SOBRE EL MONOIDE DE BIYECCIONES PARCIALES QUE PRESERVAN ORDEN

ANDRES FELIPE FERREIRA FORERO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2026

SOBRE EL MONOIDE DE BIYECCIONES PARCIALES QUE PRESERVAN ORDEN

ANDRES FELIPE FERREIRA FORERO

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director
Hector Edonis Pinedo Tapia
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2026

CONTENIDO

RESUMEN

TÍTULO: SOBRE EL MONOIDE DE BIYECCIONES PARCIALES QUE PRESERVAN ORDEN *

AUTOR: ANDRES FELIPE FERREIRA FORERO **

PALABRAS CLAVE: MONOIDE DE BIYECCIONES, CONJUNTO GENERADORES, FUNCIONES PARCIALES, RAÍCES DE MONOIDES.

DESCRIPCIÓN:

En 2020, S. Annin y S. Lopez[1] publicaron un artículo donde determinan el conjunto generador minimal para el monoide de biyecciones parciales que preservan orden sobre un conjunto de n elementos. Dado que el estudio de los conjuntos generadores es fundamental en las matemáticas y la ciencia, así como la relevancia de los monoides en diversos campos, en esta tesis profundizamos en el trabajo de Annin y Lopez, ofreciendo una demostración detallada a cada uno de los teoremas presentados el artículo mencionado.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Hector Edonis Pinedo Tapia, Doctor en Matemáticas.

1 S Annin S y Lopez. “Minimal generating sets of the monoid of partial order-preserving injections”. en. En: *The pump journal of undergraduated research* 3 (2020), págs. 190-204.

ABSTRACT

TITLE: ON THE MONOID OF ORDER-PRESERVING PARTIAL BIJECTIONS *

AUTHOR: ANDRES FELIPE FERREIRA FORERO **

KEYWORDS: MONOID OF BIJECTIONS, GENERATING SETS, PARTIAL FUNCTIONS, ROOTS OF MONOIDS.

DESCRIPTION:

In 2020, S. Annin and S. Lopez[1] published an article determining the minimal generating set for the monoid of order-preserving partial bijections on a set of n elements. Given that the study of generating sets is fundamental to mathematics and science, as well as the relevance of monoids across various fields, this thesis delves into the work of Annin and Lopez, offering a detailed proof for each of the theorems presented in the aforementioned paper.

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Hector Edonis Pinedo Tapia, Doctor en Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Según Annin (2020), el estudio de los monoides y la clasificación de sus raíces desempeña un papel importante en campos como la computación, la física y diversas ramas de las matemáticas, entre ellas el álgebra moderna, la criptografía y la teoría de operadores. Además, de acuerdo con Lawson (2001), las estructuras algebraicas como los monoides permiten describir cómo una operación binaria puede organizar un conjunto en torno a propiedades fundamentales de clausura y asociatividad, proporcionando así una base para el estudio de sistemas más complejos dentro del álgebra lineal y la teoría de transformaciones. Entre los ejemplos más representativos de monoides se encuentra el conjunto de los números reales positivos dotado de la operación producto, este ejemplo se abordará con mayor profundidad en la primera sección de este trabajo, donde se caracteriza el monoide inverso simétrico y se estudian las relaciones de Green, siguiendo el marco teórico establecido por S. Annin y S. Lopez [1].

Con el trasfondo motivacional expuesto, el presente trabajo se estructura de la siguiente manera. En el primer capítulo ofrece una breve revisión de los conceptos básicos en la teoría de los monoides, además de revisar conceptos sobre biyecciones, con el fin de relacionarlos y definir tanto al monoide inverso simétrico como al monoide de biyecciones parciales que preservan orden.

En el segundo capítulo se estudia uno de los tópicos relevantes en la teoría de semigrupos, a saber, cómo determinar el conjunto generador minimal del monoide de biyecciones parciales que preservan orden, a través de la teoria de grafos dirigidos, en particular el concepto de camino simple cerrado. Esto con el fin de hallar las condiciones suficientes para que las aristas de un grafo dirigido, de un conjunto generador minimal del moinoide de biyecciones parciales que preservan orden, formen un camino simple cerrado. Es importante tener en cuenta que el cálculo de un conjunto generador es atractivo para los matemáticos cuando se trata del estudio de estructuras algebraicas.

Dado que las inmersiones, las cuales pueden interpretarse como una estructura matemática contenida dentro de otra, conservan la estructura algebraica, el estudio de todas las biyecciones parciales en un conjunto se convierte en un aspecto central en la teoría de los monoides inversos. Estas aplicaciones suelen surgir en el contexto del estudio de transformaciones de conjuntos parcialmente ordenados. Teniendo eso en cuenta, en el tercer capítulo se abordan condiciones necesarias para que un elemento del monoide de biyecciones parciales que preservan orden posea una k-ésima raíz, fundamentado en el análisis de las definiciones y notaciones propuestas por U. Álvarez en 2015 [1], esto aunque es un poco independiente de los resultados obtenidos en los dos primeros capítulos, es una pregunta natural que surge en el estudio de las estructuras algebraicas y muestra como el uso de diferentes notaciones en estas estructuras puede facilitar su estudio.

[1] U Alvarez. "On kth roots in semigroups of order-preserving partial permutations". en. En: *Cal State Fullerton Dimensions* (2015), págs. 123-132.

1. SOBRE EL MONOIDE DE BIYECCIONES PARCIALES

En este capítulo se presentan las definiciones, nociones fundamentales y ejemplos que estructuran el estudio del monoide de biyecciones parciales que preservan orden. Los conceptos, demostraciones y ejemplos abordados en este capítulo son clásicos en el álgebra, sin embargo se han adaptado siguiendo la exposición y el marco propuesto por Annin y Lopez (2020) [1]. Estos elementos conceptuales son esenciales para el desarrollo teórico del trabajo y servirán de base para las demostraciones que se presentarán en las secciones siguientes.

1.1. MONOIDE

Definición 1.1.1. *Una* ***operación binaria****, $*$, en un conjunto M es una función $\rho : M \times M \to M$, donde la imagen de (a, b) bajo la operación binaria $*$, se denota por $a * b$.*

Definición 1.1.2. *Un* ***monoide*** *es un conjunto M no vacío con una operación binaria $*$, notado como $(M, *)$, que satisface las siguientes propiedades:*

1. *Clausura: Si $a, b \in M$, entonces $a * b \in M$.*
2. *Asociatividad: Para todo $a, b, c \in M$, se cumple que $a * (b * c) = (a * b) * c$.*
3. *Existencia de una identidad: Existe $e \in M$ tal que si $a \in M$, entonces $a*e = e*a = a$.*

Un conjunto que satisface las propiedades 1 y 2 es llamado ***semigrupo****.*

Por conveniencia se omite el operador $*$ de la notación, por lo tanto toda expresión de la forma $a * b$ se escribirá como ab.

