TRANSITIVIDAD EN FUNCIONES INDUCIDAS EN HIPERESPACIOS DE CONTINUOS

CRISTIAN GIOVANI GARCÍA SALCEDO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2014

TRANSITIVIDAD EN FUNCIONES INDUCIDAS EN HIPERESPACIOS DE CONTINUOS

CRISTIAN GIOVANI GARCÍA SALCEDO

Monografía presentada para optar al título de Magister en Matemáticas

Director
JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA
Doctor en Ciencias-Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2014

AGRADECIMIENTOS

A Dios.

A mi familia.

A mi director de tesis.

A las personas que me acompañaron en estos dos años.

A las personas que hacen parte de la Escuela de Matemáticas de la UIS.

Tabla de Contenido

Introducción **9**

1 CONTINUOS E HIPERESPACIOS **12**
1.1 Preliminares 12
1.2 Continuos 13
1.3 Hiperespacios y Topología de Vietoris 15
1.4 La Métrica de Hausdorff y Propiedades de los Hiperespacios 19

2 TRANSITIVIDAD **21**
2.1 Órbitas 21
2.2 Conjuntos ω-límite 24
2.3 Funciones Transitivas 27
2.4 Ejemplos de Funciones Transitivas Definidas en Continuos 33
2.4.1 La Función Rotación Irracional de S^1 33
2.4.2 La Función Tienda de Campaña 34
2.4.3 La Función Shift 35

3 TEOREMAS GENERALES DE TRANSITIVIDAD EN FUNCIONES INDUCIDAS **38**
3.1 Funciones Inducidas 38
3.2 Funciones Inducidas Transitivas 42
3.3 Funciones Débilmente Mezclantes 44
3.4 Funciones Inducidas Débilmente Mezclantes 48
3.5 Relaciones entre $C_n(f)$, 2^f y $F_n(f)$ 51
3.6 Ejemplos de Funciones Inducidas Transitivas Definidas en Hiperespacios de Continuos 52

4 TRANSITIVIDAD EN $C_n(f)$ **57**
4.1 Unas Observaciones Iniciales 57
4.2 Continuos con Arcos Libres 60
4.3 Continuos Tipo λ 62
4.4 Dendritas 63

Bibliografía **66**

RESUMEN

TÍTULO: TRANSITIVIDAD EN FUNCIONES INDUCIDAS EN HIPERESPACIOS DE CONTINUOS*

AUTOR: CRISTIAN GIOVANI GARCÍA SALCEDO**

PALABRAS CLAVES: Topología de Vietoris, órbitas, conjuntos $\omega-$límite, transitividad, funciones inducidas, mezclación débil.

DESCRIPCIÓN: Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Diremos que f es transitiva si, para cada U y V abiertos de X diferentes de vacío, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$.
Sean $f\colon X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X y $n \in \mathbb{N}$. Las funciones inducidas $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$, $2^f\colon 2^X \to 2^X$ y $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(X)$ están definidas, respectivamente, por

$$
\begin{aligned}
C_n(f)(A) &= f(A), \text{ para toda } A \in C_n(X),\\
2^f(A) &= f(A), \text{ para toda } A \in 2^X,\\
F_n(X) &= f(A), \text{ para toda } A \in F_n(X).
\end{aligned}
$$

El propósito de este trabajo es estudiar la transitividad topológica de las funciones inducidas $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$, $2^f\colon 2^X \to 2^X$ y $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(X)$. Este trabajo está dividido en cuatro capítulos:
En el Capítulo 1 presentamos algunas definiciones y resultados que necesitaremos para desarrollar este trabajo.
En el Capítulo 2 se definen las funciones transitivas y se dan las herramientas para estudiar la transitividad de una función continua. En la última sección de este capítulo se estudian algunos ejemplos importantes.
En el Capítulo 3 se definen las funciones inducidas y se estudian las relaciones entre las funciones $f\colon X \to X$, $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$, $2^f\colon 2^X \to 2^X$ y $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(X)$.
En el Capítulo 4 mostramos algunos casos particulares donde la función inducida $C_n(f)$ no es transitiva, para ninguna $n \in \mathbb{N}$.

*Proyecto de grado

**Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García.

ABSTRACT

TITLE: TRANSITIVITY IN INDUCED FUNCTIONS DEFINED ON HYPERSPACES OF CONTINUA***

AUTHOR: CRISTIAN GIOVANI GARCÍA SALCEDO****

KEYWORDS: Vietoris topology, orbits, $\omega-$limit sets, transitivity, induced functions, weak mixing of a function.

DESCRIPTION: Let X be a compact metric space and $f\colon X \to X$ a continuous function. We say that f is transitive if, for each U and V nonempty open subsets of X, there exists $m \in \mathbb{N}$ such that $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$.
Let $f\colon X \to X$ be a continuous function defined on a compact metric space X and $n \in \mathbb{N}$. The induced functions $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$, $2^f\colon 2^X \to 2^X$ and $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(X)$ are defined, respectively, by

$$\begin{aligned} C_n(f)(A) &= f(A), \text{ for all } A \in C_n(X), \\ 2^f(A) &= f(A), \text{ for all } A \in 2^X, \\ F_n(X) &= f(A), \text{ for all } A \in F_n(X). \end{aligned}$$

The purpose of this work is to study the topological transitivity of the induced functions $(2^X, 2^f)$, $(C_n(X), C_n(f))$ and $(F_n(X), F_n(f))$. This work consists of four chapters:
In Chapter 1, we present some definitions and results that we need to develop this work.
In Chapter 2, we define transitive functions and we give tools for studying the transitivity of a continuous function. In the last section of this chapter, we study some important examples.
In Chapter 3, we define induced functions and we study the relationships between the functions $f\colon X \to X$, $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$, $2^f\colon 2^X \to 2^X$ y $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(X)$.
In Chapter 4, we show somes particular ones where the induced function $C_n(f)$ is not transitive, for any $n \in \mathbb{N}$.

***Graduation project

****Faculty of Science. Department of Mathematics. Director: Javier Enrique Camargo García.

Introducción

Es conocida la importancia de los sistemas dinámicos en las matemáticas. En particular, podemos considerar los sistemas dinámicos discretos. Un sistema dinámico discreto es una pareja $(X,\ f)$ formada por un espacio métrico compacto X y una función continua $f\colon X \to X$. Si X es un espacio métrico compacto y $n \in \mathbb{N}$, definimos $2^X = \{A \subset X :$ A es compacto no vacío$\}$, $C_n(X) = \{A \subset X :$A es compacto no vacío y tiene a lo más n componentes$\}$ y $F_n(X) = \{A \subset X : 1 \leq \mid A \mid \leq n\}$. Los conjuntos 2^X, $C_n(X)$ y $F_n(X)$, dotados con la métrica de Hausdorff o, equivalentemente, con la topología de Vietoris, son llamados hiperespacios de X. Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y diferente de vacío. Si X es un continuo o un espacio métrico compacto, entonces 2^X, $C_n(X)$ y $F_n(X)$ son continuos o espacios métricos compactos, respectivamente. Dada $f\colon X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto, se pueden definir $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ por $C_n(f)(A) = f(A)$, para cada $A \in C_n(X)$, $2^f\colon 2^X \to 2^X$ por $2^f(A) = f(A)$, para cada $A \in 2^X$, y $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(X)$ por $F_n(X) = f(A)$, para cada $A \in F_n(X)$.

Una función continua $f\colon X \to X$ definida en un espacio métrico compacto X se dice transitiva si, para cada U y V abiertos no vacíos de X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$. Según Robert Devaney [11], una función continua $f\colon X \to X$, donde X es un espacio métrico, se dice caótica si: $i)$ f es sensible a las condiciones iniciales, $ii)$ los puntos periódicos de f forman un subconjunto denso de X y $iii)$ f es transitiva. En [7], se demostró que la condición $i)$ no es necesaria en la definición de Devaney; es decir, si f tiene el conjunto de sus puntos periódicos denso y es transitiva, entonces f es sensible a las condiciones iniciales. También, se conoce que, si f es una función definida en $[0, 1]$, entonces f es caótica si y sólo si f es transitiva [8]. De lo anterior, podemos afirmar que la transitividad es una propiedad importante en el estudio de sistemas dinámicos discretos, en particular, en el estudio de funciones caóticas según R. Devaney.

El sistema dinámico discreto $(X,\ f)$ induce nuevos sistemas: $(2^X,\ 2^f)$, $(C_n(X),\ C_n(f))$ y $(F_n(X),\ F_n(f))$. El propósito de este trabajo es estudiar la transitividad topológica del sistema dinámico discreto inicial y de los sistemas inducidos. También, estudiaremos las relaciones entre los sistemas mencionados. Diversos artículos relacionados con estos tópicos han sido publicados en los últimos años. J. Banks inició el estudio de las relaciones entre ambas dinámicas, la inicial y la inducida, con el artículo *Chaos for Induced Hyperspace Maps* [5]. También podemos mencionar *The Transitivity of Induced*

Maps [2], *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* [11] y *Topological Entropy and Chaos for Maps Induced on Hyperspaces* [17], entre otros. En *Dinámica Colectiva* [19], H. Méndez-Lango hace un recuento de algunos resultados importantes.

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos. En el Capítulo 1, presentamos algunas definiciones y resultados que necesitaremos para desarrollar este trabajo. Definimos algunos continuos importantes en el desarrollo de este trabajo, tales como continuos con arcos libres, continuos tipo λ y dendritas, entre otros. Definimos la topología de Vietoris y la métrica de Hausdorff, y presentamos los hiperespacios 2^X, $C_n(X)$ y $F_n(X)$. La topología de Vietoris y la topología generada por la métrica de Hausdorff resultan ser equivalentes en espacios métricos compactos.

La primera sección del Capítulo 2 está dedicada a los conceptos relacionados con la órbita de un punto y además mostramos algunos ejemplos interesantes. La segunda sección está dedicada a los conceptos relacionados con los conjuntos $\omega-$límite y además probamos algunas propiedades importantes de estos conjuntos. Finalmente, en la tercera sección, definimos transitividad y probamos la equivalencia que involucra ciertas órbitas, ciertos conjuntos $\omega-$límite y transitividad. Así, las órbitas y los conjuntos $\omega-$límite resultan ser herramientas poderosas para estudiar la transitividad de una función. En la cuarta y última sección, presentamos tres ejemplos de funciones transitivas definidas en tres continuos distintos: un arco, una curva cerrada simple y el cubo de Hilbert.

En el Capítulo 3, definimos, para toda función $f\colon X \to X$ definida en un continuo o en un espacio métrico compacto X y para toda $n \in \mathbb{N}$, las funciones inducidas $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$, $2^f\colon 2^X \to 2^X$ y $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(X)$. Se estudian las relaciones entre las siguientes afirmaciones:

i. f es transitiva.

ii. 2^f es transitiva.

iii. $C_n(f)$ es transitiva.

iv. $F_n(f)$ es transitiva.

Para estudiar dichas relaciones, en la tercera sección de este capítulo, definimos las funciones débilmente mezclantes y demostramos algunas propiedades de estas funciones. El siguiente teorema que involucra la función inducida $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ es fruto del trabajo realizado.

Teorema 0.1. *Sean X un continuo y $f\colon X \to X$ una función continua. Si $C_n(f)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces 2^f y $F_n(f)$ son transitivas para toda $n \in \mathbb{N}$.*

En la sexta y última sección, analizamos la transitividad de las funciones inducidas por las funciones de la cuarta sección del Capítulo 2.

En el Capítulo 4, analizamos la transitividad de la función inducida $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$. En la primera sección y gran parte de la segunda sección, mostramos algunas características de un miembro K del hiperespacio $C_n(X)$ tal que el conjunto $\omega-$límite de K es igual al hiperespacio. En las tres últimas secciones de este capítulo, extendemos a la función inducida $C_n(f)$ algunos de los resultados estudiados por G. Acosta, A. Illanes y H. Méndez en [2] sobre la transitividad de $C_1(f)$:

Teorema 0.2. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un continuo que contiene un arco libre X. Entonces la función inducida $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 0.3. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un continuo tipo λ X. Entonces la función inducida $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 0.4. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en una dendrita X. Entonces la función inducida $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$.*

Por último, hacemos dos aclaraciones respecto al título de este trabajo de investigación: *Transitividad en funciones inducidas definidas en hiperespacios de continuos.* Aunque los resultados considerados en esta investigación son válidos en el contexto de los continuos, muchos de ellos se presentan en el contexto de los espacios métricos compactos. Además, a pesar que muchos de los resultados presentados se refieren a las funciones inducidas $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$, $2^f\colon 2^X \to 2^X$ y $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(X)$, para toda $n \in \mathbb{N}$, los resultados propios obtenidos se limitan al contexto de la función inducida $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 1

CONTINUOS E HIPERESPACIOS

En este capítulo, presentamos algunas definiciones y resultados que necesitaremos para desarrollar este trabajo. Definimos algunos continuos importantes en el desarrollo de este trabajo, tales como continuos con arcos libres, continuos tipo λ y dendritas, entre otros. Definimos la topología de Vietoris y la métrica de Hausdorff, y presentamos los hiperespacios 2^X, $C_n(X)$ y $F_n(X)$. La topología de Vietoris y la topología generada por la métrica de Hausdorff resultan ser equivalentes en espacios métricos compactos.

1.1. Preliminares

En este trabajo, como es de esperarse, utilizaremos los símbolos usuales para los conjuntos numéricos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ y $\mathbb{R}$. Además, utilizaremos $\mathbb{N}_0$ como el conjunto $\{0,\ 1,\ 2,\ ...\}$ de números enteros no negativos.

Dada $f\colon X \to X$ una función continua definida en un espacio X y $n \in \mathbb{N}$, escribiremos f^n para referirnos a la composición $f \circ f \circ ... \circ f$, n veces; f^0 es la función identidad en X. Además, escribiremos f^{-n} para referirnos a la relación inversa de f^n.

Algunos símbolos de uso frecuente en topología general que también utilizaremos son:

- S^1: es la circunferencia unitaria con centro en el origen,

- $A \setminus B$: es la diferencia entre dos conjuntos,

- $A \subset B$: significa A es un subconjunto de B (puede suceder que $A = B$),

- $f|_A$: es la restricción de una función f a un subespacio A de su dominio,

- $(X,\ d)$: es un espacio topológico X junto a la métrica d,

- $B_d(x,\ r)$: es la bola abierta en el espacio métrico $(X,\ d)$ con centro $x \in X$ y radio $r > 0$,

- $int(A)$: es el interior del conjunto A respecto al espacio X,
- $\overline{A}$: es la adherencia del conjunto A respecto al espacio X,
- $fr(A) = \overline{X \setminus A} \cap \overline{A}$: es la frontera del conjunto A respecto al espacio X,
- $|[a]|$: es la parte entera de un número real a.
- $|A|$: es la cardinalidad del conjunto A.

Decimos que un conjunto no vacío A es no degenerado si tiene más de un elemento.

1.2. Continuos

En este trabajo los resultados se realizan en el contexto de los espacios métricos compactos y, en particular, en el contexto de los continuos.

Definición 1.1. Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Un subconjunto A de un espacio métrico compacto X es un *subcontinuo* de X si A es un continuo.

Algunos ejemplos de continuos son un *arco*, el cual es un espacio homeomorfo al intervalo $[0,\ 1]$, y una *curva cerrada simple*, la cual es un espacio homeomorfo a S^1. El siguiente teorema permite construir continuos nuevos a partir de los continuos anteriores.

Teorema 1.2. *El producto cartesiano finito o infinito numerable de continuos o de espacios métricos compactos no vacíos es un continuo o un espacio métrico compacto no vacío, respectivamente.*

Demostración. El espacio producto es compacto por [12, Teorema 1.4, pág. 224], métrico por [12, Corolario 7.3, pág. 191] y conexo por [12, Teorema 1.7, pág. 109]. □

Así, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{i=1}^{n}[0,\ 1] = [0,\ 1]^n \text{ y } \prod_{n\in\mathbb{Z}}[0,\ 1] = [0,\ 1]^{\mathbb{Z}}$$

son continuos. El continuo $[0,\ 1]^n$ es conocido como la *n-celda* y el continuo $[0,\ 1]^{\mathbb{Z}}$, definido tradicionalmente como $[0,\ 1]^{\mathbb{N}}$, es conocido como el *cubo de Hilbert*. El cubo de Hilbert es el *continuo universal*, pues todo continuo se puede encajar o inmersar en él [24, Teorema 23.1, pág. 166]. Otro continuo muy conocido es el *toro* definido por $S^1 \times S^1$. Un ejemplo más de un continuo es la *curva del topólogo* definida por $X = \overline{Y}$, donde $Y = \left\{(x,\ \operatorname{sen}\frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\right\}$.

El siguiente teorema es importante para generar ejemplos de continuos con propiedades interesantes. La prueba se puede consultar en [21, Teorema 1.8, pág. 6].

Teorema 1.3. *Si* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *es una sucesión de continuos o de espacios métricos compactos, tales que* $X_{i+1} \subset X_i$ *para todo* i*, entonces* $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ *es un continuo o un espacio métrico compacto, respectivamente.*

A continuación presentamos algunas propiedades que clasifican ciertos continuos con los que trabajaremos en esta tesis.

Definición 1.4. Sea X un continuo. Un arco libre A en X es un arco tal que $A \setminus \{\text{los extremos de } A\}$ es abierto de X.

Un arco, una curva cerrada simple y la curva del topólogo son ejemplos de continuos con arcos libres, mientras que las n-celdas, con $n \geq 2$, el cubo de Hilbert y el toro no contienen arcos libres.

Sean X un continuo y $\{a,\ b\} \subset X$, con $a \neq b$. Entonces X es *irreducible entre* a *y* b si para todo subcontinuo A de X tal que $\{a,\ b\} \subset A$ se cumple que $A = X$. Un continuo X es *irreducible* si existe $\{a,\ b\} \subset X$, con $a \neq b$, tal que X es irreducible entre a y b. Una función continua $f\colon X \to X$ definida en un espacio arbitrario X es *monótona* si para todo $x \in X$ el conjunto $f^{-1}(x)$ es conexo.

Definición 1.5. Sean X un continuo, y p y q puntos diferentes de X. Decimos que X es del tipo λ si X es irreducible entre p y q, y existe una función continua monótona $\pi\colon X \to [0,\ 1]$ tales que $\pi(p) = 0$, $\pi(q) = 1$ e $\mathrm{int}(\pi^{-1}(x)) = \emptyset$ para toda $x \in [0,\ 1]$.

La función $\pi\colon X \to [0,\ 1]$ es llamada es *la función asociada a* X. Una característica importante de los continuos tipo λ es la siguiente: Si $[a,\ b] \subset [0,\ 1]$, entonces $\pi^{-1}([a,\ b])$ es un subcontinuo de X. Un ejemplo de un continuo tipo λ es la curva del topólogo.

Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos también que X es *localmente conexo en* p si, para todo subconjunto V que contiene un abierto W de X tal que $p \in W$, existe un subconjunto abierto conexo U de X tal que $p \in U \subset V$. Decimos que X es *localmente conexo* si es localmente conexo en todos sus puntos. Un continuo localmente conexo es también conocido como un *continuo de Peano*. De los continuos que hemos presentado, solamente la curva del topólogo no es localmente conexo.

Definición 1.6. Sea X un continuo. Decimos que X es una dendrita si X es localmente conexo y no contiene curvas cerradas simples.

Una cualidad importante que tienen algunos continuos es la arcoconexidad.

Definición 1.7. Sea X un continuo. Decimos que X es *arcoconexo* si para cualesquiera dos puntos x y y en X, existe una inmersión $h\colon [0,\ 1] \to X$, tal que $h(0) = x$ y $h(1) = y$.

De los continuos que hemos presentado, solamente la curva del topólogo no es arcoconexa.

1.3. Hiperespacios y Topología de Vietoris

Mostramos la definición de los principales hiperespacios asociados a un continuo, dotados con la topología de Vietoris.

Definición 1.8. Sean X un espacio métrico compacto y $n \in \mathbb{N}$. Definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \text{ es compacto no vacío}\}, \\ C(X) &= \{A \subset X : A \text{ es compacto no vacío y conexo}\}, \\ C_n(X) &= \{A \subset X : A \text{ es compacto no vacío y tiene a lo más } n \text{ componentes}\}, \\ F_n(X) &= \{A \subset X : 1 \leq \mid A \mid \leq n\}. \end{aligned}$$

Note que $C(X) = C_1(X)$. Note también que $C_n(X)$ y $F_n(X)$ son subconjuntos de 2^X para todo $n \in \mathbb{N}$; y además $C_n(X) \subset C_{n+1}(X)$, $F_n(X) \subset F_{n+1}(X)$ y $F_n(X) \subset C_n(X)$.

Sea X un espacio métrico compacto. Sean S_1, S_2, ..., S_m subconjuntos de X. Definimos

$$\langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle = \{K \in 2^X : K \subset \bigcup_{i=1}^{m} S_i \text{ y } K \cap S_i \neq \emptyset \text{ para todo } i \in \{1,\ 2,\ ...,\ m\}\}.$$

Note que, si S es un subconjunto de X, en particular $\langle S\rangle = \{K \subset 2^X : K \subset S\}$ y $\langle S, X\rangle = \{K \subset 2^X : K \cap S \neq \emptyset\}$.

Lema 1.9. *Sea X un espacio métrico compacto. Sean S_1, S_2, ..., S_m, T_1, T_2, ..., T_n subconjuntos de X. Si $S = \cup_{i=1}^{m} S_i$ y $T = \cup_{i=1}^{n} T_i$, entonces*

$$\langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle \cap \langle T_1,\ T_2,\ ...,\ T_n\rangle = \langle S_1 \cap T,\ S_2 \cap T,\ ...,\ S_m \cap T,\ T_1 \cap S,\ T_2 \cap S,\ ...,\ T_n \cap S\rangle.$$

Demostración. Primero notemos que

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i \cap T\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} T_i \cap S\right) &= \left(\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i\right) \cap T\right) \cup \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right) \cap S\right) \\ &= (S \cap T) \cup (T \cap S) = S \cap T. \end{aligned}$$

Sea $A \in \langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle \cap \langle T_1,\ T_2,\ ...,\ T_n\rangle$. Entonces $A \subset S$, $A \cap S_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ m\}$, $A \subset T$ y $A \cap T_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$. Así $A \subset S \cap T = (\bigcup_{i=1}^{m} S_i \cap T) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} T_i \cap S)$. Además, $A \cap (S_i \cap T) \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ m\}$, porque $A \subset T$ y $A \cap S_i \neq \emptyset$. De la misma forma, $A \cap (T_i \cap S) \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$. Por tanto, $A \in \langle S_1 \cap T,\ S_2 \cap T,\ ...,\ S_m \cap T,\ T_1 \cap S,\ T_2 \cap S,\ ...,\ T_n \cap S\rangle$. Siguiendo los mismos pasos en dirección contraria, se prueba que si $A \in \langle S_1 \cap T,\ S_2 \cap T,\ ...,\ S_m \cap T,\ T_1 \cap S,\ T_2 \cap S,\ ...,\ T_n \cap S\rangle$ entonces $A \in \langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle \cap \langle T_1,\ T_2,\ ...,\ T_n\rangle$. Queda esto demostrado. $\square$

Los siguientes lemas son fáciles de verificar.

Lema 1.10. *Sea X un espacio métrico compacto. Sean $S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m$ subconjuntos de X y $S = \cup_{i=1}^m S_i$. Entonces*

$$\langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle = \langle S\rangle \cap \langle S_1,\ X\rangle \cap \langle S_2,\ X\rangle \cap ... \cap \langle S_m,\ X\rangle.$$

Lema 1.11. *Sea X un espacio métrico compacto. Sean S y T subconjuntos de X. Entonces*

i. $\langle S\rangle \cap \langle T\rangle = \langle S \cap T\rangle$,

ii. $\langle S\rangle \cap \langle T,\ X\rangle = \langle S,\ S \cap T\rangle$ *y*

iii. $\langle S,\ X\rangle \cap \langle T,\ X\rangle = \langle S,\ T,\ X\rangle$.

A continuación dotaremos a los conjuntos de la Definición 1.8 de una topología.

Teorema 1.12. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces*

$$\beta = \{\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle \subset 2^X : U_i \text{ es abierto en } X \text{ y } m \in \mathbb{N}\}$$

es una base para una topología τ_V de 2^X. Dicha topología es llamada la Topología de Vietoris de 2^X. Además,

$$\Sigma = \{\langle U\rangle \subset 2^X : U \text{ es abierto de } X\} \cup \{\langle V,\ X\rangle \subset 2^X : V \text{ es abierto de } X\}$$

es una subbase para la topología τ_V de 2^X. Por consiguiente, τ_V es la topología más pequeña de 2^X que contiene todos los conjuntos de las formas $\langle U\rangle$ y $\langle V,\ X\rangle$.

