CURVAS CARACTERÍSTICAS EN ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE PRIMER ORDEN

CARMEN CECILIA BALLESTEROS QUIROGA

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2007

CURVAS CARACTERÍSTICAS EN ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE PRIMER ORDEN

CARMEN CECILIA BALLESTEROS QUIROGA

Trabajo de grado presentado como
requisito parcial para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

Director
Dr. Élder Jesús Villamizar Roa

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bucaramanga
2007

A los tres seres más importantes y especiales de mi vida:

A mi madre,

A mi hija y

Nelson

Agradecimientos

Agradezco muy especialmente a:

- A **Dios**.
- A mi madre **Cecilia Quiroga**, quien con su cariño, esfuerzo, amor y comprensión me impulsó a seguir adelante.
- Al profesor **Elder J. Villamizar**, por su colaboración, su apoyo incondicional, su paciencia y su acertada orientación en el desarrollo de ésta monografía.
- A mi **esposo e hija**, por su amor, esfuerzo, comprensión y por creer en mi

TITLE: CHARACTERISTICS CURVES IN FIRST-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS[1]
AUTHOR: CARMEN CECILIA BALLESTEROS QUIROGA[2]

KEY WORDS: Nonlinear first-order partial differential equation; characteristic curves; propagation of singularities; shock waves.

ABSTRACT

Nonlinear first-order partial differential equations arise in a variety of physical theories, primarily in dynamics, continuous mechanics and optics. In this monograph we make a review about some aspects in first-order partial differential equation, including definition, examples, characteristics curves, propagation of singularities and shock waves.

The monograph is divided in four chapters. In the first chapter is given the terminology used in the development of the work. In chapter two, is showed the definition and classification of the set of Partial Differential Equations according to its order and linearity; we give some classical example and present a description of a initial boundary value problem.

The third chapter is devoted to study of the characteristics curves as a alternative in order to obtain the existence and uniqueness of solutions for a first-order Partial Differential Equation.

Finally, in chapter four we make a introduction to the propagation of singularities and shock waves.

---

[1] Thesis
[2] FACULTY OF SCIENCES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR Dr. Élder Jesús Villamizar Roa.

TITULO: CURVAS CARACTERÍSTICAS EN ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE PRIMER ORDEN

[1]

AUTOR: CARMEN CECILIA BALLESTEROS QUIROGA[2]

PALABRAS CLAVES: Ecuaciones diferenciales de primer orden; Curvas características; Propagación y singularidades; Ondas de Choque.

DESCRIPCIÓN

Las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden no lineales aparecen en una gran variedad de problemas físicos, principalmente en mecánica de los medios continuos y óptica. En esta monografía se realiza una revision sobre algunos aspectos en ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, incluyendo definición, ejemplos, curvas características, propagación de singularidades y ondas de choque.

La monografía esta dividida en cuatro capítulos. El primer capítulo se presenta la terminologia usada en el desarrollo de este trabajo; en el segundo capítulo se da la definición y clasificación de una ecuación diferencial parcial de acuerdo a su orden y linealidad; se presentan algunos ejemplos clásicos y se muestra la descripción de un problema de valor inicial y de frontera.

El tercer capítulo se dedica al estudio las curvas características como una alternativa para obtener la existencia y la unicidad de la solución para una Ecuación Diferencial Parcial de primer orden.

Finalmente en el cuarto capítulo se hace una introducción a la propagación de singularidades y ondas de choque.

[1] Tesis

[2] FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR Dr. Élder Jesús Villamizar Roa.

CONTENIDO

Introducción

Los libros básicos de cálculo que generalmente son usados a nivel de pregrado en la Universidad Industrial de Santander, contienen poca información relativa a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales y esa poca información es en general dedicada a temáticas como series de Fourier, Método de diferencias finitas, Métodos de los elementos finitos y transformada de Laplace y dichas temáticas son orientadas hacia la resolución de problemas específicos que son prototipos de las ecuaciones elípticas, parabólicas e hiperbólicas como es el caso de la ecuación de Poisson, ecuación del calor y la ecuación de la onda.

Sin embargo, se encuentra muy poca literatura relativa al estudio de las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden y en particular referente al método de las características, incluyendo descripción del método, ejemplos numéricos, limitaciones del método, propagación de singularidades, ondas de choque etc. Conociendo la importancia que representan las ecuaciones diferenciales parciales para matemáticos, físicos e ingenieros, en la presente monografía abordaremos los tópicos anteriormente mencionados, los cuales serán un aporte bibliográfico bastante importante para el estudiante.

Esta monografía esta dividida en cuatro capítulos. En el primer capítulo presentaremos la terminología y notación básica que utilizaremos a lo largo del trabajo, presentaremos algunos conceptos básicos como la definición del espacio euclideo en $\mathbb{R}^n$, definición de conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, conjunto frontera, notación de funciones en varias variables k veces derivables y recordaremos la definición del operador de divergencia y del operador laplaciano.

En el segundo capítulo daremos la definición de una ecuación diferencial parcial en general y presentaremos algunos ejemplos clásicos de ecuaciones diferenciales en la Física, Ingeniería, etc y más particularmente, en la mecánica los medios continuos y del electromagnetismo. Presentaremos la clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales según su orden y linealidad, además demostraremos el *principio de superposición*, y finalizamos describiendo lo que es un problema de valor inicial, un problema de valor de frontera y un problema mixto.

En el tercer capítulo iniciamos presentando algunos ejemplos en los cuales introducimos el estudio sobre la existencia de la solución de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden con condiciones iniciales, ademas presentaremos la definición de *curvas características planas*, aplicaremos el *teorema de existencia y unicidad* de soluciones para un problema de primer orden con condiciones iniciales, seguidamente damos a conocer la definición de curvas características planas asociadas a una ecuación diferencial parcial y su caracterización como solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Una vez establecida la definición de curvas características, analizaremos ejemplos donde calculamos explícitamente la solución através del cálculo de las curvas características y aplicación del Teorema de existencia y unicidad.

En el cuarto capítulo mostraremos algunos ejemplos en los cuales analizaremos lo que puede suceder con el problema de Cauchy si el teorema de existencia y unicidad descrito en el capitulo 3 falla; situaciones donde dicho teorema no es válido. Por último realizaremos un estudio introductorio a la propagación de singularidades y ondas de choque, aspectos que aparecen en cierto tipo de problemas no lineales y que ha sido objetivo muchas investigaciones en las últimas décadas.

El contenido de este trabajo de monografía se basa, en su mayoría, en una revisión de la bibliografía presentada al final del trabajo, por esta razón agradecemos a los autores cuyo material bibliográfico es referenciado por los aportes respectivos.

CAPÍTULO 1

Preliminares

El objetivo de este primer capítulo es presentar la terminología y notación básica que iremos a utilizar a lo largo de esta monografía. Iniciaremos recordando algunos aspectos del espacio euclideo $\mathbb{R}^n$, incluyendo la definición, notación y ejemplos de conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, conjunto frontera; estableceremos la notación de función en varias variables k veces derivable y finalizamos recordando la definición del operador divergencia y del operador laplaciano.

1.1. El espacio Euclideo

Definición 1.1. *El espacio euclideo $\mathbb{R}^n$ es el conjunto formado por las n-uplas $x{=}(x_1, ..., x_n)$ donde cada una de las n coordenadas x_i es un número real. Como es usual, el espacio $\mathbb{R}^1$ será denotado simplemente por $\mathbb{R}$.*

Una vez dada la definición del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, recordamos que existen tres maneras naturales de definir las distancias entre dos puntos en $\mathbb{R}^n$. De hecho, dados $x{=}(x_1, ..., x_n)$ e $y{=}(y_1, ..., y_n)$, escribiremos:

a) $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = [\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2]^{\frac{1}{2}}$,

b) $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$,

c) $d_2(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.

Las funciones d, d_1, d_2: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son *métricas*, esto es, son funciones $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes condiciones para cualquier x, y, $z \in \mathbb{R}^n$:

i) $h(x,x) = 0$;

ii) *Si* $x \neq y$ entonces $h(x,y) > 0$;

iii) $h(x,y) = h(y,x)$;

iv) $h(x,z) \leq h(x,y) + h(y,z)$.

Consecuentemente, el conjunto $\mathbb{R}^n$ junto con la función d, d_1, ó d_2 es un ejemplo de un espacio métrico. Recordemos aquí que un espacio métrico es un par (M,d) donde M es un conjunto y d es una métrica en M, esto es d es una función de $M \times M$ en $\mathbb{R}$ que asocia a cada par ordenado de elementos $(x,y) \in M$ un número real $d(x,y)$ llamado la distancia de x a y, de modo que las anteriores condiciones i), ii), iii) y iv) sean satisfechas. Finalmente, puede ser demostrado que las métricas d, d_1, y d_2 son equivalentes, esto es, existen constantes c_1, c_2, c_3, $c_4 > 0$ tales que

$$\mathrm{c}_1 d_2(x,y) \leq c_2 d(x,y) \leq c_3 d_1(x,y) \leq c_4 d_2(x,y).$$

En verdad, podemos demostrar que:

$$d_2(x,y) \leq d(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n d_2(x,y).$$

Debido a esta propiedad, podemos considerar $\mathbb{R}^n$ con cualquiera de tales distancias. De aquí en adelante consideraremos el conjunto $\mathbb{R}^n$ con la distancia d. La métrica d es llamada *euclidiana*. Ella proviene de la fórmula para la distancia entre dos puntos del plano (en coordenadas cartesianas).

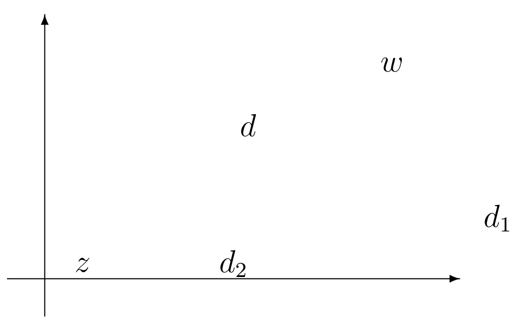


Fig. 1. Comparación de las distancias d, d_1, d_2

El conjunto de todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ que se encuentran a una distancia menor que $r > 0$ de un punto fijo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, es llamada *bola abierta* centrada en x_0 y radio r y será denotada por

$$B(x_0; r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < r\}.$$

En el plano $\mathbb{R}^2$, la bola abierta $B(x_0; r)$ es el interior de un círculo de centro x_0 y radio r, o el interior de un cuadradado de centro x_0 y lados de longitud $2r$, paralelos a los ejes, o entonces el interior de un cuadrado de centro x_0 y diagonales paralelas a los ejes, ambas de longitud $2r$. Estos casos corresponden a usar en $\mathbb{R}^2$ las metricas d, d_2 ó d_1 respectivamente (vea la fígura 2, 3, 4)

x_0 $\quad r$

$$(x - x_0^1)^2 + (y - x_0^2)^2 < r^2$$

$$x_0 = (x_0^1, x_0^2)$$

Fig. 2

x_0 $\quad r$

$$|x - x_0^1| < r \quad e$$

$$|y - x_0^2| < r$$

Fig. 3

r

$$|x - x_0^1| + |y - x_0^2| < r$$

Fig. 4

Un subconjunto Ω de $\mathbb{R}^n$ se llama *abierto* si, dado cualquier $x_0 \in \Omega$, existe una bola en x_0 totalmente contenida en Ω. Un subconjunto F de $\mathbb{R}^n$ se llama *conjunto cerrado* si su complementar

$$\mathbb{R}^n \text{ - F} = \{\text{x} \in \mathbb{R}^n\text{: x} \notin \text{F }\}$$

es abierto. Dado $C \subseteq \mathbb{R}^n$, la *clausura* de C, denotada por $\overline{C}$, es el menor conjunto cerrado que lo contiene; el *interior* de C, denotado C^{o}, es el mayor conjunto abierto contenido en C. La *frontera* de C, denotada por ∂C, es el conjunto

$$\partial C = \{\text{x} \in \overline{C}\text{: x} \notin C^{\text{o}} \}.$$

Ejemplo 1.2. *El interior del intervalo [0,1) en la recta es el intervalo abierto (0,1), la clausura es el intervalo cerrado [0,1] y la frontera consta de los puntos 0 y 1.*

Ejemplo 1.3. *Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales. El interior de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, es vacío puesto que ningún intervalo abierto puede ser formado apenas por números* *racionales. Por otro lado la frontera de $\mathbb{Q}$ es toda la recta $\mathbb{R}$, ya que cualquier intervalo abierto contiene números racionales y números irracionales. La clausura de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, es también $\mathbb{R}$.*

Observación 1.4. *Las nociones de interior, clausura y frontera de un conjunto X son "relativas", esto es, dependen del espacio $\mathbb{R}^n$ en el cual se considere X inmerso. Por ejemplo, en el Ejemplo (1.2) tenemos que el interior de [0,1) es (0,1) y la frontera {0,1} en $\mathbb{R}$. Sin embargo, si consederamos $\mathbb{R}$ como el eje de las abcisas (y=0) en el plano $\mathbb{R}^2$, tenemos $[0,1) \subset \mathbb{R}^2$ y, como subconjunto de $\mathbb{R}^2$ el interior de [0,1) es vacío y su frontera es el intervalo [0,1].*

1.2. Continuidad y Diferenciabilidad

Suponemos que el lector esta familiarizado con las propiedades básicas de funciones con dominio en $\mathbb{R}^n$, esto es, u: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; en particular, con los conceptos de continuidad, diferenciabilidad, derivadas direccionales, derivadas parciales, etc. Si $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ es una función de n variables independientes, usaremos varias notaciones para las derivadas parciales de u. Por ejemplo, las derivada parcial de u en relación a x_1, que es la primera variable, podrá ser denotada por

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad u_{x_1}, \quad \partial_{x_1} u, \quad D_1 u. \tag{1.1}$$

Análogamente, las derivadas de segundo orden podrán ser denotadas por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \quad u_{x_j x_j}, \quad \partial^2_{x_j} u, \quad D_j^2 u, \tag{1.2}$$

en el caso de derivación en relación a la misma variable x_j, y, en el caso de variables diferentes, derivando primero en relación a x_j y después a x_k,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}, \quad u_{x_j x_k}, \quad \partial_{x_k} \partial_{x_j} u, \quad D_k D_j u. \tag{1.3}$$

Ahora vamos a establecer la notación de multi-índices. Un vector de la forma $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, donde cada componente α_i es un entero no negativo, es llamado un multi-índice de orden

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n. \tag{1.4}$$

Dado un multi-índice α y $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, suficientemente derivable, denotamos

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u. \tag{1.5}$$

si k es un entero no negativo, la expresión

$$D^k u(x) = \{D^\alpha u(x) : |\alpha| = k\} \tag{1.6}$$

denota el conjunto de todas las derivadas parciales de orden k.
De otro lado, dado un número entero no negativo k, decimos que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, es de clase $C^k(\Omega)$, si f y todas sus derivadas $D^\alpha f$ de orden $|\alpha| \leq k$ son continuas en Ω.
Diremos que una función f: $\Omega \to \mathbb{R}$ es de clase $C^0(\Omega)$ si ella es continua en Ω. Diremos que f es de clase C^∞, cuando $f \in C^k$ para todo $k \geq 0$. Evidentemente $C^0 \supset C^1 \supset ... \supset C^k \supset ... \supset C^\infty$, siendo las inclusiones estrictas.

