$\zeta = \frac{\sum_n (\rho_n + p_n) \zeta_n}{\rho + p}. \quad (2.29)$$

Esta ecuación será importante si tenemos en cuenta el modelo del curvatón donde se encuentra la perturbación primordial generada por varios fluidos no interactuantes.

SECTION 2.2

Propiedades Estadísticas de la Perturbación en la Curvatura

La perturbación primordial en la curvatura ζ , así como las anisotropías de la temperatura en la RCF y las perturbaciones en la densidad de energía, son ejemplos de funciones

cosmológicas que se describen por funciones de distribución de probabilidad. En particular, si ζ es una función continua podría representar una función de distribución de probabilidad, siempre y cuando, $\mathbf{P}(\zeta) \geq 0$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\zeta) d\zeta = 1$. En lugar de trabajar directamente con la función de distribución de probabilidad, $\mathbf{P}(\zeta)$, es conveniente analizar las propiedades estadísticas de ζ via los correladores de n puntos. Por ejemplo, el correlador de 2 puntos se relaciona con la función de distribución de probabilidad como

$$\langle \zeta(\mathbf{x}_1) \zeta(\mathbf{x}_2) \rangle \equiv \int \mathbf{P}(\zeta) \zeta_{\mathcal{N}}(\mathbf{x}_1) \zeta_{\mathcal{N}}(\mathbf{x}_2) d\mathcal{N}, \quad (2.30)$$

donde la integración \mathcal{N} es sobre todo el promedio del ensamble. En general el correlador de dos puntos no precisa de forma única $\mathbf{P}(\zeta)$, por lo que hay que calcular los correladores de mas alto orden (3-puntos, 4-puntos, etc.) que se definen de forma análoga.

Trabajar en el espacio de momentos es especialmente útil en cosmología, ya que las fluctuaciones cuánticas de los campos escalares, durante inflación, se convierten en clásicas una vez estas dejan el horizonte [5, 37, 38, 39]. Lo mismo se aplica para la perturbación en la curvatura ζ que es una cantidad conservada en escalas de super-horizonte si la condición adiabática se cumpla [40]. En un espacio-tiempo plano corresponde hacer una descomposición en series de Fourier, en donde, para hacer la descomposición debemos elegir un determinado tamaño de la caja con condiciones de contorno periódicas. Se requiere que el tamaño de la caja sea lo suficientemente grande, para que los vectores de onda \mathbf{k} , sean continuos y la serie de Fourier pueda ser remplazada por una integral. Por lo general, el tamaño de la caja se toma de varios órdenes de magnitud más grande que el horizonte de nuestro universo observable. Esta caja es llamada *caja mínima* [41]. Esta elección es suficiente para aproximar la serie de Fourier en integrales. De lo anterior, se considera la serie de Fourier de $\zeta(\mathbf{x})$ como

$$\zeta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \zeta(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.31)$$

donde $\zeta(\mathbf{k})$ es el modo de Fourier de $\zeta(\mathbf{x})$. Los correladores de n puntos de $\zeta(\mathbf{x})$ se definen como

$$\langle \zeta(\mathbf{x}_1) \zeta(\mathbf{x}_2) \dots \zeta(\mathbf{x}_n) \rangle \equiv \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \dots \frac{d^3 k_n}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}_n)} \langle \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_2) \dots \zeta(\mathbf{k}_n) \rangle, \quad (2.32)$$

donde $\langle \dots \rangle$ se define como el promedio sobre el ensamble de los productos $\zeta(\mathbf{x}_1) \dots \zeta(\mathbf{x}_n)$ y $\zeta(\mathbf{k}_1), \zeta(\mathbf{k}_2) \dots \zeta(\mathbf{k}_n)$ los valores de ζ en diferentes puntos del espacio; en consecuencia, los correladores de n puntos en el espacio real pueden ser estudiados via los correladores de n puntos en el espacio de momento. Debido a que $\zeta(\mathbf{x}_n)$ describe una distribución de una cantidad real en el universo, los correladores de n puntos deben ser una cantidad real. Esto se traduce en la exigencia, en que los modos de Fourier de $\zeta(\mathbf{k}_n)$ deben satisfacer la condición de realidad $\zeta(-\mathbf{k}_n) = \zeta^*(\mathbf{k}_n)$.

2.2.1 Homogeneidad Estadística

A partir de los datos observacionales de la RCF, es bien sabido que se presentan desviaciones de la temperatura, punto a punto en el espacio, alrededor de $\delta T/T \sim 10^{-5}$, lo que sugiere que el mapa de las distribuciones de las perturbaciones no es homogéneo (invariante bajo traslaciones espaciales), pero puede ser que la función de distribución de probabilidad que rige las perturbaciones escalares $\zeta(\mathbf{x})$ si lo sea, lo que se conoce como homogeneidad estadística [3, 4, 29]. Esto puede ser interpretado como que los correladores de n puntos en el espacio real son invariantes bajo traslaciones espaciales, es decir

$$\langle \zeta(\mathbf{x}_1 + \mathbf{d}) \zeta(\mathbf{x}_2 + \mathbf{d}) \dots \zeta(\mathbf{x}_n + \mathbf{d}) \rangle = \langle \zeta(\mathbf{x}_1) \zeta(\mathbf{x}_2) \dots \zeta(\mathbf{x}_n) \rangle, \quad (2.33)$$

donde \mathbf{d} es un vector en el espacio real que cuantifica la traslación espacial. En vista de (2.32) es posible lograr la homogeneidad estadística, si se expresa el argumento exponencial dentro de la integral como una función de la forma $\mathcal{F}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$, lo cual es posible (pero no es la única forma) si los correladores de n puntos en el espacio de momento son proporcionales a la función delta de Dirac

$$\langle \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_2) \dots \zeta(\mathbf{k}_n) \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \dots + \mathbf{k}_n) M_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n), \quad (2.34)$$

donde $M_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n)$ es el $(n-1)$ -espectro. La homogeneidad estadística es absolutamente necesaria como una hipótesis del teorema ergódico [3], donde ésta nos dice que, bajo la hipótesis de homogeneidad estadística y en ausencia de correlación en el espacio real de argumentos distantes, el promedio sobre los elementos del ensamble es idéntico al promedio espacial sobre un elemento del ensamble. Si la homogeneidad estadística no se cumpliera, no sería posible realizar una comparación entre la teoría y el experimento.

2.2.2 Isotropía Estadística

De nuevo, partimos del hecho que la RCF no es isótropa (invariante bajo rotaciones espaciales), pero puede que la función de distribución que gobierna a $\zeta(\mathbf{x})$ sí lo sea, lo cual es llamado isotropía estadística [3, 4, 29]. Esto significa que los correladores de n puntos son invariantes bajo rotaciones espaciales, es decir

$$\langle \zeta(\tilde{\mathbf{x}}_1) \zeta(\tilde{\mathbf{x}}_2) \dots \zeta(\tilde{\mathbf{x}}_n) \rangle = \langle \zeta(\mathbf{x}_1) \zeta(\mathbf{x}_2) \dots \zeta(\mathbf{x}_n) \rangle, \quad (2.35)$$

donde $\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathcal{R}[\mathbf{x}_i]$, siendo \mathcal{R} un operador rotación. En consecuencia, el $(n-1)$ espectro debe satisfacer la condición

$$M_\zeta(\tilde{\mathbf{k}}_1, \tilde{\mathbf{k}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{k}}_n) = M_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n), \quad (2.36)$$

donde $\tilde{\mathbf{k}}_i = \mathcal{R}[\mathbf{k}_i]$, representa rotaciones en el espacio de momento. En el caso del espectro (1 -espectro) se tiene, considerando homogeneidad estadística, que: $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0$, por lo tanto, para que el espectro sea invariante bajo rotaciones éste debe depender únicamente de la magnitud de \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 , pero como $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$, el espectro solo dependerá de la magnitud de uno de los vectores de onda, es decir

$$M_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \equiv P_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = P_\zeta(k). \quad (2.37)$$

En el caso del biespectro (2 -espectro) es posible argumentar lo mismo que se hizo con el espectro, la isotropía estadística en éste se cumplirá, sí solo depende de la magnitud de los vectores de onda

$$M_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \equiv B_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = B_\zeta(k_1, k_2, k_3). \quad (2.38)$$

La isotropía estadística se ve reflejada en el espectro y biespectro, los cuales únicamente dependen de la magnitud del vector de onda. Los $(n - 1)$ espectros de más alto orden no pueden ser representados en términos de las magnitudes de los vectores de onda, de igual forma como se muestra en (2.37) y (2.38).

2.2.3 Gaussianidad

La perturbación en la curvatura se dice que es gaussiana si para diferentes vectores de onda de la perturbación no están correlacionadas. Para el caso del mismo vector de onda, la condición de realidad se aplica para $\zeta(\mathbf{x})$ por lo que hay autocorrelación. El correlador de dos puntos en el espacio de Fourier es de la forma

$$\langle \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_2) \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P_\zeta(\mathbf{k}). \quad (2.39)$$

En virtud de la condición de realidad $\zeta(-\mathbf{k}) = \zeta^*(\mathbf{k})$, una definición equivalente para el espectro es

$$\langle \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta^*(\mathbf{k}_2) \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) P_\zeta(\mathbf{k}). \quad (2.40)$$

Estableciendo $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ el lado izquierdo es $\langle |\zeta(\mathbf{k})|^2 \rangle$, lo cual conduce a que el espectro sea positivo y diferente de cero. A partir de la condición de realidad en ζ , el espectro, $P_\zeta(\mathbf{k})$, satisface la siguiente condición de realidad: $P_\zeta(\mathbf{k}) = P_\zeta(-\mathbf{k})$. Para el caso de los correladores de n puntos con n impar, éstas deben ser cero mientras que aquéllos con n par se puede representar como correladores de dos puntos

$$\langle \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_2) \zeta(\mathbf{k}_3) \rangle = 0, \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \langle \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_2) \zeta(\mathbf{k}_3) \zeta(\mathbf{k}_4) \rangle &= \langle \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_2) \rangle \langle \zeta(\mathbf{k}_3) \zeta(\mathbf{k}_4) \rangle + \langle \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_3) \rangle \langle \zeta(\mathbf{k}_2) \zeta(\mathbf{k}_4) \rangle + \\ &\quad \langle \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_4) \rangle \langle \zeta(\mathbf{k}_2) \zeta(\mathbf{k}_3) \rangle \\ &= (2\pi)^6 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta^3(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) P_\zeta(\mathbf{k}_1) P_\zeta(\mathbf{k}_3) + 2 \text{ p.}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

y así sucesivamente, donde 2 p. hace referencia a dos permutaciones. Regresando a las perturbaciones $\zeta(\mathbf{x})$ en el espacio real, se dice que ésta es gaussiana si la función de distribución de probabilidad es

$$\mathbf{P}(\zeta(\mathbf{x})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle\zeta^2(\mathbf{x})\rangle}} e^{-\zeta^2(\mathbf{x})/\langle\zeta^2(\mathbf{x})\rangle}, \quad (2.43)$$

la cual es la definición de distribución de probabilidad gaussiana. No obstante, si aplicamos (2.41), (2.42) y así sucesivamente a $\zeta(\mathbf{x})$, en vez de $\zeta(\mathbf{k})$, también se obtendrá (2.43). En el caso que las perturbaciones $\zeta(\mathbf{k})$ no son gaussianas, los correladores de n puntos, con $n \geq 3$, pero en el caso gaussiano, los correladores pares no desaparecen y éstos podemos expresarlos de la siguiente forma

$$\langle\zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3)\rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3), \quad (2.44)$$

$$\langle\zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3)\zeta(\mathbf{k}_4)\rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) T_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4), \quad (2.45)$$

y así sucesivamente. En donde $B_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ y $T_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ son llamados el biespectro y triespectro de $\zeta(\mathbf{k})$.

2.2.4 Anisotropía Estadística y no Gaussianidad

En la mayoría de los modelos cosmológicos los correladores de n puntos de ζ se suponen invariantes ante rotaciones y traslaciones espaciales. Sin embargo, violación de tales invarianzas implica modificaciones de las habituales funciones espectrales en términos de los descriptores estadísticos. Estas violaciones pueden ser debidas a la presencia de perturbaciones de campos vectoriales [26, 27, 28], perturbaciones de campos espinoriales [42, 43], expansión anisótropa [44, 45] o por un fondo inhomogéneo [46, 47]. Violaciones a la isotropía estadística parecen estar presentes en los datos [21] y estudios recientes [22, 23, 24] sugieren la existencia de una dirección preferencial, lo cual corresponde a una clara violación de la invarianza bajo rotaciones espaciales de los correladores de n puntos de ζ . La forma de parametrizar la presencia de anisotropía estadística, es a partir de un cambio general en la definición del espectro, que es de la forma [27]

$$P_\zeta(\mathbf{k}) = P_\zeta^{\text{iso}}(k) \left[1 + g_\zeta(\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 + \dots \right], \quad (2.46)$$

donde $P_\zeta^{\text{iso}}(k)$ es el promedio sobre todas las direcciones, $\hat{\mathbf{d}}$ es un vector unitario correspondiente a la dirección preferencial en el Universo, $\hat{\mathbf{k}}$ es un vector unitario a lo largo de \mathbf{k} y g_ζ es el nivel de anisotropía estadística. Un estudio acerca de la perturbación en la temperatura de la RCF [22] encuentra una débil evidencia de anisotropía estadística, por lo que es posible mantener sólo los términos principales (cuadrupolares) de (2.46)

$$P_\zeta(\mathbf{k}) = P_\zeta^{\text{iso}}(k) \left[1 + g_\zeta(\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 \right]. \quad (2.47)$$

Los datos del WMAP 5 [22] han encontrado que el nivel de anisotropía estadística se encuentra en el rango de $g_\zeta \simeq 0,290 \pm 0,031$ que excluye isotropía estadística a más de 9σ . Sin embargo, la dirección preferencial de las anisotropías en la RCF se encuentra cerca del plano del sistema solar lo que hace que los autores de la referencia [30] sugieran que este efecto podría deberse a un error sistemático sin resolver. A pesar de todos esto, la persistencia en los datos observacionales de la anisotropía estadística, sugiere fuertemente la presencia de un campo vectorial en la época inflacionaria.

Con respecto a la parte isótropa del espectro, éste es parametrizado en términos de la amplitud A_ζ y el índice espectral n_ζ que mide la desviación del espectro con respecto a un invariante de escala [5]

$$P_\zeta^{\text{iso}} = \frac{2\pi^2}{k^3} A_\zeta^2 \left(\frac{k}{a_* H_*} \right)^{n_\zeta - 1}, \quad (2.48)$$

en donde a_* y H_* son el parámetro de expansión y el parámetro de Hubble evaluados a la salida del horizonte. El biespectro B_ζ y el triespectro T_ζ son parametrizados en términos de productos del espectro P_ζ , y los niveles de no gaussianidad f_{NL} , τ_{NL} y g_{NL} respectivamente [48, 49]:

$$\begin{aligned} B_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &\equiv \frac{6}{5} f_{NL} [P_\zeta(\mathbf{k}_1)P_\zeta(\mathbf{k}_2) + \text{p. c.}], \\ T_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) &\equiv \frac{1}{2} \tau_{NL} [P_\zeta(\mathbf{k}_1)P_\zeta(\mathbf{k}_2)P_\zeta(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4|) + \text{p. c.}] + \\ &\quad \frac{54}{25} g_{NL} [P_\zeta(\mathbf{k}_1)P_\zeta(\mathbf{k}_2)P_\zeta(\mathbf{k}_3) + \text{p. c.}], \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$(2.50)$$

donde p.c. hace referencia a permutaciones cíclicas. Existen datos observacionales de estas cantidades, los cuales los modelos inflacionarios deben predecir, por ejemplo $A_\zeta = (4,957 \pm 0,094) \times 10^{-5}$ [50], $n_\zeta = 0,960 \pm 0,014$ [51] (lo cual indica que ζ es prácticamente invariante de escala), $-10 < f_{NL} < 74$ [51], $-0,6 \times 10^4 < \tau_{NL} < 3,3 \times 10^4$ [52] y $-7,4 \times 10^5 < g_{NL} < 8,2 \times 10^5$ [52] (lo cual indica que ζ es prácticamente gaussiana).

SECTION 2.3

Generación de la Perturbación en la Curvatura

Como se mostró anteriormente, ζ es una cantidad conservada si la presión depende únicamente de la densidad de energía. La suposición usual es que la perturbación en la curvatura es generada durante inflación, debido a las fluctuaciones cuánticas del campo

del inflatón. Como las escalas cosmológicas dejan el horizonte, las fluctuaciones cuánticas se convierten en perturbaciones clásicas con un espectro casi invariante de escala, generando así, la perturbación en la curvatura. En este caso, el espectro sólo depende de la forma del potencial y la teoría de gravedad durante inflación, proporcionando una vista directa a las condiciones durante esta época. En el caso del modelo del curvatón se supone que el inflatón produce una perturbación en la curvatura insignificante [5, 11, 12, 13]. Otras alternativas se han planteado para generar toda o parte de ζ en épocas posteriores. Las posibilidades incluyen la generación de ζ , ya sea por multiples campos durante inflación [53], al final de inflación [54], durante el *preheating* [55], en el *reheating* y en un segundo *reheating* a través del mecanismo del curvatón [11, 12, 13]. Es este ultimo mecanismo mediante el cual se va a estudiar la forma de generar la perturbación en la curvatura.

SECTION 2.4

El Escenario del Curvatón

En el escenario del curvatón se asume que en el universo primordial existen dos campos escalares: el campo del inflatón ϕ y el campo del curvatón σ . El potencial del inflatón debe generar una expansión acelerada, es decir, el inflatón sólo se encarga de generar la etapa inflacionaria y las condiciones sobre el curvatón son orientadas a la generación de la perturbación en la curvatura espacial, con lo cual este último campo sera el encargado de la generación de la estructura a gran escala. Los fluidos asociados a estos dos campos pueden considerarse por separado justo antes del decaimiento del curvatón, lo que garantiza la conservación de las perturbaciones en la curvatura asociadas a cada campo, ζ_ϕ y ζ_σ a grandes escalas, ya que permite despreciar los términos no adiabáticos en las respectivas ecuaciones de continuidad. En concordancia con la hipótesis del curvatón, la contribución del inflatón a la perturbación en la curvatura es despreciable y el campo del curvatón no domina la densidad de energía del universo cuya masa m_σ satisface la condición $m_\sigma \ll H$ (campo ligero) [11, 12, 13]. Así, durante inflación las perturbaciones netas en la métrica son despreciables; además, la densidad de energía del universo se mantiene casi constante por las condiciones de *slow-roll* del potencial del inflatón, mientras que para el caso del curvatón éste se mantiene congelado a un valor σ_* debido a la condición de campo ligero [56].

Después de haber terminado el período inflacionario, el parámetro de Hubble decrece en el tiempo $H \propto 1/t$ y el inflatón comienza a oscilar alrededor de un mínimo de su potencial, decayendo posteriormente en un fluido de radiación, el cual domina la

densidad de energía del universo, pero que, sin embargo, no produce perturbaciones apreciables en la curvatura. De igual forma, después del final de inflación, el curvatón empieza su propio proceso de decaimiento iniciando oscilaciones alrededor de su mínimo de potencial cuando $m_\sigma \sim H$, pero cuando $m_\sigma \gg H$, las oscilaciones son tan rápidas comparadas con el tiempo característico de expansión inflacionaria (1-efold) que el campo del curvatón se comporta como un fluido de materia [57]. Las amplitudes de las oscilaciones van disminuyendo con el tiempo debido a la expansión del universo, de igual forma su densidad de energía ρ_σ también va disminuyendo con el fin de que el curvatón decaiga antes de que domine la densidad de energía del universo y no se genere una segunda etapa inflacionaria. En consecuencia la densidad de energía de radiación heredada del inflatón, decae de la forma $\rho_r \propto a^{-4}$, la cual disminuye más rápidamente que la densidad de energía de materia del curvatón, variando según $\rho_\sigma \propto a^{-3}$ (ver figura 2.1). Posteriormente cuando el curvatón decaiga, la contribución de la densidad de energía del curvatón es significativa comparada con la de la radiación, pero no domina la densidad de energía del universo. La principal motivación del escenario del curvatón, es que la perturbación en la curvatura generada por este campo en el momento que decae es apreciable y lo suficientemente significativa comparada con la de radiación, por lo que genera las perturbaciones primordiales en la curvatura espacial y da cuenta así de las estructuras a gran escala que vemos hoy en día en la época dominada por la materia [11, 12].

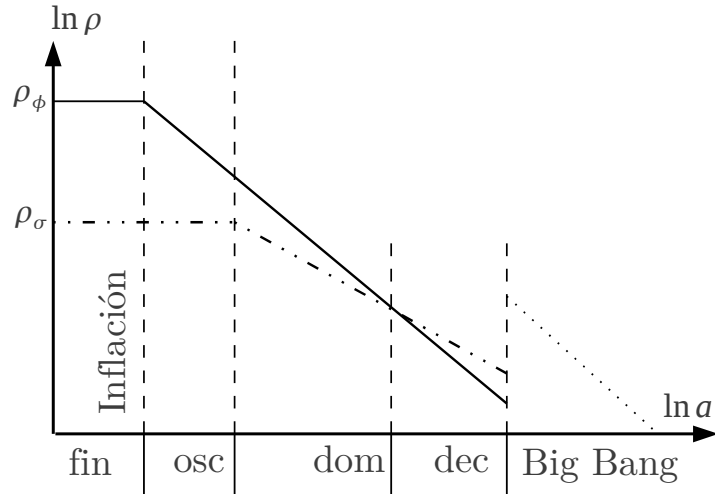


Figura 2.1: **Evolución de las densidades de energía en el escenario del curvatón.** La gráfica continua representa la evolución de la densidad de energía del inflatón ρ_ϕ y la de dos puntos-línea la del curvatón ρ_σ . Durante inflación la densidad del curvatón es despreciable. Después de inflación (denotado por “fin”) $\rho_\phi \propto a^{-4}$ y ρ_σ permanece constante. Cuando $m_\sigma \sim H$, el curvatón empieza las oscilaciones (denotado por “osc”) y un tiempo después $\rho_\sigma \propto a^3$. En algún momento (denotado por “dom”) la densidad del curvatón domina el universo y un tiempo después (denotado por “dec”) el curvatón decae en el baño térmico del Big Bang.