Ejemplo 1.1.3. *El conjunto de números reales positivos con la multiplicación, $(\mathbf{R}^+, \times)$, es un ejemplo de un monoide, donde su elemento identidad es el 1. Note que $(\mathbf{R}^+, +)$ no es un monoide, ya que $0 \notin \mathbf{R}^+$, pero sí es un semigrupo.*

1.2. EL MONOIDE INVERSO SIMÉTRICO

Definición 1.2.1. *Una* ***función parcial*** *de un conjunto X a un conjunto Y es una función f definida en un subconjunto no vacío de X, tal que cada elemento del dominio de f tiene una única imagen en Y. Donde se notara como $f : A \subseteq X \to Y$.*

Ejemplo 1.2.2. *Note que $f(z) = \frac{z+i}{4z+3-2i}$, función con dominio complejo, es una función parcial ya que se debe cumplir $z \neq \frac{2i-3}{4}$. Es decir, $f : \mathbf{C} - \{\frac{2i-3}{4}\} \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. La función f hace parte de una familia relevante de funciones en variable compleja y geometría, a saber, las llamadas funciones de Möbius.*

Definición 1.2.3. *El **monoide inverso simétrico, SIM(S)**, consiste en el conjunto de todas las biyecciones parciales desde un conjunto S a sí mismo con su operación binaria siendo la composición.*

Note que al trabajar con funciones parciales la formula de la composición cambia un poco, por lo tanto para dos funciones $f, g \in SIM(S)$ tenemos que:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \text{no existe,} & \text{si } x \notin Dom(g) \text{ ó } g(x) \notin Dom(f) \\ f(g(x)), & \text{si } x \in Dom(g) \text{ y } g(x) \in Dom(f) \end{cases}$$

Esto es que $x \in Dom(f \circ g)$ si, y solo si $x \in Dom(g)$ y $g(x) \in Dom(f)$. Ahora, probemos que $SIM(S)$ es un monoide; es decir, que cumple con las tres propiedades:

1. Clausura: Sea $f, g \in SIM(S)$, entonces $f \circ g$ es un a función biyectiva parcial con dominio igual a un subconjunto del dominio de g y rango igual a un subconjunto del rango de f, por lo tanto $f \circ g \in SIM(S)$.

2. Asociatividad: Sea $f, g, h \in SIM(S)$, entonces si $x \in Dom(f \circ (g \circ h))$ se tiene que $x \in Dom(g \circ h)$ y $(g \circ h)(x) \in Dom(f)$, por lo que $x \in Dom(h)$, $h(x) \in Dom(g)$ y $(g \circ h)(x) \in Dom(f)$, por otro lado si $x \in Dom((f \circ g) \circ h)$ se tiene que $x \in Dom(h)$ y $h(x) \in Dom(f \circ g)$, por lo que $x \in Dom(h)$, $h(x) \in Dom(g)$ y $(g \circ h)(x) \in Dom(f)$, por lo tanto $Dom(f \circ (g \circ h)) = Dom((f \circ g) \circ h)$. Además, para todo $x \in Dom(f \circ g \circ h)$, esto es $x \in Dom(h)$, $h(x) \in Dom(g)$ y $g(h(x)) \in Dom(f)$, se tiene que $(f \circ (g \circ h))(x) = f \circ (g(h(x))) = f(g(h(x))) = (f \circ g)(h(x)) = ((f \circ g) \circ h)(x)$, con esta igualdad y la igualdad en los dominios se tiene que $Ran(f \circ (g \circ h)) = Ran((f \circ g) \circ h)$. Concluyendo que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

3. Existencia de una identidad: Existe $e \in SIM(S)$ tal que para todo $s_x \in S$ se cumple que $e(s_x) = s_x$ esto ya que e es una biyección parcial de S a S, por lo tanto para cualquier $f \in SIM(S)$, $e \circ f = f \circ e = f$.

□

Nota: Es necesaria una notación particular para continuar con el trabajo, notación propuesta por S. Annin (2020)[1]; para esta, considere el caso particular donde $S =$

$\{1, 2, 3, ..., n\}$, denotado por $SIM(n)$. Los elementos de este conjunto se pueden escribir como permutaciones, por ejemplo:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \rho(1) & \rho(2) & \rho(3) & ... & \rho(n) \end{pmatrix}$$

donde, para $1 \leq i \leq n$, $\rho(i)$ existe y es un elemento de S ó no existe, es decir ρ no tiene imagen en i, cuando esto suceda $\rho(i) = -$ en la notación.
Considerando el caso donde $n = 6$, escribiremos:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & - & 4 & 1 \end{pmatrix} \in SIM(6) \tag{1}$$

Note que 4 no pertenece al dominio, esto es $4 \notin Dom(\tau)$, y 6 no pertenece al rango, esto se denota como $6 \notin Ran(\tau)$.

Definición 1.2.4. *El **rank** de un elemento $\rho \in SIM(n)$ es:*

$$rank(\rho) = |Dom(\rho)| = |Ran(\rho)|,$$

donde $|Dom(\rho)|$ nota el número de elementos que pertenecen al dominio de la función ρ y $|Ran(\rho)|$ el número de elementos que pertenecen al rango.

Un ejemplo de esto es en (1), el elemento τ tiene rank igual a 5, esto es $rank(\tau) = 5$. Ahora, veamos la composición de elementos en $SIM(n)$ escritos como permutaciones, donde se opera izquierda-derecha a diferencia de la composición usual:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & - & 2 & 4 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 3 & - & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ - & 5 & - & 6 & 3 & - \end{pmatrix}$$

Es claro que el rank de la composición no puede ser mayor al rank de alguno de los elementos que se operan. En este ejemplo podemos ver que el rank de los elementos de la izquierda son 4 y 5 respectivamente, y el elemento de la derecha tiene rank igual a 3.

Definición 1.2.5. *Sea M un monoide y $t \in M$, denotamos $Mt = \{mt : m \in M\}$ y $tM = \{tm : m \in M\}$. Ahora, para $\alpha, \beta \in M$ decimos que:*

1. *α y β están **L-relacionadas**, lo que se denota por $\alpha L \beta$, si y solo si existen $x, y \in M$ tal que $x\alpha = \beta$ y $y\beta = \alpha$. Esto es, $\beta \in M\alpha$ y $\alpha \in M\beta$.*

2. *α y β están **R-relacionadas**, lo que se denota por $\alpha R \beta$, si y solo si existen $n, m \in M$ tal que $\alpha n = \beta$ y $\beta m = \alpha$. Esto es, $\beta \in \alpha M$ y $\alpha \in \beta M$.*

*3. α y β están **H-relacionadas**, lo que se denota por $\alpha H\beta$, si y solo si $\alpha L\beta$ y $\alpha R\beta$.*

Observación 1. Las relaciones L, R y H son conocidas como las **relaciones de Green** en un semigrupo. Estas son importantes en la teoría de semigrupos, ya que permiten descomponer y analizar un semigrupo en términos de clases de equivalencia que reflejan cómo los elementos pueden generarse unos a otros mediante multiplicación por la izquierda o por la derecha.