Ejemplo 1.5. *Para cada $n = 0, 1, 2, ...$, consideremos la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f_n(x) = x^n|x|$. Para $x \geq 0$, tenemos $f_n(x) = x^{n+1}$ y si $x < 0$ tenemos que $f_n(x) = -x^{n+1}$. Evidentemente, $f_n'(x) = (n+1)f_{n-1}$; luego la n-ésima derivada de f_n es igual a $(n+1)!f_0$. Como $f_0(x) = |x|$ es continua pero no posee derivadas en el punto $x = 0$, concluimos que cada una de las funciones f_n es de clase C^n, pero no es $n+1$ derivable. En particular, $f_n \notin C^{n+1}(\mathbb{R})$.*

Ejemplo 1.6. *Sea $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g_n(x) = x^{2n} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$ y $g_n(0) = 0$. Entonces g_n es n veces derivable, pero su n-ésima derivada (que existe en todo punto $x \in \mathbb{R}$) no es continua en el punto 0; consecuentemente g_n no es de clase $C^n(\mathbb{R})$.
En particular, si tomamos $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $\varphi_n(x) = x^{2n+1} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$ y $\varphi_n(0) = 0$, entonces φ_n es de clase C^n pero no es $n+1$ veces derivable en el punto $x = 0$.*

Ahora pasamos a dar la definición de operador Laplaciano y operador divergente.
Dada una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $C^2(\Omega)$, se define el Laplaciano de f como

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}. \tag{1.7}$$

Notemos que si f: $\Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, el laplaciano de f coincide con las segundas derivadas de f, esto es, $\Delta f = f_{xx}$.

Para una función vectorial $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, esto es, f(x)=($f_1(x)$,...,$f_n(x)$), x $\in \Omega$, x = $(x_1, \cdots, x_n)$, donde cada f_i: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase $C^1(\Omega)$, se define la divergencia de f como

$$div f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \tag{1.8}$$

Notemos que si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase $C^2(\Omega)$, el gradiente de f denotado por grad$f$ ó ∇f, es dado por:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Entonces, si calculamos la divergencia de ∇f tenemos

$$div(\nabla f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \Delta f. \tag{1.9}$$

CAPÍTULO 2

Aspectos básicos de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP's)

El objetivo de este capítulo es presentar la definición de una ecuación diferencial parcial, dar ejemplos y presentar la clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales según el orden y la linealidad. Así mismo, probaremos el principio de superposición y describiremos lo que es un problema de valor inicial y de frontera.

Definición 2.1. *Una ecuación en derivadas parciales o ecuación diferencial parcial (E.D.P) es una ecuación que envuelve dos o más variables independientes* $x, y, z, t, \ldots$ *y derivadas parciales de una función* $u = u(x, y, z, t, \cdots)$. *De manera más precisa una E.D.P en n variables independientes* $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$ *es una ecuación de la forma*

$$F\left(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \cdots,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n},\ \cdots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0, \qquad (2.1)$$

donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$, Ω *es un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$, F *es una función dada y* $u = u(x_1, x_2, .., x_n)$ *es la función que queremos determinar.*

Observemos que con una definición tan general existen E.D.P's absurdas, como por ejemplo

$$e^{u_x + u_y} = 0.$$

Observemos los siguientes ejemplos de E.D.P's

Ejemplo 2.2. *Ecuación de Poisson. Esta ecuación es dada por:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h(x,y), \;\; u = u(x,y), \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.2}$$

En esta ecuación (2.2) $h(x,y)$ es una función dada y $u(x,y)$ es la incognita. Esta ecuación esta asociada a fenómenos físicos estacionarios, esto es, independientes del tiempo, como por ejemplo potenciales electrostáticos generados por distribuciones fijas de carga.(vea por ejemplo [10]). En el caso en que $h(x,y) \equiv 0$, la ecuación homogénea (2.2) es llamada ecuación de Laplace. En dimensiones mayores la ecuación Poisson es dada por $\Delta u = h$, donde $u = u(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ y Δ es el laplaciano en $\mathbb{R}^n$. La ecuacion (2.2) también puede ser considerada en subconjuntos abiertos Ω de $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 2.3. *Ecuación del calor.*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u = u(t,x), \; t > 0, \;\; x \in \mathbb{R} \;\; \alpha^2 > 0. \tag{2.3}$$

La ecuación (2.3) modela el flujo del calor, esto es el calor transferido por conducción en una varilla o alambre delgado. La función $u(x,t)$ representa la temperatura en un punto x a lo largo de la varilla en cierto tiempo t (vea por ejemplo[3]). La ecuación del calor en dimensiones mayores es dada por $u_t = \alpha^2 \Delta u$, donde $u = u(x,t), \;\; x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ y Δ es el laplaciano en $\mathbb{R}^n$ en las variables espaciales $x_1, .., x_n$.
Obviamente esta ecuación puede ser considerada en subconjuntos abiertos Ω de $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 2.4. *Ecuación de la onda*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \;\; u = u(t,x), \;\; t > 0, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; c > 0. \tag{2.4}$$

La ecuación (2.4) modela el problema de pequeñas vibraciones transversales de una cuerda flexible en esta ecuación $u = u(t,x)$ representa la velocidad de propagación de la onda, t representa el tiempo, x la variable espacial. (vea por ejemplo [3]). En dimensiones mayores, la ecuación de la onda esta dada por

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \tag{2.5}$$

donde $u = u(t,x)$, $x = (x_1 . \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, t > 0$ y Δ es el Laplaciano en $\mathbb{R}^n$. con las variables $x_1 . \cdots, x_n$. Nuevamente, la ecuación (2.5) puede ser considerada en subconjuntos abiertos Ω de $\mathbb{R}^n$

Más adelante, después de que hayamos definido el orden y la linealidad de una E.D.P, presentaremos otros ejemplos de E.D.P's.

2.1. Clasificación de una E.D.P según el orden y linealidad

La clasificación de una E.D.P según el orden y la linealidad es análoga a la respectiva clasificación que se da en las ecuaciones diferenciales parciales ordinarias.
El orden de una E.D.P es dado por la derivada parcial de mayor grado que ocurre en la ecuación. Por ejemplo, la ecuación (2.1) es una E.D.P de orden k. Las ecuaciones de Poisson, Laplace, ecuación de onda, ecuación del calor son ejemplos de E.D.P's de segundo orden.

2.1.1. E.D.P's lineales y no lineales

Desde el punto de vista de la linealidad, una E.D.P se dice que es lineal si es de primer grado en la variable u y en todas las derivadas parciales que existen en la ecuación; caso contrario, la E.D.P se llama no lineal.
La forma mas general de una E.D.P de orden n es dada por

$$\sum_{|\alpha|\leq n} a_\alpha(x)D^\alpha u = f(x), \tag{2.6}$$

donde los coeficientes $\mathrm{a}_\alpha(x)$ son funciones dadas que dependen únicamente de la variable x y $f(x)$ es el término independiente. Recordemos aquí que

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \qquad \textit{donde} \;\; \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \tag{2.7}$$

siendo los α_i enteros no negativos. Si $f(x)$ es la función nula ($f(x)\equiv 0$) es usual llamar la ecuación (2.1) de E.D.P lineal de orden k, homogénea.
Particularizando la ecuación (2.6), podemos decir que la forma más general de una E.D.P lineal de primer orden es

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)D_j u + b(x)u = f(x), \tag{2.8}$$

donde alguno de los coeficientes $a_j(x)$ no es idénticamente nulo.
De igual manera, la forma más general de una E.D.P lineal de segundo orden es

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_iD_j u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)D_j u + c(x)u = f(x), \tag{2.9}$$

donde alguno de los coeficientes $a_{ij}(x)$ no es idénticamente nulo.
En el caso de dos variables independientes, las ecuaciones (2.8) y (2.9) pueden ser reescritas, respectivamente, como

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = D(x,y) \tag{2.10}$$

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u = G(x,y). \tag{2.11}$$

Note que la ecuación (2.11) no contiene el término u_{yx} a pesar de él, aparecer en la ecuación (2.9); la razón es que debido a que estamos interesados en las llamadas *Soluciones clásicas* de la ecuación (2.11), esto es, soluciones u que son dos veces continuamente diferenciables en la región Ω (esto es funciones de clase $C^2(\Omega)$). Para tales funciones se tiene que $u_{xy} = u_{yx}$. En el cálculo diferencial este último resultado se conoce como *Teorema de Clariaut.*

Ejemplo 2.5. *La ecuación*

$$xu_x - yu_y = \cos(xy) \tag{2.12}$$

es una ecuación diferencial parcial de primer orden, lineal. Comparando (2.12) con la ecuación (2.8) tenemos que $a_1(x) = x$, $a_2(x) = -y$, $b(x) = 0$ *y* $f(x) = \cos(xy)$. *la variable* x *en (2.8) es en (2.12) el vector* (x, y)

La ecuación de Poisson

$$\Delta u(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots x_n), \qquad (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{2.13}$$

es una ecuación lineal de segundo orden. Comparando (2.13) con (2.9) vemos que $c(x) = 0$, $f(x) = h$, $a_{ij}(x) = 1$, $b_j(x) = 0$. En particular, la ecuación de Laplace también es lineal.
Por otro lado las ecuaciones del calor (2.3) y la ecuación de la onda (2.4) son ejemplos de ecuaciones diferenciales parciales lineales de orden 2.
Ejemplos de E.D.P's no lineales serán presentados a continuación cuando veamos el concepto de E.D.P's semi-lineales.

2.1.2. Ecuaciones Diferenciales Parciales semi-lineales

Dentro del conjunto de las E.D.P's no lineales, podemos dar una nueva clasificación teniendo en cuenta el carácter lineal o no lineal de la parte de la ecuación diferencial que contiene las derivadas parciales de mayor orden.
La parte de la E.D.P que contiene las derivadas parciales de mayor orden es llamada *parte principal de la E.D.P.* Por ejemplo, las partes principales de las ecuaciones (2.10) y (2.11) son respectivamente,

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y$$

y

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy}.$$

Dentro de las E.D.P's no lineales, las que tienen parte principal lineal son llamadas *Semi-lineales.* Por ejemplo la E.D.P (2.1) es semi-lineal si ella tiene la forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, ..., Du, u, x) = 0. \tag{2.14}$$

En particular, la forma más general de una E.D.P semi-lineal de segundo orden es

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_iD_ju + f(x, u, D_1u, ..., D_nu) = 0. \tag{2.15}$$

Resaltamos que la parte principal de la E.D.P (2.14) es

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)D^\alpha u$$

y la parte principal de la E.D.P (2.15) de segundo orden es

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_iD_ju.$$

Ejemplo 2.6. *La ecuación*

$$u_t = u_{xxx} + uu_x, \qquad u = u(x,t), \;\; x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.16}$$

es una ecuación diferencial de tercer orden, semi-lineal, ya que a pesar de no ser lineal por el término uu_x la parte principal que es u_{xxx}, es lineal. Esta ecuación es conocida como ecuación de Korteweg- de Vries *(KdV) y ella describe la propagación de ondas no lineales en medios dispersivos no disipativos. Vea ([8]).*

Ejemplo 2.7. *La ecuación*

$$u_t + uu_x = ku_{xx}, \qquad k \;\; constante, \qquad u = u(x,t), \;\; x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \tag{2.17}$$

es una ecuación diferencial de segundo orden, semi-lineal y conocida como Ecuación de Burger. Esta ecuación es no lineal por causa del sumando uu_x; sin embargo es semi-lineal por que la parte principal de la ecuación, que es ku_{xx}, es lineal.

Ejemplo 2.8. *La ecuación de Schrodinger*

$$\imath\partial_t\psi = -\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi, \quad donde \quad \psi = \psi(x,t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.18}$$

donde V(x) es una función con valores reales, h es constante de Plank, *$m > 0$, $\imath = \sqrt{-1}$, es una E.D.P de segundo orden semi-lineal. Ella describe la interacción de una partícula cuántica de masa m con potencial V(x). Ejemplo clásico del potencial V(x) es $V(x) = |u(x,t)|^k$, $k > 0$.*

2.2. Linealidad y Superposición

Consideremos E.D.P's lineales de orden k con n variables independientes $x_1, ..., x_n$, esto es, consideremos una E.D.P de la forma .