Demostración. Primero note que $\emptyset = \langle\emptyset\rangle \in \beta$ y $2^X = \langle X\rangle \in \beta$. Probemos que β es base para una topología τ_V de 2^X. Sean $\{\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle, \langle V_1,\ V_2,\ ...,\ V_m\rangle\} \subset \beta$ y $K \in \langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle \cap \langle V_1,\ V_2,\ ...,\ V_m\rangle$. Sean $U = \cup_{i=1}^m U_i$ y $V = \cup_{i=1}^m V_i$. Por el Lema 1.9, $\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle \cap \langle V_1,\ V_2,\ ...,\ V_m\rangle = \langle U_1 \cap V,\ U_2 \cap V,\ ...,\ U_m \cap V,\ V_1 \cap U,\ V_2 \cap U,\ ...,\ V_m \cap U\rangle \in \beta$ y es trivial que $K \in \langle U_1 \cap V,\ U_2 \cap V,\ ...,\ U_m \cap V,\ V_1 \cap U,\ V_2 \cap U,\ ...,\ V_m \cap U\rangle \subset \langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle \cap \langle V_1,\ V_2,\ ...,\ V_m\rangle$. Por tanto, β es base para una topología τ_V de 2^X.

Finalmente, probemos que Σ es subbase para la topología τ_V. Sea Σ^* la familia de todas las intersecciones finitas de miembros de Σ. Sea $\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle \in \beta$. Entonces, por el Lema 1.10, $\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle = \langle \cup_{i=1}^m U_i\rangle \cap \langle U_1,\ X\rangle \cap \langle U_2,\ X\rangle \cap ... \cap \langle U_m,\ X\rangle \in \Sigma^*$. Sea ahora $\mathcal{U} \in \Sigma^*$. Entonces $\mathcal{U}$ es una intersección finita de conjuntos de las formas $\langle U\rangle \cap \langle V\rangle$, $\langle U\rangle \cap \langle V,\ X\rangle$ y $\langle U,\ X\rangle \cap \langle V,\ X\rangle$, donde U,V y W son abiertos de X. Pero, por el Lema 1.11, $\langle U\rangle \cap \langle V\rangle = \langle U \cap V\rangle$, $\langle U\rangle \cap \langle V,\ X\rangle = \langle U,\ U \cap V\rangle$ y $\langle U,\ X\rangle \cap \langle V,\ X\rangle = \langle U,\ V,\ X\rangle$, de modo que $\mathcal{U}$ es una intersección finita de conjuntos de β. Así, por el Lema 1.9, $\mathcal{U} \in \beta$. Por tanto, $\Sigma^* = \beta$, es decir, Σ^* es base para la topología τ_V. Luego Σ es subbase de τ_V. $\square$

Un *hiperespacio* es una colección de subconjuntos cerrados no vacíos de X dotado con la topología de Vietoris. El hiperespacio más grande de X es 2^X. A los hiperespacios $C_n(X)$ y $F_n(X)$ los consideraremos dotados de la topología de subespacio.

Notación 1.13. Escribiremos $\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle$ en lugar de $\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle \cap C_n(X)$ o $\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle \cap F_n(X)$, para denotar un abierto básico de la topología de Vietoris en $C_n(X)$ o $F_n(X)$, respectivamente.

Si $\mathcal{U} = \langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle$ es un abierto básico de 2^X (o de $C_n(f)$, o de $F_n(X)$), decimos que los abiertos U_1, U_2, ..., U_m son las entradas de $\mathcal{U}$. Si alguna entrada de $\mathcal{U}$ es vacía, entonces $\mathcal{U} = \emptyset$. Sean $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de abiertos básicos de 2^X (o de $C_n(f)$, o de $F_n(X)$) y $l = \text{máx}\{n_i \in \mathbb{N} : n_i$ es el número de entradas de $\mathcal{U}_i\}$. Podemos escribir los U_i teniendo el mismo número de entradas, observando que, si $\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle$ es un miembro de $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^n$ y $m < l$, $\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle = \langle W_1,\ W_2,\ ...,\ W_l\rangle$, donde $W_1 = U_1$, $W_2 = U_2$, ..., $W_m = U_m$, $W_{m+1} = U_m$, ..., $W_l = U_m$.

El siguiente teorema nos permite reducir a n el número de entradas de un abierto básico de $F_n(X)$. No es difícil ver que esto no es cierto para el hiperespacio $C_n(X)$.

Teorema 1.14. *Sea X un espacio métrico compacto y $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\beta' = \{\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_n\rangle \subset F_n(X) : U_i \textit{ es abierto en } X\}$$

es una base para la topología τ_V de $F_n(X)$.

Demostración. Sea $\beta = \{\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle \subset F_n(X) : U_i$ es abierto en X y $m \in \mathbb{N}\}$. Es suficiente mostrar que β y β' son bases equivalentes. Es trivial que $\beta' \subset \beta$. Por otra parte, sean $\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle \in \beta$ y $K \in \langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle$. Supongamos primero que $m \le n$. Tomando $U_1' = U_1$, $U_2' = U_2$, ..., $U_m' = U_m$, $U_{m+1}' = U_m$, ..., $U_n' = U_m$, tenemos que $\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle = \langle U_1',\ U_2',\ ...,\ U_n'\rangle \in \beta'$.

Supongamos ahora que $m > n$. Sea $K = \{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k\}$ para algún $k \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$. Sea $V_i = \bigcap\{U_j \in \{U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\} : x_i \in U_j\}$, para todo $1 \le i \le k$. Tomando $V_1' = V_1$, $V_2' = V_2$, ..., $V_k' = V_k$, $V_{k+1}' = V_k$, ..., $V_n' = V_k$, tenemos que $\langle V_1,\ V_2,\ ...,\ V_k\rangle = \langle V_1',\ V_2',\ ...,\ V_n'\rangle \in \beta'$. Cada V_i es un abierto de X que contiene a x_i; así $K \in \langle V_1,\ V_2,\ ...,\ V_k\rangle$.

Finalmente, probemos que $\langle V_1,\ V_2,\ ...,\ V_k\rangle \subset \langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle$. Sea $L \in \langle V_1,\ V_2,\ ...,\ V_k\rangle$. Sea $L = \{y_1,\ y_2,\ ...,\ y_l\}$ para algún $l \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$. Es claro que $L \in \bigcup_{i=1}^n V_i \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$. Sea $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ m\}$. Dado que $K \cap U_i \neq \emptyset$, tenemos que $x_j \in U_i$, para alguna $j \in \{1,\ 2,\ ...,\ k\}$. Esto implica que $V_j \subset U_i$, por definición de V_j. Dado que $L \in V_j \neq \emptyset$, tenemos que $y_r \in V_j$ para alguna r en $\{1,\ 2,\ ...,\ l\}$, de modo que $y_r \in U_i$. Así $L \cap U_i \neq \emptyset$. Por tanto, $L \in \langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle$ y $\langle V_1,\ V_2,\ ...,\ V_k\rangle \subset \langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle$. Por todo lo anterior, β y β' son bases equivalentes. $\square$

A continuación se muestra la invariancia topológica de los hiperespacios. El símbolo $\approx$ significa "es homeomorfo a".

Lema 1.15. *Sean X y Y espacios métricos compactos. Si $X \approx Y$, entonces $2^X \approx 2^Y$, $F_n(X) \approx F_n(X)$ y $C_n(X) \approx C_n(X)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.*

La prueba del Lemma 1.15 para 2^X se puede consultar en [13, Teorema 1.3, pág. 5]; para los demás hiperespacios es similar. La siguiente proposición muestra que el espacio de subconjuntos finitos de X es denso en 2^X; es decir, es posible acercarnos a cualquier subconjunto compacto de X a través de un subconjunto finito.

Proposición 1.16. *Sean X un espacio métrico compacto y $F(X) = \{K \subset X : 1 \leq |K| < \infty\}$. Entonces $F(X)$ es denso en 2^X.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un abierto no vacío de 2^X. Probemos que $\mathcal{U} \cap F(X) \neq \emptyset$. Sean $U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m$ abiertos no vacíos de X tal que $\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle \subset \mathcal{U}$. Sean $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, ..., $u_m \in U_m$. Entonces $\{u_1,\ u_2,\ ...,\ u_m\} \in F(X)$ y $\{u_1,\ u_2, ...,\ u_m\} \in \langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle \subset \mathcal{U}$. Por tanto, $\mathcal{U} \cap F(X) \neq \emptyset$ y así $F(X)$ es denso en 2^X. □

Un punto x en un espacio topológico X es un punto aislado de X si y solo si $\{x\}$ es un abierto de X.

Lema 1.17. *Si X es un espacio T_1 sin puntos aislados, entonces los abiertos de X son infinitos.*

Demostración. Supongamos que $U = \{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$. En un espacio T_1 los puntos son cerrados. Por lo tanto, el conjunto $V = (X \setminus U) \cup \{a_2,\ ...,\ a_n\}$ es cerrado en X. Así, $X \setminus V = \{a_1\}$ es un abierto de X, lo cual contradice que X no tiene puntos aislados. Por tanto, U es infinito. □

La siguiente proposición será usada más adelante.

Proposición 1.18. *Sean X un continuo y $\{A_1,\ A_2,\ ...,\ A_k\} \subset C_n(X)$, para alguna $n \in \mathbb{N}$. Para todo i en $\{1,\ 2,\ ...,\ k\}$, definimos los conjuntos $\Lambda_i = \{K \in C_n(X) : A_i \subset K\}$ y $\Lambda = \cup_{i=1}^{k} \Lambda_i$. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

i. *Cada Λ_i es cerrado y no denso en $C_n(X)$.*

ii. *Λ es cerrado y no denso en $C_n(X)$.*

Demostración. Probemos que cada Λ_i es cerrado en $C_n(X)$. Sea $B \in C_n(X) \setminus \Lambda_i$. Entonces, $A_i \nsubseteq B$. Sea $a \in A_i \setminus B$. Note que $\langle X \setminus \{a\}\rangle$ es abierto de $C_n(X)$. Es fácil verificar que $B \in \langle X \setminus \{a\}\rangle \subset C_n(X) \setminus \Lambda_i$ y, así, $C_n(X) \setminus \Lambda_i$ es abierto de $C_n(X)$. Por tanto, cada Λ_i es cerrado en $C_n(X)$ y Λ es cerrado en $C_n(X)$. Probemos ahora que Λ no es denso en $C_n(X)$. Dado que, por el Lema 1.17, X es infinito, existe

$$x \in X \setminus \bigcup_{A_i \in F_1(X)} A_i.$$

Note que, para cada i, $A_i \nsubseteq \{a\}$, de modo que $\{a\} \notin \Lambda$. Luego $C_n(X) \nsubseteq \Lambda = \overline{\Lambda}$. Por tanto, Λ no es denso en $C_n(X)$. Se sigue que cada Λ_i tampoco es denso en $C_n(X)$. □

La proposición anterior resulta igualmente cierta si el hiperespacio considerado es 2^X o $F_n(X)$. Además, es fácil verificar la siguiente afirmación: Si K es cerrado en X, entonces $\langle K \rangle$ y $\langle K,\ X \rangle$ son cerrados de $C_n(X)$ (o de 2^X, o de $F_n(X)$).

1.4. La Métrica de Hausdorff y Propiedades de los Hiperespacios

A continuación definimos la métrica de Hausdorff sobre 2^X. La métrica para los demás hiperespacios es la que heredan como subconjuntos de 2^X.

Definición 1.19. Sea $(X,\ d)$ un espacio métrico compacto. Definimos la función $H\colon 2^X \times 2^X \to [0,\ \infty)$, para cualquier K y L en 2^X, por

$$H(K,\ L) = inf\{\epsilon > 0 : K \subset N(L,\ \epsilon) \text{ y } L \subset N(K,\ \epsilon)\},$$

donde $N(K,\ \epsilon) = \{x \in X : d(x,\ k) < \epsilon,\ \text{para algún } k \in K\}$. H es una métrica para 2^X llamada la métrica de Hausdorff.

La verificación de que H es, de hecho, una métrica se puede hacer en [13, Teorema 2.2, pág. 11]. También en la misma referencia se muestra, por compacidad de X, que

Lema 1.20. *$H(K,\ L) < \epsilon$ si y solo si $K \subset N(L,\ \epsilon)$ y $L \subset N(K,\ \epsilon)$, para todas las K y L en 2^X.*

La métrica H induce una topología en los hiperespacios. En [22, Teorema 0.13, pág. 14], se muestra que la topología inducida por la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris coinciden.

Dada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que, si X es un espacio métrico compacto, entonces $(2^X,\ H)$, $(C_n(X),\ H)$ y $(F_n(X),\ H)$ son espacios métricos. ¿Qué sucede con la compacidad? En [13, Teorema 1.8.5, pág. 60] se muestra que los hiperespacios, además de métricos, también son compactos. El siguiente teorema muestra cómo se conserva la propiedad de tener puntos aislados en los hiperespacios.

Teorema 1.21. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces:*

i. Si X no tiene puntos aislados, entonces 2^X y $F_n(X)$ no tienen puntos aislados para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii. Si 2^X, $C_n(X)$ o $F_n(X)$ no tiene puntos aislados para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces X no tiene puntos aislados.

Demostración. *i.* Sea X un espacio sin puntos aislados. Si A es un punto aislado de 2^X, entonces $\{A\}$ es un abierto de 2^X. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m$ abiertos no vacíos de X tales que $A \in \langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m \rangle \subset \{A\}$, es decir, $\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m \rangle =$

$\{A\}$. Cada U_i es infinito, por el Lema 1.17. Sean $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, ..., $u_m \in U_m$, $u'_m \in U_m \setminus \{u_1, u_2, ..., u_m\}$. Sean $K = \{u_1, u_2, ..., u_{m-1}, u_m\} \in 2^X$ y $K' = \{u_1, u_2, ..., u_{m-1}, u'_m\} \in 2^X$. Entonces K y K' son puntos distintos de $\langle U_1, U_2, ..., U_m\rangle$, lo cual es una contradicción. Por tanto, 2^X no tiene puntos aislados.

Probemos que $F_n(X)$ no tiene puntos aislados para toda $n \in \mathbb{N}$. Si A es un punto aislado de $F_n(X)$, entonces $\{A\}$ es un abierto de $F_n(X)$. Sean U_1, U_2, ..., U_n abiertos no vacíos de X tales que $A \in \langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle \subset \{A\}$, por el Teorema 1.14. El resto de la demostración es idéntica al caso de 2^X.

ii. Sea 2^X un espacio sin puntos aislados. Si x es un punto aislado de X, entonces $U = \{x\}$ es un abierto de X. Así, $\langle U\rangle$ es un abierto de 2^X y $U \in 2^X$. Tenemos que $\langle U\rangle = \{U\}$, de modo que U es un punto aislado de 2^X. Por tanto, X no tiene puntos aislados. La demostración es similar si $C_n(X)$ o $F_n(X)$ no tiene puntos aislados para alguna $n \in \mathbb{N}$. □

Si X es un continuo, entonces $F_n(X)$ es un continuo para toda $n \in \mathbb{N}$, por [18, Teorema 1.8.8, pág. 62]. Además, 2^X y $C_n(X)$ son continuos arconexos para toda $n \in \mathbb{N}$, por [18, Teorema 1.8.10, pág. 62] y [18, Teorema 1.8.12, pág. 63].

Capítulo 2

TRANSITIVIDAD

La primera sección está dedicada a los conceptos relacionados con la órbita de un punto y además mostramos algunos ejemplos interesantes. La segunda sección está dedicada a los conceptos relacionados con los conjuntos $\omega-$límite y además probamos algunas propiedades importantes de estos conjuntos. Finalmente, en la tercera sección, definimos la transitividad de una función y probamos la equivalencia que involucra ciertas órbitas, ciertos conjuntos $\omega-$límite y transitividad. Así, las órbitas y los conjuntos $\omega-$límite resultan ser herramientas poderosas para estudiar la transitividad de una función. En la cuarta y última sección, presentamos tres ejemplos de funciones transitivas definidas en tres continuos distintos: un arco, una curva cerrada simple y el cubo de Hilbert.

2.1. Órbitas

Una órbita muestra el movimiento de un punto en el espacio X, bajo sucesivas iteraciones de una función $f\colon X \to X$. Si decimos que en $t = 0$ una partícula está en x, que en $t = 1$ la partícula se mueve o brinca a $f(x)$, que en $t = 2$ la partícula está en $f^2(x)$, y así sucesivamente, podemos decir que la pareja $(X,\ f)$ es un sistema dinámico discreto.

Definición 2.1. Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua y $x \in X$. Definimos la órbita de x bajo f, denotada por $o(x,\ f)$, como

$$o(x,\ f) = \{x,\ f(x),\ f^2(x),\ ...\},$$

donde f^n es la composición de f consigo misma n veces.

Podemos considerar $o(x,\ f)$ bien sea como una sucesión o bien sea como un conjunto. Utilizaremos indistintivamente esta doble noción de órbita. Puede suceder que el conjunto $o(x,\ f)$ sea finito. Este hecho da lugar a la siguiente definición.

Definición 2.2. Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua y $p \in X$. Decimos que p es un punto periódico de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(p) = p$.

Si p es un punto periódico de f, entonces el periodo de p es el menor número natural k tal que $f^k(p) = p$; equivalentemente, el periodo de p es el número de elementos del conjunto $o(p,\ f)$. Si $f(p) = p$, decimos que p es un punto fijo de f. El punto p es un punto preperiódico de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(p)$ es un punto periódico de f. La órbita $o(x,\ f)$ es periódica si contiene algún punto periódico.

Note que en la definición anterior, si el conjunto $o(x,\ f)$ es finito, sus elementos son puntos preperiódicos. En los siguientes ejemplos se analizan algunas de las órbitas que genera el sistema dado.

Ejemplo 2.3. Consideremos la función $f\colon [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1, & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La función f tiene dos puntos fijos: 0 y 1. Si $0 < x < 1/2$, el valor de x se duplica sucesivamente, hasta que alcanza o sobrepasa $1/2$, y de aquí en adelante toma el valor de 1. Si $1/2 \leq x < 1$, $o(x,\ f) = \{x,\ 1,\ 1,\ ...\}$.

Ejemplo 2.4. Consideremos la función $f\colon [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ dada por $f(x) = -x + 1$. La función f tiene un punto fijo: $1/2$. Si $x \neq 1/2$, $o(x,\ f) = \{x,\ 1-x,\ x,\ 1-x,\ ...\}$ y, por tanto, x es un punto periódico (de periodo 2).

Ejemplo 2.5. Consideremos la función $T\colon [0,1] \to [0,1]$ definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2(1-x), & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La función T es llamada la *Función Tienda de Campaña* y será muy recurrida a lo largo de este trabajo. Aunque se define de forma similar a los ejemplos anteriores, esta función se comporta de manera bastante distinta a ellos.

La función T tiene dos puntos fijos: 0 y $2/3$. Podemos encontrar puntos con diferente periodo. Consideremos, por ejemplo, los puntos $4/5$ y $2/7$, los cuales tienen periodo 2 y 3, respectivamente:

$$o(4/5,\ T) = \{4/5,\ 2/5,\ 4/5,\ 2/5,\ ...\},$$

$$o(2/7,\ T) = \{2/7,\ 4/7,\ 6/7,\ 2/7,\ 4/7,\ 6/7,\ ...\}.$$

Además, en cada una de las órbitas podemos agregar tantos puntos preperiódicos como queramos, por ejemplo, $\{...,\ 3/40,\ 3/20,\ 3/10,\ 3/5,\ 4/5,\ 2/5,\ 4/5,\ 2/5, ...\}$.

Por otra parte, afirmamos que:

1. Para toda $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, el conjunto $o(x,\ T)$ es finito.

2. Existe $x \in [0,1] \cap \mathbb{I}$ tal que el conjunto $o(x,\ T)$ es infinito.

Probemos la afirmación 1. Sea $x = p/q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Note que $p \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{N}$ y $0 \leq p \leq q$. Por definición de T, la imagen de p/q se puede escribir como un número de la forma p_1/q, donde $p_1 \in \mathbb{N}_0$ y $0 \leq p_1 \leq q$. A su vez, la imagen de p_1/q también se puede escribir como un número de la forma p_2/q, donde $p_2 \in \mathbb{N}_0$ y $0 \leq p_2 \leq q$. Y así sucesivamente. Por tanto, $o(x,\ T) \subset \{0,\ 1/q,\ 2/q,\ ...,\ (q-1)/q,\ 1\}$ y $o(x,\ T)$ es finita.

Ahora, para probar la afirmación 2, demostremos que $o(4-\pi,\ T)$ es infinita. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Por definición de T, podemos escribir $T^n(4-\pi)$ como la suma de dos términos: uno es de la forma $\pm 2^n\pi$ y el otro es un número entero. Dado que $T^n(4-\pi) \in [0,1]$, los términos deben tener signo contrario y, además, $T^n(4-\pi)$ tiene dos formas posibles: $2^n\pi - |[2^n\pi]|$ y $-2^n\pi + |[2^n\pi]| + 1$. Veamos que los puntos en la sucesión $o(4-\pi,\ T)$ son distintos. Supongamos que $T^n(4-\pi) = T^k(4-\pi)$, con $n \neq k$. Consideremos el caso en que $T^n(4-\pi) = 2^n\pi - |[2^n\pi]|$ y $T^k(4-\pi) = 2^k\pi - |[2^k\pi]|$. Entonces

$$2^n\pi - |[2^n\pi]| = 2^k\pi - |[2^k\pi]|,$$

$$\pi(2^n - 2^k) = 2^n\pi - 2^k\pi = |[2^n\pi]| - |[2^k\pi]|,$$

$$\pi = \frac{|[2^n\pi]| - |[2^k\pi]|}{2^n - 2^k}.$$

Note que la fracción obtenida tiene denominador diferente de cero, pues $n \neq k$. Por tanto, la fracción obtenida es racional, lo cual es una contradicción. Los demás casos se analizan de forma similar. Por tanto, la órbita $o(4-\pi,\ T) = \{4-\pi,\ 2\pi-6,\ 4\pi-12,\ 26-8\pi,\ 16\pi-50,\ 32\pi-100,\ 202-64\pi,\ 128\pi-402,\ 256\pi-804,\ ...\}$ es infinita.

Nuestro siguiente ejemplo está basado en [11, Teorema 3.13, pág. 22].

Ejemplo 2.6. Sea $S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$ y λ un número real. Definimos $R_\lambda \colon S^1 \to S^1$ por

$$R_\lambda(e^{i\theta}) = e^{i(\theta + 2\pi\lambda)}.$$

La función R_λ puede ser interpretada como la rotación de S^1 "λ vueltas". Por definición de R_λ, es claro que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$,

$$R_\lambda^n(e^{i\theta}) = e^{i(\theta + 2\pi\lambda n)}.$$

Analizaremos la órbita de todo punto $e^{i\theta}$ de S^1 bajo R_λ considerando dos casos: uno cuando λ es racional y otro cuando λ es irracional.

Caso 1: $\lambda \in \mathbb{Q}$. Sea $\lambda = p/q$, con $(p,\ q) = 1$. Entonces

$$R_\lambda^q(e^{i\theta}) = e^{i(\theta + 2\pi\lambda q)} = e^{i(\theta + 2\pi\frac{p}{q}q)} = e^{i(\theta + 2\pi p)} = e^{i\theta}.$$

Por tanto, la órbita $o(e^{i\theta},\ R_\lambda)$ es finita y todo punto en S^1 es periódico (de periodo q).

Caso 2: $\lambda \in \mathbb{I}$**.** Primero demostremos que la órbita de $e^{i\theta}$ es infinita. Supongamos que $R_\lambda^m(e^{i\theta}) = R_\lambda^n(e^{i\theta})$. Entonces, $e^{i(\theta+2\pi\lambda m)} = e^{i(\theta+2\pi\lambda n)}$, por lo que $e^{i(\theta+2\pi\lambda(m-n))} = 1$, de donde $\lambda(m-n) \in \mathbb{Z}$; puesto que $\lambda \in \mathbb{I}$, obtenemos que $m = n$. Por tanto, todos los puntos de $o(e^{i\theta},\ R_\lambda)$ son distintos.

