

**EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES DE  $S^n$  EN  $S^n$**

**CARLOS ALFONSO CASTRO TIRADO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULDADE DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2006**

**EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES DE  $S^n$  EN  $S^n$**

**CARLOS ALFONSO CASTRO TIRADO**

**Trabajo presentado para optar el título de  
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS**

**Director  
GILBERTO ARENAS DÍAZ**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2006**

A mi madre, mi padre, hermanos, sobrinos y demas familiares y amigos.

# Agradecimientos

Agradezco muy especialmente a:

- **Por supuesto a Dios, por darme la oportunidad de realizar mis sueños.**
- **A mis padres Sara Myriam y José Heli, por su inmenso apoyo incondicional, a mis hermanos José Manuel, Julio cesar, por la constante colaboración sin esperar nada a cambio.**
- **A mi director de proyecto profesor Gilberto, por su paciencia y esfuerzo, para con migó.**
- **A Juliana L., mis familiares y amigos, que me apoyaron en el transcurso de mi vida y mi carrera.**
- **A la UIS institución que me dio la oportunidad de escalar otro peldaño en mi formación como persona y como profesional.**

**TITLE:** TITLE<sup>1</sup>

**AUTHOR:** CARLOS ALFONSO CASTRO TIRADO<sup>2</sup>

**KEY WORDS:** spaces  $S^n$ , metrical spaces, homeomorphism, projection, plane.

## DESCRIPTION

The interest in the elaboration of this monograph is to show some topics that are not tackled at a basic course of the UIS Mathematics Teaching program. It is about the  $S^n$  spaces and their relation to the  $\mathbb{R}^n$  spaces by means of a homeomorphism, basing us on the reader's mathematical pre-knowledges, passing by the most basic concepts like its definition and illustrations until getting to different properties that this space possess.

The work consists of three chapters, the first one has previous concepts such as open sets, closed sets, metrical spaces, lineal spaces, etc., concepts that are used repeatedly in the course of the work. The second chapter is a complete and clear description of the  $S^n$  spaces, explaining and demonstrating the correspondence and direct relation that might have  $S^n$  to  $\mathbb{R}^n$  in general, and exploring the particular cases of  $S^1$  and  $S^2$  that are the ones we can visualize; we will relate  $S^2$  to the real world. For example the land surface can be represented on a plane by means of a projection, remaining a world map.

We will study some properties that might have the  $S^n$  and  $\mathbb{R}^n$  spaces more deeply in the chapter three, showing that it is a very broad field with many branches and important topics such as being closed set, properties in the sub-sets for studies in the mathematical analysis and in topology.

---

<sup>1</sup>Thesis

<sup>2</sup> FACULTY OF SCIENCES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.  
DIRECTOR GILBERTO ARENAS DÍAZ.

**TÍTULO:** EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES DE  $S^n$  EN  $S^{n+1}$

**AUTOR:** CARLOS ALFONSO CASTRO TIRADO<sup>2</sup>

**PALABRAS CLAVES:** Espacios  $S^n$ , espacios métricos, homeomorfismo, proyección, plano.

## DESCRIPCIÓN

El interés de la elaboración de esta monografía, es dar a conocer algunos temas que no se abordan en un curso básico de la carrera de Licenciatura de Matemáticas de la UIS. Trata acerca de los espacios  $S^n$  y su relación con los espacios  $\mathbb{R}^n$  mediante un homeomorfismo, basándonos en presaberes matemáticos del lector, pasando por los conceptos más básicos como su definición e ilustraciones, hasta llegar a diferentes propiedades que este espacio posee. Es así como este trabajo tiene como propósito, explicar, relacionar e ilustrar de la forma más clara y precisa dicho espacio, su relación con  $\mathbb{R}^n$ , así como caracterizar algunos espacios de funciones que se pueden definir sobre el mismo.

El trabajo consta de tres capítulos, en el primero contiene conceptos previos como conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, espacios métricos, espacios lineales, etc., conceptos que son usados repetidas veces en el transcurso del trabajo. El segundo capítulo es una descripción completa y clara de los espacios  $S^n$ , explicando y demostrando la correspondencia y relación directa que pueda tener  $S^n$  con  $\mathbb{R}^n$  en general y explorando los casos particulares de  $S^1$  y  $S^2$  que son los que podemos visualizar; relacionaremos a  $S^2$  con el mundo real. Como por ejemplo que la superficie de la tierra se puede representar en un plano por medio de una proyección, quedando así un mapamundi.

Estudiaremos más a fondo algunas propiedades que puedan tener los espacios  $S^n$  y  $\mathbb{R}^n$  en el capítulo tres. Mostrando que es un campo muy amplio con muchas ramas y temas importantes como ser conjunto cerrado, propiedades en los subconjuntos para estudios en el análisis matemático y en la topología.

---

<sup>1</sup>Tesis

<sup>2</sup> FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.  
DIRECTOR GILBERTO ARENAS DÍAZ.

# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>2</b>
1.1. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$	2
1.1.1. La noción de distancia	2
1.1.2. Ejemplos sobre $\mathbb{R}^n$	6
1.1.3. Convergencia en $\mathbb{R}^n$	9
1.2. Otras nociones importantes	11
1.2.1. Subespacios métricos densos	11
1.2.2. Espacios homeomorfos	12
1.3. Ecuaciones de la recta en $\mathbb{R}^n$	13
<b>2. Una descripción del espacio <math>S^n</math></b>	<b>15</b>
2.1. Esferas en $\mathbb{R}^n$	15
2.2. Proyección estereográfica de $S^n$ sobre $\mathbb{R}^n$	17
2.2.1. Proyección de $S^1$ en $\mathbb{R}^1$	19
2.2.2. Proyección de $S^2$ en $\mathbb{R}^2$	21
<b>3. Funciones del espacio <math>S^n</math> en <math>S^n</math></b>	<b>25</b>
3.1. $S^n$ como subespacio cerrado de $\mathbb{R}^{n+1}$	25
3.2. Algunos resultados sobre aplicaciones de $S^n$ en $\mathbb{R}^n$	26
3.3. Espacios de funciones definidas de $S^n$ en $S^n$	28
<b>Bibliografía</b>	<b>32</b>

# Introducción

El interés de la elaboración de esta monografía, es dar a conocer algunos temas que no se abordan en un curso básico de la carrera de Licenciatura de Matemáticas de la UIS. Trata acerca de los espacios  $S^n$  y su relación con los espacios  $\mathbb{R}^n$  mediante un homeomorfismo, basándonos en presaberes matemáticos del lector, pasando por los conceptos más básicos como su definición e ilustraciones, hasta llegar a diferentes propiedades que este espacio posee. Es así como este trabajo tiene como propósito, explicar, relacionar e ilustrar de la forma más clara y precisa dicho espacio, su relación con  $\mathbb{R}^n$ , así como caracterizar algunos espacios de funciones que se pueden definir sobre el mismo.

El trabajo consta de tres capítulos, en el primero contiene conceptos previos como conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, espacios métricos, espacios lineales, etc., conceptos que son usados repetidas veces en el transcurso del trabajo.

El segundo capítulo es una descripción completa y clara de los espacios  $S^n$ , explicando y demostrando la correspondencia y relación directa que pueda tener  $S^n$  con  $\mathbb{R}^n$  en general y explorando los casos particulares de  $S^1$  y  $S^2$  que son los que podemos visualizar; relacionaremos a  $S^2$  con el mundo real. Como por ejemplo que la superficie de la tierra se puede representar en un plano por medio de una proyección, quedando así un mapamundi.

Estudiaremos más a fondo algunas propiedades que puedan tener los espacios  $S^n$  y  $\mathbb{R}^n$  en el capítulo tres. Mostrando que es un campo muy amplio con muchas ramas y temas importantes como ser conjunto cerrado, propiedades en los subconjuntos para estudios en el análisis matemático y en la topología,

Queda la invitación a que descubran unos temas muy interesantes con algunas aplicaciones a diferentes campos y en el estudio de las matemáticas.

# Capítulo 1

## Preliminares

---

### 1.1. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

---

Se introducen a continuación conceptos matemáticos elementales: espacio métrico, espacio lineal, espacio normado, espacio con producto interno, bola, conjunto abierto, conjunto cerrado, conjunto convexo, subconjunto compacto, entre otros.

Con el fin de que la presente monografía sea en lo posible autocontenida, se tratará que los conceptos a utilizar sean definidos con anterioridad, aunque estos se puedan encontrar con diversos enfoques en una gran cantidad de textos y artículos, por ejemplo [1], [2], [4] y [5]; cuando se considere necesario se introducirá la demostración de los resultados, de lo contrario, se presentará una referencia en la cual se pueda encontrar dicha demostración. Se supondrá que el lector está familiarizado con los conceptos de funciones.

#### 1.1.1. La noción de distancia

Se inicia con la noción de distancia entre elementos de un conjunto.

**Definición 1.1.** *Un espacio métrico es un conjunto  $M$  no vacío de objetos (que llamaremos puntos) dotado de una función  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  (que llamaremos la métrica del espacio) que satisface las siguientes dos propiedades, cualesquiera sean los puntos  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  de  $M$ .*

1.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$ ;
2.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ .

No es difícil verificar, que sin importar cuales sean los puntos  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in M$ , se cumple  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ ,  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  y que  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ .

Es común encontrar en los textos, la notación  $(M, d)$  que denota el espacio  $M$  con su métrica  $d$ , si la métrica esta implícita o no hay peligro a confusión se denota simplemente  $M$ .

**Definición 1.2.** Sean dados un espacio métrico  $(M, d)$ , un elemento  $a \in M$  y un número real positivo  $r$ . El conjunto  $\{\mathbf{x} \in M : d(a, \mathbf{x}) < r\}$  se denomina bola con centro en  $a$  y radio  $r$  y se denota  $B(a; r)$ .

De forma equivalente se define la bola cerrada con centro en  $a$  y radio  $r$ , como

$$\bar{B} = \{\mathbf{x} \in M : d(a, \mathbf{x}) \leq r\}.$$

Esta noción será de gran utilidad para definir los conjuntos abiertos.