$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x). \tag{2.19}$$

Podemos reescribir la ecuación E.D.P (2.19) en la forma

$$Lu = f, \tag{2.20}$$

donde $(Lu)(x)=\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u$. A cada función u (suficientemente diferenciable) le corresponde una única función Lu; de esta forma definimos un *operador* L. Más explicitamente, si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y si las funciones $a_\alpha(x)$ son continuas en Ω con valores reales, podemos definir

$$\begin{aligned} L:\ C^k(\Omega) &\longrightarrow C(\Omega) \\ u &\longmapsto\ Lu, \end{aligned} \tag{2.21}$$

donde Lu es dado por la fórmula (2.20). El término *operador* es usado para enfatizar que la aplicación L está definida entre espacios de funciones, esto es, L lleva una función u (con ciertas propiedades) en otra función Lu. El operador L es un ejemplo de un *operador diferencial parcial.*
Como la E.D.P (2.19) es lineal, el operador diferencial parcial L es también un operador diferencial lineal, esto es,

$$\begin{aligned} L(u+v) &= L(u) + L(v), \\ L(\beta u) &= \beta L(u), \end{aligned}$$

para todo u, v en el dominio de L y cualquier escalar $\beta \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.9. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$u_{xy} = 0, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.22}$$

Busquemos soluciones clásicas de la ecuación, esto es, soluciones que satisfacen a (2.22) puntualmente.
En este caso podemos definir el operador

$$\begin{aligned} L: C^2(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow C(\mathbb{R}^2) \\ u(x,y) &\longmapsto\ L(x,y) = u_{xy}(x,y). \end{aligned}$$

Para resolver la ecuación fijamos x e integramos en relación a la variable y. Así obtenemos que

$$u_x = \widetilde{\psi}(x),$$

donde $\widetilde{\psi}$ es una función arbitraria de clase $C^1(\mathbb{R})$. Fijando la variable y e integrando en relación a x, obtenemos

$$u(x,y) = \int \widetilde{\psi}(x) + \phi(y) = \psi(x) + \phi(y),$$

donde ψ es una primitiva de la función $\widetilde{\psi}$ y ϕ es una función arbitraria de clase $C^2(\mathbb{R})$. Note que como $\widetilde{\psi}(x)$ es arbitraria la función $\psi(x)$ también lo es.
Consecuentemente el espacio de las soluciones clásicas de la ecuación diferencial $u_{xy} = 0$ es precisamente el conjunto

$$\{u \in C^2(\mathbb{R}^2) : u(x,y) = \psi(x) + \phi(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \psi, \phi \in C^2(\mathbb{R}^2)\}. \tag{2.23}$$

Notemos que el espacio solución es un espacio vectorial de dimensión infinita.
El ejemplo anterior nos lleva a pensar en la importancia que tiene el espacio de funciones donde estamos buscando la solución de una E.D.P, la noción intuitiva de solución de una E.D.P es que, una solución es una función que satisface la ecuación puntualmente sin embargo esta noción es muy general. De hecho existen muchas interpretaciones de esta noción, generalizando inclusive el concepto de función, a través de lo que se conoce como *Teoría de las distribuciones.* (vea [5],[7])

Retornando al ejemplo (2.9), podemos cuestionarnos sobre la posibilidad de crear nuevas soluciones a partir de combinaciones lineales finitas e infinitas. La respuesta a esta pregunta se conoce en la literatura como principio de superposición y es dada por el siguiente teorema ([6])

Teorema 2.10. *(*Principio de Superposición*). Sea L un operador diferencial parcial lineal de orden k cuyos coeficientes estan definidos en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Sea $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de clase C^k definidas en Ω, las cuales satisfacen la E.D.P lineal homogénea $Lu = 0$. Entonces, si $\{\beta_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de números tal que la serie*

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m u_m(x) \tag{2.24}$$

es uniformemente convergente y k veces diferenciable en Ω, entonces u satisface $Lu = 0$.

Demostración. Consideremos el caso en el cual $k = 1$ ó $k = 2$. Notemos que en este caso el operador L es definido por

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u(x) + c(x)u(x). \tag{2.25}$$

Por hipótesis, para cualquier $x \in \Omega, 1 \leq i, j \leq n$

$$\begin{aligned}
u(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x), \\
D_i u(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i u_m(x), \\
D_i D_j u(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i D_j u_m(x),
\end{aligned}$$

y dichas series convergen. Por lo tanto, para todo $x \in \Omega$

$$\begin{aligned}
(Lu)(x) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u(x) + c(x)u(x) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i D_j u_m(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m D_j u_m(x) + c(x) \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m(x) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u_m(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u_m(x) + c(x) u_m(x) \right] \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m (L u_m)(x) = 0.
\end{aligned}$$

Así queda demostrado el Teorema para el caso $k = 1$, $k = 2$. El caso general puede ser demostrado de manera análoga. $\square$

2.3. Condiciones Iniciales y Condiciones de Frontera.

Una diferencia importante entre una ecuación diferencial parcial y una ecuación diferencial ordinaria es la información adicional necesaria para determinar la unicidad de la solución.
Recordemos que cuando trabajamos con ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, aparecen constantes arbitrarias las cuales pueden ser determinadas colocando condiciones iniciales, esto es, fijando valores de la solución y de sus derivadas hasta cierto orden en un determinado punto. Podemos tener también la unicidad de la solución, en el caso de intervalos finitos, llamadas condiciones de frontera.
Cuando se trata de una ecuación en derivadas parciales, la situación es un tanto diferente; así sea en el caso lineal, la solución general, cuando es posible encontrarla, envuelve

funciones arbitarias de las variables dependientes, como vimos en el ejemplo (2.9), de manera que existe un grado de generalidad mucho mayor con relación a la forma de la solución. En el caso de una E.D.P, el espacio de las variables independientes es multidimensional; buscamos soluciones definidas en un conjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^n$. Es natural reemplazar los extremos del intervalo, en el caso $n = 1$ (E.D.O), por la frontera $\partial\Omega$ del conjunto Ω.

2.3.1. Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera son condiciones que imponemos sobre el valor de la solución y de sus derivadas en el borde o frontera $\partial\Omega$ del dominio Ω. Las condiciones de frontera pueden ser llamadas, dependiendo de la literatura, condiciones de contorno.
Las condiciones de frontera aparecen de manera natural en la descripción de fenómenos físicos independientes del tiempo. Estas condiciones pueden ser representadas como

$$\alpha u(x) + \beta\frac{\partial u}{\partial n} = h(x), \quad x \in \partial\Omega \tag{2.26}$$

donde α y β son constantes dadas, $h(x)$ es una función dada definida sobre $\partial\Omega$ y $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada normal de u.
Existen varios tipos de condiciones de frontera; dos de ellos son, las condiciones de tipo Neumann y las condiciones de tipo Dirichlet

Condiciones de Neumann

Son condiciones impuestas sobre la derivada normal de la función u, en la frontera $\partial\Omega$ de Ω, esto es, cuando $\alpha = 0$ en la ecuación (2.26)

$$\beta\frac{\partial u}{\partial n}(x) = h(x), \;\; x \in \partial\Omega. \quad \text{Condición tipo Neumann.}$$

Ejemplo 2.11. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$. Consideremos el problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), & en \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = h(x), & sobre \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.27}$$

donde f y h son funciones dadas, definidas sobre Ω y $\partial\Omega$ respectivamente.
El problema presentado en el ejemplo (2.11) es un problema con condiciones de frontera de tipo Neumann. Observemos que si u es solución de (2.27), dicha solución no es única. De hecho si definimos la nueva función $\vartheta = u + c$, donde c es cualquier constante, podemos ver que ϑ es otra solución de (2.27).

Condiciones de Tipo Dirichlet

Son condiciones impuestas sobre el valor de la función en la frontera $\partial\Omega$ del dominio Ω, esto es $\beta = 0$ en la ecuación (2.26)

$$\alpha u(x) = h(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad \text{Condición tipo Dirichlet.}$$

Ejemplo 2.12. *sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$. Consideremos el problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ u = h(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

donde f y h son funciones dadas, definidas sobre Ω y $\partial\Omega$ respectivamente. El problema del ejemplo (2.12) es un problema con condiciones de frontera de tipo Dirichlet.
Nos adelantamos a observar que el ejemplo (2.12) tiene solución única. De hecho supongamos que ω es otra solución del ejemplo (2.12). Entonces ω satisface:

$$\begin{cases} \Delta\omega = f(x) & x \in \Omega, \\ \omega = h(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Sea $\vartheta = u - \omega$. entonces la nueva función ϑ satisface el problema

$$\begin{cases} \Delta\vartheta = 0, & x \in \Omega, \\ \vartheta = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.28}$$

Multipliquemos la primera ecuación en (2.28) por una función arbitraria $\phi \in C^2(\Omega)$ tal que $\phi = 0$ en $\partial\Omega$, e integramos por partes. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta\vartheta\phi &= \int_\Omega 0\phi = 0 \\ &\Rightarrow -\int_\Omega \nabla\vartheta\nabla\phi + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\vartheta}{\partial n}\cdot\phi = 0, \\ &\Rightarrow -\int_\Omega \nabla\vartheta\nabla\phi = 0, \quad \textit{para} \quad \phi \in C^2(\Omega). \end{aligned}$$

Tomando en particular $\phi = \vartheta$ tenemos que $\int_\Omega |\nabla\vartheta|^2 = 0$ entonces $\nabla\vartheta = 0$ en Ω.
Si $\nabla\vartheta = 0$ en Ω, entonces ϑ es constante en Ω. Como $\vartheta = 0$ sobre $\partial\Omega$ entonces $\vartheta = 0$ y así $u = \omega$.
Consecuentemente, el problema del ejemplo(2.12) tiene solución única.

Observación 2.13. *Notemos aquí que dada una E.D.P, no podemos imponer condiciones de tipo Neumann y condiciones de tipo Dirichlet sobre $\partial\Omega$ simultáneamente, esto* *es, no podemos plantear un problema como*

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) & x \in \Omega, \\ u = g(x), & x \in \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = h(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

puesto que el problema queda sobredeterminado. Lo que si podemos hacer es dividir la frontera $\partial\Omega$ en dos partes disjuntas Γ_1 y Γ_2 e imponer una condición de Dirichlet sobre Γ_1 y una condición de tipo Neumann sobre Γ_2, como por ejemplo,

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) & x \in \Omega, \\ u = g(x), & x \in \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = h(x), & x \in \Gamma_2. \end{cases}$$

2.3.2. Condiciones Iniciales

Una pregunta interesante es como generalizar el concepto de condiciones iniciales de una E.D.O para una E.D.P.
Nuevamente recordemos que en el caso una E.D.P. el espacio de las variables independientes es multidimensional. Al tener mas de una variable $x_1, x_2, .., x_n$, es natural fijar una de las variables e imponer el valor de la solución u y de sus derivadas parciales en relación a la variable fija como función de las otras variables. Por ejemplo, si las variables independientes son t y x, podemos considerar $t = 0$ y colocar condiciones como:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = g(x), \end{cases}$$

siendo f y g funciones dadas.
El hecho de asumir en el ejemplo $t = 0$, significa que estamos colocando condiciones sobre el valor de la solución y de sus derivadas a lo largo de la curva $t = 0$.
Si en lugar de 2 variables, tenemos 3 variables t, x, y y asumimos $t = 0$, estamos imponiendo condiciones sobre el valor de la solución u y sus derivadas ya no a lo largo de la curva $t = 0$ sino a lo largo de la superficie $t = 0$. Con esta introducción podemos generalizar el concepto de condiciones iniciales de una E.D.O para una E.D.P, diciendo que una condición inicial para una E.D.P es una condición en la cual imponemos el valor de la solución y de sus derivadas normales a lo largo de una curva inicial ($n = 2$), una superficie inicial ($n = 3$) o una "hipersuperficie" inicial ($n > 3$). En este caso el problema se le dice *problema de Cauchy o problema de valor inicial.*

Ejemplo 2.14. *Consideremos el problema*

$$\begin{cases} u_y(x,y) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,g(x)) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde f y g son funciones dadas. El ejemplo (2.14) es un problema de valor inicial o problema de Cauchy. La E.D.P envuelta es de primer orden. Notemos que la condición inicial es dada sobre la curva $y = g(x)$. Esta curva es llamada curva inicial.

Ejemplo 2.15. *Consideremos el problema*

$$\begin{cases} xu_x + yu_y = 0, \quad x^2 + y^2 < 4, \\ u(2\sin t, 2\cos t) = t\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Este es un problema con condiciones iniciales donde la E.D.O envuelta en la ecuación lineal de primer orden es $xu_x + yu_y = 0$ y el dominio de Ω es dado por el interior del círculo $x^2+y^2 < 4$. La condición inicial es dada por la curva $(2\sin t, 2\cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Esta curva corresponde a la circunferencia con centro cero y radio 2.

En el próximo capítulo analizaremos las condiciones que garantizan la existencia de solución para un problema de ecuación diferencial de primer orden con condiciones iniciales .

