

Diseño Didáctico Sobre Fracciones: Un Acercamiento Desde La Música Como Contexto Para
Atender La Diversidad

Jairo Andrés Delgado Campos

Código: 2181286

Trabajo De Grado Para Optar Al Título De Licenciado En Matemáticas

Directora

Sandra Evely Parada Rico

Doctora En Ciencias En La Especialidad De Matemática Educativa

Codirectora

Ingrid Janeth Jácome Anaya

Magíster En Educación Matemática

Universidad Industrial De Santander

Facultad De Ciencias

Escuela De Matemáticas

Bucaramanga

Licenciatura En Matemáticas

2023

Dedicatoria

A mis padres Pastor Delgado y Esperanza Campos

quienes con su amor, paciencia y esfuerzo...

han sido mi inspiración para no caer ante los obstáculos y perseguir mis sueños.

Agradecimientos

A Dios, porque pude sentir su presencia en medio de los retos que se presentaron.

A mi madre, remanso de paz en momentos de angustia y desesperación, maestra y protectora. Mi agradecimiento sin límites.

A mi padre, pilar fundamental que con su fortaleza y capacidad ha forjado mi carácter.

A la profesora Sandra Evely por su confianza y dedicación con este trabajo. Gracias por todas sus enseñanzas.

A la profesora Ingrid quién con sus valiosos aportes hizo de este un mejor trabajo.

Al profesor Alexander Conde porque con sus aportes significativos es inspiración y hace parte de este trabajo.

A todos mis maestros, quienes con su sabiduría aportan en la construcción de un mundo mejor.

A Laura, quien se ha convertido en inspiración y me anima cada día a ser mejor persona. Gracias por estar ahí.

A mi mejor amiga Andrea, gracias por las risas y apoyo incondicional.

Nuestra amistad, eterna y fuerte por siempre.

Agradecimiento Especial

La publicación de este trabajo de investigación se logra gracias al apoyo del Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación, Colombia - MINCIENCIAS, quien financió el programa de investigación “Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro”. Código 1115-852-70767, con su respectivo proyecto Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores, código 70783, con recursos del PATRIMONIO AUTÓNOMO FONDO NACIONAL DE FINANCIAMIENTO PARA LA CIENCIA, LA TECNOLOGÍA Y LA INNOVACIÓN FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS, contrato CT 183-2021.

Tabla De Contenido

<i>Introducción</i>	12
1. Descripción del Problema	14
2. Antecedentes	17
2.1. Educación Inclusiva y Atención a La Diversidad: Marco Normativo	17
2.1.1. <i>Ámbito Internacional</i>	18
2.1.2. <i>Ámbito Nacional</i>	18
2.2. Atención a La Diversidad En La Educación Básica Primaria	21
2.3. Enseñanza Y Aprendizaje De Las Fracciones	22
2.4. Potencial Didáctico De La Música En La Enseñanza De Las Fracciones	25
2.5. Enseñanza De Las Fracciones En El Marco De La Atención a La Diversidad	26
3. Aspectos Teóricos y Conceptuales	27
3.1. Inclusión Educativa y Atención a La Diversidad	27
3.2. Aspectos Conceptuales y Epistemológicos Sobre La Fracción	29
3.3. Subconstructos De La Fracción	30
3.3.1. <i>La Fracción Como Parte-Todo</i>	30
3.3.2. <i>La Fracción Como Medida</i>	31
3.3.3. <i>La Fracción Como Razón</i>	31
3.3.4. <i>La Fracción Como Cociente</i>	31
3.3.5. <i>La Fracción Como Operador</i>	32
3.4. Orientaciones Curriculares Sobre la Enseñanza de la Fracción	33
3.5. Las Matemáticas En La Estructura Rítmica	33
3.6. Estructura Metodológica Del Diseño	37
4. Metodología De Investigación	41
4.1. Fase I: Revisión Previa De Literatura	42

4.2. Fase II: Planteamiento Del Diseño Didáctico	44
<i>5.2.1. Construcción De La Malla Curricular.....</i>	<i>44</i>
<i>5.2.2. Construcción Del Diseño Didáctico</i>	<i>44</i>
<i>5.2.3. Orientaciones Para El Profesor</i>	<i>46</i>
4.3. Fase III: Valoración Del Diseño Mediante La Rúbrica	58
4.4. Fase IV: Pilotaje Realizado Por Profesores En Formación.....	59
5. Estudio De Las Fracciones: Potencialidades De Un Diseño Didáctico Para Atender La Diversidad.....	59
5.1. Potencial Didáctico Del Contexto Musical Para La Enseñanza De Las Fracciones.....	60
<i>5.1.1. Potencial Didáctico Del Contexto Musical En El Diseño</i>	<i>60</i>
<i>5.1.2. Potencial Didáctico Del Contexto Musical De Acuerdo Con La Valoración</i>	<i>61</i>
<i>5.1.3. Reflexiones Acerca Del Potencial Didáctico Del Contexto Musical.....</i>	<i>66</i>
5.2. Aspectos Didácticos y Epistemológicos De La Fracción	67
<i>5.2.1. Aspectos Didácticos y Epistemológicos De La Fracción En El Proceso De Diseño</i>	<i>68</i>
<i>5.2.2. Aspectos Didácticos y Epistemológicos De Acuerdo Con La Valoración</i>	<i>73</i>
<i>5.2.3. Reflexiones sobre Aspectos Didácticos y Epistemológicos De La Fracción</i>	<i>81</i>
5.3. Principios Rectores Del DUA y Potencial De La Música Para Promoverlos.....	81
<i>5.3.1. Valoración Por Rúbrica De Los Principios y Pautas DUA.....</i>	<i>82</i>
<i>5.3.2. Reflexiones Acerca De Lo Percibido En El Pilotaje sobre Los Principios DUA.....</i>	<i>88</i>
6. Conclusiones	89
Referencias bibliográficas	92
Anexos	101

Lista De Figuras

<i>Figura 1: Representación gráfica de un compás musical.....</i>	<i>35</i>
<i>Figura 2: Estructura de un pentagrama</i>	<i>37</i>
<i>Figura 3: Revisión previa de literatura.....</i>	<i>43</i>
<i>Figura 4: Curiosidad matemusal</i>	<i>48</i>
<i>Figura 5: Introducción a la fracción.....</i>	<i>49</i>
<i>Figura 6: Software interactivo</i>	<i>50</i>
<i>Figura 7: Equivalencia de figuras musicales.....</i>	<i>51</i>
<i>Figura 8: Software equifracciones.....</i>	<i>52</i>
<i>Figura 9: Fracción como parte todo y medida</i>	<i>54</i>
<i>Figura 10: Compás musical</i>	<i>55</i>
<i>Figura 11: Evaluación de compases</i>	<i>56</i>
<i>Figura 12: Curiosidad matemusal</i>	<i>57</i>
<i>Figura 13: Pertinencia del diseño didáctico planteado.....</i>	<i>58</i>
<i>Figura 14: Pertinencia de las actividades planteadas.....</i>	<i>61</i>
<i>Figura 15: Relación de los propósitos con el contexto musical</i>	<i>62</i>
<i>Figura 16: Evidencias del trabajo del estudiante</i>	<i>63</i>
<i>Figura 17: Representación fraccionaría de las figuras musicales</i>	<i>64</i>
<i>Figura 18: Evaluación de compases musicales</i>	<i>65</i>
<i>Figura 19: Valoración de procesos.....</i>	<i>66</i>
<i>Figura 20: Estructura rítmica del Vals</i>	<i>73</i>
<i>Figura 21: Valoración del diseño con orientaciones para el docente.....</i>	<i>74</i>
<i>Figura 22: Fracción como razón y cociente</i>	<i>75</i>

<i>Figura 23: Reconocimiento de la figura redonda como la de mayor duración.....</i>	76
<i>Figura 24: Relación parte-todo.....</i>	77
<i>Figura 25: Ruta cognitiva de Juana y Valentina</i>	78
<i>Figura 26: Fracción como cociente.....</i>	79
<i>Figura 27: Reconocimiento de la equipartición en el compás musical.....</i>	80
<i>Figura 28: Composiciones musicales</i>	80
<i>Figura 29: Representación de la figura redonda en el software equifracciones.....</i>	83
<i>Figura 30: Valoración por rúbrica del principio I.....</i>	85
<i>Figura 31: Valoración por rúbrica del principio II.....</i>	86
<i>Figura 32: Valoración por rúbrica del principio III.....</i>	87

Lista De Tablas

<i>Tabla 1: Figuras musicales y equivalencias</i>	36
<i>Tabla 2: Coherencia vertical diseño</i>	45
<i>Tabla 3: Pilotaje del diseño.....</i>	59
<i>Tabla 4: Descriptores y procesos.....</i>	129
<i>Tabla 5: Registro de pulsaciones</i>	133

Lista De Anexos

<i>Anexo 1. Malla Diseño.....</i>	<i>101</i>
<i>Anexo 2. Diseño Para El Estudiante.....</i>	<i>103</i>
<i>Anexo 3. Orientaciones Docentes.....</i>	<i>128</i>

Resumen

Título: Diseño didáctico sobre fracciones: un acercamiento desde la música como contexto para atender la diversidad*

Autor: Jairo Andrés Delgado Campos**

Palabras clave: Fracciones, Equipartición, Música y Atención a la Diversidad.

Descripción:

El presente trabajo tuvo como objetivo Plantear y valorar un diseño didáctico sobre fracciones para estudiantes de quinto grado, utilizando la música como contexto para atender la diversidad en el aula. En este sentido, se reconoce que comprender el uso de las fracciones es necesario en varias situaciones del diario vivir y que todas las personas independientemente de sus características particulares pueden lograrlo a través de experiencias concretas y significativas en las que se evidencia su uso.

En la investigación se sustenta teóricamente en lo referente a las fracciones en las ideas de Kieren (1976, 1983), quien la define como un constructo teórico que puede descomponerse en nociones más simples: medida, parte-todo, razón, cociente y operador. Frente a la atención a la diversidad, se tiene como fundamento los principios y pautas del Diseño Universal de Aprendizaje (DUA). Para el planteamiento y valoración del diseño didáctico, se sigue el desarrollo metodológico propuesto por Diaz-Barriga et al. (1990), mediante las siguientes fases: *i) identificación de un contexto de interés; ii) planteamiento del diseño didáctico; y iii) valoración del diseño (mediante una rubrica y el pilotaje).*

El proceso de investigación posibilitó el logro del objetivo planteado en el que los resultados dieron cuenta de que el contexto de la música es favorable para ofrecer una interpretación significativa de la fracción a todos los estudiantes, posibilitando atender la diversidad en el aula. abarcando también a los no oyentes, quienes por medio de las representaciones del software pueden acercarse también al estudio de las representaciones rítmicas.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Director: Dra. Sandra Evely Parada Rico. Codirector: Mg. Ingrid Janeth Jácome Anaya

Abstract

Title: Didactic design on fractions: an approach from music as a context to address diversity*

Author: Jairo Andrés Delgado Campos**

Keywords: Fractions, Equipartition, Music, Attention to diversity

Description:

The objective of this work was to propose and assess a didactic design on fractions for fifth grade students, using music as a context to address diversity in the classroom. In this sense, it is recognized that understanding the use of fractions is necessary in various situations of daily life and that all people, regardless of their particular characteristics, can achieve it through concrete and significant experiences in which their use is evidenced.

In the research, it is theoretically based on the ideas of Kieren (1976, 1983) regarding fractions, who defines it as a theoretical construct that can be broken down into simpler notions: measure, part-whole, ratio, quotient and operator. Faced with attention to diversity, the principles and guidelines of the Universal Learning Design (DUA) are based. For the approach and evaluation of the didactic design, the methodological development proposed by Diaz-Barriga et al. (1990), through the following phases: i) identification of a context of interest; ii) approach to the didactic design; and iii) evaluation of the design (by means of a rubric and piloting).

The research process made it possible to achieve the stated objective in which the results revealed that the context of music is favorable to offer a significant interpretation of the fraction to all students, making it possible to attend to diversity in the classroom. also covering non-hearing people, who through software representations can also approach the study of rhythmic representations.

* Bachelor thesis

** Science Faculty. Mathematics school. Bachelor's degree in Mathematics. Director: Dra. Sandra Evely Parada Rico. Codirector: Mg. Ingrid Janeth Jácome Anaya

Introducción

La educación es un derecho que se garantiza a todos los estudiantes de acuerdo a sus necesidades particulares para adquirir conocimientos significativos, siendo “la educación inclusiva un proceso que permite tener en cuenta la diversidad de las necesidades de todos los niños, jóvenes y adultos a través de una mayor participación en el aprendizaje, las actividades culturales [...]” (UNESCO, 2005, p. 10). Considerando que “todo individuo tiene la posibilidad de construir un proyecto de vida si la sociedad le ofrece las oportunidades para garantizar su desarrollo humano integral” (Calvo, 2013, p. 3).

En este trabajo, se parte del hecho de que la educación es un derecho fundamental, de todas las personas según la Declaración Universal de Derechos Humanos (ONU, 1948). Y que tal como lo establece la Declaración de Salamanca (UNESCO, 1994), a los estudiantes se les debe ofrecer la oportunidad de alcanzar conocimientos básicos para el bienestar cotidiano, reafirmando que las necesidades de aprendizaje son intrínsecas del sujeto y que nadie debe ser discriminado de las escuelas, las cuales deben estar diseñadas bajo una orientación incluyente que permita el pleno desarrollo y potencie las capacidades de todos.

A nivel nacional, la Constitución Política de Colombia (1991), establece que “la educación ... es un derecho de la persona...cuyos responsables son el Estado, la sociedad y la familia” (art. 67). Por tanto, estos tres agentes deben garantizar y promover el acceso de todos en términos de equidad y justicia.

Sumado a lo anterior, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) afirma que “todos los estudiantes...sin discriminación alguna tienen el derecho de acceder a la oferta institucional existente... y recibir los apoyos y ajustes razonables pertinentes para que tengan un

proceso educativo exitoso” (Art. 1421, 2017). Por tanto, en esta investigación se reflexiona sobre la atención a la diversidad, identificando y proponiendo estrategias que permitan satisfacer las necesidades de aprendizaje de todos los estudiantes, asumiendo la diversidad como un valor que enriquece el contexto, fortalece los lazos de solidaridad y forma ciudadanos críticos.

De este modo, se considera necesario un análisis profundo, que muestre y de cuenta de las experiencias de todos los educandos incluidos en el sistema escolar, que aporte en el establecimiento de proyectos educativos y planes de estudio, respondiendo a las necesidades individuales y colectivas, disminuyendo los índices de deserción “mediante la oferta de acciones plurales y diversas en un mismo marco escolar, buscando conciliar los principios de igualdad y diversidad” (Figueroa y Muñoz, 2014, p. 181), como afirma la Secretaria de Educación del Distrito:

Un elemento que hace que la autonomía escolar cobre sentido, es que los currículos deben ser pertinentes y responder de manera orgánica a las necesidades y características propias del contexto territorial e histórico. En adición, el currículo debe tener la capacidad para acoger la diversidad del estudiantado, dadas sus características particulares, sus contextos y las coyunturas particulares que estén viviendo (2021, p. 11).

Ahora bien, la importancia de un ambiente dinámico y variado es estudiada por Sánchez y Ursini (2010), quienes hacen un reporte de las investigaciones en las que se ha intentado analizar las diferentes variables que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje como la motivación, creencias, concepciones, aspectos cognitivos y afectivos. Logrando concluir que, en ambientes motivadores el estudiante tiene una mejor actitud hacia las matemáticas, lo que facilita su aprendizaje.

Por lo anterior, con la investigación que se realizó se buscó guiar la enseñanza de las fracciones en estudiantes incluidos en grado quinto (5°), atendiendo la diversidad desde contexto de la música, aprovechando la riqueza de los vínculos cognitivos entre las Matemáticas y la Música. Por tal razón, se plantea como pregunta de investigación ¿Cómo un diseño didáctico sobre fracciones para estudiantes de quinto grado, en el que se utiliza la música como contexto posibilita atender la diversidad en el aula?

Para responder a la pregunta se plantea como objetivo: Plantear y valorar un diseño didáctico sobre fracciones para estudiantes de quinto grado, utilizando la música como contexto para atender la diversidad en el aula.

1. Descripción del Problema

En el trabajo que se está reportando en este documento se identifican dos grandes problemáticas: uno hace referencia a las dificultades presentadas tanto en la enseñanza, como en el aprendizaje de las fracciones y el otro a los procesos de atención a la diversidad en la clase de matemáticas. Por una parte, la comprensión del concepto de fracción es una de las competencias más complejas debido a la riqueza de sus significados y por otra, el intento por la eliminación de barreras que impiden o limitan los procesos de aprendizaje y el apoyo educativo a todas las personas sin ninguna excepción dentro del aula de clase es una tarea compleja.

A nivel internacional y nacional amplios comunicados han explicitado la necesidad de ofrecer una educación para todos y la mayoría de los países cuentan con un marco normativo sólido. No obstante, la población con Necesidades Educativas Especiales (NEE), según la UNESCO (2015), tiene mayor probabilidad de deserción, debido a que las instituciones educativas

no han logrado satisfacer sus necesidades, pues si bien, se integran al aula de clases, no se incluyen efectivamente en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Lo anterior coincide con el panorama nacional, en el cual según Hurtado y Agudelo (2016), el 56,8% de las personas con discapacidad entre los 5 y 20 años ingresan al proceso de formación básica. Sin embargo, de este grupo solo el 5,4% logra terminar el bachillerato, pues el estudiante no se siente valorado dentro del ámbito escolar, la rigidez de los proyectos institucionales genera inseguridades, desmotivación, limita posibilidades y segrega al estudiantado con características de aprendizaje diferenciadas, contrario a lo propuesto por Booth y Ainscow (2002) citado en Figueroa y Muñoz (2014) quienes afirman que:

El desarrollo de la inclusión en la educación implica la creación de una comunidad escolar segura, acogedora, colaboradora y motivadora, en la que cada persona sea valorada. Con estos fundamentos a la base, todos los estudiantes podrán alcanzar mayores niveles de logro (p. 180).

Respecto a la enseñanza y aprendizaje de las fracciones, autores como Segovia y Rico (2016) señalan que, el estudio de este concepto es problemático debido a que las operaciones aritméticas con números naturales aprendidas durante los primeros años de escolaridad no tienen sentido en la notación fraccionaria y lo mismo sucede con las relaciones de orden. Sin embargo, estas dificultades podrían ser atendidas con la introducción de la fracción en un lenguaje cotidiano, el uso de material concreto y el significado como medida, para dar un mejor significado Freudenthal (1983).

Sin embargo y frente a lo anterior, al hacer una revisión de secuencias didácticas existentes para la enseñanza de las fracciones, se encuentra que en ellas se hace uso frecuente de material

concreto, predominando acciones como el repartir una pizza, los cuadros de una chocolatina, las tajadas de una mandarina, etc.... actividades que a primera vista parecen dar significado a la fracción. No obstante, como señala Godino (2004) citado por Conde (2013), estas afirmaciones son imprecisas, no permiten dar cuenta de la equipartición ni ofrece opciones para la validación de esta. En este mismo sentido, Obando (2003), sostiene que en los procesos de enseñanza tradicional se conduce al estudiante a errores que no permiten comprender el concepto de fracción.

En cuanto a la génesis de la fracción, esta fue motivada por la ampliación del conjunto de números enteros a los números racionales y según Freudenthal (1983), las fracciones son el recurso fenomenológico de éste y por ende antes de trabajarlo se debe dar sentido a la fracción en diferentes contextos, hecho que en los procesos de educación pocas veces se ve reflejado y libros de texto escolares, pues de entrada presentan la fracción como un número de la forma $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$.

El trabajo de Kieren (1976), antecede al de Freudenthal (1983), y señala que el concepto de fracción depende de varios subconstructos, siendo la relación parte todo el punto de partida para la comprensión de los demás significados y la base para desarrollar la comprensión de todos ellos. Así mismo, la comprensión de dicho concepto está en la interpretación de cada uno de los significados y la relación con los contextos parte todo, cociente, medida, razón y operador, los cuales se explicitan en el capítulo 3.

Ávila (2019), afirma que generalmente se trabaja la relación parte todo del significado de la fracción, lo cual impide la construcción del concepto y la comprensión de la fracción en otros contextos. Brousseau (2007), afirma que los vacíos conceptuales en la comprensión de la relación parte todo en la educación primaria se extienden a grados superiores y dificultan el entendimiento

de los números racionales, lo que a su vez no permite el alcance de otros desempeños, como la comprensión del número racional, el desarrollo del álgebra y la geometría (Fazio y Siegler, 2011).

Finalmente, Nunes, et al (2007), citado por García y Cabañas (2012), afirman que en situaciones en las que la fracción se refiere a la división, los niños de la educación básica tienen mayor éxito para comprender las relaciones de equivalencia y orden, que en aquellas referidas a la medición. Esto significa que hay situaciones más eficaces para potenciar la enseñanza de las fracciones y una vez comprendida la fracción bajo determinada situación o subconstructo, se puede extender a los demás pues hay una estrecha relación entre estos, lo que permite vincularlos de manera natural.

2. Antecedentes

En este apartado se da a conocer la literatura revisada y que permitió darle sustento teórico a la investigación. El resumen de la revisión bibliográfica está organizado en cuatro secciones: *i) educación inclusiva y atención a la diversidad: marco normativo; ii) atención a la diversidad en la educación básica primaria; iii) enseñanza y aprendizaje de las fracciones; iv) potencial didáctico de la música en la enseñanza de las fracciones y v) enseñanza de las fracciones en el marco de la educación inclusiva.*

2.1. Educación Inclusiva y Atención a La Diversidad: Marco Normativo

Aquí se rescata a grandes rasgos la normatividad vigente a nivel mundial y nacional referente a la atención a la diversidad, teniendo en cuenta lo señalado por Ainscow (2019), quien menciona que para atender la diversidad es pertinente adaptar políticas exteriores bajo un minucioso análisis y contextualización a las situaciones nacionales.

2.1.1. Ámbito Internacional

En el ámbito internacional el 10 de diciembre de 1948, se proclama la Declaración Universal de los Derechos Humanos, cuyo artículo 26 establece el derecho gratuito para todos a la educación elemental, como fin para el pleno desarrollo personal y la construcción de valores (ONU, 1948). A partir de esto, buscando consolidar un marco de acción para satisfacer las necesidades básicas de aprendizaje, en Jomiten Tailandia realizado en 1990, se celebró la *Conferencia Mundial sobre la educación para todos*, en la que se afianzó como objetivo para el año 2000 el acceso universal a la educación primaria, mediante el desarrollo de políticas de apoyo que amplíen los medios y mejoren las condiciones de aprendizaje para lograr dignificar la vida humana y un desarrollo sostenible.

En el Foro Mundial sobre la educación de Dakar en el año 2000, se analizaron los logros de la propuesta de educación para todos realizada en Tailandia 1990, y los principios para la atención a las necesidades educativas especiales dentro de las escuelas ordinarias (UNESCO, 1994), aprobados en la *Declaración de Salamanca*. En dicho Foro se propuso un nuevo marco de acción con objetivos a cumplir para el 2015, dentro de los cuales se pretende asegurar la satisfacción de las necesidades de aprendizaje de todos, mediante el acceso equitativo a programas apropiados que aseguren la inclusión.

Finalmente, durante la conferencia general de la UNESCO (2000), se defiende la diversidad cultural y la educación como mecanismo para la justicia, la libertad y la paz, hecho que constituye un deber fundamental que todas las naciones deben cumplir y promover.

2.1.2. Ámbito Nacional

En el contexto nacional *la Constitución Política de Colombia* de 1991, establece que la inclusión en las instituciones educativas públicas es responsabilidad del estado. Sin embargo, Martínez (2019), asegura que

... a partir de dicha disposición se han generado cambios más de tipo administrativo, como obligatoriedad de matrícula de estudiantes con discapacidad, vinculación de docentes de apoyo (Educadores Especiales), exigencias de flexibilización del currículo y elaboración de PIAR (Plan Individual de Ajustes Razonables) para estudiantes que lo requieren (p. 10).

A pesar de ello, se presenta *grosso modo* la normatividad vigente a nivel nacional respecto a políticas de inclusión, la cual es la base para su implementación. El artículo 13 de la Constitución Política de Colombia establece que todo colombiano goza de “los mismos derechos, libertades y oportunidades sin ninguna discriminación por razones de sexo, raza, origen nacional o familiar, lengua, religión, opinión política o filosófica” (artículo 13, 1991). Además, es el mismo estado quien debe vigilar por la consolidación de una igualdad real y efectiva, sustentada en principios de equidad.

