

**ENTENDIENDO EL CONCEPTO DE VOLUMEN USANDO IDEAS DEL
PRINCIPIO DE CAVALIERI Y MATERIAL MANIPULABLE**

**LUZ DARY ARANGO CHAPETA
ALBERTO EDUARDO TRUJILLO QUINTERO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2010

**ENTENDIENDO EL CONCEPTO DE VOLUMEN USANDO IDEAS DEL
PRINCIPIO DE CAVALIERI Y MATERIAL MANIPULABLE**

LUZ DARY ARANGO CHAPETA

ALBERTO EDUARDO TRUJILLO QUINTERO

**Trabajo de Grado para optar el título de
Licenciados en Matemáticas**

DIRECTORA

CAROLINA MEJIA MORENO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2010

AGRADECIMIENTOS

A Dios por darnos la vida y por la posibilidad de crecer como profesional.

A mi madre y hermana Alicia, y Leidy... quienes con su apoyo logran esperanzas y anhelos.

A Oscar, Jhon, Edinson, Jayson, Eduardo, Oscar Juan, Juan Sebastian y Benjamín, quienes nos acompañaron hasta el final de este trabajo dejando huella a los demás.

Al profesor Fernando Pérez, por sus consejos, apoyo y colaboración.

A la profesora Carolina Mejía por su paciencia y dedicación.

A nuestros cómplices de las travesuras realizadas en este trayecto de vida Alirio, Juliana, Yerly, Henry, Jhovany, Mayury, Edward, Eduardo, Michael, Leidy....en fin a todos los compañeros de semestre.

Al profesor Arnoldo Teherán por sus enseñanzas impartidas, consejos, apoyo, esmero y colaboración.

A mi hijo Julián Andrés que con su inocencia Logra dar alegría a mi vida.

Luz

AGRADECIMIENTOS

A Dios por haberme dado la oportunidad de haber sido parte en su magnífica creación.

A toda mi familia en especial a mi madre y hermana: Luz Esperanza y Johanna Isabel quienes con su apoyo y amor han dado lo mejor de ellas para por hacer de mí un hombre de bien.

A Luis Miguel Hortua quien con sus consejos, su presencia incondicional ha estado y participado en mis alegrías y tristezas.

Al profesor Fernando y los estudiantes que nos colaboraron en nuestra investigación para que ella fuera un hecho.

A la profesora Carolina Mejía que en todo el proyecto nos brindó su ayuda y colaboración incondicional.

A mis amigos de toda la vida: Jairo Gutiérrez Norberto, Mario, Marina quienes me han acogido con gran aprecio y cariño en sus corazones.

A mis amigos: Alirio y Mayuri quienes nos acompañaron con sus conocimientos en este trabajo.

A todos mis amigos de universidad y de la carrera: Juliana, Silvia Ardila, Judit, Erika, Henry, Yerly, Luz Dary, Edward, Milena, Andrea, Leidy Beatriz, Edwis, Jairo, David, Ricardo (q.e.d)...y a todos los que en sus debidos momentos me acompañaron en este proceso de mi vida.

Al programa Pamra en especial a Deisy Lizarazo y la señora Gilma Puentes por darme la oportunidad en dar mis primeros pasos como docente.

A mis sobrinos: Sebastián y Felipe a los que quiero mucho.

Eduardo

DEDICATORIA

*A mi madre Alicia Chapeta por su amor, y estar siempre en mi vida dirigiendo
mis pasos.*

*A mi hermana Leidy Arango que con sus consejos y apoyo logre alcanzar una
meta más en mi vida.*

A mi hijo Julian Andres quien es la fuerza y el motor de mí existir.

Gracias a ustedes por ser mi todo.

Luz Dary Arango Chapeta

*A mi mamá Luz Esperanza Quintero quien con su confianza, sacrificios y
muchos esmeros logre alcanzar esta meta en mi vida.*

*A mi hermana Johanna Isabel Trujillo por estar presente y ayudarme en todas
las cosas que hago.*

A Luis Miguel Hortua por ser mi apoyo y creer en mí.

*En especial este trabajo está dedicado a estas tres personas las cuales amo y
son la razón de mi vida.*

Alberto Eduardo Trujillo Quintero

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
1. OBJETIVOS.....	4
1.1. OBJETIVO GENERAL:.....	4
1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS:	4
2. ANTECEDENTES.....	5
3. MARCO TEÓRICO	8
3.1. LA MATEMÁTICA INVOLUCRADA.....	10
4. LA METODOLOGÍA Y LOS ESTUDIANTES DE LA INVESTIGACIÓN.....	21
5. DISEÑO Y DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES.	26
CONCLUSIONES.....	55
BIBLIOGRAFÍA	57
ANEXOS	59

LISTA DE ANEXOS

Anexo 1: Actividad uno

Anexo 2: Actividad dos

Anexo 3: Actividad tres

Anexo 4: Actividad cuatro

RESUMEN

TITULO:

ENTENDIENDO EL CONCEPTO DE VOLUMEN USANDO IDEAS DEL PRINCIPIO DE CAVALIERI Y MATERIAL MANIPULABLE. *

AUTORES:

ARANGO CHAPETA, Luz Dary y TRUJILLO QUINTERO Alberto Eduardo. **

Palabras claves: 1. Volumen. 2. Principio de Cavalieri. 3. Material manipulable. 4. Aprendizaje Constructivista.

Esta investigación se realizó en el INSTITUTO TÉCNICO SUPERIOR DÁMASO ZAPATA en BUCARAMANGA SANTANDER, con un grupo de nueve estudiantes del grado octavo, a los que aplicamos cuatro actividades con el fin de dar respuesta a una pregunta que surgió a cerca de un tema de nuestro interés. La pregunta que nos hicimos fue: ¿Cómo los estudiantes comprenden el concepto de volumen usando las ideas de Cavalieri a partir de la manipulación de material concreto? Para esta pregunta se plantearon unos objetivos entre el cual resaltamos el más importante: ayudar a los estudiantes a desarrollar destrezas para que identifiquen y usen correctamente el concepto de volumen, apoyados en las ideas básicas del principio de Cavalieri y la manipulación de material concreto.

Las actividades que planteamos para nuestro proyecto consistió en elaborar algunos sólidos como: pirámides, cilindros, esferas, conos, a partir de icopor, valso, acrílico y vidrio; y con esto construir un puente entre el sólido concreto y el concepto abstracto de volumen, que los estudiantes deben deducir. Estamos convencidos que el uso del material manipulable es una herramienta valiosa en el proceso de adquisición y construcción de nuevo aprendizaje.

Analizando los resultados obtenidos en esta investigación, y a las fuentes bibliográficas consultadas, podemos concluir que el uso de material concreto encaminado a trabajar conceptos matemáticos permite una MAYOR comprensión logrando así cumplir con los objetivos planteados, al inicio de esta práctica docente.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Magister en Matemáticas. MEJÍA MORENO, Carolina

ABSTRAC

TITLE:

UNDERSTANDING THE CONCEPT OF VOLUME USING IDEAS OF CAVALIERI'S PRINCIPLE *.

AUTHOURS:

ARANGO CHAPETA Luz Dary and TRUJILLO QUINTERO Alberto Eduardo. **

KEYWORDS:

1. VOLUME, 2. CAVALERY'S PRINCIPLE, 3. MATERIAL HANDLED, 4. CONSTRUCTIVIST LEARNING.

This investigation was conducted in the INSTITUTO TECNICO SUPERIOR DÁMASO ZAPATA in BUCARAMANGA SANTANDER, whit a group of nine eight grade students. They developed four activities in order to give an answer for a question emerged from a subject of our interest. That's question was: how the students can understand the concept of solid's volume using the Cavalieri's ideas by handling concrete material? This question did us propose the objective of help students to developer skills for identify and use correctly the concept of volume by the use of Cavalieri's principle using handling material.

The activities that we raised for our project was to develop some solids such as pyramids, cylinders, spheres, cones, from polystyrene, waltz, acrylic and glass, and thereby build a solid bridge between the concrete and the abstract concept of volume, students should be deduced. We believe that the use of manipulable material is a valuable tool in the process of acquisition and construction of new learning.

According whit the results of this investigation, the use of handling material for the interpretation of mathematical concepts get a fast and better understanding. In the bibliography there are more investigations about it, which confirm. These results show that we comply with the objectives proposed at the beginning of this study.

* Grade work

**Faculty of sciences. Mathematics school. . Director: MEJÍA MORENO, Carolina

INTRODUCCIÓN

Este trabajo es una investigación de aula basado en una experiencia de enseñanza. En esta experiencia se trabajó el concepto de volumen de un sólido con estudiantes del grado octavo del colegio Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata.