2.4.1 Espectro de las Perturbaciones del Curvatón

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores para el campo escalar σ , éste debe cumplir que $m_\sigma \ll H_*$, en donde H_* es el parámetro de Hubble durante inflación. Ésta es la condición de campo ligero, la cual garantiza que el campo del curvatón no empiece a oscilar sino hasta después del final de inflación. En los modelos más sencillos, el potencial asociado al curvatón es de la forma

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}m_\sigma\sigma^2, \quad (2.51)$$

donde m_σ es la masa del curvatón. Asumiendo que el campo σ es homogéneo, es decir, éste no depende de las coordenadas y sólo dependerá del tiempo, $\sigma = \sigma(t)$, la ecuación de campo asociada al curvatón se puede escribir como

$$\ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} + m_\sigma^2\sigma = 0. \quad (2.52)$$

Ahora, para analizar la evolución de las perturbaciones durante inflación y antes de que las escalas salgan del horizonte, el campo escalar del curvatón σ se puede escribir como

$$\sigma(t, \mathbf{x}) = \sigma_0(t) + \delta\sigma(t, \mathbf{x}), \quad (2.53)$$

donde σ_0 es el campo homogéneo y $\delta\sigma$ es la perturbación en el campo. Después de esto, podemos obtener la ecuación de movimiento de las componentes de Fourier de la perturbación del campo del curvatón, la cual podemos escribirla como

$$\left[\partial_t^2 + 3H\partial_t + m_\sigma^2 + \left(\frac{k}{a}\right)^2 \right] \delta\sigma_k = 0, \quad (2.54)$$

donde $k \equiv |\mathbf{k}|$. El siguiente paso es el de promover las perturbaciones del campo, a los operadores cuánticos definidos como

$$\delta\hat{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\hat{a}(\mathbf{k})\lambda_k(k, t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\lambda_k^*(k, t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \quad (2.55)$$

donde $\hat{a}(\mathbf{k})$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$ son los operadores creación y aniquilación respectivamente y donde se ha considerado cuantización canónica con $[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$. Con respecto a los modos λ_k , éstas satisfacen la misma ecuación de campo que las componentes de Fourier de la perturbación del campo $\delta\sigma_k$, ya que la ecuación es lineal. De aquí se deduce que, la ecuación de campo para los modos λ_k es

$$\ddot{\lambda}_k + 3H\dot{\lambda}_k + \left(m_\sigma^2 + \frac{k^2}{a^2}\right)\lambda_k = 0, \quad (2.56)$$

donde $\ddot{\lambda}_k = d^2\lambda_k/dt^2$ y $\dot{\lambda}_k = d\lambda_k/dt$. Es conveniente, matematicamente hablando, realizar el siguiente cambio de variable $\lambda_k = \tilde{\lambda}_k/a$, por lo que resulta

$$\dot{\lambda}_k = \frac{\dot{\tilde{\lambda}}_k}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2}\tilde{\lambda}_k, \quad (2.57)$$

$$\ddot{\lambda}_k = \frac{\ddot{\tilde{\lambda}}_k}{a} - \frac{2\dot{a}\dot{\tilde{\lambda}}_k}{a^2} + \left(\frac{2\dot{a}^2}{a^3} - \frac{\ddot{a}}{a^2}\right)\tilde{\lambda}_k. \quad (2.58)$$

Al considerar expansión de de Sitter, se tiene en consecuencia

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 0 \implies \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = H^2, \quad (2.59)$$

en donde se ha utilizado el hecho de que $H = \dot{a}/a$, por lo que la ecuación (2.56), para la nueva variable $\tilde{\lambda}_k$ queda

$$\ddot{\tilde{\lambda}}_k + \dot{\tilde{\lambda}}_k + \left(-2H^2 + m_\sigma^2 + \frac{k^2}{a^2}\right)\tilde{\lambda}_k = 0. \quad (2.60)$$

Si ahora pasamos a tiempo conformal, en donde $a = -(1/a\tau)$ y $d\tau = dt/a$, la ecuación anterior queda

$$\tilde{\lambda}_k'' + \left[k^2 - \frac{1}{\tau^2}\left(\nu_\sigma^2 - \frac{1}{4}\right)\right]\tilde{\lambda}_k = 0, \quad (2.61)$$

donde

$$\nu_\sigma^2 = \frac{9}{4} - \frac{m_\sigma^2}{H^2} \quad (2.62)$$

con $\tilde{\lambda}_k'' = d^2\tilde{\lambda}_k/d\tau^2$. La solución genérica para la ecuación (2.61) para ν_σ real, expresada en términos de las funciones de Hankel de primer orden $H_{\nu_\sigma}^{(1)}$ y segundo orden $H_{\nu_\sigma}^{(2)}$, es [58]

$$\tilde{\lambda}_k = \sqrt{-\tau} [A_1(k)H_{\nu_\sigma}^{(1)}(-k\tau) + A_2(k)H_{\nu_\sigma}^{(2)}(-k\tau)], \quad (2.63)$$

donde $A_1(k)$ y $A_2(k)$ son constantes de integración, las cuales son determinadas en el régimen de subhorizonte ($k \gg aH$), lo que corresponde a $-k\tau \gg 1$, y normalizando a la solución de Bunch-Davies [59]. En este régimen las funciones de Hankel están dadas aproximadamente por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\nu_\sigma}^{(1)}(-k\tau \gg 1) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi k\tau}} \exp\left[-i\left(k\tau + \frac{\pi}{2}\nu_\sigma + \frac{3\pi}{4}\right)\right], \\ \mathcal{H}_{\nu_\sigma}^{(2)}(-k\tau \gg 1) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi k\tau}} \exp\left[i\left(k\tau + \frac{\pi}{2}\nu_\sigma + \frac{3\pi}{4}\right)\right]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

La normalización de Bunch-Davies

$$\tilde{\lambda}_k = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}, \quad (2.65)$$

es obtenida en el régimen de subhorizonte escogiendo los siguientes valores para las constantes de integración

$$A_1(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu_\sigma + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}}, \quad (2.66)$$

$$A_2(k) = 0. \quad (2.67)$$

La solución exacta se convierte en

$$\tilde{\lambda}_k = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp[i(\pi/2)(\nu_\sigma + 1/2)] \sqrt{-\tau} \mathcal{H}_{\nu_\sigma}^{(1)}(-k\tau). \quad (2.68)$$

En escalas de superhorizonte ($k \ll aH$), lo que corresponde a $-k\tau \ll 1$, la función de Hankel de primer orden se aproxima a

$$\mathcal{H}_{\nu_\sigma}^{(1)}(-k\tau \equiv \frac{k}{aH} \ll 1) \sim -\frac{i\Gamma(\nu_\sigma)}{\pi} \left(\frac{k}{2aH}\right)^{-\nu_\sigma}, \quad (2.69)$$

donde $\Gamma(\nu_\sigma)$ es la función Gamma. Retomando la variable antigua λ , se encuentra que en escalas de superhorizonte es dada por

$$\lambda = \frac{ia^{3/2}}{2\pi} \Gamma(\nu_\sigma) \left(\frac{k}{2aH}\right)^{-\nu_\sigma} \sqrt{\frac{\pi}{H}} \exp[i(\pi/2)(\nu_\sigma + 1/2)]. \quad (2.70)$$

Para conocer el espectro en las perturbaciones del campo σ hay que determinar el promedio estadístico de las perturbaciones de un ensamble de universos en el estado cuántico del universo durante inflación, en donde la opción más indicada es tomar el estado cuántico de vacío, lo cual garantiza las propiedades de homogeneidad e isotropía, también porque, de otra manera, no habría inflación. El promedio estadístico es definido por

$$\langle \delta\sigma(\mathbf{k}_1) \delta\sigma(\mathbf{k}_2) \rangle \equiv \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P_{\delta\sigma}(k) \equiv \frac{2\pi^2}{k^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathcal{P}_{\delta\sigma}(k), \quad (2.71)$$

donde el espectro de las perturbaciones $\delta\sigma$ está dado por

$$\mathcal{P}_{\delta\sigma}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |\lambda_k|^2. \quad (2.72)$$

Por lo tanto, reemplazando (2.70) en (2.72), el espectro de las perturbaciones es

$$\mathcal{P}_{\delta\sigma} = \frac{H^2}{\pi^3} [\Gamma(\nu_\sigma)]^2 \left(\frac{k}{2aH}\right)^{3-2\nu_\sigma}. \quad (2.73)$$

En consecuencia, la dependencia de escala de las perturbaciones del campo sólo se incluye en el último término del resultado anterior. Considerando la condición de campo ligero, $m_\sigma \ll H$, la definición (2.62) nos muestra que $\nu_\sigma \rightarrow 3/2$. Vemos que el término

dependiente de escala es muy pequeño y el espectro es prácticamente invariante de escala, lo que resulta

$$\mathcal{P}_{\delta\sigma} = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2. \quad (2.74)$$

A pesar de que el resultado anterior fue encontrado para una expansión de de Sitter, podemos incluir una variación muy lenta del parámetro de Hubble, $\dot{H} \neq 0$. Debido a esta variación pequeña, el espectro de las perturbaciones del campo del curvatón en un expansión de de Sitter, es de la forma

$$\mathcal{P}_{\delta\sigma} = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{n_{\delta\sigma}-1}, \quad (2.75)$$

donde $n_{\delta\sigma}$ es el índice espectral que es dado por

$$n_{\delta\sigma} = 2\eta_\sigma - 2\epsilon, \quad (2.76)$$

ademas $\eta_\sigma = m_\sigma^2/3H^2$ es el parámetro de *slow-roll* asociado al campo escalar σ y $\epsilon = -(\dot{H}/H^2)$. Por lo tanto, el espectro de las perturbaciones $\mathcal{P}_{\delta\sigma}$ presenta una dependencia (aunque pequeña) de la evolución de H y el parámetro de *slow-roll* η_σ . Si consideramos la condición de campo ligero, resulta que $\eta_\sigma \ll 1$, si ademas, el campo del inflatón es lo suficientemente plano, el parámetro de *slow-roll* ϵ , sera $\epsilon \ll 1$, por lo que el índice espectral sera $n_{\delta\sigma} \sim 0$. En consecuencia, el resultado en (2.75) puede aproximarse a (2.74), por lo que el espectro sera un invariante de escala aun en una expansión de cuasi de Sitter.

2.4.2 Generación de ζ en el Escenario del Curvatón

La perturbación en la curvatura se encuentra determinada por la expresión (2.26) y como el universo al final de inflación estaba compuesto por dos fluidos independientes (radiación y materia) se obtiene

$$\zeta = -\psi - H \left(\frac{\delta\rho}{\dot{\rho}}\right)_{\text{total}}, \quad (2.77)$$

en donde la densidad de energía total del universo es $\rho_{\text{total}} = \rho_r + \rho_\sigma$. De igual forma es posible asociar las perturbaciones en la curvatura asociada a cada fluido, teniendo en cuenta la ecuación de continuidad, $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$, y el hecho de que para un fluido de materia la presión es cero, $p_0 = 0$, y para un fluido de radiación la presión en un tercio de la densidad de energía, $p_0 = \rho_0/3$, por lo que ζ asociado a cada fluido es

$$\zeta_\sigma = -\psi - H \frac{\delta\rho_\sigma}{\dot{\rho}_{\sigma_0}} = -\psi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho}{\rho_{\sigma_0}}, \quad (2.78)$$

$$\zeta_r = -\psi - H \frac{\delta\rho_r}{\dot{\rho}_{r_0}} = -\psi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho}{\rho_{r_0}}. \quad (2.79)$$

Combinando las ecuaciones (2.77), (2.78) y (2.79), la perturbación en la curvatura total ζ puede ser escrita

$$\zeta = (1 - \hat{\Omega}_\sigma)\zeta_r + \hat{\Omega}_\sigma\zeta_\sigma, \quad (2.80)$$

en donde el factor de modulación es

$$\hat{\Omega}_\sigma \equiv \frac{3\rho_{\sigma_0}}{4\rho_{r_0} + 3\rho_{\sigma_0}}. \quad (2.81)$$

En el modelo del curvatón se asume que al menos $\zeta_r \leq 10^{-2}\zeta_\sigma$, de tal forma, que las perturbaciones en la curvatura ζ_r producidas por la radiación son despreciables, por lo que la expresión (2.80) se reduce a [13]

$$\zeta \approx \hat{\Omega}_\sigma\zeta_\sigma, \quad (2.82)$$

sólo si $\hat{\Omega}_\sigma$ es lo suficientemente grande. Esto quiere decir, que en el momento de alcanzar la escala de superhorizonte, las fluctuaciones cuánticas del curvatón se convierten en clásicas, por lo que las perturbaciones ζ_σ se convierten en un invariante temporal del sistema, en consecuencia la perturbación total ζ dependería solamente del factor de modulación $\hat{\Omega}_\sigma$, cuya evolución depende de los fondos homogéneos $\rho_{r_0}(t)$ y $\rho_{\sigma_0}(t)$ para la radiación y el curvatón respectivamente. Lo que se necesita es que el parámetro evolucione a un valor lo suficientemente grande para que el curvatón genere las perturbaciones primordiales en la curvatura, las cuales son las responsables de la generación de la estructura a gran escalas que observamos hoy en día. Esto nos muestra que debe haber una relación entre el factor de modulación $\hat{\Omega}_\sigma$ y el parámetro de densidad $\rho_\sigma/\rho_{\text{total}}$, ya que al momento que la densidad de energía del curvatón comienza a dominar la densidad de energía total del universo, se pueden imprimir las perturbaciones en la curvatura espacial intrínseca ψ en el tensor métrico. Antes de que esto suceda, tenemos la libertad de fijar ψ igual a cero, debido a que las perturbaciones generadas por el curvatón son despreciables.

En el momento que el parámetro de Hubble durante inflación es mucho menor que la masa del curvatón m_σ , se inician las oscilaciones rápidas de σ alrededor de su mínimo de potencial, por lo que la densidad de energía se puede aproximar de la forma

$$\rho_\sigma(t, \mathbf{x}) \approx \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_*^2(t, \mathbf{x}), \quad (2.83)$$

donde $\sigma_*^2(t, \mathbf{x})$ es la amplitud de las oscilaciones. De esta manera la densidad de energía total puede ser separada definiendo adecuadamente la densidad de energía de fondo y la densidad de energía de las perturbaciones como

$$\rho_\sigma(t, \mathbf{x}) \approx \rho_{\sigma_0} + \delta\rho_\sigma, \quad (2.84)$$

en donde,

$$\rho_{\sigma_0} = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2, \quad \delta\rho_\sigma = m_\sigma^2\sigma_0\delta\sigma, \quad (2.85)$$

evaluadas durante el período de oscilaciones rápidas. Así, la perturbación en la curvatura producida por el curvatón en un *slicing* plano ($\psi = 0$), utilizando (2.78) es

$$\zeta_\sigma = \frac{H m_\sigma^2 \sigma_0 \delta\sigma}{3H \rho_{\sigma_0}} = \frac{m_\sigma^2 \sigma_0 \delta\sigma}{\frac{3}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2},$$

lo que resulta en

$$\zeta_\sigma = \frac{2}{3} \frac{\delta\sigma}{\sigma_0}. \quad (2.86)$$

Si la densidad de energía del curvatón es subdominante en el momento que éste decae, $\rho_\sigma \ll \rho_r$, entonces $\hat{\Omega}_\sigma = \frac{3}{4} \Omega_\sigma$, donde $\Omega_\sigma \equiv \rho_{\sigma_0}/\rho_0$. Por otro lado, si el curvatón es dominante en alguna época, entonces $\hat{\Omega}_\sigma = \Omega_\sigma = 1$. En ambos casos es una buena aproximación escribir $\hat{\Omega}_\sigma \approx \Omega_\sigma$. El error introducido por esta aproximación no es mas grande que el introducido por la aproximación del decaimiento repentino [5]. Por esto, la perturbación total en la curvatura es

$$\zeta \approx \frac{2}{3} \Omega_\sigma \left(\frac{\delta\sigma}{\sigma_0} \right). \quad (2.87)$$

Inicialmente, cuando la radiación domina la densidad de energía del universo, Ω_σ es muy pequeño y las perturbaciones en la curvatura son despreciables, pero éstas se incrementarán paulatinamente con el tiempo, ya que la densidad de energía asociada a la radiación decae más rápido que la asociada al curvatón. Como consecuencia las perturbaciones en la curvatura se atenúan con el tiempo y finalmente quedan impresas en la métrica, cuando el curvatón decae completamente, y su parámetro de densidad final es igual al parámetro de decaimiento Ω_{dec} . Cuando esto sucede, la normalización de f_{NL} del bispectro $B_\zeta(k_1, k_2, k_3)$ de ζ en el escenario del curvatón está directamente relacionada con Ω_{dec} [13, 56]

$$f_{NL} \approx \frac{5}{4\Omega_{\text{dec}}}, \quad (2.88)$$

Las cotas brindadas por el WMAP en donde $-10 < f_{NL} < 74$, lleva a un rango de valores permitidos para Ω_{dec} , bajo la condición $\Omega_{\text{dec}} \leq 1$, la cual es

$$0, 12 \leq \Omega_{\text{dec}} \leq 1. \quad (2.89)$$

El espectro de ζ , puede ser determinado a partir de (2.39) como

$$\langle \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_2) \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\zeta(k). \quad (2.90)$$

Ahora, la forma de determinar la contribución al espectro de ζ debido a las perturbaciones del campo del curvatón, es a partir del correlador de 2 puntos de las perturbaciones asociadas al campo del curvatón dadas por (2.87), las cuales se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \langle \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_2) \rangle &= \frac{4}{9} \frac{\Omega_{\text{dec}}^2}{\sigma_*^2} \langle \delta\sigma_*(\mathbf{k}_1) \delta\sigma_*(\mathbf{k}_2) \rangle \\ &= \frac{4}{9} \frac{\Omega_{\text{dec}}^2}{\sigma_*^2} \left[(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\delta\sigma}(k) \right], \end{aligned} \quad (2.91)$$

en consecuencia, igualando los resultados (2.90) y (2.91) se obtiene una expresión para el espectro de ζ :

$$\mathcal{P}_\zeta(k) \approx \frac{4}{9} \Omega_{\text{dec}}^2 \frac{\mathcal{P}_{\delta\sigma}(k)}{\sigma_*^2}. \quad (2.92)$$

Debido a que el campo σ es un campo ligero y su densidad de energía no domina comparada con la del inflatón, se puede utilizar (2.48), con lo que se obtiene

$$\mathcal{P}_\zeta(k) \equiv A_\zeta^2 \left(\frac{k}{aH_*} \right)^{n_\zeta - 1} \simeq \left[\frac{H_* \Omega_{\text{dec}}}{3\pi\sigma_*} \right]^2 \left(\frac{k}{aH_*} \right)^{2\eta_\sigma - 2\epsilon}. \quad (2.93)$$

Puesto que el índice espectral n_ζ debe estar de acuerdo con las observaciones, se requiere un espectro de potencia casi invariante de escala [51]

$$n_\zeta = 0,963 \pm 0,012. \quad (2.94)$$

Capítulo 3

PERTURBACIÓN PRIMORDIAL EN LA CURVATURA A PARTIR DE CAMPOS VECTORIALES

En el capítulo anterior se mostró como un campo escalar que no domina durante inflación es capaz de generar la perturbación primordial en la curvatura en el Universo. Se mostró cómo el espectro de las perturbaciones del campo del curvatón en escalas de superhorizonte es casi invariante de escala, sembrando así, la semilla de la formación de la estructura a gran escala. Hasta hace muy poco el mecanismo para la generación de la perturbación en la curvatura se le asignaba únicamente a campos escalares (citar libro de David L.). La principal motivación por la que se eligen los campos escalares es que se ve apoyada por la observación de que el Universo a gran escala es estadísticamente homogéneo e isótropo y que la RCF también preserva estas características [51] (citar WMAP 7). Además, en teorías en física de partículas más allá del modelo estándar son abundantes los campos escalares. Como veremos mas adelante, las fluctuaciones cuánticas de un campo vectorial pueden contribuir e incluso generar la perturbación en la curvatura total en el Universo. Pero, cual es la motivación de tener en cuenta campos vectoriales? La respuesta viene de dos lados: tanto teórico como observacional.

Desde el lado teórico, los modelos inflacionarios construidos con campos escalares sólo se han utilizado para generar la perturbación en la curvatura incluso si no se tiene la certeza del descubrimiento de un campo escalar fundamental; aunque es ampliamente

aceptado que todas las partículas elementales tienen masa debido a un campo escalar de Higgs, se espera que la última partícula descubierta por el LHC en el CERN sea un bosón escalar y sea el Higgs [19, 20]; si esto no es así, los modelos alternativos que explican la masa de las partículas elementales serán más favorables. Por otro lado, en el caso de inflación, la generación de la perturbación en la curvatura mediante campos escalares será menos atractiva. Además, si los campos escalares son descubiertos, teorías en física de partículas, tales como supersimetría o supergravedad incorporan muchos campos vectoriales bosónicos y fermiónicos. Sin embargo, a pesar de esto, la posible contribución de la perturbación en la curvatura mediante otro tipo de campos, usualmente no se ha tenido en cuenta.

Observacionalmente hay indicio de que el escenario más sencillo de un solo campo escalar, no puede ser suficiente para explicar algunas de las características de la RCF. Estas características que cuestionan el modelo homogéneo e isótropo del Universo fueron descubiertas por primera vez en el primer año de datos del WMAP [60]. Por ejemplo, se encontró que el momento cuadrupolar era demasiado pequeño en comparación con las predicciones hechas por la cosmología actual. Otro descubrimiento fue que los armónicos esféricos 2-4-8-16 del mapa de la RCF parecen estar alineados, lo que sugiere una dirección preferencial en el universo, por lo que se le llamó “eje del mal” [61, 62]. Actualmente estas anomalías son objeto de estudio sobre su significado estadístico, que podría ser una indicación de que las perturbaciones presentes en la RCF poseen una dirección preferencial, es decir, la existencia de anisotropía estadística en el espectro de ζ . Si estas anomalías son confirmadas se demostraría una dirección preferencial en el universo, lo cual no puede ser explicado mediante campos escalares; en consecuencia, los campos vectoriales entrarían a jugar un papel importante ya que estos generarían la dirección preferencial en forma natural. Pero la implementación de campos vectoriales para la generación de la perturbación en la curvatura tiene dos inconvenientes: invariancia conformal y generación de expansión anisotrópica excesiva en el Universo.

Con respecto a la invariancia conformal, la evolución de un espacio-tiempo conformalmente plano, como en el caso de un universo de de Sitter o un universo dominado por materia y/o radiación o de FRW, pueden ser modelados como un escalamiento de un espacio-tiempo de Minkowski, mediante la transformación de la métrica como $g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) \rightarrow a(\tau)g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \tau)$, donde τ es el tiempo conformal. Para el caso de un campo escalar ligero mínimamente acoplado a la gravedad en escalas de superhorizonte las fluctuaciones cuánticas del vacío son amplificadas, pero este no es el caso para las teorías conformes, donde las ecuaciones de campo son invariantes bajo el cambio de escala de la métrica. Para estas teorías, la forma de las ecuaciones de campo son independientes del tiempo en un espacio-tiempo conformalmente plano. Este caso, de hecho, se puede ejemplificar mediante un campo vectorial sin masa con simetría U(1) y Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor de esfuerzos definido como:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3.2)$$

y A_μ siendo el cuadvectorector, para el cual las fluctuaciones cuánticas no sufren una ampliación después de la salida del horizonte. Si se desea que el campo vectorial genere, toda o parte de la perturbación en la curvatura, las fluctuaciones cuánticas deben ser amplificadas; para que esto sea posible, la invarianza conforme de U(1) del campo vectorial sin masa debe ser rota, en la literatura éste problema ha sido abordado desde el concepto de la magnetogenesis [63, 64, 65]. En estos *papers* se sugieren las diferentes formas de romper la invarianza conformal para los campos vectoriales:

- (i) introduciendo masa a el campo vectorial,
- (ii) introduciendo un termino cinético dependiente del tiempo,
- (iii) introduciendo un termino anómalo,
- (iv) acoplando el campo vectorial con otro campo que no esté acoplado conformalmente a la gravedad,
- (v) o utilizando campos vectoriales no Abelianos.

Con respecto a la perturbación en la curvatura, la ruptura de la invarianza conformal de un campo U(1) mediante un termino de masa se considero por primera vez en la referencia [26] y utilizando un termino cinético dependiente del tiempo en la referencia [66]. Un estudio parcial de la generación de la perturbación en la curvatura mediante campos vectoriales no-Abeliano SU(2) se encuentra en la referencia [67].