Ahora demostremos que la órbita $o(e^{i\theta},\ R_\lambda)$ es densa en S^1. Para esto, sean $e^{i\alpha} \in S^1$ y $\epsilon > 0$, y probemos que existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $R_\lambda^k(e^{i\theta}) \in B_{S^1}(e^{i\alpha},\ \epsilon)$. Como $o(e^{i\theta},\ R_\lambda)$ es una sucesión en S^1, admite un punto de acumulación $e^{i\theta'}$ (ver la Definición 2.7 y el Lema 2.9). Existe, en particular, $\{m,\ n\} \subset \mathbb{N}$ tal que $m < n$ y $\{R_\lambda^m(e^{i\theta}),\ R_\lambda^n(e^{i\theta})\} \subset B_{S^1}(e^{i\theta'},\ \epsilon/2)$. Note que $R_\lambda^m(e^{i\theta}) \neq R_\lambda^n(e^{i\theta})$. Entonces,

$$d(R_\lambda^m(e^{i\theta}),\ R_\lambda^n(e^{i\theta})) \leq d(R_\lambda^m(e^{i\theta}),\ e^{i\theta'}) + d(R_\lambda^n(e^{i\theta}),\ e^{i\theta'}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

de modo que $\mid e^{i(\theta+2\pi\lambda n)} - e^{i(\theta+2\pi\lambda m)} \mid < \epsilon$. Dado que $\mid e^{i\theta} \mid = 1$ para todo θ, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\mid e^{i(\theta+2\pi\lambda n)} - e^{i(\theta+2\pi\lambda m)} \mid}{\mid e^{i(2\pi\lambda m)} \mid} &< \epsilon,\\
\mid \frac{e^{i(\theta+2\pi\lambda n)}}{e^{i(2\pi\lambda m)}} - e^{i\theta} \mid &< \epsilon,\\
\mid e^{i(\theta+2\pi\lambda(n-m))} - e^{i\theta} \mid &< \epsilon,\\
\mid R_\lambda^{n-m}(e^{i\theta}) - e^{i\theta} \mid &< \epsilon.
\end{aligned}$$

La función R_λ preserva longitudes en S^1. En consecuencia, R_λ^{n-m} lleva el arco que conecta $e^{i\theta}$ a $R_\lambda^{n-m}(e^{i\theta})$ al arco que conecta $R_\lambda^{n-m}(e^{i\theta})$ a $R_\lambda^{2(n-m)}(e^{i\theta})$, el cual tiene longitud menor que ϵ. En particular, podemos decir que los puntos $e^{i\theta}$, $R_\lambda^{n-m}(e^{i\theta})$, $R_\lambda^{2(n-m)}(e^{i\theta}), ...$ dividen S^1 en arcos de longitud menor que ϵ. Esto nos permite asegurar que existe j tal que $R_\lambda^{j(n-m)}(e^{i\theta}) \in B_{S^1}(e^{i\alpha}, \epsilon)$. Por tanto, la órbita de $e^{i\theta}$ es densa.

2.2. Conjuntos ω-límite

En esta sección se definen punto de acumulación de una sucesión y los conjuntos ω-límite, y se enuncian algunas propiedades de ellos.

Sean X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Decimos que U es una vecindad de x en X si U es un abierto de X tal que $x \in U$. Un concepto vinculado al de conjunto ω-límite es el de punto de acumulación de una sucesión.

Definición 2.7. Sean X un espacio métrico compacto, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $s \in X$. Entonces,

i. s es un punto de acumulación de $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si, para toda vecindad U de s y para todo $N \in \mathbb{N}$, existe $n \geq N$ tal que $s_n \in U$.

ii. $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a s si, para toda vecindad U de s, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $s_n \in U$, para todo $n \geq N$.

Sean X un espacio métrico compacto, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, $s \in X$ y U una vecindad de s. El punto s es de acumulación de $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si y sólo si la sucesión pasa por U un número infinito de veces. Las propiedades en las sucesiones que se especifican en los siguientes dos lemas son muy conocidas.

Lema 2.8. *Sean X un espacio métrico compacto, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $\{s_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Las siguientes afirmaciones son ciertas.*

i. *Si s es un punto de acumulación de $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces existe una subsucesión de $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a s.*

ii. *Si $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a s, entonces s es un punto de acumulación de $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

iii. *Si s es un punto de acumulación de $\{s_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, entonces s es un punto de acumulación de $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

iv. *Si $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a s, entonces $\{s_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a s.*

v. *Si $f\colon X \to X$ es continua y $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a s, entonces $\{f(s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(s)$.*

vi. *Si $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a s y $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a t, entonces $s = t$.*

Demostración. Las partes i al iv son inmediatas de la Definición 2.7. Para probar v, sea V una vecindad de $f(s)$. Por continuidad de f, $U = f^{-1}(V)$ es una vecindad de s. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $s_n \in U$, para todo $n \geq N$. Así, $f(s_n) \in f(U) \subset V$ para todo $n \geq N$, de modo que $\{f(s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a s, y queda probado v. Por último, para probar vi, supongamos que $s \neq t$. Sean U y V vecindades disyuntas de s y t, respectivamente. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $s_n \in U$, para todo $n \geq N$. Lo anterior implica que la sucesión pasa por V a lo más un número finito de veces, de modo que t no es un punto de acumulación de $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por la parte ii, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a t, lo cual es una contradicción. Queda probado vi. □

Lema 2.9. *Sean X un espacio métrico compacto y $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Entonces, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene al menos un punto de acumulación.*

Demostración. Supongamos que, para todo $x \in X$, x no es un punto de acumulación de $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Existen U_x una vecindad de x y $N_x \in \mathbb{N}$, tales que $s_n \notin U_x$ para todo $n \geq N_x$. Esto es, la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pasa por cada U_x solamente un número finito de veces. El conjunto de abiertos $\{U_x\}_{x\in X}$ forman una cubierta de X. Por compacidad de X, existe una subcubierta finita $\{U_{x_i}\}_{i=1}^{n}$ de X. Por tanto, la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pasa por $\cup_{i=1}^{n} U_{x_i} = X$ solamente un número finito de veces, lo cual es una contradicción. Entonces, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene al menos un punto de acumulación. □

Definición 2.10. Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua y $x \in X$. Definimos el conjunto ω-límite de x bajo f, denotado por $\omega(x,\ f)$, como

$$\omega(x,\ f) = \{a \in X : a \text{ es un punto de acumulación de la sucesión } o(x,\ f)\}.$$

En los siguientes ejemplos se determina el conjunto ω-límite de algunos puntos de los sistemas considerados en la sección anterior.

Ejemplo 2.11. Sea $f\colon [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ la función considerada en el Ejemplo 2.3. Entonces, $\omega(x,\ f) = \{1\}$ para todo $x \neq 0$. Además, $\omega(0,\ f) = \{0\}$.

Ejemplo 2.12. Sea $f\colon [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ la función considerada en el Ejemplo 2.4. Entonces, $\omega(x,\ f) = o(x,\ f)$ para todo $x \in [0\ 1]$.

Ejemplo 2.13. Sea $T\colon [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ la función considerada en el Ejemplo 2.5. Entonces, $\omega(4/5,\ T) = \{4/5,\ 2/5\}$ y $\omega(2/7,\ T) = \{2/7,\ 4/7,\ 6/7\}$. Además, si p es un punto preperiódico de f tal que $f^n(p)$ es un punto periódico, entonces $\omega(p,\ T) = \omega(f^n(p),\ T) = o(f^n(p),\ T)$.

Ejemplo 2.14. Sea $R_\lambda\colon S^1 \to S^1$ la función considerada en el Ejemplo 2.6. Si $\lambda \in \mathbb{Q}$ y $e^{i\theta} \in S^1$, entonces $\omega(e^{i\theta},\ R_\lambda) = o(e^{i\theta},\ R_\lambda)$. El caso cuando $\lambda \in \mathbb{I}$ lo consideramos más adelante en el Ejemplo 2.29.

Sea X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. El subconjunto A de X es *fuertemente invariante* bajo f si $f(A) = A$. Los teoremas que presentamos a continuación muestran propiedades del conjunto ω-límite.

Teorema 2.15. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua, definida en un espacio métrico compacto X. El conjunto $\omega(x,\ f)$ es diferente de vacío, cerrado de X y fuertemente invariante bajo f.*

Demostración. Por el Lema 2.9, $o(x,\ f)$ tiene un punto de acumulación y $\omega(x,\ f) \neq \emptyset$. Probemos que $\omega(x,\ f)$ es cerrado. Sea $a \in X - \omega(x,\ f)$. Como $a \notin \omega(x,\ f)$, existen U vecindad de a y $N \in \mathbb{N}$, tales que $f^n(x) \notin U$ para todo $n \geq N$. Es fácil ver que $U \subset X - \omega(x,\ f)$. Por tanto, $X \setminus \omega(x,\ f)$ es abierto de X y $\omega(x,\ f)$ es cerrado de X.

Finalmente, probemos que $f(\omega(x,\ f)) = \omega(x,\ f)$. Sea $f(a) \in f(\omega(x,\ f))$. Sean V una vecindad de $f(a)$ y $N \in \mathbb{N}$. Por continuidad de f, $f^{-1}(V)$ es una vecindad de a. Dado que $a \in \omega(x,\ f)$, existe $n \geq N$ tal que $f^n(x) \in f^{-1}(V)$, por lo que $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \in f(f^{-1}(V)) \subset V$, de modo que $f(a) \in \omega(x, f)$. Por tanto, $f(\omega(x,\ f)) \subset \omega(x,\ f)$.

Ahora bien, sea $b \in \omega(x, f)$. Entonces, la sucesión $o(x,\ f)$ admite una subsucesión $\{f^{n_1}(x),\ f^{n_2}(x),\ f^{n_3}(x),\ ...\}$ que converge a b, por la parte i del Lema 2.8. Podemos tomar todo $n_i \geq 1$. La sucesión $\{f^{n_1-1}(x),\ f^{n_2-1}(x),\ f^{n_3-1}(x),\ ...\}$ tiene un punto de acumulación a en X, por el Lema 2.9. Esto implica que $a \in \omega(x, f)$, por la parte iii del Lema 2.8. Además, $\{f^{n_1}(x),\ f^{n_2}(x),\ f^{n_3}(x),\ ...\}$ converge a $f(a)$, por la parte

v del Lema 2.8. Por unicidad del punto límite (parte vi del Lema 2.8), $b = f(a)$, de modo que $b \in f(\omega(x,\ f))$. Por tanto, $\omega(x,\ f) \subset f(\omega(x,\ f))$. Esto prueba que $f(\omega(x,\ f)) = \omega(x,\ f)$. □

Teorema 2.16. *Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua, C un subconjunto cerrado de X y $x \in X$. Si $o(x,\ f) \subset C$, entonces $\omega(x,\ f) \subset C$.*

Demostración. Supongamos que $\omega(x,\ f) \nsubseteq C$. Sea $a \in \omega(x,\ f) \setminus C$. Entonces, $X \setminus C$ es una vecindad de a. Dado que $a \in \omega(x,\ f)$, en particular existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in X \setminus C$, lo que implica que $o(x,\ f) \nsubseteq C$. □

Teorema 2.17. *Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua y $x \in X$. Entonces, para todo $m \in \mathbb{N}_0$, $\omega(f^m(x),\ f) = \omega(x,\ f)$.*

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}_0$. Probemos que $\omega(f^m(x),\ f) \subset \omega(x,\ f)$. Sean $a \in \omega(f^m(x),\ f)$, U una vecindad de a y $N \in \mathbb{N}$. Existe $n \geq N$ tal que $f^n(f^m(x)) \in U$. Note que $n + m \geq N$ y $f^{n+m}(x) \in U$. Así, $a \in \omega(x,\ f)$ y $\omega(f^m(x),\ f) \subset \omega(x,\ f)$.

Ahora probemos que $\omega(x,\ f) \subset \omega(f^m(x),\ f)$. Sean $a \in \omega(x,\ f)$ y U una vecindad de a. Existe $n_1 \geq m + 1$ tal que $f^{n_1}(x) \in U$, por lo que $n_1 - m \geq 1$ y $f^{n_1-m}(f^m(x)) \in U$. Además, existe $n_2 \geq m+2$ tal que $f^{n_2}(x) \in U$, por lo que $n_2 - m \geq 2$ y $f^{n_2-m}(f^m(x)) \in U$. En forma sucesiva, para cualquier natural N, existe $n_N \geq N$ tal que $f^{n_N}(f^m(x)) \in U$. Así, $a \in \omega(f^m(x),\ f)$ y $\omega(x,\ f) \subset \omega(f^m(x),\ f)$. Hemos probado que $\omega(f^m(x),\ f) = \omega(x,\ f)$, para todo $m \in \mathbb{N}_0$. □

2.3. Funciones Transitivas

Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. Dados U un abierto arbitrario en X y $x \in X$, resulta interesante encontrar funciones f con la propiedad de tener puntos en U que se acerquen (a través de la órbita) al punto x, tan cerca como queramos. Es decir, que la órbita de un punto en U intersecte al abierto $B(x,\ \epsilon)$, para todo $\epsilon > 0$. Esta propiedad dinámica de $(X,\ f)$ se llama transitividad topológica, o simplemente transitividad. En esta sección se define la transitividad de una función y algunas características de las funciones transitivas. Además, presentamos el Teorema 2.27, el cual proporciona herramientas para estudiar la transitividad de una función y será útil en el Capítulo 4 de este trabajo.

Definición 2.18. Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Diremos que f es transitiva si, para cada U y V abiertos de X diferentes de vacío, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$.

Aunque la definición de función transitiva se puede enunciar en un espacio topológico arbitrario, únicamente estudiaremos el caso cuando f está definida en un métrico compacto.

Ejemplo 2.19. Es fácil comprobar que las funciones de los Ejemplos 2.3 y 2.4 no son transitivas.

Ejemplo 2.20. Sea R_λ la función definida en el Ejemplo 2.6, con $\lambda = p/q$ en $\mathbb{Q}$. Entonces, R_λ no es transitiva. En efecto, sea U un abierto en S^1 tal que su longitud es menor que π/q. Dado que $e^{i\theta} \in U$ es de periodo q, la sucesión U, $R_\lambda(U)$, $R_\lambda^2(U)$, ... es tal que $R_\lambda^q(U) = U$. La función R_λ preserva longitudes en S^1, por lo que cada $R_\lambda^i(U)$ es de longitud menor que π/q. Si juntamos todos los $R_\lambda^i(U)$, su longitud es menor que π y cubren menos de la mitad de S^1. Sea V un abierto de S^1 tal que $V \subset S^1 \setminus \cup_{i=0}^q f^i(U)$. De esta manera, para todo $m \in \mathbb{N}_0$, $R_\lambda^m(U) \cap V = \emptyset$ y R_λ no es transitiva.

Ejemplo 2.21. Sea R_λ la función definida en el Ejemplo 2.6, con λ en $\mathbb{I}$. Entonces, R_λ es transitiva. En efecto, sean U y V abiertos no vacíos de S^1. Sea $e^{i\theta} \in U$. Como probamos en el Ejemplo 2.6, $o(e^{i\theta},\ R_\lambda)$ es densa en S^1. Así, existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $R_\lambda^m(e^{i\theta}) \in V$. Note que $R_\lambda^m(e^{i\theta}) \in R_\lambda^m(U)$. Por tanto, $R_\lambda^m(U) \cap V \neq \emptyset$ y R_λ es transitiva.

Una función f es cerrada si "lleva" cerrados en cerrados. Toda función continua definida en un espacio métrico compacto es cerrada, por [12, Teorema 2.1, pág. 226]. En particular, toda función transitiva es cerrada.

Proposición 2.22. *Toda función transitiva es sobreyectiva.*

Demostración. Sea $f\colon X \to X$ una función transitiva definida en un espacio métrico compacto X. Puesto que f es cerrada, $f(X)$ es cerrado y $X \setminus f(X)$ es un abierto de X. Supongamos que X no es sobreyectiva. Entonces, $X \setminus f(X) \neq \emptyset$. Así, X y $X \setminus f(X)$ son abiertos no vacíos de X. Como $f^m(X) \subset f(X)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $f^m(X) \cap (X \setminus f(X)) = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto, f es sobreyectiva. □

Corolario 2.23. *Sea $f\colon X \to X$ una función transitiva definida en un espacio métrico compacto X. Si U es un abierto no vacío de X, entonces $f^{-m}(U)$ es también un abierto no vacío de X para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Si f es transitiva, es claro en estos momentos que f^m es continua y sobreyectiva, para todo $m \in \mathbb{N}$. Entonces, si U es un abierto no vacío de X, $f^{-m}(U)$ es también un abierto no vacío de X. □

Proposición 2.24. *Sea $f\colon X \to X$ una función transitiva, definida en un espacio métrico compacto X. Si U es un abierto de X diferente de vacío, entonces el conjunto*

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^{-i}(U)$$

es un abierto de X diferente de vacío y denso en X.

Demostración. Sea $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} f^{-i}(U)$. Cada $f^{-i}(U)$ es un abierto no vacío de X, luego A es también un abierto no vacío de X. Probemos que A es denso en X. Sea V un abierto no vacío de X. Dado que f es transitiva, existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^m(V) \cap U \neq \emptyset$. Tomamos $x \in V$ tal que $f^m(x) \in U$. Entonces, $x \in f^{-m}(U) \subset A$. Por tanto, $A \cap V \neq \emptyset$. Esto prueba que A es denso en X. □

Sea X un espacio topológico. Un conjunto $N \subset X$ es denso en ninguna parte si su clausura $\overline{N}$ tiene interior vacío. Toda unión numerable de subconjuntos de X densos en ninguna parte es de la primera categoría; todos los otros subconjuntos de X son de la segunda categoría. Todo espacio métrico compacto X es un espacio completo [3, Teorema 4.10, pág. 90]; en particular, un continuo es un espacio completo. El teorema de Baire plantea que ningún espacio métrico completo es de la primera categoría [15, Teorema 1.1, pág. 1]; en particular, ningún continuo es de la primera categoría. Esta última afirmación la expresamos en forma conveniente de la siguiente manera:

Proposición 2.25. *Si X es un espacio métrico compacto, X no puede expresarse como una unión numerable de subconjuntos densos en ninguna parte.*

El siguiente lema será útil en la prueba del Teorema 2.27.

Lema 2.26. *Sean X un espacio T_1 y U un abierto de X. Si $\{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\} \subset U$, entonces $U \setminus \{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$ es un abierto de X.*

Demostración. En un espacio T_1 los puntos son cerrados. Por lo tanto, el conjunto $C = (X \setminus U) \cup \{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$ es cerrado en X. Así, $X \setminus C = U \setminus \{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$ es un abierto de X. □

En el siguiente teorema se muestra una equivalencia que involucra tres conceptos introducidos en este capítulo: órbitas, conjuntos ω-límite y transitividad.

Teorema 2.27. *Sean X un espacio métrico compacto sin puntos aislados y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) *f es transitiva.*

2) *Existe $x_0 \in X$ tal que $o(x_0,\ f)$ es densa en X.*

3) *Existe $x_0 \in X$ tal que $\omega(x_0,\ f) = X$.*

Demostración. Probemos que 1) implica 2). Sea $\beta = \{U_j : j \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de X. Por la Proposición 2.24, el conjunto

$$A_j = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} f^{-i}(U_j)$$

es abierto y denso de X, para todo j. Así, cada $X \setminus A_j$ es cerrado y su interior es vacío. En otras palabras, cada $X \setminus A_j$ es denso en ninguna parte. Por la Proposición 2.25, la unión de los $X \setminus A_j$ no puede ser todo el espacio X. Es decir, existe un punto

$$x_0 \in X \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (X \setminus A_j).$$

Luego, $x_0 \notin X \setminus A_j$ para todo j, por lo que

$$x_0 \in A_j = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^{-i}(U_j),$$

lo que implica que $x_0 \in f^{-m}(U_j)$, para algún m, de donde $f^m(x_0) \in U_j$. Por tanto, para todo j, $o(x_0, f) \cap U_j \neq \emptyset$ y la órbita $o(x_0,\ f)$ de x_0 bajo f es densa en X.

Ahora probemos que 2) implica 3). Es trivial que $\omega(x_0,\ f) \subset X$. Para verificar la otra contenencia, sea $x \in X$. Sea U una vecindad de x. Como el conjunto $o(x_0,\ f)$ es denso en X, $U \cap o(x_0,\ f) \neq \emptyset$. Esta intersección puede ser finita o infinita.

Si $U \cap o(x_0,\ f) = \{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$ es finita, por el Lema 2.26, el conjunto $U_1 = U \setminus \{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$ es un abierto de X. Usando nuevamente la densidad de $o(x_0,\ f)$, existe $n_1 \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^{n_1}(x_0) \in U_1$. Por el Lema 2.26, el conjunto $U_2 = U_1 \setminus \{f^{n_1}(x_0)\}$ es un abierto de X. Existe $n_2 \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^{n_2}(x_0) \in U_2$. Continuando en forma sucesiva, podemos encontrar una subsucesión $\{f^{n_1}(x_0),\ f^{n_2}(x_0),\ ...\}$ de $o(x_0,\ f)$, tal que todo $f^{n_i}(x_0)$ está en $U_i \subset U$, lo cual implica que la órbita $o(x_0,\ f)$ pasa por U un número infinito de veces. Por tanto, x es un punto de acumulación de $o(x_0,\ f)$. Note que U es infinito, por el Lema 1.17; así que al ir quitándole puntos a U no se corre el riesgo de que se acaben, al menos al hacerlo un número finito de veces.

Si $U \cap o(x_0,\ f)$ es infinita, entonces la órbita $o(x_0,\ f)$ pasa por U un número infinito de veces, es decir, x es un punto de acumulación de $o(x_0,\ f)$. En cualquier caso, $x \in \omega(x_0,\ f)$, de modo que $X \subset \omega(x_0,\ f)$. Esto prueba que $\omega(x_0,\ f) = X$.

Por último probemos que 3) implica 1). Sean U y V abiertos no vacíos de X. Sean $u \in U$ y $v \in V$. Puesto que $\{u, v\} \subset \omega(x_0, f)$, en particular, existe $\{m,\ n\} \subset \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) \in U$ y $f^n(x) \in V$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $m \geq n$. Entonces, $f^n(x) = f^{n-m}(f^m(x)) \in f^{n-m}(U)$. Así, $f^{n-m}(U) \cap V \neq \emptyset$ y f es transitiva. □

Note que en la demostración de 1) implica 2) no se usó la hipótesis: X no tiene puntos aislados.

Corolario 2.28. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f es transitiva, existe $x_0 \in X$ tal que $o(x_0,\ f)$ es densa en X.*

Sin embargo, la hipótesis: X *no tiene puntos aislados* es importante en la prueba de 2) implica 3). La existencia de un punto con órbita densa no implica la existencia de un punto cuyo conjunto ω-límite es X, ni que f sea transitiva. Por ejemplo, tomemos $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ y $f \colon X \to X$ la función continua dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{si } x = \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Entonces, $o(1,\ f) = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en X y $\omega(1,\ f) = \{0\} \neq X$. Además, f no es transitiva. En efecto, sean $U = \{1/2\}$ y $V = \{1\}$ dos abiertos no vacíos de X. Es claro que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En los siguientes ejemplos aplicamos el Teorema 2.27.

Ejemplo 2.29. Sea $R_\lambda \colon S^1 \to S^1$ la función considerada en el Ejemplo 2.6. Si $\lambda \in \mathbb{I}$ y $e^{i\theta} \in S^1$, se mostró que la órbita $o(e^{i\theta},\ R_\lambda)$ es densa en S^1. Entonces, por el Teorema 2.27, $\omega(e^{i\theta},\ R_\lambda) = S^1$.

Ejemplo 2.30. Consideremos una vez más la función $R_\lambda \colon S^1 \to S^1$ del Ejemplo 2.6. Si pasamos por alto lo expuesto en los Ejemplos 2.20 y 2.21, podemos dar otra aplicación del Teorema 2.27. En el Ejemplo 2.6 mostramos que, si $\lambda \in \mathbb{Q}$, la órbita $o(e^{i\theta},\ R_\lambda)$ es finita, para todo $e^{i\theta} \in S^1$; entonces, por el Teorema 2.27, R_λ no es transitiva. En el Ejemplo 2.6 también mostramos que, si $\lambda \in \mathbb{I}$, la órbita $o(e^{i\theta},\ R_\lambda)$ es densa en S^1, para todo $e^{i\theta} \in S^1$; entonces R_λ es transitiva, por el Teorema 2.27.

Consideremos el conjunto $I = \{0,\ 1\}$ con la topología discreta y el conjunto $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} I$ con la topología producto. Sea $\rho_n \colon X \to I$ la proyección sobre la n-ésima componente de X. Entonces, U es un abierto de X si y sólo si $\rho_n(U) = I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, excepto un número finito de n's. Además, todo $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...)$ en X es una sucesión de ceros y unos; x_1 es la primera componente, x_2 la segunda, x_3 la tercera, y así sucesivamente. Decimos que un espacio topológico X es totalmente disconexo si los únicos conexos de X son conjuntos degenerados.