La idea principal de la experiencia fue presentar a los estudiantes el concepto de volumen, utilizando material manipulable y algunas ideas del principio de Cavalieri⁵, todo encaminado a que los estudiantes puedan hacer conjeturas y conclusiones acerca del concepto del volumen de algunos sólidos conocidos.

Utilizar material manipulable e ideas no clásicas para trabajar un concepto no es una idea nuestra, actualmente el innovar en el salón de clase se ha vuelto una necesidad, el motivo de esta innovación es el de intentar llenar los vacíos que los estudiantes tiene con respecto a lo que se les enseña diariamente, es por esto que el docente trata de buscar alternativas para abordar los diferentes temas.

En nuestro caso concreto y siendo conscientes del problema de la enseñanza hoy en día, decidimos utilizar algunas herramientas para abordar la problemática del aprendizaje de un concepto tan humano como el volumen. La pregunta que nos planteamos es ¿cómo los estudiantes comprenden el concepto de volumen usando las ideas de Cavalieri a partir de la manipulación de material concreto? pero como indudablemente la respuesta a esta pregunta se podía abordar desde diferentes caminos, la delimitamos estableciendo el siguiente objetivo: **Ayudar a los estudiantes a desarrollar destrezas para que identifiquen y usen correctamente el concepto de volumen, apoyados en el principio de Cavalieri y la manipulación de material concreto.**

⁵ CAVALIERI, Bonaventura. Matemático italiano de finales del siglo XVI, conocido por desarrollar un método de indivisibles, factor determinante para el origen del cálculo integral que conocemos actualmente.

Este trabajo pretende ser un aporte a la matemática con significado. Una matemática que se construye, que se genera paso a paso, una matemática que a pesar de ser formal es parte de un edificio que permanece continuamente en construcción y de esta manera mostrarla humanizada; esta es la matemática real, una matemática construida en la discusión, en los consensos y también en disensos, nuestro trabajo busca avanzar en esa dirección.

Para ello se planearon cuatro actividades, en las cuales tuvimos en cuenta la importancia que tiene en matemáticas “utilizar material manipulable” y usar las ideas de los matemáticos que más han aportado al desarrollo de la humanidad. En este caso usamos algunas ideas planteadas por Cavalieri para facilitar el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

En las actividades se propone construir algunos sólidos como: pirámides, cilindros, esferas, conos, paraboloides, a partir de materiales como icopor, valso, acrílico y vidrio y con esto construir un puente entre el sólido concreto y el concepto abstracto de volumen, que los estudiantes deben deducir. En relación con esto Estrada (2002)⁶, afirma:

“Es importante llevar a la clase diferentes tipos de sólidos para que los estudiantes puedan percibirlos, distinguirlos y clasificarlos. Luego, estos deben construir sus propios modelos en diferentes materiales,... Es también conveniente que los estudiantes dibujen los modelos reales, pues estos desarrollan su capacidad de percepción visual”.

Para el trabajo de calcular el volumen de cada uno de los sólidos se usarán dos de las ideas propuestas por Cavalieri en su resultado más importante conocido como Principio de Cavalieri. La primera idea consiste en aproximar el

⁶ ESTRADA, W. (2002). De La Generación Espontánea de las Fórmulas de Volumen a su Construcción. Memorias del XIII Encuentro de Geometría y I de Aritmética. Universidad Pedagógica Nacional. Pág. 172.

volumen de un sólido mediante volúmenes de secciones transversales con grosor fijo. La segunda idea consiste en agrupar algunos sólidos que comparten ciertas características y a partir del conocimiento del volumen de algunos de ellos, calcular o aproximar los volúmenes de los otros sólidos del grupo.

Este escrito resume las actividades con los estudiantes y la fundamentación teórica usada para el desarrollo de la práctica, está organizado en seis capítulos. El primero consiste en describir los objetivos planteados para la práctica, los tres siguientes se centran en la descripción teórica utilizada. Los dos últimos cuentan la planeación y desarrollo de las actividades y de la práctica en el aula. Por último incluimos las conclusiones y recomendaciones.

1. OBJETIVOS

1.1. OBJETIVO GENERAL:

Ayudar a los estudiantes a desarrollar destrezas para que identifiquen y usen correctamente el concepto de volumen, apoyados en las ideas básicas del Principio de Cavalieri y la manipulación de material concreto.

1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Guiar al estudiante en la construcción de figuras sólidas a través del material concreto para que se acerque al concepto de volumen usando información de sus partes.
- Describir el volumen del sólido como suma de los volúmenes de secciones transversales con grosor fijo.
- Registrar y describir cómo el estudiante entiende el proceso de aproximar el volumen de sólidos a partir de áreas de secciones transversales con grosor fijo.
- Llevar al estudiante a hacer conjeturas acerca de la relación que existe entre el área de la base con el área de una sección transversal a una altura dada.
- Verificar si los estudiantes pueden calcular las áreas de las secciones transversales usando el radio de la base, la altura del sólido y la altura de la sección transversal.
- Verificar si el estudiante entiende la preservación del volumen bajo inclinaciones del sólido usando el material concreto.
- Mostrarle a los estudiantes una aplicación del Principio de Cavalieri para el caso del cono y la pirámide.
- Evaluar el proceso de aprendizaje del concepto de volumen en los estudiantes que participaron en este proyecto.

2. ANTECEDENTES

Con respecto al tema de investigación, se encontraron trabajos relacionados con la problemática en la enseñanza del concepto de volumen y especialmente un trabajo donde los autores utilizan el principio de Cavalieri para enseñar el concepto de volumen. A continuación hacemos una pequeña reseña de los más representativos:

- *De la generación espontánea de las fórmulas de volumen a su construcción*, de WILLIAM FERNANDO ESTRADA (2002)⁷. Su trabajo está encaminado hacia una propuesta para justificar las fórmulas del volumen de los sólidos elementales (prisma, pirámide, cilindro, cono y esfera), propuesta que nace como respuesta a las malas presentaciones que proponen los textos tradicionalmente en la educación básica y media; además hace constatar que los profesores de la enseñanza básica y media son poco creativos en el momento de hacer argumentos matemáticos sencillos para convencer a los estudiantes de la fórmulas del volumen. Para ello, el autor propone claramente la intención de construir el concepto y luego pasar a representarlo simbólicamente. Su estrategia fue llevar al aula de clase diferentes tipos de sólidos para su familiarización (percibirlos, distinguirlos y clasificarlos) para luego representar los modelos reales por medio de dibujos desarrollando su percepción visual.

En este trabajo Estrada utiliza el Principio de Cavalieri para enseñar la preservación del volumen en distintas transformaciones de un sólido. Esta

⁷ESTRADA, W. (2002). De la generación espontánea de las fórmulas de volumen a su construcción. Memorias del XIII Encuentro de Geometría y I de Aritmética. Universidad Pedagógica Nacional. Pág. 167 – 181

propuesta responde a las dificultades que los niños tienen en la comprensión del concepto de volumen.

- *Retorno de la geometría*, de ESTELA SONIA ALIENDRO y ANGÉLICA ELVIRA ASTORGA (2005)⁸. Este texto recoge algunos trabajos relacionados con los diferentes problemas que se encuentran en la enseñanza de la geometría. Para nuestro proyecto de investigación fue relevante este trabajo, pues nos sirvió para plantear algunas actividades y resaltar algunos parámetros, entre los cuales se destacan: la enseñanza de la geometría en un lenguaje cotidiano, la importancia de aplicar problemas a la vida real, el desarrollo de la percepción espacial y la visualización y desarrollo de modelos bien organizados. Por otra parte permitió el desarrollo de las habilidades: visuales, verbales, de dibujo, lógica y de aplicación.

- *El volumen ¿Por dónde Empezar?*, de MARIANA SAIZ ROLDAN (1999)⁹. En este trabajo se recalca la importancia que tiene la enseñanza del concepto de volumen en la educación. Además se muestran sus aplicaciones como parte importante de un proceso de formación donde el niño puede hacer comparaciones entre concepto enseñado y su relación con la vida cotidiana.