2.3.3. Problemas mixtos

Dada una E.D.P, podemos considerar condiciones iniciales junto con una condición de frontera. A este tipo de problemas los llamamos *Problemas mixtos.* Veamos el siguiente ejemplo que comprende a la formulación matemática del problema de la conducción del calor. Representemos por V la región del plano (x, t) determinada por:

$$\mathrm{V}=\{(x,t) : 0 < x < L, t > 0\}.$$

La frontera $\partial\mathrm{V}$, de V es dada por las semirectas $\{x = 0,\, t > 0\}$, $\{x = L,\, t > 0\}$ y por el segmento de recta $\{0 \leq x \leq L,\, t = 0\}$. El problema de la ecuación del calor consiste en determinar una función real $u(x, t)$ definida en $\overline{\mathrm{V}}$ que satisfaga a la ecuación del calor

$$u_t = ku_{xx}, \quad (x, t) \in \mathrm{V},$$

que verifica la condición inicial

$$u(x, t) = f(x), \quad (0 \leq \ x \leq L), \quad \text{(Condición Inicial)},$$

donde $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ es una función dada, y, finalmente, que satisfaga las condiciones de frontera

$$\begin{cases} u(0, t) = h(t), \quad \text{(condición de frontera)} \\ u(L, t) = g(t), \quad \text{(condición de frontera)} \end{cases}$$

donde $h(t)$ y $g(t)$ son funciones dadas que representan el valor de la temperatura u en los extremos $x = 0$ y $x = L$, respectivamente.
Una manera de obtener la solución de este problema mixto es usando el clásico método de Fourier, (o Separación de Variable). La descripción de este método se sale de los objetivos de esta monografía, sin embargo, referimos al lector interesado a que vea el libro [3].

CAPÍTULO 3

Ecuaciones diferenciales parciales de primer orden

El objetivo de este capítulo es presentar un estudio sobre la existencia de solución de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden con condiciones iniciales; explicitamente daremos una introducción al concepto de curvas características planas y con ello, presentamos un Teorema de existencia y unicidad de soluciones para un problema de primer orden con condiciones iniciales .

3.1. Ecuaciones diferenciales parciales de primer orden lineales

Como ya sabemos, las E.D.P's de primer orden lineales estan dadas por:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)D_j u + b(x)u + c(x) = 0, \tag{3.1}$$

donde algunos de los coeficientes $a_j(x)$ no es identicamente nulo. Si añadimos a la ecuación (3.1) una condición inicial, cómo garantizar la existencia y unicidad de solución? Para introducirnos en este aspecto, iniciamos analizando el siguiente ejemplo

Ejemplo 3.1. *Consideremos la E.D.P lineal de primer orden con condiciones inicales*

$$\begin{cases} u_y(x,y) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,g(x)) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.2}$$

donde $g(x)$, $f(x)$ son funciones de clase $C^1(\mathbb{R})$ dadas. Como vimos en el Capítulo 2, este problema corresponde a un problema de Cauchy. La condición inicial es dada por $u(x,g(x)) = f(x), x \in \mathbb{R}$, lo que indica que la función u que deseamos encontrar es conocida a lo largo de al curva $y = g(x)$. Esta curva $y = g(x)$ es conocida como la curva inicial.

Para resolver el problema del valor inicial (3.2), como la derivada parcial de u en relación a y es identicamente cero, tenemos que u es constante en relación a y, luego integrando la ecuación $u_y(x,y) = 0$, tenemos

$$u(x,y) = h(x), \quad para \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.3}$$

donde h es una función arbitraria de clase $C^1(\mathbb{R})$. La expresión (3.3) es válida para (x,y) en $\mathbb{R}^2$; así tomando $y = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$h(x) = u(x,g(x)) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \;\; \Rightarrow u(x,y) = f(x). \tag{3.4}$$

Con lo anterior se demuestra que si $u(x,y) = f(x)$ es una solución clásica del problema (3.2), tal $u(x,y)$ es dada por (3.4) y viceversa. Consecuentemente el problema (3.2) tiene solución única.

Notemos que en el problema se exige que el dato $f(x)$ sea una función de clase $C^1(\mathbb{R})$. Esto es debido a que estamos buscando soluciones clásicas, esto es, soluciones de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$. Sin embargo, para datos $f(x)$ menos regulares, podemos obtener soluciones con menos regularidad.

Notemos también que si consideramos la ecuación $u_y(x,y) = 0$ sujeta a la condición inicial $u(x,g(x)) = f_\xi(x)$, donde ahora el dato $f_\xi(x) \in C(\mathbb{R})$ es una *perturbación* continua de $f(x)$, la solución $u_\xi(x,y)$ correspondiente, también se aproxima de $u(x,y)$. Esto es evidente ya que la solución es dada por la condición inicial. Esta última propiedad nos indica que existe una dependencia continua en los datos, esto es, datos *próximos*, soluciones *próximas* con respecto a la métrica de $C(\mathbb{R})$,esto es, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\cdot|$.

Mensionamos aquí que un problema que posee solución, donde dicha solución es única y además existe dependencia continua de los datos, es un problema bien puesto. En conclusión el problema (3.2) es un *problema bien puesto.*

Consideremos ahora el problema

$$\begin{cases} u_y(x,y) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0,y) = f(y), & y \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.5}$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ es dada. La única diferencia entre el problema (3.2) y (3.5) es la curva inicial. De hecho, la curva inicial en (3.2) es el gráfico de una función de x, en tanto que en (3.5) la curva inicial es el eje y. Sin embargo esta diferencia lleva a que el problema (3.2) sea un problema bien puesto en tanto que el problema (3.5) no lo es. De hecho, si derivamos la condición inicial en (3.5) en relación a y obtenemos

$$\begin{cases} u_y(x,y) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u_y(0,y) = f'(y), & y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

y por lo tanto, $f'(y) = 0$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Con ello podemos concluir que para el problema (3.5) tenga solución es necesario que la función f cumpla $f'(y) = 0$, esto es f debe ser constante. Si f es constante entonces $f(y) = k$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Como la solución general de $u_y(x,y) = 0$ es

$$u(x,y) = g(x), (x,y) \in \mathbb{R}$$

donde $g(x)$ es cualquier función de clase $C^1(\mathbb{R})$, entonces la solución de (3.5) es

$$u(x,y) = g(x),$$

donde $g(x)$ es cualquier función de clase $C^1(\mathbb{R})$, satisfaciendo $g(0) = k$.
En conclusión, si f es constante, el problema (3.5) tiene infinitas soluciones y si f no es constante el problema (3.5) no tiene solución.

Consideremos ahora el problema

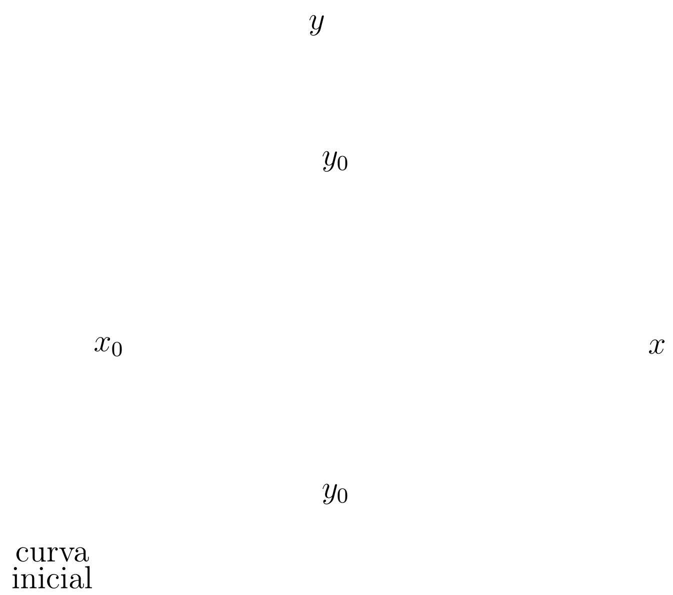
$$\begin{cases} u_y(x,y) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x_0,y) = f(y), & y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.6}$$

En este caso la curva inicial es una recta vertical. Análogamente a (3.5), el problema (3.6) no tiene solución si f no es una constante y tiene infinitas soluciones si f es constante.

Qué sucede para curvas mas generales? Para tratar de responder a esa pregunta veamos el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} u_y(x,y) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(1-y^2,y) = f(y), \end{cases} \tag{3.7}$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ es dada



Como ya vimos la solución general de $u_y = 0$ es una función de x; luego si u es la solución de (3.7) dado $x_0 \in \mathbb{R}$, $u(x_0, y) = g(x_0)$ es constante, esto es $u(x, y)$ es constante a lo largo de las rectas verticales. Dado $x_0 < 1$, la recta vertical $x = x_0$ intersecta la curva inicial en dos puntos (x_0, y_0) y $(x_0, -y_0)$. Así si u es solución,

$$f(y_0) = u(x_0, -y_0) = f(-y_0).$$

Consecuentemente, para que el problema (3.7) tenga solución, es necesario que

$$f(y) = f(-y), \quad para \quad y \in \mathbb{R},$$

esto es, es necesario que f sea par. Así si f no es par, el problema no tiene solución. si f es par esperamos que el problema tenga infinitas soluciones pues u no está determinada para $x > 1$. Dado $x_0 > 1$, la recta vertical $x = x_0$ no corta la curva inicial. En verdad, como estamos buscando soluciones de clase C^1, aun cuando f es par, es necesario imponer una condición adicional. Observemos que la solución, por lo que vimos anteriormente, debe ser dada por

$$u(x, y) = f(\sqrt{1-x}) \quad si \quad x \leq 1.$$

Como queremos que $u \in C^1(\mathbb{R})$, es necesario que exista la derivada

$$\frac{d}{dx}(f(\sqrt{1-x}))|_{x=1},$$

y, en este caso, la solución del problema (3.7) son dadas por

$$u(x, y) \begin{cases} f(\sqrt{1-x}), & si \quad x \leq 1, \\ g(x), & si \quad x > 1, \end{cases} \tag{3.8}$$

donde $g \in C^1([1,\infty))$ satisface

$$\begin{aligned} g(1) =& f(0) \\ g'(1) =& \frac{d}{dx} f(\sqrt{1-x})|_{x=1}. \end{aligned}$$

El estudio de este ejemplo deja claro que el problema de cauchy para la ecuación

$$u_y = 0, \quad en \quad \mathbb{R}^2,$$

tiene solución única para cualquier condición inicial $f \in C^1(\mathbb{R})$ si la curva inicial es tal que, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, la recta $x = x_0$ corta la curva en exactamente un punto; en otra palabras, si la curva inicial es el grafico de una función $y = p(x)$.

Si revisamos el procedimiento que usamos para resolver los problemas de Cauchy (3.2), (3.5), (3.7), nos damos cuenta que realizamos un proceso de integración a lo largo del segmento de recta que une un punto de la forma $(x_0, g(x_0))$ con el punto (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$. este procedimiento será generalizado y será presentado con detalle en la siguiente sección.

3.2. Curvas Características

Como vimos en los ejemplos anteriores, todas las soluciones de la E.D.P $u_y = 0$ en $\mathbb{R}^2$ son constantes en rectas verticales y las curvas iniciales "adecuadas" son las que tienen tangentes verticales. Esto nos permite dar la siguiente definición

Definición 3.2. *(Curvas Características planas) Dada una E.D.P de primer orden, las curvas características para dichas E.D.P son curvas a lo largo de las cuales las E.D.P es una derivada total.*

Observemos aquí, que una vez encontradas las curvas características, como a lo largo de estas curvas la E.D.P es una derivada total, entonces podemos integrar a lo largo de tales curvas y resolver la E.D.P. Observemos que este procedimiento fue realizado para resolver la ecuación $u_y = 0$, de hecho allí integramos en relación a y, esto es a lo largo de la recta $x = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.3. *Consideremos la ecuación no homogénea*

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = h(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.9}$$

donde h(x,y) es una función en C($\mathbb{R}^2$) dada. Las curvas características planas también son las rectas $x = x_0, x_0 \in \mathbb{R}$. De hecho notemos que a lo largo de la recta $x = x_0$ la ecuación (3.9) queda:

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x_0, y) = h(x_0, y).$$

Ejemplo 3.4. *Consideremos el problema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = h(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, p(x)) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.10}$$

donde $h \in C(\mathbb{R}^2), p, f \in C^1(\mathbb{R})$, son funciones dadas.
Para obtener la solución de (3.10) en el punto (x_0, y_0), basta integrar a lo largo del segmento de recta que une el punto $(x_0, p(x_0))$, con el punto (x_0, y_0),

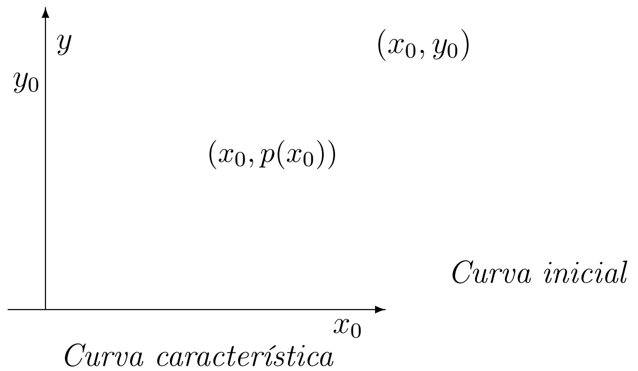


Fig.5 Representación de la curva inicial y las características

Si u es solución de (3.10) entonces

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \int_{p(x_0)}^{y_0} u_y(x_0, t)dt + u(x_0, p(x_0)) \\ &= f(x_0) + \int_{p(x_0)}^{y_0} h(x_0, t)dt \end{aligned}$$

o sea,

$$u(x, y) = f(x) + \int_{p(x)}^{y} h(x_0, t)dt. \tag{3.11}$$

Reciprocamente, si u es dada por (3.11), entonces u es solución de (3.10). Consecuentemente el problema (3.10) tiene una única solución dada por (3.11).