Ejemplo 1.2.6. *El monoide $(\mathbb{N}, +)$, este es el conjunto de los naturales con operación binaria siendo la suma, note que para algún $t \in \mathbb{N}, t\mathbb{N} = \{t + n : n \in \mathbb{N}\}$. Por lo tanto, si $a, b \in \mathbb{N}$ están L-relacionadas entonces $a = b$, ya que existen $x, y \in \mathbb{N}$ tal que $x + a = b$ y $y + b = a$ por lo que $x + y + b = b$, esto es $x + y = 0$. Concluyendo que $x = y = 0$.*

1.3. EL MONOIDE DE BIYECCIONES PARCIALES QUE PRESERVAN ORDEN

Definición 1.3.1. *El monoide de **biyecciones parciales que preservan orden**, denotado por $POI(n)$, es un submonoide de $SIM(n)$. Definido por la siguiente condición, un elemento $\theta \in SIM(n)$ pertenece a $POI(n)$ si siempre que $i < j$, donde $i, j \in Dom(\theta)$, se tiene que $\theta(i) < \theta(j)$.*

Ahora, se prueba que $POI(n)$ es un monoide; es decir, que cumple con las tres propiedades:

1. Clausura: Sea $f, g \in POI(n)$, $f \circ g$ es una función parcial con dominio en un subconjunto de $\{1, 2, 3, ..., n\}$ y rango en $\{1, 2, 3, ..., n\}$, además si $1 \leq r < n$ y $1 \leq s \leq n - r$, entonces $f(g(r)) < f(g(r + s))$ para $r, r + s \in Dom(g)$ y $g(r), g(r + s) \in Dom(f)$, ya que $g(r) < g(r + s)$. Por lo tanto $f \circ g \in POI(n)$.

2. Asociatividad: Note que todo elemento de $POI(n)$ pertenece a $SIM(S)$, por lo tanto se cumple la asociatividad.

3. Existencia de una identidad: La función identidad, e, es una biyección que preserva orden, por tanto e pertenece a $POI(n)$ así para cualquier $f \in POI(n)$, $e \circ f = f \circ e = f$.

$\square$

Ejemplo 1.3.2. *Para $n = 4$, un ejemplo de los elementos en $POI(n)$ es*

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & - \end{pmatrix} \in POI(4)$$

ya que los valores de la segunda fila están de forma ascendente.

Nota: Al subconjunto de $POI(n)$ donde todos sus elementos tienen el mismo rank, digamos k, se notara como $POI_k(n)$. En el **Ejemplo 1.1.11.**, el elemento θ pertenece a $POI(4)$ y tiene rank 3 por lo que $\theta \in POI_3(4)$.

Definición 1.3.3. *Una **identidad parcial** en $POI(n)$ es un elemento θ tal que para todo i con $1 \leq i \leq n$, se tiene que $\theta(i) = i$ **ó** $i \notin Dom(\theta)$.*

Un ejemplo de una identidad parcial es el elemento

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & - & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in POI(5)$$

el cual tiene rank igual a 4, por lo tanto $\tau \in POI_4(5)$.
Se da cierre a esta sección enunciando propiedades relevantes de los elementos de $POI(n)$.

Lema 1.3.4. *Sean $\alpha, \beta \in POI(n)$, entonces:*

1. *$\alpha R \beta$ si y solo si $Dom(\alpha) = Dom(\beta)$.*

2. *$\alpha L \beta$ si y solo si $Ran(\alpha) = Ran(\beta)$.*

3. *$\alpha H \beta$ si y solo si $\alpha = \beta$.*

Demostración.

1. $\Rightarrow$) Dado que $\alpha R \beta$, por definición existen elementos $k, m \in POI(n)$ tal que $\alpha k = \beta$ y $\beta m = \alpha$. Como $\alpha k = \beta$, se tiene que si $r \in Dom(\beta)$, esto es $r \in Dom(\alpha k)$, para $1 \leq r \leq n$, entonces $r \in Dom(\alpha)$, esto gracias a la definición de la composición en funciones parciales, por lo tanto $Dom(\beta) \subseteq Dom(\alpha)$. Ahora, como $\beta m = \alpha$, se tiene que si $s \in Dom(\alpha)$, para $1 \leq s \leq n$, entonces $s \in Dom(\beta)$, por lo tanto $Dom(\alpha) \subseteq Dom(\beta)$. Concluyendo que $Dom(\beta) = Dom(\alpha)$.
   $\Leftarrow$) Tomemos al elemento $k \in POI(n)$ de tal forma que $Dom(k) = Ran(\alpha) = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_c\}$ y $Ran(k) = Ran(\beta) = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_c\}$, donde $a_i < a_{i+1}$ y $b_i < b_{i+1}$ para $1 \leq i < n$, con $k(a_i) = b_i$; k existe y esta bien definido ya que $Dom(\alpha) = Dom(\beta)$, esto es $Rank(\alpha) = Rank(\beta) = Rank(k)$. Por lo cual

$$k = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_c \\ b_1 & b_2 & b_3 & ... & b_c \end{pmatrix},$$

así $\alpha k \in POI(n)$, además $Dom(\alpha k) = Dom(\alpha) = Dom(\beta)$ y $Ran(\alpha k) = Ran(k) = Ran(\beta)$, por lo tanto $\alpha k = \beta$.
Ahora, tome el elemento $m \in POI(n)$ de tal forma que $Dom(m) = Ran(\beta)$ y $Ran(m) = Ran(\alpha)$ construyéndolo de forma análoga a k, m existe ya que $Dom(\alpha) = Dom(\beta)$, esto es $Rank(\alpha) = Rank(\beta) = Rank(m)$. Así $\beta m \in POI(n)$, además $Dom(\beta m) = Dom(\beta) = Dom(\alpha)$ y $Ran(\beta m) = Ran(m) = Ran(\alpha)$, por lo tanto $\beta m = \alpha$.
Con la existencia de estos elementos k, m concluimos que $\alpha R \beta$.