- *Early Indivisibles and Infinitesimal Techniques*, de C. H. EDWARDS (1979)¹⁰. En este libro se encuentra la formulación del Teorema de Cavalieri (1548-1647) el cual sirve para calcular volúmenes de sólidos desconocidos por medio de volúmenes de cuerpos ya conocidos siempre y cuando mantengan algunas características comunes. Esta formulación se utilizó para pensar en cómo enseñar el concepto de volumen mediante el uso de: razones y proporciones,

⁸ ALIENDRO, E; ASTORGA, A. (2005). Retorno de la Geometría. Recuperado el 17 julio de 2008 de http://www.union-matematica.org.ar/reunion_anual/reunion05/cursos_prof05/aliendro.

⁹ SAIZ, M. (1999). El Volumen ¿Por dónde Empezar? .Recuperado el 24 julio de 2008 de <http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig4/ConfMagist.pdf>.

¹⁰ C.H. EDWARDS (1979). The Historical Development of the Calculus. Pág. 98-109.

comparaciones entre sólidos, el uso de sólidos con volumen conocido para calcular el volumen desconocido de otros sólidos.

3. MARCO TEÓRICO

Nuestra práctica se basa en el uso de material manipulable. Los materiales manipulables son un recurso efectivo para el aprendizaje de la geometría. Es decir, la idea que se plantea es que, mientras más variados sean los medios para el aprendizaje, mayores serán las posibilidades para que cada estudiante logre desarrollar las competencias necesarias para la adquisición de un concepto nuevo. Es por esto que el concepto de volumen, objeto de esta investigación en el aula, será desarrollado mediante actividades secuenciales que permitan a los estudiantes crear construcciones de figuras tridimensionales¹¹ con el material manipulable. Respaldo estas afirmaciones, Olmo (1993)¹² afirma: *“algunas de las dificultades que los niños encuentran en la medida del volumen, pueden estar originadas por el hecho de que son forzados a “leer” y visualizar información sobre objetos sólidos a partir de gráficos sin haber manipulado previamente dichos objetos”*.

Durante las actividades buscamos trabajar de forma grupal e individual posibilitando la comunicación y favoreciendo algunos procesos, como el de la percepción y la visualización, a través del uso del material manipulable. Al respecto Burgos y otros (2005, Pág. 32)¹³ afirman:

“(…) Los materiales manipulables son un recurso sumamente eficaz para el aprendizaje de las matemáticas. El uso de materiales adecuados por parte de los alumnos constituye una actividad de primer orden que fomenta la observación, la experimentación y la reflexión necesarias para construir sus propias ideas

¹¹ Cuando hablamos de figuras tridimensionales hacemos alusión a los sólidos (cilindros, pirámides, esferas, etc.)

¹² OLMO, M; MORENO F; GIL F. (1993). Superficie y Volumen ¿algo más que el trabajo con fórmulas? Madrid. Síntesis. Pág. 120.

¹³ BURGOS N Viadys, y otros. Juegos Educativos Y Materiales Manipulativos: Un Aporte A la Disposición Para El Aprendizaje De Las Matemáticas. Noviembre 2005 Temuco – México pdf. Pág. 32

matemáticas. El trabajo con materiales ha de ser un elemento activo y habitual en clases y no deberá reducirse a la visualización esporádica de algún modelo presentado por un profesor (...)".

Es por esto que el uso de material concreto es de gran ayuda, ya que permite a los estudiantes construir sus propios conocimientos. El aprendizaje constructivista es el aprendizaje en el cual el estudiante, utilizando conocimientos anteriores, fabrica el nuevo conocimiento mediante la experimentación, la deducción y la inducción. Es por ello que el protagonista, el estudiante, requiere un compromiso con cada una de las actividades, de aquí que su papel sea fundamental e irremplazable. Tal como lo argumenta Vigotski ¹⁴ citado por Aja (1999):

La concepción constructivista se organiza en torno a las siguientes ideas:

- 1. El alumno es el responsable último de su propio proceso de aprendizaje.*
- 2. El alumno construye el conocimiento por sí mismo y nadie puede sustituirle en esta tarea.*
- 3. El alumno relaciona la información dada con los conocimientos previos, lo cual es esencial para la construcción del conocimiento.*
- 4. Los conocimientos adquiridos en un área se ven potenciados cuando se establecen relaciones con otras áreas.*
- 5. Se necesita un apoyo (profesor, compañeros, padres, etcétera) para establecer el "andamiaje"¹⁵ que ayuda a construir conocimiento.*
- 6. El profesor debe ser un orientador que guía el aprendizaje del alumno, intentando al mismo tiempo que la construcción del alumno se aproxime a lo que se considera como conocimiento verdadero.*

¹⁴ AJA F, José Manuel y otros. Enciclopedia General de la Educación, Grupo Editorial Océano, 1999.P ,263.

¹⁵ Andamiaje: se entiende como la mediación para que un estudiante sea guiado en su aprendizaje por el profesor.

Tratamos pues, durante todas las actividades, de involucrar al estudiante en el proceso de aprendizaje, utilizando el método constructivista propuesto por Vigotski y para ello nos valemos de estrategias variadas como la construcción, por parte de los alumnos, de sólidos con materiales de diferente textura, grosor y forma, recurriendo a citas históricas e incluso haciendo exposiciones donde los estudiantes intervienen activamente de manera individual o grupal.

3.1. LA MATEMÁTICA INVOLUCRADA

Definiremos algunos conceptos importantes para tener en cuenta durante el desarrollo de la investigación y los cuales servirán como soporte para el diseño y preparación de las actividades.

En el trabajo con los estudiantes buscamos sólidos que fueran conocidos por ellos y cuyo análisis se prestará para discusiones en el aula, así que decidimos que los estudiantes manejaran pirámides cuadradas, conos y cilindros.

A continuación haremos algunas aclaraciones de conceptos utilizados en este escrito y además con el ánimo de describir el Principio de Cavalieri, introducimos las definiciones formales de los sólidos utilizados en las actividades y algunos teoremas importantes, sin la prueba. Es importante anotar que en nuestro trabajo con los estudiantes estos conceptos y resultados los presentamos de manera muy intuitiva.

1. Definición:

Se da una región cuadrada R en un plano E y se da un punto V que no está en E . La pirámide con base cuadrada R y vértice V es la reunión de todos los segmentos \overline{VQ} para las cuales Q pertenece a R . La altura h de la pirámide cuadrada es la distancia (perpendicular) desde V a E .

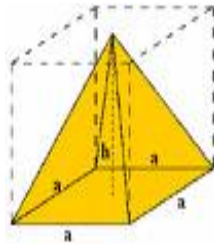


Figura 1: Pirámide

Una sección transversal de la pirámide es la intersección de la pirámide con un plano paralelo al plano E , cuando la intersección no es vacía.

Nota: En adelante hablaremos de sección transversal con grosor para referirnos a la parte del sólido que queda entre dos secciones transversales diferentes. El grosor es la diferencia entre las alturas de los dos planos utilizados para las secciones transversales.

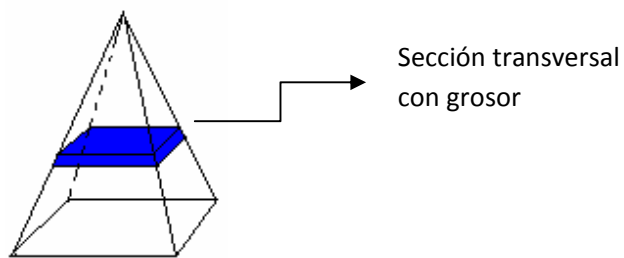


Figura 2: Pirámide sección transversal con grosor

2. Teorema:

Toda sección transversal de una pirámide cuadrada, es una región cuadrada semejante a la base. Si h es la altura y k es la distancia del vértice a la sección transversal, entonces el área de la sección transversal es igual a $\frac{k^2}{h^2}$ multiplicado por el área de la base.

Es de anotar que esta propiedad es válida no solamente en el caso de las pirámides cuadradas, veamos el siguiente teorema.

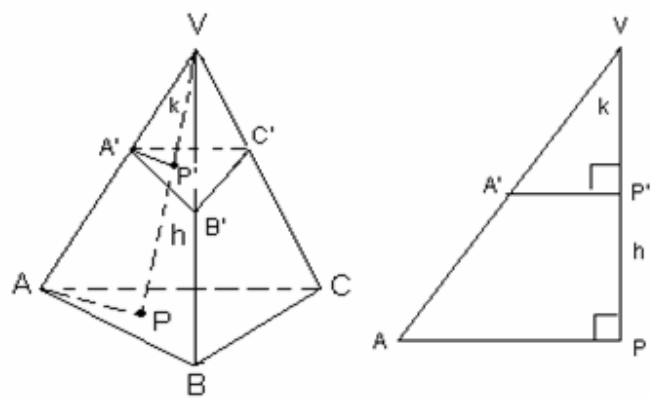


Figura 3: Pirámide de base Triangular y su sección transversal

3. Teorema:

En toda pirámide, la razón del área de una sección transversal al área de la base es $\frac{k^2}{h^2}$, donde h es la altura de la pirámide y k es la distancia del vértice al plano de la sección transversal.

