

**CURVAS QUE LLENAN EL PLANO**

**SANDRA CECILIA FLÓREZ RODRÍGUEZ**

**Monografía presentada como requisito parcial  
para optar al título de  
Licenciada en Matemáticas**

**Director**

**Rafael Fernando Isaacs Giraldo**

**Magíster en Matemáticas**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESCUELA DE MATEMÁTICAS**

**2004**

**CURVAS QUE LLENAN EL PLANO**

**SANDRA CECILIA FLÓREZ RODRÍGUEZ**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESCUELA DE MATEMÁTICAS**

**2004**

**TÍTULO:** CURVAS QUE LLENAN EL PLANO \*

**AUTOR:** FLÓREZ RODRÍGUEZ Sandra Cecilia \*\*

**PALABRAS CLAVES:** Sistema Iterado de Funciones, atractor, códigos, homeomorfismo, conexidad, curvas.

**CONTENIDO:**

El presente trabajo exhibe la construcción de diferentes curvas que llenan el plano, la primera de las cuales fue creada por el matemático italiano Giuseppe Peano en 1890, y la segunda por David Hilbert un año después. En el informe se presenta el homeomorfismo entre el Espacio de los Códigos y el Espacio de Cantor, a partir de lo cual se procede a ver las curvas que llenan el plano como imagen continua del Espacio de Cantor, a construir tales curvas por medio de funciones continuas entre conjuntos compactos autosimilares y finalmente la presentación de algunos algoritmos que las generan.

El informe consta de cinco capítulos. En el primero (Generalidades) el lector encontrará una motivación para la lectura del informe. El segundo (Preliminares Matemáticos) brinda una breve fundamentación teórica necesaria para abordar la temática. El tercero (Dos espacios homeomorfos: Cantor y los Códigos) expone de manera formal la equivalencia topológica de estos dos espacios. El cuarto (Curvas que llenan el plano) presenta la construcción de curvas que llenan el plano a través de funciones continuas y sobreyectivas. El quinto (Algoritmos) describe algoritmos que generan curvas que llenan el plano.

\* Proyecto de grado

\*\* Facultad de ciencias, Escuela de Matemáticas. Rafael Isaacs

TITLE: Curves which fill the plane\*

AUTHOR: Sandra Cecilia Flórez Rodríguez\*\*

Key words: Itered System of Functions, attract, code, homorphism, curves, linkage.

Content:

The present work exhibits the construction of different curves which fill the plane, the first of which was created by the italian mathematician Giuseppe Peano in 1890 and the second one by David Hilbert one year later. In the report the homorphism between the space of the codes and the space of Cantor is presented, providing the base to; observe the curves which fill the plane as a continuous image of the space of Cantor and to construct such curves by means of continuous functions among compacto autosimilar clusters, and finally, to present some algorithms which generate it.

The report consists of five chapters. In the first one (Generalities) the reader will find motivation for the reading of the report. The second on (Mathematics Preliminaries) contains a brief theoretical foundation necessary to approach the thematic. The third one (Two homorphist spaces: Cantor and the Codes), formally exposes the topological equivalence of these two spaces. The fourth one (Curves which fill the space) present the construction of curves which fill the space throughout continuous functions. The fifth (Algorithms) describes algorithms which generate curves that fill the plane.

\* Degree project.

\*\*Department of Sciences. Licentiate in Mathematics. Rafael Isaacs Giraldo.



## Tabla de contenido

1. Generalidades	2
1.1 Curvas que llenan el plano	5
2. Preliminares matemáticos	12
2.1 Espacios métricos	13
2.2 Sistema iterado de funciones	18
2.3 Fractales	21
2.4 Topología	23
2.5 Bases numéricas	26
3. Dos espacios homeomorfos: Cantor y los Códigos	28
3.1 El espacio de Cantor	28
3.1.1 Generalidades y propiedades topológicas	28
3.1.2 Autosimilaridad y dimensión fractal en el conjunto de Cantor	36
3.1.3 El conjunto de Cantor como atractor de un Sistema Iterado de Funciones	36
3.2 El Espacio de los Códigos	38
3.3 El Espacio de los Códigos y el Espacio de Cantor son homeomorfos	42
4. Curvas que llenan el plano	47
4.1 Curva de Peano	48
4.1.1 Generalidades	48
4.1.2 Construcción de la curva de Peano a través del Espacio de los Códigos	52
4.1.3 Construcción de la curva de Peano a través de un Sistema Iterado de Funciones	58
4.1.4 La curva de Peano como imagen continua del Espacio de Cantor	60
4.1.5 Dimensión de la curva de Peano	61
4.2 Curva de Hilbert	61
4.3 Teorema de Netto	66
5. Algoritmos	68
5.1 Algoritmo de Peano	68
5.2 Código Gray para obtener curvas <sup>7</sup> que llenan el plano	70

# Introducción

En 1890 Giuseppe Peano (1858-1932) publicó el artículo “SUR UNE COURBE QUI REMPLIT TOUTE UNE AIRE PLANE” en el que señaló la existencia de una función continua y sobreyectiva definida en un intervalo cerrado de la recta real que aplicaba el intervalo sobre una región bidimensional del plano.

Luego, otros matemáticos como Hilbert, Moore, Lebesgue, Sierpiński, Polya nos enriquecieron con más ejemplos de estos entes matemáticos antiintuitivos, sorprendentes y paradójicos.

El informe consta de cinco capítulos. En el primero (Generalidades) el lector encontrará una motivación para la lectura del informe. El segundo (Preliminares Matemáticos) brinda una breve fundamentación teórica necesaria para abordar la temática. El tercero (Dos espacios homeomorfos: Cantor y los Códigos) expone de manera formal la equivalencia topológica de estos dos espacios. El cuarto (Curvas que llenan el plano) presenta la construcción de curvas que llenan el plano a través de funciones continuas y sobreyectivas. El quinto (Algoritmos) describe algoritmos que generan curvas que llenan el plano.

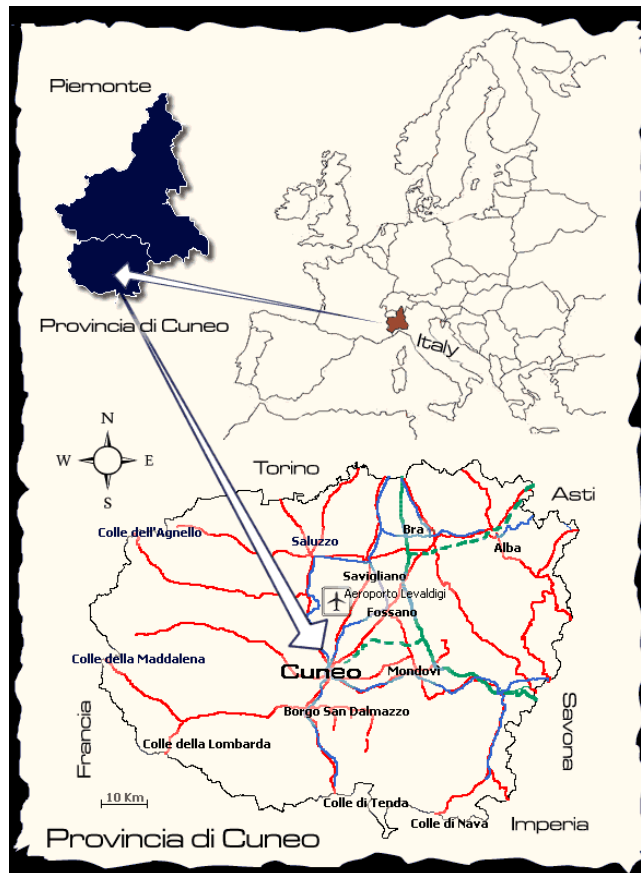
# Capítulo 1

## Generalidades

*“La falta de dudas lleva al hombre a una falta de curiosidad y entonces no existe la inquietud luego, no hay matemática”.*

*Leopoldo Varela.*





Las Curvas que llenan el plano fueron creadas (descubiertas) por primera vez por el matemático italiano Giuseppe Peano quien nació el 27 de agosto de 1858 en Cuneo, Piamonte, Spinetta, Italia.

Es interesante conocer varios de los aportes de este italiano al enriquecimiento de la matemática. Fue pionero de la lógica axiomática.

En 1889 Peano publicó los axiomas que llevan su nombre a través de los cuales define el conjunto de los números naturales. En 1890 publica un artículo titulado “SUR UNE COURBE QUI REMPLIT TOUTE UNE AIRE PLANE” en el que expone la construcción de una curva que tiene la propiedad notable de llenar el plano, en el sentido de que pasa por cualquier punto.

Peano introdujo elementos básicos de cálculo geométrico y dió definiciones nuevas para

el tamaño de un arco y para el área de una superficie encurvada.

Además creó el lenguaje artificial Interligna y se le reconoce la introducción del símbolo  $(\in)$  pertenecer.

La construcción de las curvas que llenan el plano se remonta al descubrimiento de George Cantor, acerca de que el intervalo  $[0, 1]$  puede hacerse corresponder biyectivamente al cuadrado  $[0, 1]^2$ . Surgió entonces la pregunta de si tal correspondencia podría ser continua.

En 1879 E. Netto dió fin a tal cuestionamiento al demostrar que dicha función biyectiva es necesariamente discontinua.

Aún así, si la condición de biyección no se tiene en cuenta ¿es aún posible obtener una función continua y sobreyectiva de  $[0, 1]$  en  $[0, 1]^2$ ? Giuseppe Peano respondió de una vez por todas a esta cuestión en 1890 con la construcción de la primera curva que cumplía tales características en cuyo honor se le dió el nombre de CURVA DE PEANO. A primera vista, fue sorprendente y paradójico el descubrimiento de Peano debido a que el intervalo  $[0, 1]$  “llena” un cuadrado, en otras palabras, la dimensión 1 llena la dimensión 2, de esta manera se inició el análisis riguroso del concepto de dimensión.

Ejemplos adicionales fueron dados por David Hilbert en 1891; E.H. Moore en 1900; H. Lebesgue en 1904; W. Sierpiński en 1912; George Polya en 1913 y otros subsiguientes.

Alrededor del fin del siglo XIX se descubrieron muchas de estas curvas y se construyeron en tres dimensiones por lo que se les denominó curvas que llenan el espacio. En esta monografía únicamente se trabajará en dos dimensiones razón por la cual se titula “CURVAS QUE LLENAN EL PLANO”.

## 1.1. Curvas que llenan el plano

Lo que normalmente entendemos por curva e imaginamos cuando pensamos en ésta es una línea dibujada sobre el papel.

Las curvas que llenan el plano son ejemplos contrarios a esta intuición porque su dibujo es una mancha oscura.

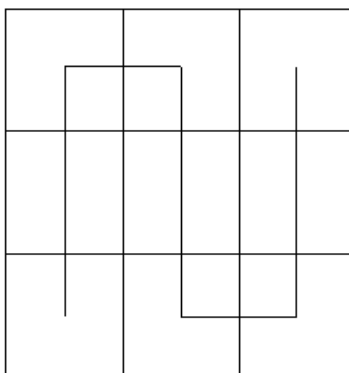
Esto nos obliga a aclarar el concepto de curva y a revisar algunos ejemplos detallados de curvas que llenan el plano, lo cual se presentará en el capítulo 4.

Por ahora, preocupémonos por “bosquejar” el proceso que nos conduce a la formación de esta mancha oscura.

Partamos de un cuadrado que se divide en nueve subcuadrados iguales. Debemos encontrar una manera de recorrer todos estos subcuadrados a través de una curva.

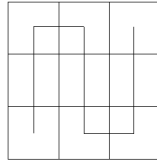
3	4	9
2	5	8
1	6	7

Una solución a lo propuesto es recorrer un camino en el orden de la anterior numeración

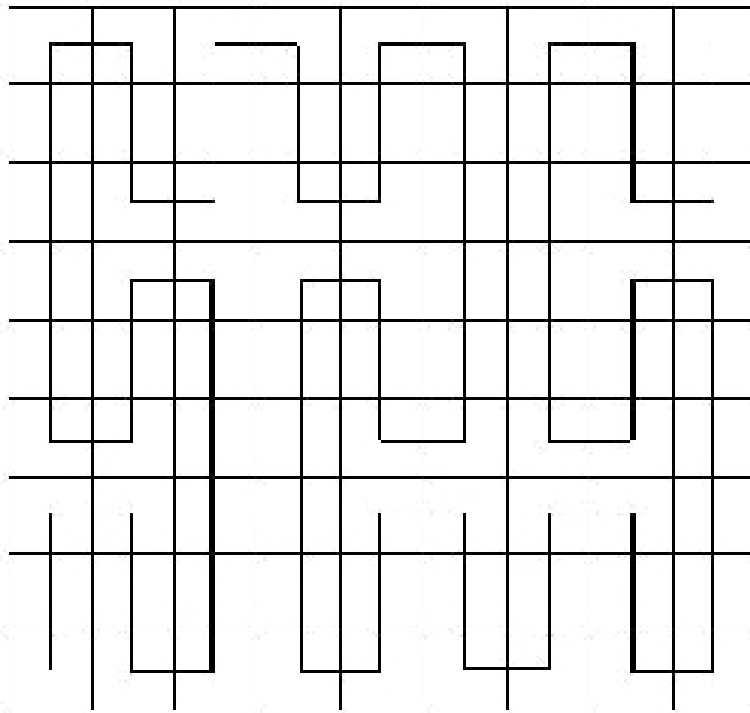


¿Como podríamos recorrer el cuadrado si ahora no tenemos nueve subcuadrados sino 81?

Saquemos una fotocopia reducida a la tercera parte, entonces obtenemos

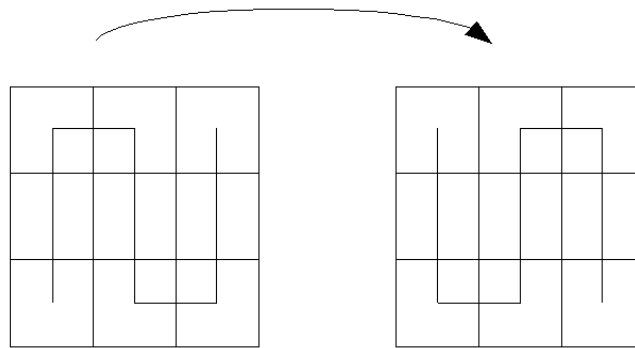


Podemos unir nueve de estas fotocopias como lo indica el siguiente gráfico:



Fíjese que seguimos llenando el cuadrado en el mismo orden. Al cuadrado 2,4,6,8 se le ha sometido a una reflexión con respecto a la horizontal para hacer posible la

continuidad de la curva.



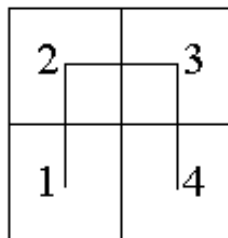
Al continuar con esta construcción un número infinito de veces, entonces ¡llegaremos a cada punto del cuadrado!, lo hemos llenado por completo.

Podemos idear otras curvas que también llenen el cuadrado.

Suponga que usted es un pintor de rostros y utiliza una técnica que consiste en diseñar una cuadrícula e ir reproduciendo la fotografía dibujando la parte respectiva en cada subcuadrado de su cuadrícula.

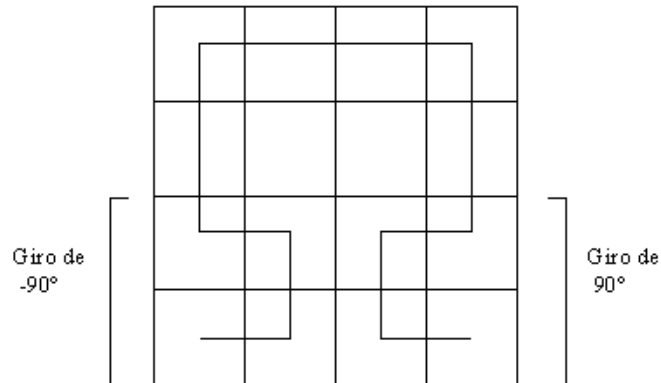
Para lograr una mayor precisión cada subcuadrado debe tener la menor área posible hasta que se convierta en un punto, a estos subcuadrados se les llama pixel, entonces vamos a recorrer estos pixel para lograr nuestro cometido:

Dividamos el cuadrado en cuatro subcuadrados iguales y recorramoslo de la siguiente manera:



En la etapa siguiente se sacan cuatro fotocopias reducidas a la mitad y las unimos para

formar el cuadrado original, pero girando dos fotocopias, una en un ángulo de  $-90^\circ$  y otra un ángulo de  $90^\circ$  y se unen otra vez los centros de los subcuadrados como lo indica la figura:

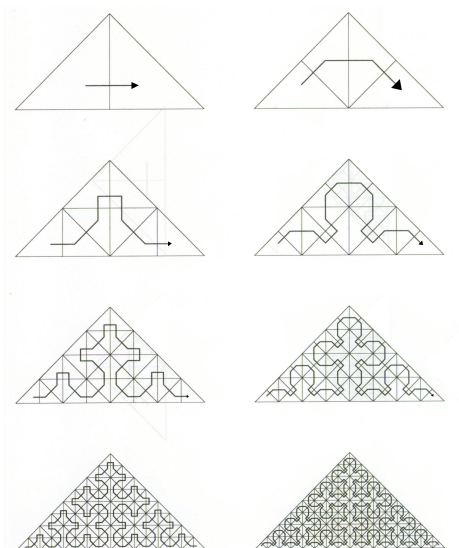


Si iteramos el proceso la curva que obtenemos pasa por todos los puntos del cuadrado, logrando así una reproducción bastante precisa de nuestro rostro.

Bien, ahora preguntémosnos, ¿es posible reproducir una fotografía que tiene forma triangular?, es decir, ¿encontrar una curva que su dibujo sea una mancha triangular?.