**Definición 1.3.** Sea  $C$  un conjunto contenido en  $\mathbb{R}^n$  y supongamos que  $a \in C$ . Entonces  $a$  se denomina **punto interior** de  $C$ , si existe una bola con centro en  $a$  que este totalmente contenida en  $C$ , en otras palabras si  $B(a; r) \cap C = B(a; r)$  ó  $B(a; r) \cap C^c = \emptyset$ , donde  $C^c$  denota el complemento de  $C$ ,  $C^c = \mathbb{R}^n \setminus C$ .

El conjunto de todos los puntos interiores de  $C$  se llama interior de  $C$ , y se denota  $C^\circ$ .

**Definición 1.4.** Un conjunto  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  es abierto si todos sus puntos son interiores, es decir  $C$  es abierto si, y solo si,  $C = C^\circ$ .

**Ejemplo.** En  $\mathbb{R}^2$  el círculo  $C$  de radio  $r$  no es abierto, los puntos que forman su borde no son puntos interiores.

$$C = \{\mathbf{x} \in M : d(a, \mathbf{x}) \leq r\}, \quad C \neq C^\circ.$$

**Teorema 1.5.** Los siguientes enunciados caracteriza la intersección y la unión de conjuntos abiertos.

(a) La reunión de una colección arbitraria de conjuntos abiertos es abierta.

(b) La intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es abierta.

**Definición 1.6.** Un subconjunto  $C$  del espacio  $\mathbb{R}^n$ , se dice que es cerrado, si el complemento  $\mathbb{R}^n \setminus C \equiv C^c$  es abierto.

**Teorema 1.7.** En el espacio  $\mathbb{R}^n$  se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. El conjunto vacío  $\emptyset$  y  $\mathbb{R}^n$  son cerrados.
2. Las intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados son cerradas.
3. Las uniones finitas de conjuntos cerrados son cerrados.

**Definición 1.8.** Si  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  entonces  $\mathbf{x}$  se llama punto de acumulación de  $C$  si cada  $n$ -bola  $B(\mathbf{x})$  contiene por lo menos un punto de  $C$  diferente de  $x$ .

**Definición 1.9.** Un espacio lineal sobre un campo<sup>1</sup>  $K$  es un grupo abeliano  $L$  en el cual está definida la operación de multiplicación de un elemento del campo por uno del grupo de manera que se satisfacen las siguientes axiomas:

$$L1 : \forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{x} \in L, \alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x};$$

$$L2 : \forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{x} \in L, (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x};$$

$$L3 : \forall \alpha \in K, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L, \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y};$$

$$L4 : \forall \mathbf{x} \in L, 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

En los axiomas anteriores el signo “+” señala la operación intrínseca de grupo y “1” es la unidad del campo  $K$ , que por lo general es el de los números reales o el de los complejos.

Si mediante “ $\vec{0}$ ” se representa el elemento neutro del grupo, se puede verificar sin dificultad que cualesquiera que sean  $\alpha \in K$  y  $\mathbf{x} \in L$ , se tiene que  $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$  y  $0 \cdot \mathbf{x} = \vec{0}$ .

**Definición 1.10.** Un subconjunto  $C$  de un espacio lineal  $L$  sobre los números reales es llamado convexo si,  $\forall x, y \in C$  se tiene  $z = (1 - t)x + ty \in C, \forall t \in [0, 1]$ .

En otras palabras, en un conjunto convexo se puede ir de cualquier punto a cualquier otro sobre una línea recta, sin salirse del conjunto.

A continuación definiremos un concepto muy importante, el cual nos sirve para definir la longitud de un vector en un espacio o la distancia de un elemento hasta el elemento neutro del espacio.

**Definición 1.11.** Se dice que un espacio lineal  $L$  sobre los números reales es normado si existe una función

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : L &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\longmapsto \|\mathbf{x}\|, \end{aligned}$$

que satisface los siguientes axiomas:

---

<sup>1</sup>El lector que quiera tener una idea más amplia de la definición de campo, puede remitirse a [5].

$$N1 : \|\mathbf{x}\| = 0 \text{ si } \mathbf{x} = \mathbf{0};$$

$$N2 : \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

$$N3 : \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|, \lambda \in \mathbb{R}$$

Por las condiciones que definen la norma se tiene que  $\|\mathbf{x}\|$  es un número no negativo y en consecuencia de  $N1$  se tiene que  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ .

**Definición 1.12.** De un conjunto  $L$  que esta revestido simultáneamente de la estructura métrica y lineal diremos que es un espacio métrico lineal.

**Definición 1.13.** Se dice que un espacio metricolineal  $L$  con métrica  $d$  es concordante si se satisfacen las siguientes condiciones:

$$C1 : \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{z}); \quad (\text{invariabilidad con respecto a desplazamiento}).$$

$$C2 : \forall \alpha \in k, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L, d(\alpha\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) = |\alpha| d(\mathbf{x}, \mathbf{y}); \quad (\text{semihomogeneidad de la métrica}).$$

En todo espacio métrico lineal concordante las bolas son conjuntos convexos, la demostración se puede ver en [4].

Otra noción que es de gran importancia es la de producto interior.

**Definición 1.14.** Se denomina producto escalar o interno en el espacio lineal  $L$ , sobre el campo  $\mathbb{R}$  la función

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : L &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longmapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \end{aligned}$$

que satisface los siguientes axiomas:

$$E1 : \forall \mathbf{x} \in L, \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0;$$

$$E2 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \vec{0};$$

$$E3 : \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L, \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle;$$

$$E4 : \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L, \langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Fácilmente se verifica que  $\langle \vec{0}, \mathbf{x} \rangle = 0$  (y por lo tanto  $\langle \vec{0}, \vec{0} \rangle = 0$ ). Esto implica en virtud de  $E2$ , que  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$  si y solo si  $\mathbf{x} = \vec{0}$ . En consecuencia, según  $E1$ , si  $\mathbf{x}$  es diferente a  $\vec{0}$  entonces  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ .

En los espacios lineales con producto interno tiene lugar el siguiente resultado.

**Teorema 1.15** (Desigualdad de Buñakovski<sup>2</sup>). Sea  $L$  un espacio lineal con producto escalar, entonces, cualesquiera sean los elementos  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$  se tiene:

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle. \quad (1.1)$$

Una demostración de este teorema se puede encontrar, por ejemplo, [1] y [2].

**Observación 1.16.** En los espacios lineales reales (espacios lineales sobre los números reales) se puede introducir una norma mediante la fórmula

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}, \quad (1.2)$$

lo cual no es difícil verificar.

### 1.1.2. Ejemplos sobre $\mathbb{R}^n$

Se denotará, como se acostumbra, los elementos  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , como  $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n} = (x_1, \dots, x_n)$ .

Consideremos la familia de espacios métricos  $(\mathbb{R}^n, d_p)$ , en donde

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty) \quad (1.3)$$

y

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max \|x_i - y_i\|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.4)$$

La demostración de que la métrica esta bien definida puede verse, por ejemplo, en [1] y [4].

$(\mathbb{R}^n, d)$  puede dotarse de la estructura lineal definiendo la suma entre  $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $\mathbf{y} = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$  como  $(x_i)_{1 \leq i \leq n} + (y_i)_{1 \leq i \leq n} = (x_i + y_i)_{1 \leq i \leq n}$  y la multiplicación por escalar entre  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$  como  $\alpha(x_i)_{1 \leq i \leq n} = (\alpha x_i)_{1 \leq i \leq n}$ , es decir, se tiene que  $(\mathbb{R}^n, d_p)$  es una familia de espacios métricolineales (espacios revestido simultáneamente de la estructura métrica y lineal). La métrica en  $(\mathbb{R}^n, d_p)$  se dice que es euclidiana cuando  $p = 2$ . Es obvio que cuando  $n = 1$  la familia queda reducida a  $\mathbb{R}$  y su métrica que se denota  $d_p(x, y) = |x - y|$ , se denomina métrica ordinaria.

Se puede demostrar sin dificultad que todo espacio lineal normado se convierte en métrico mediante la fórmula  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ . Puede surgir la siguiente pregunta. ¿En un espacio métrico lineal cualquiera la métrica puede generar una norma?. La respuesta es verdadera para el caso de espacios métricolineales concordantes, la demostración puede verse, por ejemplo en [1].

---

<sup>2</sup>En honor al matemático ruso Viktor Iakovlevich Buñakovski, (1804-1889).

No es complicado demostrar que la familia  $(\mathbb{R}^n, d_p)$  es concordante, y en virtud de la observación 1.16 la familia de métricas  $d$  genera una familia de  $p$ -normas mediante la fórmula

$$\|\mathbf{x}\|_p \equiv d_p(\vec{0}, \mathbf{x}). \quad (1.5)$$

Por otra parte, el espacio lineal real  $\mathbb{R}^n$  se puede dotar del producto escalar o interior entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  que pertenece a  $\mathbb{R}^n$  mediante la ecuación

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right),$$

llamado el producto escalar estándar. Si introducimos una norma mediante la fórmula (1.2) se tiene que

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

Esta norma coincide exactamente con la generada por la métrica  $d_2$  en  $\mathbb{R}^n$ , que se definió en (1.5), lo cual puede verificarse sin dificultad.

Como resultado de la ecuación (1.5) y las familias de métricas definidas en las ecuaciones (1.3) y (1.4) se tiene que en general sobre  $\mathbb{R}^n$  se puede introducir las normas,

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (p\text{-norma})$$

y

$$\|\mathbf{x}\|_{\text{máx}} \equiv \|\mathbf{x}\|_{\infty} = \text{máx}\{|x_i| : i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (\text{norma del máximo}).$$

Es necesario comprobar que  $\|\cdot\|_p$  es efectivamente una norma. La primera propiedad para que sea inmediatez, resta probar propiedad relacionada con la desigualdad triangular, el cual se basa en las dos famosas desigualdades que se enuncian a continuación, cuyas demostraciones se pueden encontrar por ejemplo en [1] y [3].