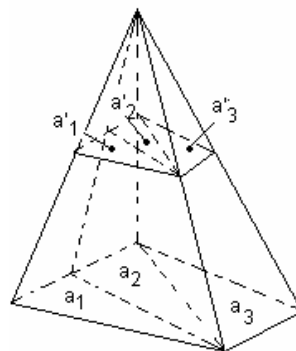


Figura 4: Pirámide y su razón de área de la sección transversal

4. Teorema:

Si dos pirámides tienen la misma altura y el área de sus bases es la misma, entonces las secciones transversales que equidistan de los vértices tienen la misma área.

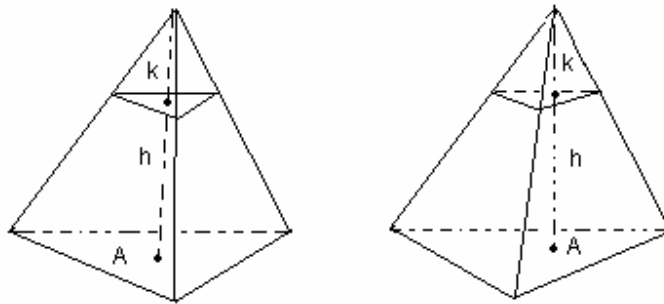


Figura 5: Pirámides a una misma altura y área

Note que este resultado es un corolario del teorema anterior.

5. Definición:

Sean E_1 y E_2 dos planos, sea R una región circular en E_1 y L una recta que intercepte a E_1 y a E_2 pero no a R . Formamos la unión de todos los segmentos $\overline{QQ'}$ con $Q \in R$. El cuerpo sólido resultante se llama cilindro circular. Si L es perpendicular a E_1 , entonces el cilindro se llama cilindro recto.

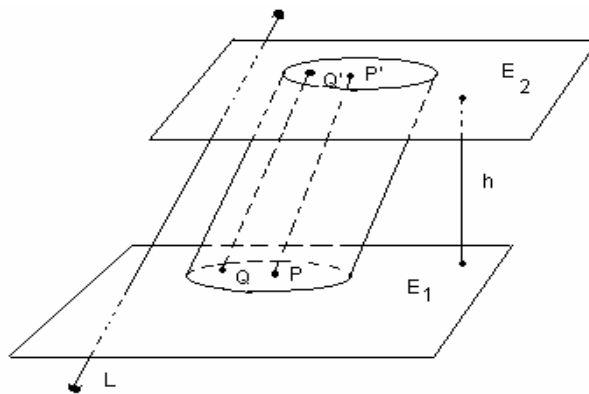


Figura 6: Cilindro Recto

6. Teorema:

Toda sección transversal de un cilindro circular¹⁶ es una región circular congruente con la base.

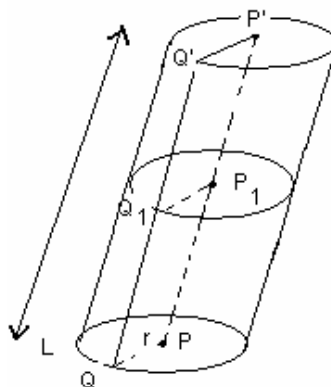


Figura 7: Cilindro Recto y su sección transversal

La idea de la demostración se basa en el hecho que, $P_1Q_1 = PQ$ esto es cierto ya que \overline{PQ} y $\overline{P_1Q_1}$ son lados del paralelogramo QQ_1P_1P .

¹⁶ La definición de sección transversal para un sólido arbitrario es similar a la definición dada para pirámides.

7. Definición:

Se dan una región circular R en un plano E y un punto V que no está en E . El cono circular es la unión de todos los segmentos \overline{VP} para los cuales P pertenece a R . La altura de la pirámide es la distancia (perpendicular) de V a E .

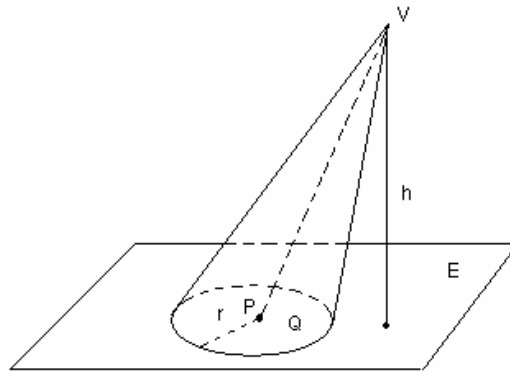


Figura 8: Cono Circular

8. Teorema:

Se dan un cono de altura h y una sección transversal formada por un plano a una distancia k del vértice. El área de la sección transversal es igual a $\frac{k^2}{h^2}$ multiplicado por el área de la base.

Observe la semejanza con los resultados obtenidos para la pirámide.

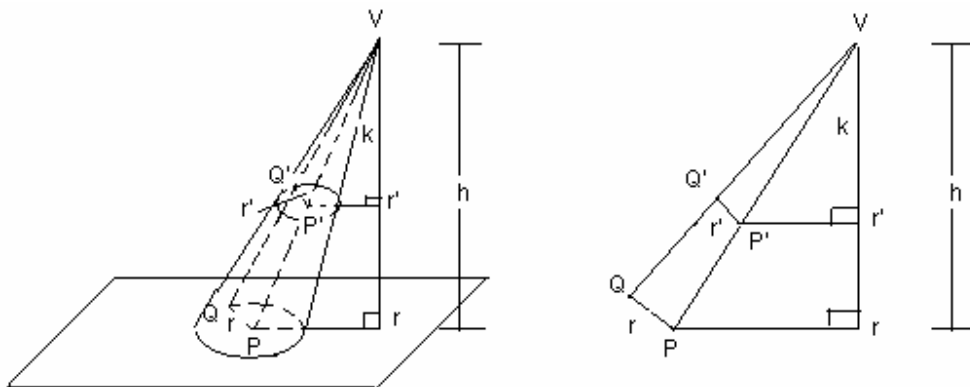


Figura 9: Sección Transversal de un Cono Circular

Ahora vamos a trabajar algunos resultados importantes acerca del volumen de los sólidos. La manera de introducir el volumen de cualquier sólido es considerando el siguiente Postulado de la Unidad:

9. Postulado de la unidad

El volumen de un paralelepípedo rectangular es el producto de la altura y el área de la base.

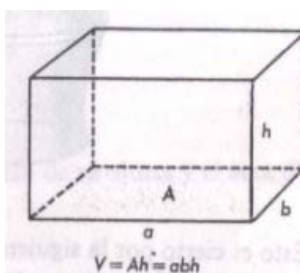


Figura 10: Paralelepípedo Rectangular

Basados en este postulado para paralelepípedos se pueden obtener las fórmulas de otros cuerpos sólidos. En nuestro caso nosotros usamos principalmente el volumen de fichas de forma cilíndrica cuyo volumen se calcula multiplicando el área de la base por la altura.

Ahora estudiaremos el Principio de Cavalieri usado por nosotros en esta práctica para diseñar las actividades desarrolladas por los estudiantes. Nosotros nunca presentamos de manera explícita en el aula este principio, sin embargo lo tomamos de inspiración para que ellos aprehendieran la noción de volumen de manera no convencional.

10. Postulado: Principio de Cavalieri I

Se dan dos cuerpos sólidos y un plano. Supongamos que todo plano paralelo al plano dado que interseca a uno de los dos cuerpos, interseca también al otro y da secciones transversales con áreas iguales. Entonces, los cuerpos tienen el mismo volumen.



Figura 11: Cuerpos sólidos

A partir de este postulado, Cavalieri construye el volumen de los sólidos a partir de la información que obtiene de los volúmenes de tajadas transversales del sólido. Esta idea de dividir el sólido en pedazos es la idea central de nuestro trabajo. Utilizar las partes para obtener información del todo.

11. Teorema: Principio de Cavalieri II

Si dos sólidos tienen igual altura y las secciones hechas por planos paralelos a las bases a iguales distancias de ellas tienen siempre áreas proporcionales entre sí, entonces los volúmenes de los sólidos están también a esta proporción.