2. Las demostraciones de este ítem siguen las mismas ideas del ítem anterior.
$\Rightarrow$) Dado que $\alpha L \beta$, por definición existen elementos $r, s \in POI(n)$ tal que $r\alpha = \beta$ y $s\beta = \alpha$. Como $r\alpha = \beta$, se tiene que si $\beta(x) \in Ran(\beta)$, para $1 \leq x \leq n$ en el dominio de β, entonces $r\alpha(x) \in Ran(\alpha)$, por lo tanto $Ran(\beta) \subseteq Ran(\alpha)$. Ahora, dado que $s\beta = \alpha$, se tiene que si $\alpha(y) \in Ran(\alpha)$, para $1 \leq y \leq n$ en el dominio de α, entonces $s\beta(y) \in Ran(\beta)$, por lo tanto $Ran(\alpha) \subseteq Ram(\beta)$.
Concluyendo que $Ran(\beta) = Ran(\alpha)$.
$\Leftarrow$) Tomemos al elemento $r \in POI(n)$ de tal forma que $Dom(r) = Dom(\beta)$ y $Ran(r) = Dom(\alpha)$ construyéndolo de forma análoga a k del ítem anterior, r existe ya que $Ran(\alpha) = Ran(\beta)$, esto es $Rank(\alpha) = Rank(\beta) = Rank(r)$. Así $r\alpha \in POI(n)$, además $Dom(r\alpha) = Dom(r) = Dom(\beta)$ y $Ran(r\alpha) = Ran(\alpha) = Ran(\beta)$, por lo tanto $r\alpha = \beta$. Ahora, tome el elemento $s \in POI(n)$ de tal forma que $Dom(s) = Dom(\alpha)$ y $Ran(s) = Dom(\beta)$ construyéndolo de forma análoga a k del ítem anterior, s existe ya que $Ran(\alpha) = Ran(\beta)$, esto es $Rank(\alpha) = Rank(\beta) = Rank(s)$. Así $s\beta \in POI(n)$, además $Dom(s\beta) = Dom(s) = Dom(\alpha)$ y $Ran(s\beta) = Ran(\beta) = Ran(\alpha)$, por lo tanto $s\beta = \alpha$.
Con la existencia de estos elementos r, s concluimos que $\alpha L \beta$.

3. Como $\alpha H \beta$, por definición, se tiene que $\alpha R \beta$ y $\alpha L \beta$, esto es $Dom(\alpha) = Dom(\beta)$ y $Ran(\alpha) = Ran(\beta)$, dado por las anteriores dos demostraciones en este lema.
Así, se concluye $\alpha = \beta$.

□

Ejemplo 1.3.5. *Sean*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & - & - \end{pmatrix} \quad \textit{y} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & - & - \end{pmatrix}$$

elementos de $POI(7)$. Como α, β tiene el mismo dominio, existen funciones γ y ρ en

$POI(7)$,

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ - & 2 & - & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \textit{y} \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ - & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & - \end{pmatrix},$$

donde $\alpha\gamma = \beta$ y $\beta\rho = \alpha$, por lo tanto $\alpha R \beta$.

Ejemplo 1.3.6. *Sean*

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & - & - & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \textit{y} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & - & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & - \end{pmatrix}$$

elementos de $POI(8)$. Como ρ, γ tiene el mismo rango, existen funciones en $POI(8)$ que cumplen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & - & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 & - \end{pmatrix} \rho = \gamma \quad \textit{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & - & - & 6 & 7 \end{pmatrix} \gamma = \rho,$$

teniendo que $\rho R \gamma$.

Observación 2. Ahora, sea $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, y $\alpha, \beta \in POI_k(n)$. Note que $\alpha\beta \in POI_k(n)$ si y solo si $Ran(\alpha) = Dom(\beta)$. De no cumplirse esta igualdad $\alpha\beta \in POI_j(n)$, con $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ donde $j < k$, esto ya que $\alpha\beta(r)$ no existe para un $r \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

2. CONJUNTO GENERADOR MINIMAL Y GRAFOS DIRIGIDOS

El objetivo de este capítulo es definir el concepto de conjunto generador y conceptos afines, logrando determinar condiciones suficientes para que un conjunto sea generador minimal de POI(n). Además, se busca introducir la noción de grafo dirigido y clasificarlos. El siguiente capítulo expone las definiciones, teoremas y demostraciones de Annin y Lopez[12]; no obstante, dicho contenido ha sido extendido y detallado, explicitando las transiciones lógicas y pasos intermedios que en las fuentes originales se presentan de forma compacta.

2.1. CONJUNTOS GENERADORES

Definición 2.1.1. *Un **conjunto generador** para una estructura algebraica Z es una colección C de elementos distintos en Z, tal que todo elemento en Z puede ser escrito aplicando una secuencia finita de operaciones algebraicas de elementos de C.*

Particularmente, es de nuestro interés el conjunto generador de un monoide. Sea $(M, *)$ un monoide y $F = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_m, ...\}$ un conjunto generador de $(M, *)$, entonces podemos expresar a cualquier elemento $x \in M$ de la forma,

$$x = x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} ... x_{i_n}$$

donde $x_{i_k} \in \{x_1, x_2, x_3, ..., x_m, ...\}$, con $1 \leq k \leq n$.

Ejemplo 2.1.2. *El conjunto generador del monoide $(\mathbb{Z}^+, \times)$, es la colección de todos los números primos unido con el número 1, esto ya que cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$ puede ser expresado como multiplicación de números primos, exceptuando al 1, algunos ejemplos son:*

$$5820 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 97,$$

$$4375 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7.$$

Definición 2.1.3. *Un conjunto generador de Z es llamado **conjunto generador minimal** si no existe un subconjunto propio que genere a Z.*

---

2 S Annin. "Hierarchy of efficient generators of the symmetric inverse monoid". en. En: *Semigroup Forum* 55 (1997), págs. 327-355.

Ejemplo 2.1.4. *El conjunto generador minimal del monoide* $(\mathbb{Z},+)$ *es* $\{1,-1\}$*. Es claro que mediante la suma de los elementos de este conjunto se genera* $\mathbb{Z}$*, y no existe subconjunto propio de este que lo genere, sus subconjuntos propios son* $\emptyset, \{1\}, \{-1\}$*.*

Observación 3. El monoide $POI_n(n)$ solo tiene un elemento, el cual es la identidad

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Este elemento no es de interés en las próximas demostraciones, por lo que cuando nos refiramos a $POI(n)$ nos referiremos a $POI(n) - \{id\}$, el cual es un subsemigrupo de $POI(n)$.

Por la **Observación 2.**, se conoce que operando dos elementos en $POI_{n-1}(n)$ donde el primero elemento no tiene rango igual al dominio del segundo, el resultado llega a ser un elemento en $POI(n)$ con menor rank, por lo que la clave para generar $POI(n)$ es primero generar todos los elementos de $POI_{n-1}(n)$. Ahora observemos que los elementos de $POI_{n-1}(n)$ pueden expresarse a partir de su dominio y rango. Por ejemplo tomando $n = 4$ tenemos:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & - & 4 \end{pmatrix}$$

este elemento de $POI_3(4)$ tiene dominio igual a $\{1,2,4\}$ y rango igual a $\{2,3,4\}$, note que no hay otro elemento en $POI_3(4)$ con estas condiciones, por lo que podemos expresar a δ como el par ordenado $(3,1)$. Generalizando, definamos a $\hat{S}_i = \{1,2,...,i-1,i+1,...,n\}$, tomando al anterior δ como ejemplo tenemos que $Dom(\delta) = \hat{S}_3$ y $Ran(\delta) = \hat{S}_1$.