SECTION 3.1

Espectro de las Perturbaciones para un Campo Vectorial

Antes de entrar a hacer la descripción de la cuantización para un campo vectorial, vamos a hacer un comentario acerca de la diferencia entre el campo que aparece en el Lagrangiano y el campo vectorial físico. Consideremos el Lagrangiano de un campo vectorial masivo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu, \quad (3.3)$$

con el tensor de esfuerzos $F_{\mu\nu}$ definido en (3.2). Usando la métrica de FRW, el termino de masa puede ser expandido como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_t^2 - \frac{1}{2}m^2 a^{-2} \mathbf{A}^2, \quad (3.4)$$

donde es posible ver que los términos espaciales son dependientes del factor de escala a . Esto en principio puede ser un problema, ya que el Lagrangiano es una cantidad física

y no depende de la escogencia de la normalización del factor de escala. Esto muestra que el campo vectorial \mathbf{A} en el Lagrangiano es comóvil, definido con respecto a las coordenadas espaciales comoviles x_i . El cuadvivector del campo físico es

$$W_\mu = (A_0, A_i/a), \quad (3.5)$$

el cual es definido en el sistemas coordenado físico $a(t)x^i$. Para el caso de los campos vectoriales comóvil y físico, las correspondientes cantidades con índices arriba son $A^i = -a^{-2}A_i$ y $W^i = -W_i$. En este caso el Lagrangiano para un campo canónicamente normalizado tiene la misma forma funcional de la ecuación (3.3).

Para cuantizar el campo vectorial, expandimos las perturbaciones en los modos de Fourier de manera similar que en el caso escalar

$$\delta W_i(\tau, \mathbf{x}) = \int \delta \mathcal{W}_i(\tau, \mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (3.6)$$

Para el caso de un campo vectorial masivo, este tiene tres grados de libertad, y el caso de un campo vectorial sin masa solo tiene dos grados de libertad, en contraste con el caso escalar que solo tiene un grado de libertad [68]. En la ecuación anterior, sólo se han incluido las componentes espaciales ya que la variable temporal no es una variable dinámica, por lo que ésta se relaciona con las variables espaciales mediante las ecuaciones de campo (ver apéndice A.1, ecuación (A.20)). Por lo tanto, cada grado de libertad se puede parametrizar utilizando los vectores de polarización como

$$\delta \mathcal{W}_i(\tau, \mathbf{x}) = \sum_\lambda e_i^\lambda(\hat{\mathbf{k}}) w_\lambda(\tau, \mathbf{k}), \quad (3.7)$$

donde e_i^λ son los vectores de polarización, $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ es un vector unitario en la dirección \mathbf{k} y k es la magnitud $k \equiv |\mathbf{k}|$.

La elección mas conveniente para los vectores de polarización corresponde a la polarización circular. Los dos vectores transversales tienen quiralidad diferente. Debido a que ambos transforman diferente bajo rotaciones, la invarianza rotacional del lagrangiano impide cualquier acoplamiento entre ellos. Eligiendo el eje coordenado z en la dirección de \mathbf{k} , los vectores de polarización toman la forma [28]

$$e_i^I = (1, i, 0)/\sqrt{2}, \quad e_i^D = (1, -i, 0)/\sqrt{2} \quad \text{y} \quad e_i^\parallel = (0, 0, 1), \quad (3.8)$$

en donde los superíndices I, D y \parallel , indican polarización de mano izquierda, derecha y longitudinal respectivamente. En el caso de un campo vectorial masivo las tres polarizaciones están presentes, pero en el caso de un campo vectorial sin masa $w_\parallel = 0$ en la ecuación (3.7) [68]. Estas expresiones definen los vectores de polarización sólo hasta una rotación al rededor de la dirección \mathbf{k} , donde esto será suficiente para nuestro proposito. Bajo la transformación $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, uno de los ejes x o y cambian de signo también. Vamos

a suponer que el que cambia de signo es el eje x y el eje y queda igual. Entonces, encontramos que $e_i^\lambda(-\hat{\mathbf{k}}) = -e_i^{\lambda*}(\hat{\mathbf{k}})$, debido que $\delta\mathcal{W}_i(\tau, \mathbf{x})$ es real. Si utilizamos la condición de realidad en las ecuaciones (3.6) y (3.7), se obtiene $w_\lambda^*(-\mathbf{k}) = -w_\lambda(\mathbf{k})$ [28].

Ahora con lo anterior en mente, para el proceso de cuantización de un campo vectorial se procede de la misma forma que en el caso de un campo escalar: se expande cada grado de libertad en un conjunto completo de modos ortonormales y promover los coeficientes de la expansión a operadores, con unas reglas de conmutación apropiadas. Las componentes de campo vectorial satisfacen la ecuación de Klein-Gordon y el campo se encuentra en un espacio-tiempo homogéneo e isótropo de FRW. Por lo tanto, la cuantización del campo vectorial toma la forma

$$\delta\hat{W}_i = \sum_\lambda \int \left[e_i^\lambda(\hat{\mathbf{k}})w_\lambda(\tau, k)\hat{a}_\lambda(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + e_i^{\lambda*}(\hat{\mathbf{k}})w_\lambda^*(\tau, k)\hat{a}_\lambda^\dagger(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (3.9)$$

donde

$$[\hat{a}_\lambda(\mathbf{k}), \hat{a}_{\lambda'}(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_{\lambda\lambda'}. \quad (3.10)$$

En las consideraciones siguientes, vamos a tener en cuenta que las perturbaciones asociadas al campo vectorial son gaussianas, con ninguna correlación entre los diferentes modos de polarización λ , o entre las perturbaciones escalares y vectoriales. Esto es suficiente para considerar solo el espectro de las perturbaciones del campo vectorial $\mathcal{P}_\lambda \equiv \mathcal{P}_{w_\lambda}$. Estas se pueden definir de forma análoga a la ecuación (2.39) y (2.40) como

$$\langle w_\lambda(\mathbf{k})w_\lambda^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_{\lambda\lambda'}\frac{2\pi^2}{k^3}\mathcal{P}_\lambda(\mathbf{k}), \quad (3.11)$$

$$\langle w_\lambda(\mathbf{k})w_\lambda(\mathbf{k}') \rangle = -(2\pi)^3\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\delta_{\lambda\lambda'}\frac{2\pi^2}{k^3}\mathcal{P}_\lambda(\mathbf{k}), \quad (3.12)$$

donde $\mathcal{P}_\lambda(\mathbf{k}) \equiv P_\lambda(\mathbf{k})k^3/2\pi^2$, y se ha suprimido la notación temporal, $w_\lambda(\tau, \mathbf{k}) \equiv w_\lambda(\mathbf{k})$. Si el Lagrangiano conserva la paridad, entonces $\mathcal{P}_D = \mathcal{P}_I$, lo que será considerado en esta tesis. Una diferencia entre estas cantidades se indicaría una violación de la paridad. Por consiguiente es útil definir

$$\mathcal{P}_\pm \equiv \frac{1}{2}(\mathcal{P}_D \pm \mathcal{P}_I), \quad (3.13)$$

donde \mathcal{P}_\pm indicaría una diferencia entre \mathcal{P}_D y \mathcal{P}_I , por lo tanto parametrizaría una posible violación de la invarianza ante transformaciones de paridad. En esta tesis estará normalmente presente $\mathcal{P}_+ \equiv \mathcal{P}_D = \mathcal{P}_I$.

La dependencia de escala del espectro $\mathcal{P}_\lambda(k)$ viene dada por la evolución de las perturbaciones de δW_λ después de la salida del horizonte durante inflación. En este régimen los gradientes espaciales (k/a) son despreciables en comparación con el parámetro de Hubble. En este caso, la evolución de $\delta W_\lambda(\tau, \mathbf{x})$ en cada punto del espacio será la misma para el campo sin perturbar $W_i(\tau)$. Como este último es un invariante rotacional,

no dependería de i . Por lo tanto, la evolución de las tres perturbaciones de δW_λ , serán las mismas después de la salida del horizonte, teniendo el mismo índice espectral.

Calculando el correlador de dos puntos de $\delta W_i(\mathbf{k})$, resulta

$$\langle \delta W_i(\mathbf{k}) \delta W_j(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \frac{2\pi^2}{k^3} \left[e_i^I e_j^{I*} \mathcal{P}_I + e_i^D e_j^{D*} \mathcal{P}_D + e_i^\parallel e_j^\parallel \mathcal{P}_\parallel \right], \quad (3.14)$$

donde se ha suprimido la notación de $\hat{\mathbf{k}}$ para $e_i^\lambda(\hat{\mathbf{k}})$ y k para $\mathcal{P}_\lambda(k)$. Esta expresión puede ser escrita en términos de \mathcal{P}_\pm como

$$\langle \delta W_i(\mathbf{k}) \delta W_j(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \frac{2\pi^2}{k^3} \times \left[T_{ij}^{\text{par}}(\hat{\mathbf{k}}) \mathcal{P}_+(k) + iT_{ij}^{\text{impar}}(\hat{\mathbf{k}}) \mathcal{P}_-(k) + T_{ij}^{\text{long}}(\hat{\mathbf{k}}) \mathcal{P}_\parallel(k) \right], \quad (3.15)$$

donde se ha introducido los tensores

$$\begin{aligned} T_{ij}^{\text{par}}(\hat{\mathbf{k}}) &\equiv e_i^I(\hat{\mathbf{k}}) e_j^{I*}(\hat{\mathbf{k}}) + e_i^D(\hat{\mathbf{k}}) e_j^{D*}(\hat{\mathbf{k}}), \\ T_{ij}^{\text{impar}}(\hat{\mathbf{k}}) &\equiv i \left[e_i^I(\hat{\mathbf{k}}) e_j^{I*}(\hat{\mathbf{k}}) - e_i^D(\hat{\mathbf{k}}) e_j^{D*}(\hat{\mathbf{k}}) \right], \\ T_{ij}^{\text{long}}(\hat{\mathbf{k}}) &\equiv e_i^\parallel(\hat{\mathbf{k}}) e_j^\parallel(\hat{\mathbf{k}}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

En el caso de polarización circular, los anteriores tensores toman la forma sencilla

$$T_{ij}^{\text{par}}(\hat{\mathbf{k}}) \equiv \delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j, \quad (3.17)$$

$$T_{ij}^{\text{impar}}(\hat{\mathbf{k}}) \equiv \epsilon_{ijk} \hat{k}_k, \quad (3.18)$$

$$T_{ij}^{\text{long}}(\hat{\mathbf{k}}) \equiv \hat{k}_i \hat{k}_j. \quad (3.19)$$

SECTION 3.2

Espectro de ζ

Basados en los datos observacionales ζ , esta última es prácticamente gaussiana con una alta precisión y es razonable pensar que ζ estaría dominada por uno o mas términos lineales en la expresión (2.21). Manteniendo sólo esos términos (lo que se llama contribución a nivel árbol) se encuentra

$$\mathcal{P}_\zeta(\mathbf{k}) = N_\phi^2 \mathcal{P}_\phi(k) + N_W^i N_W^j \left[T_{ij}^{\text{par}}(\hat{\mathbf{k}}) \mathcal{P}_+(k) + T_{ij}^{\text{long}}(\hat{\mathbf{k}}) \mathcal{P}_\parallel(k) \right] \quad (3.20)$$

$$= N_\phi^2 \mathcal{P}_\phi(k) + N_W^2 \mathcal{P}_+(k) + \left(\mathbf{N}_W \cdot \hat{\mathbf{k}} \right)^2 (\mathcal{P}_\parallel - \mathcal{P}_+). \quad (3.21)$$

Se observa que el espectro de ζ es dependiente de \mathbf{k} . En los próximos análisis se utilizará frecuentemente la magnitud de \mathbf{N}_W y el vector unitario a lo largo de la dirección definidos como

$$N_W \equiv |\mathbf{N}_W| = \sqrt{N_W^i N_W^i} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{N}}_W \equiv \frac{\mathbf{N}_W}{N_W}. \quad (3.22)$$

Como se muestra en (2.47), el espectro de la perturbación en la curvatura $\mathcal{P}_\zeta(\mathbf{k})$ puede ser dividido en dos partes, una isótropa y una anisótropa

$$\mathcal{P}_\zeta(\mathbf{k}) = \mathcal{P}_\zeta^{\text{iso}}(k) \left[1 + g_\zeta(k) \left(\hat{\mathbf{N}}_W \cdot \hat{\mathbf{k}} \right)^2 \right]. \quad (3.23)$$

Comparando esta expresión con la ecuación (3.21), se encuentra que la parte isótropa del espectro es

$$\mathcal{P}_\zeta^{\text{iso}} \equiv N_\phi^2 \mathcal{P}_\phi(k) + N_W^2 \mathcal{P}_+(k) = N_\phi^2 \mathcal{P}_\phi(k) \left[1 + \xi \frac{\mathcal{P}_+(k)}{\mathcal{P}_\phi(k)} \right], \quad (3.24)$$

donde se ha definido el parámetro ξ como

$$\xi \equiv \left(\frac{N_W}{N_\phi} \right)^2. \quad (3.25)$$

Este parámetro especifica la contribución relativa del campo vectorial a la parte estadísticamente isótropa de la perturbación en la curvatura.

De la ecuación (3.21) también podemos encontrar la anisotropía estadística en el espectro \mathcal{P}_ζ de la perturbación en la curvatura, la que es igual a

$$g_\zeta(k) = N_W^2 \left(\frac{\mathcal{P}_\parallel - \mathcal{P}_+}{\mathcal{P}_\zeta^{\text{iso}}} \right) = \xi \left(\frac{\mathcal{P}_\parallel - \mathcal{P}_+}{\mathcal{P}_\phi + \xi \mathcal{P}_+} \right). \quad (3.26)$$

Si las perturbaciones del campo vectorial dominan a ζ , es decir $\xi \gg 1$, la anisotropía estadística en el espectro es simplemente

$$g_\zeta \approx \frac{\mathcal{P}_\parallel - \mathcal{P}_+}{\mathcal{P}_+}. \quad (3.27)$$

Si el campo vectorial es sin masa, es decir $\mathcal{P}_\parallel = 0$, entonces $g_\zeta = -1$; si el espectro de las perturbaciones longitudinales es mucho mayor que las transversales¹, entonces $g_\zeta \gg 1$;

¹Esto hace referencia a que en la dirección preferencial que hemos tomado para nuestro campo vectorial habría mayor producción de partículas, lo cual se conoce como producción anisótropa de partículas [26, 28, 31]. En el caso que los espectros logitudinal y transversal sean iguales, se dice que hay producción isótropa de partículas.

si los espectros de las perturbaciones longitudinales y transversales son iguales, entonces $g_\zeta = 0$. En la figura 3.1 se presentan los posibles patrones generados en la RCF por la presencia de anisotropía estadística. Como se menciona en la sección 2.2.4 se espera que el desempeño observacional de la anisotropía en el espectro de la perturbación en la curvatura sea de $g_\zeta \lesssim 0,3$. Por lo tanto, la producción anisótropa de partículas del campo vectorial es mayor que el límite observacional si no hay una contribución de otro campo. Para evitar esto, la contribución de ζ debe ser generada por una o más perturbaciones de campos escalares estadísticamente isótropos.

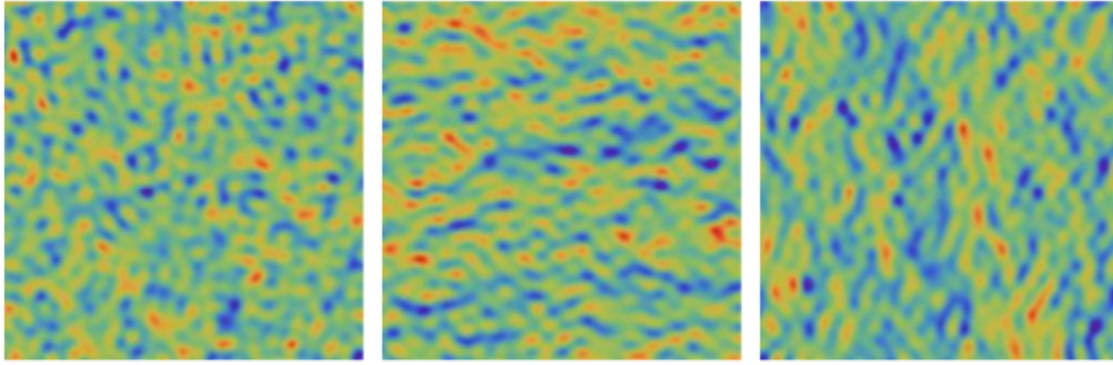


Figura 3.1: **Mapa de las perturbaciones generadas por un campo vectorial.** Estas simulaciones corresponden a los posibles patrones que tendría la temperatura en la RCF que pueden derivarse de la anisotropía en el espectro de la RCF. La imagen izquierda muestra una señal isótropa, donde la producción de partículas es prácticamente isótropa ocasionando que el espectro de las perturbaciones en la curvatura se estadísticamente isótropo es decir: $g_\zeta = 0$. Por otro lado, sí la producción de partículas es anisótropa La imagen central e izquierda muestra el caso en el que $g_\zeta = 1$. La imagen centra muestra una dirección preferencial horizontal mientras que la imagen derecha muestra una dirección preferencial vertical. (Cortesía de Mindaugas Karčiauskas).

SECTION 3.3

El Escenario del Curvatón Vectorial

Para que la perturbación en la curvatura del universo sea directamente afectada por un campo vectorial se necesitan dos ingredientes. Primero, se necesita un mecanismo para romper la invarianza conformal del campo vectorial y generar un espectro de las perturbaciones en escalas de superhorizonte del campo vectorial δW_μ . Segundo, un mecanismo que permita que estas perturbaciones afecten (o generen) la perturbación

en la curvatura. Un único campo vectorial no puede desempeñar el papel del inflatón. La razón es que se generaría una excesiva expansión anisótropa producida por el campo vectorial, por lo que éste tomaría una dirección preferencial en el espacio y si un campo vectorial homogéneo domina el universo durante inflación, podría generar anisotropía estadística excesiva lo cual estaría en desacuerdo con las observaciones de la RCF. Un gran número \mathcal{N} de campos vectoriales, orientados al azar, podría evitar este problema [69]. Si éste es el caso, la anisotropía estadística es $g_\zeta \propto 1/\mathcal{N}$, es decir, son necesarios muchos campos vectoriales para satisfacer las cotas observacionales. Esto implica el uso de muchos campos vectoriales; además, también se requiere un ajuste en las condiciones iniciales para que todos los campos sean los mismos. Otra posibilidad es considerar una triada de campos vectoriales orientados ortogonalmente (pero surge el mismo problema de condiciones iniciales para la orientación) para eliminar la anisotropía excesiva [47, 70]. Por las razones mostradas anteriormente, no se consideran los campos vectoriales como inflatones.

En el otro caso donde el campo vectorial no es el inflatón, éste tiene que afectar la expansión del universo de alguna manera, ya sea al final o después de inflación. En la literatura se encuentran diferentes mecanismos que permiten a un campo vectorial hacer esto, algunos ejemplos se citaron en la sección 2.3. Históricamente, la generación de la anisotropía estadística a partir de las perturbaciones de un campo vectorial se estudio por primera vez en el contexto de los modelos con un mecanismo de inflación con un final inhomogéneo [71, 72]. Esta tesis se centrará en el mecanismo del curvatón, el cual tiene la ventaja que no se basa en la interacción del campo vectorial con inflación. Las ventajas de esto es que evita complicar el modelo, pero lo más importante es que el curvatón vectorial sea independiente de la física durante inflación. Como en el caso del curvatón escalar, el curvatón vectorial no es un modelo en particular si no que puede corresponder a una multitud de realizaciones, por lo tanto se refiere al mecanismo como un conjunto de modelos.

SECTION 3.4

Curvatón Vectorial con un Termino Cinético Dependiente del Tiempo

Se considera el escenario del curvatón vectorial con un Lagrangiano del campo vectorial durante inflación de la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}f F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu, \quad (3.28)$$

donde $f = f(t)$ es el termino cinético y $m = m(t)$ es la masa y ambas son funciones del tiempo cósmico. Si f es independiente del tiempo éste puede ser igual a 1, ya que cualquier valor constante puede ser absorbido por A_μ , de lo contrario f se representará como una variable del tiempo.

La densidad Lagrangiana mostrada anteriormente puede ser de un campo de gauge masivo Abelian, en donde f es la función cinética de gauge. Si no consideramos simetrías de gauge, el argumento a favor de la expresión anterior, es que sea un función cinética tipo Maxwell, que es una de las pocas opciones [73] que evita la introducción de inestabilidades tales como fantasmas [74, 75, 76].

3.4.1 Ecuaciones de Movimiento

En primer lugar, nos situamos en un período de expansión cósmica, en la que suponemos que la contribución a la densidad de energía total del universo, debida al campo vectorial, es mínima y se puede despreciar. Por lo tanto, la expansión inflacionaria, la cual es conducida por el campo escalar del inflatón, puede considerarse como isótropa. También, como se menciono anteriormente, suponemos que inflación es de de Sitter, es decir, $H \approx$ constante. Se emplea el Lagrangiano definido en (3.28) y la definición del tensor de esfuerzos en (3.2), obtenemos las ecuaciones de campo para el campo vectorial (ver apéndice A.1)

$$\left[\partial_\mu + \left(\partial_\mu \sqrt{-\det[g_{\mu\nu}]} \right) \right] [f(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] + m^2 A^\nu = 0, \quad (3.29)$$

donde $\det[g_{\mu\nu}]$ es el determinante del tensor métrico.

Como estamos interesados en el espectro de las perturbaciones del campo vectorial durante inflación, o lo que es lo mismo, en la producción de partículas, se supone que el espacio-tiempo es espacialmente plano, homogéneo e isótropo, por lo tanto, la métrica que se usara será la de FRW mostrada en (2.2). Pero esta suposición no es del todo cierta, ya que la presencia de un campo vectorial durante inflación debería estar acompañado por una métrica anisótropa de Bianchi tipo I, pero como el campo vectorial es subdominante durante inflación (la densidad de energía del campo vectorial es despreciable durante inflación) la expansión anisótropa generada por el campo vectorial es prácticamente despreciable, por lo que aproximadamente el espacio-tiempo durante inflación es de FRW. Se espera, que el periodo inflacionario homogenice el campo vectorial. Siguiendo la referencia [66] encontramos que la componente temporal homogénea del campo vectorial es cero, mientras que las componentes espaciales satisfacen la ecua-

ción de movimiento (ver apéndice A.1):

$$\ddot{\mathbf{A}} + \left(H + \frac{\dot{f}}{f} \right) \dot{\mathbf{A}} + \frac{m^2}{f} \mathbf{A} = 0, \quad (3.30)$$

donde el punto denota derivadas con respecto al tiempo t . Del resultado anterior es evidente que la masa efectiva del campo vectorial es

$$M \equiv \frac{m}{\sqrt{f}}, \quad (3.31)$$

donde se asume que $m, f > 0$.