A modo de ejemplo, vamos a utilizar el Principio de Cavalieri II para deducir el volumen del cono conociendo como calcular el volumen de una pirámide cuadrada. Este cálculo se presentó a los estudiantes para que ellos entendieran como usar el Principio aunque no se buscaba que ellos duplicaran este método con otros sólidos pues, en la mayoría de los casos, es muy difícil probar la proporcionalidad de las áreas de las secciones transversales.

Vamos a deducir la fórmula del volumen de un cono circular recto C con base de radio r y altura h , usando una pirámide cuadrada recta P cuya base tiene una unidad de lado. Si C_x y P_x son las secciones transversales indicadas en la figura veamos que sus áreas, para cualquier x , guardan una misma proporción.

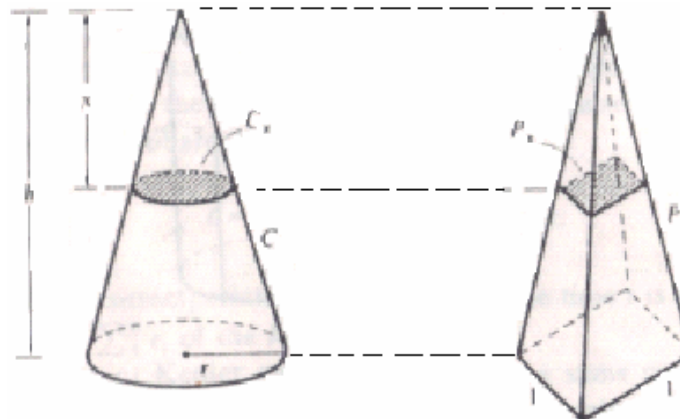
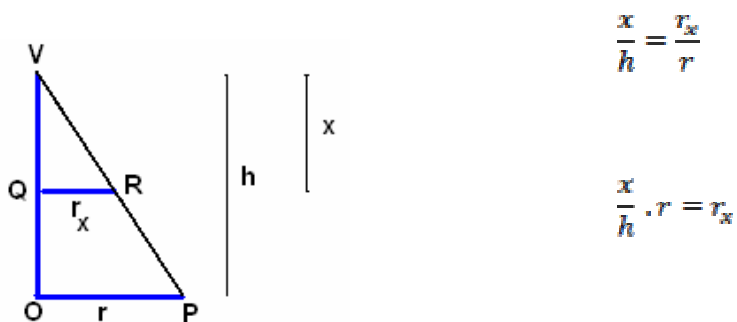
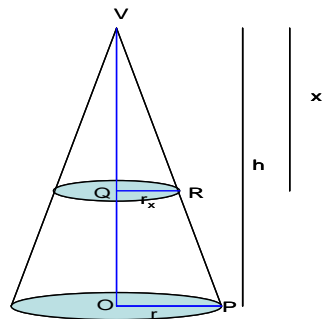


Figura 12: Principio de Cavalieri

Según la gráfica (cono) que se muestra a continuación, se puede ver fácilmente que los triángulos $OV P$ y QVR son semejantes, entonces:



Y sabiendo la fórmula del área del círculo, reemplazamos el radio en la ecuación para determinar el área de la sección circular C_x como se puede observar en la Figura del cono.

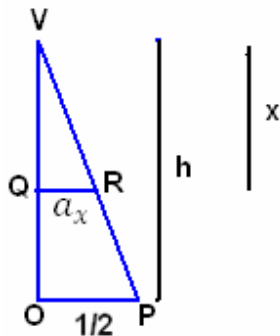


$$A(C_x) = \pi \cdot (r_x)^2$$

$$A(C_x) = \pi \cdot \left(\frac{x}{h} \cdot r\right)^2$$

$$A(C_x) = \pi \cdot r^2 \left(\frac{x}{h}\right)^2$$

Un razonamiento similar se usará para determinar el área de la sección transversal de la pirámide que se mostrará a continuación:

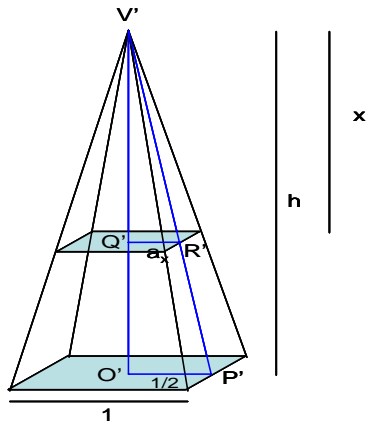


$$\frac{x}{h} = \frac{a_x}{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{x}{h} = \frac{2}{1} \cdot a_x$$

$$\frac{x}{h} = a_x$$

Sabiendo la fórmula del área del cuadrado, reemplazamos el lado en la ecuación para determinar el área de la sección cuadrada A_x como se puede observar en la figura de la pirámide.



$$A(P_x) = a_x \cdot a_x$$

$$A(P_x) = \frac{x}{h} \cdot \frac{x}{h} = \frac{x^2}{h^2} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$$

Ahora, comparando las secciones del cono con la pirámide:

$$A(C_x) = \frac{\pi r^2 x^2}{h^2} \quad y \quad A(P_x) = \frac{x^2}{h^2}$$

Puede observar, en las dos ecuaciones un término común $\frac{k^2}{h^2}$ y los demás términos que aparecen son constantes, de lo que se puede concluir, que el área del círculo está en función del área del cuadrado.

De este modo

$$A(C_x) = \pi \cdot r^2 \cdot A(P_x)$$

Así el teorema de Cavalieri implica que: Si se encuentra una relación de proporcionalidad entre las áreas de las secciones transversales de los sólidos, entonces deberá existir la misma relación entre sus volúmenes. Es decir:

$$v(C) = \pi r^2 v(P)$$

4. LA METODOLOGÍA Y LOS ESTUDIANTES DE LA INVESTIGACIÓN

Este trabajo de investigación en el aula se enmarcará en un análisis de caso, desde una perspectiva de carácter cualitativo. El análisis de caso es una técnica de investigación en ciencias sociales, especialmente en educación, y consiste en estudiar detalladamente el proceso de un estudiante indagando acerca de preguntas como ¿por qué?, ¿cómo?, ¿para qué? Esta técnica permite hacer afirmaciones más detalladas que un estudio estadístico pero tiene el problema que dichas afirmaciones sólo son válidas para el contexto en el que se trabajaron.

Este análisis de caso presenta dos etapas, una de ellas nos permite estudiar un fenómeno cualquiera (dificultades, aprendizaje, temas, aptitudes entre otros) que suceda en el aula de clase, con el propósito de describir, explicar, predecir y planear las mejoras; y la otra que es un análisis de carácter reflexivo sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, tal como ocurre en el aula de clase.

Como la investigación en el aula es de carácter cualitativo, es una investigación variante¹⁷, donde se trabaja con seres humanos, en este tipo de investigación no se trabaja sobre supuestos, no se generaliza ningún tipo de problema encontrado ni sus soluciones, no se toman muestras porque cada sujeto es independiente, lo que se hace es sistematizar experiencias en el aula de clase y reflexionar sobre ellas para entender los procesos de los sujetos analizados.

¹⁷ Definimos la investigación variante: como la investigación que está sujeta a cualquier cambio, ya sean producidos por causas externas o internas.

LOS ESTUDIANTES DE LA INVESTIGACIÓN

“Para nuestro alumnado de clases elementales lo concreto empieza por ser el mundo de lo observable, lo que impresiona directamente sus sentidos, y al mismo tiempo el que te invita a actuar”

Pedro Puig Adam (Alsina y Otros, 1997: 117)

Esta investigación se realizó en el Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata, institución que nos permitió realizar nuestra primera práctica pedagógica. Esto se hizo posible gracias a la colaboración por parte del profesor Fernando Pérez, docente encargado del área de matemáticas en el colegio y que nos permitió ejecutar el trabajo de investigación en el aula en los grados que él tenía asignados, específicamente en 8-9 los cuales estaban conformados por estudiantes cuyas edades oscilaban entre los 13-16 años.

Fue así como se inició nuestro proceso de “búsqueda”, lo llamamos de esta manera porque no conocíamos a los estudiantes, así que nos tomamos un tiempo para conocerlos, preparar la clase y las actividades propuestas para la investigación. Actividades que se desarrollaron en cuatro sesiones, cada sesión tenía un tiempo aproximado de tres horas.

El profesor Pérez nos presentó los grupos de estudiantes a cargo. De allí se seleccionaron 10 estudiantes interesados en participar, todos ellos distinguidos por su rendimiento académico y por su actitud positiva por aprender y conocer algo nuevo. Finalmente trabajamos con nueve estudiantes aunque sólo consignamos los aportes de cuatro de ellos, los cuales presentaremos más adelante.