Proposición 2.31. *Sean $I = \{0,\ 1\}$ con la topología discreta y $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} I$ con la topología producto. Entonces, X es un espacio métrico compacto, totalmente disconexo y sin puntos aislados.*

Demostración. El espacio I está dotado con la métrica discreta y es compacto. Por el Teorema 1.2, $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} I$ es un espacio métrico compacto. Probemos que X es totalmente disconexo. Sea C un conjunto conexo de X y sean $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...)$ y $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ ...)$ puntos en C tales que $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...) \neq (y_1,\ y_2,\ y_3,\ ...)$. Entonces $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...)$ y $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ ...)$ difieren en al menos una coordenada l. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x_l = 0$ y $y_l = 1$. Sean $U = \prod_{i=1}^{l-1} I \times \{0\} \times \prod_{i=l+1}^{\infty} I$ y $V = \prod_{i=1}^{l-1} I \times \{1\} \times \prod_{i=l+1}^{\infty} I$ dos abiertos disyuntos de X. Note que $X = U \cup V$, $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...) \in U$ y $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ ...) \in V$. Por tanto, los conjuntos $U \cap C$ y $V \cap C$ son un desconexión de C, lo cual es una contradicción. Por último probemos que X no tiene puntos aislados. Sea $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...) \in X$. Entonces, $\rho_n(\{(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...)\}) \neq I$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\{(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...)\}$ no es un abierto de X. Por tanto, X no tiene puntos aislados. $\square$

En [24, Corolario 30.4, pág. 217], se afirma que X es otra presentación del conjunto de Cantor. Dados $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...)$ y $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ ...)$ en X, definimos la siguiente adición:

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...) + (y_1,\ y_2,\ y_3,\ ...) = (z_1,\ z_2,\ z_3,\ ...),$$

donde

- $z_1 = x_1 + y_1$ (mód 2).
- $z_2 = x_2 + y_2 + t_1$ (mód 2); si $x_1 + y_1 \in \{0,\ 1\}$, $t_1 = 0$; si $x_1 + y_1 = 2$, $t_1 = 1$.
- $z_3 = x_3 + y_3 + t_2$ (mód 2); si $x_2 + y_2 + t_1 \in \{0,\ 1\}$, $t_2 = 0$; si $x_2 + y_2 + t_1 \in \{2,\ 3\}$, $t_2 = 1$.
- $z_4 = x_4 + y_4 + t_3$ (mód 2); si $x_3 + y_3 + t_2 \in \{0,\ 1\}$, $t_3 = 0$; si $x_3 + y_3 + t_2 \in \{2,\ 3\}$, $t_3 = 1$.

Y continuamos en forma sucesiva. Es decir, sumamos con módulo 2 componente a componente empezando por la izquierda. Es fácil ver que la suma que acabamos de definir es un grupo abeliano, donde $(0,\ 0,\ 0,\ ...)$ es el módulo y, si $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...)$ es un elemento de X en el cual el primer 1, de izquierda a derecha, aparece en la M-ésima coordenada, el inverso de $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...)$ es un $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ ...)$ en X tal que

$$y_i = \begin{cases} x_i, & \text{si } 1 \leq i \leq M, \\ 0, & \text{si } i > M \text{ y } x_i = 1, \\ 1, & \text{si } i > M \text{ y } x_i = 0. \end{cases}$$

Consideremos ahora la función $f\colon X \to X$ definida, para todo $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...)$ en X, por

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...) = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...) + (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ ...).$$

La función f es llamada la Función Máquina de Contar Binaria. Es fácil ver que f es un homeomorfismo.

Podemos definir $f\colon X \to X$ de la siguiente forma equivalente: $f(1,\ 1,\ 1,\ ...) = (0,\ 0,\ 0,\ ...)$ y $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...) = (0,\ 0,\ 0,\ ...\ 0,\ 1,\ x_{n+1},\ x_{n+2},\ ...)$, si el primer cero de $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...)$ aparece en la n-ésima componente.

Si $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...)$ en X tiene un número finito k de componentes iguales a 1, entonces $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...)$ representa un único número natural escrito en base dos leyéndolo de derecha a izquierda; en base decimal, $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...)$ representa el número natural

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} x_i.$$

Así, la sucesión $o((0,\ 0,\ 0,\ ...),\ f) =$

$$\{(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ ...), (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ ...),\ (1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ ...),\ (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ ...),\ ...\}$$

es la sucesión de los números naturales.

Teorema 2.32. *La Función Máquina de Contar Binaria es transitiva.*

Demostración. Probemos que $o((0,\ 0,\ 0,\ ...),\ f)$ es denso en X. Sea U un abierto no vacío de X. Entonces, existen $k \in \mathbb{N}_0$ y $A = \{i_1,\ i_2,\ i_3,\ ...,\ i_k\} \subset \mathbb{N}$, con $i_1 < i_2 < i_3 < ... < i_k$, tal que $\rho_i(U) = I$, para todo $i \in \mathbb{N} \setminus A$. Sea $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ ...) \in U$ tal que $y_i = 0$, si $i \in \mathbb{N} \setminus A$. Por tanto, $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ ...)$ tiene a lo más k componentes iguales a 1. La sumatoria

$$s = y_1 + 2y_2 + 2^2y_3 + ... + 2^{i_k-1}y_{i_k} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1}y_i$$

representa "el valor de $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ ...)$" en base decimal. Por tanto, $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ ...) = f^s(0,\ 0,\ 0,\ ...) \in U$ y $o((0,\ 0,\ 0,\ ...),\ f)$ es denso en X. Por el Teorema 2.27, f es transitiva. □

En la demostración del Teorema 2.32 se muestra que el conjunto $o((0,\ 0,\ 0,\ ...),\ f)$ es denso en X. De hecho, en [11, pág. 139] se menciona que todo punto en X tiene órbita densa.

2.4. Ejemplos de Funciones Transitivas Definidas en Continuos

En esta sección presentamos tres ejemplos de funciones transitivas definidas en tres continuos distintos: el arco, una curva cerrada simple y el cubo de Hilbert.

2.4.1. La Función Rotación Irracional de S^1

Sea $S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$ y λ un número irracional. Definimos $R_\lambda \colon S^1 \to S^1$ por

$$R_\lambda(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+2\pi\lambda)}.$$

La función R_λ es la Función Rotación Irracional de S^1. Note que la Función Rotación Irracional de S^1 es un homeomorfismo.

Teorema 2.33. *La Función Rotación Irracional de S^1 es transitiva.*

Demostración. Ejemplo 2.21. □

2.4.2. La Función Tienda de Campaña

Sea $T\colon [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ la función definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2(1-x), & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La función T es continua y, como mencionamos anteriormente, es llamada la Función Tienda de Campaña. Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{p=0}^{2^n-1} \left[\frac{p}{2^n},\ \frac{p+1}{2^n}\right] = [0,\ 1].$$

El teorema siguiente muestra una propiedad relacionada con la dinámica de la función T y se usará para mostrar que esta función es transitiva.

Teorema 2.34. *Sea $T\colon [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ la Función Tienda de Campaña. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $p \in \{0,\ 1,\ ...,\ 2^n - 1\}$,*

$$T^n\left(\left[\frac{p}{2^n},\ \frac{p+1}{2^n}\right]\right) = [0,\ 1].$$

Demostración. Si $n = 1$, $p \in \{0,\ 1\}$. Además, $T\left(\left[\frac{p}{2},\ \frac{p+1}{2}\right]\right) = T\left(\left[0,\ \frac{1}{2}\right]\right) = [0,\ 1]$, si $p = 0$; y $T\left(\left[\frac{p}{2},\ \frac{p+1}{2}\right]\right) = T\left(\left[\frac{1}{2},\ 1\right]\right) = [0,\ 1]$, si $p = 1$. Luego, el resultado es cierto para $n = 1$. Supongamos que el resultado es cierto para $n = k$, es decir, $T^k\left(\left[\frac{p}{2^k},\ \frac{p+1}{2^k}\right]\right) = [0,\ 1]$ para cada $p \in \{0,\ 1,\ ...,\ 2^k - 1\}$. Probemos que $T^{k+1}\left(\left[\frac{p}{2^{k+1}},\ \frac{p+1}{2^{k+1}}\right]\right) = [0,\ 1]$ para cada $p \in \{0,\ 1,\ ...,\ 2^{k+1} - 1\}$. Consideremos dos casos:

1) Si $p \in \{0,\ 1,\ ...,\ 2^k - 1\}$, obtenemos $0 \leq p < p + 1 \leq 2^k$, por lo que $0 \leq \frac{p}{2^{k+1}} < \frac{p+1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2}$, luego $\left[\frac{p}{2^{k+1}},\ \frac{p+1}{2^{k+1}}\right] \subset \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$. Entonces, por definición de T y por la hipótesis de inducción,

$$T^{k+1}\left(\left[\frac{p}{2^{k+1}},\ \frac{p+1}{2^{k+1}}\right]\right) = T^k\left(T\left(\left[\frac{p}{2^{k+1}},\ \frac{p+1}{2^{k+1}}\right]\right)\right) = T^k\left(\left[\frac{p}{2^k},\ \frac{p+1}{2^k}\right]\right) = [0,\ 1].$$

2) Si $p \in \{2^k,\ 2^k + 1,\ ...,\ 2^{k+1} - 1\}$, obtenemos $2^k \leq p < p + 1 \leq 2^{k+1}$, por lo que $\frac{1}{2} \leq \frac{p}{2^{k+1}} < \frac{p+1}{2^{k+1}} \leq 1$, luego $\left[\frac{p}{2^{k+1}},\ \frac{p+1}{2^{k+1}}\right] \subset \left[\frac{1}{2},\ 1\right]$. Entonces, por definición de T,

$$\begin{aligned} T^{k+1}\left(\left[\frac{p}{2^{k+1}},\ \frac{p+1}{2^{k+1}}\right]\right) &= T^k\left(T\left(\left[\frac{p}{2^{k+1}},\ \frac{p+1}{2^{k+1}}\right]\right)\right) \\ &= T^k\left(\left[2\left(1 - \frac{p+1}{2^{k+1}}\right),\ 2\left(1 - \frac{p}{2^{k+1}}\right)\right]\right) \\ &= T^k\left(\left[\frac{2^{k+1} - (p+1)}{2^k},\ \frac{2^{k+1} - p}{2^k}\right]\right). \end{aligned}$$

Como $p \in \{2^k,\ 2^k+1,\ ...,\ 2^{k+1}-1\}$, tenemos $2^k \leq p \leq 2^{k+1}-1$, por lo que $2^k+1 \leq p+1 \leq 2^{k+1}$, de donde $-2^{k+1} \leq -p-1 \leq -2^k-1$, de modo que $0 \leq 2^{k+1}-p-1 \leq 2^k-1$, pues $2^{k+1}-2^k-1 = 2^k(2-1)-1 = 2^k-1$. Así, $2^{k+1}-p-1 \in \{0,\ 1,\ ...,\ 2^k-1\}$. Por la hipótesis de inducción,

$$T^k\left(\left[\frac{2^{k+1}-(p+1)}{2^k},\ \frac{2^{k+1}-p}{2^k}\right]\right) = T^k\left(\left[\frac{2^{k+1}-p-1}{2^k},\ \frac{(2^{k+1}-p-1)+1}{2^k}\right]\right) = [0,\ 1].$$

Luego, $T^{k+1}\left(\left[\frac{p}{2^{k+1}},\ \frac{p+1}{2^{k+1}}\right]\right) = [0,\ 1]$, para cada $p \in \{0,\ 1,\ ...,\ 2^{k+1}-1\}$, y el resultado es cierto para $n = k+1$. Por tanto, $T^n\left(\left[\frac{p}{2^n},\ \frac{p+1}{2^n}\right]\right) = [0,\ 1]$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $p \in \{0,\ 1,\ ...,\ 2^n-1\}$. $\square$

Teorema 2.35. *La Función Tienda de Campaña es transitiva.*

Demostración. Sean U y V abiertos no vacíos de $[0,\ 1]$. Sea $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\left[\frac{p}{2^m},\ \frac{p+1}{2^m}\right] \subset U$, para algún $p \in \{0,\ 1,\ ...,\ 2^m-1\}$. Por el Teorema 2.34, $T^m\left(\left[\frac{p}{2^m},\ \frac{p+1}{2^m}\right]\right) = [0,\ 1]$, de modo que $T^m(U) = [0,\ 1]$. Así, $T^m(U) \cap V \neq \emptyset$ y T es transitiva. $\square$

2.4.3. La Función Shift

Consideremos el conjunto

$$\begin{aligned} Q &= [0,\ 1]^{\mathbb{Z}} \\ &= \{\ \widehat{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{Z}} : t_n \in [0,\ 1], \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Como mencionamos anteriormente, Q es un continuo llamado el cubo de Hilbert. Dotamos a Q con la métrica D definida, para todo $\widehat{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\widehat{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en Q, por

$$D(\widehat{t}\ ,\ \widehat{s}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|t_n - s_n|}{2^{|n|}}.$$

La verificación de que D es, de hecho, una métrica es muy fácil, teniendo en cuenta la métrica en el intervalo $[0,\ 1]$. Note que en la definición $0 \leq |t_n - s_n| \leq 1$.

Lema 2.36. *Sean $\widehat{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\widehat{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ puntos en Q y $M \in \mathbb{N}$, tales que $t_n = s_n$, para todo $n \in [-M,\ M]$. Entonces $D(\widehat{t}\ ,\ \widehat{s}) \leq \frac{1}{2^{M-1}}$.*

Demostración.

$$
\begin{aligned}
D(\widehat{t}\ ,\ \widehat{s}) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|t_n - s_n|}{2^{|n|}} = \sum_{n=-\infty}^{-(M+1)} \frac{|t_n - s_n|}{2^{|n|}} + \sum_{n=-M}^{M} \frac{|t_n - s_n|}{2^{|n|}} + \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{|t_n - s_n|}{2^{n}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-(M+1)} \frac{|t_n - s_n|}{2^{|n|}} + \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{|t_n - s_n|}{2^{n}} \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{-(M+1)} \frac{1}{2^{|n|}} + \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n}} = 2 \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n}} = 2\frac{1}{2^M} = \frac{1}{2^{M-1}}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Lema 2.37. *Sean $\widehat{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\widehat{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ puntos en Q y $\epsilon > 0$, tales que $|t_n - s_n| < \epsilon$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $D(\widehat{t}\ ,\ \widehat{s}) < 3\epsilon$.*

Demostración.

$$
\begin{aligned}
D(\widehat{t}\ ,\ \widehat{s}) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|t_n - s_n|}{2^{|n|}} = |t_0 - s_0| + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{|t_n - s_n|}{2^{|n|}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n - s_n|}{2^{n}} \\
&< \epsilon + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\epsilon}{2^{|n|}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n}} = \epsilon + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n}} = \epsilon + 2\epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n}} = \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon.
\end{aligned}
$$

$\square$

Sean Q el cubo de Hilbert y $\sigma\colon Q \to Q$ la función continua definida, para todo $\widehat{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en Q, por

$$\sigma(\widehat{t}) = \widehat{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

donde $s_n = t_{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. La función $\sigma\colon Q \to Q$ recibe el nombre de *Función Shift* en [2, Sección 7.4, pág. 1022]. La función $\sigma\colon Q \to Q$ es un "corrimiento" o "deslizamiento" a la derecha de cada punto de Q. La n-ésima componente de $\sigma(\widehat{t})$ la escribiremos $\sigma(\widehat{t})_n$. Así, $\sigma(\widehat{t})_n = t_{n-1}$.

La verificación de que $\sigma\colon Q \to Q$ es, de hecho, continua se hace de la siguiente manera: Sea $n \in \mathbb{Z}$ y $\pi_n\colon Q \to [0,\ 1]$ la n-ésima proyección definida, para todo $\widehat{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, por $\pi_n(\widehat{t}) = t_n$. Note que $\pi_n\colon Q \to [0,\ 1]$ es una función continua. Tenemos que $(\pi_n \circ \sigma)(\widehat{t}) = \pi_n(\sigma(\widehat{t})) = \sigma(\widehat{t})_n = t_{n-1} = \pi_{n-1}(\widehat{t})$, para todo $\widehat{t} \in Q$. Por tanto, $\pi_n \circ \sigma = \pi_{n-1}$, de donde σ es continua, por [14, Teorema 2, pág. 145]. El siguientes lema es trivial.

Lema 2.38. *Sea $\sigma\colon Q \to Q$ la Función Shift. Para todo $k \in \mathbb{Z}$ y todo $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\sigma^k(\widehat{t})_n = t_{n-k}.$$

El teorema que sigue muestra una característica importante de la Función Shift.

Teorema 2.39. *La Función Shift es un homeomorfismo.*

Demostración. Es suficiente mostrar que f es biyectiva, por [12, Teorema 2.1, pág. 226]. Sea $\sigma(\widehat{t}) = \sigma(\widehat{s})$. Entonces, $\sigma(\widehat{t})_n = \sigma(\widehat{s})_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Así, $t_n = t_{(n+1)-1} = \sigma(\widehat{t})_{n+1} = \sigma(\widehat{s})_{n+1} = s_{(n+1)-1} = s_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por consiguiente, σ es inyectiva. Ahora, sea $\widehat{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in Q$. Existe $\widehat{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in Q$ tal que $s_n = t_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Además, $\sigma(\widehat{s})_n = s_{n-1} = t_{(n-1)+1} = t_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Luego, $\sigma(\widehat{s}) = \widehat{t}$. Por lo tanto, σ es sobre. $\square$

Ahora que conocemos la Función Shift, vamos a probar que ésta resulta transitiva.

Teorema 2.40. *La Función Shift es transitiva.*

Demostración. Sean $\{\widehat{t},\ \widehat{s}\} \subset Q$ y $\epsilon > 0$. Probemos que existen $n \in \mathbb{Z}$ y $\widehat{u} \in Q$ tales que $D(\widehat{t},\ \widehat{u}) < \epsilon$ y $D(\widehat{s},\ f^n(\widehat{u})) < \epsilon$. Sea $M \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^M < \epsilon/2$, o bien, $1/2^{M-1} < \epsilon$. Sea $\widehat{c} = \sigma^{-3M}(\widehat{s}) \in Q$ y sea $\widehat{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in Q$ tal que

$$u_n = \begin{cases} t_n, & \text{si } -M \leq n \leq M, \\ c_n, & \text{si } -4M \leq n \leq -2M, \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Dado que $u_n = t_n$ para cada $n \in [-M,\ M]$, por el Lema 2.36, $D(\widehat{t},\ \widehat{u}) \leq 1/2^{M-1} < \epsilon$. Ahora veamos que $D(\widehat{s},\ \sigma^{3M}(\widehat{u})) < \epsilon$. Si $n \in [-M,\ M]$, entonces $n - 3M \in [-4M,\ -2M]$, así que, usando el Lema 2.38,

$$\sigma^{3M}(\widehat{u})_n = u_{n-3M} = c_{n-3M} = \sigma^{-3M}(\widehat{s})_{n-3M} = s_{(n-3M)+3M} = s_n.$$

Entonces $\sigma^{3M}(\widehat{u})_n = s_n$, para cada $n \in [-M,\ M]$. Por el Lema 2.36, $D(\widehat{s},\ \sigma^{3M}(\widehat{u})) \leq 1/2^{M-1} < \epsilon$.

Por lo tanto, existe $\widehat{u} \in Q$ tal que $D(\widehat{t},\ \widehat{u}) < \epsilon$ y $D(\widehat{s},\ f^{3M}(\widehat{u})) < \epsilon$. Es decir, $\widehat{u} \in B(\widehat{t},\ \epsilon)$ y $f^{3M}(\widehat{u}) \in B(\widehat{s},\ \epsilon)$. Note que $f^{3M}(\widehat{u}) \in f^{3M}(B(\widehat{t},\ \epsilon))$. En consecuencia, $B(\widehat{s},\ \epsilon) \cap f^{3M}(B(\widehat{t},\ \epsilon)) \neq \emptyset$ y σ es transitiva. $\square$

Capítulo 3

TEOREMAS GENERALES DE TRANSITIVIDAD EN FUNCIONES INDUCIDAS

Dada $n \in \mathbb{N}$, las funciones $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$, $2^f\colon 2^X \to 2^X$ y $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(X)$ son inducidas de manera natural por una función continua $f\colon X \to X$ definida en un continuo o en un espacio métrico compacto X. En este capítulo se estudian las relaciones entre las siguientes afirmaciones:

i. f es transitiva.

ii. 2^f es transitiva.

iii. $C_n(f)$ es transitiva.

iv. $F_n(f)$ es transitiva.

Para estudiar dichas relaciones, en las Secciones 3.3 y 3.4, estudiamos las funciones débilmente mezclantes y demostramos algunas propiedades de estas funciones. En la Sección 3.6, analizamos la transitividad de funciones inducidas por la Función Rotación Irracional de S^1, la Función Tienda de Campaña y la Función Shift. Estas funciones inducidas están definidas en hiperespacios de continuos.

3.1. Funciones Inducidas

Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. La función f induce de manera natural una nueva función en los hiperespacios de X. Como mencionamos anteriormente, un hiperespacio es un subconjunto de la familia de cerrados no vacíos de X, dotado con la métrica de Hausdorff o, equivalentemente, con la topología de Vietoris. Sea $n \in \mathbb{N}$. Los hiperespacios que consideraremos son:

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \text{ es compacto no vacío}\}, \\ C(X) &= \{A \subset X : A \text{ es compacto no vacío y conexo}\}, \\ C_n(X) &= \{A \subset X : A \text{ es compacto no vacío y tiene a lo más } n \text{ componentes}\}, \\ F_n(X) &= \{A \subset X : 1 \leq\mid A \mid\leq n\}. \end{aligned}$$

2^X es el hiperespacio de subespacios métricos compactos de X, $C(X)$ es el hiperespacio de subcontinuos de X, $C_n(X)$ es el n-ésimo hiperespacio y $F_n(X)$ es el n-ésimo producto simétrico. Note que $C(X) \subset 2^X$, $F_n(X) \subset 2^X$ y $C_n(X) \subset 2^X$. Como $C_1(X) = C(X)$, nuestra lista de funciones inducidas se reduce a tres, las cuales definimos a continuación.

Definición 3.1. Sean $f\colon X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X y $n \in \mathbb{N}$. Las funciones inducidas $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$, $2^f : 2^X \to 2^X$ y $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(X)$ están definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} C_n(f)(A) &= f(A), \text{ para toda } A \in C_n(X), \\ 2^f(A) &= f(A), \text{ para toda } A \in 2^X, \\ F_n(A) &= f(A), \text{ para toda } A \in F_n(X). \end{aligned}$$

Dado que $F_n(X) \subset 2^X$ y $C_n(X) \subset 2^X$ para toda $n \in \mathbb{N}$, podemos afirmar que $C_n(f) = 2^f|_{C_n(X)}$ y $F_n(f) = 2^f|_{F_n(X)}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. En este trabajo se estudia principalmente la función inducida $C_n(f)$, por lo que los resultados se presentarán primero para esta función inducida y luego para las demás funciones inducidas, 2^f y $F_n(f)$. El siguiente teorema muestra que $X \cong F_1(X)$.

Teorema 3.2. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces la función $\varphi\colon X \to F_1(X)$ definida, para todo $x \in X$, por $\varphi(x) = \{x\}$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Es suficiente mostrar que la función $\varphi\colon X \to F_1(X)$ es continua y biyectiva, por [12, Teorema 2.1, pág. 226]. Sea $\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle$ un abierto básico de $F_1(X)$. Note que $U = \cap_{i=1}^m U_i$ es abierto de X. Probemos que $\varphi^{-1}(\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle) = U$. $x \in \varphi^{-1}(\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle)$ si, y solo si, $\varphi(x) = \{x\} \in \langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle$ si, y solo si, $\{x\} \subset \cup_{i=1}^m U_i$ y $\{x\} \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ m\}$ si, y solo si, $x \in U_i$ para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ m\}$ si, y solo si, $x \in U$. Por tanto, $\varphi^{-1}(\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle) = U$ y la función $\varphi\colon X \to F_1(X)$ es continua. Supongamos que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Entonces $\{x\} = \{y\}$, por lo que $x = y$ y φ es uno a uno. Sea $\{x\} \in F_1(X)$. Es inmediato que $x \in X$ y $\varphi(x) = \{x\}$, por lo que φ es sobre. Queda esto demostrado. $\square$

Los siguientes lemas muestran propiedades de algunas imágenes de las funciones inducidas.