Presentamos en la siguiente figura una de las tantas respuestas a esta cuestión:

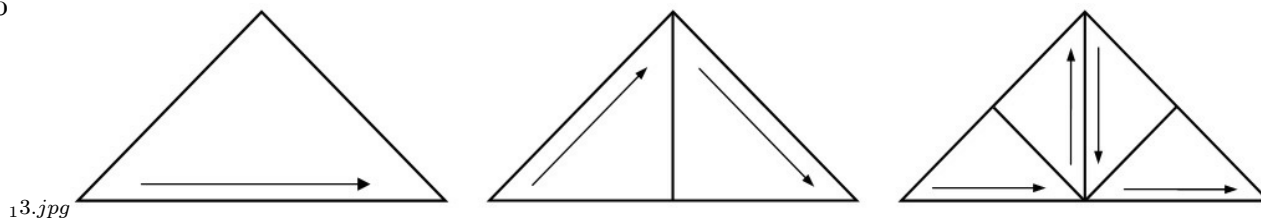
5



12.jpg

Fíjese que podemos hablar del orden en que la curva va pasando por cada triángulo, por medio de la siguiente gráfica:

6

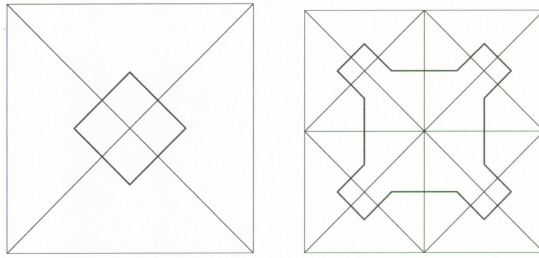


13.jpg

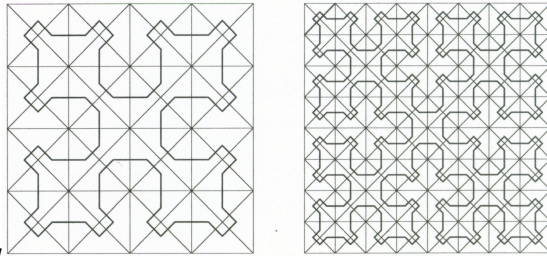
Observe que la curva pasa por todos y cada uno de los triángulos. Si hacemos lo anterior reiteradamente entonces llenaremos el triángulo.

A partir de la construcción anterior también es posible llenar un cuadrado. Imagine que colocamos un espejo en la base del triángulo, es decir, que estamos haciendo una reflexión entonces se obtiene lo siguiente:

7



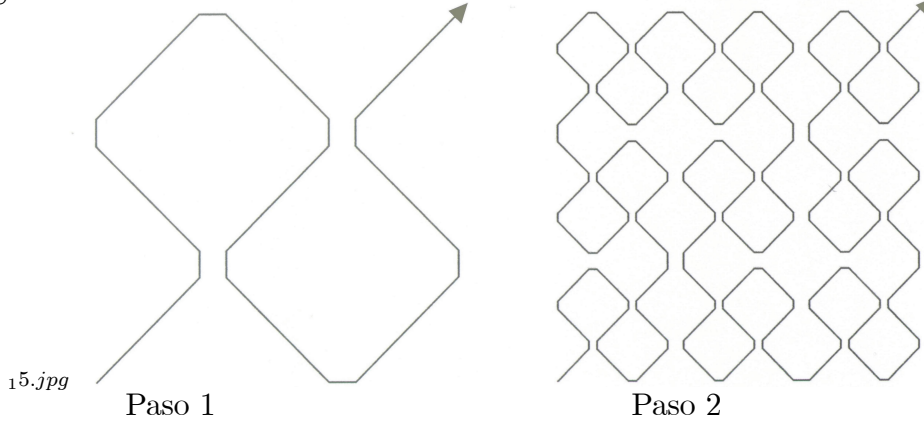
14.jpg



Tenemos más opciones para construir curvas que llenan el plano. A continuación, en cada uno de los ejemplos se presentan los dos primeros pasos en el proceso de iteración que conlleva a la mancha oscura de la que hemos hablado.

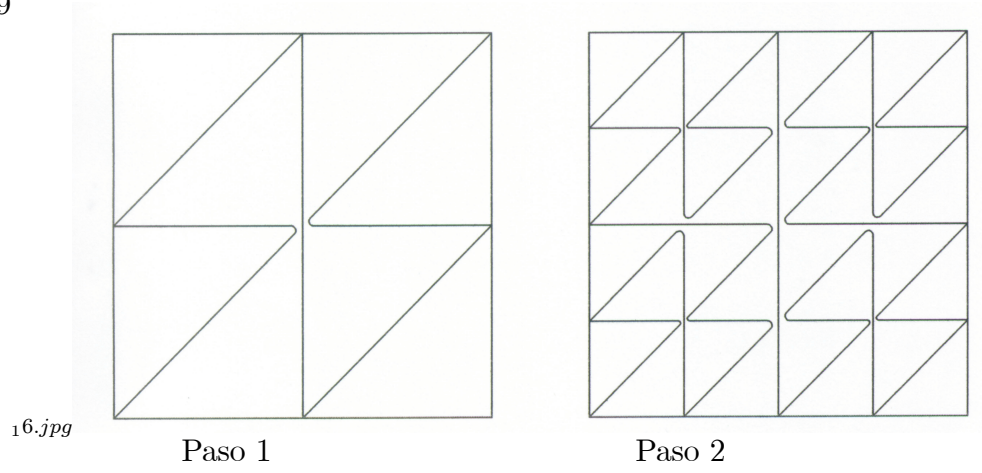
### Ejemplo 1

8



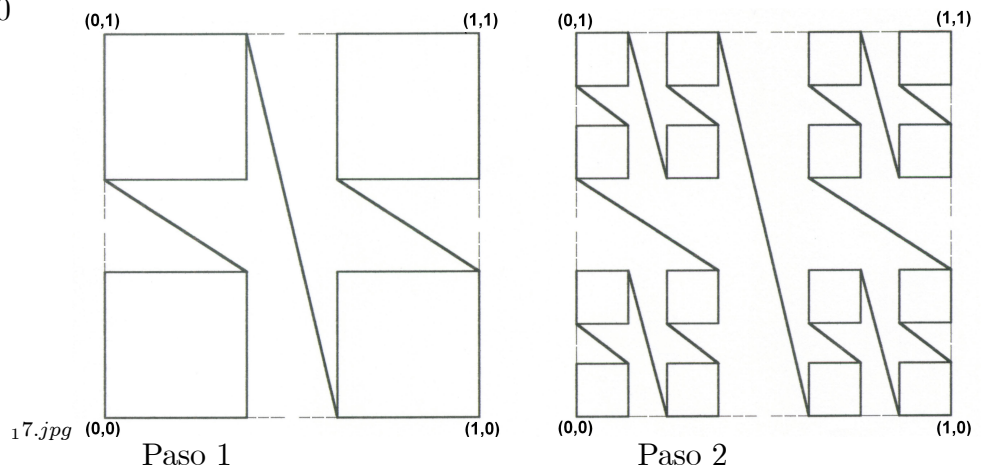
Ejemplo 2

9



Ejemplo 3

10



# Capítulo 2

## Preliminares matemáticos

“Mi interés por la ciencia siempre se limitó en esencia al estudio de los principios...”

Albert Einstein.

Teniendo un acercamiento intuitivo de las curvas que llenan el plano es fundamental hacer hincapié en las definiciones, proposiciones, axiomas y ejemplos que permitirán el estudio formal de estos entes abstractos que conllevan a una de las tantas creaciones sorprendentes en matemáticas.

En este capítulo se presentan los conceptos necesarios para abordar la temática propuesta en esta monografía. Se divide en cinco aspectos fundamentales: Espacios métricos, Sistema Iterado de Funciones, Fractales, Topología y Bases numéricas que ofrecen al lector un buen inicio para llegar a comprender lo aquí planteado en lo que respecta a las curvas que llenan el plano.

## 2.1. Espacios métricos

**Definición 2.1** Un espacio métrico  $(X, d)$  es un espacio  $X$  junto con una función  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que mide la distancia entre pares de puntos  $x \wedge y$  en  $X$ .

Requerimos que  $d$  cumpla los siguientes axiomas:

- i)  $d(x, x) = 0 \forall x \in X$ .
- ii)  $0 < d(x, y) < \infty \forall x, y \in X, x \neq y$ .
- iii)  $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$ .
- iv)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \forall x, y, z \in X$ .

La función  $d$  es llamada métrica.

**Ejemplo 2.1** En el espacio métrico  $X = \mathbb{R}$  es fácil ver que  $(\mathbb{R}, d_u)$  siendo  $d_u = |x - y|$ , es un espacio métrico,  $d_u$  se denomina **métrica euclidiana de la recta o métrica usual**.

**Definición 2.2** Dos métricas  $d_1$  y  $d_2$  en un espacio  $X$  son equivalentes si existen constantes  $0 < c_1 < c_2 < \infty$  tal que

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y) \forall (x, y) \in X \times X.$$

**Ejemplo 2.2** La métrica euclidiana del plano  $d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$  es equivalente a la métrica de Manhattan  $d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$  en el espacio  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 2.3** Dos espacios métricos  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  son equivalentes si existe una función  $h : X_1 \rightarrow X_2$  que es inyectiva y sobreyectiva tal que la métrica  $\tilde{d}_1$  en  $X_1$  definida por  $\tilde{d}_1(x, y) = d_2(h(x), h(y)) \forall x, y \in X_1$  es equivalente a  $d_1$ .

**Ejemplo 2.3**  $([0, 1]^2, d_1)$  y  $([0, 1]^2, d_2)$  siendo  $d_1$  la métrica euclidiana del plano y  $d_2$  la métrica de Manhattan son espacios métricos equivalentes.

**Definición 2.4** Sea  $f : X_1 \rightarrow X_2$  una función de un espacio métrico  $(X_1, d_1)$  a un espacio métrico  $(X_2, d_2)$  es continua si para cada  $\varepsilon > 0$   $x, y \in X_1$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

si  $f$  es también inyectiva y sobreyectiva entonces es invertible.

Si  $f^{-1}$  es continua entonces decimos que  $f$  es un homeomorfismo entre  $X_1$  y  $X_2$ .

En tal caso decimos que  $X_1$  y  $X_2$  son homeomorfos.

**Definición 2.5** Una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de puntos en un espacio métrico  $(X, d)$  es llamada una sucesión de Cauchy si para todo número dado  $\varepsilon > 0$  existe  $N > 0$  tal que  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  para todo  $n, m > N$ .

**Definición 2.6** Una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de puntos en un espacio métrico  $(X, d)$  se dice que converge a un punto  $x \in X$  si para algún  $\varepsilon > 0$  existe un entero  $N > 0$  tal que  $d(x_n, x) < \varepsilon$  para todo  $n > N$

En este caso el punto  $x \in X$ , al cual la sucesión converge es llamado límite de sucesión y se usa la notación  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

Alrededor del límite  $x$  de una sucesión convergente es posible construir una vecindad  $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ , lo que denota una bola cerrada de radio  $\varepsilon > 0$  centrada en  $x$ .

**Teorema 2.1** Si la sucesión de puntos  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  en un espacio métrico  $(X, d)$  converge a un punto  $x \in X$  entonces  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy.

**Definición 2.7** Un espacio métrico  $(X, d)$  es completo si toda sucesión de Cauchy  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $X$  tiene un límite  $x \in X$ .

**Ejemplo 2.4**  $(\mathbb{R}^2, d_u)$  siendo,  $d_u$  la métrica euclidiana del plano denominada también métrica usual es un espacio métrico completo.

**Definición 2.8** Sea  $S \subset X$  un subconjunto de un espacio métrico  $(X, d)$ . Un punto  $x \in X$  es llamado un punto de acumulación de  $S$ , si existe una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de puntos  $x_n \in S - \{x\}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

El conjunto de los puntos de acumulación de  $S$  se denota  $S'$

**Definición 2.9** Sea  $S \subset X$  un subconjunto de un espacio métrico  $(X, d)$ . La clausura de  $S$ , que se denota  $\bar{S}$  se define por  $\bar{S} = S \cup S'$ .  $S$  es cerrado si contiene todos sus puntos de acumulación, esto es,  $S = \bar{S}$ .  $S$  es perfecto si es igual al conjunto de todos sus puntos de acumulación.

**Ejemplo 2.5** Sea  $(X, d)$  espacio métrico donde  $X = \{a\}$ , con métrica definida por  $d(a, a) = 0$ .

La sucesión  $\{x_n = a\}_{n=1}^{\infty}$  converge a  $a$ , por lo que es una sucesión de Cauchy.

Sea  $S = \{a\}$ ,  $S \subset X$ ,  $S$  no tiene puntos de acumulación porque cada elemento de la sucesión debe pertenecer a  $S - \{X\} = \phi$ , lo que genera contradicción.

La clausura de  $S$ ,  $\bar{S} = S \cup S'$  entonces  $\bar{S} = \{a\} \cup \phi = S$  por lo que  $S$  es cerrado.

$S$  no es perfecto porque no es igual a  $S'$  ( $\{a\} \neq \phi$ ).  $(X, d)$  es un espacio métrico completo porque cada sucesión de Cauchy (sólo hay una, la sucesión constante) es convergente en  $X$ .

**Ejemplo 2.6** La sucesión  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ , definida en el espacio métrico  $(\mathbb{Q}, d_u)$  de la forma:

$$S_1 > 0, S_{n+1} = \frac{1}{2} \left( S_n + \frac{2}{S_n} \right) \text{ converge a } \sqrt{2}.$$

La demostración de lo anterior se encuentra en ([2])

La sucesión  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{Q}$  pero no converge a un punto de  $\mathbb{Q}$ ; por lo tanto  $(\mathbb{Q}, d_u)$  no es un espacio métrico completo.

Los puntos de acumulación de  $\mathbb{Q}$  son los irracionales, por lo que  $\mathbb{Q}$  no es cerrado ni perfecto.

**Definición 2.10** Sea  $S \subset X$  un subconjunto de un espacio métrico  $(X, d)$ .  $S$  es compacto si toda sucesión infinita  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $S$  contiene una subsucesión que tiene límite en  $S$ .

**Definición 2.11** Sea  $S \subset X$  un subconjunto de un espacio métrico  $(X, d)$ .  $S$  es acotado si existe un punto  $a \in X$  y un número  $r > 0$  tal que  $d(a, x) < r \forall x \in S$ .

**Definición 2.12** Sea  $S \subset X$  un subconjunto de un espacio métrico  $(X, d)$ .  $S$  es totalmente acotado si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto finito de puntos  $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\} \subset S$  tal que siempre que  $x \in S$ ,  $d(x, y_i) < \varepsilon$  para algún  $y_i \in \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$ .

**Teorema 2.2** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Sea  $S \subset X$ . Entonces  $S$  es compacto si y solo si es cerrado y totalmente acotado.

La demostración de este teorema se encuentra en ([1]).

**Teorema 2.3** Si  $f : K \rightarrow X$  es continua y  $K$  es compacto entonces  $f(K)$  es compacto.

**Definición 2.13** Sea  $S \subset X$  un subconjunto de un espacio métrico  $(X, d)$ . Un punto  $x \in X$  es un punto frontera de  $S$  si para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $B_\varepsilon(x)$  contiene por lo menos un punto en  $X - S$  y un punto en  $S$ . El conjunto de todos los puntos frontera de  $S$  es llamado la frontera de  $S$  y se denota  $\partial S$ .

**Definición 2.14** Sea  $S \subset X$  un subconjunto de un espacio métrico  $(X, d)$ . Un punto  $x \in S$  es llamado un punto interior de  $S$  si existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(x) \subset S$ . El conjunto de los puntos interiores de  $S$  se denota  $S^\circ$ .

**Definición 2.15** Sea  $S \subset X$  un subconjunto de un espacio métrico  $(X, d)$ .  $S$  es abierto si para cada  $x \in S$  existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\} \subset S$ .

**Teorema 2.4** Si  $(X, d)$  es un espacio métrico entonces  $S \subset X$  es abierto es equivalente a  $X - S$  es cerrado.

**Demostración.** i)  $S \subset X$ ,  $S$  es abierto  $\Rightarrow X - S$  es cerrado.

Sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $X - S$  con límite  $x \in X$

Se debe demostrar que  $x \in X - S$

Supongase que  $x \in S$ , entonces toda bola  $B_{\varepsilon}(x)$  con  $\varepsilon > 0$  contiene un punto  $x_n \in X - S$ , lo que significa que  $S$  no es abierto. La suposición genera contradicción por lo tanto,  $x \in X - S$ , es decir,  $X - S$  es cerrado

ii)  $X - S$  es cerrado  $\Rightarrow S$  es abierto

$X - S$  es cerrado. Sea  $x \in S$  queremos demostrar que existe  $B_{\varepsilon}(x) \subset S$ .

Supongamos que no hay una bola  $B_{\varepsilon}(x) \subset S$ , entonces para todo entero  $n = 1, 2, 3, \dots$  podemos encontrar un punto  $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap (X - S)$ .

Claramente  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión en  $X - S$  con límite  $x \in X$ . Como  $X - S$  es cerrado entonces  $x \in X - S$  lo que contradice que  $x \in S$ .

La suposición de que no existe una bola  $B_{\varepsilon}(x) \subset S$  es falsa.

Por consiguiente existe una  $B_{\varepsilon}(x) \subset S$ . Entonces  $S$  es abierto. ■

**Definición 2.16** Un espacio métrico  $(X, d)$  es conexo si los únicos subconjuntos de  $X$  que son simultáneamente abiertos y cerrados son  $\emptyset$  y  $X$ .

Un subconjunto  $S \subset X$  es conexo si el espacio métrico  $(S, d)$  es conexo.

$S$  es desconexo si no es conexo.

$S$  es totalmente desconexo si cumple con la condición de que sólo los subconjuntos conexos no vacíos de  $S$  son subconjuntos que consisten en puntos singulares.