Se usa a $\hat{S}_i$ para representar el dominio y rango de los elementos de POI_{n-1}, y así poder representarlos como pares ordenados. Esto es, sea ρ elemento de $POI_{n-1}(n)$ con dominio igual a $\hat{S}_a$ y rango igual a $\hat{S}_b$, entonces podemos notar a ρ como (a,b).

2.2. GRAFOS DIRIGIDOS

Definición 2.2.1. *Sea* X *subconjunto no vacío de* $POI_{n-1}(n)$*, denotamos a* Ω_X *como el* ***grafo dirigido*** *en* $\{1,2,3,...,n\}$*, donde* $a\frown b$ *es una* ***arista dirigida*** *en* Ω_X *si y solo si* $(a,b) \in X$*.*

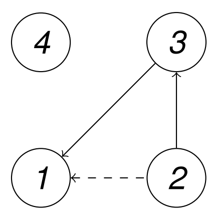
Ejemplo 2.2.2. *Sea* $X = \{(1,2),(2,3)\} \subseteq POI_2(3)$*, note que* $1\frown 2$ *es una arista dirigida en* Ω_X *y* $1\frown 3$ *no es una arista dirigida en* Ω_X*.*

Gracias a la **Observación 2.** y usando esta nueva notación de pares ordenados podemos afirmar que, si $\rho = (a, b)$ y $\gamma = (c, d)$ son dos elementos en $POI_{n-1}(n)$, entonces $\rho\gamma = (a, b)(c, d) = (a, d)$ si $b = c$. De no ser así, $b \neq c$, el rank de $\rho\gamma$ disminuye, por lo que no puede ser expresado como un par ordenado.

Ejemplo 2.2.3. *En $POI(4)$,*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & - & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & - & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & - & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

puede ser expresado como $(2, 3)(3, 1) = (2, 1)$, y representa gráficamente

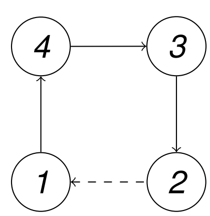


donde la línea punteada representa el resultado.

Ejemplo 2.2.4. *Aquí otro ejemplo en $POI(4)$,*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ - & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & - & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ - & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

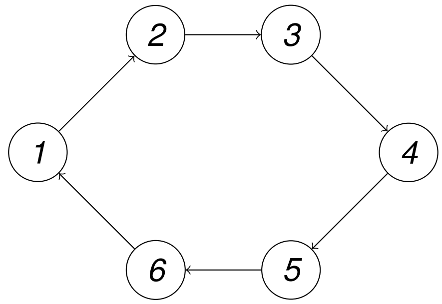
es decir, $(1, 4)(4, 3)(3, 2) = (1, 2)$, y se representa gráficamente



Definición 2.2.5. *Un **camino** es una secuencia de m aristas de la forma*

$$x_0 \to x_1 \to x_2 \to ... \to x_m,$$

donde $x_0, x_1, x_2, ..., x_m$ son vértices, y $x_i \to x_j$ indica una arista de x_i hasta x_j. Si $x_0 = x_m$, *decimos que el camino es **cerrado**.*



Definición 2.2.6. *Si un camino está compuesto por distintas aristas y tiene distintos vértices, entonces es llamado un **camino simple**. Es decir, en un camino simple se cumple que $x_i \neq x_j$ para $0 \leq i < j \leq m$, excepto posiblemente para $x_0 = x_m$. Si esta igualdad se cumple, lo llamaremos **ciclo** ó **m-ciclo** (camino simple cerrado).*

Nota: Los dominios y rangos de los elementos en $POI_{n-1}(n)$ son conjuntos que expresamos con el conjunto $\hat{S}_i$, donde $1 \leq i \leq n$. Es necesario relacionar este i con su respectivo elemento de $POI_{n-1}(n)$, así definimos a $\overline{\mathbf{Dom(x)}}$ y $\overline{\mathbf{Ran(x)}}$, donde $x \in POI_{n-1}(n)$, como $\overline{Dom(x)} = a$ si $Dom(x) = \hat{S}_a$ y $\overline{Ran(x)} = b$ si $Ran(x) = \hat{S}_b$, donde $a, b \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Ejemplo 2.2.7. *El elemento*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & - & 4 \end{pmatrix}$$

pertenece a $POI_3(4)$, con $\overline{Dom(x)} = 3$ y $\overline{Ran(x)} = 1$.

Lema 2.2.8. *Sea X un subconjunto de $POI_{n-1}(n)$ con n elementos que genera a $POI(n)$. Entonces X no tiene:*

1. *Dos elementos distintos $R - relacionados$.*
2. *Dos elementos distintos $L - relacionados$.*
3. *Identidades parciales.*

Demostración. La demostración de los tres ítems se realizarán por contradicción.

1. Suponga que existen α, β elementos en X, tal que $\alpha R \beta$. Por **Lema 1.1.12.** sabemos que α y β tienen el mismo dominio, por lo tanto a lo sumo los elementos de X tienen $n-1$ dominios distintos, así existe un subconjunto $\hat{S}_i$, $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, el cual no es dominio de ningún elemento en X.

Luego, tome $\gamma = (i, b)$, para algún $b \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, elemento de $POI(n)$, como $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ es un conjunto generador entonces $\gamma = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}...x_{i_k}$, donde $x_{i_r} \in X$ con $1 \leq r \leq k$, que también se puede escribir como:

$$\begin{aligned}(i, b) = \gamma &= (\overline{Dom(x_{i_1})}, \overline{Ran(x_{i_1})})(\overline{Dom(x_{i_2})}, \overline{Ran(x_{i_2})})...(\overline{Dom(x_{i_k})}, \overline{Ran(x_{i_k})}) \\ &= (i, \overline{Ran(x_{i_1})})(\overline{Dom(x_{i_2})}, \overline{Ran(x_{i_2})})...(\overline{Dom(x_{i_k})}, b)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $Dom(x_{i_1}) = \hat{S}_i$, lo cual es una contradicción.