En el artículo 67 y 44 se establece la educación como un derecho de la persona y un servicio público con función social, cuyos responsables de garantizarlo son el estado, la sociedad y la familia. En este sentido, el servicio público educativo es regulado por ley 115 de 1994 el cual define la organización y prestación de la educación en los niveles de preescolar, básica primaria y básica secundaria. De ahí que, en el artículo 46 de la misma se refiere a las personas con diferencias físicas, sensoriales, psíquicas, cognoscitivas, emocionales o con capacidades intelectuales excepcionales cuya educación hace parte del mismo servicio público.

Por otro lado, el Decreto 2082 de 1996 establece que las instituciones deben realizar las adecuaciones pertinentes al Proyecto Educativo Institucional (PEI) para la atención a personas con necesidades educativas especiales. Además, en el decreto 1421 de 2017 mediante el cual se define inclusión, la flexibilidad curricular, el Diseño Universal del Aprendizaje (DUA), entre otros, presenta las condiciones para la atención educativa a la población con discapacidad en los niveles de preescolar, básica y media.

En Colombia, se postuló últimamente la Ley 2216 del 2022 que tiene como objeto promover la educación inclusiva efectiva y el desarrollo integral de niños, niñas, adolescentes y jóvenes con trastornos específicos de aprendizaje en instituciones públicas y privadas. Se define el trastorno específico de aprendizaje como dificultades en procesos de lectura, escritura, cálculos aritméticos y adquisición de conocimientos. Se establece que el Ministerio de Educación Nacional proporcionará orientaciones y lineamientos para la formación docente y la identificación temprana de señales de alerta. Para ello, se crea un sistema de información de matrícula para registrar a los estudiantes con trastornos específicos de aprendizaje.

La ley enfatiza en que la atención no debe ser individualizada, sino que se debe promover la inclusión en el aula regular con herramientas y estrategias adecuadas. Se promueve la incorporación de la educación inclusiva en los Proyectos Educativos Institucionales y se brinda acompañamiento pedagógico a los padres y cuidadores. El Instituto Colombiano de Bienestar Familiar (ICBF) asume la responsabilidad de la atención en educación inicial de los niños con trastornos específicos de aprendizaje. Se autoriza al Gobierno nacional a destinar los recursos necesarios para el cumplimiento de la ley, y se establece un plazo de reglamentación de doce meses por parte del Ministerio de Educación Nacional.

Lo anterior pone en evidencia que la normatividad nacional vigente es sólida en cuanto a garantías para la promoción de la atención a la diversidad. No obstante, la realidad muestra una perspectiva diferente pues no se están alcanzando tales objetivos, en este sentido Hurtado y Agudelo (2016), señalan que sí se han promovido procesos inclusivos en las entidades territoriales con ofertas educativas organizadas y planes de acción. Sin embargo, sugieren que para alcanzar una educación que garantice la equidad debe existir una infraestructura adecuada, recursos pedagógicos, tecnológicos, académicos y personal capacitado en todas las instituciones educativas.

2.2. Atención a La Diversidad En La Educación Básica Primaria

Arnaiz (1997) hace alusión a que la acogida de todas las personas en igualdad de condiciones, atendiendo las características diferenciadas en los diferentes espacios educativos, va más allá de la integración de todos los estudiantes a las escuelas ordinarias, pues según Ramírez (2016), aceptar estudiantes con NEE en las instituciones educativas no garantiza la atención de calidad debido a que las prácticas pedagógicas, la inclusión y la atención a la diversidad dependen en gran parte del juicio del docente y de una sistematización institucional que oriente estos procesos.

Una breve reseña histórica realizada por Ramírez (2017) muestra de manera breve cómo se han dado los procesos de inclusión, aceptación y atención a la diversidad en el mundo, describiendo que durante la edad antigua y el renacimiento, para asistir a un proceso de enseñanza era requisito no tener alguna discapacidad o ser mujer, durante la edad media se forman algunas universidades, sin embargo, para asistir a éstas debía contarse con altos recursos económicos y ser hombres, las personas en situación de discapacidad eran consideradas un castigo divino. Es durante el siglo XIX, cuando finalmente se permitió el ingreso de mujeres a la escuela y se inicia un

proceso con instituciones especializadas para menores no oyentes y no videntes, apareciendo años más tarde diversas orientaciones para atender esta pluralidad (Ramírez, 2017)

En Colombia según Ramírez (2017), se han seguido los lineamientos mundiales propuestos por organizaciones como la UNESCO y la ONU respecto a ofrecer educación de calidad para todas las personas. No obstante, Ainscow (2019), acentúa la necesidad de un cambio educativo, pues los estudiantes desfavorecidos son los que menor atención educativa reciben, por lo cual dicha transformación debe buscar la consolidación y sistematización en todas las escuelas de estrategias flexibles y adaptables que orienten los procesos de inclusión.

Incluir implica atender los diferentes estilos de aprendizaje por el cual, Acuña et al. (2012), dan cuenta de la necesidad esencial de aplicar más de una estrategia dentro del aula de clase y estudios como el de Martínez (2019), muestran que en ambientes donde se favorezca la inclusión y se reconozca la diversidad es posible superar problemas y satisfacer las necesidades de aprendizaje individuales en estudiantes con características diferenciadas.

2.3. Enseñanza Y Aprendizaje De Las Fracciones

Un breve análisis sobre las secuencias didácticas propuestas para el trabajo con las fracciones en la educación básica muestra que se tiende a demandar actividades prácticas y concretas (Perera y Valdemoro, 2009). Sin embargo, no se exploran conocimientos previos y se confunde la equipartición con repartición, con actividades centradas en acciones de partir y contar en las que predominan situaciones como el reparto de una pizza, los cuadros de una chocolatina, las tajadas de una mandarina, etc. Estas actividades, según Obando (2006), no permiten que el estudiante comprenda la fracción, como una relación cuantitativa entre la parte y el todo. Por el contrario, reconoce la fracción como dos números naturales relacionados por un vínculo, situación

que le da a entender que puede aplicar en las fracciones los mismos procesos aritméticos que utilizó con los números naturales y enteros.

Kieren (1976, 1983), considera cinco subconstructos de la fracción: relación parte todo, medida, cociente, razón y operador (los cuales se explicitan en el apartado 3). Es importante recalcar que durante la época de Kieren, no se consideraba la fracción independiente al número racional positivo, fue hasta en 1983 cuando Freudenthal introduce el termino fracción y con esta diferenciación se dio paso a más significados de la fracción: fracción como porcentaje, indicado de cantidad de elección, como numero racional, como puntaje, operador y en contextos de probabilidad (Fandiño, 2009).

Además, Freudenthal (1983), establece que en el estudio de la fracción se debe prestar gran importancia al contexto en el cual se está presentando, pues de ser continuo o discreto, implica procesos diferentes. También hace referencia al uso de las fracciones en diversos aspectos del lenguaje usual y cotidiano: (medio litro de leche, un cuarto para las 8, de cada 6 hombres uno es moreno), haciendo énfasis en la importancia de las situaciones realistas cotidianas en el ámbito educativo, para presentar la fracción al estudiante de manera natural y reflejando su utilidad.

Lo planteado por Freudenthal (1983), fue retomado en Acuña et al. (2012), quien en sus orientaciones para articular los programas de estudios sugieren y destacan la importancia del contexto, la educación realista, el uso de representaciones cercanas y de fácil comprensión para el estudiante. En consecuencia, se genera con ello en el estudiante la necesidad de aplicar el conocimiento matemático en la vida diaria, fomentando el razonamiento, la modelación y la resolución de problemas, entre otros procesos.

En este sentido, Perera y Valdemoro (2009), realizaron un estudio experimental en niños de cuarto grado de la educación básica primaria mediante la matemática realista y la lúdica, por intermedio de un enfoque constructivista, a través del cual, los estudiantes lograron realizar repartos equitativos, establecer relaciones de orden y equivalencia, haciendo uso de las expresiones simbólicas adecuadas. De igual modo, Ferro y Montaña (2017), evidencian que el uso de material concreto y la integración de los conocimientos previos, permiten favorecer el desarrollo de aprendizajes relacionados con suma y resta de fracciones heterogéneas en estudiantes de grado quinto.

La literatura sobre el tema ha reportado algunas dificultades que presentan los estudiantes al trabajar con fracciones, Fandiño (2009), citado por Arenas y Rodríguez (2021), destaca que las dificultades más recurrentes son: ordenar fracciones, realizar operaciones aritméticas, el reconocimiento de esquemas, la equipartición, la comprensión de la equivalencia, la fracción irreducible y la ubicación de fracciones impropias en la recta numérica. Algunas de estas dificultades surgen de obstáculos epistemológicos y otras inducidas por el docente.

Duque, et al. (2017) analizaron la noción de fracción en los libros de texto para grado tercero, teniendo en cuenta cuatro categorías para el análisis: significados y conceptos, representaciones, aspectos metodológicos y contextualización. De lo anterior, concluyeron que los textos favorecen la relación *parte todo* sobre los demás significados y en algunos casos existe total ausencia del significado de medida siendo de los más elementales, sumado a ello, se trabajaba una sola representación y los problemas contextualizados se alejan del entorno inmediato del estudiante.

Además, Martínez (2018), revela que después de revisar la organización del currículo colombiano se encontró que no se tienen en cuenta aspectos históricos y epistemológicos de la

fracción para el desarrollo de competencias relacionadas con este objeto de estudio, siendo la historia un catalizador para motivar la comprensión e interpretación del concepto de fracción y mitigar algunas de las dificultades más comunes, como señalan López (2013), Bautista y Rodríguez (2012).

2.4. Potencial Didáctico De La Música En La Enseñanza De Las Fracciones

En el desarrollo histórico, Pitágoras fue el primero en considerar que dentro de la música se evidenciaba el uso de los números y las proporciones, a él también se le atribuye la invención del monocordio, instrumento de una sola cuerda cuya frecuencia emitida es proporcional a la longitud de ésta, a la cual, mediante fraccionamientos es posible distinguir diferentes frecuencias. Estas representaciones fraccionarias son conocidas hoy en día como tonos y se simbolizan mediante una nota musical.

En el ámbito de la difusión educativa Liern (2008, 2011), expresa que las fracciones aparecen en la música para regir la duración de las notas musicales. De acuerdo con ello, es posible desarrollar una secuencia didáctica en la que se haga uso de la teoría musical como dinamizador para la enseñanza, posibilitando que el estudiante comprenda la función de la fracción, trabajándola en un contexto sumamente atractivo y significativo.

Por su parte, Conde (2009, 2013), desarrolla una propuesta didáctica interdisciplinaria mediada por un software de experimentación visual, auditivo e interactivo en el que se relacionan los números fraccionarios, los elementos musicales y la física. El resultado de aplicación muestra que los estudiantes comprendieron el significado de la fracción y establecieron equivalencias entre las figuras musicales. Conde (2009), sostiene que la música está ligada a procesos cognitivos de aprendizaje de las matemáticas y en el caso de las fracciones, dicho contexto ofrece opciones de verificación del reparto equitativo.

Conde et al. (2016), describe cómo el contexto musical favorece el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, especialmente el caso de las fracciones. El análisis se realiza a partir de 3 categorías: la noción de unidad relativa, relación parte todo y equipartición. A partir del cual concluyen que, el contexto musical con apoyo de un ambiente computacional favorece el desarrollo de la noción de fracción. Asimismo, es un contexto ampliamente interesante que genera curiosidad y su percepción es espontánea y natural.

En este mismo sentido, Sepúlveda et al. (2017), presentan una secuencia didáctica mediada por el contexto musical, en la cual se analiza cómo es la construcción de la noción de equipartición en estudiantes de primaria, mediante una propuesta interdisciplinar que integró material concreto, cuadernillo de trabajo y un software interactivo. Con ello, reafirmaron que el contexto musical ofrece las condiciones necesarias para hacer posible el desarrollo de la noción de equipartición, mediante los mecanismos de comprobación del reparto equitativo.

2.5. Enseñanza De Las Fracciones En El Marco De La Atención a La Diversidad

Alsina y Franco (2020), presentan un itinerario para la enseñanza de las fracciones en estudiantes de quinto grado de la educación básica primaria, atendiendo a aquellos con dificultades de aprendizaje y con talento matemático, fomentando la actividad heurística y el pensamiento matemático crítico mediante la diversificación del contexto.

Quien presenta esta propuesta no encontró otros resultados de investigación en los que se haya abordado conjuntamente la enseñanza de las fracciones y la atención a la diversidad.

Además, según Martínez (2019), las orientaciones curriculares en Colombia no consideran la diversidad y los procesos de aprendizaje de forma natural en los niños, lo cual fomenta una horizontalidad temática en un ambiente integrador, pero no inclusivo, que no permite el desarrollo

de competencias, razón por la cual, las investigaciones reportadas al momento inspiran al autor para plantear una propuesta didáctica en la que se aproveche los vínculos entre fracciones y música, con el fin de acercar este objeto matemático a las personas con necesidades educativas especiales dentro del aula de clase ordinaria.

3. Aspectos Teóricos y Conceptuales

En este capítulo se exponen algunos aspectos teóricos y conceptuales que sustentan esta investigación. Se reportan algunas orientaciones en cuanto a la atención a la diversidad y se definen los fundamentos y significados de la noción de fracción. También se incluyen detalles generales de la teoría musical pues es el contexto en el cual se planteará el diseño didáctico y cuya estructura corresponde con lo definido por el proyecto *70783-Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores* (Parada, 2021).

3.1. Inclusión Educativa y Atención a La Diversidad

Para el desarrollo de la investigación se tuvo como principal referente teórico el decreto 1421 de 2017 donde se define la inclusión como sigue:

...un proceso permanente que reconoce, valora y responde de manera pertinente a la diversidad de características, intereses, posibilidades y expectativas de los niñas, niños, adolescentes, jóvenes y adultos, cuyo objetivo es promover su desarrollo, aprendizaje y participación, con pares de su misma edad, en un ambiente de aprendizaje común, sin discriminación o exclusión alguna, y que garantiza, en el marco de los derechos humanos, los apoyos y los ajustes razonables requeridos en su proceso educativo, a través de

prácticas, políticas y culturas que eliminan las barreras existentes en el entorno educativo (p. 5).

En ese sentido, es necesario realizar las modificaciones y ajustes necesarios de acuerdo con las necesidades particulares, para atender a todos los estudiantes dentro de las escuelas ordinarias, bajo una diversa oferta de alternativas y oportunidades para lograr los objetivos propuestos en el currículo general. En el mismo decreto (1421 de 2017), se define el DUA y PIAR como instrumentos de planeación pedagógica en pro de la atención a la diversidad. El enfoque DUA parte del paradigma del diseño universal y se define como:

... hacer accesibles y significativas las experiencias de aprendizaje para todos los estudiantes a partir de reconocer y valorar la individualidad. Se trata de una propuesta pedagógica que facilita un diseño curricular en el que tengan cabida todos los estudiantes, a través de objetivos, métodos, materiales, apoyos y evaluaciones formulados partiendo de sus capacidades y realidades (Decreto 1421, 2017, p. 5).

En efecto, el DUA debe entenderse según los siguientes principios (Pastor, Sánchez y Zubillaga, 2014):

- Principio I: ¿Qué se aprende? Se debe tener en cuenta que todos somos diferentes en la forma en que se percibe y comprende la información, lo que hace conveniente facilitar múltiples formas y opciones de representación de la información y los contenidos.
- Principio II: ¿Cómo se aprende? Reconocer, que el estudiante tiene diferentes formas de expresar y comunicar lo que ya sabe, de esta manera se debe pensar en múltiples formas de acción y expresión, más aún, opciones para la interacción física como lo son el material concreto y las herramientas tecnológicas, entre otras.

- Principio III: ¿Por qué se aprende? Comprender que el componente emocional es una variable existente en el proceso de enseñanza y por esta razón se deben proporcionar opciones para captar el interés y mantener el esfuerzo en base a múltiples formas con las que se puede implicar al estudiante.

En ese sentido, se reconoce que cada estudiante tiene diferentes habilidades y ritmos de aprendizaje, lo que hace necesario presentar actividades en diferentes niveles de complejidad dentro del aula de clase ordinaria, para permitir que cada estudiante pueda aprender y avanzar.

3.2. Aspectos Conceptuales y Epistemológicos Sobre La Fracción

El origen de las fracciones se da en el Antiguo Egipto, Babilonia y China. Estas surgen para dar respuesta a los problemas de la época: medir longitudes, reparto equitativo de alimentos, el cálculo de áreas de terrenos, volúmenes, pesos, problemas económicos y otras situaciones de medida; los cuales eran imposibles de representar con un número natural o entero. En estas primeras culturas las fracciones aparecen en diferentes contextos y con significados diferentes, hecho que notó Dienes (1972) citado en Cedillo (2016) al tratar de definir este concepto:

Básicamente existen dos formas de considerar una fracción. Una fracción puede ser o bien la descripción de un estado de cosas o bien una orden, es decir, el resultado de la orden de ejecución de una operación. Dos tercios pueden significar que describimos las dos terceras parte de una cosa cualquiera y con ello indicamos un estado de las cosas. Por otra parte, podemos decir “tómese dos tercios de la cosa, sea cual fuere esta, y con ello indicamos una orden”. Normalmente se admite que dividimos lo que tenemos (sea lo que sea) en tres conjuntos equivalentes y que tomamos dos de dichos conjuntos. La propiedad número, es decir, el cardinal del conjunto reunión de los dos conjuntos será dos tercios. La orden de

tomar dos tercios nos indica la ejecución de dos operaciones sucesivas. La primera de ellas es una división por tres y la segunda una multiplicación por dos (p. 14).

No obstante, Dienes (1972, como se citó en Cedillo 2016)), menciona dos diferentes significados de la fracción, mientras que Kieren (1976, 1983) relaciona más significados, los cuales denominó subestructos, pues la fracción es un constructo teórico que puede descomponerse en nociones más simples, los cuales son: *parte-todo*, *cociente*, *razón*, *medida* y *operador*.

3.3. Subestructos De La Fracción

Freudenthal (1983), establece que el vínculo de la fracción con el mundo real facilita su comprensión, pues el estudiante trae unas nociones aprendidas desde su experiencia. Este autor concuerda con los diferentes significados descritos por Kieren (1983) y establece que la relación parte todo junto a la medición, por lo que son más frecuentes en el contexto cotidiano y por esta razón, son las de mayor potencial para iniciar la comprensión de la fracción.

Para este trabajo se toma lo expuesto por Kieren (1976, 1983). Sin embargo, se tienen en cuenta aportes realizados por Obando (2006) sobre las principales interpretaciones del uso de la fracción como constructos intuitivos, los cuales se definen a continuación.

3.3.1. La Fracción Como Parte-Todo

En este contexto se considera la unidad como el todo, el cual se reparte en partes iguales, las cuales a su vez forman el mismo todo. Según Kieren (1983) la representación $\frac{a}{b}$ representa una parte de una cantidad (continua o discreta), donde se divide un todo en b partes iguales y se toman a partes.

3.3.2. La Fracción Como Medida

La fracción está ampliamente ligada a procesos de medición que se experimentan en el vivir diario, como la medida del tiempo o situaciones en las que según Kieren (1983), se le asigna un número a una magnitud. En esta perspectiva se involucran de manera natural las nociones de longitud, área y regiones geométricas.

Por otra parte, Obando (2006), menciona que “la fracción como medida aparece cuando se desea medir una determinada magnitud en la cual la unidad no está contenida un número entero de veces en la magnitud que se quiere medir” (p. 65). Esto se debe a que los sistemas de medidas cuentan con un patrón, el cual se denomina unidad base y al no obtener la medida exacta, se deben usar los múltiplos o fracciones de la unidad de medida.

3.3.3. La Fracción Como Razón

Este significado no considera una unidad natural y usa la fracción para expresar una relación de comparación entre dos cantidades de la misma o diferente magnitud. Según Kieren (1983) en este caso, la fracción más que representar un número, representa un índice de comparación.

3.3.4. La Fracción Como Cociente

En este caso la fracción indica una división entre un número entero por otro. No obstante, solo se deja indicada y no se realiza la división. Autores como Kieren (1983) y Obando (2006) coinciden en que este significado de la fracción permite guiar e introducir en su formalidad al número racional.

3.3.5. *La Fracción Como Operador*

En este sentido la fracción guía una transformación definida por un número racional que permite aumentar o disminuir números. Kieren (1983) afirma que esta transformación también puede ser dada por la ampliación o reducción de una figura geométrica.

Es imprescindible mencionar que, según los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2003) este significado necesita ser desarrollado para comprender el número racional, pues:

El paso del concepto de número natural al concepto de número racional necesita una reconceptualización de la unidad y del proceso mismo de medir, así como una extensión del concepto de número. El paso del número natural al número racional implica la comprensión de las medidas en situaciones en donde la unidad de medida no está contenida un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir o en las que es necesario expresar una magnitud en relación con otras magnitudes. Las primeras situaciones llevan al número racional como medidor o como operador ampliador o reductor. (p. 59).

A modo general, Obando (2006), señala lo siguiente respecto a los significados de fracción:

En el caso de que la fracción sea el resultado de una división repartición (la cantidad A es repartida en B grupos iguales), o partición (extraer la cantidad B, de la cantidad A hasta agotarla), entonces la fracción es una cantidad (la medida de cada uno de los B grupos iguales), o es un parámetro (cuántas veces se puede extraer la cantidad B de la cantidad A) (2015, p. 69).

Con base en lo anterior, se trabajaron las fracciones en el contexto musical, teniendo en cuenta principalmente la perspectiva razón y medida en un primer momento. Las demás

perspectivas aparecen progresivamente, teniendo en cuenta lo afirmado por Behr et al (1983), quien establece que los diferentes significados están vinculados de manera natural y que al tratar uno de ellos, aparecen implícitos aspectos que corresponden con los demás, teniendo como fundamento que la interpretación de cada significado es crucial para el desarrollo de otros conocimientos.

3.4. Orientaciones Curriculares Sobre la Enseñanza de la Fracción

Los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 1998), señalan que, al terminar quinto grado, los estudiantes deben interpretar las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones. Además, identificar y usar medidas relativas en diferentes contextos.

Por otro lado, los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016), establecen que en grado cuarto el estudiante debe interpretar las fracciones como razón, relación parte todo, cociente y operador en diferentes contextos, para el cual el mismo documento establece como evidencia de aprendizaje el reconocimiento de dos cantidades covariando y cuantificando el efecto que producen los cambios en una de ellas en la otra.

En este sentido, el diseño planteado se orienta en el pensamiento numérico y se tienen en cuenta los cinco procesos generales de la actividad matemática (MEN, 1998) los cuales son: comunicación, razonamiento, modelación, formulación, resolución de problemas, comparación y ejercitación de procedimientos.

3.5. Las Matemáticas En La Estructura Rítmica

En este apartado se definen los aspectos conceptuales de la teoría musical siguiendo la estructura de Conde (2009, 2013), quien desarrolla una propuesta didáctica interdisciplinaria que

permite estudiar las relaciones conceptuales entre números fraccionarios y elementos rítmicos, pues la música tiene una estrecha relación con el Arte, la Física, las Matemáticas y otras ciencias; lo que hace de la teoría musical un campo de estudio interdisciplinar. En ese sentido, debido a la amplitud de la teoría musical y el alcance de esta propuesta, solo se tendrán en cuenta los elementos útiles para el desarrollo del diseño y se abordarán de manera general, sin entrar en detalles particulares.

La música se compone de cuatro elementos esenciales: el ritmo, la armonía, la melodía y el timbre. El ritmo está determinado por la duración de un sonido y la combinación de estas duraciones, particularmente está ligado al tiempo en el que se reconoce la repetición de un patrón el cual está medido por el pulso.

El pulso es la unidad de medida básica empleada para medir el tiempo en la rítmica, el cual, por ejemplo, se puede encontrar al golpear un objeto con la mano y es medido al igual que el ritmo cardíaco, en pulsaciones por minuto.

Además del pulso, el ritmo también se compone de acento, tempo y compás. El acento musical es un símbolo que marca que denota la intensidad con la que una nota va a ser reproducida, debido a que recae un diferente peso del pulso y a la velocidad con la que ocurren estos pulsos, se le conoce como tempo.

Para darle estructura al ritmo, éste se divide en agrupaciones de pulsaciones con igual duración, esto se conoce como un compás:

Figura 1

Representación gráfica de un compás musical



En la **Figura 1**, el numerador de la fracción $\frac{2}{4}$ indica el número de pulsos o partes en las que está dividido el compás y el denominador indica la figura musical que se va a utilizar, de las cuales se hablará en detalle más adelante. Según Conde (2009) los compases $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$ y $\frac{9}{8}$ resultan sencillos y adecuados para adentrar a los estudiantes en la comprensión de la teoría musical. Por consiguiente, estos serán los que se tendrán en cuenta en la realización del diseño.