Ahora para analizar la producción de partículas es necesario perturbar el campo vectorial alrededor del valor homogéneo $A_\mu(t)$ como:

$$A_\mu(t, \mathbf{x}) = A_\mu + \delta A_\mu(t, \mathbf{x}), \quad (3.32)$$

donde la componente espacial es

$$A_\mu(t, \mathbf{x}) = A_\mu + \delta A_\mu(t, \mathbf{x}) \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t) + \delta \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \\ A_t(t, \mathbf{x}) = \delta A_t(t, \mathbf{x}) \end{cases}. \quad (3.33)$$

Luego, cambiamos al espacio de fase mediante una transformada de Fourier a las perturbaciones del campo vectorial

$$\delta A_\mu = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta \mathcal{A}_\mu(t, \mathbf{k}), \quad (3.34)$$

entonces, podemos escribir las ecuaciones de campo para las componentes espaciales de las perturbaciones del campo vectorial en el espacio de momento como (ver apéndice A.2)

$$\left\{ \partial_t^2 + \left(H + \frac{\dot{f}}{f} \right) \partial_t + \frac{m^2}{f} + \left(\frac{k}{a} \right)^2 \right\} \delta \mathcal{A}^\perp = 0 \quad (3.35)$$

y

$$\left\{ \partial_t^2 + \left[H + \frac{\dot{f}}{f} + \left(2H + 2\frac{\dot{m}}{m} - \frac{\dot{f}}{f} \right) \frac{\left(\frac{k}{a} \right)^2}{\left(\frac{k}{a} \right)^2 + \frac{m^2}{f}} \right] \partial_t + \frac{m^2}{f} + \left(\frac{k}{a} \right)^2 \right\} \delta \mathcal{A}^\parallel = 0, \quad (3.36)$$

donde $\delta \mathcal{A}^\perp$ y $\delta \mathcal{A}^\parallel$ son definidos como

$$\delta \mathcal{A}^\parallel \equiv \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \delta \mathcal{A})}{k^2} \quad \text{y} \quad \mathcal{A}^\perp \equiv \delta \mathcal{A} - \delta \mathcal{A}^\parallel. \quad (3.37)$$

Para continuar necesitamos emplear el vector físico (en contraste con el comóvil) canónicamente normalizado

$$\mathbf{W} = \frac{\sqrt{f} \mathbf{A}}{a}, \quad (3.38)$$

por lo tanto, la definición del \mathbf{W} anterior es diferente al definido en la ecuación (3.5), debido a que en esta sección \mathbf{W} tiene un factor \sqrt{f} debido a la normalización canónica².

Expresando las ecuaciones (3.35) y (3.36) en términos del campo vectorial físico se obtiene

$$\left\{ \partial_t^2 + 3H\partial_t + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^2 - \frac{\ddot{f}}{f} - \frac{\dot{f}}{f}H + 4H^2 \right] + \frac{m^2}{f} + \left(\frac{k}{a} \right)^2 \right\} \delta\mathbf{w}^{\parallel} = 0 \quad (3.39)$$

y

$$\left\{ \partial_t^2 + \left[3H + \left(2H + 2\frac{\dot{m}}{m} - \frac{\dot{f}}{f} \right) \frac{\left(\frac{k}{a} \right)^2}{\left(\frac{k}{a} \right)^2 + \frac{m^2}{f}} \right] \partial_t + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^2 - \frac{\ddot{f}}{f} - \frac{\dot{f}}{f}H + 4H^2 \right] + \left(H - \frac{1}{2} \frac{\dot{f}}{f} \right) \left(2H + 2\frac{\dot{m}}{m} - \frac{\dot{f}}{f} \right) \frac{\left(\frac{k}{a} \right)^2}{\left(\frac{k}{a} \right)^2 + \frac{m^2}{f}} + \frac{m^2}{f} + \left(\frac{k}{a} \right)^2 \right\} \delta\mathbf{w}^{\parallel} = 0. \quad (3.40)$$

Las ecuaciones dadas en (3.39) y (3.40) son lineales y serán satisfechas por los modos correspondientes $w_{\lambda}(t, \mathbf{k})$. Para un análisis del espectro de las perturbaciones, es necesario la solución de las ecuaciones de campo para los modos con ciertas condiciones iniciales apropiadas, con lo que es posible obtener las restricciones adecuadas para f y m que nos pueden proporcionar un espectro invariante de escala. Pasemos ahora a encontrar las soluciones de las ecuaciones de campo para los modos transversales y longitudinales.

3.4.2 Espectro transversal

Se utilizara el siguiente *ansatz* para dependencia temporal de la función cinética como

$$f \propto a^{\alpha}, \quad (3.41)$$

donde α es una constante real. Se supone que después de inflación la función cinética $f \rightarrow 1$, garantizando que el campo vectorial sea canónicamente normalizado. Ya que la teoría conserva paridad, los modos de Fourier w_+ de $\delta\mathbf{W}(t, \mathbf{x})$ denotan ambas polarizaciones:

²Se refiere al hecho que la densidad Lagrangiana en 3.28 no debe a parecer en forma explícita el término f , por lo tanto se redefine el Lagrangiano en términos de \mathbf{W} suprimiendo f dentro de \mathbf{A}_{μ} , por lo que el Lagrangiano toma la forma mostrada en 3.3.

polarización izquierda y derecha, es decir $w_+ = \sqrt{f}A_+/a$. Con el *ansatz* utilizado para f , la ecuación de movimiento del modo transversal toma la forma

$$\ddot{w}_+ + 3H\dot{w}_+ + \left[-\frac{1}{4}(\alpha + 4)(\alpha - 2)H^2 + M^2 + \left(\frac{k}{a}\right)^2 \right] w_+ = 0. \quad (3.42)$$

Se logra que el espectro transversal que sea invariante de escala, en analogía con el espectro de los modos de un campo escalar duran inflación de de Sitter, si la constante α toma los valores

$$\alpha = -1 \pm 3, \quad (3.43)$$

con los cuales se recuperaría la ecuación de movimiento para un campo escalar.

Con los posibles valores de α mostrados en (3.43), la función cinética puede tomar los valores permitidos $f \propto a^2$ o $f \propto a^{-4}$. Asumimos que el campo vectorial W_μ es ligero, es decir

$$M_* \ll H, \quad (3.44)$$

donde el asterisco indica el tiempo cuando las escalas cosmológicas dejan el horizonte. Esta condición requiere simplemente que el campo vectorial físico W_μ sea efectivamente sin masa (ligero) en este tiempo y vamos a suponer que esto se cumple hasta el final de inflación. Con estas suposiciones, podemos calcular sin dificultad el espectro de las perturbaciones del campo W_μ . Lo primero es solucionar la ecuación de movimiento (3.42), utilizando la condición de vacío de Bunch-Davies

$$w_+ = \frac{e^{ik/aH}}{a\sqrt{2k}}. \quad (3.45)$$

De forma similar a lo que se realizó en la sección 2.4.1, solucionamos la ecuación de movimiento y la empalmamos en el límite de subhorizonte ($k \gg aH$) con la condición de vacío de Bunch-Davies, por lo que se obtiene la solución

$$w_+ = \frac{a^{-3/2}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{H}} H_\nu^{(1)}(k/aH) e^{i(\pi/2)[\nu+1/2]}, \quad (3.46)$$

donde $H_\nu^{(1)}$ es la función de Hankel de primera especie y ν esta dado por

$$\nu = \frac{1}{2}|\alpha + 1|. \quad (3.47)$$

Para las escalas de superhorizonte, es decir $k \ll aH$, la función de Hankel de primer orden tienen la misma forma asintótica que en la ecuación (2.69), con lo que se obtiene

$$w_+ = -\frac{ia^{-3/2}}{2\pi} \Gamma(\nu) \left(\frac{k}{2aH}\right)^{-\nu} \sqrt{\frac{\pi}{H}} e^{i(\pi/2)(\nu+1/2)}. \quad (3.48)$$

Por lo tanto, el espectro de las perturbaciones de los modos longitudinales es dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_+ &\equiv \frac{k^3}{2\pi^2}|w_{\parallel}|^2 \\ &= \frac{H^2}{\pi^3}[\Gamma(\nu)]^2\left(\frac{k}{2aH}\right)^{3-2\nu}.\end{aligned}\quad (3.49)$$

Es posible observar que el espectro será invariante de escala cuando $\nu = 3/2$, que en vista de la ecuación (3.47), resulta en los valores de α en la ecuación (3.43), de aquí que el espectro resultante es

$$\mathcal{P}_+ = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2. \quad (3.50)$$

De esta forma el espectro será invariante de escala.

3.4.3 Espectro Longitudinal

Se utilizará el siguiente *ansatz* para la dependencia temporal de la masa como

$$m \propto a^\beta, \quad (3.51)$$

donde β es un real constante. La ecuación para el modo longitudinal (3.40) toma la forma

$$\begin{aligned}\ddot{w}_{\parallel} + \left(3 + \frac{2 - \alpha + 2\beta}{1 + r^2}\right)H\dot{w}_{\parallel} + \left[-\frac{1}{2}(\alpha - 2)\left(\alpha + 4 + \frac{2 - \alpha + 2\beta}{1 + r^2}\right)H^2\right. \\ \left. + \left(\frac{k}{a}\right)^2(1 + r^2)\right]w_{\parallel} = 0,\end{aligned}\quad (3.52)$$

donde $r \equiv \frac{aM}{k}$. Como estamos asumiendo que durante inflación y hasta el final, el campo es ligero $M_* \ll H$, esto implica que $r \ll 1$, por esto, la ecuación anterior se simplifica de la forma

$$\ddot{w}_{\parallel} + (5 - \alpha + 2\beta)H\dot{w}_{\parallel} + \left[-\frac{1}{2}(\alpha - 2)(2 - \alpha + 2\beta)H^2 + \left(\frac{k}{a}\right)^2\right]w_{\parallel} = 0. \quad (3.53)$$

De igual forma que se realizó para la componente transversal, la ecuación de movimiento anterior se soluciona utilizando la condición de vacío

$$w_{\parallel} = \gamma \frac{a^{-1}}{\sqrt{2k}} e^{i\pi/aH}. \quad (3.54)$$

Para éste caso, la componente longitudinal de los modos de la perturbación del campo vectorial, debe ser multiplicada por el factor del *boost* de Lorentz, que nos lleva de

sistema de referencia con momento $\mathbf{k} = 0$ a uno con momento $\mathbf{k} \neq 0$ [68]. El factor de Lorentz es

$$\gamma = \frac{E}{M} = \frac{\sqrt{\left(\frac{k}{a}\right)^2 + M^2}}{M} = \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}, \quad (3.55)$$

donde se ha considerado la masa efectiva del campo vectorial W_μ , definida en (3.31). Si $r \ll 1$ es tiempos tempranos, entonces $\gamma \simeq 1/r$.

Empalmando la solución de la ecuación de movimiento (3.53), con la solución de vacío (3.54), encontramos la solución para el modo longitudinal:

$$w_{\parallel} = -i \frac{a^{-3/2}}{r} \sqrt{\frac{\pi}{4H}} H_{\tilde{\nu}}^{(1)}(k/aH) e^{i(\pi/2)(\tilde{\nu}+3/2)}, \quad (3.56)$$

donde

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 2(\alpha + 1)(2 - \alpha + 2\beta) + (2 - \alpha + 2\beta)^2} \quad (3.57)$$

De igual forma que en el caso transversal, analizamos la forma asintótica de la funciones de Hankel, encontrando la forma del modo longitudinal en escalas de superhorizonte ($k \ll aH$, resultando en

$$w_{\parallel} = -\frac{a^{-3/2}}{r\pi} \Gamma(\tilde{\nu}) \left(\frac{k}{2aH}\right)^{-\tilde{\nu}} \sqrt{\frac{\pi}{4H}} e^{i(\pi/2)(\tilde{\nu}+3/2)}. \quad (3.58)$$

Por lo tanto, el espectro de la componente longitudinal es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\parallel} &\equiv \frac{k^3}{2\pi^2} |w_{\parallel}|^2 \\ &= \frac{4H^4}{\pi^3 M^2} [\Gamma(\tilde{\nu})]^2 \left(\frac{k}{2aH}\right)^{5-2\tilde{\nu}}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

donde el espectro será invariante de escala cuando $\tilde{\nu} = 5/2$

$$\mathcal{P}_{\parallel} = 9 \left(\frac{H}{M}\right)^2 \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2. \quad (3.60)$$

A partir del resultado anterior del espectro longitudinal será invariante de escala para $\tilde{\nu} = 5/2$, por lo cual, es posible determinar los valores de la constante β utilizando las ecuaciones (3.51) y (3.57), donde lo se obtiene es

$$\beta = -\frac{1}{2}(3 \pm 5). \quad (3.61)$$

Acorde con la definición de r , se encuentra el rango de valores permitidos para éste es

$$r \propto a^{1+\beta-\alpha/2}. \quad (3.62)$$

Si $\beta = -4$ entonces r es una función decreciente de a , lo cual es inaceptable, ya que la suposición de $r \ll 1$ no se cumple en escalas de subhorizonte, por lo tanto, se concluye que el espectro longitudinal es invariante de escala si $\beta = 1$, es decir

$$m \propto a. \quad (3.63)$$

Por lo tanto, para los valores posible de $\alpha = -1 \pm 3$ y $\beta = 1$, podemos establecer los valores para la función cinética f y masa efectiva del campo M :

$$\text{Caso 1 : } \alpha = -4 \quad \text{y} \quad \beta = 1 \Rightarrow \begin{cases} f \propto a^{-4} \\ M \propto a^3 \end{cases} \quad (3.64)$$

$$\text{Caso 2 : } \alpha = 2 \quad \text{y} \quad \beta = 1 \Rightarrow \begin{cases} f \propto a^2 \\ M \propto \text{constante} \end{cases} \quad (3.65)$$

Para el caso 1 es posible analizar que durante inflación el espectro longitudinal será mucho mayor que el espectro transversal, ya que la condición de campo ligero ($M \ll H$) lo obliga, pero como M crece con el tiempo puede haber una época posinflacionaria en la cual los espectro sean iguales o casi del mismo orden, sin que se genere una excesiva producción de partículas en la dirección preferencial. Esto será de vital importancia para no generar excesiva anisotropía estadística en el espectro de ζ .

En el caso 2, vemos que la masa efectiva del campo, M , es constante, por lo cual, el espectro longitudinal será desde el comienzo de inflación (pero después que las escalas dejen el horizonte) e inclusive después de inflación, mucho mayor que el espectro longitudinal, generando excesiva producción de partículas en la dirección preferencial. Este caso no será analizado en esta tesis por las razones anteriormente mencionadas.

Como se ha mostrado en esta sección, los espectros transversal y longitudinal son invariantes de escalas para los valores de α y β mostrados, pero esto ha sido determinado para la condición de campo ligero, $M \ll H$, o lo que es lo mismo, para $r \ll 1$, pero como se comentó, la condición de campo ligero no se cumple siempre, ya que en el caso 1, M crece con el tiempo. Como veremos a continuación, para nuestro caso de interés (caso 1), si $r \gg 1$, los espectros transversal y longitudinal en este régimen no afectara su dependencia de escala, por lo cual, los espectros seguirán siendo invariantes de escala.

SECTION 3.5

Caso: $\alpha = -4$ y $\beta = 1$

Asumiendo estos valores, la función cinética y la masa efectiva del campo son: $f \propto a^{-4}$ y $M \propto a^3$. Con el uso de estos valores, se realiza el calculo analítico de los espectro de

las componentes de la perturbación del campo vectorial es escalas de superhorizonte.

3.5.1 Componente Transversal

La ecuación de movimiento para los modos transversales en (3.42) toma la forma

$$\ddot{w}_+ + 3H\dot{w}_+ + \left(\frac{k}{a}\right)^2 (1 + r^2)w_+ = 0. \quad (3.66)$$

Seguimos en nuestra suposición, que cuando las escalas cosmológicas dejan el horizonte el campo \mathbf{W} sigue siendo ligero ($M \ll H$), pero ya vimos que esto cambia posteriormente. Por lo tanto, cuando $k/aH \gtrsim 1$ en el límite de subhorizonte, el parámetro r es muy pequeño, es decir $r \ll 1$. Cuando los modos, $w_{+,||}$, dejan el horizonte $k/aH \lesssim 1$ y $r < 1$. Como r es una función creciente en el tiempo, en algún momento puede llegar a ser grande, es decir $r \gg 1$. Por lo tanto, la solución a la ecuación (3.66) en los tres diferentes regímenes de r es dada por (ver apéndice B.1)

$$w_+ = a^{-3/2} \sqrt{\frac{\pi}{4H}} \left[-J_{3/2} \left(\frac{k}{aH} \right) - iJ_{-3/2} \left(\frac{k}{aH} \right) \right] \quad \text{si } \frac{k}{aH} \gtrsim 1, \quad (3.67)$$

$$w_+ = \frac{i}{\sqrt{2k}} \left(\frac{H}{k} \right) \left[1 + \frac{i}{3} \left(\frac{k}{aH} \right)^3 \right] \quad \text{si } \frac{k}{aH} \ll 1 \ll \frac{3H}{M}, \quad (3.68)$$

$$w_+ = a^{-3/2} \sqrt{\frac{\pi}{4H}} \left[i \left(\frac{aH}{k} \right)^{3/2} \left(\frac{3H}{M} \right)^{1/2} J_{1/2} \left(\frac{M}{3H} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{k}{aH} \right)^{3/2} \left(\frac{M}{3H} \right)^{1/2} J_{-1/2} \left(\frac{3H}{M} \right) \right] \quad \text{si } \frac{3H}{M} \lesssim 1. \quad (3.69)$$

A partir del resultado en (3.68), el espectro de las perturbaciones transversales del campo es

$$\mathcal{P}_+ = \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2. \quad (3.70)$$

En consecuencia, el espectro no se ve afectado en el régimen $r \gg 1$.

3.5.2 Componente Longitudinal

La ecuación de campo para los modos longitudinales en (3.52) se puede escribir como

$$\ddot{w}_{||} + \left(3 + \frac{8}{1+r^2} \right) H\dot{w}_{||} + \left[\left(\frac{24}{1+r^2} \right) H^2 + \left(\frac{k}{a} \right)^2 (1+r^2) \right] w_{||} = 0. \quad (3.71)$$

La solución de componente longitudinal en los tres regímenes mencionados en la sección 3.5.1 es (ver apéndice B.2)

$$w_{\parallel} = -ia^{9/2} \sqrt{\frac{\pi}{4H}} \left(\frac{k}{H}\right)^3 \left(\frac{aH}{M}\right)^3 \left(\frac{H}{M}\right) \times \left[J_{5/2} \left(\frac{k}{aH}\right) - iJ_{-5/2} \left(\frac{k}{aH}\right) \right] \text{ para } r \gtrsim 1, \quad (3.72)$$

$$w_{\parallel} \simeq -\frac{1}{\sqrt{2H}} \left(\frac{H}{k}\right)^{3/2} \left(\frac{3H}{M}\right) \text{ para } \frac{k}{aH} \ll 1 \ll \frac{3H}{M}, \quad (3.73)$$

$$w_{\parallel} = a^{-3/2} \sqrt{\frac{\pi}{4H}} \left[\frac{i}{3} \left(\frac{k}{aH}\right)^{3/2} \left(\frac{M}{3H}\right)^{1/2} J_{1/2} \left(\frac{M}{3H}\right) - \left(\frac{aH}{k}\right)^{3/2} \left(\frac{3H}{M}\right)^{1/2} J_{-1/2} \left(\frac{M}{3H}\right) \right] \text{ para } \frac{3H}{M} \lesssim 1. \quad (3.74)$$

Apartir del resultado en (3.73), el espectro de las perturbaciones longitudinales del campo es

$$\mathcal{P}_{\parallel} = 9 \left(\frac{H}{M}\right)^2 \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2. \quad (3.75)$$

De igual forma que en el caso transversal, la dependencia de escala no se ve afectada si $r \gg 1$.

SECTION 3.6

Evolucion del Modo Cero

Esta sección está enfocada en estudiar la evolución de la parte homogénea del campo vectorial \mathbf{W} . Con el fin de calcular la perturbación en la curvatura generada por dicho campo, se debe analizar cómo es la evolución de la densidad de energía, además de la presión, esto para no generar excesiva anisotropía en la expansión. Para este fin, analicemos el tensor momentum-energía el cual podemos obtenerlo como

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (3.76)$$

donde el Lagrangiano del campo vectorial es el definido en (3.28) y el tensor de esfuerzos en (3.2). La expresión (3.76) es posible escribirla como

$$T_{\mu\nu} = f \left(\frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\pi\lambda} F^{\pi\lambda} - F_{\nu\lambda} F_{\mu}^{\lambda} \right) + m^2 \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} A_{\pi} A^{\pi} + A_{\mu} A_{\nu} \right). \quad (3.77)$$

Si se asume que la dirección preferencial del campo vectorial es alrededor del eje z

$$A_{\mu} = (0, 0, 0, A(t)). \quad (3.78)$$

El tensor momentum-energía mixto (covariante-contravariante) es posible escribirlo entonces, con respecto a un sistema de referencia comóvil, como

$$T_{\mu}^{\nu} = \text{diag}(\rho_W, -p_{\perp}, -p_{\perp}, p_{\perp}), \quad (3.79)$$

donde

$$\rho_W \equiv \rho_{\text{cin}} + V_W, \quad p_{\perp} \equiv \rho_{\text{cin}} - V_W, \quad (3.80)$$

con

$$\rho_{\text{cin}} \equiv -\frac{1}{4} f F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \frac{f \dot{A}^2}{a^2} = \frac{1}{2} [\dot{W} + (1 - \frac{\alpha}{2}) H W]^2, \quad (3.81)$$

$$V_W \equiv -\frac{1}{2} m^2 A_{\mu} A_{\mu} = \frac{1}{2} \frac{m^2 A^2}{a^2} = \frac{1}{2} M^2 W^2, \quad (3.82)$$

donde $A \equiv |\mathbf{A}|$.

Durante inflación, vamos asumir que la cantidad de energía potencial y cinética está distribuida de igual forma. Esta afirmación es basada en la idea de que, estadísticamente debe haber mayor probabilidad para que la energía potencial y cinética se distribuya en forma equivalente, si que haya una mayor presencia de energía potencia que cinética o viceversa. por esto, es posible escribir lo siguiente:

$$(\rho_{\text{cin}})_0 \simeq (V_W)_0. \quad (3.83)$$

Para poder determinar la evolución de ρ_W y p_{\perp} , debemos saber cómo es la evolución de W durante inflación y después de inflación. La ecuación de campo que nos muestra esta información es la que se obtiene a partir de combinar las ecuaciones (3.30) y (3.38) y utilizando la ecuación (3.41), lo que resulta en

$$\ddot{\mathbf{W}} + 3H\dot{\mathbf{W}} + \left[\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \dot{H} - \frac{1}{4}(\alpha + 4)(\alpha - 2) + M^2 \right] \mathbf{W} = 0. \quad (3.84)$$

3.6.1 Durante Inflación

Se encontró que el espectro de las perturbaciones es invariante de escala, si $\alpha = -1 \pm 3$. Se asume que inflación es de de Sitter, es decir $\dot{H} = 0$, la ecuación de campo (3.84) se convierte en

$$\ddot{\mathbf{W}} + 3H\dot{\mathbf{W}} + M^2\mathbf{W} = 0, \quad (3.85)$$

la ecuación de campo anterior es valida para los dos posibles valores de α , donde analizara únicamente el caso de interés, $\alpha = -4$, como se menciona en (3.64).