**Definición 2.17** Sea  $S \subset X$  un subconjunto de un espacio métrico  $(X, d)$ , si para cada par de puntos  $x \wedge y$  en  $S$  existe una función continua  $f : [0, 1] \rightarrow S$  tal que  $f(0) = x \wedge f(1) = y$  tal función  $f$  se denomina grafo de  $x$  a  $y$  en  $S$ .

**Definición 2.18** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Entonces  $\mathcal{H}(X)$  denota el espacio cuyos puntos son subconjuntos compactos de  $X$ .

**Definición 2.19** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo,  $x \in X$  y  $B \in \mathcal{H}(X)$ . Se define  $d(x, B) = \min \{d(x, y) : y \in B\}$ ,  $d(x, B)$  es llamada distancia desde el punto  $x$  hasta el conjunto  $B$ .

**Definición 2.20** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Sea  $A, B \in \mathcal{H}(X)$  se define  $\tilde{d}(A, B) = \max \{d(x, B) : x \in A\}$ .  $\tilde{d}(A, B)$  se conoce como la distancia desde el conjunto  $A \in \mathcal{H}(X)$  hasta el conjunto  $B \in \mathcal{H}(X)$ .

**Definición 2.21** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo, entonces la distancia Hausdorff entre puntos  $A$  y  $B$  en  $\mathcal{H}(X)$  se define por  $h(A, B) = \max \{ \tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A) \}$ .

## 2.2. Sistema Iterado de Funciones

**Definición 2.22** Una transformación  $w = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la forma

$$w(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + e, cx_1 + dx_2 + f)$$

donde  $a, b, c, d, e, f$  son números reales, se llama transformación afín.

Una notación equivalente es:

$$w(x) = w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t \text{ donde } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ es una } M_{22} \text{ y } t \text{ es el vector } \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

La matriz  $A$  puede también escribirse de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cos \theta_1 & -r_2 \sin \theta_2 \\ r_1 \sin \theta_1 & r_2 \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

donde  $(r_1, \theta_1)$  son las coordenadas polares del punto  $(a, c)$  y  $(r_2, (\theta_2 + \frac{\pi}{2}))$  son las coordenadas polares del punto  $(b, d)$ .

**Definición 2.23** Una transformación  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es llamada similitud si  $r_1 = r_2$ ,  $\theta_1 = \theta_2$  es decir si tiene la siguiente forma.

$$w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ r \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad \text{ó}$$

$$w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \operatorname{sen} \theta \\ r \operatorname{sen} \theta & -r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

para alguna traslación  $(e, f) \in \mathbb{R}^2$ , algún número real  $r \neq 0$  y algún ángulo  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ .  $\theta$  denota el ángulo de rotación y  $r$  factor de escala.

La transformación lineal  $R_\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ r \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  es una rotación.

La transformación lineal

$R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  es una reflexión. Su notación en forma compleja es

$$R(z) = rze^{i\theta} + e + fi$$

**Definición 2.24** Una transformación  $f : X \rightarrow X$  en un espacio métrico  $(X, d)$  se conoce como contracción si existe una constante  $0 \leq s < 1$  tal que  $d(f(x), f(y)) \leq s d(x, y) \forall x, y \in X$ . El número  $s$  se denomina factor de contracción de  $f$ .

**Definición 2.25** Sea  $f : X \rightarrow X$  una transformación en un espacio métrico. Un punto  $x_f \in X$  tal que  $f(x_f) = x_f$  es llamado punto fijo de la transformación.

**Lema 2.1** Sea  $\omega : X \rightarrow X$  una función de contracción en un espacio métrico  $(X, d)$  entonces  $\omega$  es continua

**Demostración.** Dado  $\varepsilon > 0$ . Sea  $s > 0$  un factor de contracción para  $\omega$  entonces  $d(\omega(x), \omega(y)) \leq s d(x, y) < \varepsilon$  siempre que  $d(x, y) < \delta$  donde  $\delta = \frac{\varepsilon}{s}$  esto completa la prueba.

**Definición 2.26** Un Sistema Iterado de Funciones consiste de un espacio métrico completo  $(X, d)$  junto con un conjunto finito de funciones de contracción  $\omega_n : X \rightarrow X$  con sus respectivos factores de contracción  $s_n$  para  $n = 1, 2, \dots, N$  la abreviatura “SIF” es usada para “Sistema Iterado de Funciones” la notación de SIF es  $\{X; \omega_n, n = 1, 2, 3, \dots, N\}$  y su factor de contracción es  $s = \text{máx} \{s_n : n = 1, 2, 3, \dots, N\}$

**Teorema 2.5** Sea  $\{X; \omega_n, n = 1, 2, 3, \dots, N\}$  un SIF con factor de contracción  $s$ . Entonces la transformación  $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  definida por

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N \omega_n(B)$$

para todo  $B \in \mathcal{H}(X)$  es una función de contracción en el espacio métrico completo de  $(\mathcal{H}(X), h(d))$  con factor de contracción  $s$ .

Esto es

$$h(W(B), W(C)) \leq sh(B, C)$$

su único punto fijo  $A \in \mathcal{H}(X)$  cumple

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N \omega_n(A)$$

y está dado por  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(B)$  para algún  $B \in \mathcal{H}(X)$ , donde

$$W^{on}(B) = W \circ W \circ \dots \circ W \circ W(B),$$

$n$  veces

la composición de  $\omega$  sobre sí misma  $n$  veces.

**Definición 2.27** El punto fijo  $A \in \mathcal{H}(X)$  descrito en el teorema es conocido como el atractor de SIF.

**Ejemplo 2.7** Consideremos  $\mathbb{R}^2$  como espacio métrico completo usando la métrica euclidiana  $(\mathbb{R}^2, d_u)$  y las siguientes contracciones:

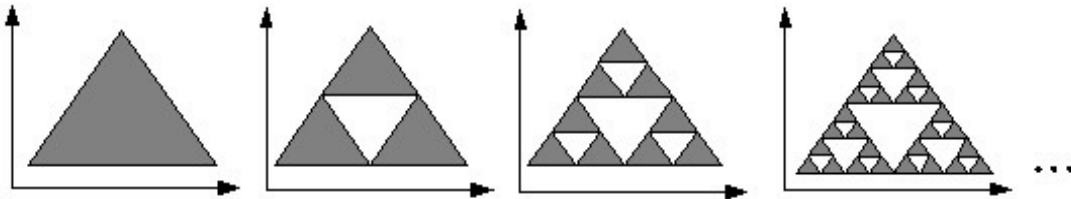
$$\begin{aligned} \omega_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \omega_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \omega_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

tenemos que  $\{\mathbb{R}^2; \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  es un Sistema Iterado de Funciones (SIF). La función

$W(B) = \bigcup_{n=1}^3 \omega_n(B)$  para cada  $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  es una contracción, para la cual existe  $A \neq \phi, A \subset \mathbb{R}^2$  compacto tal que  $A$  es el atractor del SIF, es decir, para todo  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  compacto y no vacío

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(B) = A \text{ y } W(A) = A$$

$A$  se conoce como el triángulo de Sierpiński.



## 2.3. Fractales

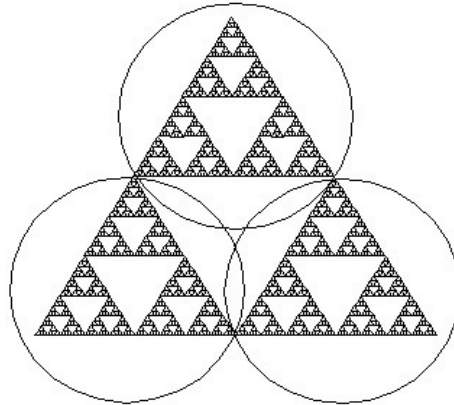
Hablamos de una nueva geometría cuando nos referimos a los fractales, es un lenguaje usado para describir formas complejas en la naturaleza: nubes, montañas en el horizonte, líneas costeras, fracturas de metales, etc.

Los primeros fractales aparecen con el descubrimiento (o creación) de funciones continuas no derivables en los trabajos analíticos de Riemman y Weirstrass hace aproximadamente 134 años.

Dos propiedades características de los fractales son autosimilaridad y dimensión.

Ser autosimilar significa que cuando examinamos pequeñas porciones del objeto, la imagen que vemos no es más que una copia del objeto inicial.

El triángulo de Sierpiński es un conjunto autosimilar



Es la unión de tres copias de si mismo reducidas a la tercera parte de su tamaño original.

Bien, ahora iniciemos el estudio de la dimensión fractal.

**Definición 2.28** Sea  $A \in \mathcal{H}(X)$  donde  $(X, d)$  es un espacio métrico. Para cada  $\varepsilon > 0$ . Sea  $N(A, \varepsilon)$  el menor número de bolas cerradas de radio  $\varepsilon > 0$  que se necesitan para cubrir  $A$ .

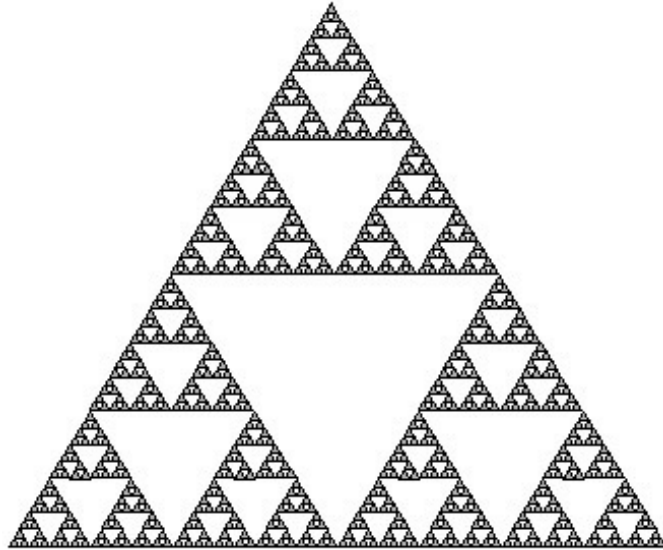
Si  $D = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(N(A, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \right\}$  existe, entonces  $D$  se denomina dimensión fractal de  $A$ .

**Teorema 2.6** Sea  $A \in \mathcal{H}(X)$ , donde se utiliza la métrica euclidiana. Cubra  $\mathbb{R}^m$  por cuadrados cerrados de longitud  $(1/2^n)$ . Sea  $N_n(A)$  la notación para indicar el número de cuadrados de lado  $1/2^n$  que intersectan al atractor.

Si  $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(N_n(A))}{\ln(2^n)} \right\}$  entonces  $A$  tiene dimensión fractal  $D$ .

La demostración del teorema anterior se encuentra en [1].

### Ejemplo 2.8



En el triángulo de Sierpiński se tiene que  $N_1(S) = 3$ ,  $N_2(S) = 9$ ,  $N_3(S) = 27$ ,  $N_4(S) = 81$ , en general  $N_n(S) = 3^n$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$

El teorema 2,6 implica que

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3^n)}{\ln(2^n)} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,58496250072$$

Fíjese que es un valor intermedio entre uno y dos, entonces podría decirse que el triángulo de Sierpiński es más que una recta pero menos que un plano.

Es difícil explicar aquí la definición de dimensión topológica. Asumamos que la dimensión topológica de un punto es cero, de una recta es uno y de un plano es dos.

Según el matemático polaco Benoit Mandelbrot un fractal es un subconjunto autosimilar del plano cuya dimensión fractal excede a su dimensión topológica.

## 2.4. Topología

**Definición 2.29** Una topología en un conjunto  $X$  es una colección  $\tau$  de subconjuntos de  $X$  llamados conjuntos abiertos que satisfacen

- i) Cualquier unión de elementos de  $\tau$  pertenece a  $\tau$*
- ii) Cualquier intersección finita de elementos de  $\tau$  pertenece a  $\tau$*
- iii)  $\phi$  y  $X$  pertenecen a  $\tau$*

*Decimos que  $(X, \tau)$  es un espacio topológico*

### **Ejemplos**

- o La topología métrica generada por la métrica usual en un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  se llama topología usual.
- o Todo espacio métrico genera una topología.
- o Sea  $X$  cualquier conjunto, sea  $\tau$  la colección de todos los subconjuntos de  $X$ , entonces  $\tau$  es una topología para  $X$ , que se conoce como topología discreta.
- o Sea  $X$  cualquier conjunto y sea  $\tau = \{\phi, X\}$  entonces  $\tau$  es una topología para  $X$ , llamada topología grosera para  $X$ .
- o Sea  $X = \{a, b\}$  sea  $\tau = \{\phi, \{a\}, X\}$  entonces  $\tau$  es una topología para  $X$ .

**Definición 2.30** *Si  $X$  es un espacio topológico y  $E \subset X$  decimos que  $E$  es cerrado si y solo si  $X - E$  es abierto*

**Teorema 2.7** *Si  $\mathcal{F}$  es una colección de conjuntos cerrados en un espacio topológico entonces:*

- i) cualquier intersección de miembros de  $\mathcal{F}$  pertenece a  $\mathcal{F}$*
- ii) cualquier unión finita de miembros de  $\mathcal{F}$  pertenece a  $\mathcal{F}$*
- iii)  $\phi$  y  $X$  pertenecen a  $\mathcal{F}$*

**Definición 2.31** *Una función  $f$  de un espacio topológico  $(X, \tau)$  en  $(Y, \mu)$  es continua si y sólo si la imagen inversa de cada conjunto abierto es abierta. Más exactamente  $f$  es continua con respecto a  $\tau$  si y solo si  $f^{-1}(U) \in \tau$  para  $U \in \mu$ .(también se cumple para cerrados).*

**Definición 2.32** Un homeomorfismo o transformación topológica, es una función bi-unívoca continua de un espacio topológico de  $X$  sobre un espacio topológico  $Y$  tal que  $f^{-1}$  también es continua.

Si existe un homeomorfismo de un espacio sobre otro, ambos espacios se dicen homeomorfos.

Dos espacios topológicos son topológicamente equivalentes si son homeomorfos.

**Definición 2.33** Un espacio  $X$  es un espacio de Hausdorff si y solo si cuando  $x \neq y$  son puntos distintos de  $X$  existen  $U, V$  conjuntos disjuntos abiertos en  $X$  con  $x \in U \wedge y \in V$ .

**Ejemplo 2.9** Todo espacio métrico es de Hausdorff. Sea  $(X, d)$  un espacio métrico si  $x \neq y$  entonces  $d(x, y) = \varepsilon > 0$  de tal forma que las bolas  $B_{\varepsilon/2}(x)$  y  $B_{\varepsilon/2}(y)$  son conjuntos abiertos disjuntos que contienen a  $x, y$  respectivamente.

**Definición 2.34** Un espacio  $X$  es desconexo si y sólo si existen conjuntos abiertos disjuntos no vacíos  $H$  y  $K$  en  $X$  tal que  $X = H \cup K$ .

**Definición 2.35** Sea  $X$  un espacio métrico. Si  $x \in X$ ,  $C_x$  la componente conexa de  $x$  es el mayor conexo que contiene a  $x$  y está contenido en  $X$ .

**Definición 2.36** Un espacio métrico  $X$  es totalmente desconexo si y sólo si los subconjuntos conexos no vacíos de  $X$  son conjuntos unitarios.

**Definición 2.37** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\sim$  una relación de equivalencia sobre  $X$ . Se define  $[x]_{\sim}$

$$= \{y \in X \mid x \sim y\} \text{ y } X / \sim = \{[x]_{\sim} \mid x \in X\}.$$

**Definición 2.38** Si  $X$  es un espacio topológico,  $Y$  es un conjunto y  $g : X \rightarrow Y$  una función, entonces la colección  $\tau_g$  de subconjuntos de  $Y$  definida por:  $\tau_g = \{G \subset Y \mid g^{-1}(G) \text{ es abierto en } X\}$  es una topología en  $Y$  llamada topología cociente inducida en  $Y$  por  $g$ .

**Teorema 2.8** Si  $Y$  tiene la topología cociente inducida por una función  $f : X \rightarrow Y$ , entonces una función arbitraria  $g : Y \rightarrow Z$  es continua sí y sólo sí  $g \circ f : X \rightarrow Z$  es continua.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \circ f \searrow & & \swarrow g \\ & Z & \end{array}$$

## 2.5. Bases numéricas

Un sistema numérico es un conjunto de reglas y símbolos útiles para representar cantidades. Cuando expresamos un número en base  $n$  usamos los dígitos  $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . De esta manera si trabajamos en base 2 utilizamos los dígitos  $\{0, 1\}$ , en base 3  $\{0, 1, 2\}$ , en base 4  $\{0, 1, 2, 3\}$ , etc.

Si escribimos  $222_3$  esto se lee dos dos dos base tres.

Cuando la base necesita más de diez dígitos para representar números, entonces utilizamos las letras  $A, B, C, D, E, F, \dots$

Un número real  $r \in [0, 1]$  en el sistema base dos, llamado sistema binario se representa así:

$$0.a_1a_2a_3\dots = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots + \frac{a_i}{2^i} + \dots \quad a_i \in \{0, 1\}$$

En el sistema base 3 llamado sistema ternario:

$$0.b_1b_2b_3\dots = \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{3^2} + \frac{b_3}{3^3} + \dots + \frac{b_i}{3^i} + \dots \quad b_i \in \{0, 1, 2\}$$

y así análogamente para otra base numérica.

Un número entero en base dos se representa de la siguiente manera

$$a_0a_1a_2a_3\dots a_{n_2} = a_02^n + a_12^{n-1} + a_22^{n-2} + \dots + a_n$$

En base tres

$$b_0b_1b_2b_3\dots b_{n_3} = b_03^n + b_13^{n-1} + b_23^{n-2} + \dots + b_n.$$

**Teorema 2.9 (Fundamental de la numeración)** Sea  $b$  un entero mayor que 1. En-

tonces para todo  $a$  entero positivo existen  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  con cada  $a_i$  que cumple  $0 \leq a_i < b$  y tales que:

$$a = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \dots + a_nb^n.$$

El teorema anterior nos garantiza que todo número entero se puede expresar en base  $b > 1$ .