Durante las clases que tuvimos con ellos queríamos variar un poco el sistema tradicional para estimular el interés de los participantes. Siempre buscábamos que trabajaran en grupo con el fin de generar confianza en ellos y que pudieran plantear sus dudas y opiniones sin ningún temor. Luego les entregábamos la guía

de trabajo y el material para manipularlo y que fueran ellos los encargados de crear los conceptos usando todos los conocimientos previos y la experimentación.

Las actividades fueron diseñadas para permitir recoger toda la información necesaria para nuestra investigación, todas las opiniones y sugerencias fueron consignadas en lo que se conoce como un diario de clase, donde se registran todos los detalles relevantes del proceso y necesarios en la investigación. En este diario se encuentran desde aportes en clase, hasta charlas con los estudiantes. Todo esto fue necesario para recolectar datos, organizarlos y extraer conclusiones y posibles sugerencias o recomendaciones.

A continuación presentamos algunos de los protagonistas que intervinieron en esta investigación, gracias a ellos fue posible realizarla:

OSCAR MAURICIO GARRIDO GARCÍA

Se considera una persona inteligente, buen amigo, con buenos valores, en su tiempo libre le gusta compartir con su familia y también estudiar para aprender más, se distingue por ser callado y tímido. En el colegio ocupa los primeros puestos.



Figura 14: Alumno participante del trabajo de investigación

“Cuando yo sea grande quiero ser un gran profesional que tenga éxitos”

EDUARDO TOLOZA BAYONA



Figura 15: Alumno participante del trabajo de investigación

Se identifica por ser una persona respetuosa, compañerista, amigable y extrovertido; en sus intervenciones en clase se caracterizó por sus buenos razonamientos. Le gustaba saber de dónde y cómo se obtenía la solución a los problemas que se proponían en el aula.

“Mi inclinación es por el medio de la

JAYSON CHAVARRIA FERNANDEZ

Él se considera el orgullo de su familia, es muy tímido, en el colegio se destaca por ser el mejor estudiante, además le gusta cuestionar las cosas, en sus tiempos libres lee libros y practica deporte.



Figura 16: Alumno participante del trabajo de investigación

“Quiero ser un gran ingeniero mecatrónico”

EDINSON LIZARAZO SÁNCHEZ



Figura 17: Alumno participante del trabajo de investigación

Es un estudiante amigable, respetuoso, colaborador, calmado, hablador, se caracterizaba en clase por preguntar por todo, no le gusta ser “envidioso” con sus compañeros de clase.

“Ser científico es mi anhelo”

5. DISEÑO Y DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES.

A continuación se explicará muy brevemente qué se planeaba desarrollar con los estudiantes en cada actividad y luego se describirá que se realizó en el aula y que objetivos se cumplieron. Cada actividad está diseñada como un eslabón dentro de una cadena que busca cumplir el objetivo general (comprender el concepto de volumen).

ACTIVIDAD 1:

La actividad consiste en entregar, por grupos, un paquete con algunos materiales, fichas de diferentes formas como círculos, cuadrados, rectángulos y triángulos, en icopor y madera y de diferentes diámetros y grosores. Se les pide que construyan algunos sólidos sobreponiendo una ficha sobre otra, permitiendo que los estudiantes escojan los materiales adecuados según la actividad propuesta.

Luego se les pide construir un cilindro y una pirámide con este material pero teniendo cuidado de usar siempre fichas del mismo grosor para cada sólido. Se les pregunta cuántas fichas deberían usar en cada caso, esto con el fin de observar que aunque el sólido es el mismo, los diferentes grupos podrían construirlo de varios tamaños usando diferentes tipos de fichas.

Para empezar a aproximar el volumen de los sólidos, se les pregunta por el área de la base del cilindro construido y el área de la base de la pirámide construida, estas áreas deberán ser calculadas usando sólo regla.

Se indaga sobre el cálculo del volumen. Ahora tienen dos datos, el número de fichas usado en la construcción del sólido y el área de la base, se les pregunta si esta información es suficiente para calcular del volumen. En el caso del cilindro, esta información será suficiente para encontrar el volumen en términos del grosor

de las fichas usadas, pero en el caso de la pirámide aún se necesitará hacer otras consideraciones.

Dentro de las preguntas se les propondrá hacer afirmaciones acerca del volumen de los sólidos luego de hacerle ciertas transformaciones, por ejemplo se les pedirá concluir que ocurría con el sólido y con su volumen luego de una inclinación. Esto con el fin de llevar al estudiante a entender la conservación del volumen bajo ciertos cambios del sólido en el espacio.

Objetivos de esta actividad:

- Guiar al estudiante en la construcción de figuras sólidas a través del material concreto para que se acerque al concepto de volumen usando información de sus secciones transversales.
- Verificar si el estudiante identifica cómo estudiar el volumen de los sólidos anteriormente construidos a través de material concreto.
- Verificar si el estudiante entiende la preservación del volumen bajo inclinaciones del sólido usando el material concreto.
- Describir el volumen del sólido como suma de los volúmenes de secciones transversales con grosor fijo.



Figura 18: Fichas cilíndricas simulando el Principio de Cavalieri

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD UNO:

A cada grupo se les hizo entrega de un paquete de material manipulable que contenía fichas de diferentes tamaños y grosores. Se les pidió construir, con este material, diferentes sólidos.



Figura 19: Imágenes de material concreto a utilizar

Concerniente a la primera pregunta:

Con el material entregado construyan.

a) Un cilindro

b) Una pirámide.

Ellos construyeron los sólidos propuestos sin ningún problema, sin enfatizar en este hecho, los estudiantes buscaban las fichas de igual grosor para la construcción de los sólidos. Adicionalmente ellos construyeron otros sólidos diferentes a la pirámide y al cilindro con las fichas entregadas, tal como se muestra en la foto

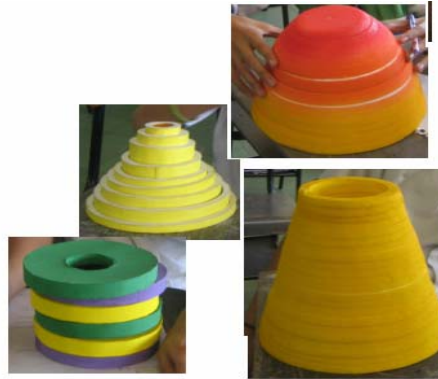


Figura 20: Imágenes del material utilizado: Conos, Pirámides y Cilindros

Al preguntarles por ***¿Cuánto material utilizaste para el cilindro?_____.***
¿Cuánto para la pirámide?___, ellos dieron respuestas como ***“Se utilizaron 10 fichas circulares para construir el cilindro y 30 fichas cuadradas para la pirámide de base cuadrada”, “...en cambio profesores, nosotros usamos 20 para el cilindro y 60 para la pirámide”.*** Esta pregunta era importante porque nuestro interés era encontrar aproximaciones a los volúmenes y el número de fichas influirá en qué tan buena será la aproximación.

Ya en una cuarta pregunta: ***Con la ayuda de una regla intenta calcular el área de la base del cilindro que construiste y anótalo_____.*** ***¿Qué área tiene la base de la pirámide? _____***

La mayoría de los estudiantes dedujeron con facilidad el área de las bases de cada uno de los sólidos, un círculo en el caso del cilindro y un cuadrado en el caso de la pirámide. En el caso de los círculos encontraron el valor del radio y en el caso del cuadrado midieron el lado. Cabe aclarar que al calcular el área de una figura los estudiantes lo hicieron recordando sin problema la fórmula correspondiente.

En la siguiente pregunta: ***Con los datos recogidos en los puntos 3 y 4. ¿Puedes aproximar el cálculo del volumen del cilindro? ¿El volumen de la***

pirámide? Si lo puedes hacer, explica el procedimiento y anota el resultado. Si no lo logras, explica cuál fue el problema.

Los estudiantes calcularon el volumen del cilindro fácilmente ya que solo calculaban el área de cualquier sección transversal (ya tenían el área de la base), multiplicaban por el grosor de la ficha y al final sumaban este volumen tantas veces como fichas tenían, aproximando así el volumen del cilindro.

Con la pirámide no fue tan sencillo. Un grupo de estudiantes realizó el mismo procedimiento que con el cilindro pero al explicarles a los demás estudiantes, estos les corrigieron el error pues el área de cada sección transversal era diferente. El estudiante Jayson expuso el siguiente aporte para aclarar el razonamiento errado: ***“...debemos calcular el área de cada pieza multiplicarla por el grosor y al final sumarlas, pero no estamos dando una respuesta numérica exacta, sino un dato que no podemos decir si es exacto respecto al volumen”***. Con esto, el estudiante quería dar a entender que la pirámide que tenían en las manos no era en realidad una pirámide, sino una aproximación a esta.