**Teorema 1.17** (desigualdad de Holder<sup>3</sup>). Sean  $a_j, b_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) y  $p, q \in \mathbb{R}^+$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$ , entonces,

$$\left( \sum_{j=1}^n a_j \cdot b_j \right) \leq \left( \sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Teorema 1.18** (desigualdad de Minkowski<sup>4</sup>). Sea  $a_j, b_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) y  $p \geq 1$ , entonces

$$\left( \sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{j=1}^n |b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

<sup>3</sup>En honor al matemático alemán Otto Ludwig Holder, (1859-1937).

<sup>4</sup>En honor al matemático ruso Hermann Minkowski, (1864-1909)

En términos de las  $p$ -normas se tiene que una  $p$ -bola con centro en  $a$  y radio  $r > 0$  sería

$$B_p(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}.$$

En la Figura 1.1 se presenta en  $\mathbb{R}^2$  las  $p$ -bolas cerradas  $\overline{B}_p(\vec{0}; 1)$  definidas por las normas  $\|\cdot\|_p$ . Obsérvese que la bola correspondiente a la norma  $\|\cdot\|_1$  es un rombo de centro  $\vec{0}$  y radio  $\varepsilon$ ; la bola correspondiente a la norma  $\|\cdot\|_2$  (norma euclídea) es una circunferencia con centro en  $\vec{0}$  y radio  $\varepsilon$ ; la correspondiente a la norma  $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{\text{máx}}$  es un cuadrado de centro  $\vec{0}$  y radio  $\varepsilon$ , mientras que las correspondientes a las  $p$ -normas, con  $2 < p < \infty$ , son figuras intermedias entre la circunferencia y el cuadrado<sup>5</sup>.

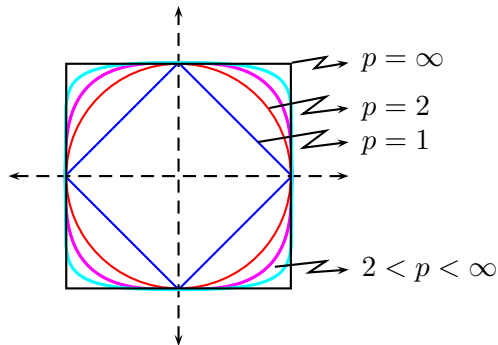


Figura 1.1: Gráfica de las bolas con cada  $p$ -norma.

La figura sugiere que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty. \quad (1.6)$$

Puede demostrarse que esta ecuación se satisface.

En efecto,  $|x_i| \leq \|x\|_p$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Luego  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$ , para todo  $p$ . Por otra parte,

$$\left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty. \quad (1.7)$$

Es decir,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \quad (1.8)$$

como  $\lim_{p \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{p}} = 1$  se concluye la ecuación (1.6).

**Definición 1.19.** Dos normas  $\|\cdot\|_\alpha$  y  $\|\cdot\|_\beta$  son equivalentes si existen constantes  $\lambda, \mu > 0$ , tales que

$$\lambda \|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq \mu \|x\|_\beta.$$

<sup>5</sup>Vease con más detalle en [4]

Lo anterior nos permite deducir el siguiente teorema.

**Teorema 1.20.** Si  $\|\cdot\|$  es una norma en  $\mathbb{R}^n$  y existen constantes  $\alpha, \beta > 0$ , tales que

$$\alpha \|x\|_{\infty} \leq \|x\| \leq \beta \|x\|_{\infty}.$$

Entonces, todas las normas en  $\mathbb{R}^n$  son equivalentes.

### 1.1.3. Convergencia en $\mathbb{R}^n$

Se presentan algunas definiciones y resultados sobre convergencias en espacios métricos y normados, que gracias a lo que se sabe en particular en  $\mathbb{R}$  también son ciertos en  $\mathbb{R}^n$ , en consecuencia del Teorema 1.19, con cualquiera de las normas o métricas definidas.

Sea  $(M, d)$  un espacio métrico y  $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  una sucesión. La sucesión  $(\mathbf{x}_n)$  se dice que converge a  $\mathbf{x} \in M$ , simbólicamente  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ , si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) < \varepsilon. \quad (1.9)$$

La definición anterior puede darse también para espacios normados, quedando de la siguiente forma

$$\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}, \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| < \varepsilon.$$

### Espacios métricos completos

Sea  $(M, d)$  un espacio métrico, una sucesión  $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de puntos de  $M$  se dice una **sucesión de Cauchy** en  $(M, d)$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall n, m \geq N.$$

El espacio métrico  $(M, d)$  se dice que es **completo** si, toda sucesión de Cauchy  $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ , converge a algún  $\mathbf{x} \in M$ .

**Teorema 1.21.** Si un espacio es completo y tiene un subespacio cerrado entonces también ese subespacio es un espacio completo.

Los anteriores conceptos tienen sus respectivas versiones en  $\mathbb{R}^n$ .

Dado que como se dijo antes en  $\mathbb{R}^n$  todas las normas son equivalentes, consideraremos en general la norma euclidiana.

**Teorema 1.22.** Sea  $(\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{in})$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Entonces  $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  si y sólo si  $x_{ji} \rightarrow x_j$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$ . En particular,  $\mathbb{R}^n$  es completo dado que  $\mathbb{R}$  es completo.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ )  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \|x_i - x\| < \varepsilon$ , como  $|x_{ji} - x_j| \leq \|x_i - x\|$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$  de donde se tiene que  $|x_{j1} - x_j| < \varepsilon, \forall n \geq N$ . esto implica que  $x_{j1} \rightarrow x_j$ .

$\Leftarrow$ ) Sea  $\varepsilon > 0$ . Tomemos  $N \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq N$  y  $j = 1, 2, \dots, n$

$$|x_{j1} - x_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{j}}.$$

Ahora, como estamos considerando la métrica euclidiana.

$$\|x_i - x\| = \left( \sum_{j=1}^n |x_{j1} - x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

para  $n \geq N$ , y así  $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}$ . Esta afirmación implica que  $(\mathbf{x}_i)$  es una sucesión de Cauchy siempre y cuando  $(x_{ji})$  también lo sea para todo  $j = 1, 2, \dots, n$ .  $\square$

**Teorema 1.23.** Sea  $X$  y  $Y$  espacios métricos. Una función  $f : X \rightarrow Y$  se dice que es continua en  $\mathbf{x}_0 \in X$  si  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$ .

$f$  se dice que es continua sobre  $\Omega \subset X$  si es continua en cada punto  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ .

Mas precisamente se tiene:

**Definición 1.24.** Sea  $(X, d_x)$  y  $(Y, d_y)$  dos espacios métricos, una función  $f : X \rightarrow Y$  es continua en  $\mathbf{x}_0 \in X$  precisamente si.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  (depende de  $x_0$  y de  $\varepsilon$ ) :  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in X; d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta$  implica que  $d_y(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_0)) < \varepsilon$ .

**Teorema 1.25.** Sea  $(L, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $(x_n) \subset L$  una sucesión que converge a  $x \in L$ . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n\| = \|\mathbf{x}\|,$$

es decir, la norma es continua.

*Demostración.* Por la desigualdad triangular se tiene que  $|\|\mathbf{x}_n\| - \|\mathbf{x}\|| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|$  y por la definición de convergencia se tiene que  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$ , por tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n\| = \|\mathbf{x}\|$ .  $\square$

En la continuidad no se espera que fijado  $\varepsilon$ , el mismo valor de  $\delta$  sirva para cada punto de  $\mathbf{x}$ , sin embargo puede ocurrir, cuando ocurre, la función es uniformemente continua.

**Definición 1.26.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios métricos y  $\Omega \subset X$ . Una función  $f : \Omega \rightarrow Y$  se dice que es uniformemente continua si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ (depende solo de } \varepsilon) : \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega; d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \text{ implica que } d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_0)) < \varepsilon.$$

**Ejemplo.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $\mathbf{x} \in X$  y  $f : X \rightarrow Y$ . La función  $f(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  es uniformemente continua. En efecto, si tomo  $\varepsilon > 0$  y considero  $\delta = \varepsilon$  y tomo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$  con  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon$ , entonces

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| = |d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - d(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0)| < d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \varepsilon.$$

Lo cual es garantizado por la desigualdad triangular, (dado que  $d$  es métrica).

En particular, si  $X = \mathbb{R}^n$ , se tiene el siguiente resultado, el cual no es difícil de demostrar.

**Teorema 1.27.** Sea  $X$  un espacio métrico. Una función  $f = (f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  es (uniformemente) continua si cada función  $f_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) es (uniformemente) continua.

**Teorema 1.28.** Sean  $X$  un espacio métrico y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas. Entonces las funciones  $f + g$ ,  $f \cdot g$  y  $f - g$ , son también continuas.

**Teorema 1.29.** Sean  $X, Y$  y  $Z$  espacios métricos,  $f : X \rightarrow Y$  continua en  $x_0 \in X$  y  $g : Y \rightarrow Z$  continua en  $f(x_0) \in Y$ . Entonces  $g \circ f$  es continua en  $x_0 \in X$ .

**Definición 1.30.** Sean  $f, f_n : X \rightarrow Y$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) funciones definidas entre los espacios métricos  $X$  y  $Y$ . La sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $f$  y se denota  $f_n \rightrightarrows f$ , si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \text{ (depende exclusivamente de } \varepsilon) \text{ se cumple que } d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

El siguiente teorema es una consecuencia de la definición anterior.

**Teorema 1.31.** Asumiendo las condiciones mencionadas en la Definición 1.26, si  $f_n$  es continua para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $f_n \rightrightarrows f$ , entonces  $f$  también es continua.

## 1.2. Otras nociones importantes

### 1.2.1. Subespacios métricos densos

**Definición 1.32.** En un espacio métrico  $M$ , si ciertas subconjuntos verifican  $A \subset S \subseteq \bar{A}$ , donde  $\bar{A}$  es la adherencia de  $A$ , entonces se dice que  $A$  es denso en  $S$ .

**Ejemplo:** El conjunto  $\mathbb{Q}$  de los números racionales es denso en  $\mathbb{R}$ .

Podemos observar que el ser denso da la impresión de no dejar espacios libres entre sus elementos, o que por más que acerquemos dos elementos cualesquiera siempre voy a encontrar más elementos en medio de ellos.