Pero más fuerte es comprobar que todo número real también se puede expresar en base  $b > 1$ .

Por medio de la siguiente tabla se presentan algunos ejemplos:

Base 10	Base 2	Base 3	Base 5	Base 12
1	$1_2$	$1_3$	$1_5$	$1_{12}$
2	$10_2$	$2_3$	$2_5$	$2_{12}$
3	$11_2$	$10_3$	$3_5$	$3_{12}$
4	$100_2$	$11_3$	$4_5$	$4_{12}$
5	$101_2$	$12_3$	$10_5$	$5_{12}$
6	$110_2$	$20_3$	$11_5$	$6_{12}$
7	$111_2$	$21_3$	$12_5$	$7_{12}$
8	$1000_2$	$22_3$	$13_5$	$8_{12}$
9	$1001_2$	$100_3$	$14_5$	$9_{12}$
10	$1010_2$	$101_3$	$20_5$	$A_{12}$
11	$1011_2$	$102_3$	$21_5$	$B_{12}$
12	$1100_2$	$110_3$	$22_5$	$10_{12}$
13	$1101_2$	$111_3$	$23_5$	$11_{12}$
14	$1110_2$	$112_3$	$24_5$	$12_{12}$
15	$1111_2$	$120_3$	$30_5$	$13_{12}$

# Capítulo 3

## Dos espacios homeomorfos: Cantor y los Códigos

“Génesis: En un principio el espacio era de Cantor: totalmente desconexo aunque compacto y perfecto (sin puntos aislados). Entonces llegó Dios y pegó de infinitas maneras, así aparecieron todos los espacios métricos compactos...” Rafael Isaacs.

El anterior planteamiento nos induce a mostrar que todos los espacios métricos compactos se pueden ver como una imagen continua del Espacio de Cantor.

Presentamos entonces una descripción de las propiedades de este espacio.

### 3.1. El Espacio de Cantor

#### 3.1.1. Generalidades y propiedades topológicas

Además de idear la teoría de conjuntos y la aritmética transfinita, George Cantor creó (o descubrió) un conjunto que lleva su nombre, el conjunto ternario de Cantor. Habiendo

desarrollado una teoría del infinito, demostró que no hay un único infinito como se creía por intuición. Determinó la cantidad de elementos de los naturales, los enteros y los racionales concluyendo que estos son cardinalmente equivalentes.

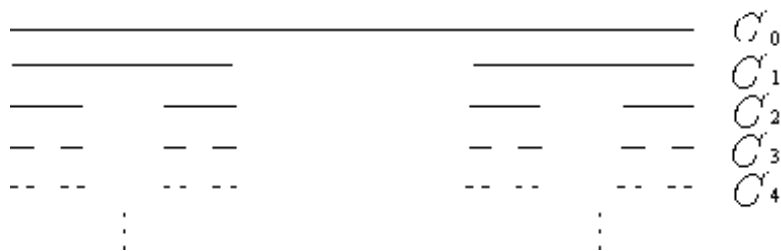
Al referirse a los números reales demostró que estos tienen la misma cantidad de elementos que un segmento de recta y que esta cantidad es mayor que la cardinalidad de los números racionales. Nuevamente, trayendo a colación la intuición se pensaría que todo conjunto que tenga como cardinal el continuo sería un segmento de recta o lo podría contener.

El conjunto ternario de Cantor es un ente matemático que resulta paradójico debido a que rompe con esta intuición y nos muestra la existencia de un conjunto que posee tantos elementos como los de un segmento de recta, sin poderlo contener.

Para construir este conjunto se inicia con el intervalo cerrado  $[0, 1]$ , el cual se divide en tres partes iguales y se elimina la del medio, obteniendo un conjunto  $C_1$  que es la unión de dos intervalos cerrados disjuntos de longitud  $1/3$ :  $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$

Con cada uno de los intervalos que forman  $C_1$  se repite el mismo proceso, obteniéndose  $C_2$  que es la unión de  $2^2$  intervalos cerrados disjuntos de longitud  $\frac{1}{3^2}$ :  $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{9}{9}]$ . Así mismo se obtiene  $C_3 = [0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{3}{27}] \cup [\frac{6}{27}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{9}{27}] \cup [\frac{18}{27}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{21}{27}] \cup [\frac{24}{27}, \frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27}, \frac{27}{27}]$ .

Iterando el proceso se construye una sucesión  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de conjuntos cerrados cada uno formado por la unión de  $2^n$  intervalos cerrados disjuntos de longitud  $\frac{1}{3^n}$ .



**Definición 3.1** El conjunto de Cantor denotado por  $\mathfrak{C}$  se define así:

$$\mathfrak{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

Teniendo en cuenta su construcción es conveniente representar el intervalo  $[0, 1]$  en base 3, es decir, utilizando únicamente los dígitos  $\{0, 1, 2\}$ .

Al suprimir el intervalo abierto  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  eliminamos aquellos números cuyo primer dígito necesariamente es 1.



Algunos números tienen dos representaciones ternarias, por ejemplo:  $\frac{1}{3} = 0,1 = 0,0222\dots$ ;  $\frac{2}{3} = 0,2 = 0,1222\dots$ , escogemos aquellas que no utilicen el dígito 1. Entonces, sólo quedan los que como primer dígito tienen el cero o el dos.

Al eliminar  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$  y  $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$  de la figura anterior se obtiene:



Para  $\frac{1}{3}$  elegimos la representación ternaria  $0,0222\dots$ , para  $\frac{1}{9}$  escogemos  $0,00222\dots$ , y para  $\frac{7}{9}$  tomamos  $0,20222\dots$ .

A continuación se verifica que estas representaciones ternarias son correctas:

$$\begin{aligned} 0,02\bar{2} &= \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots \\ &= \frac{2}{3^2} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \right) \\ &= \frac{2}{3^2} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \right) = \frac{2}{3^2} \left( \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0,00\bar{2} &= \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \dots \\
&= \frac{2}{3^3} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \right) \\
&= \frac{2}{3^3} \left( \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0,20\bar{2} &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \dots \\
&= \frac{2}{3} + \frac{2}{3^3} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \right) \\
&= \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}
\end{aligned}$$

Al suprimir  $\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$ ,  $\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$ ,  $\left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$ ,  $\left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$ , se obtiene:

y estas son algunas representaciones ternarias de esta iteración  $\frac{1}{27} = 0,000\bar{2}$ ;  $\frac{19}{27} = 0,200\bar{2}$   
 $\frac{7}{27} = 0,020\bar{2}$ ;  $\frac{25}{27} = 0,220\bar{2}$ .

De acuerdo a lo anterior cada elemento que pertenece al conjunto ternario de Cantor no contiene el dígito uno.

Note que toda representación ternaria finita que termina en uno puede ser reescrita como un ternario infinito periódico dos, por ejemplo  $0,1 = 0,0222\dots$

Entonces el conjunto de Cantor también se puede expresar así:

$$\mathfrak{C} = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}, x_i \in \{0, 2\} \right\}.$$

**Proposición 3.1** *El conjunto de Cantor tiene longitud nula.*

**Demostración.** Al construir el conjunto de Cantor se van suprimiendo intervalos abiertos así: en  $C_1$  se elimina  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  cuya longitud es  $\frac{1}{3}$ , en  $C_2$  se elimina  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$  cuya longitud es 2 veces  $\frac{1}{3^2}$ , en  $C_3$  se elimina

$$\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right) \cup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$$

es decir una longitud de  $2^2 \left(\frac{1}{3^3}\right)$

Entonces iterando hasta el infinito se tiene que la longitud total que se suprime es:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} + 2 \left(\frac{1}{3^2}\right) + 2^2 \left(\frac{1}{3^3}\right) + 2^3 \left(\frac{1}{3^4}\right) + \dots + 2^n \left(\frac{1}{3^{n+1}}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3} (3) = 1 \end{aligned}$$

Como la longitud de  $[0, 1]$  es 1 entonces la longitud del conjunto de Cantor es nula. ■

Si al conjunto de Cantor se le dota de su topología de subespacio viéndolo como un subconjunto de  $R$  con la topología usual, se puede hablar entonces del espacio topológico de Cantor, el cual claramente proviene de la métrica usual de  $R$ . Veamos algunas propiedades topológicas:

**Proposición 3.2**  $\mathfrak{C}$  es compacto.

**Demostración.** Para ver que  $\mathfrak{C}$  es compacto hay que recordar que en  $R^n$ , ser compacto es equivalente a ser cerrado y acotado.  $\mathfrak{C}$  es acotado porque se puede construir una bola que lo contenga, por ejemplo

$$\mathfrak{C} \subseteq B_2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

Para ver que es cerrado se tiene que para cada  $C_n$  en la sucesión es cerrado y por tanto

$\mathfrak{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$  es cerrado, por ser intersección arbitraria de cerrados. ■

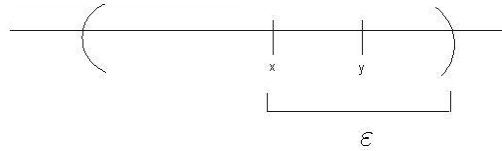
**Proposición 3.3** El conjunto de Cantor es perfecto.

**Demostración.** Puesto que  $\mathfrak{C}$  es cerrado falta ver que todo punto de  $\mathfrak{C}$  es punto de acumulación de  $\mathfrak{C}$ , es decir, si  $x \in \mathfrak{C}$  entonces  $x \in \mathfrak{C}'$ .

Sea  $x \in \mathfrak{C}$ ,  $x$  se puede escribir de la forma

$$x = \sum_{i=1}^n a_i 3^{-i} \text{ donde } a_i \in \{0, 2\}$$

Basta ver que  $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in \mathfrak{C} y \neq x$ , tal que  $y \in B_\varepsilon(x)$



en otras palabras  $0 < |x - y| < \varepsilon$ .

Para hallar  $y$  se procede así:

Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{3^k} < \varepsilon$  (Por propiedad arquimediana). Lo que se le exige a  $y$  es que se encuentre a una distancia menor que  $\varepsilon$  del elemento  $x$ , para lo cual se hará coincidir con las  $k$  primeras cifras ternarias de  $x$ . Así si

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_k}{3^k} + \frac{a_{k+1}}{3^{k+1}} + \dots$$

entonces

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 3^{-i} = \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{3^2} + \dots + \frac{b_k}{3^k} + \frac{b_{k+1}}{3^{k+1}} + \dots$$

donde  $a_i = b_i, \forall i = 1, 2, \dots, k$ . y  $b_{k+1} \neq a_{k+1}$

$$\begin{aligned}
|x - y| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i) 3^{-i} \right| \\
&= \left| \frac{(a_1 - b_1)}{3} + \frac{(a_2 - b_2)}{3^2} + \dots + \frac{(a_k - b_k)}{3^k} + \frac{(a_{k+1} - b_{k+1})}{3^{k+1}} + \dots \right| \\
&= \left| \frac{(a_{k+1} - b_{k+1})}{3^{k+1}} + \frac{(a_{k+2} - b_{k+2})}{3^k} + \dots \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a_{k+i} - b_{k+i})}{3^{k+i}} \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|(a_{k+i} - b_{k+i})|}{3^{k+i}} \quad (\text{Por desigualdad triangular}) \\
&= \frac{1}{3^k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|(a_{k+i} - b_{k+i})|}{3^i}
\end{aligned}$$

pero  $|(a_{k+i} - b_{k+i})| \leq 2, \forall i$ , luego

$$\begin{aligned}
|x - y| &\leq \frac{1}{3^k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|(a_{k+i} - b_{k+i})|}{3^i} \\
&\leq \frac{2}{3^k} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{2}{3^k} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - 1\right) \\
&= \frac{2}{3^k} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3^k} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Al observar el límite de la sucesión  $C_n$  se ve una especie de “polvo” donde cada elemento está desconectado de los demás en cuanto no se puede ir por un camino continuo de un punto a otro, esto nos conduce a demostrar otra importante propiedad topológica del espacio de Cantor.

**Proposición 3.4**  $\mathfrak{C}$  es *disconexo*

**Demostración.** Sea  $x, y \in \mathfrak{C}$ ,  $x \neq y$ , se debe encontrar un  $z \notin \mathfrak{C}$  tal que  $x < z < y$  de tal manera que  $z$  esté en una desconexión de  $\mathfrak{C}$ . De esta manera

$$\mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap [0, z)) \cup (\mathfrak{C} \cap (z, 1])$$

con

$$x \in A = (\mathfrak{C} \cap [0, z)) \text{ e } y \in B = (\mathfrak{C} \cap (z, 1])$$

Al representar  $x, y$  de tal forma que  $x < y$  se tiene:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}, \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 3^{-i} \text{ con } a_i, b_i \in \{0, 2\}$$

$a_i = b_i$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$  y  $a_k < b_k$  luego necesariamente  $a_k = 0, b_k = 2$  entonces podemos construir  $z$  así

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i 3^{-i} \text{ con } c_i = a_i = b_i \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, k-1.$$

y  $c_i = 1$  para  $i = k, k+1, k+2, \dots$  entonces

$$x = 0.a_1 a_2 \dots a_{k-1} \bar{0} \dots$$

$$y = 0.b_1 b_2 \dots b_{k-1} \bar{2} \dots$$

$$z = 0.c_1 c_2 \dots c_{k-1} \bar{1} \dots$$

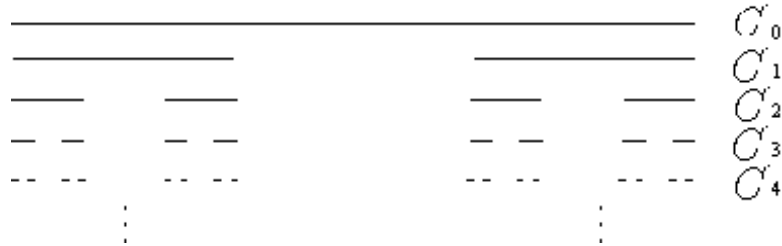
es claro que  $x < z < y$ , y que  $z \notin \mathfrak{C}$  porque en su representación ternaria se utiliza únicamente el 1.

En síntesis, lo que se hizo fue tomar dos elementos en  $\mathfrak{C}$  y notar que existe uno que esta entre ellos pero que no pertenece a  $\mathfrak{C}$  cumpliendo con una función de desconexión del conjunto. ■

Los conjuntos conexos de  $\mathbb{R}$  son segmentos de recta, debido a que el conjunto de Cantor no contiene ningún segmento de recta, entonces los conjuntos conexos del conjunto de Cantor son puntos, es decir,  $C_x = \{x\}$  para todo  $x \in \mathfrak{C}$ . Por lo anterior se afirma que  $\mathfrak{C}$  es totalmente desconexo.

### 3.1.2. Autosimilaridad y dimensión fractal en el conjunto de Cantor.

Al observar gráficamente el proceso de generación del conjunto de Cantor se tiene:



¿Qué lo convierte en un fractal? Dos propiedades características de todos ellos: es un conjunto autosimilar porque es la unión de dos copias de si mismo reducidas a un tercio de su tamaño original.

En cuanto a su dimensión fractal usando el teorema 2,6 pero recubriendo el conjunto de Cantor con cuadrados de lado  $\frac{1}{3^n}$  obtendremos:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\mathfrak{C})}{\ln 3^n}.$$

Necesitamos calcular  $N_n(\mathfrak{C})$ . En la iteración n-ésima se requieren  $2^n$  cuadrados de lado  $\frac{1}{3^n}$  para cubrir el conjunto correspondiente a cada paso. Por lo tanto  $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,63092975$

La dimensión topológica de  $\mathfrak{C}$  es cero, se observa que su dimensión fractal es mayor, es un valor entre cero y uno.

### 3.1.3. El conjunto de Cantor como atractor de un Sistema Iterado de Funciones.

Mostraremos a continuación que el conjunto de Cantor es el atractor de un SIF.

Consideremos  $\mathbb{R}$  como espacio métrico completo, usando la métrica euclidiana  $(\mathbb{R}, d_u)$ ; el espacio métrico completo  $(\mathcal{H}(\mathbb{R}), h(d_u))$  y las siguientes contracciones:

$$\omega_1(x) = \frac{1}{3}x$$

$$\omega_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Claramente el factor de contracción  $s = \frac{1}{3}$ . Tenemos que  $\{\mathbb{R}; \omega_1, \omega_2\}$  es un Sistema Iterado de Funciones. De acuerdo con el teorema 2,5 la transformación  $W(B) = \bigcup_{n=1}^2 \omega_n(B)$  para todo  $B \in \mathcal{H}(X)$  es una contracción para la cual existe  $A \neq \phi$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}$  compacto tal que  $A$  es el atractor del *SIF*, es decir, para todo  $B \subseteq \mathbb{R}$  compacto y no vacío  $\lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(B) = A$  y  $W(A) = A$ .

Bien, ahora mostraremos que  $A$  es el conjunto de Cantor probando por inducción que la acción de  $W(B)$  es eliminar la tercera parte del medio de cada intervalo en  $B$ . Nuestra hipótesis es: Sea  $[a, b]$  una componente de  $B_k$  con  $k < n$ . Entonces:

$$\left[ a, a + \frac{1}{3}(b-a) \right] \cup \left[ b - \frac{1}{3}(b-a), b \right] \subset B_{k+1}$$

y

$$\left( a + \frac{1}{3}(b-a), b - \frac{1}{3}(b-a) \right) \cap B_{k+1} = \phi.$$

Establecemos que esto es verdadero para el primer caso:

$B_0 = [0, 1]$  entonces

$$B_1 = W(B_0) = \omega_1(B_0) \cup \omega_2(B_0) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Suponemos que  $[a, b] \subseteq B_n$  es una componente de  $B_n$  entonces existe una componente  $[a', b'] \subseteq B_{n-1}$  cuya imagen es  $[a, b]$  por algún  $\omega_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Por hipótesis, a la componente  $[a', b']$  se le ha sustraído la tercera parte del medio en  $B_n$ .