Ahora vamos a generalizar las soluciones presentadas en los ejemplos anteriores para resolver ecuaciones de la forma:

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y). \tag{3.12}$$

Como vimos anteriormente existe una relación entre la curva plana inicial γ y el conjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^2$ donde queremos que exista una solución. La región Ω debe ser cubierta por curvas características planas que cortan a la curva inicial γ en un único punto. Si parametrizamos la curva inicial γ por $(\sigma(t), \rho(t)), t \in I$, donde I es un intervalo abierto, podemos escribir la ecuación (3.12) como:

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y & = c(x,y), \\ u(\sigma(t), \rho(t)) & = f(t), t \in I. \end{cases} \tag{3.13}$$

Asumamos las siguientes condiciones sobre γ $f(t)$, $a(x,y)$, $b(x,y)$ y $c(x,y)$.

- Supongamos que las funciones σ, ρ son funciones continuamente diferenciables en I esto es, σ, $\rho \in C^1(I)$ y que $\sigma'(t)^2 + \rho'(t)^2 \neq 0$ para cualquier $t \in I$. Estas condiciones sobre γ equivalen a decir que la curva inicial es “suave.”
- Supongamos que $a(x,y)$, $b(x,y)$ y $c(x,y) \in C(\Omega)$ y que las funciones $a(x,y)$ y $b(x,y)$ no se anulan simultaneamente en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, donde Ω es un conjunto abierto que contiene una vecindad de la curva γ.
- Asumamos que $f \in C(I)$.

Con las hipótesis anteriores, podemos resolver el problema (3.13). En primera instancia necesitamos encontrar las curvas características planas de la ecuación (3.12). Ya sabemos que estas curvas son curvas a lo largo de las cuales la E.D.P puede ser escrita como una derivada total.

Si C es una curva caracteristica plana, la cual es parametrizada por $(\alpha(t), \beta(t))$, entonces la derivada total de u a lo largo de la curva C, es dada por

$$\frac{d}{d\ s}[u(\alpha(s), \beta(s))] = \alpha'(s)u_x(\alpha(s), \beta(s)) + \beta'(s)u_y(\alpha(s), \beta(s)). \tag{3.14}$$

Por otro lado la ecuación (3.12) a lo largo de la curva C es dada por:

$$a(\alpha(s), \beta(s))u_x(\alpha(s), \beta(s)) + b(\alpha(s), \beta(s))u_y(\alpha(s), \beta(s)) = c(\alpha(s), \beta(s)). \tag{3.15}$$

Por lo tanto si queremos que las expresiones (3.14) y (3.15) sean iguales (para que la E.D.P sea escrita como una derivada total), necesitamos que

$$\begin{cases} \alpha'(s) & = a(\alpha(s), \beta(s)), \\ \beta'(s) & = b(\alpha(s), \beta(s)). \end{cases} \tag{3.16}$$

En este caso la ecuación puede ser reescrita como

$$\frac{d}{ds}[u(\alpha(s), \beta(s)] = c(\alpha(s), \beta(s)).$$

Notemos que la ecuación (3.16) significa geometricamente que el vector tangente a la curva C en el punto $(\alpha(s), \beta(s))$ es paralelo al vector $(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)))$.
Con lo anterior podemos concluir que las curvas "características planas" de la ecuación (3.12) son curvas suaves C que admiten la parametrización $(\alpha(s), \beta(s))$ satisfaciendo

$$\begin{cases} \alpha'(s) = a(\alpha(s), \beta(s)), \\ \beta'(s) = b(\alpha(s), \beta(s)). \end{cases} \tag{3.17}$$

Notemos que las ecuaciones (3.17) corresponden a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y este sistema tiene infinitas soluciones. Como es usual, para obtener una única solución es necesario imponer un par de condiciones iniciales.
Recordamos que por el Teorema de Picard [11], que garantiza la existencia y la unicidad de solución para una E.D.O, como las funciones $a(x, y)$ y $b(x, y) \in C^1(\Omega)$, dado $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe una solución $(\alpha(s), \beta(s))$ de (3.17) con s en una vecindad de s_0 tal que

$$\begin{cases} \alpha(s_0) = x_0, \\ \beta(s_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Teorema 3.5. *[6] (Existencia y Unicidad) Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$, I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, γ una curva suave en Ω parametrizada por $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t))$, $t \in I$, $f \in C^1(I)$ y a, b, $c \in C^1(\Omega)$.Supongamos que $a(x, y)^2 + b(x, y)^2 \neq 0$, para todo $(x, y) \in \Omega$ y*

$$det \begin{pmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & b(\sigma(t), \rho(t)) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{pmatrix} \neq 0, \forall t \in I.$$

Entonces el problema (3.13) tiene una única solución de clase C^1 en una vecindad de la curva γ en Ω, dada por $u(x_0, y_0) = f(t_0) + \int_0^{s_0} c(x(s, t_0), y(s, t_0))ds$.

Demostración. Vamos a considerar primero un caso análogo al problema (3.2), esto es, vamos a suponer que la curva inicial γ nunca es tangente a las curvas características planas: en otras palabras, el vector tangente $(\sigma(t), \rho(t))$ nunca es paralelo a $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$. Usando la terminologia de algebra lineal, los vectores $(\sigma'(t), \rho'(t))$ y $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$ son linealmente independientes, para $t \in I$. Con esta hipótesis, para cada $t \in I$, existe una única curva características plana pasando por el punto $(\sigma(t), \rho(t))$, o sea, que es solución de (3.16) y (3.18) como $x_0 = \sigma(t)$, $y_0 = \rho(t)$ en una vecindad de s_0 (que vamos a tomarla igual a cero para simplificar la notación); ademas de eso, $(\sigma(t), \rho(t))$ es el único punto de interseccion de γ que tiene una característica pues si existiese otro, en algún lugar los vectores tangentes a las dos curvas serían paralelos, lo que contradice la hipótesis. En este caso podemos entonces cubrir una vecindad de la curva γ con curvas características planas que intersectan la curva γ en exactamente un punto. Esto nos permite hacer un cambio de variable de (x, y) para (s, t): para cada $t \in I$, si denotamos la curva característica plana que pasa por $(\sigma(t), \rho(t))$ por $(x(s, t), y(s, t))$, entonces el sistema (3.16) y las condiciones (3.18) pueden ser reescritos como

$$\begin{cases} x_s(s,t) = a(x(s,t), y(s,t)), \\ y_s(s,t) = b(x(s,t), y(s,t)), \\ x(0,t) = \sigma(t), \\ y(0,t) = \rho(t); \end{cases} \tag{3.19}$$

además de eso, como los vectores $(\sigma'(t), \rho'(t))$ y $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$ son linealmente independientes,

$$det \begin{pmatrix} x_s(0,t) & x_t(0,t) \\ y_s(0,t) & y_t(0,t) \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & \sigma'(t) \\ b(\sigma(t), \rho(t)) & \rho'(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

luego, por continuidad,

$$det \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix} \neq 0$$

en una vecindad de γ. Luego la transformación $(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t))$ es localmente inyectiva, lo que nos permite hacer un cambio de variable: $v(s, t) = u(x, y)$ y así obtenemos por regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s}(s,t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x(s,t), y(s,t))\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}(x(s,t), y(s,t))\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= a(x(s,t), y(s,t))\frac{\partial u}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) + b(x(s,t), y(s,t))\frac{\partial u}{\partial y}(x,(s,t), y(s,t)). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Sustituyendo la EDP (3.12) en (3.20), obtenemos

$$v_s = c(x(s,t), y(s,t)).$$

Además de eso la condición inicial del problema (3.13) queda

$$v(0,t) = f(t) \; t \in I,$$

luego el problema que v satisface es

$$\begin{aligned} v_s = & \ c(x,(s,t),y(s,t)), \\ v(0,t) = & \ f(t) \quad t \in I. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Para cada $t \in I$ fijo, el problema (3.21) es un problema de valor inicial para una EDO de primer orden, cuya solución es obtenida integrando directamente desde $s = 0$ a s; obtenemos entonces

$$v(s,t) = \int_0^s v_s(v,t)dv + v(0,t) = \int_0^s c(x(v,t),y(v,t))dv + f(t). \tag{3.22}$$

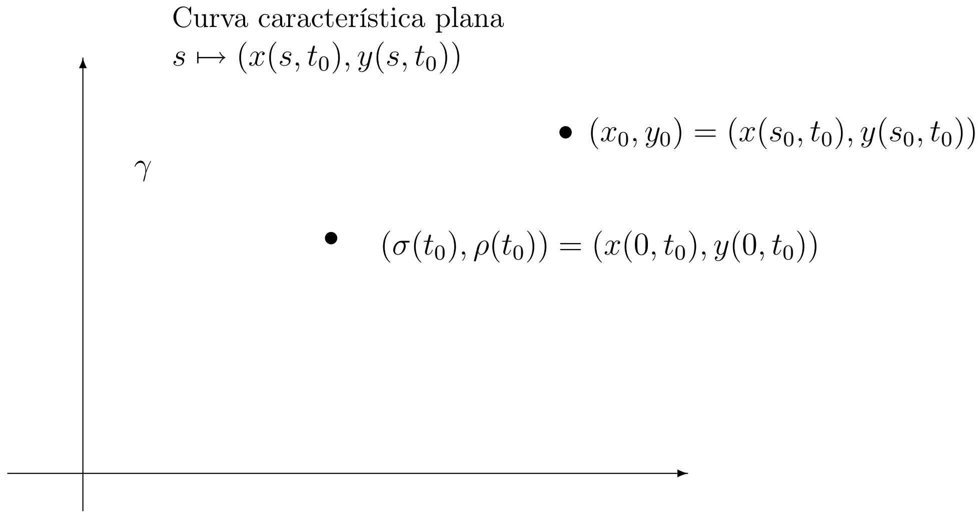


Fig 6.

Para volver a u, dado (x_0,y_0), sea $t_0 = t(x_0,y_0))$ y $s_0 = s(x_0,y_0)$ esto es, $x_0 = x(s_0,t_0)$ y $y_0 = y(s_0,t_0)$; sustituyendo $v(s,t) = u(x,y)$ en (3.22), obtenemos

$$u(x_0,y_0) = f(t_0) + \int_0^{s_0} c(x(s,t_0),y(s,t_0))ds. \tag{3.23}$$

Note que, si u es solución de (3.13), entonces u satisface (3.23); como (3.23) es de hecho solución de (3.13) (como (3.22) es solución de (3.21)), la solución del problema (3.13) es única. $\square$

Ejemplo 3.6. *Encuentre las curvas características correspondientes a la ecuación*

$$-yu_x + xu_y = 4xy. \tag{3.24}$$

De acuerdo a lo visto anteriormente, las curvas características planas corresponden a curvas de la forma $s \mapsto (\alpha(s), \beta(s))$ *satisfaciendo*

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)). \end{aligned}$$

Como en (3.24) $a(x, y) = -y$ *y* $b(x, y) = x$ *entonces tenemos*

$$\begin{cases} \alpha'(s) = -\beta(s), \\ \beta'(s) = \alpha(s). \end{cases} \tag{3.25}$$

Y así para obtener las curvas características debemos resolver el sistema de E.D.O's (3.25). Multiplicando la primera ecuación en (3.25) por $\alpha(s)$ *y la segunda ecuación (3.25) por* $\beta(s)$ *y sumando las ecuaciones resultantes tenemos*

$$\alpha(s)\alpha'(s) + \beta(s)\beta'(s) = 0$$

o sea

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}[\alpha(s)^2 + \beta(s)^2] = 0.$$

Esto implica que $\alpha(s)^2 + \beta(s)^2 =$ *constante. Consecuentemente las curvas características planas para la ecuación (3.24) son circunferencias centradas en el origen*

$$\alpha(s)^2 + \beta(s)^2 = c$$

Fig 7. Curvas características planas

Ejemplo 3.7. *Encuentre la solución del problema*

$$\begin{cases} -yu_x + xu_y = 4xy, \\ u(x,0) = f(x), x > 0. \end{cases} \tag{3.26}$$

Ya sabemos por el ejemplo anterior que las curvas características correspondientes a la E.D.P $\quad -yu_x + xu_y = 4xy$ *son circunferencias centradas en el origen.*
Notemos que la curva inicial es el semieje $y = 0, \quad x > 0$*, la cual corta ortogonalmente cada curva característica plana en exactamente un punto.*
Notemos también que cada punto (x, y) *de* $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ *pertenece a alguna de esas características*

$\bullet \ (x, y)$

curva inicial

Curva característica

Fig 8. Curvas características Vs Curva inicial

A lo largo de cada curva característica, esto es, cada circunferencia de radio r y centro en el origen, la E.D.P se expresa como

$$\frac{d}{d\theta}[u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)] = 4r^2 \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta.$$

Integramos la ultima ecuación usando coordenadas polares y así obtenemos:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u(r,0) + \int_0^{\theta(x,y)} 4r^2 \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta d\theta \\ &= 2r^2 \operatorname{sen}^2\theta|_{\theta=0}^{\theta=\theta(x,y)} + f(r) \\ &= 2y^2 + f(\sqrt{x^2+y^2}). \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución del problema (3.26) es

$$u(x,y) = 2y^2 + f(\sqrt{x^2+y^2}),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

Observemos que en $(0,0)$ *la función* $\sqrt{x^2+y^2}$ *no es derivable y la diferenciabilidad de* u *depende de la diferenciabilidad de la función* f.