**Teorema 1.33.** Si  $A$  es denso en  $S$  y  $S$  es denso en  $T$  entonces  $A$  es denso en  $T$ .

### 1.2.2. Espacios homeomorfos

Sean  $X$  e  $Y$  espacios métricos,  $f : X \rightarrow Y$  una biyección y  $g : Y \rightarrow X$  su función inversa, si  $f$  y  $g$  son ambas continuas, entonces  $f$  se dice que es un *Homeomorfismo* y los espacios  $X$  e  $Y$  se llaman homeomorfos.

Otra manera de entenderlo,

$U$  es un subconjunto abierto de  $X$  si y solo si  $f(U)$  es un subconjunto abierto de  $Y$ <sup>6</sup>.

La anterior definición puede dar la impresión de que solo sirve para espacios  $X$  y  $Y$  con las mismas características, pero es fácil de comprobar, si se tiene una correspondencia biunívoca, como es el caso en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo.**  $\mathbb{R}$  y el intervalo  $(-1, 1)$  con la métrica euclidiana son homeomorfos mediante el siguiente homeomorfismo.  $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$  definido por

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Observe que  $f$  tiene como inversa a  $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = \frac{x}{1 - |x|}.$$

Podemos probar que existe cada correspondencia biúnica.

La prueba es fácil, se dará la idea de como hacerlo y se deja como ejercicio para el lector su prueba formal, ya que este no es el objetivo del tema.

Para  $f$ , si empezamos calculando  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+|x|} = -1$  y si vamos disminuyendo el valor de  $x$  va recorriendo el intervalo, hasta llegar a  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+|x|} = 1$ . De la misma manera se hace con  $g$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{1-|x|} = -\infty$ , es decir viene desde  $-\infty$  pasando por toda la recta hasta  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-|x|} = \infty$ .

---

<sup>6</sup>  $f : X \rightarrow Y$  es continua, si se tiene  $f(U)$  es un subconjunto abierto de  $Y$  implica  $U$  sea un subconjunto abierto de  $X$ .

Miraremos brevemente otro ejemplo el cual nos sirve para un análisis posterior muy interesante.

Consideremos  $\mathbb{R}^2$  con la métrica euclídea, y el cuadrado abierto  $(-1, 1) \times (-1, 1)$ . Se puede construir el siguiente homeomorfismo  $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$  definido por

$$f(x, y) = \left( \frac{x}{1 + |x|}, \frac{y}{1 + |y|} \right).$$

Por ejemplo anterior, ya se tiene la idea de cual es su inversa

$$g : (x, y) = \left( \frac{x}{1 - |x|}, \frac{y}{1 - |y|} \right)$$

Para verificarlo, la idea es la misma que la anterior, se empieza dándole valores a  $x$  y dejando fijo a  $y$ , digamos cuando  $y = 0$ , entonces se tendrá el mismo ejemplo anterior, luego  $y$  empezara tomando los otros valores de  $(-1, 1)$  y se empieza a rellenar dicho cuadrado, utilizando conceptos de topología<sup>7</sup>, como por ejemplo de que un espacio se puede deformar como si fuera un caucho(sin romper o cortar) y preservar las operaciones, se sabe que este cuadrado es homeomorfo al interior del círculo y este a su vez a cualquier otro subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , así por la propiedad transitiva,<sup>8</sup>  $\mathbb{R}^2$  es homeomorfo a cualquier subconjunto abierto de si mismo.

**Observación 1.34.** Siguiendo el mismo procedimiento se puede generalizar,  $\mathbb{R}^n$  es homeomorfo a cualquier subconjunto abierto de él mismo.

---

### 1.3. Ecuaciones de la recta en $\mathbb{R}^n$

---

En  $\mathbb{R}^n$  se estudian diversos temas y para cada uno se debe contar con las herramientas necesarias para trabajar. En la presente sección presentaremos unas herramientas que usaremos en un estudio posterior, como lo son las ecuaciones vectoriales y las ecuaciones paramétricas para rectas en  $\mathbb{R}^n$ . Describiremos brevemente el procedimiento para su obtención.

Sabemos que una recta esta determinada por puntos, y nos interesa saber de que forma la determinan; saber cuales puntos pertenecen a ella y cuales no, en si, saber que ecuación describe los puntos de la recta. Existen varias formas de representar la ecuación de una recta, dos de estas formas se describen a continuación.

Considere la recta  $\mathcal{L}$  en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $A$  un punto de  $\mathcal{L}$  y  $\bar{v}$  un vector paralelo a  $\mathcal{L}$ <sup>9</sup>. Un punto  $P$  diferente de  $A$ , sea  $\overrightarrow{AP} = P - A$ , entonces  $P$  estará en  $\mathcal{L}$  si y sólo si  $\overrightarrow{AP} \parallel \bar{v}$  o sea, si y sólo si

<sup>7</sup>Si quiere conocer estos detalles sobre estos conceptos dirijase por ejemplo a [9] y [12]

<sup>8</sup>Gracias a que el homeomorfismo es una relación de equivalencia, la prueba es fácil y se deja como ejercicio

<sup>9</sup>Dos vectores son paralelos si sus direcciones son paralelos o si un vector dirección es combinación lineal del otro.

$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$  siendo  $t$  cualquier escalar que pertenece a  $\mathbb{R}$ . Empleando vectores coordenados, la ecuación  $\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$  se puede escribir como

$$P - A = t\vec{v} \quad \text{ó} \quad P = A + tV, \quad (1.10)$$

esta última ecuación es conocida como ecuación vectorial de la recta.

Dado que  $P, A$  y  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , cada uno es de la forma  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  y  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , si de la ecuación (1.10) igualamos componente a componente se obtiene lo que se conoce como la forma paramétrica de una recta, esto es

$$x_1 = a_1 + tv_1, \quad x_2 = a_2 + tv_2, \quad \dots, \quad x_n = a_n + tv_n.$$

Observemos que basta con darle un valor a  $t$  para obtener un punto específico  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  que pertenezca a la recta.

# Capítulo 2

## Una descripción del espacio $S^n$

### 2.1. Esferas en $\mathbb{R}^n$

La  $n$ -esfera unitaria  $S^n$  es el conjunto de todos los puntos en  $\mathbb{R}^{n+1}$  de longitud la unidad, es decir:

$$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{x}\| = 1\}, \quad n \geq 1.$$

En este caso, la norma que se está considerando es la euclídea

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)}.$$

Note que  $S^n$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , no de  $\mathbb{R}^n$ . Observe también que  $\mathbb{R}^n$  se puede considerar como el subespacio de  $\mathbb{R}^{n+1}$  consistente de todos los puntos que tienen coordenadas final 0; es por esto que más adelante se denota como  $(\mathbf{x}, x_{n+1})$  los elementos de  $\mathbb{R}^{n+1}$  donde  $\mathbf{x}$  es un elemento de la forma  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

En el caso en el cual  $n = 1$  se tiene que  $S^1$  está dada por

$$S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\},$$

que claramente es una circunferencia en  $\mathbb{R}^2$ .

Cuando  $n = 2$ ,  $S^2$  representa una esfera en  $\mathbb{R}^3$ , esto es

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Observe que en estos casos,  $S^1$  y  $S^2$  son la frontera de las bolas  $B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1)$  y  $B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}, 1)$  con la norma euclídea en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente. Es de aclarar que en este caso,  $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3,$$

$$B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

y

$$B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}, 1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}.$$

En general,

$$S^n = \partial B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n+1}}, 1) \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

En la Figura 2.1 se presentaron gráficamente  $S^1$  y  $S^2$ , que son los casos que se pueden visualizar; el caso  $S^0$  no es muy llamativo ya que son únicamente dos puntos sobre  $\mathbb{R}$ ,  $(-1)$  y  $(1)$ , es por esto que en la definición se considera  $n \geq 1$ .

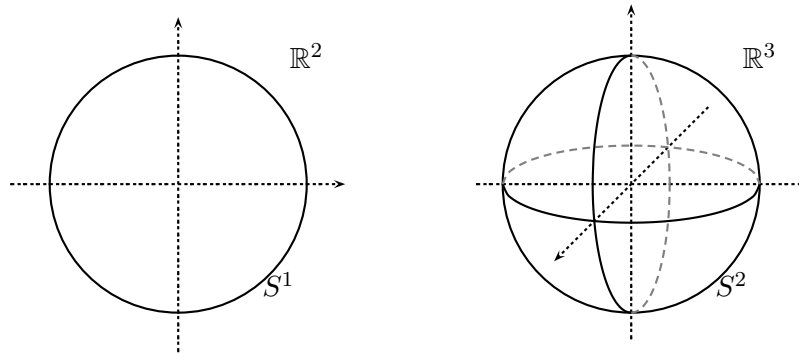


Figura 2.1: Representación gráfica de  $S^1$  y  $S^2$ .

Como se dijo en la definición de  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$  la norma que se está considerando es la euclídea. Si se considera, por ejemplo la 1-norma,  $S^1$  y  $S^2$  toman la forma de un rombo y un octaedro, respectivamente.

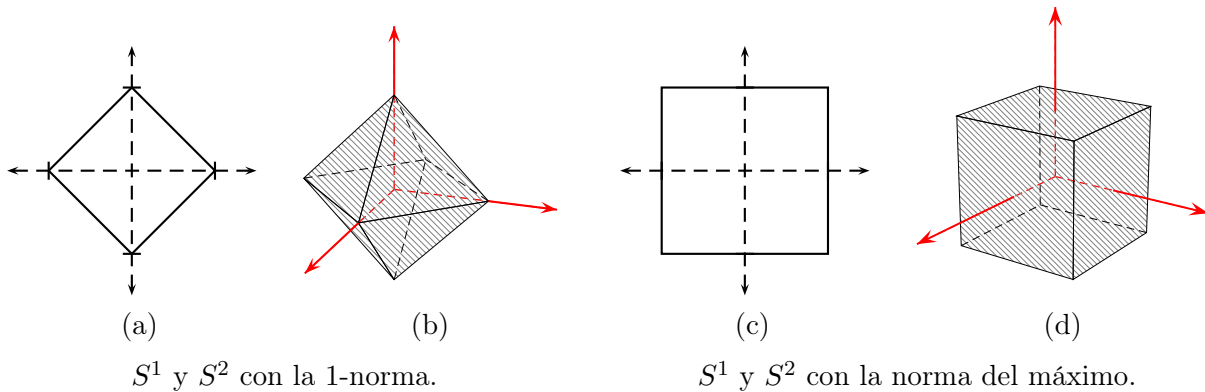


Figura 2.2:

Si la norma que consideramos es la del máximo ( $\|x\|_{\text{máx}} = \max\{|x_i|, i = 1, 2, \dots, n\}$ ),  $S^1$  y  $S^2$  toma la forma de un cuadrado y un cubo, respectivamente.