Entonces  $[a, b]$  es reemplazada en  $B_{n+1}$  por el conjunto

$$w_i = \left( \left[ a' + \frac{1}{3}(b' - a') \right] \cup \left[ b' - \frac{1}{3}(b' - a') \right] \right) = \left[ a + \frac{1}{3}(b - a) \right] \cup \left[ b - \frac{1}{3}(b - a) \right]$$

de esta manera la longitud  $b' - a'$  es igual a  $b - a$  y claramente los puntos  $a', b'$  son correspondientes a  $a, b$ .

Por consiguiente esta operación es una eliminación de la tercera parte del medio. Entonces  $A$ , el atractor del  $SIF$  es el conjunto de Cantor. ■

A continuación presentamos otra demostración de la misma proposición.

Para probar que el conjunto de Cantor es el atractor del SIF presentado basta demostrar que  $W(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ .

En efecto,

$$\begin{aligned} W(\mathbb{C}) &= W\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = w_1\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_i\right) \cup w_2\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_i\right) = \\ &= \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} w_1(C_i)\right] \cup \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} w_2(C_i)\right] \end{aligned}$$

esta última igualdad se tiene porque  $w_1, w_2$  son transformaciones biyectivas de tal manera que:

$$W(\mathbb{C}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} [w_1(C_i) \cup w_2(C_i)] = \bigcap_{n=1}^{\infty} W(C_i) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{i+1} = \mathbb{C}$$

porque  $C_{i+1} \subseteq C_i$

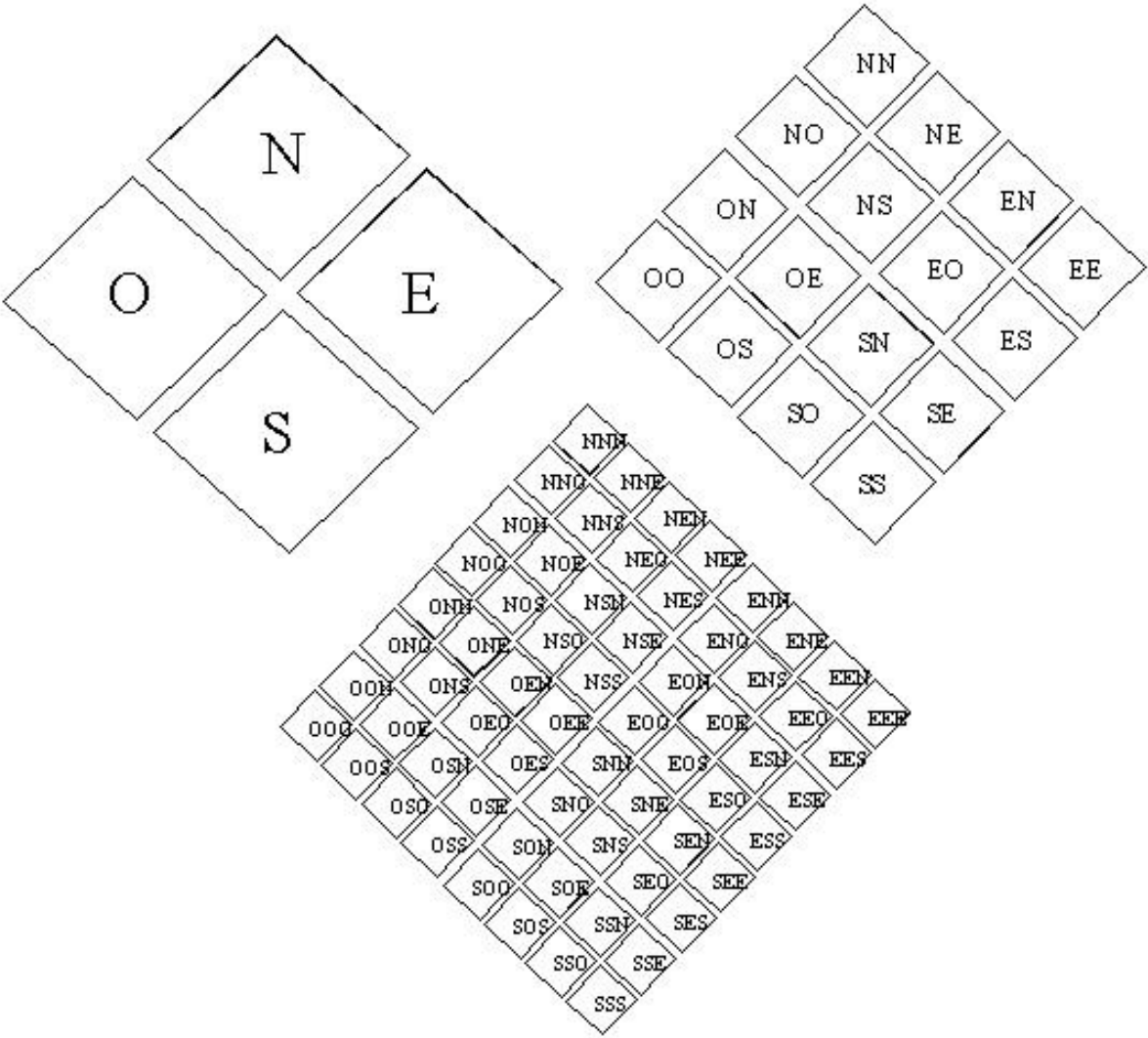
es decir,  $\mathbb{C}$  es el atractor de  $\{\mathbb{R}^2, w_1, w_2\}$ . ■

## 3.2. El Espacio de los Códigos

Este espacio es muy importante y al tiempo útil porque permite identificar los elementos de conjuntos atractores de Sistemas Iterados de Funciones, dotándolos de la propiedad de ubicación debido a que cada código representa una dirección.

Imaginemos que nos encontramos perdidos en una ciudad llamada Cantorlandia, la codificación del espacio nos resulta indispensable para realizar recorridos, de esta forma podemos pensar en una orientación de tal manera que cada nomenclatura se dé con sucesiones infinitas de letras  $N, S, E, O$  que simbolizan los puntos cardinales norte, sur, este, oeste respectivamente.

A continuación se muestra en la figura una sucesión de mapas, siendo cada uno más preciso y detallado que el anterior.



Si necesitamos ir de  $O$  a  $N$  debemos pagar  $\frac{1}{3}$  (entre puntos correspondientes).

Para desplazarnos de  $NO$  a  $ON$  debemos cancelar una tarifa de  $\frac{1}{3} + \frac{1}{9}$ .

Para ir de  $NON$  a  $SES$  debemos pagar  $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$ .

Estos valores representan la métrica asociada a este espacio topológico.

Ahora bien, en lugar de utilizar  $O, N, E, S$  podemos tomar  $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$ , las sucesiones de estos dígitos que se definen como códigos, se nota  $\Sigma^{\mathbb{N}}$ . La métrica  $d_c$  en este conjunto sirve para determinar la distancia entre dos puntos  $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots, \beta = \beta_1\beta_2\beta_3\dots$  de la siguiente manera:

$d_c(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\alpha_i \Delta \beta_i)}{3^i}$ , donde  $\alpha_i \Delta \beta_i$  es igual a cero si  $\alpha_i = \beta_i$  y  $\alpha_i \Delta \beta_i$  es igual a uno, si  $\alpha_i \neq \beta_i$ .

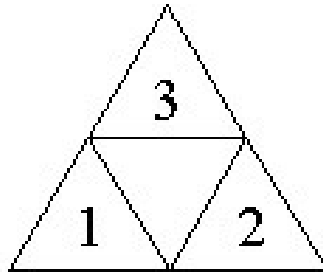
Por ejemplo la distancia entre  $\alpha = 00321001$  y  $\beta = 00231002$  es  $\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^8}$ , que coincide con la tarifa que tenemos que pagar para ir de  $\alpha$  a  $\beta$ .  $\Sigma^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma \mid f \text{ es función}\}$  con esta métrica se denomina Espacio de los Códigos que Barnsley [1998] introduce así:

**Definición 3.2** Siendo  $\Sigma = \{1, 2, 3, \dots, N\}$  El Espacio de los Códigos  $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$  se define con la métrica dada por:

$$d_c(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^N \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i} \text{ para todo } \alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}.$$

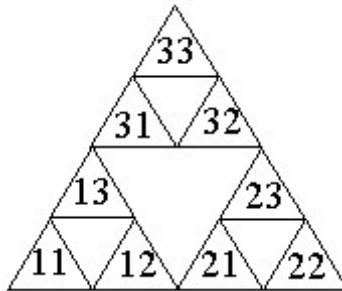
*Nota:*  $\Sigma^*$  denota el conjunto de códigos finitos incluyendo el código vacío  $\lambda$ .

Veamos una aplicación del Espacio de Códigos a través de las direcciones en el triángulo de Sierpiński. (semejante al conjunto de Cantorlandia). Empecemos por asignar códigos a los puntos del paso 1 es decir, a los puntos de  $A_1$  como se muestra en la figura:

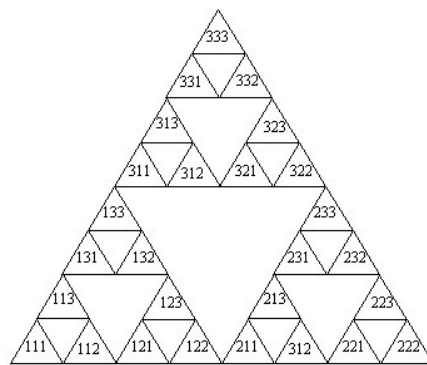


Al realizar el paso 2, utilizamos la propiedad de autosimilitud al dividir cada uno de

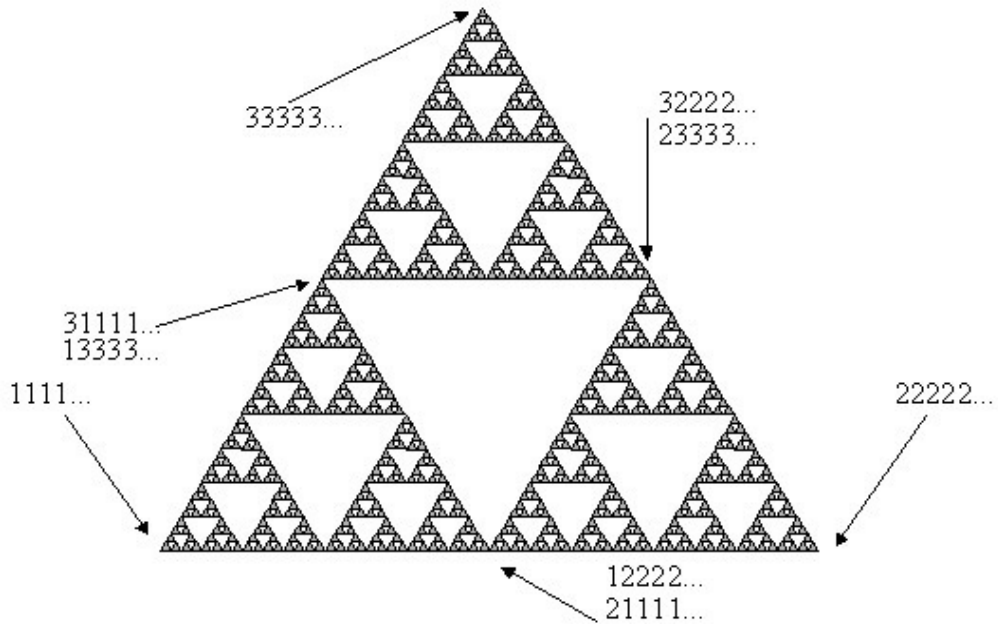
los triángulos anteriores en otros tres triángulos, como se elaboró en  $A_1$



De igual manera obtenemos la numeración para  $A_3$



Al realizar análogamente lo anterior a  $A_n$ , cuando  $n \rightarrow \infty$  obtenemos el triángulo de Sierpiński



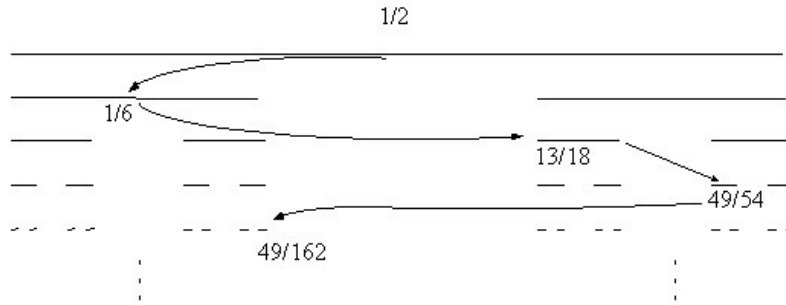
### 3.3. El Espacio de los Códigos y el Espacio de Cantor son homeomorfos

**Teorema 3.1** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Sea  $\{X, w_n : n = 1, 2, 3, \dots, N\}$  un SIF, siendo  $A$  el atractor del SIF.  $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$  denota el Espacio de los Códigos asociado con el SIF. Para cada  $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in X$ , se tiene la función  $\phi(\alpha, n, x) = w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ w_{\alpha_3} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x)$  entonces  $\phi(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\alpha, n, x)$  existe, y pertenece a  $A$ . La función  $\phi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow A$  es continua y sobreyectiva.

De acuerdo al Teorema anterior podemos establecer la función  $\gamma : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathfrak{C}$  entre el Espacio de los Códigos y el Conjunto de Cantor:  $([0, 1], d_u)$  es un espacio métrico completo; el SIF  $\{[0, 1], w_1 = \frac{1}{3}x, w_2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\}$  tiene como atractor el conjunto de Cantor, luego  $\gamma(\alpha, n, x) = w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ w_{\alpha_3} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x)$  y  $\alpha_i \in \{1, 2\}$ .

El número de símbolos ( $N$ ) coincide con el número de contracciones del SIF.

Para visualizar las imágenes de la función  $\gamma$  hallemos  $\gamma(1221, 4, \frac{1}{2}) = w_1 \circ w_2 \circ w_2 \circ w_1(\frac{1}{2})$



Se concluye que todo elemento del conjunto de Cantor se puede ubicar por medio de una dirección porque la función es sobreyectiva.

**Definición 3.3** Sea  $\{X, w_n : n = 1, 2, 3, \dots, N\}$  un SIF asociado al Espacio de los Códigos  $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$ . Sea  $\phi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow A$  la función continua del teorema 3.1. Una dirección de un punto  $x \in A$  es un elemento del conjunto  $\phi^{-1}(x) = \{\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}} : \phi(\alpha) = x\}$  llamado conjunto de direcciones de  $x \in A$ .

El SIF se dice totalmente desconexo si cada punto de su atractor posee una única dirección.

**Teorema 3.2** *Sea  $\{X; w_n, n = 1, 2, 3, \dots, N\}$  un SIF cuyo atractor es  $A$ . El SIF es totalmente desconexo si y solo si*

$$w_i(A) \cap w_j(A) = \phi \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\} \text{ con } i \neq j$$

Probemos de acuerdo al teorema anterior que el conjunto de Cantor es totalmente desconexo.

Sabemos que el SIF que genera el conjunto de Cantor es  $\{[0, 1]; w_1 = \frac{1}{3}x, w_2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\}$  El atractor  $\mathfrak{C}$  es un subconjunto de  $[0, 1]$  y  $w_1([0, 1]) = [0, \frac{1}{3}]$  y  $w_2([0, 1]) = [\frac{2}{3}, 1]$  entonces  $w_1([0, 1]) \cap w_2([0, 1]) = \phi$  por lo cual  $w_1([\mathfrak{C}]) \cap w_2([\mathfrak{C}]) \subset w_1([0, 1]) \cap w_2([0, 1]) = \phi$  por consiguiente,  $w_1([\mathfrak{C}]) \cap w_2([\mathfrak{C}]) = \phi$ . El SIF es totalmente desconexo.

Cada uno de los elementos del conjunto de Cantor posee una única dirección. Esto implica que  $\gamma$  es una función inyectiva. De acuerdo a la definición 2.4  $\gamma^{-1}(\mathfrak{C})$  es función.

Podemos asignar las direcciones a los elementos del conjunto de Cantor de la siguiente manera:



**Teorema 3.3** *Una función continua, inyectiva y sobreyectiva de un espacio compacto  $X$  en un espacio de Hausdorff  $Y$ , es un homeomorfismo.*

La demostración del teorema anterior se encuentra en ([6]).

Debemos demostrar que  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  es compacto y que  $\mathfrak{C}$  es espacio de Hausdorff.

Primero veamos cómo son las bolas en  $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$

**Proposición 3.5** *Sea  $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  y  $\varepsilon > 0$  entonces*

$$B_\varepsilon(\alpha) = \begin{cases} \Sigma^{\mathbb{N}} & \text{si } \varepsilon \geq 1 \\ \{\beta \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid \alpha_i = \beta_i \forall i = 1, 2, \dots, k\} & \text{para algún } k \in \mathbb{N}, \text{ si } \varepsilon < 1 \end{cases}$$

**Demostración.** Sea  $\alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}, \forall i \in \mathbb{N}$  se tiene que  $|\alpha_i - \beta_i| < N$  así

$$d_c(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N}{(N+1)^i} = N \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(N+1)^i} = 1$$

luego si  $\varepsilon \geq 1$ , se tiene que  $B_\varepsilon(\alpha) = \Sigma^{\mathbb{N}}$

Tomando  $\varepsilon < 1$  podemos encontrar  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{1}{(N+1)^{k+1}} < \varepsilon \leq \frac{1}{(N+1)^k}$$

Demostremos que

$$B_\varepsilon(\alpha) = \{\beta \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid \alpha_i = \beta_i \forall i = 1, 2, \dots, k\},$$

es decir,  $B_\varepsilon(\alpha)$  es el conjunto de todos los códigos que empiezan por  $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k$ .