2. Suponga que existen α, β elementos en X, tal que $\alpha L \beta$. Por **Lema 1.1.12.** sabemos que α y β tienen el mismo rango, por lo tanto a lo sumo los elementos de X tienen $n-1$ rangos distintos, así existe un subconjunto $\hat{S}_i$, $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, el cual no es rango de ningún elemento en X.
   Luego, tome $\gamma = (b, i)$, para algún $b \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, elemento de $POI(n)$, como $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ es un conjunto generador entonces $\gamma = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}...x_{i_k}$, donde $x_{i_r} \in X$ con $1 \leq r \leq k$, que también se puede escribir como:

$$\begin{aligned}(b, i) = \gamma &= (\overline{Dom(x_{i_1})}, \overline{Ran(x_{i_1})})(\overline{Dom(x_{i_2})}, \overline{Ran(x_{i_2})})...(\overline{Dom(x_{i_k})}, \overline{Ran(x_{i_k})}) \\ &= (b, \overline{Ran(x_{i_1})})(\overline{Dom(x_{i_2})}, \overline{Ran(x_{i_2})})...(\overline{Dom(x_{i_k})}, i)\end{aligned}$$

   Por lo tanto, $Ran(x_{i_k}) = \hat{S}_i$, lo cual es una contradicción.

3. Suponga que una identidad parcial pertenece a X, sea esta $\delta = (i, i)$, para algún $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Para cualquier elemento $\omega = (i, s)$, para algún $s \in \{1, 2, 3, ..., n\} - \{i\}$, elemento de $POI(n)$ se podrá expresar en términos de elementos de $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ de la forma $\omega = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}...x_{i_k}$, donde $x_{i_r} \in X$ con $1 \leq r \leq k$, como $\omega = (i, s)$ y X no tiene dos elementos distintos R-relacionados entonces,

$$\begin{aligned}\omega = (i, s) &= x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}...x_{i_k} \\ &= \delta x_{i_2}x_{i_3}...x_{i_k}\end{aligned}$$

   es decir $x_{i_1} = \delta$, ya que δ es el único elemento con dominio $\hat{S}_i$ en X. Por esto mismo, $x_{i_2} = \delta$ y todo x_{i_r} es igual a δ, esto es $(i, s) = \delta\delta\delta...\delta$, llegando a una contradicción.

□

Para el corolario que sigue, se ofrece una demostración de elaboración propia.

Corolario 2.2.9. *Todo conjunto generador de $POI(n)$ tiene al menos n elementos.*

Demostración. Suponga que existe un conjunto no vacío X que genera a $POI(n)$ y tiene k elementos, con $k < n$. Por resultados anteriores, sabemos que X no tiene dos elementos R-relacionados, por lo tanto no existen en X dos elementos con el mismo dominio.
Ahora, tome a $\rho \in POI_{n-1}(n)$ tal que el dominio de este elemento sea distinto al de todos los elementos de X, este ρ existe ya que los elementos de $POI_{n-1}(n)$ tienen n dominios distintos. Llegando así a una contradicción, ya que ρ no puede ser expresado como producto de los elementos de X.

□

Uno de los resultados importantes que estudiaremos en este trabajo es

Teorema 2.2.10. *Sea X un subconjunto de n elementos en $POI_{n-1}(n)$ que no contiene dos elementos distintos $R-relacionados$, ni dos elementos distintos $L-relacionados$, ni identidades parciales. Entonces X es un conjunto generador minimal para $POI(n)$ si y solo si las aristas de Ω_X forman un $n-ciclo$.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Asumamos X es un conjunto generador minimal para $POI(n)$, el suponer que X no tiene identidades parciales, ni dos elementos distintos R-relacionados o L-relacionados implica que en Ω_X cada vértice termina o empieza a lo sumo una arista. Como resultado, Ω_X es una unión de ciclos disjuntos. Si asumimos, por contradicción, que las aristas de Ω_X no forman un $n-ciclo$, esto implica que estas forman al menos dos ciclos, los cuales llamaremos C_1 y C_2 con longitud n_1 y n_2 respectivamente. Ahora, escogamos un elemento $(a,b) \in POI_{n-1}(n)$, donde a es un vértice del $n_1 - ciclo\ C_1$ y b del $n_2 - ciclo\ C_2$. Como X es un conjunto generador, podemos expresar a (a,b) como producto de elementos en X:

$$(a,b) = (x_{11}, x_{12})(x_{21}, x_{22})(x_{31}, x_{32})...(x_{k1}, x_{k2}).$$

Luego, como $x_{11} = a$ es un vértice en C_1, entonces x_{12} es un vértice en C_1, esto implica que (x_{11}, x_{12}) es una arista dirigida en $\Omega_X - C_2$, además como $x_{12} = x_{21}$ es un vértice en C_1, entonces $x_{22} = x_{31}$ es vértice de C_1, lo que implica (x_{21}, x_{22}) es una arista dirigida en $\Omega_X - C_2$. Continuando con este proceso, llegamos a que (x_{k1}, x_{k2}) es una arista dirigida en $\Omega_X - C_2$, pero $x_{k2} = b$ es un vértice en C_2, llegando así a una contradicción. Por lo tanto, Ω_X forma un $n - ciclo$.
$\Leftarrow$) Asumamos que las aristas de Ω_X forman un $n-ciclo$. Sea $(a.b)$ un elemento arbitrario en $POI_{n-1}(n)$. Como las aristas de Ω_X forman un $n-ciclo$ y X no contiene dos elementos distintos R-relacionados o L-relacionados, ni identidades parciales, entonces se tiene un

ciclo de la forma:

$$x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_{i-1} \to a \to x_{i+1} \to \cdots \to x_{j-1} \to b \to x_{j+1} \to \cdots x_n \to x_1$$

donde existe un camino de a a b,

$$a \to x_{i+1} \to \cdots \to x_{j-1} \to b$$

por lo tanto, (a, b) es generado por elementos de X de la forma:

$$(a, b) = (a, x_{i+1})(x_{i+1}, x_{i+2})...(x_{j-1}, b).$$

Así, todos los elementos de $POI_{n-1}(n) - \{id\}$ son generados. Luego, para generar todos los elementos de $POI_k(n)$, para $k \leq n-2$ seguiremos el siguiente algoritmo.