Los estudiantes tuvieron en cuenta la diferencia entre el sólido ideal y el sólido que construían con las fichas. Como estos dos sólidos eran diferentes ellos afirmaban que en el cálculo del volumen había un “error”, ellos decían: ***“el error es lo que le falta o sobra al sólido para completarse y la figura se vea como una figura compuesta por un todo”***. Cabe aclarar que ellos se imaginaban la pirámide total no la aproximación a una pirámide formada con fichas. Igual concluían en el caso del cono, como se muestra en la foto.

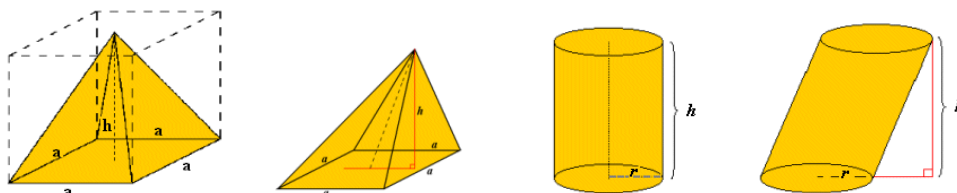


Figura 21: Pirámide elaborada en valso y icopor

Al observar que ellos calculaban el volumen de cada ficha y luego sumaban todos estos datos, nosotros queríamos que ellos vieran la necesidad de mejorar la técnica. Para ello les entregamos más fichas que aproximaran la pirámide, en ese momento los estudiantes protestaron de solo pensar en tener que hacer tantos cálculos. Esto nos dio ideas para planear la siguiente actividad.

Por último, para terminar la guía les preguntamos:

Ahora tomen el cilindro que construyeron e inclínenlo un poco como lo muestra la siguiente figura.



¿Qué pasó con el volumen del cilindro? ¿Cambió? Expliquen su respuesta.

Este ejercicio consistía en darle una leve inclinación al sólido ya construido. Los estudiantes comprendieron que el volumen se mantenía, ellos decían que esto ocurría “... **porque no se eliminó ninguna ficha**”, solamente se deslizan las fichas, de tal manera que pierde su forma, pero el volumen se sigue manteniendo.

CONCLUSIONES DE LA ACTIVIDAD UNO:

- Nosotros observamos que el hecho de tener materiales diferentes para construir los mismos sólidos permitió que los estudiantes pudieran comparar sus respuestas y observar como sus aproximaciones variaban por el tamaño de los sólidos y por el grosor de las fichas utilizadas.
- Al hallar el volumen de los sólidos utilizando material manipulable, permitió que los estudiantes notaran aquellos detalles que con lápiz y papel no se pueden visualizar, cumpliendo a cabalidad los objetivos propuestos para esta actividad. Además las conjeturas que ellos proponían ayudaron a que la actividad fuera enriquecedora convirtiéndose en el puente entre los conocimientos previos y la nueva información que se les estaba suministrando.
- A través de la argumentación de las respuestas de los estudiantes, se logró que poco a poco fueran ellos mismos quienes reconstruyeran o evadieran el nuevo conocimiento, tal como lo afirmaba Vigotski.
- Para nosotros fue de gran importancia ver como calculaban el volumen del cilindro, ellos midieron el área de la base, multiplicaron este valor por el número de fichas y así obtuvieron una aproximación del volumen usando como unidad de medida el grosor de las fichas.
- Los estudiantes mostraron confusión en el cálculo del volumen de algunas figuras, es aquí que el profesor debe buscar la forma de sacar argumentos de tal manera que convenza al estudiante a tomar el desafío de buscar nuevas estrategias para obtener conocimientos nuevos y que se apropie de ellos, no conformarse con responderle al estudiante si está bien o está mal.

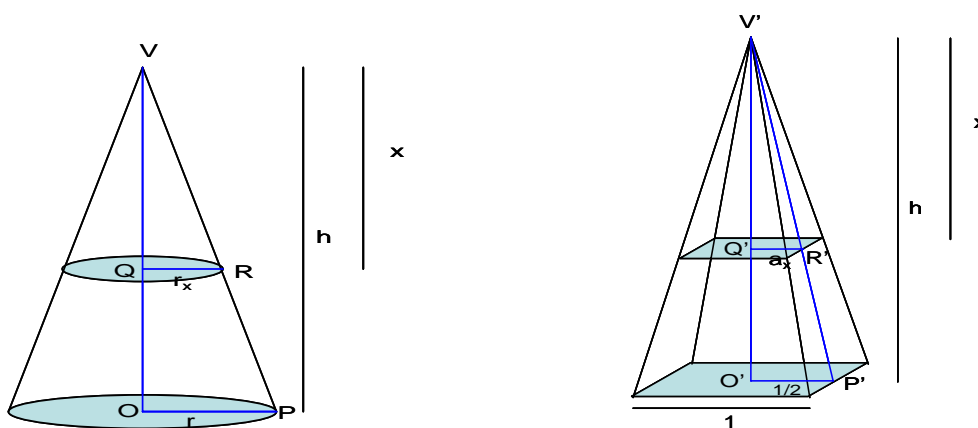
- Los estudiantes percibieron que se podía mejorar la técnica de aproximar el volumen de la pirámide de base cuadrada si se añadía mas material, pero observaron que a medida que se aumentaba el material se hacía muy complejo este cálculo, llegando hacer tedioso y confuso estar hallando el volumen de cada ficha para dar una aproximación mejor del volumen total, a lo que concluyeron que, se debía buscar un forma que fuera más práctica para poder realizar estos cálculos.
- Es de resaltar en esta actividad que los estudiantes concluían que la fabricación de la pirámide con fichas no era otra cosa que una aproximación a la pirámide “ideal” e incluso hablaban de “error”. Esto fue muy importante para nuestro trabajo ya que lograban avanzar en sus conocimientos acerca de sólidos gracias al material y a las preguntas propuestas, aunque ese no era nuestro objetivo inicial.

ACTIVIDAD 2:

Usando el material de la actividad anterior y adicionalmente usando un acetato como representación de un plano, se pretende con esta actividad que el estudiante observe las áreas de secciones transversales a diferentes alturas y las compare con el área de la base del sólido.

Cuando los estudiantes trabajen con las pirámides o con los conos, ellos deberán observar que al encontrar el área de la sección transversal a una altura dada y compararla con el área de la base, estas cantidades varían, lo que no ocurre con el cilindro, donde todas las áreas de las secciones transversales son iguales.

Así se busca que el estudiante encuentre el área de la sección transversal a una altura dada usando el radio de la base, la altura del sólido y la altura de la sección transversal (todos datos relativamente sencillos de encontrar). Estos datos serán suficientes gracias a la relación de proporcionalidad que surge entre los dos radios, el de la sección transversal y el de la base, por ser catetos de triángulos rectángulos semejantes.



Una vez los estudiantes encuentren la forma de calcular las áreas de las secciones transversales de la pirámide, se llevará a los alumnos a que observen cierta relación entre el volumen de la pirámide y el volumen del sólido obtenido después de realizar un corte transversal.

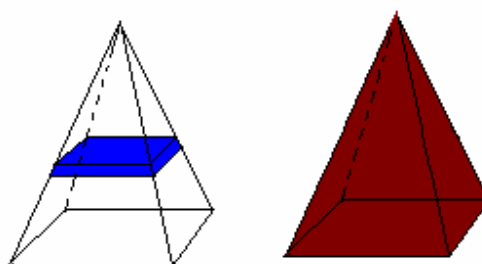


Figura 22: Comparación de pirámides

Igualmente se hará esta comparación en el caso del cono, buscando que los estudiantes encuentren alguna relación de proporcionalidad usando la altura del corte transversal.

Para terminar se les pedirá comparar los resultados de las áreas de las secciones transversales de la pirámide y del cono. La idea es que observen si existe alguna relación entre estos resultados y a partir de esa respuesta conjeturar si se puede proponer una relación para el volumen. La relación que hay entre estos dos volúmenes se debe a la aplicación del Principio de Cavalieri, $v(C) = \pi r^2 v(P)$, (ver página 8 del capítulo 3).