Finalmente, la melodía es la esencia de una canción, es aquello que hace más fácil recordarla y está dada por una sucesión de sonidos o notas musicales que se producen de manera lineal sobre un fondo musical conocido como armonía, la cual está compuesta por una serie de sonidos producidos simultáneamente y que se diferencian mediante las notas musicales.

Una figura musical es un símbolo que se refiere a un sonido o silencio y representa una duración. Estas son: redonda, blanca, negra, corchea, semicorchea, fusa y semifusa (**Tabla 1**). continuación, se muestra una tabla con los valores de cada figura musical en las cuales se puede apreciar la relación con las fracciones.

Tabla 1*Figuras musicales y equivalencias*

<i>Figura</i>	<i>Nombre</i>	<i>Duración</i>
	<i>Redonda</i>	<i>Unidad de medida (1)</i>
	<i>Blanca</i>	<i>1/2 de la redonda</i>
	<i>Negra</i>	<i>1/4 de la redonda</i>
	<i>Corchea</i>	<i>1/8 de la redonda</i>
	<i>Semicorchea</i>	<i>1/16 de la redonda</i>
	<i>Fusa</i>	<i>1/32 de la redonda</i>
	<i>Semifusa</i>	<i>1/64 de la redonda</i>

La redonda representa la unidad de medida, sin embargo, varía de acuerdo con el tiempo de su duración, es decir, tiene un valor relativo. La música también usa figuras para representar los silencios, la equivalencia es igual a la anterior.

Finalmente, las notas musicales aparecen en el pentagrama, el cual es destinado a la escritura musical y es una estructura compuesta por cinco rectas ubicadas de forma paralela como se muestra en la *Figura 2*.

Figura 2

Estructura de un pentagrama

**3.6. Estructura Metodológica Del Diseño**

Para la planificación del diseño se tuvo en cuenta la estructura curricular que se propone en el marco el proyecto (aun en curso) realizado desde el grupo de investigación Edumat UIS, en el que como lo expresa Parada (2021) se plantea apoyar a los profesores con herramientas que permita que los alumnos de la educación básica y media tengan acceso al currículo en matemáticas establecidos por el MEN(2006) a través de diseños didácticos en los que se aborden los objetos matemáticos de estudio del currículo nacional pero con cuatro niveles de profundidad diferentes, con el fin de que a cada alumno se le pueda ofrecer un material ajustado a sus características particulares de aprendizaje.

Se entiende por Diseño Didáctico a la planificación, preparación y estructuración de actividades y recursos óptimos para mediar los procesos de enseñanza y aprendizaje y/o el desarrollo de capacidades en los procesos de construcción del conocimiento. Es un proceso sistemático que abarca la selección de objetivos de aprendizaje, identificación de estrategias de enseñanza, elección de recursos educativos y la organización de actividades para lograr esos objetivos (Bruner, 1969; Amaro, 2011; Reigeluth, 1983; Berger y Kam, 1996; Broderick, 2001; Fields y Foson, 2001).

Una breve descripción de los niveles de profundidad de los diseños son los siguientes:

- Diseño de profundidad 1: Las actividades de este diseño deben proporcionar múltiples representaciones del objeto matemático de estudio, especialmente representaciones concretas que permitan evidenciar atributos de los números y de las formas. Las situaciones problemas para este nivel deberán llevar instrucciones sencillas, que preferiblemente tengan poco texto, con mayor contenido visual, auditivo y que inviten a la manipulación de material concreto (geoplanos, regletas, papel, plastilinas, stickers, etc.). Además, el diseño debe proporcionar múltiples formas de acción y expresión como el uso de palabras claves mediante texto alternativo (imágenes, tablas, bits de información, video, fotografía, material físico o digital, títeres, etc.) con el fin de activar la percepción auditiva, visual, táctil de los estudiantes y así promover actividad matemática en ellos. De igual manera, en este diseño se requiere del acompañamiento permanente del profesor, fundamentalmente, para que puedan apoyar al estudiante en la medida que lo necesite, por ejemplo, ayudándolo a hacer conexiones y recordándoles reiterativamente información. Es importante posibilitar en los diseños de este nivel, diferentes formas de implicación, a través trabajo colaborativo con pares y de socialización permanente de sus avances frente al grupo, esto mediante el tratamiento de situaciones y necesidades cotidianas.
- Diseño de profundidad 2: Para este nivel de profundidad es necesario presentar múltiples formas de expresión y comunicación priorizando actividades de resolución de problemas que impliquen la interpretación de información presentada de forma verbal, numérica o gráfica, mediante material visual, auditivo y concreto. El diseño debe proporcionar múltiples formas de acción y expresión al utilizar situaciones culturalmente significativas de los estudiantes. Las situaciones problemas para este nivel deberán llevar instrucciones sencillas con texto moderado que impliquen la conexión de información para comprender

y resolver una situación. El diseño debe proporcionar, para este nivel, variadas formas de acción y expresión dando lugar a las expresiones orales, gestuales, pictóricas, entre otras posibilidades de producción. De igual manera en este diseño se propone la mediación del docente que permita ir valorando el paso a paso, para dar nuevas instrucciones hasta el logro del propósito previsto. En este nivel sigue siendo importante el trabajo colaborativo con pares y de socialización permanente de sus avances frente al grupo, no obstante, se requiere ir dando autonomía para ir fortaleciendo el uso de los conocimientos aprendidos en la solución de situaciones y necesidades cotidianas. Para ello, el profesor puede dar apoyo con material o representaciones concretas (tapas, ábaco, software, etc.) que puede ir retirando en la medida que el estudiante avanza.

- Diseño de profundidad 3: para este nivel de profundidad es necesario presentar múltiples formas de expresión y comunicación priorizando actividades de resolución de problemas que impliquen la abstracción de interpretación presentada de forma verbal, numérica, gráfica, tabular con diversas y variadas tecnologías (como pueden ser los entornos virtuales interactivos o software.) permitiendo la manipulación, variedad de feedback, y estrategias de resolución de problemas. Las actividades están mayormente diseñadas para que los estudiantes construyan expresiones numéricas o algebraicas que permitan modelar una situación problema del contexto. De igual manera, en este nivel las actividades deben posibilitar el desarrollo de procesos matemáticos abstractos y con un lenguaje matemático preciso. El diseño debe proporcionar, para este nivel, variadas formas de acción y expresión haciendo uso del lenguaje matemático acorde con el objeto matemático de estudio. De igual manera en este diseño el docente asumirá la postura de mediación coadyuvando al estudiante para que se acerque y construya los objetos matemáticos según el propósito

establecido. En este nivel es importante posibilitar variadas formas de implicación permitiéndole al estudiante mantenerse atento y motivado al resolver y discutir sobre situaciones del contexto matemático y cotidiano.

- **Diseño de profundidad 4:** Para este nivel de profundidad es necesario presentar múltiples formas de expresión, comunicación y argumentación priorizando actividades de resolución, deducción y planteamiento de conjeturas matemáticas con el uso de lenguaje matemático formal. Se sugiere promover la resolución de problemas con la mediación de diversas y variadas tecnologías (como pueden ser los entornos virtuales interactivos o software) permitiendo la visualización, variedad de feedback, argumentación y desarrollo de estrategias de resolución de problemas. Las actividades están mayormente diseñadas pero que los estudiantes modelen situaciones del contexto (matemático y no matemático), justificando y argumentando sus procedimientos y deducciones. El diseño debe proporcionar, para este nivel, variadas formas de acción y expresión haciendo uso del lenguaje matemático formal propio del objeto matemático de estudio. De igual manera en este diseño el docente asumirá la postura de mediador, coadyuvando al estudiante para que acerque y profundice en sus los objetos de estudio hasta donde su interés, motivación y creatividad se lo permita, de esta forma se da lugar a las múltiples formas de implicación, siempre invitándolo a discutir y exponer avances con sus pares académicos y la comunidad educativa.

Para cada nivel de profundidad, el diseño se estructura en cuatro momentos los cuales Parada (2021), los describe del siguiente modo:

- Primer momento: es el momento inicial de la clase, en el que se plantean actividades para la introducción de un objeto de estudio a partir de un contexto, las cuales pueden ser lúdicas y dinámicas para la valoración y conexión con conocimientos.
- Segundo momento: se construyen conceptos matemáticos emergentes de la situación planeada en el primer momento, se da respuesta a cuestionamientos, se identifican propiedades, relaciones, representaciones y conexiones del objeto matemático de estudio con el contexto.
- Tercer momento: es la parte de la clase donde los estudiantes ponen en práctica y afianzan los saberes construidos hasta el momento. Se presentan actividades lúdicas, de ejercitación, aplicación, problematización, juegos, proyectos, etc.
- Cuarto momento: Es el momento de valorar los desempeños de los estudiantes, reconociendo las diferencias en los ritmos y maneras de aprender. Pueden proponerse actividades retadoras, dinámicas, problemas que permitan valorar los aprendizajes.

En el trabajo que aquí se reporta se plantea un diseño didáctico clasificado en el nivel de profundidad 3 en correspondencia con lo planteado por (Parada, 2021), en el que se usa la música como contexto para entender la diversidad en el aula y se estructura en los 4 momentos descritos anteriormente. Sin embargo, dicho diseño podría ser adaptado y clasificado en los otros niveles de acuerdo con las necesidades de los estudiantes donde va a ser aplicado. Esto se explica con mayor detalle en el capítulo 5.

4. Metodología De Investigación

En este apartado se describe el proceso metodológico para la planeación de un diseño didáctico flexible y adaptable que favorezca la enseñanza de las fracciones y la atención a la diversidad en estudiantes de quinto grado de la educación básica primaria, lo cual se llevó a cabo

siguiendo el proceso metódico de Diaz et al. (1990), quienes establecen los fundamentos para el diseño curricular.

Con este propósito, se plantean las siguientes fases: *i)* revisión previa de la literatura; *ii)* planteamiento del diseño didáctico; *iv)* valoración del diseño didáctico a luz del marco teórico y las herramientas de análisis del proyecto; *v)* pilotaje realizado por profesores en formación; y *vi)* rediseño de acuerdo con la valoración por rubrica. Las fases de desarrollo del estudio se describen a continuación.

4.1. Fase I: Revisión Previa De Literatura

Se realizó una revisión de literatura en cuanto a las políticas para atender la diversidad educativa a nivel nacional e internacional, encontrando la necesidad de apoyar a los profesores y estudiantes con materiales, como pueden ser los diseños didácticos, que den acceso a todos los estudiantes según sus características. Para ello, se tuvieron en cuenta los principios y pautas del DUA como referente conceptual para la evaluación de la idoneidad del diseño didáctico.

En cuanto la enseñanza de las fracciones se encontró que, al terminar quinto grado, según los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2003), las fracciones se deben interpretar en diferentes contextos: situaciones de medición, relación parte todo, cociente, razones y proporciones. Esto lo señalan los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016) haciendo énfasis en que el estudiante debe entender las situaciones en las cuales se puede usar cada representación fraccionaria.

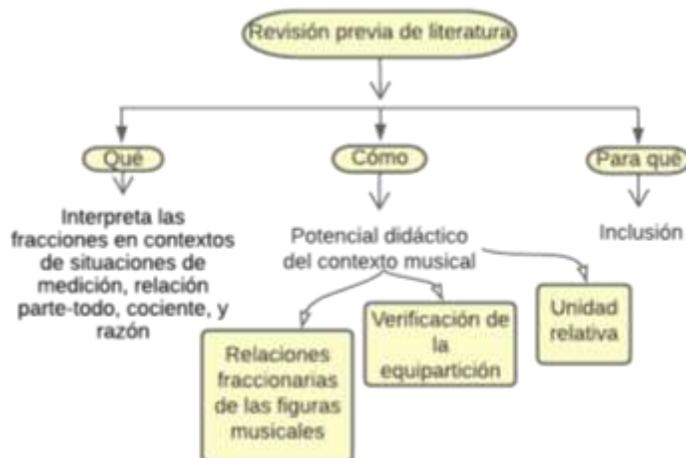
Sin embargo, la enseñanza de las fracciones es altamente compleja y las secuencias didácticas existentes tienden a generar obstáculos en su aprendizaje siendo una de las competencias menos desarrolladas. Como señalan Davis et al. (1993) citado por Cortina et al. (2013, p.8) “La

enseñanza y el aprendizaje de las fracciones no sólo es muy difícil; en el esquema más amplio de las cosas, es un triste fracaso”.

Así, se identificaron dos problemáticas, por un lado, la exclusión dentro de las escuelas ordinarias y por el otro la complejidad de la enseñanza de las fracciones. Por lo cual se realizó una revisión literaria que permitió ubicar el diseño en el pensamiento numérico e identificar la música como un ambiente potencial para el desarrollo de la noción de fracción por parte de todos los estudiantes, independientemente de sus características, debido a que el contexto de la música da acceso a los diferentes ritmos y estilos de aprendizaje y permite el desarrollo natural de procesos de comunicación, razonamiento, modelación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (ver *Figura 3*).

Figura 3

Revisión previa de literatura



4.2. Fase II: Planteamiento Del Diseño Didáctico

El diseño didáctico planteado es una reestructuración a la secuencia didáctica desarrollada por Sepúlveda et al. (2017), en este caso se explicita su aplicación en un ambiente inclusivo en conformidad con los principios DUA, la estructura metodológica del proyecto 70783 (Parada, 2021), y los Estándares Básicos de Matemáticas (MEN, 2003). Insumos con los cuales se construyó la malla curricular, las orientaciones para el profesor y la hoja de trabajo para el estudiante.

5.2.1. Construcción De La Malla Curricular

En esta fase se construyó la malla curricular, en la cual se define el propósito (pensamiento numérico) que sustenta el diseño, la pregunta problematizadora ¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios? Además, se relacionan los descriptores de los procesos matemáticos involucrados, enmarcados en el contexto musical. En este mismo sentido, la malla curricular también fue valorada por medio de la rúbrica y se realizaron los ajustes correspondientes (ver anexo 1).

5.2.2. Construcción Del Diseño Didáctico

El diseño planteado es una adaptación del diseño construido por Sepúlveda et al. (2017), en el cual se analiza ¿Cómo construyen los estudiantes de primaria la noción de equipartición de fracción, a través de objetos musicales? Dicho análisis muestra resultados favorables respecto al uso del contexto musical para la construcción de la noción de equipartición y su aplicación se llevó a cabo en una zona rural donde el acceso a tecnologías es limitado.

En este sentido, se adapta el diseño propuesto por Sepúlveda et al. (2017), considerando en este caso la atención a la diversidad y la interpretación de la fracción en diversos contextos, el resultado es un diseño clasificado en el nivel de profundidad 3 descrito en el capítulo 4. Sin

embargo, considerando el trabajo colaborativo, la retroalimentación entre pares y las múltiples formas de implicación, el diseño es considerado flexible y adaptable a cualquier otro nivel de profundidad.

Además, en la hoja de trabajo para el estudiante se hace uso de un lenguaje sencillo, considerando el desarrollo natural y gradual de la noción de fracción, cuya ruta didáctica consta de cuatro momentos y se explicita en la tabla 2 (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**).

Tabla 2

Coherencia vertical diseño

<i>Momento uno</i>	<i>Es el momento inicial, en el cual se introduce la relación entre matemáticas y música, con la presentación de un video y una actividad práctica de toma del pulso, encaminada a entender el pulso como unidad de medida y realizar un primer acercamiento a la noción de fracción como razón y medida, motivando al estudiante a estudiar dicha relación.</i>
<i>Momento dos</i>	<i>En este momento se espera que el estudiante logre entender la teoría musical, interpretando los diferentes significados de la fracción, para ello se incluyen herramientas computacionales y material concreto, para presentar las notas musicales en la medida de los sonidos y silencios. A partir de las cuales se espera que los estudiantes</i>

comprendan la fracción como un número real que representa una medida.

Momento tres *En este momento se espera reconozca la equipartición como propiedad de las figuras musicales y las fracciones, estableciendo relaciones fraccionarias y entendiendo la unidad relativa. Interpretando la fracción como razón, media, relación parte-todo y cociente.*

Momento cuatro *Momento final del diseño en el que se valoran los desempeños de los estudiantes, esto mediante la evaluación de compases musicales y presentar composiciones propias, en las cuales deben aplicar la noción de equipartición, utilizar las representaciones fraccionarias y comprender la unidad relativa.*

Nota. En la tabla se presenta la ruta vertical correspondiente a el nivel de profundidad 3 descrito por Parada (2021).

5.2.3. Orientaciones Para El Profesor

La intervención del docente es fundamental para facilitar que el estudiante construya el conocimiento, es por ello por lo que se construyó un diseño con recomendaciones didácticas, teóricas y metodológicas para la implementación.

A continuación, se describen las actividades planteadas para cada momento.

Momento 1: El primer momento del diseño denominado “matemáticas en la música” inicia con la presentación del video animado “Donald en la tierra mágica de las matemáticas” de Walt Disney¹. En el cual, mediante una animación, se presenta la relación entre las Matemáticas y la Música, con un contenido histórico que pretende generar curiosidad en el estudiante y motivarlo a estudiar dicha relación.

Se recomienda al docente que después de visto el video, organice una discusión, la cual puede guiar con las siguientes preguntas ¿Qué fue lo que más le llamó la atención del video? ¿Cuál fue el aporte de Pitágoras a la música? ¿Por qué sin las matemáticas no podría haber música? Lo anterior, con el fin de destacar las características principales de la relación entre las matemáticas y la música para que, el estudiante mediante un dibujo pueda representar dicha relación.

En el punto 2 se realiza un primer acercamiento a la noción de equipartición, mediante una actividad práctica de percepción corporal, en la que se analizan las características del pulso. Para ello, el profesor deberá formar parejas con la intención de que cada estudiante tome el pulso de su compañero, lo registre y luego intercambien. Es necesario tomar el pulso durante dos minutos para que tengan sentido algunas actividades que se realizarán después y realizar una toma del pulso estando en reposo y otra después de realizar actividad física para experimentar la variación en la velocidad con que aparecen.

Después de registrados los valores de la toma del pulso, en la hoja de trabajo se pide al estudiante responder los siguientes interrogantes ¿Qué siente al tomar el pulso? ¿Cree que la distancia entre una pulsación y otra es igual? ¿A qué cree que se debe el cambio en la velocidad

¹ Walt Disney. [juanmanuelromero79] (28 de julio de 2017). Donald en el país de las matemáticas. [video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=H5tOVFDIXPc>

de las pulsaciones que tomó anteriormente? En cada una se pide al estudiante justificar su respuesta lo más detallada posible, esto con el objetivo de que entienda y logre explicar en qué consiste el pulso.

Posterior a esto, se presenta una curiosidad matemusal² (ver *Figura 4*), en la cual se define brevemente el tiempo musical y se relaciona el pulso del corazón con el pulso musical.

Figura 4

Curiosidad matemusal

¡Curiosidad matemusal!

El tiempo musical hace referencia a la velocidad con la que suena una obra musical y es medido en pulsos por minuto (PPM).

Por ejemplo, el tiempo musical del Himno Nacional de Colombia es de 120 pulsaciones por minuto. (120/1 PPM)

Con esto, se pide al estudiante completar la información de la *Figura 5* con la cual se vincula por primera vez la noción de fracción entendida como razón. Además, como la toma del pulso se realiza en parejas, se pide que comparen el tiempo musical del latido de corazón de cada pareja y determinen quién tiene el latido de corazón más rápido, para lo cual deben efectuar la operación que indica la fracción.

² Una curiosidad matemusal es una explicación de un concepto relevante en la música, para orientar las actividades posteriores y proporcionar opciones para la comprensión.

Figura 5*Introducción a la fracción*

En los 2 minutos, mi compañero
_____ tuvo _____ pulsaciones.
Por tanto, el tiempo musical del latido del
corazón de mi compañero es de $\frac{\quad}{2}$ BPM.

Para finalizar el primer momento, se pide al estudiante que mediante un dibujo o diagrama explique cómo podrían ser medidos los sonidos en música.

Momento 2: El segundo momento denominado “los sonidos del silencio”, inicia con una discusión en la que se indaga acerca de la presencia de los silencios en la música. Con preguntas de la forma ¿Cómo podrían ser medidos los silencios? ¿Será que los silencios podrían ser medidos en pulsaciones por minuto? El docente puede motivar la reflexión y generar curiosidad para que el estudiante quiera continuar con el desarrollo de las actividades.

Después de la discusión anterior, se proyectará el video “La música de silencio” de Pipalupa³, en el cual se explica la presencia del silencio en las composiciones musicales de forma animada, de este modo es posible introducir al estudiante en el estudio de la medida de sonidos y

³ Pipalupa. (31 de julio de 2015). La música de Silencio | Musicalia |Pipalupa. [video]. You tube. <https://www.youtube.com/watch?v=-bv1FyeAD2E>

silencios en música. En la hoja de trabajo para el estudiante se pide dar respuesta a las preguntas que orientaron la discusión de forma detallada.

Posterior a ello, con apoyo del software⁴ “equifracciones musicales” (ver *Figura 6*) se presentan las figuras musicales y sus relaciones fraccionarias respecto a la unidad, en el software a través de diferentes representaciones se muestra la relación entre cada figura musical y al ser cada una de ellas la mitad de la anterior y el doble de la siguiente aparece la fracción como parte todo.

Figura 6

Software interactivo



Una vez se haya explorado en el software las figuras musicales, en la hoja de trabajo para el estudiante se pregunta por cuál es la figura de mayor duración de sonido, con el fin de que

⁴ Disponible en: https://drive.google.com/drive/folders/1XVEzXorHvU4_dapAMuqr!ZuE2RhW3hAN?usp=sharing creado por Ayala, M., Sepúlveda, G., Conde, L., y Montoya, L., (2017). *Equifracciones musicales – software*. Universidad de Medellín.

identifique a la figura redonda como la de mayor duración de sonido y la unidad relativa. Del mismo modo, se pregunta por cual es la figura con menor duración de sonido y cuál es su equivalencia respecto a la redonda, la cual al no estar contenida un número entero de veces permite que surja la fracción.

Además, en la misma interfaz el software muestra en paralelo tanto la duración del sonido como del silencio, para que el estudiante logré inferir que la duración de los sonidos y silencios es igual en cada figura. Después de explorado el software y contestadas algunas preguntas que guían el procesamiento de información en la hoja de trabajo, se espera que el estudiante pueda completar la siguiente tabla (*Figura 7*).

Figura 7

Equivalencia de figuras musicales

		
SÍMBOLO	NOMBRE	EQUIVALENCIA
	Redonda	
		$\frac{1}{2}$
	Negra	
		$\frac{1}{8}$
	Semicorchea	
		$\frac{1}{32}$
	Semifusa	

En el punto 2 con el objetivo de estudiar la equipartición, en la hoja de trabajo para el estudiante se proponen los siguientes interrogantes ¿Cuántas negras se necesitan para obtener una redonda? ¿Cuántas redondas se necesitan para obtener una negra? ¿Qué pasaría si una de las negras

que forman una redonda no tiene la misma duración que las demás? Esto con el fin de consolidar los conocimientos suficientes para analizar el reparto equitativo.

Una vez contestadas las preguntas anteriores, en el software se muestra una afectación a una de las figuras negras que conforman la redonda (la conforman cuatro figuras negras), la cual consiste en que una de las negras dure menos o más tiempo, es decir, no se completa la redonda o queda una parte sobrando (ver *Figura 8*). Esto daría como resultado un ritmo inconsistente, irregularidad con los golpes del metrónomo, trazos incompletos o sobrantes de la circunferencia (la circunferencia es la representación visual equivalente a la redonda).

Figura 8

Software equifracciones



Posterior a ello, se entregará a los estudiantes material concreto, para que tengan más representaciones y métodos de comprobación. El material consiste en circunferencias divididas en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ Con el objetivo de que el estudiante pueda establecer equivalencias con las figuras musicales y de este mediante la superposición del material trabajar la relación parte todo de la fracción.

Momento 3: El tercer momento denominado “la armonía de la fracción”, está centrado en actividades de verificación de la equipartición, reconocimiento de las relaciones fraccionarias y el uso de la unidad relativa. Para tal fin, inicialmente se plantea una situación en la cual se pide a los estudiantes responder a la pregunta ¿Cómo podríamos determinar qué fracción de la blanca es una negra? Es importante que el docente dé un tiempo prudente para que el estudiante haga conjeturas y las pruebe con ayuda del material concreto.

Posteriormente, en concordancia con las apreciaciones que surjan la actividad anterior, se recomienda al docente presentar la siguiente situación para orientar al estudiante:

Santiago considera que el procedimiento consiste en buscar cuántas negras caben en una blanca. Para ello se toman fracciones equivalentes a la negra en el material concreto y se juntan hasta que llenen toda el área de la fracción de círculo equivalente a la blanca ¿Está de acuerdo con Santiago? ¿Por qué?