Si  $\beta \in B_\varepsilon(\alpha)$  entonces

$$d_c(\alpha, \beta) < \varepsilon \leq \frac{1}{(N+1)^k}$$

si para algún  $i \in \mathbb{N}$  con  $1 \leq i \leq k$  se tuviese que  $\alpha_i \neq \beta_i$ , tendríamos que  $|\alpha_i - \beta_i| \geq 1$

lo que implica que

$$d_c(\alpha, \beta) \geq \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i} \geq \frac{1}{(N+1)^i} \geq \frac{1}{(N+1)^k} \geq \varepsilon$$

lo cual es contradictorio, esto nos garantiza que  $\alpha_i = \beta_i \forall i = 1, 2, 3, \dots, k$ .

Si  $\beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  con  $\alpha_i = \beta_i \forall i = 1, 2, 3, \dots, k$  entonces

$$d_c(\alpha, \beta) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i} < \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{N}{(N+1)^i} = \frac{1}{(N+1)^{k+1}} < \varepsilon$$

es decir  $\beta \in B_\varepsilon(\alpha)$ . ■

La anterior demostración se encuentra en ([5]).

**Proposición 3.6**  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  es compacto

**Demostación.** Para ver que  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  es compacto debemos demostrar que  $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$  es completo y totalmente acotado.

$(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$  es un espacio métrico completo. Sea  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy en  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  entonces dado  $\varepsilon > 0$  existe  $M > 0$  tal que  $d_c(\beta_n, \beta_m) < \varepsilon$  para todo  $n, m > M$ . En particular si escogemos  $\varepsilon = \frac{1}{(N+1)^k}$ ,  $n, m > M_k$ .  $\beta_n, \beta_m$  deben coincidir en los primeros  $k$  términos,  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k$  tales términos. Entonces  $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  y para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $M$  tal que  $d(\alpha, \beta_n) < \varepsilon$  si  $n > M$ . En otras palabras  $\alpha$  es el límite de  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Entonces el Espacio de los Códigos es completo.

$(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$  es totalmente acotado. Tomemos el conjunto finito de códigos  $\Sigma^k 000\dots$  el cual tiene  $2^k$  elementos y está contenido en  $\Sigma^{\mathbb{N}}$ . Entonces  $\{Y_i\}_{i=1}^{2^k} = \Sigma^k 000\dots$

Dado  $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  sus primeros  $k$  dígitos coinciden con algún  $Y_i$ , entonces:

$$d_c(\alpha, Y_i) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - Y_i|}{(N+1)^i} < \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{N}{(N+1)^i} = \frac{1}{(N+1)^{k+1}} < \varepsilon$$

entonces  $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$  es totalmente acotado.

Luego  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  es compacto. ■

**Proposición 3.7** Cantor es espacio de Hausdorff

Todo lo anterior nos permite concluir que la función  $\gamma : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow C$  es un homeomorfismo en virtud al teorema 3.3.

El espacio de Cantor es el único espacio métrico totalmente desconexo, compacto y perfecto (salvo homeomorfismos) pues todos los espacios métricos que también exhiban estas propiedades son homeomorfos al Espacio de Cantor.

# Capítulo 4

## Curvas que llenan el plano

“Algunos objetos matemáticos como la curva de Peano, son totalmente antiintuitivos”.

*Diedonné.(1975)*

Estamos preparados para abordar un estudio más formal de las curvas que llenan el plano. Teniendo una noción de estas "manchas oscuras"(Ver capítulo 1) será más fácil lograr la comprensión de tan sorprendentes entes matemáticos.

Se iniciará aclarando algunos conceptos importantes que conforman un lenguaje correcto, y apropiado para lograr el entendimiento de esta interesante temática.

**Definición 4.1** Si  $f$  es una función de un subconjunto de  $\mathbb{R}^m$  en  $\mathbb{R}^n$  entonces  $f_*(A) = \{f(x) \in R(f) \mid x \in A \cap D(f)\}$  donde  $A \subset \mathbb{R}^m$  es llamada imagen directa de  $A$  bajo  $f$ .  $D(f)$  denota el dominio y  $R(f)$  el rango de la función  $f$ .

**Definición 4.2** Si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es continua entonces la imagen  $f_*([0, 1])$  es llamada “curva en el plano”  $f(0)$  es el punto inicial de la curva y  $f(1)$  es el punto final de la curva.

Ahora bien, para definir “curva que llena el plano” es necesario hablar del contenido de Jordan bidimensional, concepto que nos remite a la teoría de dimensión la cual no se aborda de manera formal en esta monografía.

Se asumirá entonces que el contenido de Jordan bidimensional representa el área de un subconjunto del plano y se denotará  $J_2(A)$  siendo  $A$  dicho subconjunto. Por ejemplo:  $J_2([0, 1]^2) = 1$ ,  $J_2([0, 2]^2) = 4$  porque 1 es el área del cuadrado  $[0, 1]^2$  y 4 es al área del cuadrado  $[0, 2]^2$ .

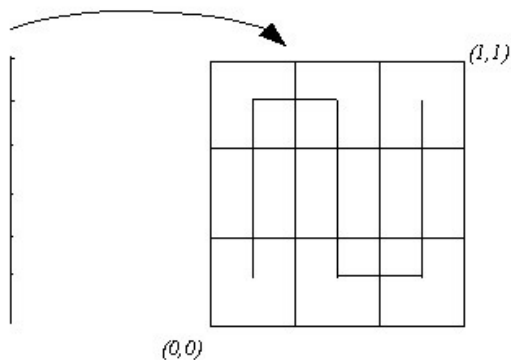
**Definición 4.3** Si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es continua y  $J_2(f_*(I)) > 0$  entonces  $f_*([0, 1])$  es una curva que llena el plano.

## 4.1. Curva de Peano

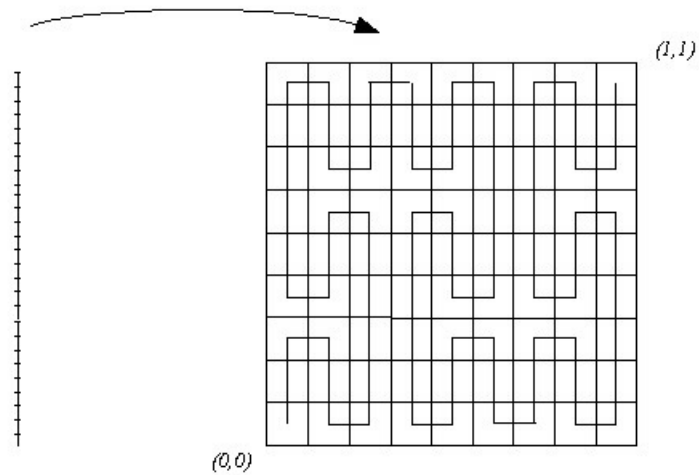
### 4.1.1. Generalidades

El intervalo  $[0, 1]$  puede ser trazado de forma continua al cuadrado  $[0, 1]^2$  de varias maneras, una de ellas se presenta a continuación:

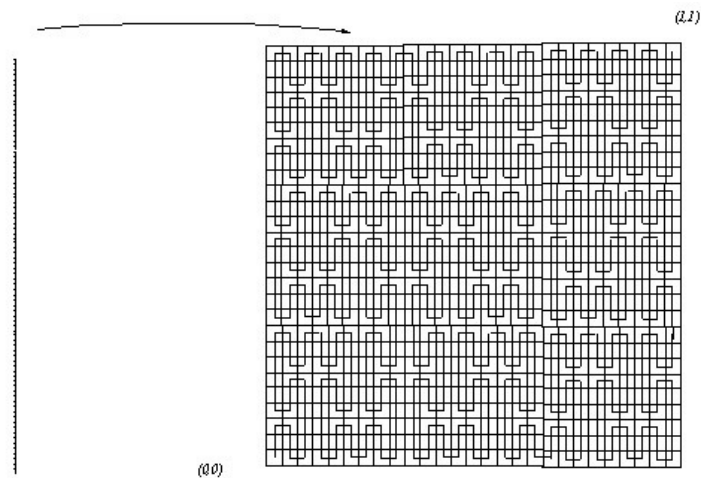
Se particiona el intervalo  $[0, 1]$  en 9 subintervalos congruentes y  $[0, 1]^2$  en 9 subcuadrados congruentes, para luego hacer una correspondencia continua de cada subintervalo a cada subcuadrado (ver figura)



Luego se repite el proceso con cada subintervalo, y con cada subcuadrado. En la segunda iteración  $[0, 1]$  está particionado en 81 subintervalos cada uno de ellos se hace corresponder con los 81 subcuadrados que conforman  $[0, 1]^2$



En la tercera iteración  $[0, 1]$  está dividido en  $3^6$  subintervalos y  $[0, 1]^2$  en  $3^6$  subcuadrados, la relación de correspondencia está dada como se muestra en la figura:



Si este proceso se realiza un número infinito de veces  $[0, 1]$  y  $[0, 1]^2$  se divide en  $3^{2n}$  réplicas congruentes para  $n = 1, 2, 3, \dots$

**Definición 4.4** *Todo  $t \in [0, 1]$  está únicamente determinado por una secuencia de*

intervalos cerrados anidados (que son generados por la partición sucesiva) las longitudes de los cuales se aproximan a cero.

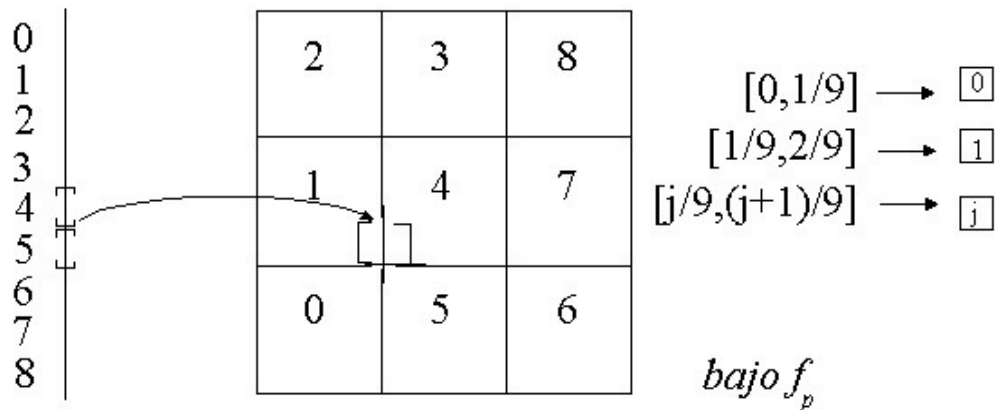
A esta secuencia corresponde una única secuencia de cuadrados cerrados anidados, las diagonales de los cuales se aproximan a un punto único en  $[0, 1]^2$  que corresponde a la imagen de  $t$ . El conjunto de todas las imágenes es lo que se conoce como CURVA DE PEANO.

Ahora bien, llámese a esta función  $f_P : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  donde

$$f_{P^*}([0, 1]) = \{f_P(t) \in R(f_P) \mid t \in [0, 1]\}$$

es la curva de Peano.

Si  $t$  es el punto final de uno de los subintervalos entonces este corresponde a dos secuencias diferentes de intervalos anidados. Sin embargo desde que las secuencias adyacentes estén en correspondencia con subcuadrados adyacentes, ésto conduce a la misma imagen



**Proposición 4.1**  $f_P$  es sobreyectiva, es decir, pasa a través de todos los puntos del cuadrado  $[0, 1]^2$

**Demostración.** Tome cualquier punto  $(x, y) \in [0, 1]^2$ . Este punto está situado en una secuencia de cuadrados cerrados anidados, las diagonales de los cuales se aproximan a

este punto. Esta secuencia está en correspondencia con una secuencia de subintervalos cerrados anidados, cuya longitud se acerca a cero y por consiguiente define un único punto  $t \in [0, 1]^2$ , de lo que se tiene que  $f_P(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . ■

**Proposición 4.2** *La función  $f_P : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  es continua.*

**Demostración.** La función  $f_P$  particiona en la  $n$ -ésima iteración al intervalo  $[0, 1]$  en  $3^{2n}$  subintervalos ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) de longitud  $\frac{1}{3^n}$  cada uno.

Escojamos  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  tal que  $|t_1 - t_2| < \frac{1}{3^n}$ ,  $[t_1, t_2]$  cubre en parte, a lo más dos intervalos consecutivos y las imágenes están situadas en dos cuadrados consecutivos de lado  $\frac{1}{3^n}$  que conforman un rectángulo con diagonal de longitud  $\frac{\sqrt{5}}{3^n}$ , por lo cual se tiene que  $|f_P(t_1) - f_P(t_2)| \leq \frac{\sqrt{5}}{3^n}$ . ■

Por ser  $f_P$  sobreyectiva, es claro que  $J_2(f_P^*[0, 1]) = J_2([0, 1]^2) = 1$

reuniendo lo anterior, se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 4.1** *La curva de Peano es una curva que llena el plano.*

**Teorema 4.2** *La curva de Peano es no diferenciable.*

**Demostración.** Para algún  $t \in [0, 1]$  escojamos  $t_n \in [0, 1]$  tal que  $|t - t_n| \leq \frac{10}{3^{2n}}$ , siendo  $n \geq 3$

Sea  $f_P(t) = (x, y)$ ,  $f_P(t_n) = (x_n, y_n)$ . Por la construcción geométrica de la curva de Peano  $x, x_n$  distan por lo menos un cuadrado de lado  $\frac{1}{3^n}$  al igual que  $y, y_n$  por lo que:

$$\begin{aligned} \frac{|x - x_n|}{|t - t_n|} &\geq \frac{1}{3^n} \cdot \frac{3^{2n}}{10} = \frac{3^n}{10} \\ \frac{|y - y_n|}{|t - t_n|} &\geq \frac{1}{3^n} \cdot \frac{3^{2n}}{10} = \frac{3^n}{10} \end{aligned}$$

luego es no diferenciable. ■

### 4.1.2. Construcción de la Curva de Peano a través del Espacio de los Códigos

Para construir la Curva de Peano a través del espacio de los códigos es necesario definir algunos conceptos:

**Definición 4.5** Sea  $u \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  y  $w \in \Sigma^*$ , la transformación  $T_w : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \Sigma^{\mathbb{N}}$  se define por  $T_w(u) = wu$

$T_w$  toma un código  $u = u_1, u_2, u_3, \dots, u \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  y le antepone  $w = w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$  (recuerde que  $w \in \Sigma^*$ ) para formar un nuevo código. Esta transformación es inyectiva.

Bien, ahora pensemos en el Espacio de Cantor ¿Que puntos debemos unir o pegar para que a partir de éste, obtengamos el intervalo  $[0, 1]$ ?



En  $C_1$  habrá que pegar  $0111\dots$  con  $1000\dots$ ; en  $C_2$  se une  $00111\dots$  con  $01000\dots$ ; en  $C_3$  pegamos  $0001111\dots$  con  $0010000\dots$ ;  $010111\dots$  con  $011000\dots$ ;  $100111\dots$  con  $101000\dots$ ;  $110111\dots$  con  $111000\dots$

y así sucesivamente haremos infinitos pegamientos.

Infinitos pegamientos quiere decir que  $w0111\dots$  se une con  $w1000\dots$  es decir  $T_w(0111\dots)$  se pega con  $T_w(1000\dots)$ , para todo  $w \in \Sigma^*$ .

De esta manera obtenemos el espacio métrico compacto  $([0, 1], d_u)$  siendo  $d_u$  la métrica euclidiana de la recta.

**Definición 4.6** Una relación de equivalencia  $R$  (relación reflexiva, simétrica, transitiva) sobre el espacio de los Códigos, es una congruencia si para todo código  $w \in \Sigma^*$  y todo par de códigos  $x, y \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  se tiene que  $xRy$  implica que  $(wx)R(wy)$

Al haber construido  $[0, 1]$  a partir del Espacio de Cantor encontramos que  $0111\dots R1000\dots$  al anteponer a estos códigos relacionados el 0 obtuvimos que  $00111\dots R01000\dots$ , al anteponer el mismo código finito a  $0111\dots, 1000\dots$  encontramos una nueva relación. Entonces podemos afirmar que la pareja de códigos  $0111\dots, 1000\dots$  genera infinitas parejas que también están relacionadas

**Definición 4.7** Si  $(X, d)$  es un espacio métrico que se puede construir a través de congruencias, entonces  $(X, d)$  es un espacio de congruencia sobre  $\Sigma^{\mathbb{N}}$ .

Los espacios de congruencia pueden considerarse codificados en cuanto para cada punto en uno de dichos espacios, existe uno o varios códigos que lo identifican.

Podemos ahora construir una función  $g$  entre dos conjuntos compactos autosimilares  $K_1, K_2$  con la intención de obtener una curva que llena el plano.

Sea  $f : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow K_1$  una función que codifica a  $K_1$  y  $h : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow K_2$  una función que codifica a  $K_2$  entonces  $g : K_1 \rightarrow K_2$  la construimos de tal forma que  $g \circ f(\alpha) = h(\alpha)$  con  $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  para que  $g$  esté bien definida se exige

$$i) g(x) = y \Leftrightarrow (f(\alpha) = x \Rightarrow h(\alpha) = y)$$

$$ii) f(\alpha) = f(\beta) \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

$$\forall x \in K_1, \forall y \in K_2, \forall \alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$$

Para tener más claridad, se presenta el siguiente diagrama, donde  $I : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \Sigma^{\mathbb{N}}$  es la función idéntica:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{I} & \Sigma^{\mathbb{N}} \\ f \downarrow & & \downarrow h \\ K_1 & \xrightarrow{g} & K_2 \end{array}$$

La imagen de  $g$  la podemos obtener por dos caminos diferentes  $h(\alpha) = y$  o  $g(f(\alpha)) = y$ , siendo  $f(\alpha) = x$ , por eso el diagrama conmuta.

Si además tenemos que  $K_1, K_2$  son conjuntos atractores de un SIF entonces  $K_1, K_2$  son espacios cocientes de Cantor. Lo escrito anteriormente se encuentra demostrado en ([6]).

Por el teorema 2,9 debido a que  $h$  es continua se garantiza la continuidad de  $g$ .