Observe la relación que existe entre las figuras 1.1 vista en preliminares y 2.2(a) y 2.2(c) anteriores.

Dado que  $S^2$  es un modelo matemático natural del globo terraqueo<sup>1</sup>, el estudio de  $S^2$  (y en general de  $S^n$ ) tiene una gran cantidad de aplicaciones prácticas: navegación, astronomía, cartografía, mecánica, entre otras. Dado que en la práctica las cosas en el espacio se plasman en el plano, debemos tener un procedimiento que haga esto de la mejor forma, es aquí donde se utiliza el concepto de proyección. El concepto de proyección que se estudiará será la proyección estereográfica (existen otros tipos de proyecciones utilizadas generalmente en la cartografía, las cuales no serán objeto de nuestro estudio).

Iniciamos de forma general, estudiando la proyección de  $S^n$  sobre  $\mathbb{R}^n$ , y después se presentarán los casos de  $S^1$  sobre  $\mathbb{R}$  y  $S^2$  sobre  $\mathbb{R}^2$  como casos particulares.

## 2.2. Proyección estereográfica de $S^n$ sobre $\mathbb{R}^n$

Se deduce a continuación la función que define la proyección estereográfica, las características de dicha función nos ayudan para concluir que  $S^n$  es homeomorfo  $\mathbb{R}^n$ .

Sea el espacio  $S^n$ , definiremos su punto de proyección<sup>2</sup> llamado polo norte, denotado por  $N = (0, \dots, 0, 1)$  que pertenezca a  $S^n$ , entonces aunque  $N$  no será incluido en el homeomorfismo (observaremos después que ese punto no tiene su correspondencia definida), demostraremos que  $S^n \setminus \{N\}$  es homeomorfo con  $\mathbb{R}^n$ . También definiremos los elementos en  $\mathbb{R}^n$  como,  $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , el vector nulo como  $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0) \equiv \mathbf{0}$ , los elementos de  $\mathbb{R}^n$  por  $(\mathbf{x}, x_{n+1})$  y llamaremos la recta de proyección a la recta que pasa por el punto de proyección y un punto el cual queremos conocer su proyección.

Empezaremos construyendo una aplicación continua que asocia a cada  $(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in S^n \setminus \{N\}$ , un único elemento,  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ , esto es

$$\begin{aligned} f: S^n \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\mathbf{x}, x_{n+1}) &\longmapsto \tilde{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

Consideremos dos puntos que pertenezcan a la recta de proyección y así hallar su vector dirección. El primer punto sería  $N$  y el segundo  $Q = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = (\mathbf{x}, x_{n+1})$ . Obtengamos así que  $\vec{NQ} = Q - N = (\mathbf{x}, x_{n+1} - 1)$ .

<sup>1</sup>Véase en [13]

<sup>2</sup>Es el punto que siempre debe ser colineal con las proyecciones o correspondencias.

Reemplazando en la ecuación vectorial de una recta, quedaría.

$$\vec{r}(t) = N + t\overrightarrow{NQ} = (\mathbf{0}, 1) + t(\mathbf{x}, x_{n+1} - 1) = (t\mathbf{x}, 1 + t(x_{n+1} - 1)) \quad (2.1)$$

Como queremos que esta recta me diga el punto que toque a  $\mathbb{R}^n$ , quiere decir que la última componente de dicho punto es cero, esto implica que

$$1 + t(x_{n+1} - 1) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{1 - x_{n+1}}$$

Reemplazamos en la ecuación (2.1), cuando su última componente es cero, se tienen que,

$$\tilde{\mathbf{x}} = t\mathbf{x} = \left( \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \frac{x_2}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

Nos falta ahora definir la aplicación inversa denotada por  $g$ :

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^n &\longrightarrow S^n \setminus \{N\} \\ \mathbf{x} &\longmapsto \tilde{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

para completar la demostración, vamos a demostrar que un punto cualquiera de  $\mathbb{R}^n$ , le corresponda un único punto en  $S^n \setminus \{N\}$ .

Ya conocemos la ecuación vectorial, usaremos de nuevo a  $N$  y un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\overrightarrow{N\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, 0) - N = (\mathbf{x}, 0) - (\mathbf{0}, 1) = (\mathbf{x}, -1).$$

De esta forma, se obtiene que la ecuación vectorial de la recta es:

$$\vec{r}(t) = N + t\overrightarrow{N\mathbf{x}} = (\mathbf{0}, 1) + t(\mathbf{x}, -1) = (t\mathbf{x}, 1 - t). \quad (2.2)$$

Como quiero que este punto pertenezca a  $S^n$  su norma debe ser igual a 1, entonces

$$\|(t\mathbf{x}, 1 - t)\|^2 = 1.$$

Desarrollando convenientemente se tiene<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} t^2\|\mathbf{x}\|^2 + (1 - t)^2 &= 1, \\ t^2\|\mathbf{x}\|^2 + 1 - 2t + t^2 &= 1, \\ t^2\|\mathbf{x}\|^2 - 2t + t^2 &= 0, \\ t(t\|\mathbf{x}\|^2 - 2 + t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para que la ecuación (2.3) sea cero algunos de los factores debe ser cero, pero ya se sabe que cuando  $t = 0$ , es el punto  $N$ , es decir nos queda otra opción

$$t\|\mathbf{x}\|^2 - 2 + t = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{2}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1}. \quad (2.4)$$

---

<sup>3</sup> $\|(t\mathbf{x}, 1 - t)\|^2 = \|tx_1, tx_2, \dots, tx_n, 1 - t\|^2 = t^2x_1^2 + t^2x_2^2 + \dots + t^2x_n^2 + (1 - t)^2 = t^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + (1 - t)^2 = t^2\|\mathbf{x}\|^2 + (1 - t)^2$

Reemplazamos (2.3) en (2.2), entonces

$$\hat{\mathbf{x}} = t\mathbf{x} = \left( \frac{2\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1}, 1 - \frac{2}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1} \right) = \left( \frac{2x_1}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1}, \frac{\|\mathbf{x}\| - 1}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1} \right).$$

Geoméricamente,  $f(x)$  es el punto en que la semirecta  $N\mathbf{x} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  corta el hiperplano,  $x_{n+1}$  lo cual identificamos con  $\mathbb{R}^n$ . De esta forma queda completa y bien definida la correspondencia, lo que quiere decir que acabamos de demostrar que siempre existe una función y su inversa, de  $S^n \setminus \{N\}$  en  $\mathbb{R}^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  definida de la siguiente forma  $f : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto \left( \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \frac{x_2}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

y su función inversa  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{N\}$  tal que

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \mapsto \left( \frac{2y_1}{\|\mathbf{y}\|^2 + 1}, \frac{2y_2}{\|\mathbf{y}\|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{\|\mathbf{y}\|^2 + 1}, \frac{\|\mathbf{y}\|^2 - 1}{\|\mathbf{y}\|^2 + 1} \right).$$

Note que  $f$  y  $g$  son continuas, lo que quiere decir que

$$S^n \setminus \{N\} \simeq \mathbb{R}^n. \quad \square$$

En las siguientes dos secciones consideraremos los casos particulares cuando  $n = 1$  y  $n = 2$ .

### 2.2.1. Proyección de $S^1$ en $\mathbb{R}^1$

Este homeomorfismo se trabaja con la circunferencia de radio 1 y centro en el origen,  $S^1$  en la recta real  $\mathbb{R}$  y consiste en proyectar un punto  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in S^1$  en un único punto  $x \in \mathbb{R}$ , y de forma inversa.

Deduzcamos dicho homeomorfismo.

Primero encontremos la función

$$\begin{aligned} f : S^1 \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\longmapsto \tilde{x}. \end{aligned}$$

Lo podemos hacer con la ecuación de la recta que pasa por  $N = (0, 1)$  y un punto de  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in S^1$ . Entonces  $\overrightarrow{N\mathbf{x}} = \mathbf{x} - N = (x_1, x_2 - 1)$ , reemplazando en la ecuación vectorial, quedaría

$$r(t) = (0, 1) + t(x_1, x_2 - 1) = (tx_1, 1 + t(x_2 - 1)). \quad (2.5)$$

Como queremos que esta recta toque a  $\mathbb{R}$ , la segunda componente debe ser cero, entonces

$$1 + t(x_2 - 1) = 0 \quad \implies \quad t = \frac{1}{1 - x_2}.$$

Reemplazando el valor de  $t$  en la primera componente de (2.5) se obtiene

$$\tilde{x} = tx_1 = \frac{x_1}{1 - x_2}. \quad (2.6)$$

Nos falta ahora encontrar la aplicación inversa

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \setminus \{N\} \\ x &\longmapsto \hat{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Para esto, vamos a demostrar que un punto cualquiera de  $\mathbb{R}$ , le corresponda uno y solo uno en  $S^1 \setminus \{N\}$ .