Una vez los estudiantes hayan leído, analizado y entendido la situación, el docente podrá leerla nuevamente y preguntar si ¿Están de acuerdo con Santiago? Y ¿Por qué? ¿Puedes con el material concreto realizar la comprobación? Otorgando autonomía al estudiante y la opción de corroborar. Finalmente, se espera que los estudiantes logren concluir cuál es la relación entre la figura negra y la blanca.

En el punto 2 siguiendo el proceso descrito anteriormente, se realizan preguntas orientadas a que el estudiante interprete la fracción como medida y relación parte-todo., como se muestra en la **Figura 9**.

Figura 9*Fracción como parte todo y medida*

- a) ¿Cuántas semifusas caben en una blanca? Explique su respuesta con un dibujo si es necesario.



- b) ¿Qué parte de la redonda es una corchea? Explique su respuesta con un dibujo si es necesario.



En el punto 3 se muestra una situación en la que, en la ejecución de una pieza musical, la redonda dura 16 segundos y a partir de ello se pide a los estudiantes encontrar la medida de las demás figuras. Empleando para ellos la fracción como cociente y operador.

Finalmente, en el punto 4 se pide a los estudiantes formar grupos para hacer una dramatización en la que respondan de manera justificada y con ejemplos a las siguientes preguntas:

- ¿Es posible formar una figura equivalente a la duración de la redonda usando diferentes figuras musicales? Se espera que el estudiante establezca diferentes equivalencias a la figura redonda con ayuda del material concreto.
- ¿Qué pasa cuando una de las corcheas que forman una blanca dura más que las otras? Se espera que el estudiante en su dramatización muestre un ritmo afectado por la falta de un reparto equitativo, pues habría un sobrante de la unidad.

- Sabemos que en una redonda caben 4 negras ¿Qué pasaría si una de las negras tuviera menor duración que las demás? A lo que se espera que el estudiante note que no se logra completar la unidad, dando como resultado un ritmo inconsistente.

Cuarto momento: Denominado “al ritmo de la equipartición” e inicia con un video musical⁵ en el que se muestran los pasos básicos del baile de Vals, buscando que el estudiante identifique que se forman grupos de tres movimientos o pulsos (1,2,3), apareciendo de este modo la noción de compás musical. Después de observado el video se sugiere al docente preguntar ¿cómo estaban conformados los grupos de movimientos? Y explicar el compás musical como unidad métrica organizada en grupos, en el que cada grupo tiene la misma duración de tiempo.

De manera complementaria, con ayuda del software en la sección “bailando al compás” se analizan las características del patrón rítmico del vals de forma detallada y rigurosa, reafirmando las ideas intuitivas de las estudiantes generadas anteriormente.

Figura 10

Compás musical



⁵ Academia de Baile. (9 de junio del 2011). Vals: Paso básico en pareja (8/11) - Academia de Baile. [video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=rhmwBIuJp70&t=30s>

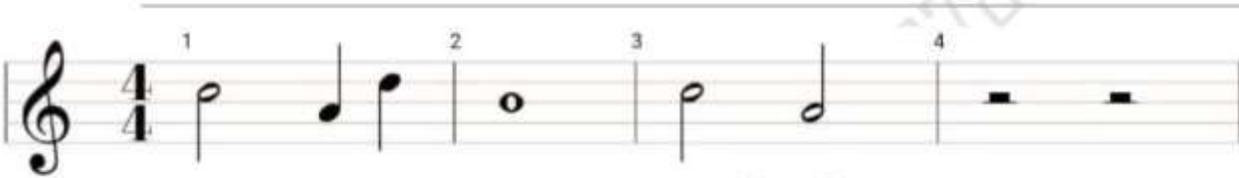
En el software el estudiante podrá entender el compás musical como una composición de equiparticiones, hecho que debe ir guiando el docente a través de preguntas, motivando la reflexión sobre qué pasa con el ritmo de Vals si en un compás colocamos o quitamos un tiempo. Es decir, esto generaría que no todos los grupos tengan la misma duración, lo cual afectaría el ritmo y por ende el baile, es importante que los estudiantes intenten recrear cómo sería el baile de ese ritmo afectado. Con esta actividad se espera que los estudiantes comprendan cuáles serían las condiciones para garantizar un ritmo de Vals.

Para avanzar en el desarrollo de las actividades, es importante que el docente explique el significado de la fracción que indica el compás en las composiciones musicales, para que en el punto 4 el estudiante con apoyo del material concreto evalúe los compases musicales comprobando que cada grupo tiene la misma medida como se observa en la *Figura 11*.

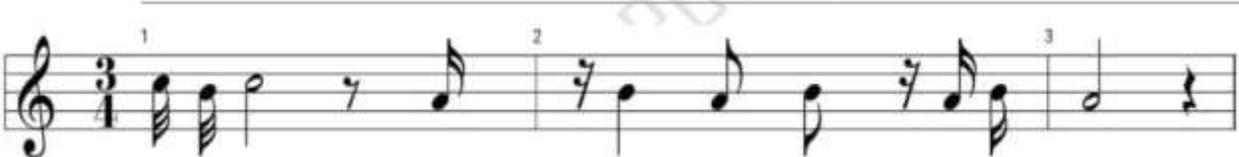
Figura 11

Evaluación de compases

a. Correcto Incorrecto
¿Por qué?



b. Correcto Incorrecto
¿Por qué?



Después que el estudiante haya verificado la equipartición en cada compás, se le pedirá corregir aquellos afectados para lo cual debe emplear la fracción como operador. Para dar paso a la siguiente actividad se presenta la siguiente curiosidad matemusal (**Figura 12**) con la cual se hace síntesis de lo que significa la fracción que indica el compás.

Figura 12

Curiosidad matemusal

¡Curiosidad matemusal!

En la fracción ubicada al inicio del compás, el numerador representa los pulsos en cada compás y la fracción $\frac{1}{n}$ indica la duración.

Por ejemplo: el compás: $\frac{3}{4} = 3 * \frac{1}{4}$

Donde 3 indica el número de pulsos por compás y $\frac{1}{4}$ hace referencia a la cuarta parte de duración de una redonda, es decir la figura negra.

Con esto se espera que el estudiante logre crear sus propias composiciones musicales haciendo uso de la fracción que indica el compás. Una vez el estudiante haya realizado sus creaciones, se le pedirá compartirlas con sus compañeros para que ellos verifiquen que son correctas y en caso de no serlo les ofrezcan retroalimentación.

Finalmente, los estudiantes deben formar grupos y realizar una exposición en la que describan qué es una fracción y sus principales características.

El diseño completo para el estudiante puede encontrarse en el anexo 2 y la guía para el docente en el anexo 3. A continuación, se presentan las fases *iv* y *v* del proceso metodológico en las cuales se valoran los documentos presentados.

4.3. Fase III: Valoración Del Diseño Mediante La Rúbrica

El diseño (versión estudiante y docente), es valorado según la rúbrica de evaluación establecida en el proyecto 70783 en el que está enmarcado este proyecto. Con esto, un experto valora el cumplimiento de los principios y pautas del DUA ajustados al área de matemáticas en el diseño presentado.

Figura 13

Pertinencia del diseño didáctico planteado

Indicador	P1					P2					P3					P4					P4																			
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5															
Las actividades propuestas responden a lo indicado en la tabla de propósitos y descriptores																																								
Se observa el desarrollo del objeto matemático desde lo didáctico																																								
Las instrucciones, dentro del diseño, están acordes con el nivel de profundidad y el grupo de grados																																								

En la imagen (ver **Figura 13**) es posible apreciar la valoración de la rúbrica respecto a los procesos matemáticos para el desarrollo del pensamiento numérico que se promueven en el diseño y su desarrollo progresivo en consecuencia con los momentos del diseño y ajustados al contexto musical.

Además, en la **Figura 19** se valora la promoción de los procesos generales contemplados en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), los cuales están presentes a lo largo del diseño, a fin de que el estudiante aplique el conocimiento matemático en el contexto musical, dándole significado y utilidad al objeto de estudio.

4.4. Fase IV: Pilotaje Realizado Por Profesores En Formación

El pilotaje del diseño se realizó a través de tres sujetos de estudio por parte de profesores en formación del curso de Educación Matemática y Atención a la Diversidad del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, cuya información se puede apreciar en la siguiente tabla (Tabla 3)

Tabla 3

Pilotaje del diseño

<i>Profesor en formación</i>	<i>Sujeto de estudio</i>	<i>Edad</i>	<i>Grado</i>
<i>Juana y Valentina</i>	<i>TDAH</i>	<i>12</i>	<i>Sexto</i>
<i>Isabel</i>	<i>TDAH, miopía y astigmatismo</i>	<i>10</i>	<i>Sexto</i>
<i>Macarena</i>	<i>TDAH</i>	<i>11</i>	<i>Sexto</i>

Nota. Información de los pilotajes realizados por profesores en formación, se usaron seudónimos

5. Estudio De Las Fracciones: Potencialidades De Un Diseño Didáctico Para Atender La Diversidad

En este capítulo se exhiben resultados que evidencian el logro del objetivo de Plantear y valorar un diseño didáctico sobre fracciones para estudiantes de quinto grado, utilizando la música como contexto para atender la diversidad en el aula. Los resultados se analizaron en las siguientes categorías: i) Potencial didáctico del contexto musical para la enseñanza de las fracciones; ii)

Aspectos didácticos y epistemológicos de la fracción; y iii) Principios del DUA y potencial de la música para promoverlos. En cada categoría se da cuenta del proceso de diseño, valoración y rediseño de las actividades propuestas a la luz del marco teórico expuesto en el capítulo 3 y los resultados de la rúbrica de evaluación del diseño.

5.1. Potencial Didáctico Del Contexto Musical Para La Enseñanza De Las Fracciones

Indagando sobre contextos significativos para el estudiante que permitan desarrollar la noción de fracción favoreciendo la atención a la diversidad, Sepúlveda et al. (2017), utilizan el contexto musical en la enseñanza de las fracciones y diseñan una secuencia didáctica en la que los estudiantes y los profesores no necesitan una formación en Música, puesto que en el currículo colombiano no se contempla su enseñanza. Dicho diseño es aplicado en una escuela rural del departamento de Antioquia, siendo la ruralidad un contexto inclusivo pues en ellas participan niños de diferentes esferas sociales, además, el acceso a la información y la tecnología es muy limitado. En tal sentido, se analiza la validez de la música como estrategia didáctica desde el proceso de diseño, la valoración y lo reportado en el pilotaje realizado.

5.1.1. Potencial Didáctico Del Contexto Musical En El Diseño

El contexto musical es trascendental tanto para la enseñanza de las fracciones como para favorecer la inclusión. Por un lado, ofrece diversas opciones para la representación y verificación de la equipartición que le permiten al estudiante la comprensión del reparto equitativo de la fracción a través de las percepciones acústicas y rítmicas (Sepúlveda, et al. 2019). Y por el otro, es llamativo, genera curiosidad y permite al estudiante la construcción de conocimientos de manera natural y progresiva (Conde, et al. 2016). En palabras de Pérez (2009) citado en Sepúlveda, et al (2019):

Figura 15*Relación de los propósitos con el contexto musical*

P4. ¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios? Pensamiento numérico	Valoración					Observaciones
	1	2	3	4	5	
Los propósitos están ajustados al nivel de conceptualización, según cada nivel de profundidad.				X		El propósito se ajusta muy bien con el nivel de profundidad 3
Los propósitos están vinculados estrechamente con la pregunta problematizadora y con el contexto.					X	El propósito está vinculado con el contexto musical
Los propósitos se relacionan con estándares específicos para el grupo de grados.					X	
Los propósitos, en cada nivel, comprenden los mismos objetos matemáticos.						Se trabaja la fracción en cinco situaciones distintas solo en el nivel de profundidad 3

Lo valorado en la rúbrica se evidencia en lo descrito por Macarena sobre el proceso de aplicación del diseño, quien da cuenta del aprendizaje progresivo por parte del estudiante, que parte de representar la relación entre matemáticas y música mediante un dibujo, posteriormente se entiende el reparto equitativo por intermedio de una actividad práctica de toma del pulso, en la cual a través de sus sentidos puede percibir la equidistancia entre las pulsaciones y de este modo concebir el significado de la fracción en diversos contextos.

El potencial didáctico del contexto musical se puede valorar en el sentido en que le permite verificar el reparto equitativo y entender la unidad relativa. Hecho que se puede constatar en el pilotaje, donde el estudiante afirma que “si tú estás quieto y sin hacer nada las pulsaciones van a ser lentas, pero si tú estás corriendo o haciendo una actividad las pulsaciones van a ser más altas y rápidas” (Osorio, 2023, p. 14). Es decir, comprende que la velocidad de las pulsaciones puede variar. Sin embargo, se mantiene la relación equidistante entre cada golpe de pulso (ver **Figura 16**).

Figura 16

Evidencias del trabajo del estudiante

2. Reúnase en parejas, siguiendo las indicaciones del profesor tome el pulso de su compañero durante 2 minutos, y viceversa.

a) Complete los siguientes datos:

Nombre	Número de pulsaciones en reposo	Número de pulsaciones después de actividad física
Karina	20	78

b) ¿Qué siente al tomar el pulso? 74
 va muy rápido, siendo como una vibración,

c) ¿Cree que la pausa entre una pulsación y otra es igual?

Las senti igual

d) ¿A qué cree que se debe el cambio en la velocidad de las pulsaciones que tomó anteriormente?

así si estas quieto y sin hacer nada las pulsaciones van hacer lentas, pero si estas corriendo o haciendo una actividad las pulsaciones van hacer mas altas y rapidas.

e) Explique con sus propias palabras en qué consiste el pulso.

cuando yo aplando o zavoitico lo hago el ritmo de el corazón que manda sangre a todo el cuerpo.

En el apartado señalado con rojo de la figura, se puede apreciar que la estudiante pudo haber perdido el conteo de las pulsaciones, pues el número de pulsaciones estando en reposo no corresponde con la realidad. Sin embargo, el número de pulsaciones después de realizar actividad física es más apropiado. Además, en lo señalado en color verde, el estudiante afirma que percibió una relación de igualdad de distancia entre los golpes del pulso.

El contexto musical le permite al estudiante identificar la fracción como una representación de la medida de los sonidos y silencios de una pieza musical, reconociéndola como un número real que establece una comparación y determina una medida. Es oportuno destacar que lo ocurrido en el pilotaje respecto a la manipulación de material concreto e integración del software, da cuenta de que estos se complementan para favorecer el desarrollo del objeto matemático (ver *Figura 17*).

Figura 17

Representación fraccionaria de las figuras musicales

		
SÍMBOLO	NOMBRE	EQUIVALENCIA
	Redonda	1
	blanca	$\frac{1}{2}$
	Negra	$\frac{1}{4}$
	corchea	$\frac{1}{8}$
	Semicorchea	$\frac{1}{16}$
	Fusina	$\frac{1}{32}$
	Semifusa	$\frac{1}{64}$

c). Discutan si es posible establecer una relación entre las fichas del material y las figuras musicales

d). De acuerdo con lo anterior complete la siguiente tabla:

Ficha	Figura musical	Equivalencia
Círculo	Redonda	1
	blanca	$\frac{1}{2}$
	Negra	$\frac{1}{4}$
	corchea	$\frac{1}{8}$
	semicorchea	$\frac{1}{16}$

En las figuras se observa cómo el contexto musical favoreció la actividad matemática, permitiendo al estudiante reconocer la representación fraccionaria en las figuras musicales. Además, lograron realizar sus propias composiciones, identificando compases afectados que no cumplieran con la equipartición (*Figura 18*), y crear sus propios compases, entendiendo la unidad relativa (figura redonda), alcanzando de este modo los propósitos del pensamiento numérico referenciados.

Figura 18

Evaluación de compases musicales



La valoración por rúbrica (*Figura 19*) y los resultados reportados en el pilotaje dan cuenta de la pertinencia de los propósitos ajustados al contexto musical, el desarrollo progresivo en la interpretación de los diferentes significados de la fracción por parte del estudiante y la promoción de los procesos de comunicación, modelación, razonamiento y elaboración, comparación y ejecución de procedimientos.

Figura 19*Valoración de procesos*

P4. ¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios? Pensamiento numérico		Valoración					Observaciones
		1	2	3	4	5	
¿Los descriptores están ajustados a las habilidades de proceso, en cada nivel de profundidad y evolucionan progresivamente?	Comunicación					X	Se pretende promover las habilidades de explicar e interpretar.
	Modelación				X		Se pretende promover las habilidades de identificar y construir modelos en el contexto musical, sin embargo, no se especifica que tipo de modelos se espera que construya, gráficos, algebraicos, entre otros.
	Razonamiento					X	Se pretende promover las habilidades de interpretar, argumentar y validar
	Elaboración, comparación y ejecución de procedimientos				X		Se pretende promover las habilidades de construir y utilizar fracciones

De este modo, los resultados anteriores resaltan el potencial didáctico del contexto musical para la enseñanza de la fracción y la inclusión en el aula de clase.

5.1.3. Reflexiones Acerca Del Potencial Didáctico Del Contexto Musical

En este ítem se reflexionará de modo general en torno al potencial didáctico del contexto musical para la enseñanza de la fracción, teniendo en cuenta la rúbrica de valoración y los tres resultados de aplicación, los cuales convergen en que la música es un contexto de interés para el estudiante, pues realizaban continuamente preguntas en las cuales era posible apreciar su disposición a indagar en el objeto matemático de estudio.

Por ejemplo, un estudiante preguntó a Macarena “¿Será que el silencio hace parte del Kpop?” (Osorio, 2023, p. 18), pues para él fue sorprendente que el silencio haga parte de las composiciones musicales y no podía generalizar dicha propiedad a todos los géneros, ya que desde su percepción algunos son más “ruidosos” que otros.

Las profesoras en formación Juana y Valentina (Díaz y Quintero, 2023), afirman que el estudiante logró deducir que en la medida que se avanzaba, cada figura se iba “achiquitando” en la misma medida, es decir, el estudiante reconoció en un principio de manera casi intuitiva, la

propiedad de las figuras musicales donde cada una de ellas es la mitad de la anterior y el doble de la siguiente. Reconociendo la fracción como operador y parte todo.

Por otra parte, en el desarrollo de algunas actividades se presentaron algunas dificultades. Por ejemplo, Juana y Valentina notaron que el estudiante se perdía en el conteo de las pulsaciones y que esto se le dificultaba en gran medida debido a que no sabía pronunciar algunos números, por lo que fue necesario emplear un reloj digital que tomará las pulsaciones.

Por otro lado, Isabela (Ortiz, 2023), comenta que el material concreto en ocasiones distraía al estudiante pues le parecía curioso y lo usaba para otros fines. Por tal razón, es necesario orientar el uso adecuado del material y entregarlo al estudiante justo en el momento que se requiera, teniendo en cuenta que son estudiantes a los que se les dificulta prestar atención y tienden a distraerse con facilidad. Del mismo modo, aunque se recomienda permitir una exploración libre del software, es importante que el docente tome decisiones en los casos en los cuales es pertinente tener un mayor control sobre el trabajo del estudiante.

Sumado a lo anterior, Macarena (Ortiz, 2023), señala que algunas preguntas debieron ser explicadas nuevamente usando un lenguaje más sencillo, razón por la cual se decidió reemplazar la redacción de algunas de ellas, haciendo uso de un lenguaje menos técnico, natural y familiar para el estudiante. Igualmente, se agregó más espacio en algunas preguntas y la opción de dibujar, con el fin de que puedan concretar sus ideas con el apoyo en diagramas.

5.2. Aspectos Didácticos y Epistemológicos De La Fracción

En la secuencia didáctica se pretende exponer a las matemáticas como ciencia que fundamenta la teoría musical, por ello, en torno a la pregunta problematizadora ¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios? Se espera que el estudiante

interprete la fracción como relación parte todo, medida, cociente, razón y operador según lo establecido por Kieren (1983).

La actividad de “el ritmo del corazón” se realiza con el propósito de originar en el estudiante la noción de equipartición, mediante el análisis de las características del pulso a través de una actividad práctica de percepción corporal. En esta actividad se realiza una toma de pulso en estado de reposo y otra después de realizar actividad física o experimentar sensaciones de angustia, a fin de que el estudiante note la variación en la velocidad con que se perciben los latidos y verifique que, a pesar del cambio en la velocidad, se mantiene la equidistancia entre cada golpe del pulso.

Con lo anterior se busca que el estudiante identifique el pulso como unidad de medida de los sonidos y silencios musicales, y reconozca la “relación de igualdad de distancia entre una pulsación y la siguiente” (Sepúlveda, et al, 2017, p. 86). Siendo la noción del pulso el andamiaje a través del cual se desarrolla la noción de reparto equitativo, unidad relativa e interpretación del significado de la fracción en diversos contextos, los cuales se exponen a continuación desde el proceso de diseño.

5.2.1. Aspectos Didácticos y Epistemológicos De La Fracción En El Proceso De Diseño

Teniendo en cuenta que el pulso musical se mide, al igual que el del corazón, en pulsaciones por minuto, las cuales pueden ser 30, 60, 90 o cualquier otro valor por minuto, lo cual depende de la velocidad fijada en el metrónomo y determina el ritmo de la composición musical. Se espera que el estudiante afiance el pulso como una unidad de medida, preciso y estático, cuyo instrumento de medida es el metrónomo que permite medir el tiempo de una melodía.

El metrónomo favorece la comprensión del tempo musical y permite identificar que la duración en segundos de la figura redonda depende de la velocidad de las pulsaciones. Tal dependencia favorece la noción de unidad relativa, pues, teniendo en cuenta que la redonda es la figura de mayor duración y que a partir de la redonda (que actúa como la unidad), se construye cada figura musical como la mitad de la anterior y el doble de la siguiente. Por ejemplo, la figura blanca representada por $\frac{1}{2}$, hace referencia a la mitad de una unidad, es decir, la mitad de la redonda.

5.2.1.1. La Fracción Como Razón

Una vez establecido el pulso como unidad de medida de los sonidos y silencios musicales, se parte de la relación entre el tiempo y las pulsaciones, para introducir la fracción como razón entendida como una relación que sugiere la comparación de dos magnitudes. En este caso, se presenta la razón entre el tiempo empleado y el número de pulsaciones, donde surgen de manera natural expresiones como “60 pulsaciones por minuto” o “60 pulsos cada minuto” lo que puede entenderse también como “60 es a 1”. En caso de surgir dichas expresiones se ha recomendado al docente hacer consciente al estudiante de que esta comparando la cantidad de pulsos respecto al tiempo.

5.2.1.2. La Fracción Como Medida

De acuerdo con Freudenthal (1983), Kieren (1983) y Obando (2006), la fracción como valor de medida aparece de manera natural en nuestro entorno inmediato, lo que favorece y facilita su comprensión. Permitiendo en el estudiante el desarrollo progresivo de la fracción, entendida como un valor real que indica una medida y no como dos números naturales vinculados por una línea de fracción.

En el diseño presentado se estudian las figuras musicales y las relaciones fraccionarias mediante el uso de las herramientas computacionales, entendiendo que cada figura representa la duración de un sonido o un silencio, y por tal razón se le asigna un número.

Para promover la comprensión de la fracción como medida se plantean preguntas del tipo ¿La equivalencia entre sonidos y silencios es igual en cada figura? ¿Cuál es la equivalencia entre la figura de menor duración y la redonda? ¿Cuántas redondas se necesitan para obtener una negra? ¿Cuántas semifusas caben en una blanca? Pues se parte del hecho de que comparar es la idea base de medir.

Para responder a los cuestionamientos anteriores se promueve el uso de material concreto, pues permite una mejor percepción de las relaciones entre las figuras musicales, pues de acuerdo con Sepúlveda, et al. (2017) “el material les permitió a los estudiantes acercarse a la solución de ejercicios de comparación entre la duración de las figuras musicales” (p. 102). Según los autores, gracias al uso de material concreto los estudiantes lograron establecer relaciones de equivalencias entre las figuras musicales, estableciendo la fracción como medida, la cual se vincula con la relación parte todo y se explicita a continuación.

5.2.1.3. La Fracción Como Parte – Todo

Freudenthal (1983) considera que, una vez entendida la interpretación de la fracción como parte-todo, es posible extenderla a los demás significados con naturalidad. En ese sentido, algunas de las secuencias didácticas revisadas (Perera y Valdemoros, 2017; Ferro y Montaña, 2017). muestran la preponderancia de dicha relación en el estudio de la fracción. Por tal razón, a lo largo del diseño se presentan varias situaciones en los cuales se presenta la unidad como un todo, la cual es repartida en partes iguales.