Ejemplo 3.8. *Consideremos la E.D.O.*

$$2yu_x + u_y = (2y^2 + x)\operatorname{sen}(2xy), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

y encontremos las curvas planas.
En este caso $a(x,y) = 2y$ *y* $b(x,y) = 1$. *Así tenemos que las curvas características planas satisfacen el sistema de E.D.O:*

$$\begin{cases} \alpha'(s) = 2\beta(s), \\ \beta'(s) = 1. \end{cases}$$

O sea

$$\begin{cases} \beta(s) = s + c_1, \ \ c_1 \ \ \textit{constante}, \\ \alpha'(s) = 2s + 2c_1. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{cases} \beta(s) = s + c_1, \\ \alpha(s) = s^2 + 2sc_1 + c_2 = (s+c_1)^2 + c_2 - c_1^2. \end{cases}$$

Lo que nos indica que las curvas características planas son parábolas de la forma $x = y^2 + c$

Fig 9. Curvas características de $2yu_x + u_y = (2y^2 + x)\operatorname{sen}(2xy)$

Ejemplo 3.9. *Resolver el problema*

$$\begin{cases} 2yu_x + u_y = (2y^2 + x)\sin(2xy), \ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, e^{-2x}) = \cos^2(xe^{-2x}). \end{cases} \tag{3.27}$$

La curva inicial es dada $y = e^{-2x}$.*Como las curvas características son parábolas de la forma* $x = y^2 + c$, *entonces si consideramos el punto* (x_0, y_0) *de intersección entre la* *curva inicial* $y = e^{-2x}$ *con la parábola* $x = y^2 + x_0 - y_0^2$*, las tangentes son ortogonales pues la recta tangente a la parábola en el punto* (x_0, y_0) *tiene pendiente* $\frac{1}{2y_0}$*, y la recta tangente a la curva inicial en el mismo punto* (x_0, y_0) *tiene inclinación* $-2y_0$*. Estamos en condición de aplicar el Teorema (3.5)*

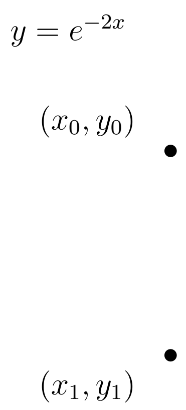


Fig 10. Curvas características Vs curva inicial

Dado cualquier punto (x_1, y_1) *de* $\mathbb{R}^2$*, él pertenece a la curva característica* $x = y^2 + x_1 - y_1^2$*, que corta a la curva inicial en el punto único* (x_0, y_0)*, de donde tenemos que*

$$\begin{aligned} x_0 &= y_0^2 + x_1 - y_1^2 \\ y_0 &= e^{-2x_0} \end{aligned}$$

Parametrizando la parábola por $(s^2 + x_1 - y_1^2, s)$ *obtenemos:*

$$\begin{aligned} u(x_1, y_1) &= u(x_0, y_0) + \int_{y_0}^{y_1} \frac{d}{ds} u(s^2 + x_1 - y_1^2, s) ds \\ &= \int_{y_0}^{y_1} (3s^2 + x_1 - y_1^2) \operatorname{sen}(2s^3 + 2s(x_1 - y_1^2)) ds + \cos^2(x_0 y_0) \\ &= \int_{y_0}^{y_1} (3s^2 + x_1 - y_1^2) 2 \operatorname{sen}(s^3 + s(x_1 - y_1^2)) \cos(s^3 + s(x_1 - y_1^2)) ds + \cos^2(x_0 y_0) \\ &= \int_{y_0(y_0^2 + x_1 - y_1^2)}^{y_1(y_1^2 + x_1 - y_1^2)} 2 \operatorname{sen} r \cos r dr + \cos^2(x_0 y_0) \\ &= \cos^2 r \Big|_{r = x_0 y_0}^{r = x_1 y_1} + \cos^2(x_0 y_0) = \cos^2(x_1 y_1). \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución del problema (3.27) es

$$u(x, y) = \cos^2(xy),$$

CAPÍTULO 4

Singularidades y ondas de choque

El objetivo de este capítulo es mostrar algunos ejemplos de lo que puede suceder con problema de Cauchy si el teorema de existencia y unicidad falla o si la ecuación no es lineal. Inicialmente presentamos algunas situaciones donde el teorema no es válido y posteriormente haremos un estudio introductorio a la propagación de singularidades y ondas de choque, aspectos que aparecen en ciertos tipos de problemas no lineales y que ha sido objetivo de muchas investigaciones en las últimas décadas.

4.1. Sobre el Problema de Cauchy

En el capítulo anterior definimos las curvas características planas para la ecuación de primer orden

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y), \tag{4.1}$$

como siendo las curvas que satisfacen el sistema E.D.O's:

$$\begin{cases} \alpha'(\jmath) &= a(\alpha(\jmath), \beta(\jmath)), \\ \beta'(\jmath) &= b(\alpha(\jmath), \beta(\jmath)). \end{cases} \tag{4.2}$$

Si la curva inicial $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t))$, $t \in I$, no es tangente a las curvas planas, vimos que el problema

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y), \\ u(\sigma(t),\rho(t)) = f(t), \quad \mathrm{t} \in I \ , \end{cases} \tag{4.3}$$

tiene una única solución. Una pregunta que surge es la siguiente: ¿Qué sucede si la curva inicial γ es una curva caracteristica plana? Por los ejemplos del capítulo anterior, esperamos que el problema no tenga solución o tenga infinidad de soluciones. De hecho, esto es lo que sucede y lo que diferencia un caso de otro es el concepto de curva caracteristica especial.

Definición 4.1. *(Curva característica especial) Una curva característica especial para la ecuación (4.1) es una curva suave*

$$s \longmapsto (\alpha(s), \beta(s), \zeta(s)) \in \mathbb{R}^3,$$

que tiene tangente en el punto $(\alpha(s)$,$\beta(s)$,$\zeta(s))$ *paralela al vector* $(a(\alpha(s),\beta(s)), b(\alpha(s),\beta(s)), c(\alpha(s),\beta(s)))$; *o equivalentemente,* α, β *y* ζ *satisfacen*

$$\begin{cases} \alpha'(s) = a(\alpha(s),\beta(s)), \\ \beta'(s) = b(\alpha(s),\beta(s)), \\ \zeta'(s) = c(\alpha(s),\beta(s)). \end{cases} \tag{4.4}$$

En el caso en el que la curva inicial γ no es tangente a las curvas características planas, la superficie solución es generada por la curva Γ: $t \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (\sigma(t),\rho(t),f(t))$ y por las curvas características en $\mathbb{R}^3$ que intersectan Γ. De hecho, dada una curva característica especial de (4.1) que corta a Γ en el punto $(\sigma(t_0),\rho(t_0),f(t_0))$, podemos hallar una parametrización

$$s \longmapsto (\alpha(s), \beta(s), \zeta(s)).$$

satisfaciendo (4.4) con

$$(\alpha(0),\beta(0),\zeta(0)) = (\sigma(t_0),\rho(t_0),f(t_0)). \tag{4.5}$$

Así, la caracteristica plana que pasa por el punto $(\sigma(t_0),\rho(t_0))$ es precisamente $(x(s,t_0),y(s,t_0)) = (\alpha(s),\beta(s))$ y por lo tanto, usando la ecuación (3.11) del capítulo 3 tenemos:

$$\begin{aligned} u(\alpha(s),\beta(s)) &= f(t_0) + \int_0^s c(\alpha(\tau),\beta(\tau))d\tau \\ &= f(t_0) + \int_0^s \zeta'(\tau)d\tau \\ &= f(t_0) + \zeta(s) - \zeta(0) \\ &= \zeta(s). \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que dicha curva característica está en la superficie solución.
Por otro lado, la superficie solución es parametrizada por

$$(s,t) \longmapsto (x(s,t), y(s,t), v(s,t)).$$

Para cada t_0 fijo, definiendo

$$\begin{cases} \alpha(s) = x(s,t_0), \\ \beta(s) = y(s,t_0), \\ \zeta(s) = v(s,t_0), \end{cases}$$

por lo visto en el capítulo 2 podemos ver que α, β y ζ satisfacen (4.4) y (4.5) y por lo tanto, para cada t_0 fijo, la curva

$$s \longmapsto (x(s,t_0), y(s,t_0), v(s,t_0))$$

es una característica que corta Γ en $s = 0$, lo cual prueba que de hecho la superficie solución es generada por Γ y por las curvas características,

z

Curvas características

Γ

y

x

Fig 11. Superficie Solución

Supongamos que γ es una característica plana. Veremos que si Γ es una característica, el problema tiene infinitas soluciones y si Γ no es característica, el problema no tiene solución.
supongamos que Γ es una curva característica especial para (4.1). Sea δ una curva plana cualquiera que nunca es tangente a las características planas y que cortan γ en el punto $(\sigma(s_0), \rho(s_0))$, sea $t \longmapsto (p(t), q(t))$ una parametrización de δ con

$$(p(0), q(0)) = (\sigma(s_0), \rho(s_0)) \tag{4.6}$$

y sea r una función de clase C^1 arbitraria satisfaciendo

$$r(0) = f(s_0). \tag{4.7}$$

Por lo que vimos anteriormente, el problema

$$\begin{aligned} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y &= c(x,y) \\ u(p(t),q(t)) &= r(t), \end{aligned}$$

tiene una solución u en una vecindad de δ; además, la superficie solución contiene la curva

$$H : t \longmapsto (p(t), q(t), r(t)) \tag{4.8}$$

y contiene todas las características de la E.D.P que cortan H. En particular, la superficie solución contiene Γ pues

$$(p(0), q(0), r(0)) = (\sigma(s_0), \rho(s_0), f(s_0)) \in H \cap \Gamma,$$

debido a (4.6) y (4.7). Consecuentemente n es solución de (4.3). Como existe una cantidad infinita de posibles soluciones para la curva δ y la función r, el problema tiene una infinidad de soluciones.

Supongamos ahora que γ es una característica plana pero que Γ no es una característica especial para (4.1). Supongamos por reducción al absurdo, que el problema (4.3) tiene solución. Si u es solución, cualquier que sea $t \in I$, derivando la condición inicial obtenemos

$$\sigma'(t)u_x(\sigma(t), \rho(t)) + \rho'(t)u_y(\sigma(t), \rho(t)) = f'(t). \tag{4.9}$$

Por otro lado la ecuación (4.1) en el punto $(\sigma(t), \rho(t))$ se transforma en

$$a(\sigma(t), \rho(t))u_x(\sigma(t), \rho(t)) + b(\sigma(t), \rho(t))u_y(\sigma(t), \rho(t)) = c(\sigma(t), \rho(t)). \tag{4.10}$$

Comparando las ecuaciones (4.9) y (4.10) y usando el hecho de que los vectores $((\sigma'(t), \rho'(t)))$ y $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)), c(\sigma(t), \rho(t)))$ son paralelos, ya que γ es una curva característica plana, obtenemos que los vectores en $\mathbb{R}^3$
$((\sigma'(t), \rho'(t), f'(t))$ y $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)), c(\sigma(t), \rho(t)))$ también son paralelos esto es, Γ es una característica especial, lo que contradice la hipótesis. Consecuentemente, el problema 4.3 no tiene solución en este caso.

Ejemplo 4.2. *Consideremos el problema*

$$\begin{cases} u_x(x,y) = 2x, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) = f(x). & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En este caso las curvas características planas son las rectas horizontales, luego el problema tiene solución si y solo si, la curva

$$\Gamma : t \longrightarrow (t, 0, f(t))$$

es una característica especial, esto es, los vectores $(1, 0, 2t)$ *y* $(1, 0, f'(t))$ *son paralelos, lo que equivale a decir que* $f'(t) = 2t$*, o sea,*

$$f(t) = t^2 + c, \quad c \text{ constante.}$$

Así, el problema solo tiene solución si $f(x) = x^2 + c$*, para alguna constante* c*. En este caso, tomando la curva* δ *como siendo el eje de los* y *y* $r(y)$ *de clase* C^1 *con*

$$r(0) = f(0) = c, \tag{4.11}$$

obtenemos:

$$\begin{cases} u_x(x, y) & = 2x, \\ u(0, y) & = r(y), \end{cases}$$

cuya solución es:

$$u(x, y) = u(0, y) + \int_0^x 2tdt = r(y) + x^2.$$

Así en el caso en que $f(x) = x^2 + c$*, el problema tiene como solución todas la funciones de la forma*

$$u(x, y) = r(y) + x^2,$$

donde r *es una función de clase* C^1 *y satisface(4.11).*

Volviendo al problema (4.3), el caso en que la curva inicial γ es una curva característica plana en un caso extremo. Qué sucede si la curva γ es tangente a una característica plana en un determinado punto? Puede suceder que, para cualquier vecindad del punto donde γ es tangente a una curva característica plana, siempre exista una característica plana que corte γ mas de una vez y otra que no corte γ pasando por esa vecindad (vea la figura)

$(\sigma(t_0), \rho(t_0))$

•　　　　　　Curvas características

Fig 12

La existencia de una característica plana cortando γ más de una vez, hace que el dato inicial f cumpla alguna condición para que exista una solución, pues el valor de la solución en uno de los puntos de corte, determina el valor de la solución a lo largo de toda la curva característica plana. La existencia de una curva característica plana que no corta a γ hace que la solución, si existe, no sea única, pues el valor de la solución a lo largo de tales características no está determinado. Puede ocurrir que a pesar de esa tangencia, por cada punto de γ pase exactamente una característica plana que corte a γ solamente en ese punto; este hecho nos permite integrar a lo largo de las características planas, a pesar de que podamos perder diferenciabilidad.