Lema 3.3. *Sean $f\colon X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X, $n \in \mathbb{N}$ y $S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m$ subconjuntos de X. Entonces*

$$\begin{aligned} C_n(f)(\langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle) &\subset \langle f(S_1),\ f(S_2),\ ...,\ f(S_m)\rangle, \\ 2^f(\langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle) &\subset \langle f(S_1),\ f(S_2),\ ...,\ f(S_m)\rangle, \\ F_n(f)(\langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle) &\subset \langle f(S_1),\ f(S_2),\ ...,\ f(S_m)\rangle. \end{aligned}$$

Demostración. Probemos la primera contenencia. Para esto, sea $f(K) = C_n(f)(K) \in C_n(f)(\langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle)$, donde $K \in \langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle$. Como $K \subset \cup_{i=1}^m S_i$, tenemos que $f(K) \subset f(\cup_{i=1}^m S_i) = \cup_{i=1}^m f(S_i)$. Sea $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ m\}$. Como $K \cap S_i \neq \emptyset$, tenemos que $f(K \cap S_i) \neq \emptyset$, por lo que $f(K) \cap f(S_i) \neq \emptyset$, pues $f(K \cap S_i) \subset f(K) \cap f(S_i)$. Por tanto, $f(K) \in \langle f(S_1),\ f(S_2),\ ...,\ f(S_m)\rangle$ y $C_n(f)(\langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle) \subset \langle f(S_1),\ f(S_2),\ ...,\ f(S_m)\rangle$. De forma similar se prueban las otras dos contenencias. $\square$

Lema 3.4. *Sean $f\colon X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X, $n \in \mathbb{N}$ y $S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m$ subconjuntos de X. Si f es un homeomorfismo, entonces*

$$\begin{aligned} C_n(f)(\langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle) &= \langle f(S_1),\ f(S_2),\ ...,\ f(S_m)\rangle, \\ 2^f(\langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle) &= \langle f(S_1),\ f(S_2),\ ...,\ f(S_m)\rangle, \\ F_n(f)(\langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle) &= \langle f(S_1),\ f(S_2),\ ...,\ f(S_m)\rangle. \end{aligned}$$

Demostración. Por el Lema 3.3, $C_n(f)(\langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle) \subset \langle f(S_1),\ f(S_2),\ ...,\ f(S_m)\rangle$. Así, basta probar que $\langle f(S_1),\ f(S_2),\ ...,\ f(S_m)\rangle \subset C_n(f)(\langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle)$. Sean f un homeomorfismo y $L \in \langle f(S_1),\ f(S_2),\ ...,\ f(S_m)\rangle$. Entonces

$$L \subset \bigcup_{i=1}^m f(S_i) \text{ y } L \cap f(S_i) \neq \emptyset \text{ para todo } i \in \{1,\ 2,\ ...,\ m\}.$$

Sea $K = f^{-1}(L)$. Dado que f^{-1} es continua y sobreyectiva, $K \in C_n(X)$. En consecuencia tenemos que

$$K = f^{-1}(L) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^m f(S_i)\right) = \bigcup_{i=1}^m f^{-1}(f(S_i)) = \bigcup_{i=1}^m S_i,$$

pues f es uno a uno, y

$$K \cap S_i = f^{-1}(L) \cap S_i \neq \emptyset \text{ para todo } i \in \{1,\ 2,\ ...,\ m\}.$$

Así $K \in \langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle$. Por tanto, $f(K) = C_n(f)(K) \in C_n(f)(\langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle)$ y $\langle f(S_1),\ f(S_2), ...,\ f(S_m)\rangle \subset C_n(f)(\langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle)$. De forma similar se prueban las otras dos igualdades. $\square$

Lema 3.5. *Sean $f\colon X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X, $n \in \mathbb{N}$ y $S_1, S_2, ..., S_m$ subconjuntos de X. Entonces*

$$C_n(f)^{-1}(\langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle) = \langle f^{-1}(S_1),\ f^{-1}(S_2),\ ...,\ f^{-1}(S_m)\rangle,$$
$$(2^f)^{-1}(\langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle) = \langle f^{-1}(S_1),\ f^{-1}(S_2),\ ...,\ f^{-1}(S_m)\rangle,$$
$$F_n(f)^{-1}(\langle S_1,\ S_2,\ ...,\ S_m\rangle) = \langle f^{-1}(S_1),\ f^{-1}(S_2),\ ...,\ f^{-1}(S_m)\rangle.$$

Demostración. $K \in C_n(f)^{-1}(\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle)$ si, y sólo si, $C_n(f)(K) = f(K) \in \langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle$ si, y sólo si, $f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ y $f(K) \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ m\}$ si, y sólo si, $K \subset f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{m} U_i) = \bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}(U_i)$ y $K \cap f^{-1}(U_i) \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ m\}$ si, y sólo si, $K \in \langle f^{-1}(U_1),\ f^{-1}(U_2),\ ...,\ f^{-1}(U_m)\rangle$. De forma similar se prueban las otras dos igualdades. □

Note que las funciones inducidas $C_n(f)$, 2^f y $F_n(f)$ introducidas en la Definición 3.1 están de hecho bien definidas, pues f es una función continua. Sin embargo, las funciones inducidas pueden estar bien definidas sin que necesariamente la función que las induce sea continua. Si f es una función arbitraria, $F_n(f)$ está bien definida; si f es una función cerrada, 2^f está bien definida; si f es una función cerrada y lleva conexos en conexos, $C_n(f)$ está bien definida. En el siguiente teorema se muestra que la transitividad de f implica la transitividad de las funciones inducidas, y la transitividad de alguna función inducida implica la transitividad de la función que la induce.

Teorema 3.6. *Sea $f\colon X \to X$ una función definida en un espacio métrico compacto X tal que f es cerrada y lleva conexos en conexos. Afirmamos que:*

i. Si f es continua, entonces $C_n(f)$, 2^f y $F_n(f)$ son continuas para toda $n \in \mathbb{N}$.

ii. Si $C_n(f)$, 2^f o $F_n(f)$ es continua para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces f es continua.

Demostración. Probemos *i*. Supongamos que f es continua. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probemos que $C_n(f)$ es continua. Sea $\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle$ un abierto básico de $C_n(X)$. Entonces U_1, U_2, ..., U_m son abiertos de X. Por continuidad de f, $f^{-1}(U_1)$, $f^{-1}(U_2)$, ..., $f^{-1}(U_m)$ son también abiertos de X y $\langle f^{-1}(U_1),\ f^{-1}(U_2),\ ...,\ f^{-1}(U_m)\rangle$ es abierto de $C_n(X)$. Aplicando el Lema 3.5, $C_n(f)^{-1}(\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle) = \langle f^{-1}(U_1),\ f^{-1}(U_2),\ ...,\ f^{-1}(U_m)\rangle$. Por tanto, $C_n(f)^{-1}(\langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_m\rangle)$ es abierto de $C_n(X)$ y $C_n(f)$ es continua. De forma similar se prueba que 2^f y $F_n(f)$ son continuas.

Probemos *ii*. Supongamos que $C_n(f)$ es continua para alguna $n \in \mathbb{N}$. Sea $g = \varphi^{-1} \circ C_n(f) \circ \varphi\colon X \to X$, donde φ es el homeomorfismo definido en el Teorema 3.2. Puesto que $C_n(f)$ es continua, g es continua y además $g(x) = (\varphi^{-1} \circ C_n(f) \circ \varphi)(x) = (\varphi^{-1} \circ C_n(f))(\{x\}) = \varphi^{-1}(\{f(x)\}) = f(x)$, para todo $x \in X$. Por tanto, $f = g$ y f es continua. La demostración es similar si 2^f o $F_n(f)$ es continua. □

Note que, como $C_n(f) = 2^f|_{C_n(X)}$ y $F_n(f) = 2^f|_{F_n(X)}$, tenemos además que: Si 2^f es continua, entonces f, $C_n(f)$ y $F_n(f)$ son continuas para toda $n \in \mathbb{N}$. En el siguiente teorema se muestra la relación entre f y las funciones inducidas, cuando una de estas dos es un homeomorfismo.

Teorema 3.7. *Sea $f\colon X \to X$ una función definida en un espacio métrico compacto X tal que f es cerrada y lleva conexos en conexos. Afirmamos que:*

i. Si f es un homeomorfismo, entonces $C_n(f)$, 2^f y $F_n(f)$ son homeomorfismos para toda $n \in \mathbb{N}$.

ii. Si $C_n(f)$, 2^f o $F_n(f)$ es un homeomorfismo para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Probemos i. Supongamos que f es un homeomorfismo. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probemos que la función inducida $C_n(f)$ es un homeomorfismo. Por el Teorema 3.6, $C_n(f)$ es continua. Sea $\{A,\ B\} \subset C_n(X)$ tal que $C_n(f)(A) = C_n(f)(B)$. Entonces $f(A) = f(B)$, por lo que $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(B))$, de modo que $A = B$, pues f es uno a uno. Así, $C_n(f)$ también es uno a uno. Sea $D \in C_n(X)$. Como f^{-1} es continua, $f^{-1}(D) \in C_n(X)$. Además $C_n(f)(f^{-1}(D)) = f(f^{-1}(D)) = D$, pues f es sobreyectiva. Así, $C_n(f)$ también es sobreyectiva. Por tanto, $C_n(f)$ es continua y biyectiva. Esto basta para afirmar que $C_n(f)$ es un homeomorfismo, por [12, Teorema 2.1, pág. 226]. De forma similar se prueba que 2^f y $F_n(f)$ son homeomorfismos.

Probemos ii. Supongamos que $C_n(f)$ es un homeomorfismo para alguna $n \in \mathbb{N}$. Probemos que f es un homeomorfismo. Por el Teorema 3.6, f es continua. Sea $\{x,\ y\} \subset X$ tal que $f(x) = f(y)$. Entonces $\{f(x)\} = \{f(y)\}$, por lo que $f(\{x\}) = f(\{y\})$, de donde $C_n(f)(\{x\}) = C_n(f)(\{y\})$. Así $\{x\} = \{y\}$, pues $C_n(f)$ es uno a uno. Por tanto, $C_n(f)$ también es uno a uno. Sea $y \in X$. Entonces $\{y\} \in C_n(X)$. Existe $K \in C_n(X)$ tal que $C_n(f)(K) = f(K) = \{y\}$, pues f es sobreyectiva. Sea $x \in K \subset X$. Así, $f(x) = y$ y f es sobreyectiva. Por tanto, f es continua y biyectiva. Esto basta para afirmar que f es un homeomorfismo, por [12, Teorema 2.1, pág. 226]. La demostración es similar si 2^f o $F_n(f)$ es un homeomorfismo para alguna $n \in \mathbb{N}$. □

3.2. Funciones Inducidas Transitivas

El sistema dinámico discreto $(X,\ f)$ induce los sistemas $(C_n(X),\ C_n(f))$, $(2^X,\ 2^f)$ y $(F_n(X),\ F_n(f))$. Nos interesa estudiar la relación entre estas dinámicas: Cuándo la presencia de la transitividad en f implica la presencia de la transitividad en $C_n(f)$, o en 2^f o en $F_n(f)$; y viceversa. A partir de esta sección veremos algunos resultados relacionados con esta cuestión.

Teorema 3.8. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. Si $C_n(f)$, 2^f o $F_n(f)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces f es transitiva.*

Demostración. Supongamos que $C_n(f)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N}$. Sean U y V abiertos no vacíos de X. Entonces $\langle V \rangle$ y $\langle V \rangle$ son abiertos no vacíos de $C_n(X)$ ($\{u\} \in \langle U \rangle$ y $\{v\} \in \langle V \rangle$, para algunos $u \in U$ y $v \in V$). Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $C_n(f)^m(\langle U \rangle) \cap \langle V \rangle \neq \emptyset$. Sea $A \in \langle U \rangle$ tal que $C_n(f)^m(A) = f^m(A) \in \langle V \rangle$, es decir, $A \subset U$ y $f^m(A) \subset V$. Así, $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$ y f es transitiva. La demostración es similar si 2^f o $F_n(f)$ es transitiva. □

El recíproco del Teorema 3.8 no es cierto:

Ejemplo 3.9. Sea $R_\lambda \colon S^1 \to S^1$ la Función Rotación Irracional de S^1. Sabemos que R_λ es transitiva, por el Ejemplo 2.21. Pero $C_n(R_\lambda)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$, 2^{R_λ} no es transitiva y $F_n(R_\lambda)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

En efecto, veamos primero que $C_n(R_\lambda)$ no es transitiva para todo $n \in \mathbb{N}$. Sean $K \in C_n(S^1)$ y $\epsilon > 0$ tales que $\text{diám}(K) = 1$ y $1 - \epsilon > \epsilon$. Sean además $\mathcal{U} = B_{C_n(S^1)}(K,\ \epsilon/2)$ y $\mathcal{V} = B_{C_n(S^1)}(\{1\},\ \epsilon/2)$ abiertos no vacíos en $C_n(S^1)$. Afirmamos que

i. Si $F \in \mathcal{U}$, entonces $\text{diám}(F) \geq 1 - \epsilon$.

ii. Si $G \in \mathcal{V}$, entonces $\text{diám}(G) \leq \epsilon$.

Probemos *i*. Sea $F \in \mathcal{U} = B_{C_n(S^1)}(K,\ \epsilon/2)$. Entonces $H(F,\ K) < \epsilon/2$, de modo que $K \subset N(F,\ \epsilon/2)$, por lo que

$$\text{diám}(K) \leq \text{diám}(N(F,\ \epsilon/2)) \leq \text{diám}(F) + \epsilon.$$

Esto implica que $1 \leq \text{diám}(F) + \epsilon$ y $\text{diám}(F) \geq 1 - \epsilon$. Probemos *ii*. Sea $G \in \mathcal{V} = B_{C_n(S^1)}(\{1\},\ \epsilon/2)$. Entonces $H(G,\ \{1\}) < \epsilon/2$, de modo que $G \subset N(\{1\},\ \epsilon/2)$, por lo que

$$\text{diám}(G) \leq \text{diám}(N(\{1\},\ \epsilon/2)) \leq \text{diám}(\{1\}) + \epsilon = \epsilon.$$

Ahora bien, la función R_λ preserva longitudes y, en consecuencia, preserva diámetros en S^1. Por tanto, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\text{diám}(C(R_\lambda)^m(F)) = \text{diám}(R_\lambda^m(F)) = \text{diám}(F) \geq 1 - \epsilon > \epsilon \geq \text{diám}(G).$$

Por consiguiente, los elementos de $C(R_\lambda)^m(\mathcal{U})$ son distintos a los de $\mathcal{V}$. Así $C(R_\lambda)^m(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ para todo $m \in \mathbb{N}$, de donde $C_n(R_\lambda)$ no es transitiva para todo $n \in \mathbb{N}$.

De forma similar se prueba que 2^{R_λ} y $F_n(R_\lambda)$ no son transitivas para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Note que el conjunto K, definido en la demostración anterior, como elemento de $F_1(S^1)$ es vacío. Por tanto, la demostración anterior no sirve con la función inducida $F_1(R_\lambda)$.

Sin embargo,

Teorema 3.10. *Sea $f \colon X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. Si f es transitiva, entonces $F_1(f)$ es transitiva.*

Demostración. Supongamos que f es transitiva. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ abiertos no vacíos de $F_1(X)$. Por el Teorema 1.14, podemos tomar $\mathcal{U} = \langle U \rangle$ y $\mathcal{V} = \langle V \rangle$, donde U y V son abiertos no vacíos de X. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$. Sea $u \in U$ tal que $f^m(u) \in V$. Entonces $\{u\} \in \langle U \rangle$ y $F_1(f)^m(\{u\}) = f^m(\{u\}) = \{f^m(u)\} \in \langle V \rangle$. Por tanto, $F_1(f)^m(\langle U \rangle) \cap \langle V \rangle \neq \emptyset$ y $F_1(f)$ es transitiva. $\square$

3.3. Funciones Débilmente Mezclantes

Sean $m \in \mathbb{N}$ y $f \colon X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. Definimos $f \times f \colon X^2 \to X^2$ de manera natural por $(f \times f)(x,\ y) = (f(x),\ f(y))$. Además, de $(f \times f)^m(x,\ y) = \langle (f \times f) \circ (f \times f) \circ ... \circ (f \times f) \rangle (x,\ y) = (f^m(x),\ f^m(y)) = (f^m \times f^m)(x,\ y)$, concluimos que $(f \times f)^m = f^m \times f^m$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $(f \times f \times ... \times f)^m$ la función producto n veces. Es fácil ver que también $(f \times f \times ... \times f)^m = f^m \times f^m \times ... \times f^m$. Podemos encontrar funciones que satisfacen una condición más fuerte que la transitividad. Estas funciones son llamadas funciones débilmente mezclantes. En [5, Teorema 2, pág. 683] John Banks prueba que la transitividad de 2^f es equivalente a la mezclación débil de f. El mismo resultado es cierto para la inducida $F_n(f)$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, pero no para la inducida $C_n(f)$, como veremos más adelante.

Definición 3.11. Sean X un espacio métrico compacto y $f \colon X \to X$ una función continua. Decimos que f es débilmente mezclante si la función $f \times f \colon X \times X \to X \times X$ es transitiva.

El siguiente lema muestra una forma más conveniente de caracterizar las funciones débilmente mezclantes.

Lema 3.12. *Sea $f \colon X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. Entonces f es débilmente mezclante si, y solo si, para todo U_1, U_2, V_1 y V_2 abiertos no vacíos de X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^m(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que f es débilmente mezclante. Sean U_1, U_2, V_1 y V_2 abiertos no vacíos de X. Entonces $U_1 \times U_2$ y $V_1 \times V_2$ son abiertos no vacíos de $X \times X$. Como $f \times f \colon X \times X \to X \times X$ es transitiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $((f \times f)^m(U_1 \times U_2)) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset$, por lo que $(f^m(U_1) \times f^m(U_1)) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset$, de donde $f^m(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^m(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Por otra parte, supongamos que se cumple la condición dada. Sean $U_1 \times U_2$ y $V_1 \times V_2$ abiertos no vacíos de $X \times X$. Entonces U_1, U_2, V_1 y V_2 son abiertos no vacíos de X. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^m(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$, por lo que $(f^m(U_1) \times f^m(U_1)) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset$, de donde $((f \times f)^m(U_1 \times U_2)) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset$. Por tanto, $f \times f \colon X \times X \to X \times X$ es transitiva y f es débilmente mezclante. Esto completa la demostración. $\square$

El siguiente teorema es una "simplificación" del Lema 3.12.

Teorema 3.13. *Sea $f: X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. Entonces f es débilmente mezclante si, y solo si, para todo U, V y W abiertos no vacíos de X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$ y $f^m(U) \cap W \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que f es débilmente mezclante. Sean U, V y W abiertos no vacíos de X. Por el Lemma 3.12, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$ y $f^m(U) \cap W \neq \emptyset$. Por otra parte, supongamos que se cumple la condición dada. Sean U_1, U_2, V_1 y V_2 abiertos no vacíos de X. Probemos que existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Aplicando la hipótesis a los abiertos U_1, U_2 y V_2, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ y $f^m(U_1) \cap V_2 \neq \emptyset$, por lo que $U_1 \cap f^{-m}(U_2) \neq \emptyset$ y $U_1 \cap f^{-m}(V_2) \neq \emptyset$. Por tanto, $U_1 \cap f^{-m}(U_2)$, V_1 y $f^{-m}(V_2)$ son abiertos no vacíos de X. Aplicando nuevamente la hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_1 \cap f^{-m}(U_2)) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U_1 \cap f^{-m}(U_2)) \cap f^{-m}(V_2) \neq \emptyset$, lo que implica que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(f^{-m}(U_2)) \cap f^{-m}(V_2) \neq \emptyset$, pues $U_1 \cap f^{-m}(U_2) \subset U_1$ y $U_1 \cap f^{-m}(U_2) \subset f^{-m}(U_2)$. Falta ver que $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Note que $f^{-m}(f^k(U_2) \cap V_2) = f^{-m}(f^k(U_2)) \cap f^{-m}(V_2) = f^k(f^{-m}(U_2)) \cap f^{-m}(V_2) \neq \emptyset$, de donde $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Esto completa la demostración. $\square$

Ejemplo 3.14. Sea $T: [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ la Función Tienda de Campaña. Entonces T es débilmente mezclante. En efecto, sean U, V y W abiertos no vacíos en $[0,\ 1]$. Sea m suficientemente grande tal que $\left[\frac{p}{2^m},\ \frac{p+1}{2^m}\right] \subset U$, para algún $p \in \{0,\ 1,\ ...,\ 2^m - 1\}$. Por el Teorema 2.34, $T^m\left(\left[\frac{p}{2^m},\ \frac{p+1}{2^m}\right]\right) = [0,\ 1]$, de modo que $T^m(U) = [0,\ 1]$. Así, $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ y $T^n(U) \cap W \neq \emptyset$. Por tanto, T es débilmente mezclante, por el Teorema 3.13.

Es claro que toda función débilmente mezclante es transitiva. El recíproco no es cierto:

Ejemplo 3.15. Sea $R_\lambda: S^1 \to S^1$ la Función Rotación Irracional de S^1. Sabemos que R_λ es transitiva, por el Ejemplo 2.21. Probemos que R_λ no es débilmente mezclante. Sean $U = B_{S^1}(1,\ 1/4)$, $U = B_{S^1}(e^{i\pi/2},\ 1/4)$ y $U = B_{S^1}(e^{i\pi},\ 1/4)$ abiertos no vacíos de S^1. Los conjuntos U, V y W son arcos abiertos en S^1 de longitud $1/2$. La función R_λ preserva longitudes en S^1. Por tanto, para todo $m \in \mathbb{N}$, $f^m(U)$ es un arco abierto de longitud $1/2$, que nunca intersecta simultáneamente a U y a W, pues los conjuntos U y W están "separados" por una longitud mayor que $1/2$. Por tanto, R_λ no es débilmente mezclante.

A continuación definiremos la p-transitividad de una función.

Definición 3.16. Sean X un espacio métrico compacto y $f: X \to X$ una función continua. Decimos que f es p-transitiva si la función producto $f \times f \times ... \times f: X^k \to X^k$ es transitiva, para toda $k \in \mathbb{N}$.

El siguiente lema muestra una forma más conveniente de caracterizar las funciones p-transitivas.

Lema 3.17. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. f es p-transitiva si, y solo si, para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo conjunto $\{U_i,\ V_i\}_{i=1}^{k}$ de abiertos no vacíos de X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ k\}$.*

Demostración. Supongamos que f es p-transitiva. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $\{U_i,\ V_i\}_{i=1}^{k}$ un conjunto de abiertos no vacíos de X. Entonces $U_1 \times U_2 \times ... \times U_k$ y $V_1 \times V_2 \times ... \times V_k$ son abiertos no vacíos de X^k. Como $f \times f \times ... \times f\colon X^k \to X^k$ es transitiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U_1 \times U_2 \times ... \times U_k) \cap (V_1 \times V_2 \times ... \times V_k) \neq \emptyset$, por lo que $(f^m(U_1) \times f^m(U_2) \times ... \times f^m(U_k)) \cap (V_1 \times V_2 \times ... \times V_k) \neq \emptyset$. Esto implica que $f^m(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ k\}$.
Por otra parte, supongamos que se cumple la condición dada. Sean $U_1 \times U_2 \times ... \times U_k$ y $V_1 \times V_2 \times ... \times V_k$ abiertos no vacíos de X^k. Entonces $\{U_i,\ V_i\}_{i=1}^{k}$ es un conjunto de abiertos no vacíos de X. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ k\}$. Esto implica que $(f^m(U_1) \times f^m(U_2) \times ... \times f^m(U_k)) \cap (V_1 \times V_2 \times ... \times V_k) \neq \emptyset$, de donde $f^m(U_1 \times U_2 \times ... \times U_k) \cap (V_1 \times V_2 \times ... \times V_k) \neq \emptyset$. Por tanto, $f \times f \times ... \times f\colon X^k \to X^k$ es transitiva y f es débilmente mezclante. Esto completa la demostración. □

Toda función p-transitiva es transitiva. Aún más, toda función p-transitiva es débilmente mezclante. Un hecho interesante que mostraremos a continuación es que toda función débilmente mezclante es p-transitiva. Esto muestra que la p-transitividad y la mezclación débil son equivalentes.