Caso: $\alpha = -4$

En este caso $M = m/\sqrt{f} \propto a^{-3}$, por lo tanto la solución a (3.85) es de la forma mostrada en la ecuación (B.6), cuya solución se puede escribir como

$$W = a^{-3} \left[\hat{C}_3 \text{sen} \left(\frac{M}{3H} \right) + \hat{C}_4 \text{cos} \left(\frac{M}{3H} \right) \right]. \quad (3.86)$$

Si en el momento inicial de inflación se asume que el campo es ligero, es decir $M_0 \ll H$, podemos aproximar la solución de forma general como (ver apéndice C.1.1)

$$W = W_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} \sqrt{2} \text{cos} \left(\frac{M}{3H} \pm \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.87)$$

Esta solución es valida para cualquier valor de M . En el caso de campo ligero $M \ll H$ la evolución del modo cero del campo es decreciente como $W \propto a^{-3}$, pero cuando $M \gg H$ el modo oscila rapidamente con una amplitud decreciente de a^{-3} . Por lo tanto, el valor típico del modo cero durante inflación escala como

$$W \propto a^{-3}. \quad (3.88)$$

Se continua ahora a determinar cómo evoluciona la densidad de energía para el campo. Con la solución encontrada para el modo cero y utilizando las expresiones para ρ_{cin} y V_W en (3.81) y (3.82) respectivamente, encontramos

$$\rho_{\text{cin}} = \left[W_0 M_0 \text{sen} \left(\frac{M}{3H} \pm \frac{\pi}{4} \right) \right]^2 \quad \text{y} \quad V_W = \left[W_0 M_0 \text{cos} \left(\frac{M}{3H} \pm \frac{\pi}{4} \right) \right]^2, \quad (3.89)$$

por lo que la densidad de energía total es constante

$$\rho_W = M_0^2 W_0^2. \quad (3.90)$$

Este resultado nos muestra que la densidad es independiente de la masa del campo vectorial, lo cual es válido para los regímenes: $M \ll H$ y $M \gg H$. En consecuencia, si la densidad del campo vectorial es subdominante al inicio de inflación, lo seguirá siendo durante el mismo, garantizando así, que el campo vectorial no contribuya a la densidad de energía total en el universo.

3.6.2 Después de Inflación

Se asume que los escalamientos de f y m terminan, cuando inflación acaba, es decir

$$f = 1, \quad \text{y} \quad \hat{m} = \text{constante}, \quad (3.91)$$

por lo que $\alpha = 0$ y $M = \hat{m}$. En consecuencia las expresiones (3.81) y (3.82) toman la forma

$$\rho_{\text{cin}} = \frac{1}{2}(\dot{W} + HW)^{1/2}, \quad \text{y} \quad V_W = \frac{1}{2}\hat{m}^2 W^2. \quad (3.92)$$

En este caso la ecuación de campo en (3.84) podemos escribirla como

$$\ddot{W} + 3H\dot{W} + (\dot{H} + 2H^2 + \hat{m}^2)W = 0, \quad (3.93)$$

donde $\dot{H} \neq 0$. Es posible determinar la forma en la que evoluciona H , a partir de la ecuación de continuidad, la ecuación de Friedmann y el parametro barotrópico del Universo $p = w\rho$, de lo que resulta (ver apéndice C.2.1)

$$H = \frac{2}{3(1+w)t}. \quad (3.94)$$

La solución para la ecuación de campo (3.93) es (ver apéndice C.2.2)

$$W = t^{(1/2)[(w-1)/(w+2)]}[\tilde{C}_1 J_d(\hat{m}t) + \tilde{C}_2 J_{-d}(\hat{m}t)], \quad (3.95)$$

donde $d = \frac{1+3w}{6(1+w)}$. Es de mucha utilidad tener en cuenta la siguiente relación (ver apéndice C.2.2)

$$\dot{W} + HW = \hat{m}t^{(1/2)[(w-1)/(w+1)]}[\tilde{C}_1 J_{d-1}(\hat{m}t) - \tilde{C}_2 J_{1-d}(\hat{m}t)]. \quad (3.96)$$

Ahora, se analiza la evolución de la densidad y presión asociada al modo cero del campo vectorial en los regímenes de campo ligero ($\hat{m}t \ll 1$) y pesado ($\hat{m}t \gg 1$). En el régimen de campo ligero en donde las expresiones en (3.92) se pueden relacionar mediante

$$\frac{V_A}{\rho_{\text{cin}}} = \frac{4}{(3w+1)^2} \left(\frac{\hat{m}}{H_*} \right)^2 \left(\frac{t}{t_*} \right)^2 \simeq (\hat{m}t)^2 \ll 1, \quad (3.97)$$

donde el asterisco, *, se refiere a que la cantidad es evaluada al final de inflación. En consecuencia, la densidad de energía para el modo cero del campo vectorial ligero es

$$\rho_W \propto a^{-4}. \quad (3.98)$$

Por lo tanto, se observa que si el campo vectorial es ligero al final de inflación, la densidad de energía escala como la asociada a partículas relativistas o fluido de radiación. Esto

muestra una notable diferencia con el caso escalar en el cual la densidad de energía permanece constante incluso después de inflación.

En el régimen de campo pesado, $\hat{m}t \gg 1$, las soluciones (3.95) y (3.96) toman la forma

$$W = t^{-\frac{1}{w+1}} \sqrt{\frac{2}{\pi \hat{m}}} \left[\tilde{C}_1 \cos \left(\hat{m}t - \frac{\pi}{4}(1 + 2d) \right) + \tilde{C}_2 \cos \left(\hat{m}t - \frac{\pi}{4}(1 - 2d) \right) \right] \quad (3.99)$$

y

$$\dot{W} + HW = \hat{m}t^{-\frac{1}{w+1}} \sqrt{\frac{2}{\pi \hat{m}}} \left[\tilde{C}_1 \sin \left(\hat{m}t - \frac{\pi}{4}(1 + 2d) \right) + \tilde{C}_2 \sin \left(\hat{m}t - \frac{\pi}{4}(1 - 2d) \right) \right]. \quad (3.100)$$

se encuentra que, cuando el campo vectorial es pesado al final de inflación, las oscilaciones son muy rápidas y la amplitud decrece de la forma

$$t^{-\frac{1}{1+w}} \propto a^{-3/2}, \quad (3.101)$$

por lo que es útil encontrar el valor promedio de la densidad y presión, lo que resulta en

$$\rho_W \propto a^{-3}, \quad (3.102)$$

$$p_{\perp} \approx 0. \quad (3.103)$$

Vemos que la densidad de energía para el campo vectorial pesado escala como la asociada a materia no-relativista o un fluido de materia, como se muestra en la figura 3.2. Con respecto a la presión, en promedio, el campo vectorial oscilante se comporta como materia isótropa y puede ser capaz de dominar el Universo sin generar demasiada anisotropía estadística a gran escala. Este un punto importante en el escenario del curvatón vectorial, ya que para producir la perturbación en la curvatura, el campo debe dominar (o casi dominar) el Universo sin inducir una expansión anisótropa excesiva.

SECTION 3.7

Anisotropía Estadística en el Escenario del Curvatón Vectorial

Estamos interesados en la generación de anisotropía estadística producida por el curvatón vectorial después del final inflación. Como se mostró en la sección anterior, si

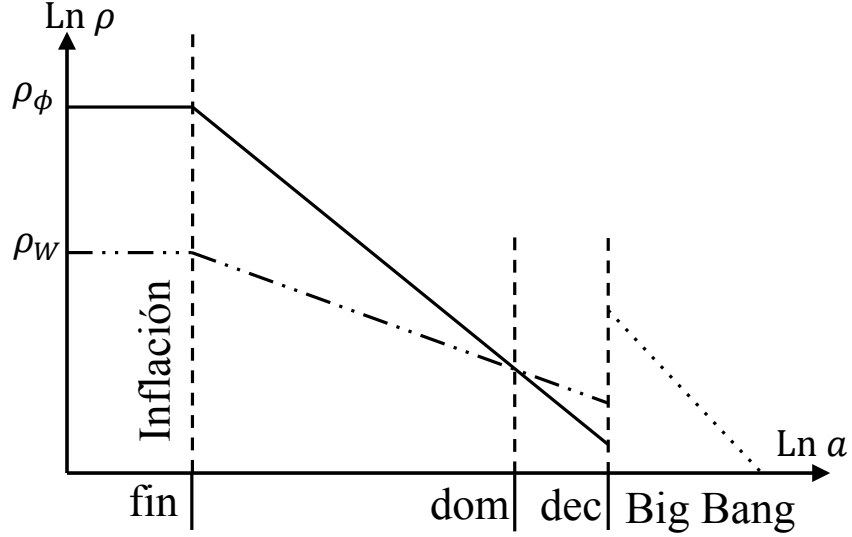


Figura 3.2: **Evolucion de las densidades de energía en el escenario del curvatón vectorial.** La gráfica continua representa la evolución de la densidad de energía del inflatón ρ_ϕ y la de dos puntos-linea la del curvatón ρ_W . Durante inflación la densidad de energía del curvatón es despreciable. Después de inflación (denotado por “fin”) $\rho_\phi \propto a^{-4}$ y $\rho_W \propto a^{-3}$. En algún momento (denotado por “dom”) la densidad de energía del curvatón vectorial domina la densidad de energía del universo y un tiempo después (denotado por “dec”) el curvatón vectorial decae en el baño térmico del Big Bang.

el campo vectorial es ligero después del final de inflación, las densidad de energía ρ_W decrece de igual forma que el inflatón cuando decae como radiación, en consecuencia no habrá un período en el cual la densidad de energía del campo vectorial puede dominar o casi dominar la energía total en el Universo, por lo que $\rho_W \ll H$ se seguirá cumpliendo, incluso después de inflación. En consecuencia, es necesario que el campo vectorial sea pesado después del final de inflación para garantizar que habrá un periodo en el cual el campo vectorial pueda dominar o casi dominar el Universo y generar así la perturbación primordial en la curvatura ya que, como se mostró en (3.102), la densidad de energía del curvatón no disminuye tan rápido en comparación con densidad de energía del inflatón cuando ha decaído en radiación. Con lo anterior, nos enfocamos en analizar la generación de anisotropía estadística en el régimen de campo pesado, es decir cuando la masa efectiva del campo aumenta con el tiempo $M \propto a^3$. De todas formas, veamos lo que sucede con la generación de anisotropía estadística cuando el campo es ligero al final de inflación. Al final de inflación ya se estableció que $f = 1$ y $\hat{m} = \text{constante}$ terminando así el escalamiento al final de inflación y en el caso de que el campo vectorial es ligero, es decir $(H_*/\hat{m})^2 \ll 1$, donde H_* es el parámetro de Hubble durante inflación. A partir de la expresión (3.26) encontramos que

$$g_\zeta = \xi \left(\frac{\mathcal{P}_\parallel - \mathcal{P}_+}{\mathcal{P}_\phi + \xi \mathcal{P}_+} \right) = \left(\frac{\xi}{1 + \xi} \right) \left[\left(\frac{3H_*}{\hat{m}} \right)^2 - 1 \right], \quad (3.104)$$

donde \mathcal{P}_{\parallel} y \mathcal{P}_{+} son dadas por las expresiones (3.50) y (3.60) respectivamente.

Por un lado, se desea que el campo vectorial sea el encargado de generar la perturbación en la curvatura ζ , lo cual es la motivación de esta tesis, para prescindir de los campos escalares. Como se muestra en el apéndice D, ecuación (D.10), en el caso de que el campo vectorial sea dominante se tiene $\Omega_W \gg 1$, de lo que resulta $N_W \gg 1$ y $\xi \gg 1$, en consecuencia la expresión (3.104) podemos escribirla como

$$g_{\zeta} \approx \left(\frac{3H_*}{\hat{m}} \right)^2 \gg 1, \quad (3.105)$$

lo cual está en desacuerdo con las observaciones. Por otro lado, si la contribución de las perturbaciones del campo vectorial a la perturbación en la curvatura es subdominante, en comparación con el campo escalar, entonces $\xi \ll 1$. Con esta afirmación perderíamos la esencia del escenario del curvátón como generador de la perturbación en la curvatura.

Ahora bien, ya vimos que en el caso de $\alpha = -4$ es posible que la masa del campo vectorial aumente lo suficiente, de la tal forma que $\hat{m} \sim H_*$. En este caso, los espectros de las perturbaciones longitudinal y transversal son casi del mismo orden:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}_{\parallel} &= \left(\frac{3H_*}{\hat{m}} \right)^2 \left(\frac{H_*}{2\pi} \right)^2 \\ \mathcal{P}_{+} &= \left(\frac{H_*}{2\pi} \right)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathcal{P}_{\parallel} \sim \mathcal{P}_{+} = \mathcal{P}_{\phi}, \quad (3.106)$$

por lo que la perturbación en la curvatura es casi isótropa, lo que nos permite prescindir del campo escalar y se supone que la perturbación en la curvatura está dominada por la contribución del campo vectorial, es decir

$$\Omega_W \gg 1 \Rightarrow \xi \gg 1, \quad (3.107)$$

por lo tanto, la expresión para la anisotropía estadística en (3.104) podemos escribirla como

$$g_{\zeta} \approx \frac{\mathcal{P}_{\parallel}}{\mathcal{P}_{+}} - 1 = \frac{\delta\mathcal{P}}{\mathcal{P}_{+}}, \quad (3.108)$$

donde $\delta\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\parallel} - \mathcal{P}_{+}$ es la diferencial fraccional de los espectros. Si esta diferencia fraccional no es excesiva, el campo vectorial podría generar la anisotropía estadística en la RCF dentro de los límites observacionales.

SECTION 3.8

Física del Curvatón Vectorial

Como vimos en la subsección 2.4.2, la generación de la perturbación en la curvatura total es generada después del final de inflación y es posible calcularla como la suma de las perturbaciones en la curvatura individuales de las componentes que conforman el universo, cuando es inflatón ha decaído a radiación. En el caso del escenario del curvatón vectorial, la perturbación en la curvatura total podemos escribirla como (de forma equivalente a lo presentado (2.80))

$$\zeta = (1 - \hat{\Omega}_W)\zeta_\gamma + \hat{\Omega}_W\zeta_w, \quad (3.109)$$

donde $\hat{\Omega}_W$ es definido en la ecuación (D.4). Como se muestra en el apéndice B.3, en el caso de que el campo vectorial es pesado al final de inflación $\hat{m} \ll H$, los espectros promedio, longitudinal y transversal, son iguales, es decir $\overline{\mathcal{P}}_+ = \overline{\mathcal{P}}_\parallel$, por lo que el espectro de las perturbaciones del campo vectorial es isótropo y puede generar la perturbación en la curvatura total en el universo. Con respecto a la anisotropía estadística, ésta puede ser de igual forma generada por el campo vectorial sin violar los límites observaciones como se muestra en (3.108). En este caso podemos suponer que la contribución del fluido de radiación a la perturbación en la curvatura es prácticamente nula $\zeta_\gamma = 0$. Por otro lado, si el campo vectorial es ligero al final de inflación $\hat{m} \gg H$, el espectro longitudinal es mucho mayor que el espectro transversal $\mathcal{P}_\parallel \gg \mathcal{P}_+$, en consecuencia las perturbaciones del campo vectorial con excesivamente anisótropas por lo que la anisotropía estadística generada por dicho campo vectorial es muy grande, comparado con los límites observacionales; a demás, para que esto no ocurra, la contribución del campo vectorial a la perturbación en la curvatura total en el universo debe ser subdominante, por lo que se perdería la motivación del escenario del curvatón.

La contribución del campo vectorial a la perturbación en la curvatura total en un slicing plano, como se muestra en (2.27), es

$$\zeta_w = -H \frac{\delta\rho_w}{\dot{\rho}_w}. \quad (3.110)$$

Como nos interesa analizar la contribución del campo vectorial a la perturbación en la curvatura total cuando el campo es pesado al final de inflación, entonces la densidad de energía del campo escala como si fuese un fluido de materia con presión nula como se muestra en (3.102), en consecuencia $\dot{\rho}_w = -3H\rho_w$, por lo tanto, la contribución a la perturbación en la curvatura es (ver apéndice D)

$$\zeta_w \approx \frac{2}{3} \frac{\delta W}{W} \Big|_{\text{fin}}, \quad (3.111)$$

donde “fin” indica el final de inflación. Como se muestra en el apéndice B.3, en el caso que el campo sea pesado al final de inflación, el valor de las amplitudes de las perturbaciones son de la forma mostrada en (B.87), en consecuencia, al final de inflación podemos escribir que

$$\delta W_{\text{fin}} \sim \frac{3H_* H_*}{\hat{m}} \frac{H_*}{2\pi} \simeq \frac{H_*^2}{\hat{m}}. \quad (3.112)$$

Se encontró que la densidad de energía del campo vectorial al final del inflación cuando el campo es pesado, escala como se muestra en (3.90), por lo es posible escribir el valor del campo vectorial al final de inflación como

$$W_{\text{fin}} \sim \frac{\sqrt{(\rho_w)_{\text{fin}}}}{\hat{m}}, \quad (3.113)$$

donde $(\rho_w)_{\text{fin}}$ es la densidad de energía del campo vectorial al final de inflación. Podemos remplazar los resultados (3.112) y (3.113) en (3.111) y lo que obtenemos es

$$\zeta_w \sim \Omega_{\text{fin}}^{-1/2} \frac{H_*}{m_p}, \quad (3.114)$$

donde hemos utilizado la ecuación de Friedmann $\rho_{\text{fin}} = 3m_p^2 H_*^2$ con m_p la masa de Planck y $\Omega_{\text{fin}} = (\rho_w/\rho)_{\text{fin}}$ es el parámetro de densidad de energía al final de inflación. Se discute que si el campo es pesado al final de inflación, no necesariamente la densidad de energía domina la densidad de energía del universo como se muestra en (3.90), por lo tanto, al final de inflación se sigue cumpliendo que $\rho_w \ll \rho$, entonces $\Omega_{\text{fin}} \ll 1$. Además de esto se requiere que $\delta W_{\text{fin}} \ll W_{\text{fin}}$ para que el enfoque de teoría de perturbaciones sea válido, por lo que, $\zeta_w \sim (\delta W/W)_{\text{fin}} \ll 1$. En consecuencia, podemos establecer un rango para el parámetro de densidad de energía al final de inflación como

$$\left(\frac{H_*}{m_p} \right)^2 \ll \Omega_{\text{fin}} \ll 1, \quad (3.115)$$

donde este resultado es válido para los casos de $\alpha = -1 \pm 3$. La diferencia radica en el hecho de que en el caso $\alpha = 2$ no es posible generar valores de anisotropía estadística dentro de los rangos permitidos observacionales como se muestra en (3.105) y una época en la cual el campo vectorial sea capaz de dominar o casi dominar la densidad de energía del Universo como se obtuvo en (3.98).

Capítulo 4

CONCLUSIONES

Los aciertos de la teoría del Big Bang en la explicación de la formación y evolución del Universo desde el primer segundo hasta hoy ha sido excepcional. Las predicciones hechas por esta teoría en la abundancia de elementos ligeros, y en el origen y el proceso de formación de las galaxias y cúmulos de galaxias son bien conocidos. Sin embargo, para reproducir el Universo observable, las condiciones iniciales del modelo del Big Bang caliente deben ser sometidas a un ajuste fino. Además, cabe recalcar que en el modelo del Big Bang caliente no existe un mecanismo para explicar el origen de las pequeñas perturbaciones primordiales en la densidad de energía que son Gaussianas y adiabáticas. Estas perturbaciones son observadas en la RCF y son la semilla de la generación de la estructura a gran escala.

Los problemas del ajuste fino de las condiciones iniciales del modelo del Big Bang caliente pueden ser aliviados si se introduce un período de expansión acelerada en las primeras etapas de la evolución del Universo. Este período se llama inflación. Además de resolver los problemas de planitud, horizonte y reliquias no deseadas, el período inflacionario da una explicación del origen de la perturbación primordial en la densidad de energía, la cual está presente en la RCF. En consecuencia, estas perturbaciones causan perturbaciones en la curvatura del espacio-tiempo, las cuales, mucho tiempo después de inflación, es la semilla para la formación de las estructuras en el Universo debido a un proceso al proceso de atracción gravitacional.

La forma para describir la formación y evolución de las perturbaciones cosmológicas es

a partir de la perturbación primordial en la curvatura ζ . Esta cantidad es constante durante toda la historia del universo, excepto cuando la presión no es una única función de la densidad de energía, es decir, cuando la presión no es adiabática. Para describir cómo las perturbaciones de un campo clásico, generadas por las fluctuaciones cuánticas, están relacionadas con la perturbación en la curvatura ζ , se utilizó el enfoque de universos separados. En este enfoque, la evolución del universo en escalas de superhorizonte en cada punto se comporta como un universo separado sin perturbar con un factor de escala definido localmente. Este último está determinado por la densidad de energía promedio en una hipersuperficie plana en el punto, donde se tiene en cuenta el promedio en la escala de superhorizonte de interés.

Las propiedades estadísticas de ζ proporcionan una de las principales herramientas en la cosmología para las pruebas observacionales para los modelos que describen el universo temprano. Hemos explorado cómo estas propiedades pueden ser calculadas utilizando el formalismo δN . se ha mostrado en el capítulo 2, cómo se obtiene el espectro de las perturbaciones de un campo escalar, más específicamente, en el escenario del curvátón. En el capítulo 3 se ha mostrado cómo las fluctuaciones cuánticas de un campo vectorial pueden contribuir e incluso generar la perturbación en la curvatura total en el Universo. Sin embargo, un campo vectorial sin masa, canónicamente normalizado, no puede producir ζ , ya que sus fluctuaciones cuánticas no se ven amplificadas durante inflación; inclusive, si fueran amplificadas, tales campos vectoriales no pueden dominar la densidad de energía del universo ya que generarían excesiva anisotropía estadística a gran escala y/o excesiva expansión anisótropa. En la sección 3.4 se mostró una forma de cómo romper la invarianza conformal de los campos vectoriales, sin producir una excesiva anisotropía estadística a gran escala.

La forma para lograr la ruptura de la invarianza conforme, es introduciendo un término cinético no canónico en el Lagrangiano del campo vectorial, llamada función cinética f , además de un término de masa dependiente del tiempo $m = m(t)$. Se ha parametrizado la dependencia del tiempo de la función cinética como $f \propto a^\alpha$ y la masa como $m \propto a^\beta$. El escenario proporciona dos posibilidades con respecto a la masa del campo vectorial, las cuales son moduladas por los dos posibles valores de $\alpha = -1 \pm 3$ y el de $\beta = 1$. Estos valores permiten que los espectros longitudinal y transversal son invariantes de escala como se mostró en la sección 3.4. Con respecto a la forma de parametrizar la anisotropía estadística, es mediante una redefinición del espectro de ζ como se mostró en la ecuación (3.23). Debido a la presencia del campo vectorial durante inflación, se genera anisotropía en el espectro de las perturbaciones del campo vectorial que a su vez contribuye a la anisotropía en el espectro de ζ .

Para el caso de $\alpha = 2$, la masa del campo vectorial es constante. En este régimen se encontró que el campo vectorial será subdominante durante toda la era inflacionaria y además que su contribución a la perturbación primordial en la curvatura ζ también será subdominante, pero con la posibilidad de generar anisotropía estadística sustancial

como se mostró en la sección 3.7. En consecuencia, el papel para el cual fue invocado el curvatón vectorial se perdería, por lo que se debe invocar otro campo escalar fundamental para suplir la falta de un solo generador de ζ . En cambio, cuando se escoge la otra posibilidad de $\alpha = -4$, la masa del campo vectorial es capaz de crecer con el tiempo, por lo cual, si al inicio de inflación el campo $\hat{m} \ll H_*$ (condición de campo ligero), podrá existir la posibilidad de que, al final de inflación, la masa del campo vectorial crezca lo suficiente como para que $\hat{m} \sim H_*$; así, la generación de anisotropía estadística podrá estar dentro del rango observacional si la diferencial fraccional de los espectros no es excesiva. Con respecto a la generación de ζ , en este régimen, el campo vectorial será capaz de generar toda o casi toda la perturbación primordial en la curvatura ya que después de final de inflación, el fluido del curvatón vectorial se comporta como un fluido de materia con presión nula, por lo que su densidad de energía no decrece tan rápido, como la densidad de energía asociada a la radiación; así, podrá existir un período en el cual el curvatón vectorial pueda dominar o casi dominar la densidad de energía del universo.