Entonces su ecuación vectorial sería, utilizando de nuevo a  $N$  y un punto de  $\mathbb{R}$ , este punto podemos denotarlo como  $x \equiv \mathbf{x}_0 = (x, 0)$ , entonces,  $\overrightarrow{N\mathbf{x}_0} = (x, -1)$ ; la ecuación vectorial de la recta que pasa por estos dos puntos es

$$r(t) = N + t\overrightarrow{N\mathbf{x}_0} = (0, 1) + t(x, -1) = (tx, 1 - t). \quad (2.7)$$

Como quiero encontrar un punto sobre esta recta que pertenezca a  $S^1$ , la norma de este punto debe ser igual a 1, entonces

$$\begin{aligned} \|(tx, 1 - t)\|^2 &= 1 \\ t^2|x|^2 + 1 - 2t + t^2 &= 1 \\ t(tx^2 - 2 + t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para que la ecuación (2.8) sea cero algunos de los términos debe ser cero, pero ya se sabe que cuando  $t = 0$  se tiene el polo, es decir, queda la otra opción:

$$tx^2 - 2 + t = 0 \quad \implies \quad t = \frac{2}{x^2 + 1}. \quad (2.9)$$

Reemplazamos el valor de la ecuación (2.9) en la ecuación (2.7), se obtiene

$$\hat{\mathbf{x}} = (tx, 1 - t) = \left( \frac{2x}{x^2 + 1}, \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right).$$

Entonces de nuevo esta completa y bien definida la correspondencia y su inversa, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f: S^1 \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{1 - x_2}, \end{aligned}$$

y su función inversa

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \setminus \{N\} \\ x &\longmapsto g(x) = \left( \frac{2x}{x^2 + 1}, \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Tanto  $f$  como  $g$  son funciones continuas, por lo tanto  $S^1 \setminus \{N\}$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}$ . Una visualización del homeomorfismo puede verse en la Figura 2.3.

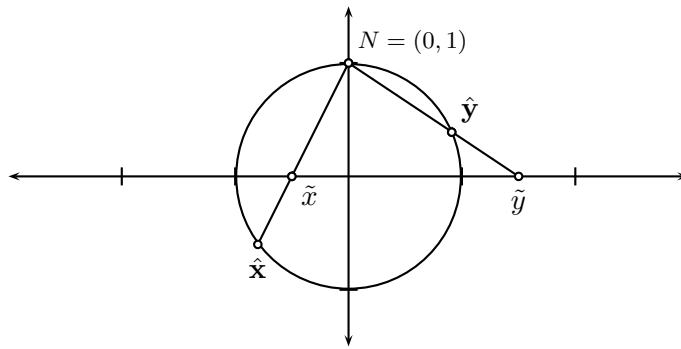


Figura 2.3: Proyección estereográfica de  $S^1$  en  $\mathbb{R}$ .

### 2.2.2. Proyección de $S^2$ en $\mathbb{R}^2$

El Interés de esta sección es dar a conocer una aplicación o ilustración de las ideas vistas en la secciones anteriores, referentes a la vida diaria. Muchas veces se pueden encontrar dificultades cuando trabajamos en el globo terráqueo. Trabajaremos con  $S^2$  también llamada la esfera de Riemann o esfera estereográfica, gracias a esto lograremos representar cada punto de  $\mathbb{R}^2$  con un único punto de  $S^2$ . Empezaremos cortando a  $S^2$  con el plano cartesiano por al mitad (o su ecuador), partiendo la esfera en 2 partes exactas, (ver figura 2.4) Podemos concluir las siguientes observaciones.

Los puntos sobre el disco  $|x| < 1$  se corresponden a los puntos sobre la esfera tales que  $x_3 < 0$ . Los puntos del plano  $|x| > 1$  se corresponden a los puntos sobre la esfera tales que  $x_3 > 0$ . Los puntos sobre la circunferencia  $|x|^2 = 1$  se corresponden a los puntos sobre la esfera tales que  $x_3 = 0$ . La idea anterior se puede visualizar en la Figura 2.4

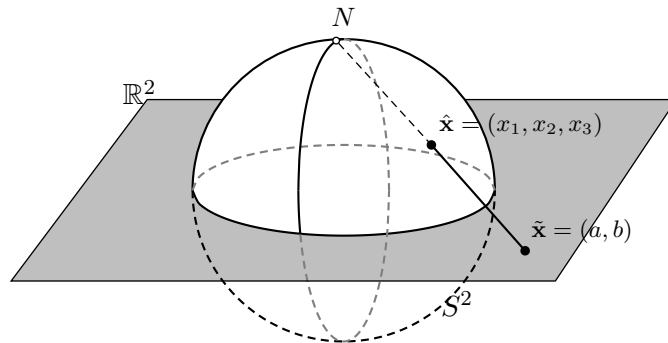


Figura 2.4: Proyección estereográfica.

En la teoría de las funciones esta esfera se llama la esfera de Riemann.

Otras observaciones, es que en la proyección estereográfica, toda recta que escojamos en

el plano la podemos convertir o transformar en circunferencia de la esfera que pasa por el polo, de la misma manera en forma inversa, toda circunferencia que pasa por el polo la puede transformar en una recta del plano  $\mathbb{R}^2$ . Esta relación entre  $S^2$  y  $\mathbb{R}^2$  se conoce como proyección estereográfica o Ptolomeica<sup>4</sup>.

Acabamos de ver una descripción de la proyección estereográfica, pero queremos hacer esto en detalle; para ello se escoge un punto cualquiera de  $\mathbb{R}^2$  y buscamos el punto de  $S^2$  que le corresponde, así comprobar su existencia y unicidad. Lo cual se hace sencillo debido que en la sección anterior analizamos proyecciones de  $S^n$  con  $\mathbb{R}^n$ . En conclusión, se quiere encontrar

$$f : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) \longmapsto \tilde{\mathbf{x}} = (a, b).$$

Comenzaremos con dar dos puntos que pertenezcan a la recta de proyección, para así hallar su vector dirección como ya lo hemos hecho antes. El primer punto es  $N$  y un punto  $Q$  sobre  $S^2$ . Si denotamos a  $Q = (x_1, x_2, x_3)$ , se obtiene

$$\overrightarrow{NQ} = Q - N = (x_1, x_2, x_3 - 1).$$

Reemplazando en la ecuación vectorial, quedaría.

$$r(t) = N + t(Q - N) = N + tV = (0, 0, 1) + t(x_1, x_2, x_3 - 1) = (tx_1, tx_2, 1 + t(x_3 - 1)). \quad (2.10)$$

Como interesa encontrar el punto sobre esta recta que toca el plano cartesiano, es decir cuando su tercera componente es igual a cero, entonces hacemos

$$1 + t(x_3 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{1 - x_3}.$$

Reemplazando en la ecuación 2.10 se obtiene  $\mathbf{x} \equiv (tx_1, tx_2, 0) \equiv \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right)$ .

Nos falta ahora encontrar la aplicación inversa

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{N\} \\ \mathbf{x} = (a, b) \longmapsto \hat{\mathbf{x}},$$

para completar la demostración. Se toma nuevamente a  $\{N\}$  y un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , y si denotamos  $Q = (\mathbf{x}, 0)$ , se obtiene que

$$\overrightarrow{NQ} = (\mathbf{x}, -1).$$

Así la ecuación vectorial de la recta que pasa por  $N$  y el punto  $Q$  es

$$r(t) = N + t(Q - N) = (0, 0, 1) + t(\mathbf{x} - 1) = (t\mathbf{x}, 1 - t). \quad (2.11)$$

---

<sup>4</sup>Fue inventada por el gran astrónomo griego Claudio Ptolomeo, siglo II D.C.

Como quiero que este punto pertenezca a  $S^2 \setminus \{N\}$  su norma debe ser igual a 1, entonces, dado que  $\mathbf{x}$  es un punto de  $\mathbb{R}^2$  y su norma es  $\|\mathbf{x}\|$ , entonces se obtiene

$$\|(t\mathbf{x}, 1-t)\|^2 = 1 \Rightarrow t^2\|\mathbf{x}\|^2 + 1 - 2t + t^2 = 1 \Rightarrow t(t\|\mathbf{x}\|^2 - 2 + t) = 0. \quad (2.12)$$

Como el valor  $t = 0$  no se utiliza, dado que en ese caso se obtiene el polo, entonces

$$t\|\mathbf{x}\|^2 - 2 + t = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1}. \quad (2.13)$$

Reemplazando el valor de  $t$  en la ecuación (2.11) se obtiene

$$\hat{\mathbf{x}} = \left( \frac{2\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1}, 1 - \frac{2}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1} \right) = \left( \frac{2a}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1}, \frac{2b}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1}, \frac{\|\mathbf{x}\| - 1}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1} \right). \quad (2.14)$$

Por lo tanto ya esta terminada y bien definida la correspondencia, lo que quiere decir que construimos las funciones que necesitábamos, por ende demostramos que siempre existe una función y su inversa, de  $S^2 \setminus \{N\}$  en  $\mathbb{R}^2$  como sigue a continuación.

$$\begin{aligned} f: S^2 \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto f(x_1, x_2, x_3) \equiv \left( \frac{x_1}{(1-x_3)}, \frac{x_2}{(1-x_3)} \right). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S^2 \setminus \{N\} \\ \mathbf{x} = (a, b) &\longmapsto g(a, b) \equiv \left( \frac{2a}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1}, \frac{2b}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1}, \frac{\|\mathbf{x}\|^2 - 1}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que

$$S^2 - \{N\} \simeq \mathbb{R}^2. \quad \square$$

Otra forma de visualizar la proyección estereográfica o Ptolemaica, es teniendo en cuenta la proyección de  $S^1$  sobre  $\mathbb{R}$ , imagínese si pudiera girar la circunferencia  $360^\circ$ , cuando se vaya dando el giro, va recorriendo la esfera de igual forma la recta va recorriendo el plano, quiere decir que un meridiano es la proyección de una recta del plano y la proyección de todos los meridianos es el plano completo, esto se puede ver en la Figura 2.5.