Recordemos que una curva que llena el plano se genera a través de una función continua.

**Teorema 4.3** Sean  $K_1$  y  $K_2$  espacios de congruencia sobre  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  tal que para todo  $\alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  se tenga que  $\alpha \equiv \beta$  (en  $K_1$ ) implique  $\alpha \equiv \beta$  (en  $K_2$ ) entonces la relación por códigos es una relación continua  $g : K_1 \rightarrow K_2$ .

**Corolario 4.1** Si numeramos el intervalo  $[0, 1]$  en base 9 y si  $K$  es un espacio de congruencia sobre  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  en donde se cumple:

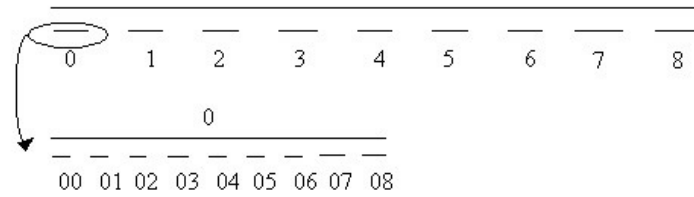
$$\begin{aligned} 0888\dots &\equiv 1000\dots & 2888\dots &\equiv 3000\dots & 4888\dots &\equiv 5000\dots \\ 1888\dots &\equiv 2000\dots & 3888\dots &\equiv 4000\dots & 5888\dots &\equiv 6000\dots \\ 6888\dots &\equiv 7000\dots & 7888\dots &\equiv 8000\dots & & \end{aligned}$$

entonces la relación continua  $g : [0, 1] \rightarrow K$  es la curva de Peano.

Bien, iniciemos la numeración del intervalo  $[0, 1]$  en base 9.

Dividimos  $[0, 1]$  en nueve segmentos congruentes, esta división determina la primera cifra.

Luego volvemos a dividir cada uno de los segmentos en nueve subintervalos para obtener la segunda cifra y así sucesivamente.



Para obtener nuevamente el intervalo  $[0, 1]$  establecemos las siguientes congruencias:

$$\begin{aligned}
 0888\dots &\equiv 1000\dots, & 1888\dots &\equiv 2000\dots, \\
 2888\dots &\equiv 3000\dots, & 3888\dots &\equiv 4000\dots, \\
 4888\dots &\equiv 5000\dots, & 5888\dots &\equiv 6000\dots, \\
 6888\dots &\equiv 7000\dots, & 7888\dots &\equiv 8000\dots
 \end{aligned}$$

Al establecer la codificación anterior de manera conveniente sobre el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  obtenemos con exactitud la imagen de cada punto.

2	3	8
1	4	7
0	5	6

Primer dígito

2	3	8	0	5	6	2	3	8
1	4	7	1	4	7	1	4	7
0	5	6	2	3	8	0	5	6
8	3	2	6	5	0	8	3	2
7	4	1	7	4	1	7	4	1
6	5	0	8	3	2	6	5	0
2	3	8	0	5	6	2	3	8
1	4	7	1	4	7	1	4	7
0	5	6	2	3	8	0	5	6

Segundo dígito

2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8
1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7
0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6
8	3	2	6	5	0	8	3	2	6	5	0	8	3	2	6	5	0	8	3	2
7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1
6	5	0	8	3	2	6	5	0	8	3	2	6	5	0	8	3	2	6	5	0
2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8
1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7
0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6
8	3	2	6	5	0	8	3	2	6	5	0	8	3	2	6	5	0	8	3	2
7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1
6	5	0	8	3	2	6	5	0	8	3	2	6	5	0	8	3	2	6	5	0
2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8
1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7
0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6
8	3	2	6	5	0	8	3	2	6	5	0	8	3	2	6	5	0	8	3	2
7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1
6	5	0	8	3	2	6	5	0	8	3	2	6	5	0	8	3	2	6	5	0
2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8
1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7
0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6
8	3	2	6	5	0	8	3	2	6	5	0	8	3	2	6	5	0	8	3	2
7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1
6	5	0	8	3	2	6	5	0	8	3	2	6	5	0	8	3	2	6	5	0
2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8
1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7
0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6	2	3	8	0	5	6

Según el colorario tenemos que la relación por códigos presentada anteriormente es la curva de Peano.

Para tener más claridad sobre el asunto hagamos un estudio particular basándonos en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{I} & \Sigma^{\mathbb{N}} \\ f \downarrow & & \downarrow h \\ [0, 1] & \xrightarrow{g} & [0, 1]^2 \end{array}$$

Sabemos ya que  $g$  es continua como consecuencia de la continuidad de  $h$ , además claramente  $g$  es sobreyectiva entonces la función  $g$  nos genera una curva que llena el plano. Analicemos lo que sucede con la imagen de  $1/2$ .  $1/2$  en base 9 es  $0,444\dots$  ¿Quién es  $f(0,444\dots)$  y  $h(0,444\dots)$ ? ambas imágenes conllevan al punto medio, es decir  $f(0,444\dots)$  es el punto medio del intervalo  $[0, 1]$ , y  $h(0,444\dots)$  es el punto centro del cuadrado, es decir,  $(1/2, 1/2)$ , entonces  $g(1/2) = (1/2, 1/2)$ ; el punto medio del intervalo  $[0, 1]$  encuentra su imagen en el punto centro del cuadrado.

Ahora, si queremos hallar la imagen del punto correspondiente a  $\frac{5}{9}$  del intervalo  $[0, 1]$  entonces hallamos  $g(0,4888\dots)$  y vemos que corresponde a  $0,4888\dots$  en el cuadrado  $[0, 1]^2$ , es decir, al punto  $[1/3, 1/3]$  de dicho cuadrado.

$g(0,5000\dots)$ , también nos lleva a la misma imagen porque  $4888\dots \equiv 5000\dots$  Además es fácil ver que  $g(0,5000\dots) = g(0,1000\dots) = g(0,0888\dots)$  por lo que la función no es inyectiva.

La función  $g$  nos da exactamente la ubicación de la imagen de cada punto del intervalo  $[0, 1]$ .

### 4.1.3. Construcción de la Curva de Peano a través de un Sistema Iterado de Funciones.

El espacio métrico completo  $([0, 1], d_u)$  siendo  $d_u$  la métrica euclidiana de la recta junto con las contracciones:

$$\begin{aligned}\omega_1(x) &= \frac{1}{9}x & \omega_5(x) &= \frac{1}{9}x + \frac{4}{9} \\ \omega_2(x) &= \frac{1}{9}x + \frac{1}{9} & \omega_6(x) &= \frac{1}{9}x + \frac{5}{9} \\ \omega_3(x) &= \frac{1}{9}x + \frac{2}{9} & \omega_7(x) &= \frac{1}{9}x + \frac{6}{9} \\ \omega_4(x) &= \frac{1}{9}x + \frac{3}{9} & \omega_8(x) &= \frac{1}{9}x + \frac{7}{9} \\ & & \omega_9(x) &= \frac{1}{9}x + \frac{8}{9}\end{aligned}$$

conforman un Sistema Iterado de Funciones  $\{[0, 1]; \omega_n, n = 1, 2, \dots, 9\}$ .

De igual manera, si tenemos el espacio métrico completo  $([0, 1]^2, d_u)$  siendo  $d_u$  la métrica euclidiana en el plano junto con las transformaciones:

$$\begin{aligned}v_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ v_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ v_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ v_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_6 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
v_7 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\
v_8 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
v_9 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

también conforman un Sistema Iterado de Funciones  $\{[0, 1]^2; v_n, n = 1, 2, \dots, 9\}$ .

Podemos ahora, concretar un poco más la función  $f_P$  que definimos en 4.4

De acuerdo con el teorema 3,1 definimos la función  $\phi_1 : (\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c) \rightarrow ([0, 1], d_u)$  por  $\phi_1(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha, n, x)$  para cada  $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  y  $x \in [0, 1]$  y la función  $\phi_2 : (\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c) \rightarrow ([0, 1]^2, d_u)$  para cada  $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ ,  $y \in [0, 1]^2$  porque es el atractor de  $\{[0, 1]; w_n, n = 1, 2, \dots, 9\}$  y  $[0, 1]^2$  es el atractor de  $\{[0, 1]^2; v_n, n = 1, 2, \dots, 9\}$  (esta segunda afirmación se demostrará en 4.3) entonces  $f_P(x) = y \Leftrightarrow \phi_1(x) = x \Rightarrow \phi_2(\alpha) = y$  y además si  $\phi_1(\alpha) = \phi_1(\beta) \Rightarrow \phi_2(\alpha) = \phi_2(\beta)$ .

**Proposición 4.3**  $[0, 1]^2$  es el atractor del SIF  $\{[0, 1]^2; v_n, n = 1, 2, \dots, 9\}$

**Demostración.** El conjunto definido como  $P_1$  en la sección 4.1.1 es compacto. Al aplicar  $\omega_1(P_1), \omega_2(P_1), \omega_3(P_1), \dots, \omega_9(P_1)$  obtenemos  $P_2$ , Luego  $W(P_1) = W^{\circ 1}(P_1) = P_2$ .

Al repetir el proceso tenemos que  $\bigcup_{n=1}^9 W_n(P_2) = P_3$  lo que implica que  $W(P_2) = P_3$ , entonces  $W^{\circ 2}(P_1) = W(W(P_1))$  por inducción podemos generalizar y encontrar que  $W^{\circ n}(P_1) = P_n$  y por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} W^{\circ n}(P_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$  nos falta ver que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = [0, 1]^2$

Por la construcción geométrica se observa que  $P_1 \cap P_2 \subset [0, 1]^2$ ,  $P_1 \cap P_2 \cap P_3 \subset [0, 1]^2$ , a medida que intersectamos mas conjuntos  $P_n$  agragando puntos que pertenecen a  $[0, 1]^2$  entonces  $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n \subset [0, 1]^2$ .

Sea  $(x, y) \in [0, 1]^2$ , de acuerdo a la definición 4.4  $(x, y)$  es el límite de una secuencia de subcuadrados anidados  $I_n \subset I_{n-1} \subset \dots \subset I_2 \subset I_1$ , exigiendo que

$I_1$  esté contenido en un subcuadrado de lado  $1/3$

$I_2$  esté contenido en un subcuadrado de lado  $1/3^2$

$I_3$  esté contenido en un subcuadrado de lado  $1/3^3$

$I_n$  esté contenido en un subcuadrado de lado  $1/3^n$

Entonces  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = (x, y)$  y  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$  entonces  $(x, y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$  luego  $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = [0, 1]^2$ , es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = [0, 1]^2$ . ■

#### 4.1.4. La curva de Peano como imagen continua del Espacio de Cantor

En General Topology cuyo autor es Stephen Willard encontramos el siguiente teorema:

**Teorema 4.4** *Todo espacio métrico compacto  $X$  es una imagen continua del espacio de Cantor.*

El teorema anterior nos indica que todo espacio métrico compacto es la imagen de una función continua desde el Espacio de Cantor a dicho espacio  $X$ .

En la proposición 3.2 vimos que el espacio de Cantor es compacto. La función  $f_P : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  es continua y su imagen es  $[0, 1]^2$  que es compacto, concluimos que la curva de Peano es imagen continua del espacio de Cantor.

### 4.1.5. Dimensión de la curva de Peano

En preliminares asumimos que la dimensión topológica de un plano o de un subconjunto del plano es dos.

En la proposición 4,1 vimos que  $f_P$  es sobreyectiva y por la definición 4,2 tenemos que  $f_{P^*}([0, 1])$  es la curva de Peano, luego la curva de Peano coincide con  $[0, 1]^2$ , es decir, es un subconjunto del plano, por consiguiente su dimensión topológica es dos.

Ahora calculemos su dimensión fractal. Si cubrimos  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  con bola de radio  $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$  respectivamente, entonces en  $P_1$  necesitaremos nueve bolas, en  $P_2$  81, en general, en  $P_n$   $9^n$  bolas.

Tenemos entonces por el Teorema 2.6 que:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 9^n}{\ln 3^n} = 2$$

La curva de Peano es un conjunto que tiene la dimensión topológica igual a la dimensión fractal.

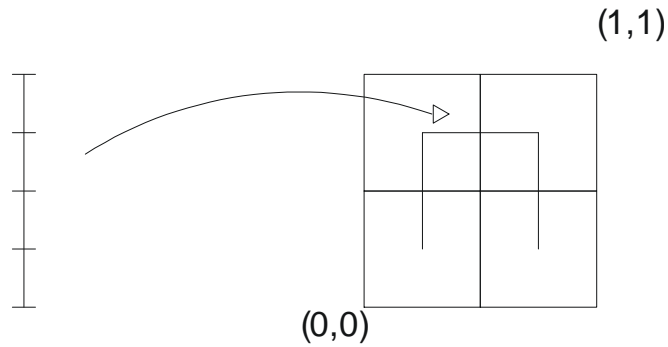
Aunque es un conjunto autosimilar su dimensión fractal no excede a su dimensión topológica, entonces, según Benoit Mandelbrot no se considera fractal.

## 4.2. Curva de Hilbert

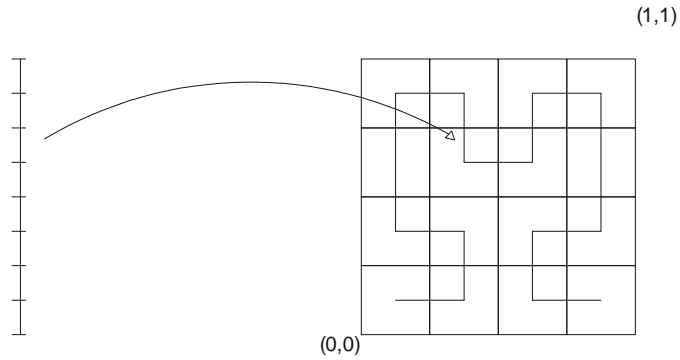
Peano presentó la curva que lleva su nombre en 1890, un año después fue David Hilbert quien nos deleitó con otro ejemplo de curvas que llenan el plano.

Hizo corresponder de forma continua el intervalo  $[0, 1]$  con el cuadrado  $[0, 1]^2$  como se

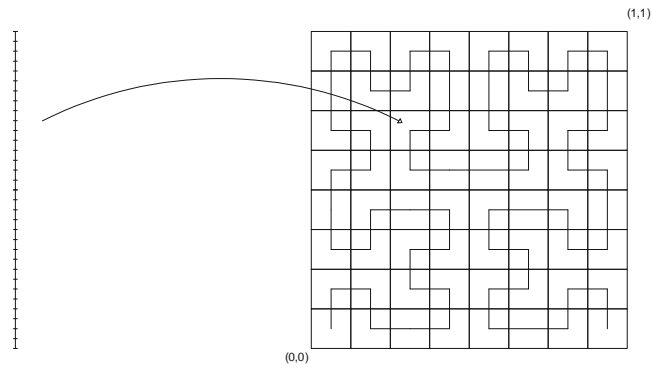
insinúa en el siguiente gráfico:



$\mathcal{H}_1$  : Generador de la curva de Hilbert



$\mathcal{H}_2$  : Segunda iteración para obtener la curva de Hilbert



$\mathcal{H}_3$  : Tercera iteración para obtener la curva de Hilbert

El proceso es análogo al utilizado para obtener la curva de Peano pero ahora en la  $n$ -ésima iteración dividimos el intervalo  $[0, 1]$  en  $2^{2n}$  replicas congruentes al igual que el cuadrado  $[0, 1]^2$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$

**Corolario 4.2** Si numeramos el intervalo  $[0, 1]$  en base 4 y si  $K$  es un espacio de congruencia sobre  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  donde se cumple:

$$0333\dots \equiv 1000\dots \quad 1333\dots \equiv 2000\dots \quad 2333\dots \equiv 3000\dots$$

entonces la relación continua  $g : [0, 1] \rightarrow K$  es la curva de Hilbert.

La codificación del cuadrado  $[0, 1]^2$  que permite obtener la curva de Hilbert es la siguiente:

1	2
0	3

1	2	1	2
0	3	0	3
3	2	1	0
0	1	2	3

1	2	1	2	1	2	1	2
0	3	0	3	0	3	0	3
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3
3	0	3	2	1	0	3	0
2	1	0	1	2	3	2	1
1	2	3	2	1	0	1	2
0	3	0	1	2	3	0	3

Si consideramos el espacio métrico completo  $([0, 1], d_u)$  siendo  $d_u$  la métrica euclidiana de la recta junto con las contracciones:

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &= \frac{1}{4}x & \omega_3(x) &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ \omega_2(x) &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} & \omega_4(x) &= \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

tenemos el SIF  $\{[0, 1]; \omega_n, n = 1, 2, 3, 4\}$  cuyo atractor es el intervalo  $[0, 1]$ .

Si tomamos el espacio métrico completo  $([0, 1]^2, d_u)$  siendo  $d_u$  la métrica euclidiana del plano con las transformaciones

$$\begin{aligned} V_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ V_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\
V_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Tenemos el SIF  $\{[0, 1]; v_n, n = 1, 2, 3, 4\}$  cuyo atractor es el compacto  $[0, 1]^2$ .

Entonces la curva de Hilbert es una curva que llena el plano.

La función  $f_{\mathcal{H}} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  se define como:  $f_{\mathcal{H}} \circ \phi_1 = \phi_2$

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{I} & \Sigma^{\mathbb{N}} \\
\phi_1 \downarrow & & \downarrow \phi_2 \\
[0, 1] & \xrightarrow{f_{\mathcal{H}}} & [0, 1]^2
\end{array}$$

donde  $\phi_1 : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$  se define por  $\phi_1(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha, n, x)$  para todo  $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}, x \in [0, 1]$ ,  
 $\phi_2 : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]^2$

que se define por  $\phi_2(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha, n, y)$  para todo  $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}, y \in [0, 1]^2$ .  $\phi_1$  y  $\phi_2$  codifican a  $[0, 1]$  y  $[0, 1]^2$  respectivamente en base 4 como se presentó anteriormente.