En la pregunta ¿Cómo podríamos determinar qué fracción de la blanca es una negra? Se espera que los estudiantes tomen la ficha de material concreto equivalente a la figura blanca, la llenen con la cantidad de fichas que caben de manera exacta y las cuenten (Sepúlveda, et al. 2017), procesos propios de la interpretación de la fracción como relación parte-todo.

Como se mencionó anteriormente, hay una estrecha relación entre la fracción como media y parte – todo, pues al comparar la parte con el todo, aparece de forma natural el proceso de medida. Sin embargo, se privilegia la relación parte todo cuando se encamina al estudiante a responder preguntas del tipo ¿qué parte? ¿Qué parte de la redonda es una corchea? ¿Qué parte de la negra es una semicorchea? o ¿Qué fracción de la blanca es una negra? Al respecto, el contexto musical privilegia el reparto equitativo y no convierte la equipartición en un obstáculo didáctico (Cortina et al, 2013).

5.2.1.4. La Fracción Como Cociente

Teniendo en cuenta que el tiempo que tarda una figura en ser ejecutada depende de la redonda como unidad relativa, en el tercer momento del diseño, se presenta una situación en la que, durante la ejecución de una pieza musical, la redonda dura 16 segundos. Con base en lo anterior, se pide al estudiante determinar el tiempo que tardan las demás figuras en ser ejecutadas y justificar la respuesta. De esta manera, se vincula de forma explícita la fracción como cociente, asociada a la división de un número natural entre otro.

Así mismo, en el primer momento, se establece una relación directa entre la fracción como razón y cociente, pues después de establecer la relación entre las pulsaciones por minuto, se pregunta ¿quién tiene el latido de corazón más rápido y por qué? Para lo cual, se espera que los estudiantes efectúen la operación que indica la fracción.

5.2.1.5. La Fracción Como Operador

La fracción como operador aparece en diversas situaciones propuestas en el diseño. En el tercer momento se busca que los estudiantes logren deducir que cada figura es el doble de la siguiente y la mitad de la anterior (Conde, 2009). Es decir, se emplea el operador de $\frac{1}{2}$ en la relación de cada figura musical.

Así mismo, en el cuarto momento, al definir el compás musical y verificar aquellos afectados por el incumplimiento del reparto equitativo, se tiene como objetivo que los estudiantes lleguen a argumentos como la reducción o amplificación de una de las fracciones a fin de que se cumpla el reparto equitativo y el compás represente un ritmo consistente. Ideas claves que guiarán al estudiante a la comprensión de la fracción como operador.

5.2.1.6. Verificación De La Equipartición

En el software “Equifracciones” se expone de manera gráfica y acústica una situación en la que se muestra una afectación en la duración de una de las cuatro figuras negras que componen la redonda, obteniendo como resultado un ritmo inconsistente, la marcación del trazo incompleto o sobrante e irregularidad con los golpes del metrónomo. Es decir, los efectos del no cumplimiento del reparto equitativo.

Sepúlveda, et al. (2017), reportan que en esta situación algunos estudiantes afirmaron que, si una de las negras no tiene la misma duración, el círculo quedaría incompleto, pues le queda faltando o sobrando “un mochito” y el sonido producido es inconsistente. De este modo, el estudiante va a concebir la necesidad de un reparto equitativo, como propiedad tanto de las figuras musicales como de las fracciones, lo que se beneficia con la implementación de material concreto pues ofrece la opción de verificación.

En el cuarto momento, a partir del video que muestra los pasos básicos del Vals, se define la noción del compás musical como una unidad métrica organizada en grupos que tienen un reparto equitativo de tiempo y pulsos. Idea que se amplía con el uso de herramientas computacionales, en las cuales es posible apreciar de manera gráfica y acústica el compás musical del ritmo del vals. Además, se plantea el análisis de una situación en la que se agrega o se elimina un tiempo al compás, donde se espera que el estudiante note que el ritmo afectado no corresponde con el Vals (Ver *Figura 20*).

Figura 20

Estructura rítmica del Vals

PATRÓN RÍTMICO DEL VALS

Timepo
Acento

1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3

¿CÓMO SUENA ?

SIN AFECTAR CON UN TIEMPO MÁS CON UN TIEMPO MENOS

¿Qué pasa con el ritmo de Vals si en un compás colocamos o quitamos un tiempo?
 ¿Cuáles serían la percepción del ritmo?
 ¿Cómo sería el baile de ese ritmo afectado?
 ¿Cuáles serían las condiciones para garantizar un ritmo de Vals?

Así, se describen aspectos didácticos y epistemológicos de la fracción en el proceso de diseño en consecuencia del marco teórico y a continuación se describen los Aspectos didácticos y epistemológicos de la fracción de acuerdo con lo evidenciado en el pilotaje y los resultados de la rúbrica.

5.2.2. Aspectos Didácticos y Epistemológicos De Acuerdo Con La Valoración

De acuerdo con los resultados de valoración de la rúbrica fue necesario reajustar la versión docente del diseño, pues de acuerdo con los resultados y comentarios del experto: se había

realizado un planteamiento de aspectos didácticos respecto a la relación de las fracciones con el contexto musical, sin embargo, no se precisaban los aspectos históricos y epistemológicos del objeto matemático de estudio (ver *Figura 21*).

Figura 21

Valoración del diseño con orientaciones para el docente

Indicadores	P1					P2					P3					P4					P5				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Se explicitan los planteamientos epistemológicos o históricos y didácticos																		X							
Se indica los procesos que se están trabajando en las diferentes actividades																		X							
Se fundamentan las actividades con lo propuesto en los documentos de referencia del MEN																		X							

El objeto matemático, en este caso las fracciones, se desarrollan a partir de los diferentes significados y éstos se evidencian a medida que se avanza en las tareas planteadas en cada uno de los momentos del diseño. En el pilotaje, fue evidente cómo en un primer momento, el estudiante interpretó la fracción como razón, como una comparación entre la cantidad de latidos y el tiempo. Además, antes de realizar el cociente, el estudiante de manera intuitiva comprendió que tiene un latido de corazón más rápido como se señala en el recuadro rojo de la *Figura 22*, debido a que la cantidad de latidos es mayor durante los dos minutos. Hecho que comprobó al realizar el cociente (recuadro verde).

Figura 22

Fracción como razón y cociente

c) Socialicen el tiempo musical del latido de corazón de cada uno, y regístrelo a continuación.

Tiempo musical	
Mío	De mi compañera
$\frac{173}{2}$ BPM	$\frac{70}{2}$ BPM

d) ¿Quién cree que tiene un latido de corazón más rápido, usted o su compañero?
¿por qué?
Yo porque mi número es mayor a el de Karina.

e) Halle los cocientes del tiempo musical del latido de corazón suyo y de su compañero.

Tiempo musical	
Mío	De mi compañero
$\frac{173}{2} = 86,5$ BPM	$\frac{70}{2} = 35$ BPM

Posterior a esto, con lo observado en el software, el estudiante consiguió identificar la figura redonda y la semifusa como las de mayor y menor duración respectivamente. Sin embargo, no logra establecer una relación de equivalencia entre éstas y aunque reconoce que las equivalencias entre sonidos y silencios es igual en cada figura, no hay un argumento que justifique dicha afirmación (ver **Figura 23**).

Figura 23

Reconocimiento de la figura redonda como la de mayor duración

a) ¿Cuál es la figura con mayor duración de sonido?

Redonda

b) ¿Cuál es la figura con menor duración de sonido?

semifusa

c) ¿Cuál es su equivalencia respecto a la redonda?

Forma en círculo

d) ¿La equivalencia entre sonidos y silencios es igual en cada figura? Explique su respuesta

Si

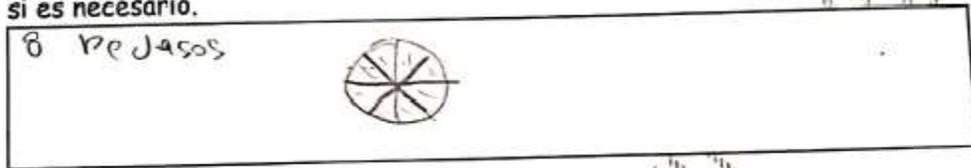
Continuando con el desarrollo de las actividades, el estudiante logró determinar equivalencias entre fracciones, dando respuesta a interrogantes en los cuales debía reconocer la fracción como relación parte todo. Por ejemplo, reconociendo que la figura blanca dura $\frac{1}{2}$ (de la redonda) y la negra es la mitad de esta, el estudiante describió de forma geometría, textual y

algebraica que la figura negra es un medio de la blanca (ver **Figura 24**). Lo cual es un indicador positivo en lo que respecta a las múltiples formas de representación.

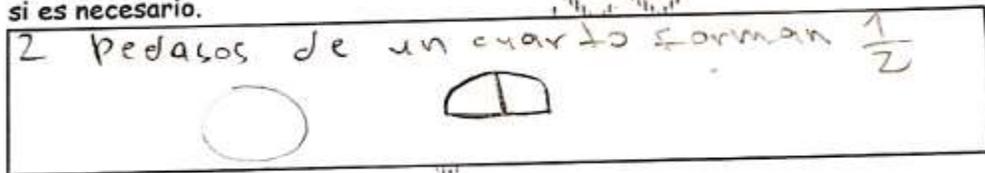
Figura 24

Relación parte-todo

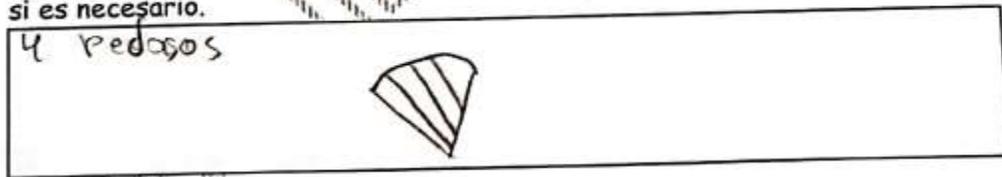
b) ¿Qué parte de la redonda es una corchea? Explique su respuesta con un dibujo si es necesario.



c) ¿Qué fracción de la blanca es una negra? Explique su respuesta con un dibujo si es necesario.



d) ¿Qué parte de negra es una semicorchea? Explique su respuesta con un dibujo si es necesario.



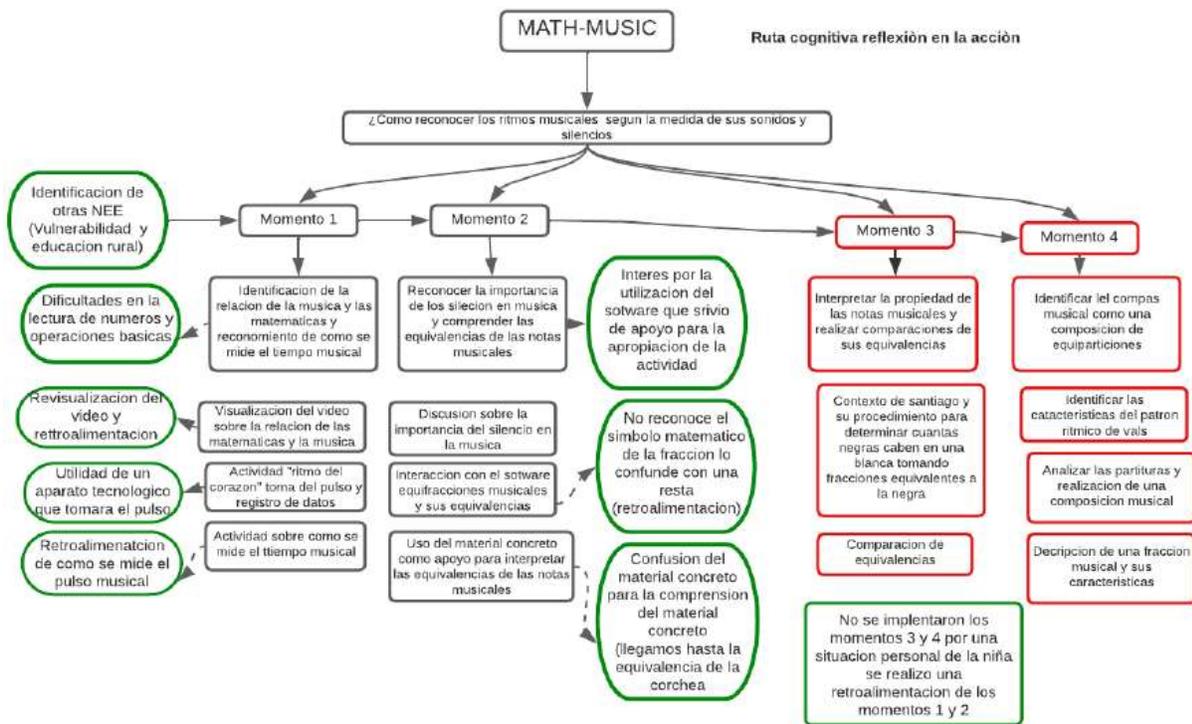
En el pilotaje Juana y Valentina (Díaz y Quintero, 2023), construyen una ruta cognitiva muy bien fundamentada, en la cual se puede apreciar lo planeado antes de la aplicación del diseño y en color rojo lo que sucedió después. Ellas no lograron aplicar los momentos 3 y 4 del diseño.

Sin embargo, en los momentos trabajados encontraron que el estudiante presentaba deficiencias en cuanto a conocimientos previos, lo cual podría ser por el contexto rural en el cual se encontraba el niño. Además, el estudiante necesitaba repetir los videos y retroalimentación constante para poder avanzar, cuando le preguntaron por ¿Quién tiene el latido de corazón más

rápido? La operación que realizó fue una resta pues pensó que la línea de la fracción tenía el mismo significado del símbolo de la sustracción. Sumado a esto, el software le despertó gran interés, pero el material concreto le generó confusión. Debido a que no se logró concluir la aplicación del diseño, se desconoce si en el proceso hubiese sido posible superar lo ocurrido en los primeros momentos.

Figura 25

Ruta cognitiva de Juana y Valentina



En el caso de Isabel y Macarena fue posible trabajar los cuatro momentos del diseño, en la **Figura 26** es posible apreciar sucedió algo similar a lo reportado por Juana y Valentina, al momento de realizar la operación que indica la fracción. que el estudiante interpreta la fracción como cociente. Pues en la descripción del razonamiento el estudiante manifiesta que hizo una

“resta” y en el recuadro de azul se nota que el algoritmo es similar al de la resta y la respuesta no es correcta.

Figura 26

Fracción como cociente

3) Recuerda que la redonda es la figura de mayor duración, suponga que en una canción la redonda dura 16 segundos y con base en ello responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánta dura la blanca?

Razonamiento: 12 segundos, porque si es la mitad va a durar menos segundos.

Respuesta: Porque hice una resta y va a ser si me da el resultado.

b) ¿Cuánto dura la negra?

Razonamiento: 0,70

Respuesta: Porque hice una resta

Por otro lado, lo reportado en el pilotaje sobre el desarrollo del momento 4, en el caso de Isabel y Macarena que lograron aplicar el diseño en su totalidad, da cuenta de que la secuencia por medio de la identificación del ritmo permitió al estudiante dar significado a la equipartición en un contexto práctico y significativo. Entendiendo que el no cumplimiento del reparto equitativo generaría un ritmo inconsistente que en palabras de la estudiante “se escucharía muy raro” (Osorio, 2023, ver *Figura 27*).

Figura 27

Reconocimiento de la equipartición en el compás musical

a) ¿Qué pasa con el ritmo de Vals si en un compás colocamos o quitamos un tiempo?
 se escucharia muy raro.

En la **Figura 28** se puede apreciar una partitura diseñada por el estudiante. En la cual, se esperaba que realizará un reparto equitativo en cada grupo, entendiendo la duración de la unidad relativa que estaba determinada por el indicativa de compás. Además, comprendiera los diferentes significados de la fracción e hiciera uso de estos.

Figura 28

Composiciones musicales



En el pilotaje y la valoración por rubrica, se obtuvo retroalimentación positiva en cuanto a aspectos didácticos y epistemológicos de la fracción. Sin embargo, la metodología de aplicación de los pilotajes no ofrece resultados completos, pues no se logró un trabajo entre pares, en el cual se esperaba privilegiar el proceso de comunicación, mediante discusiones que favorecieran el proceso de enseñanza. Por ejemplo, no fue posible realizar la actividad de la dramatización.

5.2.3. Reflexiones sobre Aspectos Didácticos y Epistemológicos De La Fracción

En el pilotaje se aprecia que, mediante la percepción auditiva, corporal, la manipulación de material concreto y los gráficos, el estudiante logra identificar diferentes significados de la fracción. Sin embargo, se reconoce que faltó precisar en el caso de la fracción como parte todo, la relevancia de un contexto continuo o discreto.

Por otro lado, en base al pilotaje, es posible destacar el aprendizaje progresivo del estudiante y de manera casi autónoma en el desarrollo de las actividades, totalmente involucrado en el desarrollo de las tareas.

5.3. Principios Rectores Del DUA y Potencial De La Música Para Promoverlos

En esta categoría se presenta el análisis sobre cómo el contexto musical promueve los principios y pautas del DUA, mediante un estudio acerca de la flexibilidad y accesibilidad del diseño planteado. Lo cual se evidencia en la medida en que se da cumplimiento a los principios y pautas del enfoque DUA, a fin de garantizar el pleno desarrollo y la participación de todos los estudiantes con pares de la misma edad. Ofreciendo diferentes alternativas, métodos, apoyos y oportunidades que potencien las capacidades y permitan el desarrollo progresivo del objeto matemático de estudio.

El enfoque DUA se rige por tres principios, los cuales están asociados a unas pautas que orientan su aplicación, lo cual tiene el objetivo de que todos los estudiantes tengan derecho y acceso a una educación de calidad en principios de equidad y justicia. A continuación, se presenta un análisis de los resultados arrojados por la rúbrica en cuanto al cumplimiento de cada principio y lo percibido durante el pilotaje.

5.3.1. Valoración Por Rúbrica De Los Principios y Pautas DUA

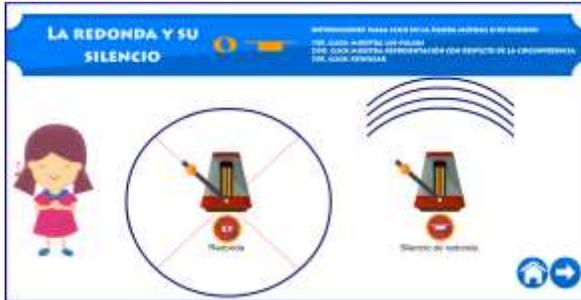
El primer principio DUA se fundamenta en que todos los estudiantes son diferentes en la manera en que perciben, comprenden y procesan la información, razón por la cual es necesario proporcionar múltiples formas y opciones para la representación del objeto matemático de estudio, con el fin de favorecer la percepción, participación y acción de todos. Del mismo modo, se tiene en cuenta que “para tener acceso al conocimiento matemático es necesario que los objetos sean representados de diversas formas” (Duval citado en Hernández et al. 2017, p. 5).

Es por ello que, desde el diseño propuesto, se facilitan diversas formas de representación de la información. Ofreciendo distintas alternativas para la información presentada de manera visual o auditiva, diferentes opciones para la comprensión e ilustración a través de múltiples medios para el lenguaje y los símbolos. Lo que corresponden con el principio I y que se describe a continuación.

5.3.1.1. Principio I: Proporcionar Múltiples Formas De Representación. Como consecuencia del contexto musical, en el diseño presentado prevalece la información auditiva. No obstante, se proporcionan diagramas visuales (ver Figura 29) y se integra la manipulación de objetos, para favorecer a aquellos estudiantes con dificultades de percepción auditivas. Con el fin de garantizar que todos los estudiantes puedan interactuar con el contenido, en concordancia con la pauta 1: proporcionar diferentes opciones para percibir la información.

Figura 29

Representación de la figura redonda en el software equifracciones



En la figura 20 se puede observar que con ayuda del software equifracciones, al presentar las figuras musicales se ofrece una representación sonora, geométrica y algebraica, pues en el software es posible percibir un sonido mientras van apareciendo los radios de la circunferencia y la marcación regulada de los golpes del pulso. Con esto, se presenta la información a través de dos medios diferentes, los cuales no son suficientemente óptimos para todos, pero se garantiza que aquellos estudiantes con dificultades auditivas logren interactuar con el contenido.

Además, los videos Donal en la tierra mágica de las matemáticas y la música del silencio, son recursos audiovisuales que tienen como objeto fortalecer, enriquecer y hacer síntesis de información, con la finalidad de guiar y favorecer en el estudiante el procesamiento de información.

Ahora bien, con actividades como la de toma del pulso y manipulación de material concreto, se favorecen los estudiantes con capacidades sensoriales, pues podrán explorar y descubrir el conocimiento mediante el ensayo error, crear conjeturas y comprobarlas mediante actividades de comparación. En un tránsito de lo concreto y pictórico hacía lo simbólico de manera

progresiva. Con esto, se proporciona un medio adicional para que el estudiante acceda a la información.

El enfoque DUA establece que el lenguaje puede constituir una barrera para acceder al aprendizaje, pues si el estudiante no logra interpretar la información no podrá construir conocimientos. En este sentido, en el libro de trabajo para el estudiante se describen las actividades bajo un lenguaje natural, se resaltan de manera repetitiva las ideas clave y se guía de manera progresiva la consolidación de un lenguaje técnico formal, mediante curiosidades matemusicales. Esto en cumplimiento de la pauta 2: *proporcionar múltiples opciones para el lenguaje, las expresiones matemáticas y los símbolos.*

Con tal fin, los contenidos aparecen relacionados entre sí y de manera progresiva, con diferentes actividades y discusiones que promueven la comunicación, la modelación, la ejercitación de procedimientos y el trabajo colaborativo, favoreciendo la retroalimentación entre pares, mediante un lenguaje próximo al estudiante. Por ejemplo, en el momento cuatro se pide al estudiante evaluar las composiciones de sus compañeros, asumiendo un rol activo en la construcción del aprendizaje, en la cual debe incluir de forma integrada los conocimientos y fortalecer su propio proceso de aprendizaje a través de experiencias significativas dando significado a los contenidos en un contexto funcional, en concordancia con la pauta 3: *proporcionar opciones para la comprensión.*

Figura 30*Valoración por rúbrica del principio I*

Indicador	P4				
	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona diferentes opciones para percepción.					X
Pauta 2. Proporciona múltiples opciones para el lenguaje, las expresiones matemáticas y simbólicas				X	
Pauta 3. Proporciona opciones para la comprensión				X	

El cumplimiento de cada una de las pautas del principio I se refleja en los resultados de la rúbrica de valoración, la cual se expone en la **Figura 30** y muestra una valoración positiva respecto a la pauta 1. Sin embargo, las pautas 2 y 3 se pueden mejorar.

5.3.1.2. Principio II: Proporcionar Múltiples Formas De Expresión. El principio II hace referencia a las formas de acción y expresión que tiene el estudiante para expresar y comunicar, las cuales son de vital importancia, ya que en ellas se refleja el cómo del aprendizaje. Esto se favorece mediante la oferta de diversas formas para interactuar con la información y diferentes herramientas metodológicas para la ejecución de tareas. Atendiendo lo anterior, en el diseño el estudiante podrá realizar producciones escritas, verbales, gráficas, algebraicas o dibujos, representaciones con material concreto y demás variaciones propuestas a lo largo de la secuencia didáctica para 1: proporcionar opciones para la interacción física y 2: opciones para la expresión y la comunicación.

Con el objetivo de que el estudiante interprete la fracción en diversos contextos, es pertinente ofrecer al estudiante diversos tutores, retroalimentación y no solo la mediación del

docente. Lo cual se promueve en el diseño mediante el trabajo colaborativo y la retroalimentación entre pares. Por ejemplo, en el momento tres del diseño los estudiantes podrán realizar una dramatización en la que deberán justificar de acuerdo con la comprensión sobre los diferentes significados de la fracción que comprenden y hacer uso de la noción de equipartición.

Además, con la exposición en el momento cuatro podrán socializar sus ideas ante la clase, expresándose de manera libre y apoyados en los recursos que más le favorezca según sus intereses. Lo que corresponde con 3: *proporcionar opciones para las funciones ejecutivas*. Con estas actividades el docente puede ofrecer retroalimentación formativa, para reafirmar, verificar y encaminar la construcción de los aprendizajes y el mismo estudiante podrá comprobar su progreso en el aprendizaje.