APÉNDICES



ECUACIONES DE CAMPO

SECTION A.1

Ecuación de Campo para el Campo Vectorial A

Se parte de la densidad Lagrangiana para un campo vectorial masivo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}f F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \quad (\text{A.1})$$

donde f y m son funciones del tiempo. Para un campo Abeliano el tensor de esfuerzos es

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (\text{A.2})$$

Las ecuaciones de campo pueden ser obtenidas a partir de

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] = 0. \quad (\text{A.3})$$

El primer término en (A.3) es:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial A_\nu} &= \frac{1}{2}m^2\sqrt{-g}\frac{\partial}{\partial A_\nu}A_\alpha A^\alpha = \frac{1}{2}m^2\sqrt{-g}g^{\mu\alpha}\frac{\partial}{\partial A_\nu}(A_\alpha A_\mu) \\
&= \frac{1}{2}m^2\sqrt{-g}g^{\mu\alpha}(\delta_\alpha^\nu A_\mu + \delta_\mu^\nu A_\alpha) = \frac{1}{2}m^2\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}A_\mu + g^{\nu\alpha}A_\alpha) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{-g}(A^\mu + A^\mu) = m^2\sqrt{-g}A^\mu.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Ahora, se determina el término segundo en (A.3):

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4}f\sqrt{-g}\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}(F_{\alpha\sigma}F^{\alpha\sigma}) = -\frac{1}{4}f\sqrt{-g}g^{\alpha\lambda}g^{\sigma\rho}\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}(F_{\alpha\sigma}F^{\alpha\sigma}), \tag{A.5}$$

donde

$$F_{\alpha\sigma}F^{\alpha\sigma} = \partial_\alpha A_\sigma \partial_\lambda A_\rho - \partial_\alpha A_\sigma \partial_\rho A_\lambda - \partial_\sigma A_\alpha \partial_\lambda A_\rho + \partial_\sigma A_\alpha \partial_\rho A_\lambda. \tag{A.6}$$

Se encuentra el ultimo término en (A.5) con ayuda de (A.6):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}(F_{\alpha\sigma}F^{\alpha\sigma}) &= \delta_\alpha^\mu \delta_\sigma^\nu \partial_\lambda A_\rho + \delta_\lambda^\mu \delta_\rho^\nu \partial_\alpha A_\sigma - \delta_\alpha^\mu \delta_\sigma^\nu \partial_\rho A_\lambda - \delta_\rho^\mu \delta_\lambda^\nu \partial_\alpha A_\sigma - \\
&\quad \delta_\sigma^\mu \delta_\alpha^\nu \partial_\lambda A_\rho - \delta_\lambda^\mu \delta_\rho^\nu \partial_\sigma A_\alpha + \delta_\sigma^\nu \delta_\alpha^\mu \partial_\rho A_\lambda + \delta_\rho^\mu \delta_\lambda^\nu \partial_\sigma A_\alpha.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Multiplicando la anterior expresión por $g^{\alpha\lambda}g^{\sigma\rho}$ resulta

$$g^{\alpha\lambda}g^{\sigma\rho}\left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}(F_{\alpha\sigma}F^{\alpha\sigma})\right] = 4\partial^\mu A^\nu - 4\partial^\nu A^\mu, \tag{A.8}$$

por lo que (A.5) se convierte en

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -f\sqrt{-g}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu). \tag{A.9}$$

Tomando los resultados en (A.4) y (A.9) se obtiene

$$\partial_\mu [f\sqrt{-g}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] + m^2\sqrt{-g}A^\nu = 0. \tag{A.10}$$

Despues de aplicar la ∂_μ , se encuentra la ecuación de campo de A_μ

$$\left[\partial_\mu + \left(\partial_\mu\sqrt{-\det[g_{\mu\nu}]}\right)\right] [f(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] + m^2 A^\nu = 0. \tag{A.11}$$

Con éste resultado, se procede a determinar las ecuaciones de campo para, la parte temporal y espacial. Se parte del echo de que el espacio-tiempo es de FRW, es decir

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^i dx^i, \tag{A.12}$$

donde el determinante de esta metrica es $g = -a^6$.

Para la componente temporal ($\nu = 0$), remplazando en la ecuación de campo (A.11) se encuentra que

$$[\partial_\mu + \partial_\mu(\ln(a^3))][f(\partial^\mu A_t - \partial_t A^\mu)] + m^2 A_t = 0. \quad (\text{A.13})$$

Aplicando las derivadas parciales a la expresión anterior se obtiene

$$\partial_\mu [f(\partial^\mu A_t - \dot{A}^\mu)] + 3\partial_\mu(\ln a)[f(\partial^\mu A_t - \dot{A}^\mu)]m^2 A_t, \quad (\text{A.14})$$

si nuevamente se aplican las derivada parciales se obtiene

$$\dot{f}(\dot{A}_t - \dot{A}_t) + f(\partial_i \partial^i A_t - \partial_i \dot{A}^i) + 3\frac{\dot{a}}{a}[f(\dot{A}_t - \dot{A}_t)] + m^2 A_t = 0. \quad (\text{A.15})$$

En la expresión anterior es posible cancelar los \dot{A}_t y teniendo en cuenta que

$$\partial_t A^i = g^{\mu i} \partial_t A_\mu = g^{ji} \partial_t A_j = -\frac{1}{a^2} A_i = -\frac{1}{a^2} \dot{A}_i, \quad (\text{A.16})$$

$$\partial_i \partial^i A_t = \partial_i \left(-\frac{1}{a^2} \partial_i A_t \right) = -\frac{1}{a^2} \partial_i \partial_i A_t, \quad (\text{A.17})$$

$$\partial_i \partial_t A^i = \partial_i \left(-\frac{1}{a^2} \partial_t A_i \right) = -\frac{1}{a^2} \partial_i \dot{A}_i, \quad (\text{A.18})$$

estás tres expresiones se reemplazan en (A.15), se obtiene

$$\frac{f}{a^2} (\partial_i \dot{A}_i - \partial_i \partial_i A_t) + m^2 A_t = 0, \quad (\text{A.19})$$

donde podemos definir $\partial_i = \nabla$ y $\partial_i \partial_i = \nabla^2$ y podemos definir en forma compacta la ecuación anterior

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} - \nabla^2 A_t + \frac{(am)^2}{f} A_t = 0. \quad (\text{A.20})$$

Ahora se pasará a calcular la componente espacial ($\nu = 1$). De la ecuacion de campo para el campo (A.11) resulta

$$\partial_\mu [f(\partial^i A^i - \partial^i A^\mu)] + 3\partial_\mu [f(\partial^\mu A^i - \partial^i A^\mu)] + m^2 A^i = 0. \quad (\text{A.21})$$

Aplicando las derivadas parciales, tanto temporales como espaciales, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{f}(\partial_t A^i - \partial^i A_t) + f(\partial_0[\partial^0 A^i - \partial^i A_t]) + \partial_j(\partial^j A^i - \partial^i A^j) \\ + \frac{3\dot{a}}{a}[f(\partial_0[\partial^0 A^i - \partial^i A_t])] + m^2 A^i = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

donde es de utilidad utilizar las siguientes expresiones:

$$\partial_0(\partial^i A_t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{a^2} \partial_i A_t \right) = \frac{2\dot{a}}{a^3} \partial_i A_t - \frac{1}{a^2} \partial_i \dot{A}_t, \quad (\text{A.23})$$

$$\partial_0 \partial_0 A^i = \partial_0 \dot{A}_i = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{a^2} \dot{A}_i \right) = \frac{2\dot{a}}{a^3} - \frac{1}{a^3} \ddot{A}_i. \quad (\text{A.24})$$

Reemplazando las dos anteriores expresiones en (A.22) y multiplicando por $-\frac{a^2}{f}$:

$$\frac{\dot{f}}{f}(\dot{A}_i - \partial_i A_t) + \ddot{A}_i - \partial_i \dot{A}_t + \frac{\dot{a}}{a} \dot{A}_i - \frac{\dot{a}}{a} \partial_i A_t - \frac{1}{a^2}(\partial_i \partial_i A_i - \partial_j \partial_i A_i) + \frac{m^2}{f} A_i = 0, \quad (\text{A.25})$$

donde este resultado es posible escribirlo en forma compacta como

$$\ddot{\mathbf{A}} + \left(\frac{\dot{f}}{f} + H \right) \dot{\mathbf{A}} - \frac{1}{a^2} [\nabla^2 \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})] + \frac{m^2}{f} \mathbf{A} = \nabla \left[A_t \left(\frac{\dot{f}}{f} + H \right) + \dot{A}_t \right]. \quad (\text{A.26})$$

Ahora, a partir de la ecuación (A.11), la contraemos con ∂_ν , donde se obtiene una condición de integrabilidad. El primer termino al contraerlo con ∂_ν es cero; los que términos que quedan son

$$(ma)^2 \dot{A}_t - m^2(\nabla \cdot \mathbf{A}) + 3Hf(\nabla^2 A_t - \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}) + 2a^2 m \dot{m} A_t = 0. \quad (\text{A.27})$$

Combinando la ecuación anterior, con la ecuación (A.20) resulta

$$\dot{A}_t + 3H A_t - \frac{1}{a^2} \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{2\dot{m}}{m} A_t = 0. \quad (\text{A.28})$$

Se combina ésta con la ecuación (A.26) se obtien

$$\ddot{\mathbf{A}} + \left(H + \frac{\dot{f}}{f} \right) \dot{\mathbf{A}} + \frac{m^2}{f} \mathbf{A} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \mathbf{A} = \left(\frac{\dot{f}}{f} - \frac{2\dot{m}}{m} - 2H \right) \nabla A_t. \quad (\text{A.29})$$

Esperamos que inflación homogenice el campo vectorial, entonces

$$\partial_i A_\mu = 0, \quad \text{para } \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (\text{A.30})$$

Utilizando esta condición dentro de la ecuación (A.20) resulta

$$\ddot{\mathbf{A}} + \left(H + \frac{\dot{f}}{f} \right) \dot{\mathbf{A}} + \frac{m^2}{f} \mathbf{A} = 0, \quad (\text{A.31})$$

la cual es la ecuación de movimiento del campo \mathbf{A} , presentada en (3.30).

SECTION A.2

Ecuaciones de Campo para las Perturbaciones del Campo Vectorial \mathbf{A}

A partir de las perturbaciones del campo vectorial A alrededor del valor homogéneo A_μ se tiene

$$A_\mu(t, \mathbf{x}) = A_\mu + \delta A_\mu(t, \mathbf{x}) \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t) + \delta \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \\ A_t(t, \mathbf{x}) = \delta A_t(t, \mathbf{x}) \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

Reemplazando dentro de (A.20) y (A.29) se obtiene

$$\nabla \cdot (\delta \dot{\mathbf{A}}) - \nabla^2 \delta A_t + \frac{(am)^2}{f} \delta A_t = 0, \quad (\text{A.33})$$

$$\delta \ddot{\mathbf{A}} + \left(H + \frac{\dot{f}}{f} \right) (\delta \dot{\mathbf{A}}) + \frac{m^2}{f} \delta \mathbf{A} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \delta \mathbf{A} = \left(\frac{\dot{f}}{f} - \frac{2\dot{m}}{m} - 2H \right) \nabla \delta A_t. \quad (\text{A.34})$$

Ahora se escriben las perturbaciones en el espacio de momentos mediante una transformada de Fourier

$$\delta A_\mu(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta \mathcal{A}_\mu(t, \mathbf{k}), \quad (\text{A.35})$$

por lo que la ecuación (A.33) se convierte en

$$\delta \mathcal{A}_t + \frac{i\partial_t(\mathbf{k} \cdot \delta \mathcal{A})}{k^2 + (am)^2/f}, \quad (\text{A.36})$$

donde $k^2 \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$. Tomando los modos de Fourier de (A.34) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \delta \ddot{\mathcal{A}} + \left(H + \frac{\dot{f}}{f} \right) (\delta \dot{\mathcal{A}}) + \frac{m^2}{f} \delta \mathcal{A} + \left(\frac{k}{a} \right)^2 \delta \mathcal{A} + \\ \left(2H + \frac{2\dot{m}}{m} - \frac{\dot{f}}{f} \right) \frac{\mathbf{k} \partial_t(\mathbf{k} \cdot \delta \mathcal{A})}{k^2 + (am)^2/f} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

La anterior expresión se puede escribir en termino de las componentes, longitudinal (paralela) y transversal (perpendicular) al vector de onda \mathbf{k} , definidas como

$$\delta \mathcal{A}^\parallel \equiv \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \delta \mathcal{A})}{k^2} \quad \text{y} \quad \mathcal{A}^\perp \equiv \delta \mathcal{A} - \delta \mathcal{A}^\parallel. \quad (\text{A.38})$$

donde $\delta\mathcal{A}^\perp$ es la componente transversal y $\delta\mathcal{A}^\parallel$ es la componente longitudinal. Identificamos de (A.37) estas componentes

$$\left[\partial_t^2 + \left(H + \frac{\dot{f}}{f} \right) \partial_t + \frac{m^2}{f} + \left(\frac{k}{a} \right)^2 \right] \delta\mathcal{A}^\parallel = 0, \quad (\text{A.39})$$

$$\left\{ \partial_t^2 + \left[H + \frac{\dot{f}}{f} + \frac{(2H + \frac{2\dot{m}}{m} - \frac{\dot{f}}{f})k^2}{k^2 + (am)^2/f} \right] \partial_t + \frac{m^2}{f} + \left(\frac{k}{a} \right)^2 \right\} \delta\mathcal{A}^\parallel = 0. \quad (\text{A.40})$$

B

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE CAMPO PARA LOS MODOS w_+ Y w_{\parallel} EN EL CASO: $\alpha = -4$ y $\beta = 1$

SECTION B.1

Solución de la Ecuación de Campo para w_+

La ecuación de movimiento para los modos transversales es

$$\ddot{w}_+ + 3H\dot{w}_+ + \left(\frac{k}{a}\right)^2 (1 + r^2)w_+ = 0, \quad (\text{B.1})$$

donde $r \equiv aM/k$.

Se realiza un cambio de variable a w_+ como: $w_+ = \tilde{w}_+/a$ y pasando a tiempo conformal $d\tau = dt/a$, la ecuación de campo anterior se puede escribir como

$$\tilde{w}_+'' + \left[k^2(1 + r^2) - \frac{2}{\tau^2} \right] \tilde{w}_+ = 0, \quad (\text{B.2})$$

donde la prima se refiere a derivada respecto al tiempo conformal. La solución a esta ecuación diferencial, en el caso $r \ll 1$, es de la forma de la ecuación de Bessel

$$z'' + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\tau^2} \right) z = 0, \quad (\text{B.3})$$

donde ν es el orden de la ecuación. La solución a la ecuación diferencial de Bessel, podemos expresarla como una combinación de las funciones de Bessel J_ν de la forma

$$z = \sqrt{-\nu} [c_1 J_\nu(\tau) + c_2 J_{-\nu}(\tau)], \quad (\text{B.4})$$

donde c_1 y c_2 son constantes.

Es posible identificar el orden de la ecuación diferencial en (B.2) cuando $r \ll 1$, es $\nu = 3/2$. La solución para w_+ será

$$w_+ = a^{-3/2} \left[c_1 J_{3/2} \left(\frac{k}{aH} \right) + c_2 J_{-3/2} \left(\frac{k}{aH} \right) \right] \quad \text{para } r \ll 1. \quad (\text{B.5})$$

Como $a = e^{Ht}$ (inflación) y $M \propto a^3$, se define una nueva variable: $x = e^{3Ht}$, por lo que la ecuación (B.1) toma la forma, en el régimen $r \gg 1$, como

$$w_+'' + \frac{2}{x} w_+' + \left(\frac{1}{3H} \right)^2 w_+ = 0, \quad (\text{B.6})$$

donde en éste caso, las primas indican derivada con respecto a x . Si se compara la ecuación anterior con la ecuación de Bessel:

$$z'' - \frac{2\tilde{\nu} - 1}{x} z' + \lambda^2 z = 0, \quad (\text{B.7})$$

la solución será de la forma

$$z = x^\nu [\hat{c}_1 J_{\tilde{\nu}}(\lambda) + \hat{c}_2 J_{-\tilde{\nu}}(\lambda)], \quad (\text{B.8})$$

donde \hat{c}_1 y \hat{c}_2 son constantes. Se comparan las ecuaciones (B.6) y (B.7), es posible identificamos el orden de la función, la cual es: $\tilde{\nu} = 1/2$. Por lo tanto, la solución para (B.6) es

$$w_+ = a^{-3/2} \left[\hat{c}_1 J_{1/2} \left(\frac{M}{3H} \right) + \hat{c}_2 J_{-1/2} \left(\frac{M}{3H} \right) \right] \quad \text{para } r \gg 1. \quad (\text{B.9})$$

Como $M_* \ll H$ en el momento que las escalas cosmológicas dejan el horizonte, entonces $\frac{M_*}{H} \ll 1$. En este tiempo $k \equiv a_* H$, donde el asterisco indica el factor de escala en este tiempo. En el momento de la transición (cuando las escalas dejan el horizonte) depende de la escala, denotado por el subíndice k

$$\frac{M_k}{H} \equiv \frac{k}{a_k H} \ll 1. \quad (\text{B.10})$$

Es precisamente en el momento de la transición, para un modo k , cuando dicho modo es del tamaño del horizonte. Por lo tanto, podemos aproximar las soluciones para w_+ en la vecindad de $r \ll 1$ y $r \gg 1$. La forma asintótica de las funciones de Bessel, J_ν , es

$$J_\nu \sim \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad \text{si } x \rightarrow 0. \quad (\text{B.11})$$

Utilizando esta forma asintótica en (B.5) y (B.9) resulta

$$w_+ = a^{-3/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1}{3} c_1 \left(\frac{k}{aH}\right)^{3/2} - c_2 \left(\frac{aH}{k}\right)^{3/2} \right] \quad \text{para } r \lesssim 1, \quad (\text{B.12})$$

$$w_+ = a^{-3/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\hat{c}_1 \left(\frac{M}{3H}\right)^{1/2} + \hat{c}_2 \left(\frac{3H}{M}\right)^{1/2} \right] \quad \text{para } r \gtrsim 1. \quad (\text{B.13})$$

La solución completa se realiza, acoplando en la transición w_+ y \dot{w}_+ en los dos regímenes. Las condiciones de acoplamiento que deben cumplirse son:

$$w_+(r \lesssim 1) = w_+(r \gtrsim 1) \quad (\text{B.14})$$

$$\dot{w}_+(r \lesssim 1) = \dot{w}_+(r \gtrsim 1). \quad (\text{B.15})$$

Para la condición (B.14) y (B.15) encontramos

$$\hat{c}_1 = -\sqrt{3} c_2 \left(\frac{a_k H}{k}\right)^2, \quad (\text{B.16})$$

$$\hat{c}_2 = \frac{1}{3} c_1 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{k}{a_k H}\right)^2 \right]. \quad (\text{B.17})$$

Con lo anterior en mente, la solución de w_+ en (B.5) debe coincidir con la solución para en vacío de Binch-Davies [59]. Es recomendable utilizar las siguientes expresiones:

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\text{sen } x}{x} - \cos x \right], \quad J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\text{sen } x + \frac{\cos x}{x} \right], \quad (\text{B.18})$$

y

$$e^{ix} = \cos x + i \text{sen } x. \quad (\text{B.19})$$

Después de un poco de álgebra, resulta un sistema de ecuaciones 2×2 de la forma

$$-2\sqrt{\frac{H}{\pi}} c_1 - 2\sqrt{\frac{H}{\pi}} c_2 \left(\frac{aH}{k}\right) = 1, \quad (\text{B.20})$$

$$2\sqrt{\frac{H}{\pi}} c_1 \left(\frac{aH}{k}\right) - 2\sqrt{\frac{H}{\pi}} c_2 = i. \quad (\text{B.21})$$

Como $k/aH \gg 1$ o $k \gg aH$, encontramos el valor de las constantes c_1 y c_2 :

$$c_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{H}} \quad \text{y} \quad c_2 = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{H}}. \quad (\text{B.22})$$

Con éstas constantes podemos encontrar la solución para (B.5), lo que resulta

$$w_+ = a^{-3/2} \sqrt{\frac{\pi}{4}H} \left[-J_{3/2} \left(\frac{k}{aH} \right) - iJ_{-3/2} \left(\frac{k}{aH} \right) \right] \quad \text{para} \quad \frac{k}{aH} \gtrsim 1. \quad (\text{B.23})$$

Con ayuda de las constantes c_1 y c_2 es posible escribir (B.12) como

$$w_+ = \frac{i}{\sqrt{2k}} \left(\frac{H}{k} \right) \left[1 + \frac{i}{3} \left(\frac{k}{aH} \right)^3 \right] \quad \text{para} \quad \frac{k}{aH} \ll 1 \ll \frac{3H}{M}. \quad (\text{B.24})$$

Para el caso de las constantes \hat{c}_1 y \hat{c}_2 podemos escribirlas, con ayuda de c_1 y c_2 , como

$$\hat{c}_1 = \frac{1\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{H}} \left(\frac{a_k H}{k} \right)^2, \quad (\text{B.25})$$

$$\hat{c}_2 = -\frac{1}{6} \sqrt{\frac{\pi}{H}} \frac{1}{\sqrt{\text{den}3}} \left(\frac{k}{a_k H} \right)^2. \quad (\text{B.26})$$

Es importante anotar, que para los valores de $\alpha = -4$ y $\beta = 1$, entonces $r \propto a^{-4}$. En el momento en que las escalas cosmológicas son del tamaño de horizonte, es decir $k = aH$, el valor de r es: $r_k = 1$, por lo que es posible encontrar una relación útil que es

$$\frac{a_k}{a} = r^{-1/4} = \left(\frac{aM}{k} \right)^{-1/4}, \quad (\text{B.27})$$

y se puede encontrar una expresión que será de ayuda

$$\left(\frac{a_k H}{k} \right)^2 = \left(\frac{aH}{k} \right)^{3/2} \left(\frac{H}{M} \right)^{1/2} = \text{Constante}. \quad (\text{B.28})$$

Reemplazando la expresión (B.27) en (B.25) y (B.26), y a su vez en (B.13) encontramos

$$w_+ = a^{-3/2} \sqrt{\frac{\pi}{4H}} \left[i \left(\frac{aH}{k} \right)^{3/2} \left(\frac{3H}{M} \right)^{1/2} J_{1/2} \left(\frac{M}{3H} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{k}{aH} \right)^{3/2} \left(\frac{M}{3H} \right)^{1/2} J_{-1/2} \left(\frac{3H}{M} \right) \right] \quad \text{si} \quad \frac{3H}{M} \lesssim 1. \quad (\text{B.29})$$

A partir del resultado en (B.12) y reemplazando las constantes (B.22) se encuentra que

$$w_+ = C_1 + C_2 a^{-3}, \quad (\text{B.30})$$

donde

$$C_1 = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{aH}{k} \right)^{3/2} \left(\frac{H}{M} \right)^{1/2}, \quad (\text{B.31})$$

$$C_2 = -\frac{i}{3\sqrt{2}} \left(\frac{k}{aH} \right)^{3/2} \left(\frac{M}{H} \right)^{1/2}. \quad (\text{B.32})$$