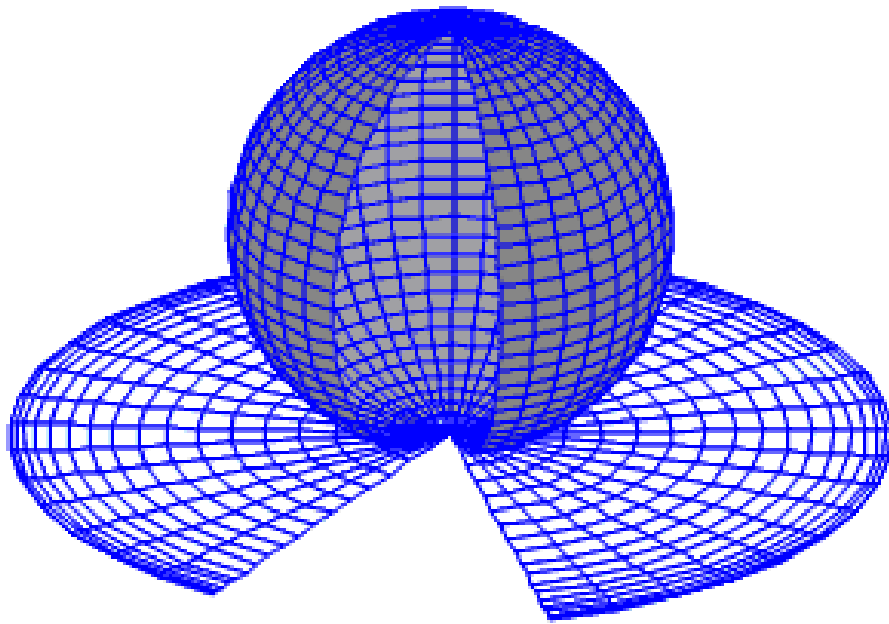


Figura 2.5: Barrido de la circunferencia y la recta en  $S^2$  y  $\mathbb{R}^2$

# Capítulo 3

## Funciones del espacio $S^n$ en $S^n$

Siguiendo con la idea de proyecciones y homeomorfismos, el interés del presente capítulo va dirigido a profundizar un poco más acerca de los espacios  $S^n$ , mirar resultados y propiedades que cumplen estos espacios, seguido de observaciones más rigurosas o planteamientos que se dejara en forma de inquietud como motivación para un futuro estudio.

---

### 3.1. $S^n$ como subespacio cerrado de $\mathbb{R}^{n+1}$

---

Es importante para muchos fines, conocer las propiedades topológicas de los conjuntos que estamos trabajando, como en este caso analizaremos una propiedad del conjunto  $S^n$ , la de ser un conjunto cerrado, es decir, demostraremos que  $S^n$  es un subespacio cerrado de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . como sigue a continuación.

**Teorema 3.1.**  $S^n$  un subespacio cerrado de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Observación 3.2.** Gracias a una propiedad de la teoría de conjuntos, dicha propiedad dice que si un conjunto es cerrado si su complemento es abierto o de la forma, un conjunto es abierto si su complemento es cerrado, por lo tanto podemos probar el teorema 3.1

*Demostración del Teorema 3.1.* Supongamos que el complemento de  $S^n$  no es abierto, esto quiere decir que existe por lo menos un punto en ese complemento tal que no es un punto interior, digamos un punto  $z$ . Simbólicamente sería.

$$B(z, \varepsilon) \cap S^n \neq \emptyset, \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{3.1}$$

Entonces existe un  $s \in S^n$ , donde  $s \neq z$  Tal que  $d(s, z) > 0$ . Entonces

$$d(z, S^n) > 0.$$

Tomaremos  $\varepsilon' = d(z, S^n)$ , entonces volvemos a definir la bola,  $B(z, \frac{\varepsilon'}{2}) \cap S^n = \emptyset$ , lo cual contradice a (3.1)

Lo que quiere decir, que puedo formar bolas que no intersequen a  $S^n$ , para cualesquiera puntos de  $(S^n)^c$ . Para una visualización de lo anterior, puede ver la Figura 3.1.

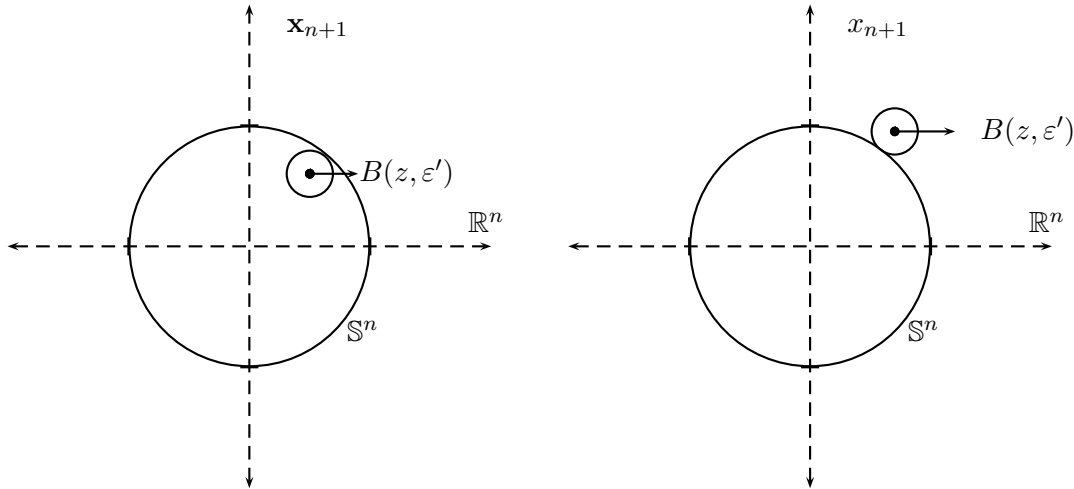


Figura 3.1:  $z$  puede estar en el interior o en el exterior de  $S^n$ .

Acabamos de demostrar que por mas que queramos decir que algún elemento del complemento de  $S^n$  no sea un punto interior, es imposible que así sea, ya que, escogiendo adecuadamente el radio, todos los puntos van a hacer interiores, por lo tanto la reunión de todos esos puntos van a hacer el interior del conjunto que es igual al conjunto es decir  $((S^n)^c)^\circ = (S^n)^c$ , en conclusión  $(S^n)^c$  es un conjunto abierto. Entonces  $S^n$  es un conjunto cerrado.  $\square$

---

## 3.2. Algunos resultados sobre aplicaciones de $S^n$ en $\mathbb{R}^n$

---

En esta sección encontraremos aplicaciones muy utilizadas, resultados con los que se aclarará el concepto de las proyecciones, empezaremos con un teorema fundamental en este estudio.

**Teorema 3.3** (Borsuk – Ulam<sup>1</sup>). Si  $f$  es una aplicación de  $S^n$  en  $\mathbb{R}^n$  entonces, existe algún  $x \in S^n$  tal que  $f(x) = f(-x)$ .

---

<sup>1</sup>Karol Borsuk (1905-1982) y Stanislaw Ulam (1909-1984) matemáticos polacos. Ulam propuso el teorema como conjetura y Borsuk demostró dicha conjetura.

**Observación 3.4.** Otra forma de decir el teorema de Borsuk–Ulam, es que en dicha aplicación siempre existirá una misma correspondencia para algún par de puntos antipodales<sup>2</sup>.

**Teorema 3.5.** No existe aplicación continua  $\rho : S^2 \rightarrow S^1$  tal que  $f(-x) = -f(x)$ . Esta afirmación también se puede generalizar para aplicaciones de  $S^n$  en  $S^{n-1}$ .

**Corolario 3.6.** Sea  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación continua tal que  $f(-x) = -f(x)$ , para todo  $x \in S^2$ . Entonces existen un  $x \in S^2$  tal que  $f(x) = 0$ .

*Demostración.* Supongamos que  $f(x) \neq 0$  para todo  $x \in S^2$  y definamos

$$g : S^2 \rightarrow S^2$$

$$(x) \mapsto g(x) = \frac{f(x)}{\|f(-x)\|}$$

La aplicación  $g$  es continua y  $g(-x) = -g(x)$ , que contradice el Teorema 3.5. □

El siguiente Resultado se deriva del Teorema de Borsuk – Ulam, en un caso específico.

**Corolario 3.7.** Sea  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación continua. Entonces existen un  $x \in S^2$  tal que  $f(x) = f(-x)$ .

*Demostración.* Supongamos que  $f(x) \neq f(-x)$  para todo  $x \in S^2$  y definimos.

$$g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x) \mapsto g(x) = f(x) - f(-x).$$

Podemos ver que  $g$  es continua, y cumple que  $g(-x) = -g(x)$  y  $g(x) \neq 0$ , para todo  $x \in S^2$ . lo cual contradice el corolario 3.6. □

El corolario 3.7 se refiere, que por mas que parezca posible no se puede construir una aplicación de  $S^2$  en  $\mathbb{R}^2$ , que sea uno a uno, lo cual se desprende el siguiente resultado (es de aclarar que de  $S^2 \setminus \{N\}$  en  $\mathbb{R}^2$  si es posible).

**Corolario 3.8.** Ningún subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  es homeomorfo a  $S^2$ .

**Corolario 3.9.** En cada instante existen un par de puntos antipodales de la tierra que tienen simultáneamente, la misma presión y la misma temperatura.

---

<sup>2</sup>Son puntos diametralmente opuestos.

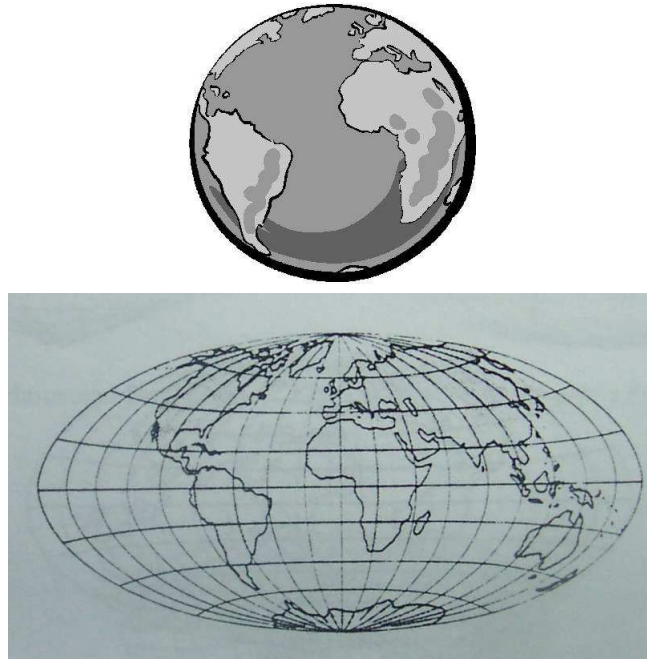


Figura 3.2: Proyección sobre el plano de la superficie de la Tierra.