Figura 31

Valoración por rúbrica del principio II

Indicador	P4				
	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona opciones para la interacción física.					X
Pauta 2. Proporciona opciones para la expresión y la comunicación.					X
Pauta 3. Proporciona opciones para las funciones ejecutivas.				X	

En la **Figura 31** es posible apreciar la valoración por rúbrica respecto al cumplimiento de las pautas que corresponden y orientan el cumplimiento del principio 2 del enfoque DUA.

5.3.1.3. Principio III: Proporcionar Múltiples Formas De Implicación. El principio III hace referencia a los estados emocionales y las redes afectivas internas que deben ser activados para que ocurra el aprendizaje, tales como la motivación, el interés, la atención y la curiosidad. Para tal fin, el contexto musical se muestra interesante, relevante, autentico y apropiado para cualquier edad y cultura, además, 1: proporciona opciones para captar el interés.

Los estudiantes difieren notablemente en los modos en que pueden ser implicados, es por ello que se ofrecen diversas actividades, entre ellas videos, manipulación de material concreto e interacción con el software, buscando 2: *proporcionar opciones para mantener el esfuerzo y la persistencia*, pues lograr el desarrollo de la noción de fracción requiere total atención del estudiante, esfuerzos continuos y el reconocimiento del avance en el proceso. Con esto, también se promueve la autonomía y capacidad de autorregulación, en concordancia con 3: *proporcionar opciones para la auto-regulación*.

Figura 32

Valoración por rúbrica del principio III

Indicador	P4				
	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona opciones para captar el interés					X
Pauta 2. Proporciona opciones para mantener el esfuerzo y la persistencia.				X	
Pauta 3. Proporciona opciones para la autorregulación.				X	

En la **Figura 32** se muestra la valoración respecto al cumplimiento de las pautas del principio III del enfoque DUA, en la cual se evidencian resultados positivos que dan al diseño el calificativo de incluyente.

5.3.2. Reflexiones Acerca De Lo Percibido En El Pilotaje sobre Los Principios DUA

Los estudiantes que participaron en la aplicación de los pilotajes, caracterizados con TDAH y en el caso de Isabel TDAH, miopía y astigmatismo lograron avanzar en el desarrollo de las actividades. Macarena afirma que “la estudiante descubrió durante la actividad que había una forma de establecer unidades de medida a partir de pulsos” (Osorio, 2023, p. 26), lo cual sucedió en el primer momento del diseño.

Posteriormente, afirma que “se establece entre ellos una relación fraccionaria, siendo la redonda como lo menciona la actividad como unidad y los demás como partes de ella” (Osorio, 2023, p. 26). Es decir, el estudiante logra comprender en las figuras musicales que, cada una de ellas se construye a partir de la redonda, la cual es la de mayor duración y cada una de las siguiente corresponden a partes de esta.

Además, Macarena e Isabel resaltan en su informe que “durante las sesiones que se retomaban los conceptos aprendidos hasta ahora y los visto en cada sesión” (Osorio, 2023, p. 26). Afirmando que con las actividades propuestas era fácil para el estudiante recordar lo visto en las sesiones anteriores, optimizando el tiempo de aplicación, demostrando que mediante una caracterización y adaptación es posible que el estudiante desarrolle el objeto matemático de estudio.

Una adaptación que realizó Isabel fue recurrir al método pomodoro, el cual consistía en trabajar durante 20 minutos, seguidos por un descanso de 5 minutos. Sin embargo, ella notó que

al estudiante le gustaba durante el descanso ver videos, por tal razón, aprovechó los minutos del descanso para proyectar videos relacionados con el objeto de estudio.

Lo reportado en los tres pilotajes da cuenta de un progreso significativo en la interpretación de la fracción en diversos contextos por parte de los estudiantes. Lo cual muestra que es posible favorecer la enseñanza de las fracciones y la atención a la diversidad, mediante un diseño didáctico que cumpla con las pautas y principios DUA, considerando el desarrollo natural del objeto de estudio en un contexto significativo.

6. Conclusiones

En el presente capítulo se redacta a modo de respuesta de la pregunta de investigación ¿Cómo un diseño didáctico sobre fracciones para estudiantes de quinto grado, en el que se utiliza la música como contexto posibilita atender la diversidad en el aula?

El contexto musical es altamente atractivo para captar la atención del estudiante y motivarlo. En adición a esto, se favorece la apropiación de conceptos claves como lo son unidad relativa, entendida como el tiempo de duración marcado por el metrónomo, lo cual determina la velocidad con la que será ejecutada una obra musical. Además, la equipartición es privilegiada por el contexto musical pues ofrece opciones de comprobación del reparto equitativo, mediante la percepción del ritmo.

El diseño didáctico hizo uso apropiado de los aspectos didácticos y epistemológicos de la fracción, posibilitando que el estudiante interprete las fracciones en contextos de situaciones de medición, relación parte-todo, cociente, operador y razón en la medida de los sonidos y silencios presentes en la música.

La articulación entre los principios y pautas DUA con el contexto musical, fueron valorados positivamente en el diseño planteado puesto que permite que el ritmo musical se perciba de manera natural por parte de los estudiantes, mediante las múltiples formas de representación, acción, expresión e implicación.

La secuencia planteada es una adopción de la propuesta realizada por Sepúlveda et al. (2017), en este caso considerando su aplicación en un ambiente de atención a la diversidad. Así mismo, desde la posición de quien escribe el presente documento se plantea para estudios posteriores continuar la enseñanza de las operaciones aritméticas entre fracciones desde el contexto musical, pues es un contexto sumamente significativo que favorece estados internos del estudiante que deben ser activados para que ocurra el aprendizaje, como lo es la motivación, atención y curiosidad. Esto teniendo en cuenta que en el diseño presentado se abordaron conceptos fundamentales para la interpretación de la fracción en diversos contextos.

En el diseño presentado el rol docente es fundamental para el buen desarrollo de las actividades, puesto que debe tener participación activa y tomar decisiones en caso de que el diseño necesite ser adaptado, orientar el buen manejo del material concreto y la interacción con el software. A fin de guiar progresivamente al estudiante hacia la comprensión del objeto matemático de estudio.

A partir de lo reportado en la valoración por rubrica y lo ocurrido en los pilotajes realizados, se realizó ajustes en cuanto a forma de presentación, con el fin de facilitar al estudiante la interacción con el material y favorecer la comprensión de los contenidos.

Como cierre de este documento quiero expresar una reflexión personal como próximo graduado de licenciatura en matemáticas: el trabajo de grado que realice me sensibilizó frente a la

atención a la diferencia, sobre la importancia de reflexionar permanente sobre mi práctica como docente, reconociendo que en las clases de matemáticas deberé atender a todos los estudiantes según sus ritmos y diferencias de aprendizaje, para disminuir en ellos sentimientos de frustración, que los pueda llevar a la deserción y exclusión educativa.

Referencias bibliográficas

- Academia de Baile. (9 de junio del 2011). *Vals: Paso básico en pareja (8/11) - Academia de Baile*. [video]. You tube. <https://www.youtube.com/watch?v=rhmwBIuJp70&t=30s>
- Acuña, E. D., Oteiza, M., & Rodríguez, C., (2012). Implementación de estrategias para la atención de la diversidad de estilos de aprendizajes en el contenido de fracciones en el subsector de matemáticas para el 4° año básico A de la escuela La Frontera de la comuna de Cerro Navia. [Tesis doctoral]. UCINF. Chile.
- Ainscow, M. (2019). Documento de discusión preparado para el Foro Internacional sobre Inclusión y Equidad en la Educación “Todas y todos los estudiantes cuentan”, 25 años después de la Declaración de Salamanca de la UNESCO. Crear sistemas educativos inclusivos y equitativos. Documento de discusión. Colombia.
- Alex, I. y Romero, L. (2016). Matemáticas para maestros de Educación Primaria. Ediciones Pirámide.
- Alsina, Á., & Franco, J. (2020). Promoviendo la educación matemática inclusiva desde el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: el caso de las fracciones. *APeDuC Revista-Investigação e Práticas em Educação em Ciências, Matemática e Tecnologia*, 1(2), 13-29.
- Arenas, J. y Rodríguez, F. (2021). Enseñanza y aprendizaje del concepto fracción en la educación primaria: estado del arte. *Cultura, Educación y Sociedad*, 12(2), p. 49-64. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.17981/cultedusoc.12.2.2021.03>

- Arnaiz, P. (1997). Integración y segregación, inclusión. 10 años de integración en España: Análisis de la realidad y perspectivas de futuro. *Actas de Científica Anual de para (AEDES)*. Murcia: Servicio de Publicaciones (p. 313-354).
- Arnáiz, P. (2004). Fundamento y principios de la educación inclusiva. *Actas de las jornadas de cooperación educativa con Iberoamérica sobre educación especial e inclusión educativa* (p. 25-43).
- Ávila, A. (2019). Significados, representaciones y lenguaje: las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria. *Educación Matemática*, 31(2), p. 22–60. Disponible en: <https://doi.org/10.24844/em3102.02>
- Bautista, V. y Rodríguez, F. (2012). Argumentos históricos y la enseñanza de las fracciones. En: L. Sosa., E. Aparicio., & F. Rodríguez (Eds.) *Memoria de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (p. 138–143). Ciudad de México: Red Cimates. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/16525/1/Bautista2012Argumentos.pdf>
- Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. (1983). Rational number concept. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes*, p. 91-126. New York: Academy Press.
- Bonilla, J. (2018). Desarrollo del pensamiento numérico (números fraccionarios) a través de la implementación de material didáctico y aplicaciones virtuales en grado quinto. [Tesis de maestría]. Universidad del Cauca, Colombia.
- Brousseau, G. (2007). Introduction to study the theory of didactic situations: Didactic. *Didactic to Algebra Study* (Vol. 7). Libros del Zorzal.

- Calvo, G. (2013). La formación de docentes para la inclusión educativa. *Páginas de Educación*, 6(1), p. 19-35.
- Cedillo, J. (2016). El concepto de equivalencia de fracciones en la educación primaria mexicana entre 1960 y 2011. [Tesis de Maestría]. Universidad pedagógica nacional, México.
- Compás. Adaptado de thinglink. [Fotografía] por Marta, (2015). <https://www.thinglink.com/scene/631520117754167296>
- Conde, A. (2009). Las fracciones al ritmo de la música. [Tesis de Maestría]. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México DF, México.
- Conde, A. (2013). La unidad relativa como vínculo cognitivo entre el tiempo musical y las fracciones. 2013. [Tesis de Doctorado en Matemática Educativa]. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México DF.
- Conde, A., Parada, S., & Liern, V. (2016). Estudio de fracciones en contextos sonoros. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*.
- Congreso de la República de Colombia. (2022). Ley 2216 de 2022.
- Congreso de la República de Colombia. (8 de febrero de 1994). Ley General de Educación. [Ley 115 de 1994]. DO: 41.214.
- Constitución Política de Colombia [Const]. Art. 13, 44 y 67. 7 de julio de 1991. Colombia.
- Cortina, J., Zúñiga, C., y Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación matemática*, 7-29.

Decreto 1421 de 2017 [Ministerio de Educación Nacional]. Por el cual se reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad. Agosto 29 de 2017.

Díaz, J. y Quintero, C. (2023). Reflexión antes, durante y después de la implementación de la guía mathmusic para quinto grado en niños con TDA-H. Documento interno del proyecto 70783.

Díaz, L., y Salazar, M. (2009). La actividad de medir aporta significados a fracciones y razones.

Díaz-Barriga, F., Lule, M., Rojas, S., y Saad, S., 1990). Metodología de diseño curricular para la educación superior. México: trillas.

Duque, P., Quiroz, S., y Suárez, M. (2017). La noción de fracción en los libros de texto del grado tercero: un estudio de análisis de contenido (Tesis de Maestría en Educación Matemática- Universidad de Medellín). Recuperado de: <http://hdl.handle.net/11407/3500>

Fandiño, I. (2009). Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos. Bogotá: Magisterio. [Prefacios de Athanasios Gagatsis y, de la edición en idioma español, de Carlos Eduardo Vasco Uribe]. isbn: 978-958-20-0970-0.

Fazio, L., y Siegler, R. (2011). Enseñanza de las fracciones. Academia internacional de educación.

Ferro, J., y Montaña, C. (2017). Una secuencia didáctica con material manipulativo para la enseñanza de fracciones heterogéneas en grado quinto de educación básica. [Tesis de pregrado]. Universidad del Valle.

- Figueroa, I. y Muñoz, Y. (2014). La Guía para la Inclusión Educativa como herramienta de autoevaluación Institucional: Reporte de una Experiencia. *Revista Latinoamericana de Inclusión Educativa*, 8(2), p. 179-198.
- Freudenthal, H., (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados*. México: CINVESTAV, 2001.
- García, I., y Cabañas, G. (2012). Estudiando la comprensión del concepto de fracción en situaciones de medición, división y en la relación parte-todo. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/16553/1/Garcia2012Estudiando.pdf>
- Hegarty S. (1994) *Educación de niños y jóvenes con discapacidades*. UNESCO
- Hurtado, L. y Agudelo, M. (2016). Inclusión educativa de las personas con discapacidad en Colombia. *CES Movimiento y Salud*,. 2(1), p. 45-55
- Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers; en Lesh, R. (ed); *Number and measurement: Papers from a research workshop*: ERIC/SMEAC
- Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instruccional foundations of rational numbers. In R. Lesh (ed.) *Number and measurement*, p. 101-144. Columbus: ERIC-SMEAC.
- Kieren, T. (1983). La partición, la equivalencia y la construcción de ideas relacionadas con los numeros racionales. *Proceeding of Fourth International Congress on Math Education*.
- Liern, V. (2008). Las fracciones de la Música. *Revista Suma*, 59, p. 129-134.

- Liern, V. (2011). Música y Matemáticas en educación primaria. *Suma. Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 66, 107-112.
- López, J. A. (2013). El aprendizaje del concepto de fracción, desde la perspectiva histórico cultural: un camino [Tesis de maestría]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. Disponible en <https://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/7039>
- Martínez, A. (2019). Juego y trayectorias de aprendizaje de la aritmética inicial en ambientes de aprendizaje que incluyen estudiantes en situación de discapacidad intelectual. [Tesis de maestría en educación matemática]. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Martínez, F. (2018). Dificultades en la enseñanza de las fracciones de educación básica: una mirada desde los organizadores del currículo y el análisis didáctico en la perspectiva de la formación de profesores. Universidad del Valle. <http://hdl.handle.net/10893/14880>
- Ministerio de Educación Nacional (2016). Derechos básicos de aprendizaje. Bogotá: Panamericana Formas e Impresas S.A.
- Ministerio de Educación Nacional. (2003). Estándares Curriculares para matemáticas. Bogotá: MEN: Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional. (2017). Por el cual reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad. [Decreto 1421 de 2017].
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares del área de Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

- Murillo, M. y Hernández, Y. (2017). Propuesta experimental didáctica para la enseñanza de las fracciones relación parte todo en el grado tercero de una institución educativa rural. Universidad del Valle. <http://hdl.handle.net/10893/19386>
- Niño, A., & Raad, Y. (2018). Interpretación de la Fracción como Relación Parte-Todo en Contextos Continuos y Discretos, a Partir de la Implementación de una Secuencia Didáctica que Privilegia la Competencia Comunicativa. [Tesis de maestría inédita]. Pontificia Universidad Javeriana.
- Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. Revista Ema, p. 157-182.
- Obando, G., Vásquez, N., Vanegas, M., (2006). Modulo 1. Pensamientos Numéricos y Sistemas Numéricos. Secretaría De Educación De Antioquia. Medellín Colombia.
- Omar Zúñiga Leura. [EnMus Enseñanza musical] (18 de junio del 2020). El pulso musical. [video]. You tube. <https://www.youtube.com/watch?v=ji-XbGcT4bg>
- ONU (1948). Declaración Universal de los Derechos Humanos. United Nations. NR004682.pdf (un.org)
- ONU. (1948). Declaración Universal de los Derechos Humanos. United Nations. NR004682.pdf (un.org)
- Organización de las Naciones Unidas [ONU], (2016). Comentario General N° 4 /2016 de 2 de septiembre.
- Ortiz, M. (2023). Adaptaciones curriculares para la enseñanza del concepto de fracción a un estudiante con TDAH y discapacidad visual. Documento interno del proyecto 70783.

- Osorio, K. (2023). La noción de equipartición en un niño/a con tdah. Documento interno del proyecto 70783.
- Parada, S. (2021). Educación Matemática Inclusiva. [video]. YouTube - AsoVEMat.
<https://www.youtube.com/watch?v=G48yc931fVI>
- Parada, S. (2022). Educadores matemáticos que reflexionan sobre la atención a la diversidad en el aula. Conferencia presentada en el Foro EMAD 2022. Transmitida el 15 de noviembre.
<https://www.youtube.com/watch?v=mhGg9HbeSro>
- Pastor, C., Sánchez, J., & Zubillaga, A. (2014). Diseño Universal para el aprendizaje (DUA). Recuperado de: http://www.educadua.es/doc/dua/dua_pautas_intro_cv.pdf.
- Pentagrama. Adaptado de adrifersa. [Fotografía]. <https://adrifersa.com/teoria-musical/las-notas-musicales-y-el-pentagrama/pentagrama-4/>
- Perera, P. y Valdemoros, M. (2009). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación Matemática*, 21(1), p. 29–61. Disponible en: <http://somidem.com.mx/revista/vol21-1/>
- Pipalupa. (31 de julio de 2015). La música de Silencio | Musicalia |Pipalupa. [Video]. You tube.
<https://www.youtube.com/watch?v=-bv1FyeAD2E>
- Ramírez, Á. (2017). La inclusión: una historia de exclusión en el proceso de enseñanza aprendizaje. *Cuadernos de Lingüística Hispánica*, (30), p. 211–230.
<https://doi.org/10.19053/0121053X.n30.0.6195>

- Ramírez, E. (2016). Las prácticas pedagógicas de los maestros y maestras de educación básica primaria que apuntan a la inclusión de estudiantes en situación de discapacidad en el municipio de Arboletes. [Tesis de maestría inédita]. Universidad Pontificia Bolivariana.
- Sánchez, J., y Ursini, S. (2010). Actitudes hacia las matemáticas y matemáticas con tecnología: estudios de género con estudiantes de secundaria. RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 13(4), p. 303-318.
- Secretaría de Educación del Distrito. (2021). Flexibilización curricular: una ruta para crear oportunidades de aprendizaje en el marco de la transformación pedagógica. Volumen 1.
- Segovia, I., & Rico, L. (2016). Matemáticas para maestros de Educación Primaria. Ediciones Pirámide.
- Sepúlveda, G., Ayala, M., & Montoya, L. (2017). La noción de equipartición a través de objetos musicales. [Tesis de Maestría en Educación Matemática]. Universidad de Medellín.
- UNESCO (1990). Declaración mundial sobre la educación para todos, UNESCO, Jomtien, Tailandia. Recuperado de http://www.unesco.org/education/pdf/JOMTIE_S.PDF
- UNESCO (1994). Declaración de salamanca marco de acción para las necesidades educativas especiales. Conferencia mundial sobre necesidades educativas especiales: acceso y calidad.
- UNESCO (2000). Informe final del Foro Mundial de la Educación en Dakar, Dakar, Senegal.
- UNESCO (2015). La Educación para Todos 2000-2015: Logros y Desafíos
- UNESCO, S. L. (2010). Declaración Universal de la UNESCO sobre la diversidad cultural.
- Walt Disney. [juanmanuelromero79] (28 de julio de 2017). *Donald en el país de las matemáticas*. [video]. You tube. <https://www.youtube.com/watch?v=H5tOVFDIXPc>

Anexos
Anexo 1. Malla Diseño

Pregunta problematizadora	Nivel de profundidad 3	
	Propósitos	Descriptores
¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?	Pensamiento Numérico Interpreta las fracciones en contextos de situaciones de medición, relación parte-todo, cociente, operador y razón en la medida de los sonidos y silencios presentes en la música.	Comunicación Explica por medio del uso de distintas representaciones cómo está presente la fracción en la música. Interpreta la equipartición y las equivalencias en el contexto de la música, entendiendo la existencia de una unidad relativa, apoyado en el uso de material concreto y de herramientas computacionales.
		Razonamiento Interpreta la relación parte todo en la medida musical (de sonidos y silencios) y la representa por medio de fracciones, razones o cocientes. Argumenta y valida las relaciones entre los valores (según su medida) de las figuras musicales con ayuda de las diferentes representaciones dadas.
		Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos Construye fracciones equivalentes teniendo en cuenta las figuras musicales. Utiliza la fracción para establecer la duración de sonidos y silencios en el contexto musical.
		Modelación Identifica compases afectados y construye otros equivalentes apoyados en un proceso de equipartición. Construye modelos gráficos que permitan verificar el reparto equitativo en una partitura musical y la comparación de ritmos.

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Anexo 2. Diseño Para El Estudiante

Mathmusic

Quinto grado



¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Primer Momento

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

¡Matemáticas en la música!



1. Observe el vídeo "Donald en la tierra mágica de las Matemáticas" en el siguiente link: <https://www.youtube.com/watch?v=H5tOVFDIXPc>
 - a) Según lo observado en el video, haga un dibujo que represente, para usted, la relación entre las Matemáticas y la Música. Comparta su dibujo con los compañeros.

A large, empty rectangular box with a dashed orange border, intended for the student to draw their representation of the relationship between mathematics and music.

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

¡El ritmo del corazón!

2. Reúnase en parejas y siguiendo las indicaciones del profesor, mida el pulso de su compañero durante 2 minutos, y viceversa.

a) Complete la siguiente tabla con los datos obtenidos en la medición del pulso de su compañero y los suyos:

Nombre	Número de pulsaciones en reposo	Número de pulsaciones después de actividad física

b) ¿Qué siente al tomar el pulso?

c) ¿Cree que la distancia entre una pulsación y otra es igual? ¿Por qué?

d) ¿A qué cree que se debe el cambio en la velocidad de las pulsaciones que tomó anteriormente? Explique su respuesta

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

e) Explique con sus propias palabras en qué consiste el pulso.

¡Curiosidad matemática!

El tiempo musical hace referencia a la velocidad con la que suena una obra musical.

Se mide en bits (pulsaciones) sobre minuto BPM.

Por ejemplo, El tiempo musical del Himno Nacional de Colombia es de 120 pulsaciones por minuto. ($\frac{120}{1}$ BPM)



3. Suponga que el pulso de su compañero es una canción.

a) ¿Cuántas pulsaciones o bits dio el corazón durante los dos minutos?

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

b) De acuerdo con el punto anterior, complete la siguiente frase:

En los 2 minutos, mi compañero
_____ tuvo _____ pulsaciones.

Por tanto, el tiempo musical del latido del corazón de mi compañero es de $\frac{\quad}{2}$ BPM.

c) Socialicen el tiempo musical del latido de corazón de cada uno, y regístrelo a continuación.

Tiempo musical

Mío

De mi compañero

$\frac{\quad}{2}$ BPM

$\frac{\quad}{2}$ BPM

d) ¿Quién cree que tiene un latido de corazón más rápido, usted o su compañero?
¿Por qué?

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

- e) Halle los cocientes del tiempo musical del latido de corazón suyo y de su compañero.

Tiempo musical	
Mío	De mi compañero
$\frac{\quad}{2} = \underline{\quad} \text{BPM}$	$\frac{\quad}{2} = \underline{\quad} \text{BPM}$

- f) De acuerdo con el punto anterior, ¿Quién tiene un latido de corazón más rápido? ¿Por qué?

- g) ¿Cómo se pueden medir los sonidos en música? Realice un diagrama o dibujo que soporte su explicación.



Segundo Momento

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Los sonidos del silencio

<https://www.youtube.com/watch?v=-bv1FyeAD2E>



1. ¿Considera que los silencios hacen parte de la música? Justifique su respuesta.

a) Cree que al igual que los sonidos, ¿Los silencios pueden ser medidos en pulsaciones por minuto? Justifique su respuesta.

b) ¿Cómo podría ser representada la duración de los sonidos y silencios? Justifique su respuesta.

c) Realice un diagrama o dibujo en el que represente cómo podrían ser medida la duración de los sonidos y los silencios en la música.

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

¡Socialice las respuestas anteriores con sus compañeros!

1. Con apoyo del software "equifracciones musicales" realice las actividades de aplicación "midiendo sonidos" y conteste las siguientes preguntas:



- a) ¿Cuál es la figura con mayor duración de sonido? ¿Por qué?

- b) ¿Cuál es la figura con menor duración de sonido? ¿Por qué?

- c) ¿Cuál es su equivalencia respecto a la redonda?

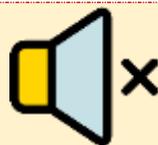
¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

d) ¿La equivalencia entre sonidos y silencios es igual en cada figura? Explique su respuesta.

e) Complete la siguiente tabla teniendo en cuenta lo observado en la animación virtual.