Para determinar el espectro de las perturbaciones transversales en el régimen de superhorizonte ($k \ll aH$) primero se determina la expresión aproximada de (B.24), la cual se puede escribir como

$$w_+ \approx \frac{i}{\sqrt{2k}} \left(\frac{H}{k} \right), \quad (\text{B.33})$$

por lo que el espectro resulta ser

$$\mathcal{P}_+ \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \lim_{k/aH \ll 1} w_+ \right| = \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2. \quad (\text{B.34})$$

SECTION B.2

Solución de la Ecuación de Campo para w_{\parallel}

La ecuación de movimiento para los modos longitudinales en (3.52) es

$$\ddot{w}_{\parallel} + \left(3 + \frac{8}{1+r^2} \right) H \dot{w}_{\parallel} + \left[\left(\frac{24}{1+r^2} \right) H^2 + \left(\frac{k}{a} \right)^2 (1+r^2) \right] w_{\parallel} = 0. \quad (\text{B.35})$$

En el régimen $r \ll 1$ la ecuación de campo anterior se convierte en

$$\ddot{w}_{\parallel} + 11H \dot{w}_{\parallel} + \left[24H^2 + \left(\frac{k}{a} \right)^2 \right] w_{\parallel} = 0. \quad (\text{B.36})$$

Si realizamos el siguiente cambio de variable para w_{\parallel} como: $w_{\parallel} = \tilde{w}_{\parallel}/a^5$ y pasando a tiempo conformal, la ecuación de campo (B.36) se puede escribir como

$$\tilde{w}_{\parallel}'' + \left[k^2 - \frac{6}{\tau^2} \right] \tilde{w}_{\parallel} = 0, \quad (\text{B.37})$$

donde la tilde indica derivada con respecto al tiempo conformal. Comparando con la ecuación diferencial de Bessel

$$z'' + \left[\lambda^2 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\tau^2} \right] z = 0, \quad (\text{B.38})$$

donde es posible identificar el orden de la ecuación diferencial, resultando $\nu = 5/2$, cuya solución para (B.38) es

$$z = \sqrt{-\tau} [c_3 J_{5/2}(-\lambda\tau) + c_4 J_{-5/2}(-\lambda\tau)], \quad (\text{B.39})$$

donde c_3 y c_4 son constantes. Aplicando esta solución en (B.37) resulta

$$w_{\parallel} = a^{-11/2} \left[c_3 J_{5/2} \left(\frac{k}{aH} \right) + c_4 J_{-5/2} \left(\frac{k}{aH} \right) \right] \quad \text{para } r \ll 1. \quad (\text{B.40})$$

En el régimen $r \gg 1$ pero $M \ll H$, la ecuación de campo (B.35) se puede escribir como

$$\ddot{w}_{\parallel} + 3H\dot{w}_{\parallel} + \frac{24H^2}{r^2} w_{\parallel} = 0. \quad (\text{B.41})$$

Se define $x = 1/r = k/aH$, como $M \propto a^3$, entonces $x = ke^{-4Ht}$, por lo que la ecuación de campo (B.41) que se obtiene es

$$w_{\parallel}'' + \left(\frac{1/4}{x} \right) w_{\parallel}' + \frac{3}{2} w_{\parallel} = 0, \quad (\text{B.42})$$

donde las primas identifican derivadas con respecto a x . Una de las forma de la ecuación diferencial de Bessel es

$$z'' - \frac{2\nu - 1}{x} z' + \lambda^2 z = 0, \quad (\text{B.43})$$

cuya solución es de la forma

$$z = x^{\nu} [\bar{c}_3 J_{\nu}(\lambda x) + \bar{c}_4 J_{-\nu}(\lambda x)], \quad (\text{B.44})$$

donde \bar{c}_3 y \bar{c}_4 son constantes. A partir de los dos resultados es posible identificar el orden de la ecuación de campo (B.41), el cual es $\nu = 3/8$. En consecuencia la solución a (B.42) resulta

$$w_{\parallel} = a^{-3/2} \left[\bar{c}_3 J_{3/8} \left(\sqrt{\frac{3}{8}} \frac{1}{r} \right) + \bar{c}_4 J_{-3/8} \left(\sqrt{\frac{3}{8}} \frac{1}{r} \right) \right] \quad \text{para } 1 \ll r \ll r_c, \quad (\text{B.45})$$

donde $r_c \equiv 2\sqrt{6}(H/M_c)$. Antes de continuar, analicemos R_c por un momento. Consideremos el intervalo $[k/a, H]$, donde el límite inferior decrece en el tiempo. Sabemos que la masa efectiva del campo crece en el tiempo como $M \propto a^3$. Cuando ésta se hace comparable con k/a tenemos $r = 1$ y $a = a_k$: después de este momento, M entra a la región en cuestión y continúa creciendo hasta ser aproximadamente del orden de H .

El momento en que $r = r_c$ corresponde a cuando M cruza la media geométrica de la región.

En el régimen $r \gg 1$ y $M \gg H$ la ecuación de campo (B.35) resulta ser

$$\ddot{w}_{\parallel} + 3H\dot{w}_{\parallel} + M^2w_{\parallel} = 0. \quad (\text{B.46})$$

Como $M \propto a^3$ y $a = e^{Ht}$, entonces definimos $x = e^{3Ht}$, por lo que la ecuación anterior podemos escribirla como

$$w_{\parallel}'' + \frac{2}{x}w_{\parallel}' + \left(\frac{1}{3H}\right)^2 w_{\parallel} = 0, \quad (\text{B.47})$$

donde las primas identifican derivadas con respecto a x . La solución para ésta es de la forma mostrada en (B.44); por lo tanto, la solución se puede escribir como

$$w_{\parallel} = a^{-3/2} \left[\hat{c}_3 J_{1/2} \left(\frac{M}{3H} \right) + \hat{c}_4 J_{-1/2} \left(\frac{M}{3H} \right) \right] \quad \text{para } r \gg r_c. \quad (\text{B.48})$$

En este caso es necesario hacer los acopamientos de las soluciones para w_{\parallel} y \dot{w}_{\parallel} en $r = 1$ y $r_c = 1$ y en la vecindad de r_c , es decir, $r \lesssim r_c$ y $r \gtrsim r_c$. Utilizando la forma asintótica en (B.11), las soluciones (B.45) y (B.48) se pueden escribir como

$$w_{\parallel} = a^{-3/2} \left[\frac{\bar{c}_3}{\Gamma(11/8)} \left(\sqrt{\frac{3}{8}} \frac{1}{r} \right)^{3/8} + \frac{\bar{c}_4}{\Gamma(5/8)} \left(\sqrt{\frac{8}{3}} r \right)^{3/8} \right] \quad \text{para } r \lesssim r_c, \quad (\text{B.49})$$

y

$$w_{\parallel} = a^{-3/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\hat{c}_3 \left(\frac{M}{3H} \right)^{1/2} + \hat{c}_4 \left(\frac{3H}{M} \right)^{1/2} \right] \quad \text{para } r \gtrsim r_c. \quad (\text{B.50})$$

Aplicamos las condiciones de acoplamiento equivalentes en (B.14) y (B.15), que para este régimen son

$$w_{\parallel}(r \lesssim r_c) = w_{\parallel}(r \gtrsim r_c), \quad (\text{B.51})$$

$$\dot{w}_{\parallel}(r \lesssim r_c) = \dot{w}_{\parallel}(r \gtrsim r_c). \quad (\text{B.52})$$

Aplicando las condiciones de contorno (B.51) y (B.52) en (B.49) y (B.50) se encuentra

$$\bar{c}_3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{8}{3} \right)^{3/16} \Gamma(11/2) \sqrt{3} \left(\frac{a_k H}{k} \right)^{11/16} \hat{c}_4, \quad (\text{B.53})$$

$$\bar{c}_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{3}{8} \right)^{3/16} \Gamma(5/8) \left(\frac{k}{a_k H} \right)^{11/16} \hat{c}_3. \quad (\text{B.54})$$

En el régimen de la vecindad de $r = 1$, aplicamos la misma aproximación asintótica en (B.44). La expresión en (B.40) se puede escribir como

$$w_{\parallel} = a^{-11/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{c_3}{15} \left(\frac{k}{aH} \right)^{5/2} + 3c_4 \left(\frac{aH}{k} \right)^{5/2} \right] \quad \text{para } r \lesssim 1. \quad (\text{B.55})$$

De igual manera que en el régimen anterior, las condiciones de frontera a satisfacer son

$$w_{\parallel}(r \lesssim 1) = w_{\parallel}(r \gtrsim 1), \quad (\text{B.56})$$

$$\dot{w}_{\parallel}(r \lesssim 1) = \dot{w}_{\parallel}(r \gtrsim 1). \quad (\text{B.57})$$

Aplicando estas condiciones de frontera en (B.50) y (B.55) resulta

$$\hat{c}_4 = \frac{a_k^{-4}}{\sqrt{3}} \left(\frac{a_k H}{k} \right)^2 \left[3c_4 + \frac{8}{45} c_3 \left(\frac{k}{a_k H} \right)^5 \right], \quad (\text{B.58})$$

$$\hat{c}_3 = -\frac{\sqrt{3}}{9} a_k^{-4} \left(\frac{k}{a_k H} \right)^2 c_3. \quad (\text{B.59})$$

Ahora bien, para determinar las constantes que nos interesan, la cuales son: c_3 , c_4 , \hat{c}_3 y \hat{c}_4 , lo primero que se hace es acoplar la solución en (B.40), con la solución de vacío de Bunch-Davies

$$w_{\parallel} = \frac{\gamma}{a\sqrt{2k}} e^{ik/aH}, \quad (\text{B.60})$$

donde el $\gamma\sqrt{1 + (1/r^2)}$ es el factor de Lorentz, que en el caso de $r \ll 1$ resulta en $\gamma \approx 1$. Al momento de hacer el acople, es útil tener en cuenta las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} J_{5/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\text{sen} x \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) - \frac{3\text{cos} x}{x} \right], \\ J_{-5/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{2\pi x}} \left[\text{cos} x \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) + \frac{3\text{sen} x}{x} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

y

$$e^{ix} = \text{cos} x + i\text{sen} x. \quad (\text{B.62})$$

Se encuentra que las constates c_3 y c_4 son

$$c_3 = -\frac{i}{2} a_k^4 \sqrt{\frac{\pi}{H}}, \quad (\text{B.63})$$

$$c_4 = -\frac{1}{2} a_k^4 \sqrt{\frac{\pi}{H}}. \quad (\text{B.64})$$

Reemplazando los valores de las constantes c_3 y c_4 en (B.40) ésta puede escribirse como

$$w_{\parallel} = -ia^{-9/2} \sqrt{\frac{\pi}{4H}} \left(\frac{k}{H} \right)^3 \left(\frac{aH}{k} \right)^3 \left(\frac{H}{M} \right) \left[J_{5/2} \left(\frac{k}{aH} \right) - iJ_{-5/2} \left(\frac{k}{aH} \right) \right] \quad \text{si } \frac{k}{aH} \gtrsim 1. \quad (\text{B.65})$$

Utilizando la expresión (B.55), reemplazando las constantes c_1 y c_2 que aparecen en (B.63) y (B.64) y teniendo en cuenta que $k \ll aH$ encontramos que

$$w_{\parallel} = -\frac{1}{\sqrt{2H}} \left(\frac{H}{k}\right)^{3/2} \left(\frac{3H}{M}\right) \quad \text{si} \quad \frac{k}{aH} \ll 1 \ll \frac{3H}{M}. \quad (\text{B.66})$$

Reemplazando (B.63) y (B.64) en (B.58) y (B.59) podemos escribir las constantes \hat{c}_3 y \hat{c}_4 respectivamente como

$$\hat{c}_3 = \frac{i}{3} \sqrt{\frac{\pi}{4H}} \left(\frac{k}{aH}\right)^{3/2} \left(\frac{M}{3H}\right)^{1/2}, \quad (\text{B.67})$$

$$\hat{c}_4 = -\sqrt{\frac{\pi}{4H}} \left(\frac{aH}{k}\right)^{3/2} \left(\frac{3H}{M}\right)^{1/2}. \quad (\text{B.68})$$

Reemplazando las anteriores constantes en (B.48) resulta

$$w_{\parallel} = a^{-3/2} \sqrt{\frac{\pi}{4H}} \left[\frac{i}{3} \left(\frac{k}{aH}\right)^{3/2} \left(\frac{M}{3H}\right)^{1/2} J_{1/2}\left(\frac{M}{3H}\right) - \left(\frac{aH}{k}\right)^{3/2} \left(\frac{3H}{M}\right)^{1/2} J_{1/2}\left(\frac{M}{3H}\right) \right] \quad \text{si} \quad \frac{3H}{M} \lesssim 1. \quad (\text{B.69})$$

Tomando la expresión en (B.66), se determinan el espectro de las perturbaciones longitudinales, que en el régimen de superhorizonte resulta ser

$$\mathcal{P}_{\parallel} \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \lim_{k/aH \ll 1} w_{\parallel} \right| = 9 \left(\frac{H}{M}\right)^2 \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2. \quad (\text{B.70})$$

SECTION B.3

Relación entre los Espectros de las Perturbaciones Longitudinal y Transversal durante Inflación

En los apéndices anteriores, se encontró que los modos transversales y longitudinales se comportan de una manera similar: inclusive, los modos dejan de oscilar en el momento que las escalas dejan el horizonte y hasta $M \sim H$. En este período los modos evolucionan

de la forma mostrada en (B.13) y (B.50). Si remplazamos el valor de las constantes \hat{c}_1 , \hat{c}_2 , \hat{c}_3 y \hat{c}_4 , los modos w_+ y w_{\parallel} se pueden escribir como

$$w_+ = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{aH}{k}\right)^{3/2} \left(\frac{H}{M}\right)^{1/2} - \frac{1}{3\sqrt{2}} \left(\frac{k}{aH}\right)^{3/2} \left(\frac{M}{H}\right)^{1/2} a^{-3} \quad (\text{B.71})$$

y

$$w_{\parallel} = \frac{i}{3\sqrt{2H}} \left(\frac{k}{aH}\right)^{3/2} \left(\frac{M}{3H}\right)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{2H}} \left(\frac{aH}{k}\right)^{3/2} \left(\frac{3H}{M}\right)^{1/2} a^{-3}. \quad (\text{B.72})$$

De estos resultados podemos ver claramente que si $M \ll H$ y $k \ll aH$, que es el momento en que las escalas dejan el horizonte durante inflación ($H = \text{constante}$) los modos se convierten en

$$w_+ = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{aH}{k}\right)^{3/2} \left(\frac{H}{M}\right)^{1/2} \propto \text{const.} \quad (\text{B.73})$$

y

$$w_{\parallel} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2H}} \left(\frac{aH}{k}\right)^{3/2} \left(\frac{H}{M}\right)^{1/2} a^{-3} \propto a^{-3}. \quad (\text{B.74})$$

Para el caso de las perturbaciones del campo vectorial en el régimen $M < H$, se pueden escribir a partir de (2.72) como

$$\delta W_+ \approx \sqrt{\mathcal{P}_+} = \frac{H}{2\pi} = \text{const.} \quad (\text{B.75})$$

y

$$\delta W_{\parallel} \approx \sqrt{\mathcal{P}_{\parallel}} = \frac{3H}{M} \frac{H}{2\pi} \propto a^{-3}. \quad (\text{B.76})$$

En el caso que analizamos el régimen en el que $M \sim H$, las funciones de Bessel que acompañan las expresiones (B.29) y (B.69) en escalas de superhorizonte ($k \ll aH$), son aproximadamente iguales, es decir

$$\left\| J_{\nu} \left(\frac{M}{3H} \right) \right\| \approx \left\| J_{-\nu} \left(\frac{M}{3H} \right) \right\|. \quad (\text{B.77})$$

En consecuencia se puede escribir los modos transversal y longitudinal como

$$2\sqrt{\frac{H}{\pi}} \left(\frac{k}{H}\right)^{3/2} w_+ \simeq \frac{i}{\sqrt{M/3H}} J_{1/2} \left(\frac{M}{3H} \right) \quad (\text{B.78})$$

y

$$2\sqrt{\frac{H}{\pi}} \left(\frac{k}{H}\right)^{3/2} w_{\parallel} \simeq -\frac{1}{\sqrt{M/3H}} J_{-1/2} \left(\frac{M}{3H} \right). \quad (\text{B.79})$$

Por lo tanto, aplicando la condición (B.77) los modos son iguales, es decir

$$\|w_+\| \approx \|w_\parallel\| \quad \text{para} \quad \frac{M}{3H} \gtrsim 1. \quad (\text{B.80})$$

En el caso que el campo es pesado, es decir $\frac{M}{3H} \gg 1$, útil implementar la aproximación asintótica de las funciones de Bessel como

$$J_{\pm\nu} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x \mp \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{B.81})$$

en consecuencia los modos pueden escribirse como

$$w_+ = \frac{i}{\sqrt{2H}} \left(\frac{H}{k}\right)^{3/2} \frac{\text{sen}(M/3H)}{M/3H} \quad (\text{B.82})$$

y

$$w_\parallel = -\frac{1}{\sqrt{2H}} \left(\frac{H}{k}\right)^{3/2} \frac{\text{cos}(M/3H)}{M/3H}, \quad (\text{B.83})$$

de aquí que el espectro para los modos en este régimen puede ser determinado como

$$\mathcal{P}_+ = \frac{k^3}{2\pi^2} \left\| \lim_{k/aH \ll 1} w_+ \right\|^2 = \frac{1}{2(M/3H)^2} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \text{sen}^2(M/3H) \quad (\text{B.84})$$

y

$$\mathcal{P}_\parallel = \frac{k^3}{2\pi^2} \left\| \lim_{k/aH \ll 1} w_\parallel \right\|^2 = \frac{1}{2(M/3H)^2} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \text{cos}^2(M/3H). \quad (\text{B.85})$$

Como $M/3H \gg 1$, la frecuencia de oscilación es muy grande comparada con la razón de expansión; por lo tanto es conveniente trabajar con el promedio de los espectros, los cuales se pueden escribir como

$$\bar{\mathcal{P}}_+ = \bar{\mathcal{P}}_\parallel = \frac{1}{2(M/3H)^2} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2, \quad (\text{B.86})$$

utilizando el resultado anterior dentro de (B.75) y (B.76) resulta

$$\delta W_\parallel = \delta W_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3H}{M} \left(\frac{H}{2\pi}\right) \propto a^{-3}. \quad (\text{B.87})$$

C

EVOLUCIÓN DEL MODO CERO

SECTION C.1

Durante Inflación

C.1.1 Caso: $\alpha = -4$

Se tiene la ecuación de campo

$$\ddot{\mathbf{W}} + 3H\dot{\mathbf{W}} + M^2\mathbf{W} = 0, \quad (\text{C.1})$$

donde M crece con el tiempo de la forma $M \propto a^3$ y H es constante durante inflación. Ahora, pasemos a solucionar (C.1) en forma general, la cual tiene la misma forma que se muestra en (B.6), por lo tanto, la solución a ésta es

$$W = a^{-3} \left[\hat{C}_3 \text{sen} \left(\frac{M}{3H} \right) + \hat{C}_4 \text{cos} \left(\frac{M}{3H} \right) \right]. \quad (\text{C.2})$$

Podemos establecer la forma de (C.2) en el régimen de campo ligero $M \ll H$, utilizando las relaciones asintóticas del seno y coseno: $\text{sen}x \sim x$ y $\text{cos}x \sim 1$, por lo tanto, la

expresión (C.2) podemos escribirla como

$$W = a^{-3} \left[\hat{C}_3 \left(\frac{M}{3H} \right) + \hat{C}_4 \right]. \quad (\text{C.3})$$

La forma de ρ_{cin} y V_W en el caso de $\alpha = -4$ es

$$\rho_{\text{cin}} = \frac{1}{2}(\dot{W} + 3HW)^2 \quad (\text{C.4})$$

y

$$V_W = \frac{1}{2}M^2W^2. \quad (\text{C.5})$$

Se utiliza la condición de equiparación de la energía (3.83) y con la ayuda de las expresiones (C.4) y (C.5) se encuentra que

$$\dot{W}_0 = W_0(-3H \pm M_0). \quad (\text{C.6})$$

Ahora, se calcula la derivada temporal de (C.3) y se evalúa al inicio de inflación; lo que resulta es

$$\hat{C}_4 = -\frac{a_0^3}{3H}\dot{W}_0 = -\frac{a_0^3}{3H}[W_0(-3H \pm M_0)]. \quad (\text{C.7})$$

Con el valor de la constante \hat{C}_4 encontrada, se evalúa (C.3) al inicio de inflación, por lo que resulta

$$\hat{C}_3 = \pm a_0^3 W_0. \quad (\text{C.8})$$

Reemplazando el valor de las constante \hat{C}_3 y \hat{C}_4 dentro de (C.2) y teniendo en cuenta la condición de campo ligero ($M_0 \ll H$), la evolución del campo vectorial durante inflación se puede escribir como

$$W = W_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \sqrt{2} \cos \left(\frac{M}{3H} \pm \frac{\pi}{4} \right). \quad (\text{C.9})$$

SECTION C.2

Despues de Inflación

C.2.1 Evolución de H

Es útil empezar determinando la evolución de la densidad ρ , a partir de la ecuación de continuidad $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$ y del parámetro barotrópico $p = w\rho$, encontrando que

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}\rho(1 + w) = 0, \quad (\text{C.10})$$

donde se ha utilizado la definición del parámetro de Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$. Agrupemos como

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{3}{a} \left(\frac{da}{dt} \right) \rho(1+w) = 0 \Rightarrow \text{Ln} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) = -3(1+w) \text{Ln} \left(\frac{a}{a_0} \right),$$

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (\text{C.11})$$

Ahora, se determina la evolución del parámetro de expansión a . De la ecuación de Friedmann y de (C.11) resulta que

$$H^2 = \frac{\rho}{3M_p^2} \Rightarrow a^{\frac{3(1+w)}{2}} = \frac{3(1+w)t}{2M_p\sqrt{3}} = \rho^{-1/2}, \quad (\text{C.12})$$

donde M_p es la masa de Planck. Por lo tanto, el parámetro de Hubble evoluciona con el tiempo de la forma

$$H = \frac{2}{3(1+w)t}. \quad (\text{C.13})$$

C.2.2 Solución a la ecuación de campo del modo cero \mathbf{W}

Se parte de la ecuación de campo

$$\ddot{\mathbf{W}} + 3H\dot{\mathbf{W}} + (\dot{H} + 2H^2 + \hat{m}^2)\mathbf{W} = 0. \quad (\text{C.14})$$

Realizando un cambio de variable como: $W = \frac{\widetilde{W}}{a}$, la expresión toma la forma

$$\ddot{\widetilde{W}} + H\dot{\widetilde{W}} + \hat{m}^2\widetilde{W} = 0, \quad (\text{C.15})$$

por lo que (C.15) toma la forma mostrada en (B.7), cuya solución es de la forma (B.8):

$$\widetilde{W} = t^\nu [\tilde{C}_1 J_\nu + \tilde{C}_2 J_{-\nu}], \quad (\text{C.16})$$

donde $W = \widetilde{W}/a$ y $d = \frac{1+3w}{6(1+w)}$. Como H es de la forma encontrada en (C.13) y $a \propto t^{\frac{2}{3(1+w)t}}$, la solución general se puede escribir

$$W = t^{(1/2)[(w-1)(w+2)]} [\tilde{C}_1 J_d(\hat{m}t) + \tilde{C}_2 J_{-d}(\hat{m}t)]. \quad (\text{C.17})$$