Teorema 3.18. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. Si f es débilmente mezclante, entonces f es p-transitiva.*

Demostración. Supongamos que f es débilmente mezclante. Entonces f es transitiva. Sean U y V abiertos no vacíos de X. Definimos el conjunto $T(U,\ V)$ como

$$T(U,\ V) = \{m \in \mathbb{N} : f^m(U) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Note que $T(U,\ V) \neq \emptyset$, por transitividad de f. Probemos que, para todos los A, B, C y D abiertos no vacíos de X, existen E y F abiertos no vacíos de X tales que

$$T(E,\ F) \subset T(A,\ B) \cup T(C,\ D).$$

Como f es débilmente mezclante, por el Lema 3.12, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(A) \cap C \neq \emptyset$ y $f^k(B) \cap D \neq \emptyset$, lo que implica que $A \cap f^{-k}(C) \neq \emptyset$ y $B \cap f^{-k}(D) \neq \emptyset$. Hacemos $E = A \cap f^{-k}(C)$ y $F = B \cap f^{-k}(D)$ abiertos no vacíos de X. Probemos que $T(E,\ F) \subset T(A,\ B) \cup T(C,\ D)$. Para esto, sea $m \in T(E,\ F)$. Entonces, $f^m(E) \cap F \neq \emptyset$, es decir, $f^m(A \cap f^{-k}(C)) \cap B \cap f^{-k}(D) \neq \emptyset$. Lo anterior implica dos cosas, dado que $A \cap f^{-k}(C) \subset A$ y $A \cap f^{-k}(C) \subset f^{-k}(C)$. Primero, $f^m(A) \cup B \neq \emptyset$, por lo que $m \in T(A,\ B)$. Segundo, $f^m(f^{-k}(C)) \cap f^{-k}(D) \neq \emptyset$, de donde $f^k(f^m(f^{-k}(C))) \cap D \neq \emptyset$. Pero $f^k(f^m(f^{-k}(C))) \cap D = f^{k+m-k}(C) \cap D = f^m(C) \cap D$, por lo que $f^m(C) \cap D \neq \emptyset$ y $m \in T(C,\ D)$. Por tanto, $m \in T(A,\ B) \cup T(C,\ D)$ y $T(E,\ F) \subset T(A,\ B) \cup T(C,\ D)$.

Sean $k \in \mathbb{N}$ y $\{U_i,\ V_i\}_{i=1}^{k}$ un conjunto de abiertos no vacíos de X. Aplicando el resultado anterior, concluimos que

$$\bigcap_{i=1}^{k} T(U_i,\ V_i) \neq \emptyset.$$

En consecuencia, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ k\}$. Por tanto, f es p-transitiva, por el Lema 3.17. □

Como resumen de esta sección tenemos la siguiente equivalencia, la cual es una clara consecuencia de los resultados vistos.

Corolario 3.19. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) f es débilmente mezclante.

2) Para todos los U, V y W abiertos no vacíos de X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$ y $f^m(U) \cap W \neq \emptyset$.

3) Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo conjunto $\{U_i,\ V_i\}_{i=1}^{k}$ de abiertos no vacíos de X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ k\}$.

Terminamos esta sección mostrando una propiedad más de las funciones débilmente mezclantes.

Teorema 3.20. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. Si f es débilmente mezclante, entonces $f^k\colon X \to X$ es débilmente mezclante para toda $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que f es débilmente mezclante. Sean U, V y W abiertos no vacíos de X y $k \in \mathbb{N}$. Probemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{kn}(U) \cap V \neq \emptyset$ y $f^{kn}(U) \cap W \neq \emptyset$. Como f es continua y sobreyectiva, los conjuntos $f^{-i}(V)$ y $f^{-i}(W)$ son abiertos no vacíos de X para todo $i \in \mathbb{N}$. En particular, $\{f^{-i}(V),\ f^{-i}(W)\}_{i=0}^{k-1}$ es un conjunto de abiertos no vacíos de X. Por el Lemma 3.19, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap f^{-i}(V) \neq \emptyset$ y $f^m(U) \cap f^{-i}(W) \neq \emptyset$, para todo $i \in \{0,\ 1,\ ...,\ k-1\}$. Entonces $U \cap f^{-m}(f^{-i}(V)) \neq \emptyset$ y $U \cap f^{-m}(f^{-i}(W)) \neq \emptyset$, esto es, $U \cap f^{-(m+i)}(V) \neq \emptyset$ y $U \cap f^{-(m+i)}(W) \neq \emptyset$. Note que $\{m+i\}_{i=0}^{k-1}$ es un conjunto de k naturales consecutivos. Por tanto, uno de ellos, $m + i_0$, es divisible por k, es decir, $m + i_0 = kn$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Así, $U \cap f^{-kn}(V) = U \cap f^{-(m+i)}(V) \neq \emptyset$ y $U \cap f^{-kn}(W) = U \cap f^{-(m+i)}(W) \neq \emptyset$, esto es, $f^{kn}(U) \cap V \neq \emptyset$ y $f^{kn}(U) \cap W \neq \emptyset$. Por tanto, f^k es débilmente mezclante, por Teorema 3.13. □

3.4. Funciones Inducidas Débilmente Mezclantes

En el siguiente teorema se involucran sólo las funciones inducidas 2^f y $F_n(f)$. La importancia de este teorema, presentado originalmente por J. Banks en [5], radica en que da las condiciones sobre f para que la funciones inducidas 2^f y $F_n(f)$ sean transitivas para toda $n \in \mathbb{N}$. Para el caso de $C_n(f)$, tenemos la siguiente pregunta abierta: ¿Cuáles condiciones debe satisfacer f para que podamos concluir que la función inducida $C_n(f)$ es transitiva?

Teorema 3.21. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. Si f es débilmente mezclante, entonces la funciones inducidas 2^f y $F_n(f)$ son débilmente mezclantes para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que f es débilmente mezclante. Sean $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ abiertos no vacíos de 2^X. Probemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $f^m(\mathcal{U}) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$. Podemos suponer que $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son abiertos básicos no vacíos de 2^X, con el mismo número de entradas. Es decir, para algún $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{U} = \langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_k\rangle,\ \mathcal{V} = \langle V_1,\ V_2,\ ...,\ V_k\rangle \text{ y } \mathcal{W} = \langle W_1,\ W_2,\ ...,\ W_k\rangle,$$

donde $\{U_i,\ V_i,\ W_i\}_{i=1}^k$ es un conjunto de abiertos no vacíos de X. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ y $f^m(U_i) \cap W_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ k\}$, por el Coroloario 3.19. Para cada $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ k\}$, sea $\{u_i,\ v_i\} \subset U_i$ tal que $f^m(u_i) \in V_i$ y $f^m(v_i) \in W_i$. Sean

$$\begin{aligned}
K_1 &= \{u_1,\ u_2,\ ...,\ u_k\} \in \mathcal{U},\\
K_2 &= \{v_1,\ v_2,\ ...,\ v_k\} \in \mathcal{U},\\
L_1 &= \{f^m(u_1),\ f^m(u_2),\ ...,\ f^m(u_k)\} \in \mathcal{V},\\
L_2 &= \{f^m(v_1),\ f^m(v_2),\ ...,\ f^m(v_k)\} \in \mathcal{W},
\end{aligned}$$

de donde $\{f^m(K_1),\ f^m(K_2)\} \subset f^m(\mathcal{U})$. Además, $f^m(K_1) = L_1 \in \mathcal{V}$ y $f^m(K_2) = L_2 \in \mathcal{W}$. Por tanto, $f^m(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $f^m(\mathcal{U}) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$. Esto prueba que 2^f es débilmente mezclante, por el Teorema 3.13.

De forma similar, se prueba que $F_n(f)$ es débilmente mezclante para todo $n \in \mathbb{N}$. En este caso, podemos suponer que $\mathcal{U} = \langle U_1,\ U_2,\ ...,\ U_n\rangle$, $\mathcal{V} = \langle V_1,\ V_2,\ ...,\ V_n\rangle$ y $\mathcal{W} = \langle W_1,\ W_2,\ ...,\ W_n\rangle$, por el Teorema 1.14; de esta forma, es inmediato que, siguiendo la demostración anterior, $\{K_1,\ K_2,\ L_1,\ L_2\} \subset F_n(X)$. $\square$

El Teorema 3.21 no se cumple para la función inducida $C_n(f)$ para ninguna $n \in \mathbb{N}$: Sea $T\colon [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ la Función Tienda de Campaña. La función T es débilmente mezclante, como vimos en el Ejemplo 3.14. En el Ejemplo 3.34 mostraremos que $C_n(T)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$. El recíproco del Teorema 3.21 se deduce de los Teoremas 3.22 y 3.24.

Teorema 3.22. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. Si $C_n(f)$, 2^f o $F_n(f)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, entonces f es débilmente mezclante.*

Demostración. Supongamos que la función inducida $C_n(f)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Sean U, V y W abiertos no vacíos de X. Entonces los conjuntos $\langle U \rangle$ y $\langle V,\ W \rangle$ son abiertos no vacíos de $C_n(X)$ ($\{u\} \in \langle U \rangle$ y $\{v,\ w\} \in \langle V,\ W \rangle$, para algunos $u \in U$, $v \in V$ y $w \in W$). Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(\langle U \rangle) \cap \langle V,\ W \rangle \neq \emptyset$. Sea $K \in \langle U \rangle$ tal que $f^m(K) \in \langle V,\ W \rangle$. Tenemos que $K \subset U$, $f^m(K) \cap V \neq \emptyset$ y $f^m(K) \cap W \neq \emptyset$. Así, $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$ y $f^m(U) \cap W \neq \emptyset$. Esto prueba que f es débilmente mezclante, por el Teorema 3.13. La demostración es similar si 2^f o $F_n(f)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. □

Sean V y W abiertos no vacíos de X. Note que $\langle V,\ W \rangle$ como subconjunto de $C_1(X)$ puede ser vacío. Por tanto, la demostración anterior no funciona si la función inducida $C_1(X)$ es transitiva. Lo mismo se puede concluir para el caso de $F_1(X)$.

De la transitividad de $C_1(f)$ o de $F_1(f)$ no se deduce la mezclación débil de f: En el Ejemplo 3.31 mostraremos una función que no es débilmente mezclante f tal que $C_1(f)$ y $F_1(f)$ son transitivas. Sin embargo, si X es un continuo, la transitividad de $C_1(f)$ implica la mezclación débil de f, como mostramos a continuación.

Teorema 3.23. *Sean X un continuo y $f\colon X \to X$ una función continua. Si la función inducida $C_1(f)$ es transitiva, entonces f es débilmente mezclante.*

Demostración. Supongamos que la función inducida $C_1(f)$ es transitiva. Sean U, V y W abiertos no vacíos de X. Como X es un continuo, $X \in C_1(X)$ y $X \in \langle V,\ W,\ X \rangle$. Así, $\langle U \rangle$ y $\langle V,\ W,\ X \rangle$ son abiertos no vacíos de $C_1(X)$. Entonces, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $C_1(f)^m(\langle U \rangle) \cap \langle V,\ W,\ X \rangle \neq \emptyset$. Sea $K \in \langle U \rangle$ tal que $C_1(f)^m(K) = f^m(K) \in \langle V,\ W,\ X \rangle$. Por tanto, $K \subset U$, $f^m(K) \cap V \neq \emptyset$ y $f^m(K) \cap W \neq \emptyset$, por lo que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$ y $f^m(U) \cap W \neq \emptyset$. Esto prueba que f es débilmente mezclante, por el Teorema 3.13. □

Sean V y W abiertos no vacíos de X. Note que $\langle V, W, X \rangle$ como subconjunto de $F_1(X)$ puede ser vacío. Por tanto, la demostración anterior no funciona si la inducida $F_1(X)$ es transitiva. (Para el caso en que las restantes inducidas son transitivas, sí funciona).

Aún más, el Teorema 3.23 no se cumple para la inducida $F_1(f)$: Sea $R_\lambda\colon S^1 \to S^1$ la Función Rotación Irracional de S^1. La función R_λ es transitiva, por el Teorema 2.33. Entonces $F_1(R_\lambda)$ es transitiva, por el Teorema 3.10. Pero R_λ no es débilmente mezclante, según vimos en el Ejemplo 3.15.

Teorema 3.24. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. Si $F_1(f)$ es débilmente mezclante, entonces f es débilmente mezclante.*

Demostración. Supongamos que $F_1(f)$ es débilmente mezclante. Sean U, V y W abiertos no vacíos de X. Entonces $\langle U\rangle$, $\langle V\rangle$ y $\langle W\rangle$ son abiertos no vacíos de $F_1(X)$. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $F_1(f)^m(\langle U\rangle)\cap\langle V\rangle \neq \emptyset$ y $F_1(f)^m(\langle U\rangle)\cap\langle W\rangle \neq \emptyset$, usando el Teorema 3.13. Sea $\{K,\ L\} \subset \langle U\rangle$ tal que $F_1(f)^m(K) = f^m(K) \in \langle V\rangle$ y $F_1(f)^m(L) = f^m(L) \in \langle W\rangle$. Por tanto, $K \subset U$, $L \subset U$, $f^m(K) \subset V$ y $f^m(L) \subset W$, por lo que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$ y $f^m(U) \cap W \neq \emptyset$. Esto prueba que f es débilmente mezclante, otra vez por el Teorema 3.13. □

El siguiente resultado es una consecuencia de los Teoremas 3.22 y 3.24.

Corolario 3.25. *Sea $f : X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. Si $F_n(f)$ es débilmente mezclante para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $F_n(f)$ es débilmente mezclante para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que $F_n(f)$ es débilmente mezclante para alguna $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Entonces es claro que $F_n(f)$ es transitiva, pues toda función débilmente mezclante es transitiva. Así, f es débilmente mezclante, por el Teorema 3.22. Esto implica que $F_n(f)$ es débilmente mezclante para toda $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 3.21, por lo que $F_n(f)$ es transitiva para toda $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos ahora que $F_1(f)$ es débilmente mezclante. Por el Teorema 3.24, f es débilmente mezclante. Por el Teorema 3.21, $F_n(f)$ es débilmente mezclante para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, $F_n(f)$ es transitiva para toda $n \in \mathbb{N}$. □

La siguiente equivalencia aparece en [5, Teorema 2, pág. 683].

Corolario 3.26. *Sea $f : X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) *f es débilmente mezclante.*
2) *2^f es débilmente mezclante.*
3) *2^f es transitiva.*

Demostración. Si f es débilmente mezclante, entonces 2^f es débilmente mezclante por el Teorema 3.21. Por tanto, 1) implica 2). Es claro que 2) implica 3), pues toda función débilmente mezclante es transitiva. Finalmente el Teorema 3.22 prueba que 3) implica 1). □

Corolario 3.27. *Sea $f : X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) *f es débilmente mezclante.*
2) *$F_n(f)$ es débilmente mezclante, para toda $n \in \mathbb{N}$.*
3) *$F_n(f)$ es débilmente mezclante, para alguna $n \in \mathbb{N}$.*

4) *$F_n(f)$ es transitiva, para toda $n \in \mathbb{N}$.*

5) *$F_n(f)$ es transitiva, para alguna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.*

Demostración. Si f es débilmente mezclante, entonces $F_n(f)$ es débilmente mezclante por el Teorema 3.21. Por tanto, 1) implica 2). 2) implica 3) y 4) implica 5) son triviales. Probemos que 3) implica 4). Si $F_n(f)$ es débilmente mezclante para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $F_n(f)$ es débilmente mezclante para toda $n \in \mathbb{N}$, por el Corolario 3.25. Luego $F_n(f)$ es transitiva para toda $n \in \mathbb{N}$, pues toda función débilmente mezclante es transitiva. Finalmente el Teorema 3.22 prueba que 5) implica 1). □

3.5. Relaciones entre $C_n(f)$, 2^f y $F_n(f)$

En esta sección, analizaremos las relaciones entre las funciones inducidas $C_n(f)$, 2^f y $F_n(f)$ respecto a su transitividad. Estas relaciones se deducen de los resultados de la sección anterior. Comenzaremos observando las relaciones entre 2^f y $F_n(f)$.

Teorema 3.28. *Sea $f : X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. Si 2^f es transitiva, entonces $F_n(f)$ es transitiva para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Si 2^f es transitiva, entonces f es débilmente mezclante, por el Corolario 3.26. Luego $F_n(f)$ es transitiva para toda $n \in \mathbb{N}$, por el Corolario 3.27. □

Teorema 3.29. *Sea $f : X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. Si $F_n(f)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, entonces 2^f es transitiva.*

Demostración. Si $F_n(f)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, entonces f es débilmente mezclante, por el Corolario 3.27. Luego, 2^f es transitiva por el Corolario 3.26. □

Miremos ahora las relaciones entre $C_n(f)$ y las otras dos funciones inducidas.

Teorema 3.30. *Sea $f : X \to X$ una función continua definida en un espacio métrico compacto X. Si $C_n(f)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, entonces 2^f y $F_n(f)$ son transitivas para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Si $C_n(f)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, entonces f es débilmente mezclante por el Teorema 3.22. Luego 2^f es transitiva, por el Corolario 3.26, y $F_n(f)$ es transitiva para toda $n \in \mathbb{N}$, por el Corolario 3.27. □

Del siguiente ejemplo se concluye que de la transitividad de $C_1(f)$ no se deduce la transitividad de 2^f ni de $F_n(f)$ para ninguna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Ejemplo 3.31. Sean $X = \prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,\ 1\}$ y $f\colon X \to X$ la Función Máquina de Contar Binaria. Entonces $C_1(f)$ y $F_1(f)$ son transitivas; y $C_n(f)$, 2^f y $F_n(f)$ no son transitivas para ninguna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

En efecto, como f es transitiva, $F_1(f)$ es transitiva, por el Teorema 3.10. Como X es totalmente disconexo, $C_1(X) = F_1(X)$, y en consecuencia $C_1(f) = F_1(f)$. Por tanto, $C_1(f)$ es transitiva. En [6, pág. 684] se ve que f^{2^n} no es transitiva para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 3.20, f no es débilmente mezclante. Entonces $C_n(f)$, 2^f y $F_n(f)$ no son transitivas para ninguna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, por el Teorema 3.22.

En contraste con lo anterior, si X es un continuo, la transitividad de $C_1(f)$ implica la transitividad de 2^f y de $F_n(f)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, como muestra el siguiente resultado, el cual "amplia" el Teorema 3.30.

Teorema 3.32. *Sean X un continuo y $f\colon X \to X$ una función continua. Si $C_n(f)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces 2^f y $F_n(f)$ son transitivas para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Si $C_1(f)$ es transitiva, entonces f es débilmente mezclante, por el Teorema 3.23. Luego 2^f es transitiva, por el Corolario 3.26. También $F_n(f)$ es transitiva para toda $n \in \mathbb{N}$, por el Corolario 3.27. Si $C_n(f)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, entonces 2^f y $F_n(f)$ son transitivas para toda $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 3.30. □

El recíproco del Teorema 3.32 (y, por tanto, del Teorema 3.30) no es cierto: Sea $T\colon [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ la Función Tienda de Campaña. En el Ejemplo 3.34 mostraremos que las inducidas 2^T y $F_n(T)$ son transitivas para toda $n \in \mathbb{N}$, pero $C_n(T)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$.

3.6. Ejemplos de Funciones Inducidas Transitivas Definidas en Hiperespacios de Continuos

En esta parte analizamos la transitividad de las funciones inducidas por las funciones de los ejemplos de la Sección 2.4.

Ejemplo 3.33. Sea $R_\lambda\colon S^1 \to S^1$ la Función Rotación Irracional de S^1. Entonces $C_n(R_\lambda)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$, 2^{R_λ} no es transitiva y $F_n(R_\lambda)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, por el Ejemplo 3.9. Además, $F_1(R_\lambda)$ es transitiva, por el Teorema 3.10.

Miremos una demostración alternativa: En el Ejemplo 3.15 se mostró que la función R_λ no es débilmente mezclante. Así, $C_n(R_\lambda)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$, 2^{R_λ} no es transitiva y $F_n(R_\lambda)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, por los Teoremas 3.22 y 3.23.

Ejemplo 3.34. Sea $T\colon [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ la Función Tienda de Campaña. Entonces $C_n(T)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$, 2^T es transitiva y $F_n(T)$ es transitiva para toda $n \in \mathbb{N}$.

En efecto, veamos primero que $C_n(T)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$. Para esto probemos que, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$T^m \left(B_{C_n(X)} \left([0,\ 1]\,,\ \frac{1}{2n+2} \right) \right) \bigcap B_{C_n(X)} \left(\left\{ \frac{1}{2n+2} \right\},\ \frac{1}{2n+2} \right) = \emptyset.$$

Si $K \in B_{C_n(X)} \left([0,\ 1],\ \frac{1}{2n+2} \right)$, entonces $H(K,\ [0,\ 1]) < \frac{1}{2n+2}$, de donde $[0,\ 1] \subset N\left(K,\ \frac{1}{2n+2}\right)$. Consideremos los $n+1$ intervalos disyuntos $I_0 = \left(0,\ \frac{1}{n+1}\right)$, $I_1 = \left(\frac{1}{n+1},\ \frac{2}{n+1}\right)$, $I_3 = \left(\frac{2}{n+1},\ \frac{3}{n+1}\right)$, ..., $I_n = \left(\frac{n}{n+1},\ 1\right)$. En cada uno de estos intervalos existen puntos de K. En efecto, supongamos que existe $i \in \{0,\ 1,\ ...,\ n\}$ tal que $I_i \cap K = \emptyset$. Note que en este caso $K \subset X \setminus I_i$. Tenemos que $N\left(K,\ \frac{1}{2n+2}\right) \subset N\left(X \setminus I_i,\ \frac{1}{2n+2}\right) = [0,\ 1] \setminus \left\{\frac{2i-1}{2n+2}\right\}$, de modo que $\frac{2i-1}{2n+2} \notin N\left(K,\ \frac{1}{2n+2}\right) = [0,\ 1]$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $I_i \cap K \neq \emptyset$, para todo $i \in \{0,\ 1,\ ...,\ n\}$. Dado que $K \in C_n([0,\ 1])$, se debe tener que $K \cap \left\{\frac{1}{n+1},\ \frac{2}{n+1},\ ...,\ \frac{n}{n+1}\right\} \neq \emptyset$. Sea $i \in \{0,\ 1,\ ...,\ n\}$ tal que $\frac{i}{n+1} \in K$. La órbita de $\frac{i}{n+1}$ es periódica y está contenida en $\left\{0,\ \frac{1}{n+1},\ \frac{2}{n+1},\ ...,\ \frac{n}{n+1},\ 1\right\}$. Así, $T^m(K) \cap \left\{0,\ \frac{1}{n+1},\ \frac{2}{n+1},\ ...,\ \frac{n}{n+1},\ 1\right\} \neq \emptyset$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, si $A \in B_{C_n(X)} \left(\left\{\frac{1}{2n+2}\right\},\ \frac{1}{2n+2} \right)$, entonces $H\left(A,\ \left\{\frac{1}{2n+2}\right\}\right) < \frac{1}{2n+2}$, lo cual implica que $A \subset N\left(\left\{\frac{1}{2n+2}\right\},\ \frac{1}{2n+2}\right) = \left(0,\ \frac{1}{n+1}\right)$, de modo que $A \cap \{0,\ \frac{1}{n+1},\ \frac{2}{n+1},\ ...,\ \frac{n}{n+1},\ 1\} = \emptyset$.

Por todo lo anterior, los elementos de $T^m\left(B_{C_n(X)}\left([0,\ 1]\,,\ \frac{1}{2n+2}\right)\right)$ son distintos a los elementos de $B_{C_n(X)}\left(\left\{\frac{1}{2n+2}\right\},\ \frac{1}{2n+2}\right)$. Esto prueba que $C_n(T)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$.

En el Ejemplo 3.14 se mostró que la función T es débilmente mezclante. Así, 2^T y $F_n(T)$ son transitivas para toda $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 3.21.

Antes de analizar nuestro siguiente ejemplo: la Función Shift, necesitamos algunos resultados preliminares. Sean $[0,\ 1]^{\mathbb{Z}}$ el cubo de Hilbert, $\widehat{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en Q y $N_0 \in \mathbb{N}$. Definimos la función $g[\widehat{s},\ N_0]\colon Q \to Q$, para toda $\widehat{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in Q$, por

$$g(\widehat{t}) = \widehat{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

donde

$$u_n = \begin{cases} t_n, & \text{si } -N_0 \le n \le N_0, \\ s_n, & \text{si } |n| > N_0. \end{cases}$$

La n-ésima componente de $g(\widehat{t})$ la escribiremos $g(t_n)$.