		
SÍMBOLO	NOMBRE	EQUIVALENCIA
	Redonda	
		$\frac{1}{2}$
	Negra	
		$\frac{1}{8}$
	Semicorchea	
		$\frac{1}{32}$
	Semifusa	

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?



SÍMBOLO	NOMBRE	EQUIVALENCIA
	Silencio de Redonda	
		$\frac{1}{2}$
	Silencio de Corchea	
	Silencio de Fusa	$\frac{1}{32}$

2. Con apoyo del software "equifracciones musicales" realice las actividades de aplicación de la sección "un juego de reglas" y conteste las siguientes preguntas:



- a). ¿Cuántas negras se necesitan para obtener una redonda (unidad)? Explique su respuesta.

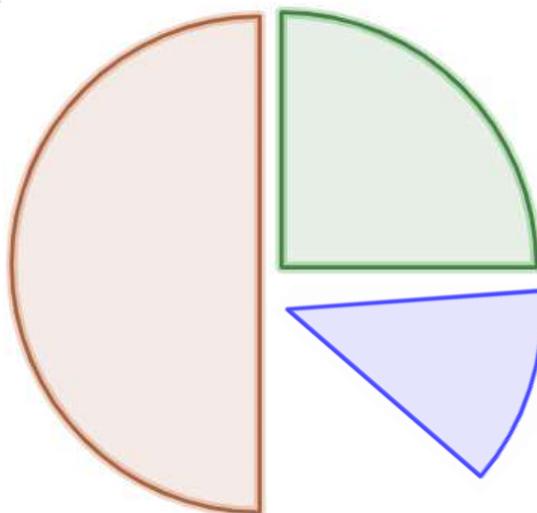
¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

b). ¿Cuántas redondas se necesitan para obtener una negra? Explique su respuesta.

c). ¿Qué pasaría si una de las negras que forman una redonda no tiene la misma duración de las demás?

¡Socialice las respuestas anteriores con sus compañeros!

3. Use las fichas de material concreto para completar lo siguiente.



¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

a). En grupos de tres personas comprueben el tamaño de las fichas según los colores y registre sus observaciones a continuación.

¡Socialice sus apreciaciones con el docente!

b). En el mismo grupo junte las piezas con las mismas características de color y tamaño ¿Qué figura se forma?

c). Discutan si es posible establecer una relación entre las fichas del material y las figuras musicales ¿Cómo?

d). De acuerdo con lo anterior complete la siguiente tabla:

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Ficha	Figura musical	Equivalencia

¡Discuta los resultados con sus compañeros!

PROPIEDAD

La armonía de la fracción

1) Con apoyo del material concreto responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo podríamos determinar qué fracción de la blanca es una negra? Discuta con sus compañeros sus ideas y regístrelas

b) Con ayuda del material concreto compruebe su razonamiento y describa lo que sucedió:

Santiago considera que el procedimiento consiste en buscar cuántas negras caben en una blanca. Para ello se toman fracciones equivalentes a la negra en el material concreto y se juntan hasta que llenen toda el área de la fracción de círculo equivalente a la blanca ¿Está de acuerdo con Santiago? ¿Por qué?

c) ¿Cuál es la relación entre la figura negra y la blanca? Justifique su respuesta

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

2) Con base en lo anterior responda los siguiente:

a) ¿Cuántas semifusas caben en una blanca? Explique su respuesta con un dibujo si es necesario.



b) ¿Qué parte de la redonda es una corchea? Explique su repuesta con un dibujo si es necesario.



c) ¿Qué fracción de la blanca es una negra? Explique su repuesta con un dibujo si es necesario.



d) ¿Qué parte de negra es una semicorchea? Explique su repuesta con un dibujo si es necesario.



¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

e) ¿Cuántas negras caben en una corchea? Explique su respuesta con un dibujo si es necesario.



f) ¿Cuántas corcheas caben en dos semifusas?



3) Recuerde que la redonda es la figura de mayor duración, suponga que en una canción la redonda dura 16 segundos y con base en ello responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto dura la blanca?

Razonamiento:

Respuesta:

b) ¿Cuánto dura la negra?

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Razonamiento:

Respuesta:

c) ¿Cuánto dura la corchea?

Razonamiento:

Respuesta:

d) ¿Cuánto dura la fusa?

Razonamiento:

Respuesta:

4) En grupos de tres estudiantes reflexionen sobre los siguientes interrogantes, luego realicen una dramatización donde muestren sus argumentos a los demás.

a) ¿Es posible formar una figura equivalente a la duración de la redonda usando diferentes figuras musicales? Justifique su respuesta con ejemplos.

b) ¿Qué pasa cuando una de las corcheas que forman una blanca dura más que las otras? Justifique su respuesta con ejemplos.

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

- c) Sabemos que en una redonda caben cuatro negras ¿qué pasaría si una de las negras tuviera menor duración que las demás? Justifique su respuesta con ejemplos.
- d) Escriba a continuación sus ideas para la dramatización



¡Es momento de actuar!

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Cuarto Momento

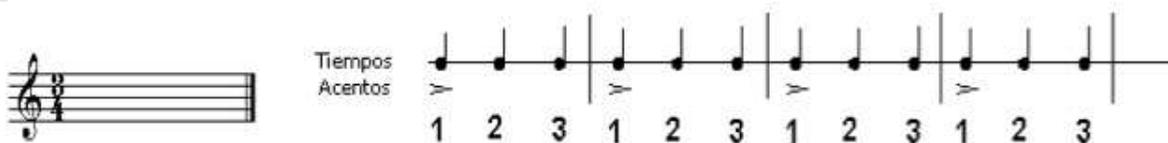
Al ritmo de la equipartición



- 1) Observe el video proyectado por el docente:
<https://www.youtube.com/watch?v=rhmwBIuJp70&t=30s>
- 2) Realice las actividades de aplicación de la sección "Patrones Rítmicos" del software "Equifracciones Musicales".



- 3) Identifique las características del patrón rítmico de vals y según lo observado en el software conteste las siguientes preguntas:



¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

a) ¿Qué pasa con el ritmo de Vals si en un compás colocamos o quitamos un tiempo?

b) ¿Cuál sería la percepción del ritmo? Explique su respuesta

c) ¿Cómo sería el baile de ese ritmo afectado? Explique su respuesta

d) ¿Cuáles serían las condiciones para garantizar un ritmo de Vals? Explique su respuesta

PROPIEDAD DEL PROYECTO 10783

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

¡Curiosidad matemática!

Una obra musical se divide en partes de igual duración, las cuales se denominan compases y cada uno de ellos está dividido en figuras de igual duración o equivalentes.

Es decir, para dar estructura al ritmo, éste se divide en agrupaciones de pulsaciones con igual duración, lo que es una composición de equiparticiones.

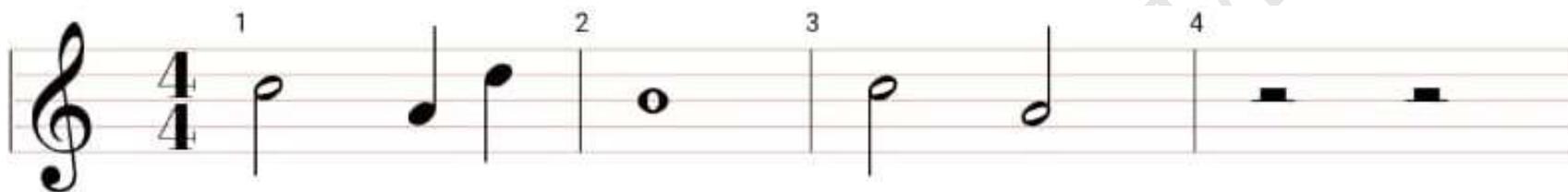


- 4) Utilizando el material concreto analice los compases de las siguientes partituras y verifica si están correctos. Tenga en cuenta el siguiente ejemplo:

Two musical staves are shown. The top staff is in 4/4 time and contains four measures: a whole note, a half note, a quarter note, and a quarter note. Above the staff are four circles representing the duration of each note: a green circle (whole), a circle split vertically into orange and grey (half), a circle split into four quadrants (orange, grey, blue, yellow) (quarter), and another circle split into four quadrants (orange, grey, blue, yellow) (quarter). The bottom staff is in 3/4 time and contains four measures: a quarter note, a quarter note, a quarter note, and a quarter note. Above the staff are four circles representing the duration of each note: a circle split into four quadrants (orange, grey, blue, yellow) (quarter), a circle split vertically into orange and grey (half), a circle split into four quadrants (orange, grey, blue, yellow) (quarter), and another circle split into four quadrants (orange, grey, blue, yellow) (quarter).

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

a. Correcto Incorrecto
¿Por qué?



b. Correcto Incorrecto
¿Por qué?



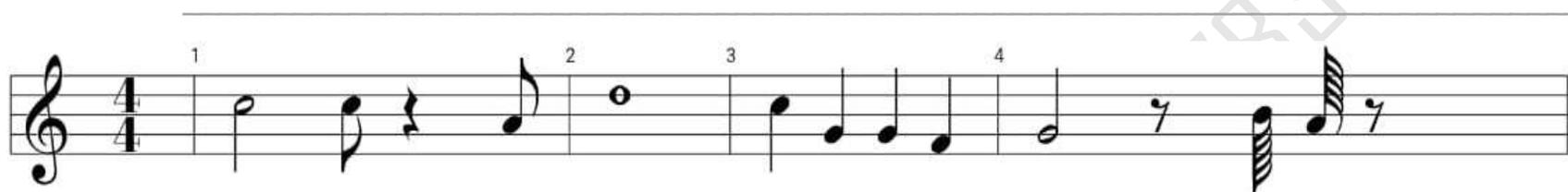
c. Correcto Incorrecto
¿Por qué?



d. Correcto Incorrecto

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

¿Por qué?



e. Correcto _____ Incorrecto _____

¿Por qué?



5) Según el punto anterior, ¿Cuál compás fue más difícil de evaluar? ¿Por qué?

6) ¿Cómo corregiría los compases incorrectos? Justifique su respuesta

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

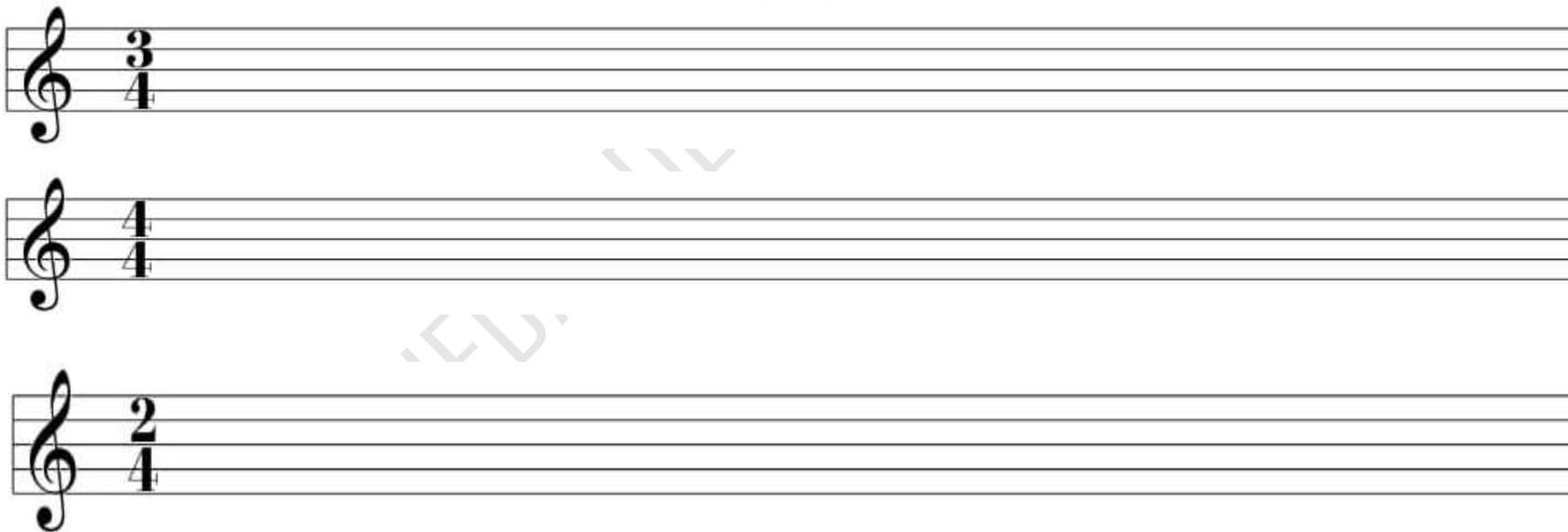
¡Curiosidad matemática!

En la fracción ubicada al inicio del compás, el numerador representa los pulsos en cada compás y la fracción $\frac{1}{n}$ indica la duración.

Por ejemplo: el compás: $\frac{3}{4} = 3 * \frac{1}{4}$

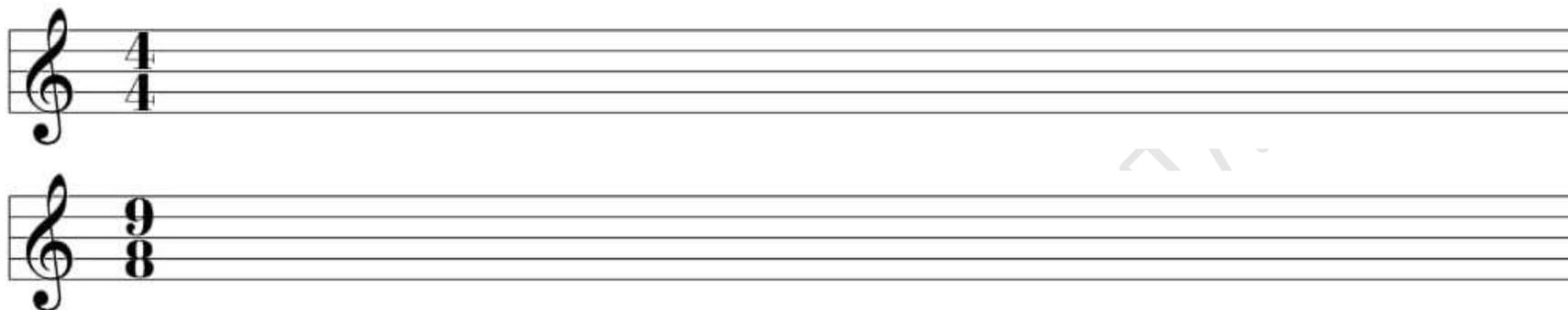
Donde 3 indica el número de pulsos por compás y $\frac{1}{4}$ hace referencia a la cuarta parte de duración de una redonda, es decir la figura negra.

7) Dado el indicativo de compás, cree su propia composición:



Three musical staves are shown, each with a treble clef and a time signature. The first staff has a 3/4 time signature, the second has a 4/4 time signature, and the third has a 2/4 time signature. The staves are empty, intended for a student to write a composition based on the given time signature.

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?



8) Comparta su composición con un compañero para que él verifique con el material concreto si esta correcta. En caso de haber compases incorrectos pídele que haga las respectivas correcciones en el siguiente espacio:

A large rectangular area enclosed by a dashed purple border, intended for corrections or feedback.

9) En grupos de tres compañeros prepare una exposición en la que describa qué es una fracción y sus principales características. Soporte su explicación con material concreto, un ejemplo, dibujos o lo que considere pertinente.

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Anexo 3. Orientaciones Docentes

Mathmusic

Quinto grado



¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Tabla 4

Descriptores y procesos

NIVEL TRES	
Propósitos	Descriptores
	Comunicación
	Explica por medio del uso de distintas representaciones, cómo está presente la fracción en la música.
	Interpreta la equipartición y las equivalencias en el contexto de la música, comprendiendo la existencia de la unidad relativa.
	Razonamiento
Pensamiento Numérico	Interpreta la relación <i>parte-todo</i> en la medida musical, de sonidos y silencios, y la representa por medio de fracciones, razones o cocientes.
Interpreta las fracciones en distintos contextos, a través de la medición de los sonidos y silencios en la música.	Argumenta y valida las relaciones entre los valores, según su medida, de las figuras musicales a través de distintas representaciones.
	Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos
	Construye fracciones equivalentes teniendo en cuenta las figuras musicales.
	Utiliza la fracción para establecer la duración de sonidos y silencios en el contexto musical.
	Modelación
	Identifica compases afectados y construye otros equivalentes, apoyado en un proceso de equipartición.
	Construye modelos gráficos que permitan verificar el reparto equitativo en una partitura musical y la comparación de ritmos.

Nota. En la tabla se presentan los descriptores y procesos que promueve el diseño en relación al pensamiento numérico.

Consideraciones Generales

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Se presenta un diseño flexible y adaptable en el que se aprovecha el potencial didáctico del contexto musical para favorecer la enseñanza de las fracciones y la inclusión de todos los estudiantes. El cual se sustenta normativamente en el decreto 1421 de 2017, que define la inclusión como un proceso que promueve el desarrollo, el aprendizaje y la participación de todos los estudiantes en ambientes de aprendizaje comunes, garantizando su acceso mediante los apoyos y ajustes razonables para atender la diversidad.

Para atender a la inclusión, en el diseño se tiene en cuenta los principios del Diseño Universal de Aprendizaje (DUA): *i). Proporcionar múltiples formas de representación; ii). Proporcionar múltiples formas de acción y expresión; y iii). Proporcionar múltiples formas de implicación.*

Además de ellos, se tiene en cuenta que dichas actividades deben captar la atención, despertar curiosidad y generar emoción, estados internos que, creemos en base a lo descrito por Mora (2013), es posible estimularlos con ayuda del contexto musical, el apoyo con material concreto y el uso de herramientas computacionales en un ambiente dinámico y variado para mantener la atención del estudiante e involucrarlo en el proceso de enseñanza.

En palabras de Conde (2013), el contexto musical permite al estudiante verificar la equipartición y entender la fracción como medida, en contraste con otras propuestas en las que se presenta la noción de fracción como la acción de partir y contar, situaciones que no permiten su desarrollo y pueden conducir a obstáculos didácticos (Conde et al, 2016).

Sumado a lo anterior, la vinculación del ambiente computacional y material concreto permite entrelazar las ideas matemáticas con la música y darles sustento, lo cual favorece en el

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

estudiante la construcción del significado de fracción en diferentes situaciones y darle sentido a la equipartición.

En este sentido, la secuencia didáctica que se presenta introduce la noción de fracción en función de la medida de sonidos y silencios en la música, atendiendo lo afirmado por Freudenthal (1983), quien considera que el contexto de medida favorece la construcción de la noción de fracción. Lo que concuerda con el desarrollo histórico y epistemológico, en el cual dicho concepto surge a partir de la necesidad de realizar repartos equitativos, medir longitudes, determinar áreas de terrenos y otras situaciones que describen un estado de las cosas y no pueden ser representadas por un número entero.

Por otro lado, Kieren (1976, 1983), definió la fracción como un constructo teórico que puede descomponerse en nociones más simples (subconstructos), los cuales son: *parte-todo*, *cociente*, *razón*, *medida* y *operador*. La relación parte todo hace referencia a un todo equipartido; la fracción como cociente indica el tamaño de cada parte, resultado que se determina al dividir un número natural entre otro diferente de cero; la fracción como razón es una comparación entre dos cantidades que pueden ser de igual o diferente magnitud; la fracción como medida está relacionada con procesos de comparación de cantidades de una misma magnitud, en la que se asigna un número a una cantidad de medida; y la fracción como operador, la cual hace referencia a tomar de un número la parte que la fracción nos indica. Base teórica en la cual se sustenta el diseño.

Asimismo, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) plantean que los significados de la fracción necesitan ser desarrollados para comprender el número racional, pues:

El paso del número natural al número racional implica la comprensión de las medidas en situaciones en donde la unidad de medida no está contenida un número exacto de

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

veces en la cantidad que se desea medir o en las que es necesario expresar una magnitud en relación con otras magnitudes (p. 59).

Además, los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) plantean que para grado tercero el estudiante debe comprender el uso de las fracciones para describir situaciones en las que la unidad se divide en partes iguales. Para grado cuarto debe interpretar la fracción como razón, relación parte todo, cociente y operador en diferentes contextos. Además, establecer las relaciones mayor que, menor que, igual que y otras multiplicativas entre números racionales, en sus formas de fracción o decimal, a través de diversas interpretaciones, recursos y representaciones (2016).

En consecuencia, se presentan recomendaciones didácticas, teóricas y metodológicas para la implementación del diseño didáctico, en el cual se plantea la pregunta problematizadora ¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios? Esto con el fin de atraer la atención del estudiante, fomentando la investigación y generando nuevos conocimientos para la clase.

Momento Uno

El primer momento del diseño denominado “matemáticas en la música” inicia con la presentación del video animado “Donald en la tierra mágica de las matemáticas” de Walt Disney⁶ en el cual, mediante una animación, se presenta la relación entre las Matemáticas y la

⁶ Walt Disney. [juanmanuelromero79] (28 de julio de 2017). Donald en el país de las matemáticas. [video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=H5tOVFDIXPc>

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Música, con un contenido histórico que pretende generar curiosidad en el estudiante y motivarlo a estudiar dicha relación.

Se sugiere al docente que, al finalizar el video, oriente a los estudiantes con preguntas guiadas, por ejemplo: ¿Qué fue lo que más le llamó la atención del video? ¿Cuál fue el aporte de Pitágoras a la música? ¿Por qué sin las matemáticas no podría haber música? Lo anterior, con el fin de destacar las características principales para que el estudiante logre establecer la relación entre las matemáticas y la música y represente dicha relación mediante un dibujo.

En el punto 2 de este mismo momento, subtítulo “el ritmo del corazón” se realiza un primer acercamiento a la noción de equipartición en un campo continuo, mediante el análisis de las características del pulso, implicando a los estudiantes con una actividad práctica de percepción corporal. Para esto, el profesor deberá formar parejas con la intención de que cada estudiante tome el pulso de su compañero, lo registre y luego intercambien. Para ello, el docente debe explicar muy bien cómo se toma el pulso y hacer varios ejemplos.

La toma del pulso es necesario realizarla durante dos minutos, esto con el fin de poder abordar las situaciones siguientes, pues en un tiempo de un minuto no tendrían sentido. Además, es indispensable tomar el pulso dos veces, una de ellas estando en reposo y la otra después de realizar actividad física o experimentar sensaciones de angustia, para que los estudiantes puedan experimentar la variación en la velocidad con la que aparecen las pulsaciones. Para esto, se sugiere al docente organizar las parejas, realizar la toma del pulso y registrarla en la tabla que se presenta a continuación, luego realizar carreras dentro del salón, tomar el pulso nuevamente y registrarlo como se sugiere en la tabla 2, la cual se encuentra en el cuadernillo para el estudiante.

Tabla 5

Registro de pulsaciones

Nombre	Número de pulsaciones en reposo	Número de pulsaciones después de actividad física
--------	---------------------------------	---

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Nota. En la tabla el estudiante podrá registrar los datos de la toma del pulso de él y su compañero.

Se sugiere al docente preguntar ¿Qué siente al tomar el pulso? ¿Cree que la distancia entre una pulsación y otra es igual? ¿A qué cree que se debe el cambio en la velocidad de las pulsaciones que tomó anteriormente? El docente podrá guiar el procesamiento de información, para que el estudiante identifique la variación en la velocidad de las pulsaciones y que a pesar de la velocidad con que aparecen, se mantiene una distancia igual entre las mismas. Se recomienda al profesor hacer un recorrido por los puestos de los estudiantes, para conocer las respuestas de los mismos y contribuir para enriquecerlas, a fin de que el estudiante logre comprender el pulso como unidad de medida.

Figura 1

Curiosidad matemusical

¡Curiosidad matemusical!

El tiempo musical hace referencia a la velocidad con la que suena una obra musical y es medido en pulsos por minuto (PPM).

Por ejemplo, el tiempo musical del Himno Nacional de Colombia es de 120 pulsaciones por minuto. (120/1 PPM)

Una vez socializadas las preguntas anteriores, se pide al estudiante que con sus propias palabras explique en qué consiste el pulso, con el objeto de que lo identifique como una relación de medida. A partir de esto, en el punto tres se introduce una curiosidad matemusical⁷, en la cual se vincula el pulso con la medida de los sonidos en la música, que al igual que los latidos del corazón, se mide en pulsaciones por minuto.

⁷ Una curiosidad matemusical es una explicación de un concepto relevante en la música, para orientar las actividades posteriores.

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Con base en esta información, se espera que el estudiante tenga un primer acercamiento a lo que es la medida de los sonidos en la música, se sugiere al docente contribuir con una explicación más detallada. Para tal finalidad, se recomienda definir el metrónomo⁸ el cual es un aparato utilizado para indicar las pulsaciones en una obra musical.