*Demostración.* Podemos demostrarlo fácilmente, teniendo en cuenta que la presión y la temperatura se pueden escribir como una pareja ordenada de la siguiente forma,  $Pr$  es el valor de la presión y  $Tm$  es el valor de la temperatura, donde  $Tm, Pr \in \mathbb{R}$  entonces

$$Pr \text{ y } Tm \rightarrow (Pr, Tm) \in \mathbb{R}^2.$$

Por lo tanto tendría una correspondencia en  $S^2$ .

Gracias a la proyección estereográfica, tomamos la siguiente analogía,  $\mathbb{R}^2$  como un plano con los posibles resultados de  $Tm$  y  $Pr$ , a  $S^2$  como la superficie de la tierra y gracias al Teorema de *Borsuk – Ulam* garantizamos la existencia dos puntos antipodales de la tierra que tienen la misma presión y la misma temperatura. Es decir si armáramos una función  $f : S^T \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donde  $S^T$  es la superficie de la tierra, no habrá forma que sea inyectiva en un punto, lo que quiere decir que se debe repetir el mismo valor para 2 puntos sobre la tierra.  $\square$

---

### 3.3. Espacios de funciones definidas de $S^n$ en $S^n$

---

Esta sección tiene como objetivo un estudio de ciertas funciones en los espacios  $S^n$ , analizando resultados interesantes que ellos tienen.

Consideraremos el siguiente espacio funcional sobre el conjunto de funciones definidas de  $S^n$  en  $S^n$

$$T = \{f : f \text{ es cualquier función de } S^n \text{ en } S^n\},$$

dotada por la métrica

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in S^n} d(f(x), g(x)),$$

donde  $f, g \in T$  y  $d$  es la métrica<sup>3</sup> en  $S^n$ . Observe que las funciones del conjunto  $T$  no necesitan ser continuas; se usará la expresión aplicación cuando la continuidad es implícita. Investigaremos algunos subespacios de  $T$  y se presentan algunos resultados interesantes del mismo.

En esta sección también consideramos los subespacios

$$M = \{f \in T : f \text{ es continua en } S^n\},$$

$$G = \{f \in M : f \text{ es sobreyectiva}\},$$

$$H = \{f \in M : f \text{ es } 1 - 1\}.$$

Como antes, denotamos por  $N$  como el polo norte de  $S^n$ . Si  $X$  es un subconjunto de  $T$  entonces denotamos a  $X_N$  el conjunto de las funciones en  $X$  que deja fijo al punto  $N$ . De esta forma, surgen los conjuntos

$$M_N = \{f \in T : f(N) = N\},$$

$$G_N = \{f \in M : f(N) = N\},$$

$$H_N = \{f \in M : f(N) = N\}.$$

El espacio  $M$  es cerrado, por lo tanto como subespacio de  $T$  es completo. Observaremos varios resultados que derivan del teorema de Borsuk-Ulam, el cual es fundamental en el desarrollo de esta sección.

**Teorema 3.10.**  $H \subset G$ .

*Demostración.* Lo que nos dice es que si tengo una función que sea inyectiva podemos decir tranquilamente que también es sobre, lo haremos por contradicción, entonces sea  $f \in M - G$ , que no es sobre, entonces hay un punto  $q \in S^n - f(S^n)$ . Y sea  $\pi$  un homeomorfismo de  $S^n - \{q\}$  sobre  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $\pi f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continuo y por el teorema de *Borsuk - Ulam* existe un punto  $x \in S^n$  tal que  $\pi f(x) = f(-x)$  donde  $x$  y  $-x$  son puntos antipodales. es decir que  $f$  no es  $1 - 1$ . Por lo tanto la contención es verdadera.

---

<sup>3</sup>Véase en la bibliografía [4]

Se puede analizar que el teorema anterior no garantiza su recíproca, que si una función no es inyectiva entonces no es sobre, un contraejemplo resulta muy sencillo teniendo en cuenta el teorema de *Borsuk – Ulam*.  $\square$

**Corolario 3.11.** *Sea  $h$  una aplicación de  $S^n$  en  $S^n$ , si  $h$  es un homeomorfismo, entonces  $h$  es sobre.*

**Observación 3.12.** *El Corolario 3.11 nos da una ayuda al querer encontrar homeomorfismo de  $S^n$  en  $S^n$ , por la definición de homeomorfismo, sabemos que  $h$  sería inyectiva, entonces solo demostraríamos esa propiedad y de inmediato asumiríamos que  $h$  es un homeomorfismo sin demostrar que es sobreyectiva gracias al Teorema 3.10.*

Ya vimos por los resultados de el Teorema 3.10 y el Corolario 3.11 que es suficiente que la función sea 1 – 1 para concluir que es sobre, pero si no es 1 – 1 no nos dice nada en cuanto a su sobreyectividad. El teorema que veremos a continuación nos da otra alternativa de probar si es sobre una función con la ventaja de que si no la cumple tampoco se cumple su sobreyectividad.

**Teorema 3.13.** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un homeomorfismo. Entonces  $f$  es sobre si la imagen de cada sucesión infinita es infinita.*

*Demostración.* Suponga primero que  $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ , y que existe  $\{x_i\}$  es una sucesión infinita tal que la sucesión de la imagen  $\{y_i\}$  es finita. Podemos asumir que  $\{x_i\}$  no tiene puntos de acumulación, ahí existe una subsucesión  $\{y'_i\}$  de  $\{y_i\}$  que converge a un punto  $y$  y un punto  $x$  tal que  $y = f(x)$ . Pero  $f^{-1}$  es continuo en  $y$  por lo tanto  $\{x_i\}$  debe tener un punto de acumulación, contrario a la suposición. Luego suponemos que la imagen de cada secuencia infinita es infinita. Por el teorema de Brouwer<sup>4</sup> sobre la invarianza del dominio  $f(\mathbb{R}^n)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $y$  es algún punto límite (en  $\mathbb{R}^n$ ) de  $f(\mathbb{R}^n)$  entonces es una sucesión finita  $\{y_i\}$  de puntos diferentes en  $f(\mathbb{R}^n)$  convergiendo a  $y$ . Si  $x = f^{-1}(y_i)$  entonces  $\{x_i\}$  sería finito y ya habíamos dicho que se tenía solo infinitas.  $\square$

Acabamos de ver un resultado muy valioso para demostraciones o ejemplos posteriores, que nos pueden ayudar para construir nuevos resultados, al igual que el siguiente teorema.

**Teorema 3.14.** *Sea el conjunto  $\Phi$  de todos los homeomorfismos de  $\mathbb{R}^n$  sobre si mismo, que puede ser generado por un espacio métrico completo que sea homeomorfo a  $H_N$ .*

---

<sup>4</sup>En honor al matemático holandés Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966). Su teorema dice que si se tiene un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  homeomorfo a otro subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  entonces, dicho conjunto también es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Teniendo en cuenta lo antes visto, acerca de los homomorfismos sabemos que es una correspondencia uno a uno, por la proyección estereográfica  $\pi : S^n - \{x\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  con centro en  $p$ , entre  $\Phi$  y  $H_N$  suponiendo que  $f : S^n \rightarrow S^n$  es una función biyectiva y dejando a  $N$  fijo. Entonces si  $f$  es continua  $\forall x \neq p$  quiere decir que  $f$  también es continua en  $N$  y  $f \subset H_N$ . luego la correspondencia es  $f = \pi^{-1}\phi\pi$ , donde  $\phi \subset \Phi$  y  $f \subset H_N$ . Lo visualizaremos por medio de la relación entre sus conjuntos.

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & S^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Basándonos en los Teoremas 3.13 y 3.10 podemos definir el conjunto  $\Phi$ . □

Por último, otros espacios interesantes, en los cuales se puede tratar de hacer un análisis equivalente al anterior son los que dejan al polo norte como punto fijo, estos espacios se definen como sigue:

$$\begin{aligned} T_N &= \{f \in T : f(N) = N\}, \\ F_N &= \{f \in T_N : f \text{ es continua en cada } x \neq N\}, \\ T'_N &= \{f \in F_N : f(S^n) \text{ es denso en } S^n\}. \end{aligned}$$

Como podemos apreciar, el conjunto de los espacios  $S^n$  las funciones definidas sobre él, al igual que sus subconjuntos, tienen múltiples aplicaciones y resultados; nuestro objetivo no era mostrar todos los resultados existentes, ya que esto es una tarea muy ambiciosa, dado que se necesitan de nociones y conocimientos más avanzados para deducir tales resultados. Los temas no analizados son interesantes y ellos pueden ser estudiados en un futuro trabajo.

# Referencias

- [1] RESTREPO Guillermo. *Análisis en  $\mathbb{R}^n$* , Editorial Universidad del Valle, Santiago de Cali, 1997.
- [2] JURGEN Jost. *Postmodern Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.
- [3] PINZÓN Sofía. *Desigualdades*, Monografía de grado, Universidad Industrial de Santander, 1992.
- [4] PADILLA Maria. *Espacios métricos*, Monografía de grado, Universidad Industrial de Santander, 1993.
- [5] APOSTOL Tom. *Análisis Matemático*, Barcelona España, editorial Reverte, 1972.
- [6] POLYA George and LATTAN Gordon. *Variable Compleja*, Editorial Limusa, México, 1976.
- [7] RUBIANO Gustavo. *Topología General*, Segunda edición, Facultad de ciencias, Universidad Nacional (Departamento de Matemáticas y Estadística), 2002.
- [8] GROSSMAN Stanley. *Álgebra Lineal*, Quinta edición, Editorial McGrawHill, México, 1996.
- [9] MUNKRES James. *Topología*, Segunda edición, Pearson Prentice-Hall, 1998.
- [10] SHARP Henry. "Denseness and Completeness in Certain Function Spaces", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 74, Number 3(1967), pp. 266-269.
- [11] CHARRIS Jairo, DE CASTRO Rodrigo y BARRERA Rodrigo. Estructura de los números complejos, Santa Fé de Bogotá, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional (Departamento de Matemáticas y Estadística), 2002.
- [12] KOSNIOWSKI Czes. *Topología Algebraica*, Barcelona España, editorial Reverte, 1986.
- [13] BERGER Marcel. *Geometry, Vol. I and II*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.