Lema 3.35. *Sean $\widehat{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en Q, $N_0 \in \mathbb{N}$ y $g = g[\widehat{s},\ N_0]\colon Q \to Q$. Entonces $D(g(\widehat{t}),\ g(\widehat{r})) \leq D(\widehat{t},\ \widehat{r})$, para todo $\{\widehat{t},\ \widehat{r}\} \subset Q$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
D(g(\widehat{t}),\ g(\widehat{r})) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|g(\widehat{t})_n - g(\widehat{r})_n|}{2^{|n|}} = \sum_{n\in[-N_0,N_0]} \frac{|g(\widehat{t})_n - g(\widehat{r})_n|}{2^{|n|}} + \sum_{|n|\geq N_0} \frac{|g(\widehat{t})_n - g(\widehat{r})_n|}{2^{|n|}} \\
&= \sum_{n\in[-N_0,N_0]} \frac{|t_n - r_n|}{2^{|n|}} + \sum_{|n|\geq N_0} \frac{|s_n - s_n|}{2^{|n|}} = \sum_{n\in[-N_0,N_0]} \frac{|t_n - r_n|}{2^{|n|}} \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|t_n - r_n|}{2^{|n|}} = D(\widehat{t},\ \widehat{r}).
\end{aligned}$$

□

El siguiente corolario se sigue del Lema 3.35.

Corolario 3.36. *Sean $\widehat{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en Q, $N_0 \in \mathbb{N}$ y $g = g[\widehat{s},\ N_0]\colon Q \to Q$. La función g es continua.*

Demostración. Sea $\widehat{t} \in Q$ y $\epsilon > 0$. Probemos que existe $\delta > 0$ tal que $g(B_Q(\widehat{t},\ \delta)) \subset B_Q(g(\widehat{t}),\ \epsilon)$. Sea $\delta = \epsilon$. Sea $\widehat{x} \in B_Q(\widehat{t},\ \delta)$ tal que $g(\widehat{x}) \in g((B_Q(\widehat{t},\ \delta))$. Entonces $D(\widehat{x},\ \widehat{t}) < \delta$. Así, por el Lema 3.35, $D(g(\widehat{x}),\ g(\widehat{t})) \leq D(\widehat{x},\ \widehat{t}) < \delta = \epsilon$, de donde $g(\widehat{x}) \in B_Q(g(\widehat{t}),\ \epsilon)$. Por tanto, $g(B_Q(\widehat{t},\ \delta)) \subset B_Q(g(\widehat{t}),\ \epsilon)$ y g es continua. □

Lema 3.37. *Sean $\widehat{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en Q, $N_0 \in \mathbb{N}$ y $g = g[\widehat{s},\ N_0]\colon Q \to Q$. Para todo $A \in C_1(Q)$,*

$$H(A,\ g(A)) \leq \frac{1}{2^{N_0-1}}.$$

Demostración. Sea $\widehat{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in A$. Note que $g(t) = t_n$ para todo $-N_0 \leq n \leq N_0$. Por el Lema 2.36, $D(\widehat{t},\ g(\widehat{t})) \leq \frac{1}{2^{N_0-1}}$. Por tanto, $A \subset (g(A)),\ \frac{1}{2^{N_0-1}} + \epsilon)$ y $A \subset (g(A)),\ \frac{1}{2^{N_0-1}} + \epsilon)$ para todo $\epsilon > 0$, lo que implica que $H(A,\ g(A)) \leq \frac{1}{2^{N_0-1}}$. □

El siguiente ejemplo, tomado de [2, Teorema 7.18, pág. 1031], muestra una función definida sobre un continuo tal que las funciones inducidas $C_1(f)$, 2^f y $F_n(f)$ son transitivas, para todo $n \in \mathbb{N}$. Este es el único ejemplo que se conoce de una función f definida en un continuo tal que $C_1(f)$ es transitiva.

Ejemplo 3.38. Sea $\sigma\colon Q \to Q$ la Función Shift. Entonces las funciones inducidas $C_1(\sigma)$, 2^σ y $F_n(\sigma)$ son transitivas, para toda $n \in \mathbb{N}$.

En efecto, veamos primero que $C_1(\sigma)$ es transitiva. Sean $\{A,\ B\} \subset C_1(Q)$ y $\epsilon > 0$. Probemos que existen $m \in \mathbb{N}$ y $K \in C_1(Q)$, tales que $H(K,\ B) < \epsilon$ y $H(\sigma^m(K),\ A) < \epsilon$.

Sean $\widehat{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in A$ y $\widehat{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in B$. Sea $N_0 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tal que $\frac{1}{2^{N_0-1}} < \frac{\epsilon}{2}$. Sean $\widehat{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in Q$ tal que

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \geq N_0 + 1, \\ b_n, & \text{si } -N_0 \leq n \leq N_0, \\ 0, & \text{si } -2N_0 + 1 \leq n \leq -N_0 - 1, \\ a_{n+3N_0}, & \text{si } -4N_0 \leq n \leq -2N_0, \\ 0, & \text{si } n \leq -4N_0 - 1. \end{cases}$$

y $\widehat{r} = (r_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in Q$ tal que $r_n = s_{n-3N_0}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Sean $g_1 = g[\widehat{s},\ N_0]\colon Q \to Q$ y $g_2 = g[\widehat{r},\ N_0]\colon Q \to Q$. Note que $g_1(B)$, $g_2(A)$ y $\sigma^{-3N_0}(g_2(A))$ son subcontinuos de Q, pues g es continua (Lema 3.36) y σ es un homeomorfismo (Teorema 2.39). Probemos que

a) $\widehat{s} = g_1(\widehat{b})$, $\widehat{r} = g_2(\widehat{a})$ y $\widehat{s} = \sigma^{-3N_0}(\widehat{r})$.

Sea $n \in [-N_0,\ N_0]$. Entonces $s_n = b_n = g_1(b_n)$. Como $-4N_0 \leq n - 3N_0 \leq -2N_0$, $r_n = s_{n-3N_0} = a_{(n-3N_0)+3N_0} = a_n = g_2(a_n)$. Sea $|n| > N_0$. Entonces $s_n = g_1(b_n)$ y $r_n = g_2(a_n)$, por definición de g_1 y g_2. Por tanto, $\widehat{s} = g_1(\widehat{b})$ y $\widehat{r} = g_2(\widehat{a})$. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $s_n = s_{(n-3N_0)+3N_0} = \sigma^{-3N_0}(s_{(n-3N_0)}) = \sigma^{-3N_0}(r_n)$. Por tanto, $\widehat{s} = \sigma^{-3N_0}(\widehat{r})$.

Por a), concluimos que $\widehat{s} \in g_1(B) \cap \sigma^{-3N_0}(g_2(A))$. Así, $K = g_1(B) \cup \sigma^{-3N_0}(g_2(A))$ es un subcontinuo de Q; es decir,

$$K = g_1(B) \cup \sigma^{-3N_0}(g_2(A)) \in C_1(Q).$$

Por el Lema 3.37, tenemos las siguientes desigualdades:

b) $H(B,\ g_1(B)) < \epsilon/2$.

c) $H(A,\ g_2(A)) < \epsilon/2$.

Probemos que

d) $\sigma^{-3N_0}(g_2(A)) \subset B_Q(\widehat{s},\ \epsilon/2)$.

Sea $\widehat{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in A$. Dado $n \in [-N_0,\ N_0]$, tenemos que $n + 3N_0 \geq N_0 + 1$ y $(\sigma^{-3N_0}(g_2(u)))_n = (g_2(u))_{n+3N_0} = r_{n+3N_0} = s_{(n+3N_0)-3N_0} = s_n$. Por el Lema 2.36, $D(\sigma^{-3N_0}(g_2(\widehat{u})),\ \widehat{s}) \leq \frac{1}{2^{M-1}} < \epsilon/2$, de modo que $\sigma^{-3N_0}(g_2(A)) \subset B_Q(\widehat{s},\ \epsilon/2)$.

Probemos ahora que

e) $H(g_1(B),\ K) < \epsilon/2$.

Por d) y a), $\sigma^{-3N_0}(g_2(A)) \subset B_Q(\widehat{s},\ \epsilon/2) = B_Q(g_1(\widehat{b}),\ \epsilon/2) \subset N_Q(g_1(B),\ \epsilon/2)$; es trivial que $g_1(B) \subset N(g_1(B),\ \epsilon/2)$. De lo anterior, $K \subset N(g_1(B),\ \epsilon/2)$. Además, $g_1(B) \subset K \subset N(K,\ \epsilon/2)$. Por tanto, $H(g_1(B),\ K) < \epsilon/2$.

De b) y e), concluimos que

$$H(B,\ K) \leq H(B,\ g_1(B)) + H(g_1(B),\ K) < \epsilon/2 + \epsilon/2 < \epsilon.$$

Probemos que

f) $\sigma^{3N_0}(g_1(B)) \subset B_Q(\widehat{r},\ \epsilon/2)$.

Sea $\widehat{v} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B$. Dado $n \in [-N_0,\ N_0]$. Tenemos $n - 3N_0 \leq -2N_0$, de donde $\sigma^{3N_0}(g_1(\widehat{v}))_n = (g_1(\widehat{v}))_{n-3N_0} = s_{n-3N_0} = r_n$. Así, $D(\sigma^{3N_0}(g_1(\widehat{v})),\ \widehat{r}) = \frac{2}{2^{N_0}} < \epsilon/2$, de modo que $\sigma^{3N_0}(g_1(B)) \subset B_Q(\widehat{r},\ \epsilon/2)$.

Probemos ahora que

g) $H(\sigma^{3N_0}(K),\ g_2(A)) < \epsilon/2$.

Note que $\sigma^{3N_0}(K) = \sigma^{3N_0}(g_1(B)\cup\sigma^{-3N_0}(g_2(A))) = \sigma^{3N_0}(g_1(B))\cup\sigma^{3N_0}(\sigma^{-3N_0}(g_2(A))) = \sigma^{3N_0}(g_1(B)) \cup g_2(A)$. Esto implica que $\sigma^{3N_0}(K) = \sigma^{3N_0}(g_1(B)) \cup g_2(A) \subset B_Q(\widehat{r},\ \epsilon/2) \cup g_2(A) \subset N(g_2(A),\ \epsilon/2) \cup g_2(A) = N(g_2(A),\ \epsilon/2)$, por f) y por a). Además, $g_2(A) \subset \sigma^{3N_0}(K) \subset N(\sigma^{3N_0}(K),\ \epsilon/2)$. Por tanto, $H(\sigma^{3N_0}(K),\ g_2(A)) < \epsilon/2$.

Finalmente, de c) y g), concluimos que

$$H(\sigma^{3N_0}(K),\ A) \leq H(\sigma^{3N_0}(K),\ g_2(A)) + H(g_2(A),\ A) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Por tanto, $H(B,\ K) \leq \epsilon$ y $H(\sigma^{3N_0}(K),\ A) \leq \epsilon$. Esto implica que $K \in B_{C_1(Q)}(B,\ \epsilon)$ y $\sigma^{3N_0}(K) \in B_{C_1(Q)}(A,\ \epsilon)$, de modo que $\sigma^{3N_0}(B_{C_1(Q)}(B,\ \epsilon)) \cap B_{C_1(Q)}(A,\ \epsilon) \neq \emptyset$. Así, $C_1(\sigma)$ es transitiva.

Las inducidas 2^f y $F_n(f)$ son transitivas para toda $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 3.32.

Respecto a la Función Shift queda el siguiente interrogante.

Pregunta 3.39. Sea $\sigma\colon Q \to Q$ la Función Shift. ¿$C_n(\sigma)\colon C_n(Q) \to C_n(Q)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$?

Como mencionamos anteriormente, todo continuo se puede encajar topológicamente en el cubo de Hilbert, de modo que en el Ejemplo 3.38 se considera el espacio topológico “más grande” (y de dimensión infinita) Q. Bajo este panorama, planteamos las siguientes preguntas abiertas relacionadas con la transitividad de la función inducida $C_n(f)$:

Pregunta 3.40. ¿Existe una función continua $f\colon [0,\ 1]^2 \to [0,\ 1]^2$ tal que $C_n(f)\colon C_n([0,\ 1]^2) \to C_n([0,\ 1]^2)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N}$?

Pregunta 3.41. ¿Existe un continuo X de dimensión finita y una función continua $f\colon X \to X$ tal que $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N}$?

Sea $f\colon [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ una función continua. En la Sección 4.2 mostraremos que $C_n(f)\colon C_n([0,\ 1]) \to C_n([0,\ 1])$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$, pues $[0,\ 1]$ tiene arcos libres.

Capítulo 4

TRANSITIVIDAD EN $C_n(f)$

En este capítulo se extienden, a la función inducida $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$, algunos de los resultados presentados en [2] sobre la transitividad de $C(f)\colon C(X) \to C(X)$. Las pruebas de los teoremas que mostraremos son similares a los de dicho artículo.

En un sistema dinámico discreto $(C_n(X),\ C_n(f))$, donde $C_n(f)$ es transitiva, existe al menos un elemento notable en el hiperespacio considerado, digamos B, tal que su órbita es densa, o bien, si $C_n(X)$ no tiene puntos aislados o X es un continuo, tal que su conjunto $\omega-$límite es $C_n(X)$. En particular, un continuo no tiene puntos aislados Si consideramos un punto de este tipo en el hiperespacio, éste posee ciertas características que presentamos en la primera sección y parte de la segunda. Pero una de sus propiedades más importantes se muestra en el Teorema 4.4 y es esencial en la prueba de los teoremas de transitividad presentados en [2]. Dicha propiedad enuncia que todo conjunto en la órbita de B tiene interior vacío.

En la segunda sección y en las dos restantes, se muestra que no es posible encontrar una función inducida $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ que sea transitiva si el espacio considerado X es un continuo con arcos libres, un continuo del tipo λ o una dendrita, respectivamente.

4.1. Unas Observaciones Iniciales

Dado $n \in \mathbb{N}$ y X un continuo, sabemos que si la función inducida $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ es transitiva podemos asegurar la existencia de un punto B en el hiperespacio $C_n(X)$ tal que su conjunto ω-límite es $C_n(X)$. La siguiente proposición muestra algunas características de B.

Proposición 4.1. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un continuo X, tal que $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N}$. Sea $B \in C_n(X)$ tal que $\omega(B,\ C_n(f)) = C_n(X)$. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

i. Existe una subsucesión $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de naturales tal que $f^{m_i}(B)$ tiene exactamente n componentes, para todo $i \in \mathbb{N}$. Además, cada uno de los $f^{m_i}(B)$ son disyuntos dos a dos.

ii. B tiene exactamente n componentes.

iii. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^n(B)$ tiene exactamente n componentes.

iv. B tiene al menos una componente no degenerada.

Demostración. i. Sea $A = \{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\}$ un subconjunto de X. Sea $\epsilon > 0$ tal que las bolas $B(x_i,\ \epsilon)$, con $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$, son disyuntas dos a dos. Como $A \in C_n(X) = \omega(B,\ C_n(f))$, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $H(f^k(B),\ A) < \epsilon$. Por consiguiente, tenemos que

a) $f^k(B) \subseteq N(A,\ \epsilon) = \cup_{i=1}^n B(x_i,\ \epsilon)$.
b) Dado que $A \subseteq N(f^k(B),\ \epsilon)$, $f^k(B)$ intersecta a toda bola $B(x_i,\ \epsilon)$. Esto es claro si lo pensamos de la siguiente manera: Supongamos $f^k(B) \cap B(x_i,\ \epsilon) = \emptyset$, para algún i. Esto implica que $y \notin B(x_i,\ \epsilon)$, para todo $y \in f^k(B)$. Es decir, $d(x_i,\ y) \geq \epsilon$, para todo $y \in f^k(B)$. De esta forma, $x_i \notin N(f^k(B),\ \epsilon)$, lo cual es una contradicción pues $x_i \in A$.

Por tanto, por *a*) y por *b*), $f^k(B)$ tiene exactamente n componentes, cada una de las cuales está contenida en una bola $B(x_i,\ \epsilon)$. Ahora bien, si tomamos $C = \{y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n\}$ un subconjunto de X tal que $C \cap [\cup_{i=1}^n B(x_i,\ \epsilon)] = \emptyset$, podemos encontrar un $\epsilon' > 0$ tal que las bolas $B(y_i,\ \epsilon')$ y $B(x_i,\ \epsilon)$, con $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$, son disyuntas dos a dos. Y de forma análoga, podemos encontrar un $f^l(B)$ con exactamente n componentes, cada una de las cuales está contenida en una bola $B(y_i,\ \epsilon)$. Note que además $f^k(B) \cap f^l(B) = \emptyset$. De esta forma podemos encontrar una sucesión de conjuntos $\{f^{k_i}(B)\}_{i\in\mathbb{N}}$, disyuntos dos a dos, cada uno con exactamente n componentes.

ii. Por 1, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(B)$ tiene exactamente n componentes. La función f^m restringida a B sobre $f^m(B)$ es continua. Cada componente de B cae en una componente de $f^m(B)$. Entonces B debe tener exactamente n componentes.

iii. Supongamos que $f^m(B)$ tiene exactamente n componentes y $0 \leq i \leq m$. La función f^{m-i} restringida a $f^i(B)$ sobre $f^m(B)$ es continua. Entonces, cada componente de $f^i(B)$ cae en una componente de $f^m(B)$. Si $f^i(B)$ tuviera menos de n componentes, entonces su imagen $f^m(B)$ tendría la misma cantidad de componentes o aún menos, lo cual no es cierto. Por tanto, $f^i(B)$ tiene exactamente n componentes. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por 1, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $n < m_i$. Por lo probado en el párrafo anterior, $f^n(B)$ tiene exactamente n componentes.

iv. Por 2, B tiene exactamente n componentes. Supongamos que estas n componentes son todas degeneradas, es decir, sea $B = \{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\}$. Sea $\epsilon > 0$ tal que las bolas $B(x_1,\ \epsilon)$, $B(x_2,\ \epsilon)$, ..., $B(x_n,\ \epsilon)$ son disyuntas dos a dos. La conexidad de X nos permite asegurar que

$$X \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\ \epsilon). \tag{4.1}$$

Por otro lado, puesto que $X \in C_n(X) = \omega(B,\ C_n(f))$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $H(X,\ f^k(B)) < \epsilon/2$. Note que $f^k(B)$ es un conjunto de n puntos, digamos $\{y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n\}$. En consecuencia,

$$X \subset N(f^k(B),\ \epsilon/2) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i,\ \epsilon/2). \tag{4.2}$$

Por tanto, todo x_i está contenido en alguna bola $B(y_j,\ \epsilon/2)$. Esto implica que $d(x_i,\ y_j) < \epsilon/2$. Ahora, sea $z \in B(y_j,\ \epsilon/2)$. Entonces $d(z,\ y_j) < \epsilon/2$. De este modo, $d(z,\ x_i) \leq d(z,\ y_j)+d(x_i,\ y_j) < \epsilon/2+\epsilon/2 = \epsilon$. Así, $z \in B(x_i,\ \epsilon)$. Por tanto, $B(y_j,\ \epsilon/2) \subset B(x_i,\ \epsilon)$, de modo que

$$\bigcup_{i=1}^{n} B(y_j,\ \epsilon/2) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\ \epsilon),$$

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\ \epsilon),$$

por (4.2). Esto es una contradicción de (4.1). Por consiguiente, B tiene al menos una componente no degenerada. $\square$

La siguiente proposición sera útil más adelante.

Proposición 4.2. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un continuo X tal que $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N}$. Sea $B \in C_n(X)$ tal que $\omega(B, C_n(f)) = C_n(X)$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}_0$ y para cada $x \in f^k(B)$, tenemos que:*

i. *$o(x,\ f)$ es denso en X.*

ii. *$\omega(x,\ f) = X$.*

ii. *x no es un punto preperiódico de f.*

Demostración. Probemos i. Sea $y \in X$ y $\epsilon > 0$. Veamos que $o(x,\ f) \cap B(y,\ \epsilon) \neq \emptyset$. Puesto que $\omega(f^k(B),\ C_n(f)) = \omega(B,\ C_n(f)) = C_n(X)$, por el Teorema 2.17, es claro que $\{y\} \in \omega(f^k(B),\ C_n(f))$. Por tanto, existe $j \in \mathbb{N}_0$ tal que $H(f^j(f^k(B)),\ \{y\}) < \epsilon$. Por el Teorema 1.20, $f^j(f^k(B)) \subset N(\{y\},\ \epsilon) = B(y,\ \epsilon)$. Dado que $x \in f^k(B)$, tenemos que $f^j(x) \in B(y,\ \epsilon)$, es decir, $o(x,\ f) \cap B(y,\ \epsilon) \neq \emptyset$. Por tanto, $o(x,\ f)$ es denso en X. Se sigue que $\omega(x,\ f) = X$, por el Teorema 2.27. Luego queda probado ii. Ahora bien, si x fuera un punto preperiódico de f, el conjunto $o(x,\ f)$ sería finito, lo que contradice la densidad de $o(x,\ f)$. Luego queda probado iii. $\square$

4.2. Continuos con Arcos Libres

En esta sección continuamos mostrando características de un punto B en el sistema dinámico discreto $(C_n(X),\ C_n(f))$ tal que su conjunto ω-límite es $C_n(X)$. Finalizando la sección mostramos que, para un continuo X que contenga arcos libres, la función inducida $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.3. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un continuo X tal que $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N}$. Sean $A \in 2^X$, $B \in C_n(X)$, $m \in \mathbb{N}_0$ tales que $\omega(B,\ C_n(f)) = C_n(X)$ y $A \subseteq f^m(B)$. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

i. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \nsubseteq f^{m+n}(B)$.

ii. $f(A) \nsubseteq A$ y $A \nsubseteq f(A)$.

Demostración. *i*. Supongamos que $A \subseteq f^{m+n}(B)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\Lambda = \{K \in C_n(X) : A \subset K\}$. Tenemos que $o(f^m(B),\ C_n(X)) \subset \Lambda$. Por la Proposición 1.18, Λ es cerrado en $C_n(X)$. Por el Teorema 2.16, $\omega(f^m(B),\ C_n(X)) \subset \Lambda$, de modo que, por el Teorema 2.17, $\omega(B,\ C_n(X)) \subset \Lambda$. Así, $C_n(X) \subset \Lambda$, lo cual es una contradicción, pues Λ no es denso en $C_n(X)$, también por la Proposición 1.18. Por tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \nsubseteq f^{m+n}(B)$.

ii. Supongamos que $f(A) \subset A$. Tenemos que $f^{n+1}(A) \subset f^n(A)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $\{f^n(A)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente en $C_n(X)$ que converge a un $C = \cap_{n=1}^{\infty} f^n(A)$ también en $C_n(X)$, por 1.3. Note que esto implica que $C \subseteq A \subseteq f^m(B)$. Por otro lado, dado que $A \subseteq f^m(B)$, $f^n(A) \subseteq f^{m+n}(B)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $C \subseteq f^m(A)$, $C \subseteq f^{m+n}(B)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual contradice *i*, pues $C \subseteq f^m(B)$. Por tanto, $f(A) \nsubseteq A$.

Ahora supongamos que $A \subseteq f(A)$. Esto implica que $A \subseteq f^n(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que $A \subseteq f^m(B)$, tenemos que $f^n(A) \subseteq f^{m+n}(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $A \subseteq f^{m+n}(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual contradice nuevamente *i*, de modo que $A \nsubseteq f(A)$. □

Este resultado que acabamos de verificar es necesario para demostrar el siguiente teorema, en el cual mostramos que un B en $C_n(X)$, tal que $\omega(B,\ C_n(f)) = C_n(X)$, tiene interior vacío.

Teorema 4.4. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un continuo X tal que $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N}$. Sea $B \in C_n(X)$ tal que $\omega(B,\ C_n(f)) = C_n(X)$. Entonces, para todo $m \in \mathbb{N}$, $int(f^m(B)) = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int(f^{n_0}(B)) \neq \emptyset$. Notaremos $D = f^{n_0}(B)$. Sean $x \in D$ y $\epsilon > 0$ tal que $B(x,\ \epsilon) \subset D$. Puesto que $\{x\} \in C_n(X) = \omega(B,\ C_n(f)) = \omega(D,\ C_n(f))$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $H(f^k(D),\ \{x\}) < \epsilon$, de donde

$$f^k(D) \subset N(x,\ \epsilon) = B(x,\ \epsilon) \subset D.$$

De esto obtenemos

$$f^{k(n+1)}(D) \subset f^{kn}(D), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Note que $\{f^{kn}(D)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente en $C_n(X)$ que converge a un $C = \cap_{n=1}^{\infty} f^{kn}(D)$.

Ahora probemos la siguiente afirmación.

a) Si $m \geq k$ y $m \equiv i$ (mód k), para algún $i \in \{0,\ 1,\ ...,\ k-1\}$, entonces $f^i(C) \subset f^m(D)$.