Ejemplo 4.3. *consideremos el problema*

$$\begin{cases} u_x(x,y) = x^2, \\ u(x,x^3) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En este caso las curvas características planas son las rectas $y = c$, $c \in \mathbb{R}$. La curva inicial es

$$\gamma : t \in \mathbb{R} \longrightarrow (t, t^3).$$

La curva inicial γ es tangente a la recta $y = 0$ en $t = 0$. A pesar de ello cada característica intersecta γ en un único punto. Podemos integrar a lo largo de las curvas características planas para obtener la solución:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{y^{\frac{1}{3}}}^{x} t^2 dt + f(x) \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{y}{3} + f(x) \end{aligned}$$

y

γ

características planas

(x_0, y_0)

x

$x_0^{\frac{1}{3}}$

Fig 13. Superficie Solución

4.2. Propagación de Singularidades

Regresaremos al problema:

$$\begin{aligned} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y &= c(x,y) \\ u(\sigma(t),\rho(t)) &= f(t), t \in I, \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde I es un intervalo abierto, la curva plana
$\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t))$ es una curva suave, las funciones $a(x,y), b(x,y), c(x,y)$ son de clase C^1 en algún subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ conteniendo la curva γ y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función dada.
Como vimos anteriormente si $f \in C^1(I)$ y si la curva γ no es tangente a las curvas características planas, entonces el problema (4.12) tiene una única solución clásica en una vecindad de la curva γ. La solución en el punto (x_0, y_0) es obtenida integrando la ecuación a la largo de la curva característica que pasa por $(x_0, y_0) = (x(s_0, t_0), y(s_0, t_0))$ de $s = 0$, curva que corresponde al punto

$$(\sigma(t), \rho(t)) = (x(0, t_0), y(0, t_0)),$$

hasta $s = s_0$. Por lo tanto la solución en el punto (x_0, y_0) sólo depende del dato inicial $(\sigma(t_0), \rho(t_0)) \in \gamma$; por esta razón el punto *dominio de dependencia* de (x_0, y_0). Por razones equivalentes, la *región de influencia*de una parte $\tilde{\gamma}$ de la curva γ es el conjunto de puntos por donde pasan las característica planas que intersectan $\tilde{\gamma}$.

$\tilde{\gamma}$

Fig 14. Región de influencia de $\tilde{\gamma}$

Si quitamos la hipótesis $f \in C^1(I)$ manteniendo la hipótesis sobre γ, podemos continuar de la misma forma, solo que no obtendremos las mismas soluciones clásicas. Si f o f' son discontinuas en t_0, o algunas de sus derivadas tendrá discontinuidades a lo largo de las curvas características que pasa por $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$. Consecuentemente *las singularidades son propagadas a lo largo de las característica planas*

Ejemplo 4.4. *Consideremos el problema*

$$\begin{cases} -yu_x + xu_y &= 4xy, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ \quad u(x,0) &= f(x), \qquad x \geq 0, \end{cases} \tag{4.13}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & si\ x > 1. \end{cases} \tag{4.14}$$

Como vimos anteriormente las características planas son círculos centrados en el origen y la solución del problema (4.13) esta dada por

$$u(x,y) = \begin{cases} x^2 + 3y^2 & si\ x^2 + y^2 \leq 1, \\ 1 + 2y^2 & si\ x^2 + y^2 > 1. \end{cases} \tag{4.15}$$

Observe que $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ pero u no es diferenciable en el círculo $x^2 + y^2 = 1$; u satisface la ecuación diferencial en el interior y en el exterior de este círculo, que es precisamente la curva característica plana pasando por el punto $(1,0)$.

Ejemplo 4.5. *consideremos el problema*

$$\begin{cases} u_x + bu_y &= 0, \\ \quad u(0,y) &= \dfrac{1}{y}, \quad y \neq 0, \end{cases}$$

donde b es constante. En este caso la curva inicial es el eje y solamente la función $\dfrac{1}{y}$ es discontinua en el origen. Como las curvas características son las rectas

$$y = bx + c \tag{4.16}$$

donde c es una constante, la solución del ejemplo (4.5) no estará definida a lo largo de la recta $y = bx$: La solución del ejemplo (4.5) esta dada por

$$u(x,y) = \frac{1}{y - bx}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ con\ y \neq bx,$$

u satisface al E.D.P fuera de la recta $y = bx$.

La situación en el caso no lineal, tanto lo que se refiere a la propagación de singularidades como al comportamiento de la solución, es bastante diferente. Para tener una idea de lo que puede suceder, vamos a considerar ecuaciones no lineales de la forma

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.17}$$

donde f es una función dada de clase C^2. Observe que la ecuación (4.17) puede ser escrita como

$$u_t + b(u)u_x = 0, \tag{4.18}$$

donde

$$b(u) = f'(u). \tag{4.19}$$

Ecuaciones de tipo (4.17) aparecen en el estudio de fenómenos ondulatorios sin efectos disipativos no lineales, como por ejemplo en la dinámica de los gases.
Las características planas en este caso corresponden a las curvas en el plano xt satisfaciendo

$$\frac{dx}{dt} = b(u) \tag{4.20}$$

donde $u = u(x(t), t)$. a la largo de tales curvas u es constante ya que

$$\frac{d}{dt}(u(x(t), t)) = u_x \frac{dx}{dt} + u_t = u_t + b(u)u_x = 0,$$

luego las curvas definidas por (4.20) son de hecho rectas. Es claro que esas rectas no pueden ser determinadas *a priori*, una vez la ecuación (4.20) envuelve el valor desconocido de u a lo largo de la curva. Podemos sin embargo usar esas curvas para hallar la solución de (4.17) satisfaciendo la condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.21}$$

La idea aquí, como en el caso lineal, es construir una solución utilizando las "características planas" que intersectan la curva inicial plana $t = 0$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, u es constante e igual a $u_0(x_0)$ a lo largo de la recta pasando para el punto $(x_0, 0)$ y satisfaciendo (4.20), esto es;

$$u = u_0(x_0), \tag{4.22}$$

a lo largo de la recta

$$x = b(u_0(x_0))t + x_0. \tag{4.23}$$

Decimos que las *características planas* para el problema (4.18), (4.21) son las rectas (4.23). Basandonos en el caso lineal, esperamos que las ecuaciones (4.22) y (4.23) determina la solución del problema. Esto sucede en una faja $t \in (0, T)$ pero al contrario al caso lineal, las características planas se pueden intersectar.

Ejemplo 4.6. *Considere el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \tag{4.24}$$

donde

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & si\ x < 0, \\ 1 - x, & si\ 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & si\ x > 1. \end{cases}$$

La ecuación en (4.24) es una ecuación de Burger sin viscosidad y es de la forma (4.17) con $f(u) = \frac{u^2}{2}$*. en este caso las rectas (4.23) se intersectan para* $t \geq 1$*, de modo que la solución dada por (4.22),(4.23) solo es válida para* $t < 1$*. Las características planas para el problema (4.24) estan dadas por*

$$x = \begin{cases} t + x_0, & si\ x_0 < 0, \\ (1 - x_0)t + x_0 & si\ 0 \leq x_0 \leq 1, \\ x_0, & si\ x_0 > 1. \end{cases}$$

Si $x < t < 1$ *entonces* $x = t + x_0$ *para algún* $x_0 < 0$ *y por tanto* $u = u_0(x_0) = 1$*; si* $t < x < 1$, $x = (1 - x_0)t + x_0$ *para algún* $x_0 \in [0, 1]$*, luego*

$$u = u_0(x_0) = 1 - x_0 = 1 - \frac{x - t}{1 - t} = \frac{1 - x}{1 - t};$$

finalmente, si $t < 1 < x$*, entonces* $u = u_0(x) = 0$*. Por tanto la solución del problema (4.24), definida para* $0 \leq t < 1$*, es*

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & si\ \ x < t < 1, \\ \frac{1-x}{1-t} & si\ t \leq x < 1, \\ 0 & si\ t < 1 \leq x. \end{cases} \tag{4.25}$$

Observe que la función definida por (4.25) no es una solución clásica pues $u \notin C^1(\mathbb{R} \times (0,1))$*; las derivadas parciales de u no estan definidas a lo largo de los segmentos de recta* $\{(t,t) : 0 \leq t < 1\}$ *y* $\{(1,t) : 0 \leq t < 1\}$*. Esto era de esperarse pues estas son las características planas pasando por* $(0,0)$ *y* $(1,0)$*, respectivamente, y la condición inicial no es diferenciable en* $x = 0$ *y* $x = 1$*. Fuera de esos segmentos de recta, es claro que u satisface E.D.P en (4.24) note también que* $u \in C(\mathbb{R} \times [0,1))$ *y satisface la condición inicial en (4.24)*

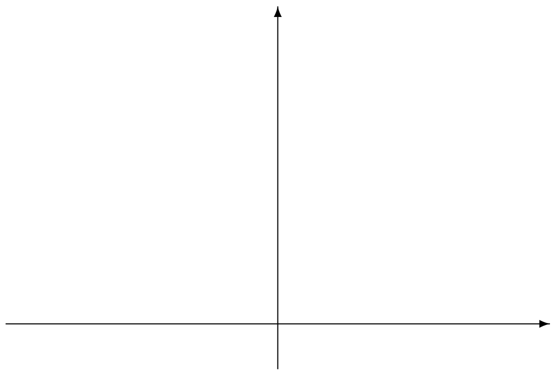


Fig 15. Características planas para el problema 4.24

En relación con la propagación de singularidades, la situación en el caso no lineal es también muy diferente.

Ejemplo 4.7. *Vamos a considerar nuevamente la ecuación de Burger Pero con una condición inicial diferente,*

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{4.26}$$

donde

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

La función

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0,\ t \geq 0, \\ \dfrac{x}{t} & \text{si } 0 \leq x \leq t,\ t \neq 0, \\ 1 & \text{si } x > t \geq 0. \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R} \times [0,\infty) - \{(0,0)\}$ y es solución del problema (4.26), esto es satisface la E.D.P para $t > 0$ fuera de las características planas pasando por el origén y satisface la condición incial.
Este ejemplo muestra que podemos tener una solución continua para $t > 0$ aunque la condición inicial ($t = 0$) sea discontinua; por lo tanto la discontinuidad de la condición inicial no es "cargada" por las características planas. En el ejemplo anterior solo las derivadas son discontinuas a lo largo de las características planas pasando por el origen. Esto es, evidentemente, un fenómenos puramente no lineal.

4.3. Ondas de Choque

Tomemos de nuevo el problema (4.26). Notemos que no es posible hallar una *solución global*, esto es, definida para todo $t > 0$ que sea continua en el punto $(1,1)$, una vez que $u \equiv 1$ en la región $x < t < 1$ y $u \equiv 0$ en la región $t < 1 \leq x$; ademas de eso, así sea que admite soluciones discontinuas (por ejemplo, funciones que son discontinuas a lo largo de una curva suave y que satisface la E.D.P fuera de esa curva), no sabriamos como determinar la solución en la región $1 < x < t$ una vez que cada punto en esa región está en exactamente tres características planas (vea la figura 15).
Todavía en relación al problema (4.24), note que las ecuaciones (4.22) y (4.23) en este caso determinan una superficie (que no es el gráfico de una función de x y t) en el espacio xtu, parametrizada por x_0 y t; la fígura 16 muestra la proyección de las curvas $s \mapsto (x(s,t_0), t_0, u(s,t_0))$ en el plano xu para diferentes valores de t_0. Observe como la curva quiebra en $t = 1$.

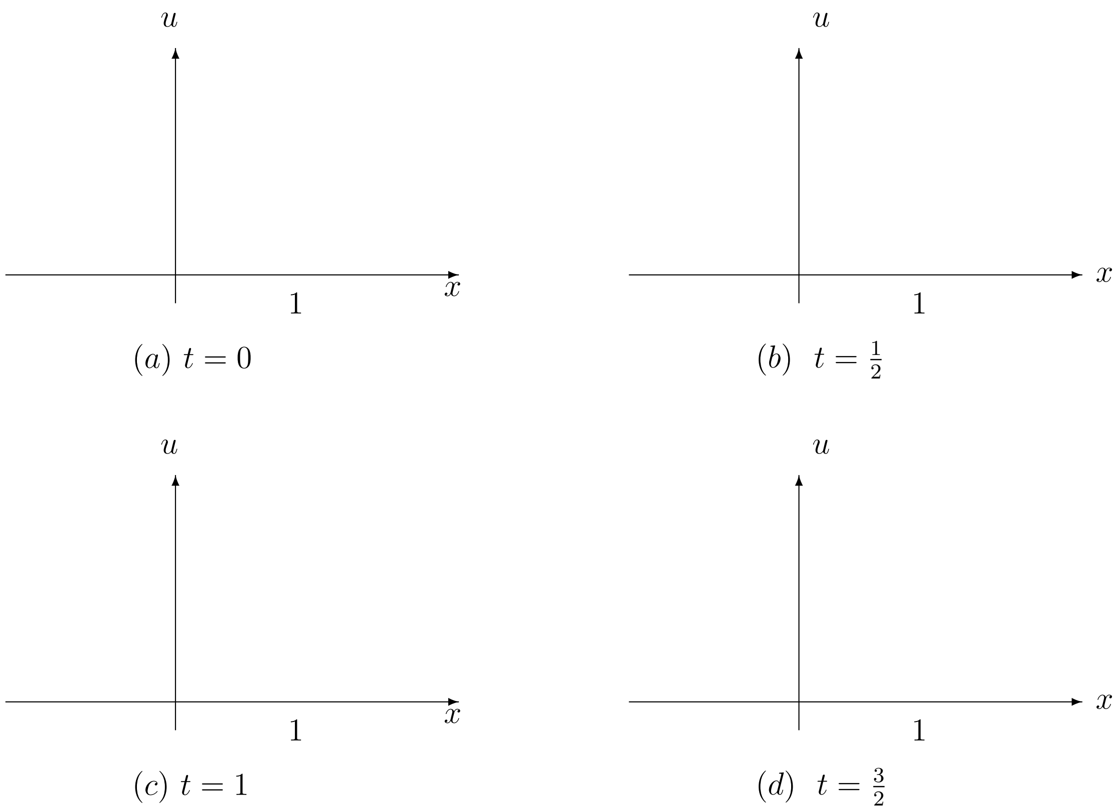


Fig. 16. Proyecciones de las curvas $s \mapsto (x(s,t), t_0, u(s,t))$ en el plano xu para diferentes valores de t.