Primero, generaremos todas las identidades parciales para cada rank multiplicando apropiadamente las identidades parciales de rank $n-1$. Ahora, considere algún elemento $\sigma \in POI_k(n)$ para $k \leq n-2$, sea $\tau \in POI_k(n)$ una identidad parcial donde $Dom(\tau) = Dom(\sigma)$. Sea $Ran(\sigma) = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_k\}$ y $Ran(\tau) = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_k\}$ donde $a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_k$ y $b_1 < b_2 < b_3 \cdots < b_k$. A continuación, se explica una secuencia de multiplicaciones sobre τ para reemplazar $[a_1, a_2, a_3, ..., a_k]$ por $[b_1, b_2, b_3, ..., b_k]$ en el rango, la idea es ir moviendo un valor de $Ran(\tau)$ incrementando o disminuyendo en 1. Para cambiar b_i por $b_i \pm 1$, con $1 \leq i \leq k$, se usa el elemento de rank $n-1$ $\gamma = (b_i \pm 1, b_i)$, con esta elección se cumple que $Dom(\tau\gamma) = Dom(\tau)$ y $Ran(\tau\gamma) = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_{i-1}, b_i \pm 1, b_{i+1}, ..., b_k\}$. Luego, podemos construir una serie finita de elementos $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_r$ que pertenecen a $POI_{n-1}(n)$ tal que

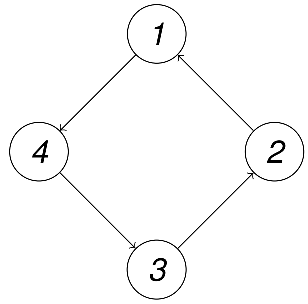
$$Dom(\tau\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \cdots \gamma_r) = Dom(\tau) = Dom(\sigma)$$

y

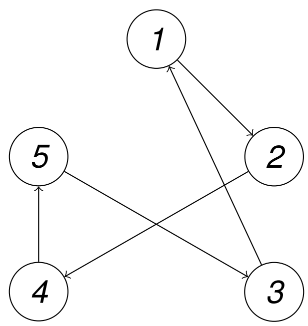
$$Ran(\tau\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \cdots \gamma_r) = Ran(\sigma).$$

Esto implica que $\sigma = \tau\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \cdots \gamma_r$, como τ es una identidad parcial y cada γ_c, para $1 \leq c \leq r$, tiene rank $n-1$, entonces σ puede ser enerado por elementos en $POI_{n-1}(n)$. Por lo tanto, X es un conjunto generador para $POI_n(n)$, y como X contiene exactamente n elementos, por el corolario anterior se concluye que X es un conjunto generador minimal. □

Ejemplo 2.2.11. *El conjunto $X = \{(1, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)\}$ forma un conjunto generador de $POI(4)$ ya que las aristas de la gráfica Ω_X forman un $4-ciclo$. Aplicando composición* *a las aristas, podemos generar los 16 elementos de $POI_3(4)$.*



Ejemplo 2.2.12. *El conjunto $X = \{(5,3),(4,5),(3,1),(2,4),(1,2)\}$ forma un conjunto generador de $POI(5)$ ya que las aristas de la gráfica Ω_X forman un $5 - ciclo$. Aplicando composición a las aristas podemos generar los 25 elementos de $POI_3(4)$.*



3. RAÍCES DE MONOIDES

En esta sección se hallarán condiciones necesarias para determinar si un elemento de $POI(n)$ tiene raíz k-ésima. Para esto, es necesario introducir algunas definiciones adicionales, así como el uso de una notación distinta a la vista en la sección anterior, fundamentada en el marco teórico propuesto por Álvarez en 2015 [1].

Es conveniente presentar otra notación para la escritura de los elementos de $POI(n)$. Sea $\rho \in POI(n)$ con $rank(\rho) = m$, escribimos

$$\rho = [a_1, a_2, a_3, ..., a_m] \to [b_1, b_2, b_3, ..., b_m]$$

donde $a_1, a_2, a_3, ..., a_m \in Dom(\rho)$, $b_1, b_2, b_3, ..., b_m \in Ran(\rho)$, $a_i < a_{i+1}$ y $b_i < b_{i+1}$ para cada $i \in \{1, 2, 3, ..., m-1\}$.

Ejemplo 3.0.1. *Tome*

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ - & 1 & - & - & 3 & 5 \end{pmatrix} \in POI(6)$$

con esta nueva notación, $\gamma = [2, 5, 6] \to [1, 3, 5]$.

Definición 3.0.2. *Sea $\tau \in POI(n)$ decimos que τ tiene una **raíz k-ésima**, si existe $\alpha \in POI(n)$ tal que $\tau = \alpha^k$ para algún $k \in \{1, 2, 3, ...\}$.*

Ejemplo 3.0.3. *Note $\beta = [6, 9] \to [3, 7] \in POI(9)$ puede ser expresado como $([4, 6, 8, 9] \to [3, 4, 7, 8])^2$, por lo tanto β tiene raíz k-ésima con $k = 2$.*

Observación 4. Sea $\tau \in POI(n)$ y $c \in Dom(\tau)$, como τ preserva orden, entonces la sucesión

$$c, \tau(c), \tau^2(c), ..., \tau^k(c), ...$$

es constante, estrictamente creciente o estrictamente decreciente. Si es constante, la sucesión tendría infinitos términos ya que $\tau^n(c) = c$, pero si es estrictamente creciente o decreciente tiene un número finito de términos.

Ejemplo 3.0.4. *Sea $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ - & 1 & 2 & 4 & 6 & - \end{pmatrix} \in POI(6)$. Para $c = 3$, la sucesión de la **Observación 4.** es estrictamente decreciente, para $c = 4$ es constante y para $c = 5$ es estrictamente creciente.*

Definición 3.0.5. *Sea* $\alpha = [a_1, a_2, a_3, ..., a_m] \to [b_1, b_2, b_3, ..., b_m] \in POI(n)$*, se define a* $\alpha^{-1} = [b_1, b_2, b_3, ..., b_m] \to [a_1, a_2, a_3, ..., a_m]$ *como la* ***inversa*** *de* α*.*

Lema 3.0.6. *Sea* $\alpha = [a_1, a_2, a_3, ..., a_m] \to [b_1, b_2, b_3, ..., b_m] \in POI(n)$*, entonces:*

1. $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$*.*
2. $\alpha\alpha^{-1} = [a_1, a_2, a_3, ..., a_m] \to [a_1, a_2, a_3, ..., a_m]$*.*
3. $\alpha^{-1}\alpha = [b_1, b_2, b_3, ..., b_m] \to [b_1, b_2, b_3, ..., b_m]$*.*

Demostración.

1. Note que $(\alpha^{-1})^{-1} = ([b_1, b_2, b_3, ..., b_m] \to [a_1, a_2, a_3, ..., a_m])^{-1} = [a_1, a_2, a_3, ..., a_m] \to [b_1, b_2, b_3, ..., b_m] = \alpha$, gracias a la definición de inversa.
2. Se puede ver que $\alpha\alpha^{-1} = ([a_1, a_2, a_3, ..., a_m] \to [b_1, b_2, b_3, ..., b_m])([b_1, b_2, b_3, ..., b_m] \to [a_1, a_2, a_3, ..., a_m]) = [a_1, a_2, a_3, ..., a_m] \to [a_1, a_2, a_3, ..., a_m]$.
3. Al igual que el ítem anterior, $\alpha^{-1}\alpha = ([b_1, b_2, b_3, ..., b_m] \to [a_1, a_2, a_3, ..., a_m])([a_1, a_2, a_3, ..., a_m] \to [b_1, b_2, b_3, ..., b_m]) = [b_1, b_2, b_3, ..., b_m] \to [b_1, b_2, b_3, ..., b_m]$.