Para esto, el docente puede apoyarse con el software “equifracciones musicales” en la sección “otra forma de medir” en el apartado “metrónomo”, en el cual aparecerá una interfaz como la de la ilustración 2. En la cual se recomienda al docente seleccionar 60, es decir 60 pulsaciones por minuto y luego cambiarlo a 120 y 30 pulsaciones, para que los estudiantes identifiquen la variación en la velocidad y puedan comprobar que se mantiene la equidistancia entre cada pulsación. A pesar de la afectación en la velocidad. Ilustración 1

Interfaz metrónomo



Teniendo en cuenta lo anterior, se pide al estudiante suponer que el pulso de su compañero es una canción y con base en esto, dé respuesta a ¿cuántas pulsaciones o bits dio el corazón durante

En los 2 minutos, mi compañero
_____ tuvo _____ pulsaciones.

Por tanto, el tiempo musical del latido del
corazón de mi compañero es de $\frac{\quad}{2}$ BPM.

⁸ El metrónomo permite medir el tiempo musical, siendo un dispositivo que produce un pulso regulado.

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

los dos minutos? Y complete el siguiente enunciado en el cuadernillo de trabajo, en el cual, se realiza un primer acercamiento a la noción de fracción.

Con estas actividades aparece la fracción como razón, entendida como un número real que muestra la relación entre el número de pulsaciones en un tiempo determinado, en contraste con secuencias tradicionales en las cuales generalmente aparece la fracción como dos números naturales vinculados por una línea de fracción (Obando, 2006). Ahora bien, se recomienda al docente preguntar a las parejas: ¿Quién cree que tiene un latido de corazón más rápido, usted o su compañero? Y de acuerdo a la respuesta del estudiante, se sugiere preguntar cómo surgió dicha afirmación, es decir, que justifique su respuesta. Es probable que algunos estudiantes logren deducir que deben determinar los cocientes para saber quién tiene el latido del corazón más rápido o lo realicen simplemente comparando el número de pulsaciones obtenido.

Por otro lado, algunos estudiantes probablemente no podrán llegar a dicha conclusión por sí solos, es por ello que en el inciso e), se pide de manera explícita calcular los cocientes y nuevamente se propone la pregunta: ¿Quién tiene un latido de corazón más rápido? para lo cual solo deben comparar los valores numéricos encontrados en la pregunta anterior, con esta actividad el docente podrá verificar conocimientos previos.

Para finalizar el primer momento, en el ítem g) se plantea la pregunta ¿cómo se pueden medir los sonidos en música? En la misma se pide a los estudiantes que den su respuesta con ayuda de un dibujo, con el interés de que logren deducir que una forma de medir los sonidos es mediante

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

las pulsaciones, en caso de que esto no se logre, se sugiere a la docente proyectar el siguiente video: <https://www.youtube.com/watch?v=ji-XbGcT4bg>⁹ y con ello finaliza el momento 4.

Segundo Momento

El segundo momento, denominado “los sonidos del silencio”, inicia con la organización de un espacio de discusión, en el cual él estudiante debe argumentar si considera que los silencios hacen parte de las composiciones musicales y si al igual que los sonidos, estos pueden ser medidos en pulsaciones por minuto y cómo podría ser representada la duración de los mismos. Una vez los estudiantes hayan dado respuestas a estos interrogantes en el cuadernillo de trabajo, se sugiere al docente pedir que sustenten sus posturas de forma verbal.

Una vez socializadas las respuestas a los interrogantes planteados anteriormente, se recomienda al docente proyectar el siguiente video: <https://www.youtube.co/watch?v=-bv1FyeAD2E>¹⁰ con el cual se busca mostrar la presencia del silencio en las composiciones musicales, e introducir al estudiante en el estudio de la medida de sonidos y silencios en música. Después de proyectado el video se recomienda al docente reflexionar acerca de la duración de los sonidos, mostrando la importancia de representar dicha duración mediante símbolos para poder interpretar una partitura musical.

Posterior a esto, con apoyo del software “equifracciones musicales” se presentan las figuras musicales y sus relaciones fraccionarias respecto a la unidad, para esto, se sugiere al docente en caso de haber computadores para todos, permitir que todos exploren el software visualizando la

⁹ Omar Zúñiga Leura. [EnMus Enseñanza musical] (18 de junio del 2020). El pulso musical. [video]. You tube. <https://www.youtube.com/watch?v=ji-XbGcT4bg>

¹⁰ Pipalupa. (31 de julio de 2015). La música de Silencio | Musicalia |Pipalupa. [video]. You tube. <https://www.youtube.com/watch?v=-bv1FyeAD2E>

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

relación fraccionaria, de lo contrario, que el docente lo proyecte y avance en la medida en que los estudiantes muestren comprensión respecto a la duración de cada figura. Está sección el docente la encuentra en el apartado de “midiendo sonidos” (ilustración 2), luego en “las figuras musicales y sus silencios” (ilustración 3).

Ilustración 2



Ilustración 3

Interfaz midiendo sonidos



En el software cada figura musical aparece con diferentes representaciones. Por ejemplo; la figura redonda se presenta equivalente a 4 pulsos, lo que se puede percibir al reproducir el sonido. Además, al hacer clic dos veces aparece una representación geométrica equivalente a las figuras musicales (ilustración 4), es decir, se ofrece una representación visual, la reproducción de un sonido y los golpes del metrónomo, favoreciendo tanto a los estudiantes que procesan mejor la

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

información por la vía auditiva y el diagrama facilita la información a estudiantes con dificultades en la comprensión auditiva.

Ilustración 4

Representación de la figura redonda



Además, en la misma interfaz se muestra en paralelo tanto la duración del sonido como del silencio, con el fin de que el estudiante logre inferir que la duración de los sonidos y los silencios es igual.

Por otra parte, en la figura blanca solo aparece media circunferencia, dos golpes del metrónomo y la mitad del sonido, en la negra aparecerá solo $\frac{1}{4}$ de circunferencia y un cuarto de sonido respecto a la redonda (ilustración 5). Con esto, se busca introducir la percepción de que “cada figura es la mitad de la anterior y el doble de la siguiente” (Conde, 2013). Además, las preguntas; ¿Cuál es la figura con mayor duración de sonido? ¿Cuál es la figura con menor duración de sonido? ¿cuál es la equivalencia respecto a la redonda de la figura con menor duración? guían el procesamiento de información.

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Ilustración 5

Figura negra



En la sección de equivalencias, la cual se encuentra en el mismo apartado del software (ilustración 8), se introduce de manera la representación fraccionaria como una forma de establecer una relación entre figuras musicales, en función de la medida de sonidos y silencios musicales. El software proporciona diversas representaciones, las cuales son auditivas, geométricas y algebraicas.

Ilustración 6

Representación fraccionaria



Una vez los estudiantes hayan explorado la medida de todas las figuras musicales en el software, en el cuadernillo de trabajo deben dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿Cuál es la

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

figura con mayor duración de sonido? ¿Cuál es la figura con menor duración de sonido? Así mismo, entender si ¿La equivalencia entre sonidos y silencios es igual en cada figura? Cada una de estas respuestas deben ser explicadas por los estudiantes y con ello se pretende mostrar a la redonda como la figura de mayor duración y que el valor de las demás depende de ella, es importante que además del registro de las respuestas en el cuadernillo el docente escuche el razonamiento de los estudiantes de forma verbal.

Ilustración 7

Figuras musicales

SÍMBOLO	NOMBRE	EQUIVALENCIA
	Redonda	$\frac{1}{2}$
	Negra	$\frac{1}{8}$
	Semicorchea	$\frac{1}{32}$
	Semifusa	

En la medida en que los estudiantes avancen en la exploración de software, se pedirá completar la tabla de la ilustración 7, con la finalidad de consolidar los aprendizajes paso a paso, relacionando la medida de cada figura, el nombre y el símbolo. Con ello, el estudiante podrá destacar las relaciones entre las notas musicales a las cuales va a asociar la fracción, pues al relacionar una figura menor con una de mayor valor aparece la relación parte-todo de la fracción. También se pedirá completar una tabla respecto a la medida de los silencios, pues, según Conde (2013), los silencios musicales son tan importantes como los sonidos, pues sin ellos sería imposible la escritura e interpretación de una partitura y se refuerza el objeto matemático de estudio.

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

En el punto 2, con apoyo del software “equifracciones musicales” en la sección “un juego de reglas” (ilustración 8). Se presenta una situación en la que se muestra tanto de manera visual como auditiva, los efectos de que cambiara la duración de alguna de las figuras que no es la redonda. Antes de pasar a la exploración en el software, es pertinente que en el cuadernillo de trabajo se contesten los siguientes interrogantes: ¿Cuántas negras se necesitan para obtener una redonda (unidad)? ¿Cuántas redondas se necesitan para obtener una negra? ¿Qué pasaría si una de las negras que forman una redonda no tiene la misma duración que las demás? En cada una de ellas es pertinente que el estudiante justifique su respuesta y de acuerdo con las respuestas el docente ofrezca retroalimentación.

Ilustración 8

Incumplimiento de la equipartición

UN JUEGO DE REGLAS

1. ¿Qué pasaría si la duración de la figura musical cambia?

2. Videos Un cuaderno lleno de música. Pasa la carta del sol.

QUE PASARÍA SI LA DURACIÓN DE LAS SIGUIENTES FIGURAS CAMBIA?

NEGRA CAMBIA DE DURACIÓN DENTRO DE UNA REDONDA.

CORCHEA CAMBIA DE DURACIÓN DENTRO DE UNA NEGRA.

¿QUÉ PASARÍA CON LA FIGURA MUSICAL REDONDA SI UNA NEGRA NO TIENE LA MISMA DURACIÓN?

INSTRUCCIONES: HAZLA EJERC EN LA FIGURA MUSICAL O DE DISEÑO

1ER. EJERC: MUESTRA LOS PULSOS

2DO. EJERC: MUESTRA REPRESENTACIÓN CON RESPECTO DE LA CIRCUNFERENCIA

3ER. EJERC: REDONDA

02. REDONDA DURACIÓN NORMAL

Redonda

Redonda

Si una de las negras dura menos tiempo

Si una de las negras dura más tiempo

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Se sugiere al docente mostrar en repetidas ocasiones la afectación a la figura redonda si una de las negras dura menos tiempo o más tiempo (ilustración 8), y se haga el contraste respecto a la duración normal de la redonda, para que el estudiante logre percibir que si una de las figuras negras dura menos tiempo, no alcanzaría a completar la redonda y si dura más tiempo habría un sonido sobrante. Estas actividades tienen la finalidad de que el estudiante logre argumentar qué sucedería si una de las negras que forman una redonda no tiene la misma duración de las demás, apuntando directamente a lo que es la equipartición, pues si el sonido durará más o menos tiempo, una de las líneas será más larga o más corta, el sonido y los trazos acabarán antes o después de marcar el golpe del pulso.

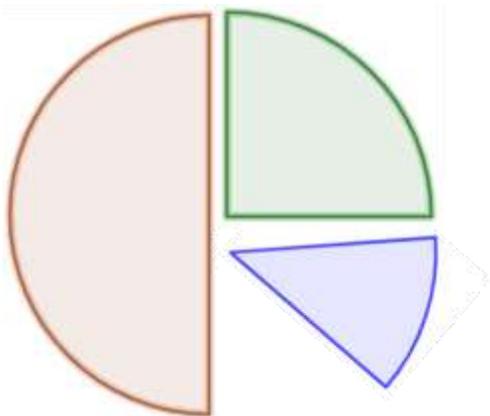
Con el fin de ofrecer más posibilidades de representación, atendiendo el principio de proporcionar múltiples formas de representación de la información y los contenidos, teniendo en cuenta que los estudiantes son distintos en la forma en que perciben y comprenden la información, se sugiere al docente implementar el material manipulable con el cual busca favorecer la comprensión de la equipartición en las figuras musicales (Sepúlveda, Ayala y Montoya, 2017).

Pues, con el material manipulable los estudiantes tendrán la opción de comparar la figura completa con la redonda siendo el área del círculo igual a la duración del sonido, de este modo, la mitad de la circunferencia representará la blanca, un cuarto la negra y así sucesivamente. Con esto, los estudiantes primero podrán reconocer las equivalencias, fortalecer las relaciones fraccionarias y usarlo para comprobar las equiparticiones, como lo es el caso de que una de las figuras negras que forman una redonda tengan menor o mayor duración, favoreciendo a aquellos estudiantes que aprenden mediante ensayo y error.

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Ilustración 9

Material concreto



Una vez entregado el material a los estudiantes, se trabajarán las situaciones del libro de texto del estudiante en grupos de tres, se sugiere al docente formar los grupos, para que cada uno de ellos quede integrado por estudiantes que tienen mayor dificultad y que no, para que aquellos con capacidades excepcionales expliquen a los estudiantes que presentan mayor dificultad.

En los grupos van a verificar si todas las fichas son de igual tamaño. Luego van a juntar las piezas con las mismas características de color y tamaño, identificar la figura formada (círculo) y discutir si es posible establecer una relación entre las fichas entregadas y las figuras musicales. Si esto es posible, van a completar la tabla del cuadernillo de trabajo en la que se relaciona cada equivalencia las cuales deben también socializar. A partir de la información, el estudiante podrá completar la siguiente tabla en la que relacionan las fichas del material con una figura musical.

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Ilustración 10

Equivalencias con el material concreto

Ficha	Figura musical	Equivalencia

Tercer momento

El tercer momento denominado “la armonía de la fracción”, tiene el objetivo de que con el material concreto y las figuras musicales se establezcan relaciones fraccionarias, comprobar la equipartición y entender la unidad relativa. Para tal fin, se presenta inicialmente una situación en la cual se pide a los estudiantes responder a la pregunta ¿Cómo podríamos determinar qué fracción de la blanca es una negra? Se sugiere al docente indagar sobre cómo podrían dar respuesta a la pregunta y que con el material concreto confirmen sus razonamientos.

De acuerdo con las apreciaciones que surjan en el procedimiento anterior, se recomienda al docente presentar la siguiente situación para orientar al estudiante y que con el material concreto compruebe sus ideas, con lo cual se da autonomía de trabajo y opción de verificación al estudiante:

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Santiago considera que el procedimiento consiste en buscar cuántas negras caben en una blanca. Para ello se toman fracciones equivalentes a la negra en el material concreto y se juntan hasta que llenen toda el área de la fracción de círculo equivalente a la blanca ¿Está de acuerdo con Santiago? ¿Por qué?

Una vez los estudiantes hayan leído, analizado y entendido la situación, el docente podrá leerla nuevamente y preguntar si ¿Están de acuerdo con Santiago? Y ¿Por qué? Finalmente, se espera que los estudiantes logren concluir cuál es la relación entre la figura negra y la blanca. Se recomienda al docente que con ayuda del material concreto haga el ejemplo del procedimiento descrito por Santiago con el fin de orientar al docente.

En el punto 2 siguiendo el proceso descrito anteriormente, se espera que el estudiante pueda dar respuestas a las siguientes preguntas y justificar su respuesta: ¿Cuántas semifusas caben en una blanca? ¿Qué parte de la redonda es una corchea? ¿Qué fracción de la blanca es una negra? ¿Qué parte de negra es una semicorchea? ¿Cuántas negras caben en una corchea? ¿Cuántas corcheas caben en dos semifusas? Esto mediante un dibujo, de manera verbal, apoyado en el material concreto o haciendo uso del software

En el inciso 3 teniendo en cuenta que puede darse una variación en el tiempo que tarda cada figura en ser ejecutada, lo que depende de la redonda como unidad relativa, se presenta una situación al estudiante, en la cual, en la ejecución de una pieza musical la redonda dura 16 segundos y con base en ello responda cual sería la duración de la figura blanca, negra, corchea y fusa, vinculando la fracción como cociente, recordemos que ya ha sido trabajada la relación parte-todo, de medida y razón.

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Ilustración 11

Fracción como cociente

<p>Razonamiento:</p> <p>Respuesta:</p>

En el punto 4, se sugiere al docente nuevamente formar grupo de tres estudiantes en los cuales se incluya a estudiantes con diferentes necesidades de aprendizaje, en cada grupo van a reflexionar sobre las siguientes interrogantes ¿Es posible formar una figura equivalente a la duración de la redonda usando diferentes figuras musicales? ¿Qué pasa cuando una de las corcheas que forman una blanca dura más que las otras? ¿Qué pasaría si una de las negras tuviera menor duración que las demás, sabiendo que en una redonda caben cuatro negras? Se pedirá a los estudiantes sustentar las afirmaciones que realicen y preparar una dramatización empleando diferentes materiales. Al finalizar la actividad, se sugiere a la docente ofrecer retroalimentación formativa sobre lo realizado en cada grupo.

Cuarto momento

El cuarto momento denominado “al ritmo de la equipartición” inicia con un video musical¹¹, en el que se muestran los pasos básicos del ritmo de Vals, buscando que el estudiante identifique que se forman grupos de tres movimientos o pulsos (1,2,3) introduciendo la noción de

¹¹ Academia de Baile. (9 de junio del 2011). Vals: Paso básico en pareja (8/11) - Academia de Baile. [video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=rhmwBIuJp70&t=30s>

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

compás musical¹² en el estudiante. Después de observado el video se sugiere a la docente preguntar ¿cómo estaban conformados los grupos de movimientos? Además, hacer explícita la definición de compás musical. El cual es una unidad métrica musical organizada en grupos, en el que cada grupo tiene la misma duración de tiempo.

Posterior a esto, con ayuda del software se analizarán las características del patrón rítmico del vals de forma detallada, reafirmando las ideas intuitivas de los estudiantes, lo cual podrá encontrarse en la sección “bailando al compás” (ilustración 11).

Ilustración 12

Bailando al compás



En el software el estudiante podrá entender el compás musical como una composición de equiparticiones, hecho que debe guiar el docente con ayuda de preguntas orientadores, motivando la reflexión, sobre qué pasa con el ritmo de Vals si en un compás colocamos o quitamos un tiempo, lo cual el estudiante podrá explorar con ayuda del software (ilustración 12), cuál sería la percepción del ritmo, cómo sería el baile de ese ritmo afectado y cuáles serían las condiciones para garantizar un ritmo de Vals.

¹² Una obra musical se divide en partes de igual duración, las cuales se denominan compases y cada uno de ellos está dividido en figuras de igual duración o equivalentes.

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Ilustración 13

El Vals

PATRÓN RÍTMICO DEL VALS

¿CÓMO SUENA?

SIN AFECTAR CON UN TIEMPO MÁS CON UN TIEMPO MENOS

¿Qué pasa con el ritmo de Vals si en un compás colocamos o quitamos un tiempo?
¿Cuáles serían la percepción del ritmo?
¿Cómo sería el baile de ese ritmo afectado?
¿Cuáles serían las condiciones para garantizar un ritmo de Vals?

Además, es necesario que el docente precise el significado de la fracción que indica el compás, la cual aparece al inicio de la partitura musical. Conde (2013) da el siguiente ejemplo respecto al significado de la misma: en el compás de $3/4$, el numerador 3 indica que cada compás tendrá tres pulsos o tiempos, y la fracción $1/4$ indica la unidad de tiempo, en este caso la cuarta parte del tiempo de duración de una redonda, es decir que, en este caso en particular, la figura negra será la unidad de medida. En general, el numerador representa el número de tiempos que tendrá el compás y la fracción $1/n$ hace referencia a la figura que llenará un tiempo del compás. De manera gráfica esto es:

$$\frac{3}{4} = 3 * \frac{1}{4}$$

Indica el número de pulsos

La cuarta parte de la duración de una redonda (figura negra)

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

Ilustración 14

Curiosidad matemusal

¡Curiosidad matemusal!

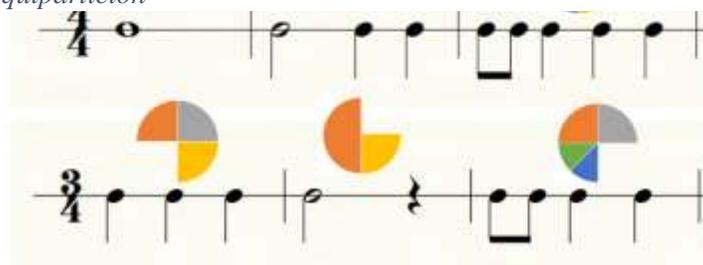
Una obra musical se divide en partes de igual duración, las cuales se denominan compases y cada uno de ellos está dividido en figuras de igual duración o equivalentes.

Es decir, para dar estructura al ritmo, éste se divide en agrupaciones de pulsaciones con igual duración, lo que es una composición de equiparticiones.

Posterior a esto, en el punto 4 se hace posible la representación y verificación de la equipartición en los compases pertenecientes a un patrón rítmico. Para ello, se espera que el estudiante se apoye en el material concreto, pues permite evaluar si en las partituras se cumple la equipartición. Para facilitar que el estudiante comprenda la actividad, se presenta un ejemplo en el que se indica el procedimiento a seguir (ilustración 14), se sugiere a la docente realizar el ejemplo y explicarlo a los estudiantes cuantas veces sea necesario, pues en este ejercicio se vinculan varios procesos importantes en la comprensión de las fracciones y el papel de la equipartición.

Ilustración 15

Verificación de la equipartición

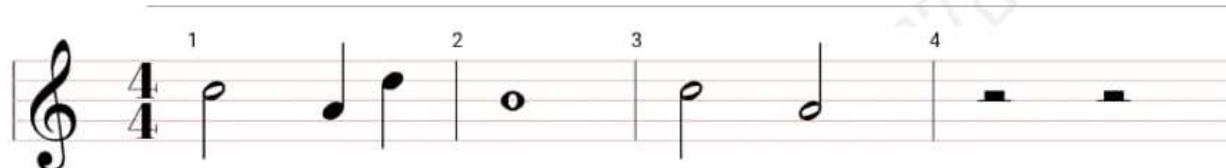


¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

En los puntos 5 y 6, se motiva la reflexión de los estudiantes respecto a la equipartición en los compases musicales, la unidad relativa y aparece la fracción como operador pues al momento del estudiante argumentar cómo podría corregir los compases afectados, surgen ideas de aumentar o reducir las fracciones, con preguntas como ¿cuál compás fue más difícil de evaluar? ¿cómo corregiría los compases afectados? **Ilustración 16**

Partitura musical

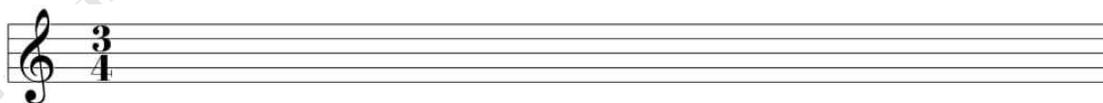
a. Correcto Incorrecto
¿Por qué?



En el inciso 7 del presente momento, se pide a los estudiantes crear sus propios compases, dado el indicativo del compás (ilustración 16), para ello, es necesario que el docente vuelva a explicar qué significa el indicativo del compás, pues en las creaciones los estudiantes necesitan aplicar todo lo aprendido, mostrando entendimiento de la equipartición, interpretación de la fracción como parte-todo, medida, razón y operador y comprensión de la unidad relativa. Sin embargo, para favorecer el procesamiento de información en el libro de trabajo para el estudiante se realiza una síntesis de información a partir de una curiosidad matemusal.

Ilustración 17

Indicativo de compás



Finalmente, en el punto 8 y 9 se vincula el trabajo colaborativo y la retroalimentación entre pares, específicamente en el apartado 8, un estudiante va a calificar la composición de un compañero y va a justificar si los compases son correctos e incorrectos de acuerdo a lo que se haya

¿Cómo reconocer los ritmos musicales según la medida de sus sonidos y silencios?

trabajado. En el punto 9 se sugiere al docente formar nuevamente grupos de tres estudiantes con dificultades diferentes, con el objetivo de que realicen una exposición en la que deben describir qué es una fracción. Es pertinente que el docente ofrezca retroalimentación de inmediato, buscando que los grupos restantes mejoren en dichos aspectos.

Con estas actividades se presentan varios medios para el proceso de enseñanza de las fracciones, tratando de incluir a todos los estudiantes de acuerdo al medio que más se acomode a sus capacidades y preferencias, considerando la singularidad de cada estudiante, atendiendo la diversidad en las formas de acceder y procesar la información, teniendo en cuenta que no hay un medio de representación óptimo para todos los estudiantes, por lo que se proponen diferentes métodos para interactuar con el contenido, como gráficos, sonidos, dibujos, textual y exposiciones favoreciendo diferentes percepciones y opciones para interactuar con el contenido: visual, auditiva, táctil y audiovisual. Resaltando el potencial del contexto musical y pertinencia para cualquier edad, capacidad, cultura y etnia.