Si deriva la expresión anterior con respecto al tiempo se encuentra que

$$\dot{W} = \frac{1}{2} \left(\frac{w-1}{w+1} \right) t^{\frac{1}{2} \left(\frac{w-1}{w+1} \right) - 1} [\tilde{C}_1 J_d(\hat{m}t) + \tilde{C}_2 J_{-d}(\hat{m}t)] +$$

$$t^{\frac{1}{2} \left(\frac{w-1}{w+1} \right)} [\tilde{C}_1 \dot{J}_d(\hat{m}t) + \tilde{C}_2 \dot{J}_{-d}(\hat{m}t)]. \quad (\text{C.18})$$

Es de ayuda utilizar las siguientes propiedades para las funciones de Bessel:

$$\dot{J}_d(\hat{m}t) = \frac{1}{2}\hat{m}[J_{d-1}(\hat{m}t) - J_{d+1}(\hat{m}t)], \quad (\text{C.19})$$

$$\dot{J}_{-d}(\hat{m}t) = \frac{1}{2}\hat{m}[J_{-d-1}(\hat{m}t) - J_{-d+1}(\hat{m}t)]. \quad (\text{C.20})$$

Así, la expresión $\dot{W} + HW$, después de cancelar algunos términos, se reduce a

$$\dot{W} + HW = \hat{m}t^{(1/2)[(w-1)/(w+1)]}[\tilde{C}_1 J_{d-1}(\hat{m}t) - \tilde{C}_2 J_{1-d}(\hat{m}t)]. \quad (\text{C.21})$$

En el régimen de campo ligero, es decir $\hat{m}t \ll 1$, realizamos la aproximación asintótica de las funciones de Bessel, J_d , como se muestra en (B.11), por lo que la expresión (C.17) podemos escribirla como

$$W = t^{\frac{1}{2}(\frac{w-1}{w+1})} \left[\frac{\tilde{C}_1}{\Gamma(d+1)} \left(\frac{\hat{m}t}{2} \right)^d + \frac{\tilde{C}_2}{\Gamma(1-d)} \left(\frac{\hat{m}t}{2} \right)^d \right]. \quad (\text{C.22})$$

Para el caso de las formas asintóticas de J_{d-1} y J_{-d+1} es de ayuda utilizar

$$\Gamma(d) \equiv \frac{\Gamma(d+1)}{d} \longrightarrow J_{d-1} \sim \frac{d}{\Gamma(d+1)} \left(\frac{\hat{m}t}{2} \right)^{d-1}, \quad (\text{C.23})$$

$$\Gamma(2-d) \equiv (1-d)\Gamma(1-d) \longrightarrow J_{-d+1} \sim \frac{1}{(1-d)\Gamma(1-d)} \left(\frac{\hat{m}t}{2} \right)^{-d+1}, \quad (\text{C.24})$$

por lo que la expresión en (C.21) podemos escribirla como

$$\dot{W} + 3HW = \hat{m}t^{\frac{1}{2}(\frac{w-1}{w+1})} \left[\frac{d\tilde{C}_1}{\Gamma(d+1)} \left(\frac{\hat{m}t}{2} \right)^{d-1} - \frac{\tilde{C}_2}{(1-d)\Gamma(1-d)} \left(\frac{\hat{m}t}{2} \right)^{1-d} \right]. \quad (\text{C.25})$$

Pasemos a determinar la forma de las constantes \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 , en función de los valores iniciales del campo. Por lo tanto, si evaluamos las expresiones (C.22) y (C.25) al final de inflación podemos combinarlas y encontrar expresiones para las constantes como

$$\tilde{C}_1 = a_* t_* \Gamma(1+d) \left[\frac{2(1-d)(\dot{W}_* + H_* W_*) + W_* t_* \hat{m}}{[4d(1-d) + t_*^2 \hat{m}^2] t_*^{2d}} \right] \left(\frac{\hat{m}}{2} \right)^{-d} \quad (\text{C.26})$$

y

$$\tilde{C}_2 = a_* \Gamma(1-d) \left[\frac{4d(1-d)W_* - t_* 2(1-d)(\dot{W}_* + H_* W_*)}{4d(1-d) + t_*^2 \hat{m}^2} \right] \left(\frac{\hat{m}}{2} \right)^d. \quad (\text{C.27})$$

Reemplazando estas constantes en (C.22) obtenemos

$$W = \left[\frac{3(1+w)}{1+3w} \right] \left(\frac{a}{a_*} \right)^{\frac{1}{2}(3w-1)} \left\{ W_* \left[\frac{2}{3(1+w)} + \left(\frac{a_*}{a} \right)^{\frac{1}{2}(3w+1)} \left(\frac{3w-1}{3(1+w)} \right) \right] + \frac{\dot{W}_*}{H_*} \left[\frac{2}{3(1+w)} \left(1 - \left(\frac{a_*}{a} \right)^{\frac{1}{2}(3w+1)} \right) \right] \right\}. \quad (\text{C.28})$$

Analicemos por un momento el termino:

$$\left(\frac{a_*}{a}\right)^{\frac{1}{2}(3w+1)} = \left(\frac{t}{t_*}\right)^{\frac{3w+1}{3(w+1)}} \Rightarrow \begin{cases} w = \frac{1}{3} \text{ (radiación)} & \rightarrow (t/t_*)^{1/2} \\ w = 0 \text{ (materia)} & \rightarrow (t/t_*)^{1/3} \end{cases}, \quad (\text{C.29})$$

lo que quiere decir que, para los valores $w = 0$ y $w = 1/3$ el termino analizado siempre es un funcion decreciente del tiempo; en consecuencia

$$\left(\frac{a_*}{a}\right)^{\frac{1}{2}(3w+1)} \ll 1. \quad (\text{C.30})$$

Como resultado, la expresión en (C.28) se reduce a

$$W = \frac{2}{1+3w} \left(\frac{a}{a_*}\right)^{\frac{1}{2}(3w-1)} \left(W_* + \frac{\dot{W}}{H_*}\right). \quad (\text{C.31})$$

Ahora, remplazando el valor de las constantes encontradas en (C.26) y (C.27) dentro de (C.25) resulta en

$$\begin{aligned} \dot{W} + HW &= \left(\frac{t}{t_*}\right)^{2d} \left(\frac{a_*}{a}\right) \left(\frac{t_*}{t}\right) (\dot{W}_* + H_* W_*) - \\ &\quad \frac{\hat{m}^2 t a_*}{4ad} [2dW_* - t_*(\dot{W}_* + H_* W_*)]. \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

El último término del miembro derecho es una cantidad mucho menor que 1. Con respecto al primer término después de la igualdad, es posible reducirlo de la siguiente forma

$$\frac{a}{a_*} = \left(\frac{t}{t_*}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \Rightarrow \left(\frac{t}{t_*}\right)^{2d} \left(\frac{a_*}{a}\right) \left(\frac{t_*}{t}\right) = \left(\frac{a}{a_*}\right)^{-2}, \quad (\text{C.33})$$

por lo tanto, la expresión (C.32) se puede escribir como

$$\dot{W} + HW = H_* \left(\frac{a}{a_*}\right)^{-2} \left(W_* + \frac{\dot{W}_*}{H_*}\right). \quad (\text{C.34})$$

Como el escalamiento de f y m se supone que termina cuando termina inflación, entonces $\alpha = 0$, por lo tanto, las expresiones para ρ_{cin} en (3.81) y V_W en (3.82) se pueden escribir como

$$\rho_{\text{cin}} = \frac{1}{2}(\dot{W} + HW)^2 \quad \text{y} \quad V_W = \frac{1}{2}\hat{m}^2 W^2, \quad (\text{C.35})$$

siendo el cociente entre estas dos cantidades

$$\frac{V_A}{\rho_{\text{cin}}} = \frac{4}{(3w+1)^2} \left(\frac{\hat{m}}{H_*}\right)^2 \left(\frac{t}{t_*}\right)^2 \simeq (\hat{m}t)^2 \ll 1, \quad (\text{C.36})$$

por lo que la densidad de energía asociada al modo cero del campo vectorial es

$$\rho_W \simeq \rho_{\text{cin}} = \frac{1}{2}(\dot{W}_* + W_* H_*)^2 \left(\frac{a}{a_*}\right)^{-4} \Rightarrow \rho_W \propto a^{-4}. \quad (\text{C.37})$$

En el régimen de campo vectorial pesado al final de inflación, es decir $\hat{m}t \gg 1$, se emplean la forma asintótica de las funciones de Bessel

$$J_{\pm d}(\hat{m}t) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \hat{m}t}} \cos\left(\hat{m}t - \frac{\pi}{4}(1 \pm 2d)\right), \quad (\text{C.38})$$

$$J_{d-1}(\hat{m}t) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \hat{m}t}} \text{sen}\left(\hat{m}t - \frac{\pi}{4}(1 + 2d)\right), \quad (\text{C.39})$$

$$J_{1-d}(\hat{m}t) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \hat{m}t}} \text{sen}\left(\hat{m}t - \frac{\pi}{4}(1 - 2d)\right). \quad (\text{C.40})$$

Remplazando las anteriores expresiones en (C.17) y (C.21)

$$W = t^{-\frac{1}{w+1}} \sqrt{\frac{2}{\pi \hat{m}}} \left[\tilde{C}_1 \cos\left(\hat{m}t - \frac{\pi}{4}(1 + 2d)\right) + \tilde{C}_2 \cos\left(\hat{m}t - \frac{\pi}{4}(1 - 2d)\right) \right] \quad (\text{C.41})$$

y

$$\dot{W} + HW = \hat{m}t^{-\frac{1}{w+1}} \sqrt{\frac{2}{\pi \hat{m}}} \left[\tilde{C}_1 \text{sen}\left(\hat{m}t - \frac{\pi}{4}(1 + 2d)\right) + \tilde{C}_2 \text{sen}\left(\hat{m}t - \frac{\pi}{4}(1 - 2d)\right) \right]. \quad (\text{C.42})$$

Utilizando la definición para la densidad de energía y remplazando las expresiones (C.41) y (C.42) en

$$\rho_W \equiv \rho_{\text{cin}} + V_W = \frac{1}{2}(\dot{W} + HW)^2 + \frac{1}{2}\hat{m}W^2, \quad (\text{C.43})$$

la densidad de energía se escribe como

$$\rho_W = \frac{\hat{m}}{\pi} t^{-\frac{2}{1+w}} [\tilde{C}_1^2 + \tilde{C}_2^2 + 2\tilde{C}_1\tilde{C}_2 \cos(\pi d)]. \quad (\text{C.44})$$

Como $a \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}$ la amplitud de la densidad de energía escala de la forma:

$$\rho_W \propto t^{-\frac{2}{1+d}} \propto a^{-3}. \quad (\text{C.45})$$

En el caso de la presión, se emplean las expresiones (C.41) y (C.42) en

$$p_{\perp} \equiv \rho_{\text{cin}} - V_W = \frac{1}{2}(\dot{W} + HW)^2 + \frac{1}{2}\hat{m}W^2, \quad (\text{C.46})$$

la presión se escribe como

$$p_{\perp} = \frac{\hat{m}t^{-\frac{2}{1+w}}}{\pi} [\tilde{C}_1^2 \text{sen}(2\hat{m}t - \pi d) + \tilde{C}_2^2 \text{sen}(2\hat{m}t + \pi d) + 2\tilde{C}_1\tilde{C}_2 \text{sen}(2\hat{m}t)], \quad (\text{C.47})$$

donde en promedio, la presión es

$$p_{\perp} \approx 0. \quad (\text{C.48})$$

D

CONTRIBUCIÓN DEL CAMPO VECTORIAL AL ESPECTRO DE ζ

Tenemos que la contribución del campo vectorial el espectro de ζ está dado por

$$\mathcal{P}_{\zeta_w}(\mathbf{k}) = N_W^2 [\mathcal{P}_+ + (\hat{\mathbf{N}}_W \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 (\mathcal{P}_\parallel - \mathcal{P}_+)], \quad (\text{D.1})$$

donde $\hat{\mathbf{W}} = \hat{\mathbf{N}}_W \equiv \mathbf{N}_W/N_W$. Empecemos por determinar cómo es $\mathbf{N}_W = N_W^i$ en el escenario del curvatón vectorial. Asumiendo que los fluidos asociados al inflatón y al curvatón vectorial son no interactuantes, lo mostrado en la generación de la perturbación en la curvatura ζ en la subsección 2.4.2 es válido, con lo que

$$\zeta \approx \hat{\Omega}_W \zeta_W, \quad (\text{D.2})$$

donde $\hat{\Omega}_W = 3\rho_w/(3\rho_w + 4\rho_r)$. Recordemos que esto es válido en el momento en el que el inflatón ha decaído al baño térmico en forma de radiación. Ahora, la perturbación en la curvatura generada por el campo vectorial está dada por

$$\zeta_W = \frac{1}{3} \frac{\delta\rho_w}{\rho_{w0}}, \quad (\text{D.3})$$

en el momento que el modo cero del campo vectorial comienza las oscilaciones rápidas después de inflación, por lo que el campo se comporta como un fluido de materia con presión cero, $p_w \approx 0$ (ver apéndice C.2.2). Si la densidad de energía ρ_w es mucho menor que la densidad de energía total ($\rho_w \ll \rho$) podemos escribir

$$\hat{\Omega}_W \equiv \frac{3\Omega_W}{4 - \Omega_W} \sim \Omega_W = \frac{\rho_w}{\rho}. \quad (\text{D.4})$$

Si ahora se perturbar la densidad de energía alrededor de su valor homogéneo en el fondo de FRW resulta

$$\rho_w(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}\hat{m}(|\mathbf{W}|^2 + 2W_i\delta W_i + \delta W_i\delta W_i), \quad (\text{D.5})$$

donde es posible identificar la perturbación de ρ_w a primer y segundo orden

$$\text{a primer orden :} \quad \delta\rho_w = \hat{m}^2 W_i \delta W_i \quad (\text{D.6})$$

$$\text{a segundo orden :} \quad \delta\rho_w = \hat{m}^2 (W_i \delta W_i + \frac{1}{2} \delta W_i \delta W_i). \quad (\text{D.7})$$

En consecuencia, las expresiones para ζ_w a primer y segundo orden son

$$\text{a primer orden :} \quad \zeta = \frac{2}{3}\Omega_w \frac{W_i \delta W_i}{W^2}, \quad (\text{D.8})$$

$$\text{a segundo orden :} \quad \zeta = \frac{2}{3}\Omega_w \frac{W_i \delta W_i}{W^2} + \frac{1}{3}\Omega_w \frac{\delta W_i \delta W_j \delta_{ij}}{W^2}. \quad (\text{D.9})$$

Si comparamos los resultados (D.8) y (D.9), con el mostrado en (2.21) para el formalismo δN , podemos establecer las expresiones para N_W^i y N_W^{ij} :

$$N_W^i = \frac{2}{3}\Omega_w \frac{W_i}{W^2}, \quad (\text{D.10})$$

$$N_W^{ij} = \frac{2}{3}\Omega_w \frac{\delta_{ij}}{W^2}. \quad (\text{D.11})$$

Remplazando (D.10) en (D.1) se obtiene

$$\mathcal{P}_{\zeta_w} = \frac{4}{9} \frac{\Omega_w^2}{W^2} [\mathcal{P}_+ + (\hat{\mathbf{W}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 (\mathcal{P}_\parallel - \mathcal{P}_+)]. \quad (\text{D.12})$$

REFERENCIAS

- [1] E. Hubble, Proc. Nat. Acad. Sci. **15**, 168 (1929).
- [2] A. A. Penzias and R. W. Wilson, Astrophys. J. **142**, 419 (1965).
- [3] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press (2008).
- [4] A. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).
- [5] D. H. Lyth and A. R. Liddle, *The primordial density perturbation: cosmology, inflation and the origin of structure*, Cambridge University Press, (2009).
- [6] R.K. Sachs and A.M. Wolfe, Astrophys. J. **147**, 73 (1967).
- [7] D. H. Lyth, Phys. Rev. D **31**, 1792 (1985).
- [8] G. F. Smoot *et. al.*, Astrophys. J. **396**, L1 (1992).
- [9] D. N. Spergel *et. al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **148**, 175 (2003).
- [10] K. Dimopoulos and D. H. Lyth, Phys. Rev. D **69**, 123509 (2004).
- [11] D. H. Lyth and D. Wands, Phys. Lett. B **524**, 5 (2002).
- [12] T. Moroi and T. Takahashi, Phys. Lett. B **522**, 215 (2001)[Erratum-ibid. B **539**, 303 (2002)].
- [13] D. H. Lyth, C. Ungarelli, and D. Wands, Phys. Rev. D **67**, 023503 (2003).
- [14] K. Dimopoulos, D. H. Lyth and Y. Rodríguez, JHEP **0502**, 055 (2005).
- [15] D. H. Lyth, Phys. Lett. B **579**, 239 (2004).
- [16] Y. Rodríguez, Mod. Phys. Lett. A **20**, 2057 (2005).
- [17] T. Matsuda, Class.Quant.Grav. **21**, L11 (2004).

-
- [18] CERN's Large Hadron Collider homepage: <http://lhc.web.cern.ch/lhc/>
- [19] ATLAS Collaboration, Phys. Lett. B. **716**, 1 (2012).
- [20] CMS Collaboration, Phys. Lett. B. **716**, 30 (2012).
- [21] N. Jarosik *et. al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **192**, 14 (2011).
- [22] N. E. Groeneboom, L. Ackerman, I. K. Wehus, and H. K. Eriksen, Astrophys. J. **722**, 452 (2010).
- [23] N. E. Groeneboom and H. K. Eriksen, Astrophys. J. **690**, 1807 (2009).
- [24] C. Armendariz-Picon and L. Pekowsky, Phys. Rev. Lett. **102**, 031301 (2009).
- [25] ESA's PLANCK mission homepage: <http://planck.esa.int/>.
- [26] K. Dimopoulos, Phys. Rev. D **74**, 083502 (2006).
- [27] L. Ackerman, S. M. Carroll, and M. B. Wise, Phys. Rev. D **75**, 083502 (2007).
- [28] K. Dimopoulos, M. Karciauskas, D. H. Lyth, and Y. Rodriguez, JCAP **0905**, 013 (2009).
- [29] C. A. Valenzuela, Y. Rodríguez and J. P. Beltran, JCAP **1110**, 020 (2012).
- [30] D. Hanson, A. Lewis and A. Challinor, Phys. Rev. D **81**, 103003 (2010).
- [31] K. Dimopoulos, M. Karciauskas, and J. Wagstaff, Phys. Rev. D **81**, 023522 (2010).
- [32] A. Friedmann, Z. Phys. **10**, 377 (1922).
- [33] H. P. Robertson, Astrophys. J. **82**, 248 (1935).
- [34] A. G. Walker, Proc. London Math. Soc. **42**, 90 (1936).
- [35] D. H. Lyth and A. R. Liddle, Phys. Lett. **B**, 291 (1992).
- [36] D. H. Lyth and Y. Rodriguez, Phys. Rev. Lett. **95**, 121302 (2005).
- [37] L. P. Grishchuk, Phys. Rev. Lett. **70**, 2371 (1993).
- [38] Y. Nambu, Phys. Rev. D **78**, 044023 (2008).
- [39] D. H. Lyth and D. Seery, Phys. Lett. B **662**, 309 (2008).
- [40] D. H. Lyth, K. A. Malik, and M. Sasaki, JCAP **0505**, 004 (2005).
- [41] D. H. Lyth, JCAP **0712** 016 (2007).
- [42] C. G. Bohmer and D. F. Mota, Phys. Lett. B **663**, 168 (2008).

- [43] S. Shankaranarayanan, Int. J. Mod. Phys. D **18**, 2173 (2009).
- [44] S. Kanno, M. Kimura, J. Soda, and S. Yokoyama, J. Cosmol. Astropart. Phys. **08**, 034 (2008).
- [45] B. Himmetoglu, JCAP **1003**, 023 (2010).
- [46] S. M. Carroll, C.Y. Tseng, and M. B. Wise, Phys. Rev. D **81**, 083501 (2010).
- [47] C. Armendariz-Picon, JCAP **0709**, 014 (2007).
- [48] L. Boubekeur and D. H. Lyth , Phys. Rev. D **73** 021301(R) (2006).
- [49] J. Maldacena, JHEP **0305**, 013 (2003).
- [50] E. F. Bunn and M. J. White , Astrophys. J. **480**, 6 (1997).
- [51] E. Komatsu et. al., Astrophys. J. Suppl. Ser. **192**, 18 (2011).
- [52] J. Smidt *et. al.*, arXiv:1001.5026 [astro-ph.CO].
- [53] A. A. Starobinsky, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **42**, 124 (1985) [JETP Lett. **42**, 152 (1985)].
- [54] D. H. Lyth, JCAP **0511**, 006 (2005).
- [55] K. Kohri, D. H. Lyth, and C. A. Valenzuela-Toledo, JCAP **1002**, 023 (2010).
- [56] F. F. Parada B., *No gaussianidad primordial en la perturbación en la curvatura en el escenario del curvaton*, Bucaramanga, presentada en la Universidad Industrial de Santander para obtener el título de Físico, (2009).
- [57] M. S. Turner, Phys. Rev. D **28**, 1243 (1983).
- [58] R. H. Brandenberger, Nucl. Phys. B **245**, 328 (1984).
- [59] T. S. Bunch and P. C. W. Davies, Proc. R. Soc. Lond. A **360**, 117 (1978).
- [60] WMAP Collaboration, Astrophys. J. Suppl. **148**, 213 (2003).
- [61] K. Land and J. Magueijo, Phys. Rev. Lett. **95**, 071301 (2005).
- [62] T. R. Jaffe *et. al.*, Astrophys. J. **629**, L1 (2005).
- [63] M. S. Turner, and L. M. Widrow, , Phys. Rev. D **37** 2743 (1988).
- [64] L. M. Widrow, Reviews of Modern Physics **74** 775 (2002).
- [65] M. Giovannini, International Journal of Modern Physics D **13** 391 (2004).

-
- [66] K. Dimopoulos, Phys. Rev. D **76** 063506 (2007).
- [67] N. Bartolo, E. Dimastrogiovanni, S. Matarrese, and A. Riotto, JCAP **0910** 015 (2009).
- [68] S. Weinberg, *The Quantum Theory Fields*, Oxford University Press (2008).
- [69] A. Golovnev, V. Mukhanov and V. Vanchurin, JCAP **0806**, 009 (2008).
- [70] A. Maleknejad and M. M. Sheikh-Jabbari, Phys. Rev. D **84** 043515 (2011).
- [71] D. H. Lyth, JCAP 0511 006 (2005).
- [72] S. Yokoyama and J. Soda, JCAP **0808**, 005 (2008).
- [73] Carroll, S. M., Dulaney, T. R., Gresham, M. I., and Tam, H., Phys. Rev. D **79** 065011 (2009).
- [74] B. Himmetoglu, C. R. Contaldi, and M. Peloso, Phys. Rev. D **79**, 063517 (2009) .
- [75] B. Himmetoglu, C. R. Contaldi, and M. Peloso, Phys. Rev. Lett. **102**, 111301 (2009).
- [76] B. Himmetoglu, C. R. Contaldi, and M. Peloso, Phys. Rev. D **80**, 123530 (2009).