$\square$

Lema 3.0.7. *Sea* $k \geq 2$ *y* $\tau \in POI(n)$*, entonces* τ *tiene raíz* k*-ésima en* $POI(n)$ *si y solo si* τ^{-1} *tiene raíz* k*-ésima.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Supongamos que τ tiene raíz k-ésima en $POI(n)$, digamos σ. Esto es, $\sigma^k = \tau$. Ahora, note que $(\sigma^{-1})^k = (\sigma^k)^{-1} = \tau^{-1}$, por lo tanto τ^{-1} tiene raíz k-ésima en $POI(n)$.
$\Leftarrow$) Supongamos que τ^{-1} tiene raíz k-ésima en $POI(n)$, digamos σ. Esto es, $\sigma^k = \tau^{-1}$. Ahora, note que $(\sigma^{-1})^k = (\sigma^k)^{-1} = (\tau^{-1})^{-1} = \tau$, por lo tanto τ tiene raíz k-ésima en $POI(n)$. $\square$

En esta sección se profundiza en dos resultados principales expuestos por U. Alvarez (2015) [2], los cuales son:

Teorema 3.0.8. *Sea* $k \geq 2$ *y* $\tau = [a_1, a_2, a_3, ..., a_m] \to [b_1, b_2, b_3, ..., b_m] \in POI(n)$*. Si existe* i*, tal que* $1 \leq i \leq m$*, y* $0 < |a_i - b_i| < k$*, entonces* τ *no tiene raíz* k*-ésima en* $POI(n)$*.*

Demostración. Por contradicción, suponga que τ tiene raíz k-ésima en $POI(n)$, siendo esta σ, y que existe i, donde $1 \leq i \leq m$, y $0 < |a_i - b_i| < k$.
Si $a_i < b_i$, la sucesión de la **Observación 4.**, para $c = a_i$, es estrictamente creciente. Esto implica que $b_i - a_i \geq k$, ya que para cada j se cumple que $\sigma^j(a_i) < \sigma^{j+1}(a_i)$, donde $1 \leq j \leq k-1$. Lo que es una contradicción.
Si $a_i > b_i$, la sucesión de la **Observación 4.**, para $c = a_i$, es estrictamente decreciente. Esto implica que $a_i - b_i \geq k$, ya que para cada s se cumple que $\sigma^s(a_i) > \sigma^{s+1}(a_i)$, donde $1 \leq s \leq k-1$. Lo que es una contradicción. □

Ejemplo 3.0.9. *El elemento* $[1,4,6,7] \rightarrow [3,5,9,10]$ *de* $POI(10)$ *no tiene raíz cuadrada, esto ya que su segundo elemento en el dominio y rango cumplen la condición del teorema anterior,* $5 - 4 = 1$*. Al igual que el elemento* $[3,5,6,7,8,9,10] \rightarrow [103,104,106,107,108,109,110]$ *no tiene raíz centésima.*

Teorema 3.0.10. *Sea* $k \geq 2$ *y* $\tau = [a_1, a_2, a_3, ..., a_m] \rightarrow [b_1, b_2, b_3, ..., b_m] \in POI(n)$*. Si* $a_i = b_{i+1}$ *ó* $a_{i+1} = b_i$*, para algún* $1 \leq i \leq m-1$*, entonces* τ *no tiene raíz* k*-ésima en* $POI(n)$*.*

Demostración. Por contradicción, suponga $\tau = \gamma^k$ para algún $\gamma \in POI(n)$. Esto implica que para cada $j \in \{1,2,3,...,m\}$, $\gamma^k(a_j) = b_j$. Tomemos $i \in \{1,2,3,...,m-1\}$, si $a_i = b_{i+1}$ las sucesiones:

$$\{a_i, \gamma(a_i), \gamma^2(a_i), \ldots, \gamma^{k-1}(a_i), b_i\} \tag{3.1}$$

y

$$\{a_{i+1}, \gamma(a_{i+1}), \gamma^2(a_{i+1}), \ldots, \gamma^{k-1}(a_{i+1}), b_{i+1}\} \tag{3.2}$$

son estrictamente decrecientes, ya que por definición $a_i = b_{i+1} > b_i$ y $a_{i+1} > a_i = b_{i+1}$. Luego, de (3.2) se conoce que $\gamma(a_{i+1}), \gamma^2(a_{i+1}), \ldots, \gamma^{k-1}(a_{i+1})$ están estrictamente entre a_{i+1} y a_i, ya que $a_i = b_{i+1}$, por lo que estos valores no pertenecen al dominio de τ. Ahora, note que $\gamma(a_i) = \gamma(b_{i+1}) = \gamma(\gamma^k(a_{i+1})) = \gamma^k(\gamma(a_{i+1})) = \tau(\gamma(a_{i+1}))$, por lo tanto $\gamma(a_{i+1})$ pertenece al dominio de τ, lo que es una contradicción.
Si $a_{i+1} = b_i$, de (3.1) se conoce que $\gamma(a_i), \gamma^2(a_i), \ldots, \gamma^{k-1}(a_i)$ están estrictamente entre a_{i+1} y a_i, ya que $a_{i+1} = b_i$, por lo que estos valores no pertenecen al dominio de τ. Ahora, note que $\gamma(a_{i+1}) = \gamma(b_i) = \gamma(\gamma^k(a_i)) = \gamma^k(\gamma(a_i)) = \tau(\gamma(a_i))$, por lo tanto $\gamma(a_i)$ pertenece al dominio de τ, lo que es una contradicción. □

Ejemplo 3.0.11. *Los siguientes elementos no tiene raíz* k*-ésima, para algún* $k \geq 2$*:*

1. $[2,10] \rightarrow [10,12]$,

2. $[1, 2, 10, 14, 16] \to [1, 10, 12, 13, 16]$,

3. $[78{,}99] \to [1, 78]$.

Esto se puede ver al usar el teorema anterior, en el primer elemento se puede ver que $a_2 = b_1$.

Bibliografía

Alvarez, U. “On kth roots in semigroups of order-preserving partial permutations”. en. En: *Cal State Fullerton Dimensions* (2015), págs. 123-132 (vid. págs. 7, 23).

Annin, S. “Hierarchy of efficient generators of the symmetric inverse monoid”. en. En: *Semigroup Forum* 55 (1997), págs. 327-355 (vid. pág. 15).

Annin S y Lopez, S. “Minimal generating sets of the monoid of partial order-preserving injections”. en. En: *The pump journal of undergraduated research* 3 (2020), págs. 190-204 (vid. págs. 4-6, 8, 9, 15).