$f_{\mathcal{H}}(x) = y \Leftrightarrow \phi_1(\alpha) = x \Rightarrow \phi_2(\alpha) = y$  y además si  $\phi_1(\alpha) = \phi_1(\beta) \Rightarrow \phi_2(\alpha) = \phi_2(\beta)$ .

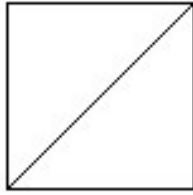
La función así definida  $f_{\mathcal{H}}$  es sobreyectiva, continua, no diferenciable, no inyectiva. (la demostración a la afirmación anterior es análoga a las realizadas para  $f_P$ ).

Claramente la curva de Hilbert también es imagen continua del Espacio de Cantor.

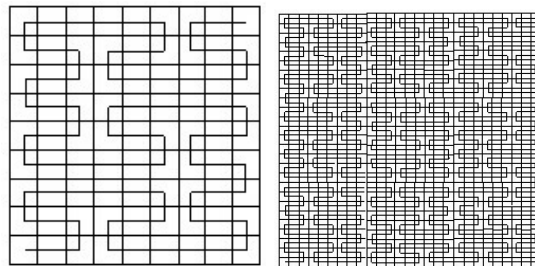
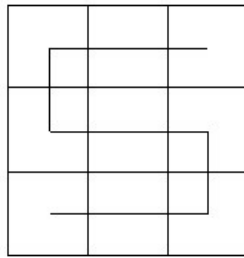
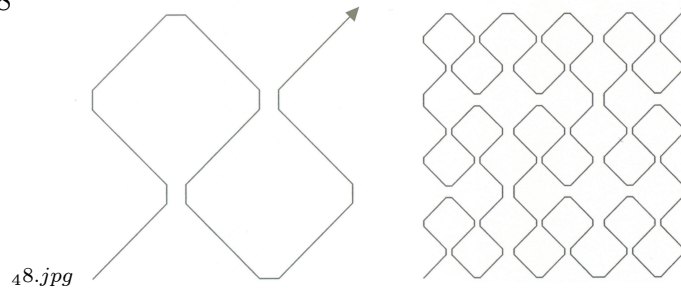
Toda curva que llena el plano es la imagen de una función continua y sobreyectiva de un compacto, razón por la cual hay varios SIF que conllevan a una curva que llena el plano.

$[0, 1]^2 \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ , ya sabemos que  $[0, 1]^2$  es compacto y cada punto de  $[0, 1]^2$  tiene por lo menos un código asignado, estos códigos coinciden con las direcciones. Por medio de la codificación podemos obtener  $[0, 1]^2$  a partir de cualquier subconjunto compacto no

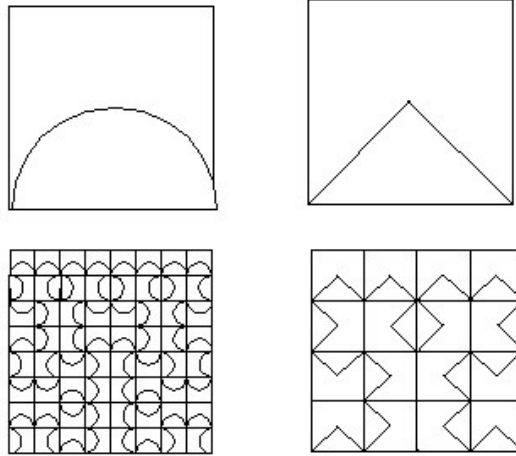
vacío de  $\mathbb{R}^2$ . A continuación se ilustra el planteamiento anterior:



8



El punto inicial para la curva de Peano es  $(0,0)$  y el punto final es  $(1,1)$



El punto inicial de la curva de Hilbert es  $(0, 0)$  y el punto final es  $(1, 0)$

### 4.3. Teorema de Netto

Netto demostró un teorema que nos asegura que las curvas que llenan el plano se obtienen de funciones que son continuas y no inyectivas.

**Teorema 4.5 (De Netto)** *Una biyección  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  es necesariamente discontinua.*

**Demostración.** Supongase que  $f$  es continua. Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto cerrado, entonces  $A \cap [0, 1]$  es cerrado y acotado, luego es compacto. por el teorema 2.3  $f(A \cap [0, 1]) = A_1$  también es compacto, luego es cerrado.

Debido a que  $f$  es biyección entonces existe la función  $f^{-1} = g : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  y  $f(A \cap [0, 1]) = A_1 = g^{-1}(A)$ . y  $g^{-1}(A)$  es cerrado.

Por la definición 2,31  $f^{-1}$  es continua.

Si  $f^{-1}$  es continua y su dominio es un conjunto conexo entonces su imagen también es un conexo.

Si a  $[0, 1]$  le quitamos el elemento  $z$  obtenemos el conjunto  $[0, z) \cup (z, 1]$  que es desconexo.

Si a  $[0, 1]^2$  le quitamos el elemento  $f(z)$  obtenemos un conjunto conexo. Entonces  $f^{-1}$  se define de un conjunto conexo a uno desconexo, lo cual genera contradicción. Entonces  $f$  no puede ser continua. ■

# Capítulo 5

## Algoritmos

### 5.1. Algoritmo de Peano

El primer algoritmo para generar curvas que llenan el plano fue creado por el mismo Giuseppe Peano, lo encontramos en “Sur une courbe qui remplit toute une aire plane” 1890.

Peano definió la función  $f_P : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  en términos del operador

$$k(t_j) = 2 - t_j \quad \text{siendo } t_j = 0, 1, 2$$

es decir,  $k(0) = 2$ ,  $k(1) = 1$ ,  $k(2) = 0$ .

Como sigue:

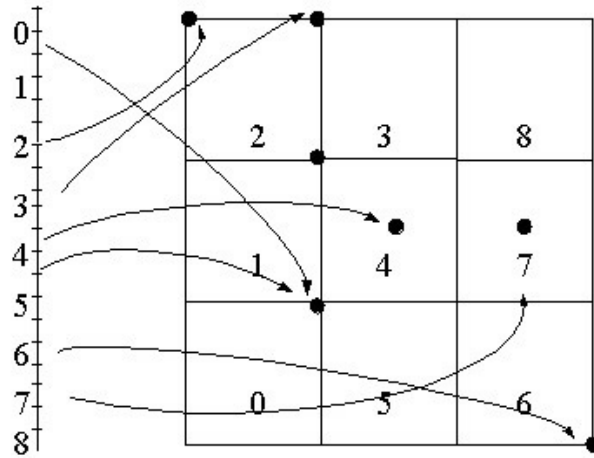
$f_P(0.t_1t_2t_3t_4\dots) = \left( \begin{array}{l} 0.t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots \\ 0.(k^{t_1}t_2)(k^{t_1+t_3}t_4)\dots \end{array} \right)$  donde  $k^n$  devuelve la n-ésima composición de  $k$  sobre sí misma.

Este algoritmo nos codifica  $[0, 1]$  y  $[0, 1]^2$  en base 3.

En ([4]) encontramos la demostración de que dicha función es sobreyectiva y continua.

Bosquejemos la imagen de algunos puntos del intervalo  $[0, 1]$ , como:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} = 0,111\dots & \quad f_P(0,111\dots) = \begin{pmatrix} 0,11111\dots \\ 0,11111\dots \end{pmatrix} \\
 \frac{1}{3} = 0,0222\dots & \quad f_P(0,0222\dots) = \begin{pmatrix} 0,02222\dots \\ 0,22222\dots \end{pmatrix} \\
 \frac{1}{4} = 0,020202\dots & \quad f_P(0,020202\dots) = \begin{pmatrix} 0,0000\dots \\ 0,22222\dots \end{pmatrix} \\
 \frac{3}{4} = 0,202020\dots & \quad f_P(0,202020\dots) = \begin{pmatrix} 0,22222\dots \\ 0,00000\dots \end{pmatrix} \\
 \frac{7}{8} = 0,212121\dots & \quad f_P(0,212121\dots) = \begin{pmatrix} 0,202020\dots \\ 0,11111\dots \end{pmatrix} \\
 \frac{1}{9} = 0,01000\dots & \quad f_P(0,01000\dots) = \begin{pmatrix} 0,02222\dots \\ 0,10000\dots \end{pmatrix} \\
 \frac{5}{9} = 0,12000\dots & \quad f_P(0,12000\dots) = \begin{pmatrix} 0,10000\dots \\ 0,02222\dots \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$



Algunas imágenes bajo  $f_P$ .



Supongamos que  $a = (a_1a_2a_3\dots a_m)_n$  con  $0 \leq a_i < n$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  y  $p_j = \left( \sum_{i=1}^j a_i \right)_{\text{mod } 2}$   $1 \leq j \leq m$ .

Cuando  $n$  es impar se define:

$$a' = (b_1b_2b_3\dots b_m)_n.$$

$$\text{donde } b_1 = a_1 \text{ y } b_i = \begin{cases} a_i & \text{si } p_{j-1} = 0 \\ n - 1 - a_i & \text{si } p_{j-1} = 1 \end{cases} \text{ para } i = 2, 3, \dots, m.$$

Así los primeros códigos en base 3 del código Gray son: 0,1,2,12,11,10,20,21,22,122,121,...

En nuestro ejemplo 0 se hace corresponder al vértice (0, 0); 1 al vértice (1, 0); 2 al vértice (2, 0); en general el número  $3^{2n-1}$  se hace corresponder al vértice  $(b_2b_4b_6b_8\dots, b_1b_3b_5b_7\dots)$ .

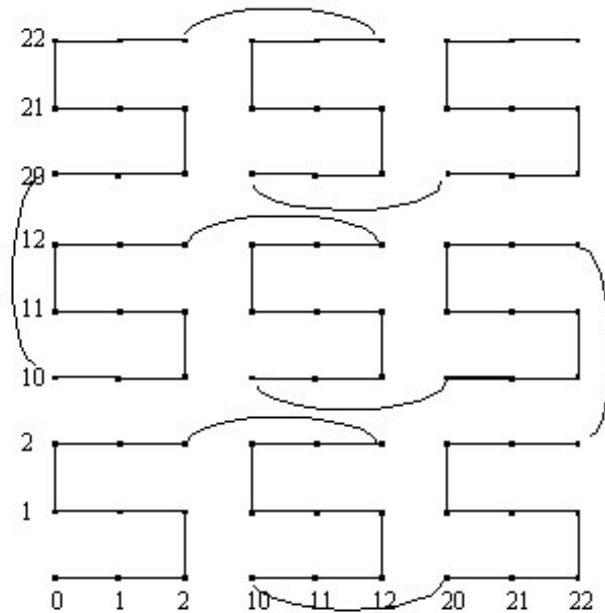
Para bosquejar lo anterior se muestra el proceso para obtener  $P_2$  a partir del código Gray para bases impares:

<i>Entero</i>	<i>a (cuatro cifras)</i>	<i>a'</i>	<i>Vértice</i>
0	0000	0000	(0, 0)
1	0001	0001	(1, 0)
2	0002	0002	(2, 0)
3	0010	0012	(2, 1)
4	0011	0011	(1, 1)
5	0012	0010	(0, 1)
6	0020	0020	(0, 2)
7	0021	0021	(1, 2)
8	0022	0022	(2, 2)
9	0100	0122	(12, 2)

<i>Entero</i>	<i>a (cuatro cifras)</i>	<i>a'</i>	<i>Vértice</i>
10	0101	0121	(11, 2)
11	0102	0120	(10, 2)
12	0110	0110	(10, 1)
13	0111	0111	(11, 1)
14	0112	0112	(12, 1)
15	0120	0102	(12, 0)
16	0121	0101	(11, 0)
17	0122	0100	(10, 0)
18	0200	0200	(20, 0)
19	0201	0201	(21, 0)
20	0202	0202	(22, 0)
21	0210	0212	(22, 1)
22	0211	0211	(21, 1)
23	0212	0210	(20, 1)
24	0220	0220	(20, 2)
25	0221	0221	(21, 2)
26	0222	0222	(22, 2)
27	1000	1222	(22, 12)
28	1001	1221	(21, 12)
29	1002	1220	(20, 12)
30	1010	1210	(20, 11)
31	1011	1211	(21, 11)
32	1012	1212	(22, 11)
33	1020	1202	(22, 10)

<i>Entero</i>	<i>a (cuatro cifras)</i>	<i>a'</i>	<i>Vértice</i>
34	1021	1201	(21, 10)
35	1022	1200	(20, 10)
36	1100	1100	(10, 10)
37	1101	1101	(11, 10)
38	1102	1102	(12, 10)
39	1110	1112	(12, 11)
40	1111	1111	(11, 11)
41	1112	1110	(10, 11)
42	1120	1120	(10, 12)
43	1121	1121	(11, 12)
44	1122	1122	(12, 12)
45	1200	1022	(2, 12)
46	1201	1021	(1, 12)
47	1202	1020	(0, 12)
48	1210	1010	(0, 11)
49	1211	1011	(1, 11)
50	1212	1012	(2, 11)
51	1220	1002	(2, 10)
52	1221	1001	(1, 10)
53	1222	1000	(0, 10)
54	2000	2000	(0, 20)
55	2001	2001	(1, 20)
56	2002	2002	(2, 20)
57	2010	2012	(2, 21)
58	2011	2011	(1, 21)

<i>Entero</i>	<i>a (cuatro cifras)</i>	<i>a'</i>	<i>Vértice</i>
59	2012	2010	(0, 21)
60	2020	2020	(0, 22)
61	2021	2021	(1, 22)
62	2022	2022	(2, 22)
63	2100	2122	(12, 22)
64	2101	2121	(11, 22)
65	2102	2120	(10, 22)
66	2110	2110	(10, 21)
67	2111	2111	(11, 21)
68	2112	2112	(12, 21)
69	2120	2102	(12, 20)
70	2121	2101	(11, 20)
71	2122	2100	(10, 20)
72	2200	2200	(20, 20)
73	2201	2201	(21, 20)
74	2202	2202	(22, 20)
75	2210	2212	(22, 21)
76	2211	2211	(21, 21)
77	212	2210	(20, 21)
78	2220	2220	(20, 22)
79	2221	2221	(21, 22)
80	2222	2222	(22, 22)



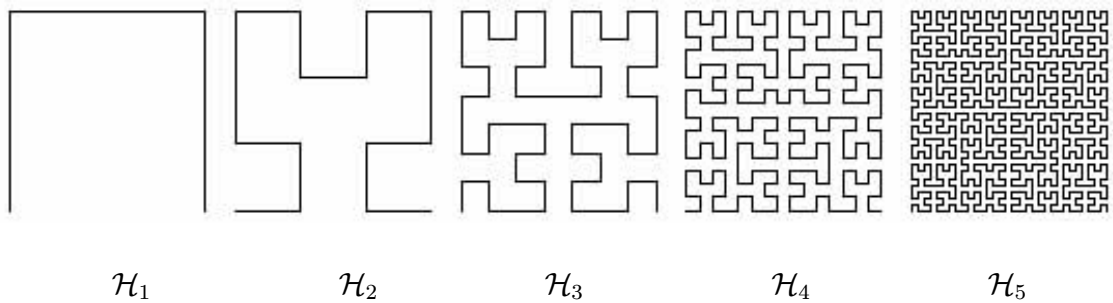
Para bases pares el código Gray corresponde a la siguiente regla de conversión :

$$b_1 = a_1$$

$$b_i = \begin{cases} a_i & \text{si } a_{i-1} \text{ es par} \\ n - 1 - a_i & \text{si } a_{i-1} \text{ es impar} \end{cases}$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ .

Con esta regla de conversión podemos encontrar la curva de Hilbert:

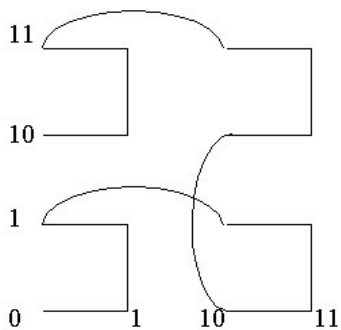


$\mathcal{H}_1$  tiene cuatro vértices,  $\mathcal{H}_2$  tiene 16 vértices, en general  $\mathcal{H}_n$  tiene  $2^{2n}$  vértices.

Entonces para construir la curva de Hilbert hacemos corresponder los enteros  $0, 1, 2, 3, \dots$  con cada vértice que resulta de la regla de conversión.

Veamos el ejemplo en base dos para  $\mathcal{H}_2$ :

<i>Entero</i>	<i>a</i>	<i>a'</i>	<i>Vértice</i>
0	0000	0000	(0, 0)
1	0001	0001	(1, 0)
2	0010	0011	(1, 1)
3	0011	0010	(0, 1)
4	0100	0110	(10, 1)
5	0101	0111	(11, 1)
6	0110	0101	(11, 0)
7	0111	0100	(10, 0)
8	1000	1100	(10, 10)
9	1001	1101	(11, 10)
10	1010	1111	(11, 11)
11	1011	1110	(10, 11)
12	1100	1010	(0, 11)
13	1101	1011	(1, 11)
14	1110	1001	(1, 10)
15	1111	1000	(0, 10)



Fíjese que estos “pegamientos ” permiten obtener  $\mathcal{H}_2$ .

## BIBLIOGRAFÍA

1. BARNESLEY Michael F. Fractals Everywhere. Academic Press, Cambridge, MA, 1993.
2. BARTLE Robert. The elements of Real Analysis Second edition. New York, John Wiley & Sons, 1976.
3. ESTÉVEZ Édgar. El espacio de los códigos. Monografía de grado, Licenciatura en Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, 2002.
4. HANS Sagan. Space-Filling Curves. New York, Springer Verlag, 1994.
5. ISAACS Rafael. Las palabras en el espacio de Cantor. Primer congreso nacional de neurocomputación. Universidad Industrial de Santander. Universidad Nacional de Colombia (sin fecha de publicación).
6. MESA Heber. El triángulo de Sierpiński. Monografía de grado, Licenciatura en Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, 2002.
6. WILLARD Stephen. General topology. Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.