Sea $m = qk + i$, para algún $q \in \mathbb{N}$. Por definición de C, $C \subset f^{qk}(D)$, de modo que $f^i(C) \subset f^i(f^{qk}(D)) = f^{qk+1}(D) = f^m(D)$, y queda probada la afirmación. Ahora bien, sea $\Lambda_i = \{K \in C_n(X) : f^i(C) \subset K\}$ y además

$$\Lambda = \bigcup_{i=0}^{k-1} \Lambda_i.$$

Veamos que $\omega(D,\ C_n(X)) \subset \Lambda$. Sea $A \in \omega(D,\ C_n(f))$. Existe una subsucesión $\{f^{m_i}(D)\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $o(D,\ C_n(f))$ que converge a A. Podemos tomar $k \leq m_1 < m_2 < ....$ Sea $i \in \mathbb{N}$. Dado que $m_i \equiv$ algún elemento de $\{0,\ 1,\ ...,\ k-1\}$ (mód k), existe $r \in \{0,\ 1,\ ...,\ k-1\}$ tal que $m_i \equiv r$ (mód k) para un número infinito de $i's$. Estos $i's$ determinan una subsucesión $\{m_{s_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de la sucesión de naturales $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Se satisface de esta forma que $m_{s_i} \geq k$ y $m_{s_i} \equiv r$ (mód k), para todo $i \in \mathbb{N}$. Por *a*), $f^i(C) \subset f^{m_{s_i}}(D)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $\{f^{m_{s_i}}(D)\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \Lambda_i$, de modo que $A \in \Lambda_i$, pues cada Λ_i es cerrado por la Proposición 1.18, y $\{f^{m_{s_i}}(D)\}_{i\in\mathbb{N}}$ también converge a A. En consecuencia, $\omega(D,\ C_n(f)) \subset \Lambda$. Pero esto implica que $C_n(X) \subset \Lambda$, lo cual es imposible porque Λ es cerrado y no es denso en $C_n(X)$, también por la Proposición 1.18. Por tanto, $int(f^m(B)) = \emptyset$. $\square$

El siguiente teorema muestra que para un continuo X con arcos libres la función inducida $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ no es transitiva.

Teorema 4.5. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un continuo X que contiene un arco libre. Entonces la función inducida $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N}$. Sea $B \in C_n(X)$ tal que $\omega(B,\ C_n(f)) = C_n(X)$. Denotemos por A un arco libre en X con extremos p y q. Sea C un subarco en A con puntos extremos a y b, con $a \neq b$ y $C \subset A \setminus \{p,\ q\}$. Sean x_1, x_2, ..., x_{n-1} puntos diferentes de $X \setminus C$. Sea $r > 0$ tal que satisface:

1. $N(C,\ r) \subset A \setminus \{p,\ q\}$.

2. Los conjuntos $B(a,\ r)$, $B(b,\ r)$, $B(x_1,\ r)$, $B(x_2,\ r)$, ..., $B(x_{n-1},\ r)$ son disyuntos dos a dos.

Sea $D = C \cup \{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{n-1}\}$. Como $D \in C_n(X) = \omega(B,\ C_n(f))$, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $H(f^m(B),\ D) < r$. Tenemos que $f^m(B) \subset N(D,\ r) = N(ab,\ r) \cup B(x_1,\ r) \cup B(x_2,\ r), ..., B(x_{n-1},\ r)$. Además, $f^m(B)$ intersecta a cada uno de estos conjuntos disyuntos. Así que $f^m(B)$ tiene exactamente n componentes, de las cuales $n-1$ están en $\cup_{i=1}^{n-1} B(x_i; r)$.

Sea K la componente de $f^m(B)$ que está contenida en $N(C,\ r)$. Dado que $K \subset A \setminus \{a,\ b\}$ es un conexo que intersecta los conjuntos disyuntos $B(a,\ r)$ y $B(b,\ r)$, tenemos que K es un subarco no degenerado de A. Esto implica que $int(K) \neq \emptyset$. Dado que $int(K) \subset int(f^m(B))$, tenemos que $int(f^m(B)) \neq \emptyset$, lo cual contradice el Teorema 4.4. Por tanto, la función inducida $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$. □

4.3. Continuos Tipo λ

Las siguientes proposiciones son importantes para probar que, para un continuo X tipo λ, la función inducida $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ no es transitiva.

Proposición 4.6. *Sean X un continuo tipo λ irreducible entre p y q, $\pi\colon X \to [0,\ 1]$ la función monótona asociada a X, $0 < a \leq b < 1$ y A en $C_n(X)$. Si existe una componente K de A tal que $\pi(K) \cap [0,\ a) \neq \emptyset$ y $\pi(K) \cap (b,\ 1] \neq \emptyset$, entonces $\pi^{-1}[a,\ b] \subset K$.*

Demostración. Note que $\pi(p) = 0$ y $\pi(q) = 1$. Sean x y y puntos en K tales que $\pi(x) \in [0,\ a)$ y $\pi(y) \in (b,\ 1]$. Note que $\pi^{-1}[0,\ \pi(x)] \cup K \cup \pi^{-1}[\pi(y),\ 1]$ es un subcontinuo de X y contiene a p y q. Por irreducibilidad de X, $X = \pi^{-1}[0,\ \pi(x)] \cup K \cup \pi^{-1}[\pi(y),\ 1]$. Dado que $\pi^{-1}[a,\ b] \cap \pi^{-1}[0,\ \pi(x)] = \emptyset$ y $\pi^{-1}[a,\ b] \cap \pi^{-1}[\pi(y),\ 1] = \emptyset$, se concluye que $\pi^{-1}[a,\ b] \subset K$. □

Proposición 4.7. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un continuo X tipo λ, tal que $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N}$. Sea $B \in C_n(X)$ tal que $\omega(B,\ C_n(f)) = C_n(X)$. Si $0 < a < b < 1$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\pi^{-1}[a,\ b] \subset f^m(B)$.*

Demostración. Tomamos a' y b' puntos de $[0,\ 1]$ tales que $0 < a' < a < b < b' < 1$ y tomamos también puntos $x \in \pi^{-1}(a')$ y $y \in \pi^{-1}(b')$. Además, tomamos x_1, x_2 ..., x_{n-1} puntos diferentes de X tales que $\pi(x_1)$, $\pi(x_2)$, ,...,$\pi(x_{n-1})$ son puntos diferentes contenidos en $(b',\ 1)$. Sea $\epsilon > 0$ tal que satisface las siguientes condiciones:

1. $B(x,\ \epsilon) \subset \pi^{-1}[0,\ a)$ y $B(y,\ \epsilon) \subset \pi^{-1}(b,\ 1]$.

2. La vecindad $N(\pi^{-1}[a',\ b'],\ \epsilon)$ y las bolas $B(x_i,\ \epsilon)$, para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ n-1\}$, son disyuntas dos a dos.

Ahora bien, sea $A = \pi^{-1}[a',\ b'] \cup \{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{n-1}\}$. Dado que $A \in C_n(X) = \omega(B,\ C_n(f))$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $H(f^m(B),\ A) < \epsilon$. Note que $f^m(B)$ intersecta cada uno de los conjuntos $N(\pi^{-1}[a',\ b'])$ y $B(x_i,\ \epsilon)$, para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ n-1\}$. Además, $f^m(B) \subset N(\pi^{-1}[a',\ b'])\cup(\cup_{i=1}^{n-1} B(x_i,\ \epsilon))$. Por tanto, $f^m(B)$ tiene exactamente n componentes, de las cuales $n-1$ están contenidas en $\cup_{i=1}^{n-1} B(x_i,\ \epsilon)$.

Sea K la componente de$f^m(B)$ contenida en $N(\pi^{-1}[a',\ b'], \epsilon)$. Tenemos que $K \cap B(x,\ \epsilon) \neq \emptyset$ y $K \cap B(y,\ \epsilon) \neq \emptyset$, de modo que por 1 se concluye fácilmente que $\pi(K) \cap [0,\ a) \neq \emptyset$ y $\pi(K) \cap (b,\ 1] \neq \emptyset$. Por la Proposición 4.6, $\pi^{-1}[a,\ b] \subset K \subset f^m(B)$. □

A la luz de este resultado es clara ahora la validez del Teorema 4.8.

Teorema 4.8. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un continuo X tipo λ. Entonces la función inducida $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que la función $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N}$. Existe $B \in C_n(X)$ tal que $\omega(B,\ C_n(f)) = C_n(X)$. Sean a y b en $[0,\ 1]$ tales que $0 < a < b < 1$. Por la Proposición 4.7, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\pi^{-1}[a,\ b] \subset f^m(B)$. Puesto que $\pi^{-1}(a,\ b)$ es un abierto contenido en $f^m(B)$, tenemos que $int(f^m(B)) \neq \emptyset$, lo cual contradice el Teorema 4.4. Por tanto, la función inducida $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$. □

4.4. Dendritas

Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que p es un punto de corte de X si el conjunto $X \setminus \{p\}$ no es conexo. Decimos además que p es un punto extremo de X si, para todo abierto U de X tal que $p \in U$, existe un abierto V de X tal que $p \in V \subset U$ y $|fr(V)| = 1$. El conjunto de puntos de corte de X lo denotaremos $cort(X)$ el conjunto de puntos extremos de X lo denotaremos $ext(X)$. Si X es una dendrita, entonces todo subcontinuo de X es una dendrita [21, Corolario 10.6, pág. 167], $X \setminus ext(X) = cort(X)$ [21, Teorema 10.7, pág. 168] y todo subconjunto conexo de X es arcoconexo [21, Proposición 10.9, pág. 169]. Además, si $\{p,\ q\} \subset X$ y $p \neq q$, entonces existe un único arco en X con extremos p y q. Denotaremos dicho arco por pq. En esta sección se muestra que no es posible encontrar una función $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ que sea transitiva si el espacio considerado X es una dendrita.

La siguiente proposición enuncia que todo punto de corte de un continuo X está contenido en un punto de la órbita de B bajo $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$, si resulta que $\omega(B,\ C_n(f)) = C_n(X)$.

Proposición 4.9. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en un continuo X, tal que $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N}$. Sea $B \in C_n(X)$ tal que $\omega(B,\ C_n(f)) = C_n(X)$. Si $p \in cort(X)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $p \in f^k(B)$.*

Demostración. Sea $p \in cort(X)$. Sea $X \setminus \{p\} = U \cup V$, donde U y V son abiertos en X, no vacíos y disyuntos. Note que $U \cup \{p\}$ y $V \cup \{p\}$ son subcontinuos propios de X, por [21, Proposición 6.3, pág. 88]. Sean $r > 0$ y $W = B(p,\ r) \cap (U \cup \{p\})$ un abierto propio en $U \cup \{p\}$. Sea K la componente de $\overline{W}$ que contiene a p. Entonces K es un subcontinuo propio de X, tal que $p \in K \subset U \cup \{p\}$. Por el Teorema de golpes en la frontera ([21, Teorema 5.4, pág. 73]), tenemos que $K \cap fr_{U\cup\{p\}}W \neq \emptyset$, es decir, existe $a \in K$ tal que $a \in Fr_{U\cup\{p\}}W$. Note que, como p es un punto interior de W en $U \cup \{p\}$, tenemos que $p \notin Fr_{U\cup\{p\}}W$, de modo que $a \neq p$. Por tanto, K es no degenerado. De forma similar, podemos encontrar L un subcontinuo propio de X no degenerado tal que $p \in L \subset V \cup \{p\}$. Así $K \cup L$ es un subcontinuo propio de X.

Tomemos $k \in K \setminus \{p\}$ y $l \in L \setminus \{p\}$. Sean $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{n-1} \in X \setminus (K \cup L)$ y $A = K \cup L \cup \{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{n-1}\}$. Sea $s > 0$ tal que las bolas $B(k,\ s)$, $B(l,\ s)$, $B(x_1,\ s)$, $B(x_2,\ s)$, ..., $B(x_{n-1},\ s)$ son disyuntas dos a dos. Note que $B(k,\ s), B(l,\ s) \subset N(K \cup L,\ s)$. Dado que $A \in \omega(B,\ C_n(f))$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $H(f^k(B),\ A) < \epsilon$. Tenemos que $f^k(B)$ intersecta los conjuntos $B(k,\ s)$, $B(l,\ s)$ y $B(x_i,\ s)$, para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ n-1\}$. Además, $f^k(B) \subset B(k,\ s) \cup B(l,\ s) \cup (\cup_{i=1}^{n-1} B(x_i,\ s))$. Por tanto, $f^k(B)$ tiene exactamente n componentes, de las cuales $n-1$ están contenidas en $\cup_{i=1}^{n-1} B(x_i,\ s)$. Sea D la componente de $f^k(B)$ que está contenida en $N(K \cup L,\ s)$. Es claro que $D \cap B(k,\ s) \neq \emptyset$ y $D \cap B(l,\ s) \neq \emptyset$. Por tanto, D es un conexo de X tal que $D \cap U \neq \emptyset$ y $D \cap V \neq \emptyset$, de modo que $p \in D \subset f^k(B)$. □

Si X es una dendrita, entonces $p \in ext(X)$ si y solo si p es un punto extremo de todo arco en X que contiene a p (ver [16, Teorema 15, pág. 320] y [21, Ejercicio 10.44, pág. 188]). Entonces, $p \notin ext(X)$ si y solo si existe un arco ab en X tal que $p \in ab \setminus \{a,\ b\}$. Finalizamos nuestro trabajo probando el Teorema 4.10.

Teorema 4.10. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua definida en una dendrita X. Entonces la función inducida $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ es transitiva para alguna $n \in \mathbb{N}$. Existe $B \in C_n(X)$ tal que $\omega(B,\ C_n(f)) = C_n(X)$. Sea $p \in cort(X)$. Por la Proposición 4.9, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $p \in f^k(B)$. Por el Teorema 4.2, p no es un punto preperiódico de f. Así, $p \neq f(p) \neq f^2(p)$, $p \neq f^2(p)$. Sea Y la componente de $X - \{p\}$ que contiene a $f(p)$. En la prueba de la siguiente afirmación solo usamos el hecho de que $p \in cort(X)$.

$a)$ Existe $q_1 \in pf(p) - \{p\}$ tal que $q_1 \in pf(q_1) \cap f(pq_1) \cap cort(X)$.

Probemos a). Sea $r\colon X \to pf(p)$ la función primer punto para $pf(p)$ (véase [21, Lema 10.25, pág. 176] y [21, Terminología 10.26, pág. 176]). Entonces, si $x \in pf(p)$, $r(x) = x$, y, en caso contrario, $r(x)$ es el único punto en el arco $pf(p)$ tal que $r(x)$ pertenece a todo arco en X que conecta x a todo punto de $pf(p)$. Note que $r \circ f|_{pf(p)}\colon pf(p) \to pf(p)$ es una función continua y $pf(p)$ cumple la propiedad del punto fijo. Por tanto, el conjunto

$$C_1 = \{a \in pf(p) : (r \circ f\ |_{pf(p)})(a) = a\}$$

es no vacío. Sea $q_1 = min\ C_1$ (en el orden natural del arco $pf(p)$ para el cual $p < f(p)$). Como $(r \circ f)(p) = r(f(p)) = f(p) \neq p$, tenemos que $q_1 \neq p$. Dado que $q_1 \in pf(p)$, $q_1 \in pf(p) \setminus \{p\}$. De la definición de $r(f(q_1))$ y del hecho que $r(f(q_1)) = q_1$, tenemos que $q_1 \in f(p)f(q_1)$ y $q_1 \in pf(q_1)$. Puesto que $f(p)f(q_1) \subset f(pq_1)$, concluimos $q_1 \in f(pq_1)$. Por último, para mostrar que $q_1 \in cort(X)$, consideramos dos casos. Si $q_1 \neq f(p)$, entonces $q_1 \in pf(p) \setminus \{p, f(p)\}$. Así $q_1 \in X \setminus ext(X) = cort(X)$. Si $q_1 = f(p)$, entonces $r(f^2(p)) = r(f(f(p))) = r(f(q_1)) = q_1 = f(p)$. Como $f^2(p) \neq f(p)$, tenemos que $f^2(p) \notin pf(p)$ y $f(p)$ está en el arco con extremos $f^2(p)$ y p, de modo que $q_1 = f(p) \in X \setminus ext(X) = cort(X)$. Con todo lo anterior queda probado a).

Tomemos q_1 como en a). Note que $q_1 f(q_1) \subset Y$. Afirmamos que

b) Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $pq_1 \subset f^m(B)$.

Probemos b). Note que $p,\ q_1 \in cort(X) = X \setminus ext(X)$. Existe un arco $ab \subset X$ tal que $pq_1 \subset ab \setminus \{a,\ b\}$. Tomamos $x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in X \setminus ab$. Tomamos también n subconjuntos de X, abiertos y conexos, $U, V_1, V_2, ..., V_{n-1}$, tales que son disyuntos dos a dos, $ab \subset U$ y $x_i \in V_i$, para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ n-1\}$. Tomamos además U_1 y U_2 abiertos en X, conexos y disyuntos, tales que $a \in U_1$, $b \in U_2$ y $U_1 \cup U_2 \subset U$. Note que U_1 y U_2 son arcoconexos.

Sea $\epsilon > 0$ tal que $B(a,\ \epsilon) \subset U_1$, $B(b,\ \epsilon) \subset U_2$, $\{p,\ q_1\} \cap [B(a,\ \epsilon) \cup B(b,\ \epsilon)] = \emptyset$ y $B(x_i,\ \epsilon) \subset V_i$, para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ n-1\}$. Sea $A = ab \cup \{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{n-1}\}$. Como $A \in C_n(X) = \omega(B,\ C_n(f))$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $H(f^m(B),\ A) < \epsilon$. Entonces, $f^m(B) \cap B(a,\ \epsilon) \neq \emptyset$, $f^m(B) \cap B(b,\ \epsilon) \neq \emptyset$, $f^m(B) \cap B(x_i,\ \epsilon) \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ n-1\}$. Es decir, $f^m(B)$ intersecta los conjuntos disyuntos $U, V_1, V_2, ..., V_{n-1}$. Además, $f^m(B) \subset N(A,\ \epsilon) \cup (\cup_{i=1}^{n-1} B(x_i,\ \epsilon))$. Por tanto, $f^k(B)$ tiene exactamente n componentes, de las cuales $n-1$ están contenidas en $\cup_{i=1}^{n-1} B(x_i,\ \epsilon)$.

Sea K la componente de $f^m(B)$ contenida en $N(ab,\ \epsilon)$. Tenemos que $K \cap B(a,\ \epsilon) \neq \emptyset$ y $K \cap B(b,\ \epsilon) \neq \emptyset$. Como K es arcoconexo, así como también U_1 y U_2 lo son, tenemos que $pq_1 \subset K \subset f^m(B)$.

Dado que $q_1 \in f(pq_1)$, se deduce que $q_1 = f(z_1)$, para algún $z_1 \in pq_1 \subset f^m(B)$, de donde $q_1 \in f^{m+1}(B)$. Dado que $q_1 \in pq_1 \subset f^m(B)$, se deduce que $f(q_1) \in f^{m+1}(B)$, de donde $q_1 f(q_1) \subset f^{m+1}(B)$. Como $q_1 \in cort(X)$, por a), es fácil ver que

c) Existe $q_2 \in q_1 f(q_1) - \{q_1\}$ tal que $q_2 \in q_1 f(q_2) \cap f(q_1 q_2) \cap cort(X)$.

Note que $q_2 f(q_2) \subset Y$. Dado que $q_2 \in f(q_1 q_2)$, se deduce que $q_2 = f(z_2)$, para algún $z_2 \in q_1 q_2 \subset q_1 f(q_1) \subset f^{m+1}(B)$, de donde $q_2 \in f^{m+2}(B)$. Dado que $q_2 \in q_1 f(q_1) \subset f^{m+1}(B)$, se deduce que $f(q_2) \in f^{m+2}(B)$, de donde $q_2 f(q_2) \subset f^{m+2}(B)$.

Procediendo de esta forma, construimos dos sucesiones $(q_h)_h$ y $(z_h)_h$ en Y con las siguientes propiedades:

1. $q_h \in cort(X)$, para toda h.
2. $q_h \in q_{h-1} f(q_{h-1}) \setminus \{q_{h-1}\}$ y $q_h \in q_{h-1} f(q_h) \cap f(q_{h-1} q_h)$, para toda $h \neq 1$.

3. $z_h \in q_{h-1}q_h$ y $f(z_h) = q_h$, para toda $h \neq 1$.

4. $q_h f(q_h) \subset f^{m+h}(B)$, para toda h (esto puede verificarse por inducción).

5. $q_h f(q_h) \subset Y$, para toda h.

Por 4 y 5, tenemos que

d) $f^{m+h}(B) \cap Y \neq \emptyset$, para toda $h \in \mathbb{N}$.

Consideremos $\langle Y \cup \{p\},\ X\rangle = \{K \in C_n(X) : K \cap (Y \cup \{p\}) \neq \emptyset\}$. Por *d*), $o(f^m(B),\ C_n(f)) = \{f^{m+1}(B),\ f^{m+2}(B),\ ...\} \subset \langle Y \cup \{p\},\ X\rangle$. Puesto que $\langle Y \cup \{p\},\ X\rangle$ es cerrado en $C_n(X)$, tenemos que $\omega(B,\ C_n(f)) \subset \langle Y \cup \{p\},\ X\rangle$, por el Teorema 2.16, de modo que $C_n(X) = \langle Y \cup \{p\},\ X\rangle$. Tomo K un cerrado en una componente de $X \setminus \{p\}$ distinta a Y. Entonces $K \in C_n(X)$, pero $K \notin \langle Y \cup \{p\},\ X\rangle$, lo cual contradice $C_n(X) = \langle Y \cup \{p\},\ X\rangle$. Por tanto, la función inducida $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(X)$ no es transitiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Bibliografía

[1] Acosta G., Eslami P. y Oversteegen L., "On open maps between dendrites", *Houston J. Math.* 33 (2007), no. 3, 753-770.

[2] Acosta G., Illanes A. y Méndez-Lango H., "The transitivity of induced maps", *Topology Appl.* 156 (2009), no. 5, 1013-1033.

[3] Apostol T., *Mathematical Analysis*, Segunda Edición, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1981.

[4] Arroyo A. y Seade J., *Sistemas Dinámicos Discretos: An Introduction*, Texto Virtual, Bogotá, 2002.

[5] Banks J., "Chaos for induced hyperspace maps", *Chaos Solitons Fractals* 25 (2005), no. 3, 1581-1583.

[6] Banks J., "Regular periodic decompositions for topologically transitive maps", *Discrete Cont. Dynam. Sys.* 1999; 5:83-92.

[7] Banks J., Brooks J., Cairns G., Davis G. y Stacey P., "On Devaney's definition of chaos", Amer. Math. Monthly, 99 (1992), 332-334.

[8] Berglund R. y Bellekoop M., "On intervals, transitivity=chaos", Amer. Math. Monthly, 101 (4) (1994), 353-355.

[9] Block L. y Coppel W., *Dynamics in one dimension*, Lecture Notes in Math., vol. 1513, Springer-Verlag, New York, 1992.

[10] Borsuk K. y Ulam S., "On symmetric products of topological spaces", Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931), 875-882.

[11] Devaney R., *An introduction to chaotic dynamical systems*, Second Edition, Addison-Wesley Studies in Nonlinearity, Redwood City, CA, 1989.

[12] Dugundji J., *Topology*, Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[13] Illanes A. y Nadler S., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Monogr. Textb. Pure Appl. Math., 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[14] Kellum K. R., y H. Rosen, “Compositions of continuous functions and connected functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 115 (1992), no. 1, 145-149.

[15] Kontorovich E., “Baire’s theorem and its applications”, Department of Mathematics, Bar-Ilan University, 52900 Ramat-Gan, Israel.

[16] Kuratowski K., *Topology Vol. 2*, Academic Press, New York, 1968.

[17] Kwietniak D. and Oprocha P., “Topological entropy and chaos for maps induced on hyperspaces”, *Chaos Solitons Fractals* 33 (2007), no. 1, 76-86.

[18] Macías S., *Topics on Continua*, Chapman y Hall/CRC, New York, 2005.

[19] Méndez-Lango H., “Dinámica Colectiva”, *Revista Integración* 30 (2012), no. 1, 25-41, Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UIS, Colombia.

[20] Munkres J., *Topology A First Course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[21] Nadler S., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[22] Nadler S., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978.

[23] Román-Flores H., “A note on transitivity in set-valued discrete systems”, *Chaos Solitons Fractals* 17 (2003), no. 1, 99-104.

[24] Willard S., *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc, Massachusetts, 1970.