El ejemplo 4.26 es típico de lo que acontece cuando las características planas se intersecan. Note que si $x_1 < x_2$, las características planas pasando por $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ son dadas, respectivamente por (ver ecuación (4.23))

$$\begin{cases} l_1 : x &= b(u_0(x_1))t + x_1, \\ l_2 : x &= b(u_0(x_2))t + x_2, \end{cases}$$

luego l_1 y l_2 tienen un punto P en común si y solo si

$$b(u_0(x_1)) > b(u_0(x_2)).$$

En este caso, si $u_0(x_1) \neq u_0(x_2)$, una solución global es necesariamente discontinua en $P = (x_0, t_0)$ pues, cuando t tiende a t_0^- a lo largo de l_1, u tiende a $u_0(x_1)$ en cuanto que u tiende a $u_0(x_2)$ cuando t tiende a t_0^- a lo largo de l_2; diremos entonces que una *onda de choque* es formada en $t = t_0$. Soluciones discontinuas tienen sentido desde un punto de vista físicos: experiencias con fluidos comprensibles como gases, muestran el aparecimiento de discontinuidades en la solución. Procuraremos entonces funciones u

que sean discontinuas a lo largo de una curva $x = g(t), t \geq t_0$ y que satisfagan la E.D.P fuera de esas curvas.
Observe que si la función $b(u_0(x))$ es una función monotona no decreciente de x, las características nunca se encuentran pues en este caso,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow b(u_0(x_1)) \leq b(u_0(x_2)).$$

Desde el punto de vista analítico, esto significa que $b(u_0(x))$ tiene derivada siempre mayor o igual a cero y por tanto las ecuaciones (4.22) y (4.23) determinan la solución para todo $t > 0$: a decir verdad la transformación

$$\begin{cases} x = b(u_0(x_0))s + x_0, \\ t = x, \end{cases}$$

define un cambio de variable, ya que su jacobiano nunca se anula.
Volviendo al problema (4.24) necesitamos debilitar el concepto de solución, aceptando soluciones discontinuas, y descubrir, analizando el problema físico, como definir la solución en la región $1 < x < t$. De hecho ecuaciones de tipo (4.17) son derivadas de leyes de conservación integrales de la forma

$$\frac{d}{dt}\int_G u dx = -\int_{\partial G} f \cdot n ds, \tag{4.27}$$

donde G es una región del espacio, u mide la densidad de la cantidad física en discución, f describe el flujo y n es la normal exterior a la frontera ∂G de G. La ecuación (4.27) nos dice que la tasa de variación de la cantidad total de entidad física contenida en la región G es igual al flujo atravesando la frontera de G. En el caso unidimensional, G es un intervalo y la ecuación (4.27) queda

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = f(a,t,u(a,t)) - f(b,t,u(b,t)). \tag{4.28}$$

Observe que, derivando bajo la integral, dividiendo por $(b-a)$ y haciendo que el intervalo tienda a un punto, obtenemos la ecuación

$$u_t + f_x = 0$$

que coincide con la ecuación (4.17) si $f = f(u)$. Por lo tanto la solución tiene sentido desde el punto de vista físico y satisface (4.28).

Volviendo a la ecuación (4.17), buscaremos una solución $u = u(x,t)$ que satisface (4.21) y que no está definida a lo largo de una curva suave $x = g(t), \quad t \geq t_0$, donde $t_0 > 0$ es el menor valor de t para lo cual hay intersección de características: Vamos a suponer que u da un salto a lo largo de $x = g(t)$, $t > 0$, que $t_0 \leq t \leq T$ y tomemos

$a < b$ de modo que la porcion de curva $x = g(t)$ para $t_0 \leq t \leq T$ esté contenida en la faja $a < x < b$ del plano xt (vea la figura 17). Con esta notación, vamos a definir

$$I(t) = \int_a^b u(x,t)dx. \tag{4.29}$$

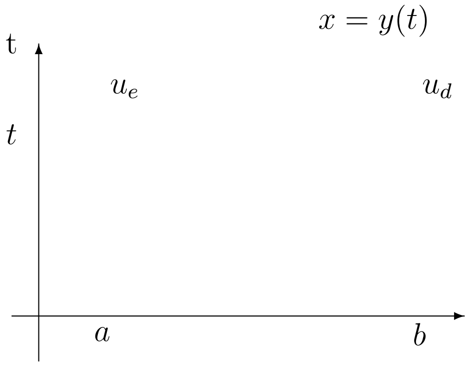


Fig 17. Los extremos del intervalo, a y b, son escogidos de modo que la curva $t \in [t_0, T] \mapsto (g(t), t)$ este contenida en $(a, b) \times [t_0, T]$.

entonces de (4.28)

$$\frac{dI}{dt} = f(u(a,t)) - f(u(b,t)). \tag{4.30}$$

Por otro lado, si denotamos por u_e y u_d, respectivamente, las soluciones de la izquierda y la derecha de la curva $x = g(t)$, entonces la ecuación (4.29) puede ser escrita como

$$I(t) = \int_a^{g(t)} u_e(x,t)dx + \int_{g(t)}^b u_d(x,t)dx.$$

Por hipótesis, u_e y u_d tienen límites laterales cuando $x \to g(t)^-$ y $x \to g(t)^+$ respectivamente, luego, derivando directamente,

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= g'(t)u_e(g(t),t) + \int_a^{g(t)} \partial_t u_e(x,t)dx - g'(t)u_d(g(t),t) + \int_{g(t)}^b \partial_t u_d(x,t)dx \\
&= g'(t)\{u_e(g(t),t) - u_d(g(t),t)\} - \int_a^{g(t)} \partial_x(f(u_e(x,t)))dx - \int_{g(t)}^b \partial_x(f(u_d(x,t)))dx \\
&= g'(t)\{u_e(g(t),t) - u_d(g(t),t)\} - f(u_e(g(t),t)) + f(u_e(a,t)) - f(u_d(b,t) + f(u_d(g(t),t)).
\end{aligned}$$

Comparando con (4.30) obtenemos

$$g'(t)(u_d(g(t),t) - u_e(g(t),t)) = f(u_d(g(t),t)) - f(u_e(g(t),t)),$$

o sea

$$s[u] = [f] \tag{4.31}$$

donde $s = g'(t)$,

$$[u] = u_d(g(t), t) - u_e(g(t), t)$$

es el salto que u da al cruzar la curva $x = g(t)$. la condición (4.31) es llamada la *condición del salto.*

Ejemplo 4.8. *Vamos a aplicar esas ideas para hallar una solución global para el problema (4.24): como* $u \equiv 1$ *para* $x < t < 1$ *y* $u \equiv 0$ *para* $x > \max\{1, t\}$*, es natural una solución como* $u_e \equiv 1$ *y* $u_d \equiv 0$ *para* $t > 1$*, luego* $[u] = -1, [f] = \frac{-1}{2}, s = \frac{1}{2}$

$$g(t) = \frac{t}{2} + c.$$

Por otro lado, la discontinuidad debe comenzar en el punto $(1, 1)$*, luego la curva suave* $x = g(t)$*,* $t \geq 1$*, debe ser la semirecta* $2x = t + 1$*,* $t \geq 1$*, y la solución global deseada es*

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < t < 1 \text{ ó } x < \dfrac{1+t}{2},\ t \geq 1, \\ \dfrac{1-x}{1-t} & \text{si } t \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } t < 1 \leq x \text{ ó } x > \dfrac{1+t}{2} \geq 1. \end{cases}$$

La figura 18. muestra las discontinuidades de u; u es discontinua a lo largo de la semirecta $2x = t+1$*,* $t \geq 1$*, y las derivadas de primer orden de u son discontinuas además, es claro, de la semirecta* $2x = t + 1$ *en los segmentos de recta* $x = t$*,* $0 \leq t \leq 1$ *y* $x = 1$*,* $0 \leq t \leq 1$.

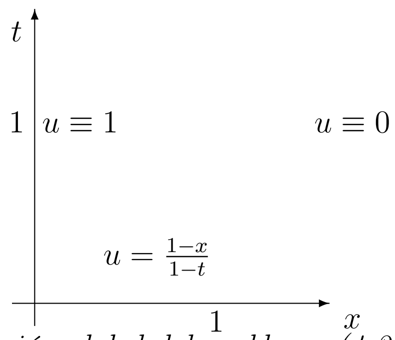


Fig 18. Solución global del problema (4.24).

Extendiendo el concepto de solución, tomamos posible resolver problemas de tipo (4.17), (4.21) que no tienen soluciones globales clásicas.
Al mismo tiempo, existe el peligro de haber extendido demasiado la clase de posibles soluciones, perdiendo la unicidad. De hecho el ejemplo (4.7) muestra que eso puede suceder: las características planas no se intersecan y existe solución clásica para $t > 0$ pero que no está determinada en la región $0 \leq x \leq t$ (vea figura 19.) Procediendo como en el ejemplo (4.8), vemos que la función

$$u_1(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{t}{2}, \\ 1 & \text{si } x > \frac{t}{2}. \end{cases}$$

Satisface la condiciones de salto (4.31), y es solución de (4.26) en el sentido que satisface la E.D.P para $t > 0$ fuera de la recta $x = \frac{t}{2}$, y evidentemente satisface la condición inicial. Por otro lado, la función

$$u_2(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, t \geq 0, \\ \dfrac{x}{t} & \text{si } 0 \leq x \leq t,\ t \neq 0, \\ 1 & \text{si } x > t \geq 0. \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R} \times [0, +\infty) - \{(0,0)\}$ (luego en particular, satisface la condición de salto (4.31) con $[u] = [f] = 0$) y satisface la E.D.P para $t > 0$ además las características pasan por el origen. Solo una de esas funciones tiene significado físico, el problema es saber cual de ellas.
Una solución u_1 en el ejemplo de arriba puede ser descartada si introducimios el siguiente criterio:
Dado (x,t), con $t > t_0$, fuera de la curva de discontinuidad, existe una caracteristica plana pasando por (x,t) que es intersectada por la curva de discontinuidades en un instante $t_1 > t$. De la figura 19. es evidentemente que no existe ninguna curva en la region $0 < x < t$ que satisfaga el criterio anterior luego la solución global que buscamos para el problema (4.26) tiene que ser continua.

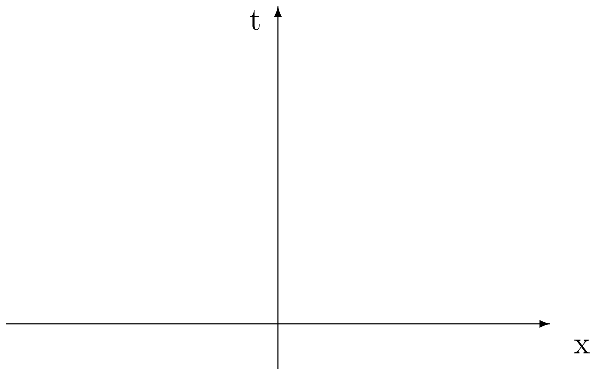


Fig 19. Características planas para el problema 4.26

el significado del criterio anterior tal vez quede mas claro analizando el ejemplo (4.8): comparando las fíguras 15 y 18, vemos que existen tres características planas pasando por un punto (x_1, t_1) en la región $1 < x < t$ pero apenas una de ellas intersecan la curva de discontinuidad $2x = t + 1$, $t \geq 1$ en un instante $t > t_1$ (si $2x_1 \neq t_1 + 1$, es claro). Esto significa que con el criterio anterior, u_e y u_d estan determinadas por la condición inicial $u(x,0) = u_0(x)$.
Observe que si

$$b(u_e(x_1,t)) > g'(t) > b(u_d(x_2,t)) \tag{4.32}$$

siempre que $x_1 < g(t) > x_2$, $t > t_0$, entonces el criterio anterior es satisfecho.

El criterio descrito anteriormente puede ser justificado a través de lo que se conoce como teoría de entriopia; sin embargo ello se sale de los objetivos de este trabajo. Para ver detalles incluyendo referencias bibliográficas sugerimos ver [6].

REFERENCIAS

[1] BREZIS H. *Analyse Fonctionnelle.* Masson,1983.

[2] CASTRO FIGUEROA Abel. *Ecuaciones en derivadas parciales.* Addison-Wesley Iberoamericana, 1997.

[3] De FIGUEREDO, D; *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais, Projeto Euclides,* IMPA, Rio de Janeiro, 1997. *Kybernetes*, 24 (4)(1995), 111-120.

[4] FRIEDMAN, A. *Partial Differential Equations.* Holt, Rinchart. Winston, 1969.

[5] IORIO Rafael Junior, IORIO Valeria. *Equações diferenciais parciais. Una Introdução.* IMPA, Rio de Janeiro, 1988

[6] IORIO, V. *E.D.P. Um curso de graduaçao.* Coleção Matemática Universitaria, IMPA, Rio de Janeiro 1989.

[7] LAWRENCE C. Evans. *Partial Differential Equations.* American Math. Soc. 1998

[8] LINARES, F; Ponce G; *Introduction to nonlinear Dispersive Equations,* Publicaçõ es Matemáticas, IMPA, Rio de Leneiro, 2004.

[9] MIKHAILOV V. P. *Partial Differential Equations.* Mir Publishers, 1978.

[10] PURCEL, E. M., *Electricity and Magnetism, Berkeley physic Course,* Vol 2, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1965.

[11] SOTOMAYOR, J. *Licoes de equações diferenciais ordinarias.* Projeto de Euclides, IMPA, Rio de Janeiro,1979.

[12] TIJONOV, A. N. and SUMARSKY A. A. *Ecuaciones de la Física Matemática.* Editorial Mir Nauka, 1974.