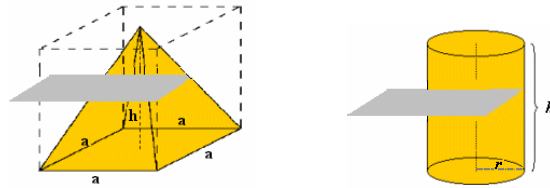
Objetivos de esta actividad:

- Llevar el estudiante a hacer conjeturas sobre el área de la base con las áreas de sus respectivas secciones transversales.
- Verificar que los estudiantes pueden calcular las áreas de las secciones transversales usando el radio de la base, la altura del sólido y la altura de la sección transversal.
- Llevar al estudiante a conjeturar acerca de la relación entre el volumen del sólido completo y el volumen del sólido que se obtiene luego de cortar el sólido con un plano paralelo al plano de la base y tomando la parte superior.
- Mostrarle a los estudiantes una aplicación del Principio de Cavalieri para el caso del cono y la pirámide.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD DOS:

Los estudiantes se reunieron en grupos, se les entregó el material manipulable con el fin de que pudiera llevar a cabo la actividad. Basándose en los sólidos construidos en la sesión anterior, se les plantean algunas preguntas que se explican a continuación:

Con la ayuda de un acetato corta las figuras sólida a una misma altura como lo indica el dibujo.



Al cortar obtenemos, en la parte superior del sólido que nos queda, lo que llamaremos SECCIÓN TRANSVERSAL.

Si comparas el área de la sección transversal con el área de la base del sólido correspondiente ¿Qué observas?

Los estudiantes dividieron esta pregunta en dos respuestas, una para el cilindro y la otra para la pirámide:

Para el cilindro respondieron que al tener fichas iguales, si se hacía un corte transversal, paralelo a la base, el área de la sección transversal era igual al área de la base (todas las fichas eran iguales).

El argumento más claro lo dieron los estudiantes Edinson y Eduardo,

- Edinson y Eduardo: **“El área de la base de la sección cortada es igual al área de la base del sólido fijo”**
- Nosotros: **¿Por qué hacen esa afirmación?**
- E. y E.: **Profe, si nosotros sobreponemos el área de la sección cortada sobre el área de la base se puede observar que encajan exactamente una sobre la otra.**

Para el caso de las pirámides respondieron: Al tener fichas diferentes si hacemos un corte transversal al sólido paralelo a la base, el área de la sección transversal cambia con respecto al área de la base ya que las fichas no son iguales. Hicieron la misma superposición del área de la sección transversal sobre el área de la base para mostrar su justificación.

En la siguiente pregunta **¿Por qué, en algunos casos, las áreas son diferentes? ¿Qué puedes decir de los radios de las secciones transversales?**

A lo que respondieron: el área de la sección transversal del cilindro a cualquier altura era igual al área de la base, esto sucedía ya que las fichas eran iguales lo que no ocurriría con las fichas de la pirámide, las cuales tenían el mismo grosor pero no la misma área. Concluyendo: si construyo la pirámide con las fichas dadas y le empiezo hacer cortes con el acetato se puede observar que el área de la sección transversal de la pirámide comparada con el área de la base no es la misma. Los estudiantes lograron hacer algunas apreciaciones como por ejemplo: **“las áreas no siempre son las mismas pero se puede observar que en el caso de la pirámide hay una relación entre la altura y el área de la sección transversal, el área es menor a mayor altura”**.

Como ya se había llegado a lo más importante de esta actividad, deducir que en un sólido el área de la sección transversal no siempre es igual al área de su base, para la siguiente pregunta, **¿Qué propones para medir el área de la sección transversal?**, se decidió mostrarles una cartelera donde teníamos un dibujo con 2 sólidos para que pudieran observar que sucede en el interior del sólido al hacer cortes transversales y así facilitar el desarrollo de la actividad (ver la figura a continuación).

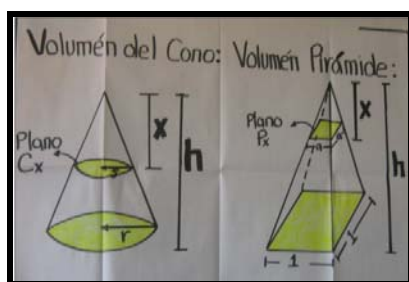


Figura 23: Cartelera en aula de clase

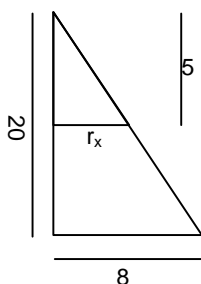
En estos dibujos también encontrábamos los sólidos cortados por un plano transversal paralelo a la base pero ahora necesitábamos tener una representación plana de estos sólidos, lo que requería otro tipo de trabajo diferente al usado con

el material manipulable, utilizando ahora lápiz y papel.

Al escucharles las propuestas para medir las áreas de las secciones transversales, ellos respondieron en primer lugar con una descripción del dibujo: en la cartelera hay dos sólidos con áreas transversales distintas a sus respectivas bases, además se puede observar que al cambiar la altura del plano que corta a los sólidos las áreas de las secciones transversales cambian con relación a la de sus respectivas bases.

Nosotros al ver que no pasaban de la descripción del dibujo, es decir no eran capaces de plantear matemáticamente esa relación para medir el área de la sección transversal dada la altura, intervenimos mostrándoles por medio de una particularización lo que ellos decían.

Hicimos en el tablero del salón el siguiente dibujo:



Luego se les preguntó ¿Cuál es valor numérico del lado r_x del dibujo?

Luego de un cierto tiempo de diálogo entre ellos mismos, lograron proponer una razón. El planteamiento de esta razón no fue una respuesta inmediata de los estudiantes, duraron un gran tiempo para escribirla.

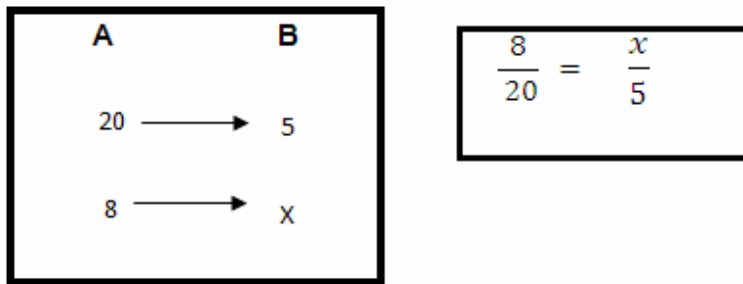
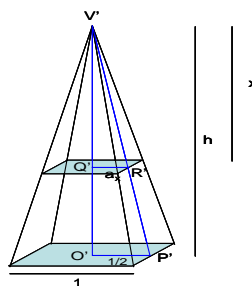


Figura 24: Relación de Proporcionalidad deducida por los estudiantes

Respondiendo que el valor numérico de r_x era 2. Luego de haber dado solución al ejercicio (la particularización), se hace uso de nuevo de la cartelera propuesta, retomando el problema que nos ocupaba, determinar el área de la sección transversal de una pirámide cuadrada y de un cono a cualquier altura de la base.

Ellos responden:

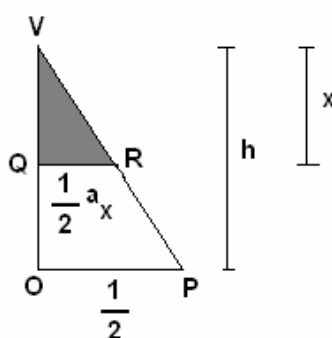
- Estudiantes: **Profes con solo determinar el valor del lado de la base de la pirámide, se puede establecer la relación que existe entre el cuadrado de la base con el cuadrado de la sección transversal.**
- Nosotros: **¿Cómo sería esa relación?**
- Estudiantes: **Profe como la altura cae a la mitad de la base de la pirámide. esta altura con cualquier lado de la pirámide forma un triángulo (ver figura)**



A continuación se mostrará el análisis expuesto por ellos.

Los estudiantes plantean la relación que hay entre el triángulo que se formó con la altura h y el triángulo que se formó con el corte transversal, en este caso de altura x .

Como el triángulo azul tiene como base la mitad del lado de la base de la pirámide, la base del triángulo que queda después de realizar la sección transversal, también tendrá la mitad de aquella medida, como se verá a continuación:



Primero ubicaron los datos en la siguiente forma:

<i>altura</i>		<i>lado</i>
h	→	$\frac{1}{2}$
x	→	$\frac{1}{2} a_x$

Figura 25: Relación de Proporcionalidad 2

Para luego determinar el valor de a_x que era lo que se quería:

$$\frac{x \cdot \frac{1}{2}}{h} = \frac{1}{2} a_x$$

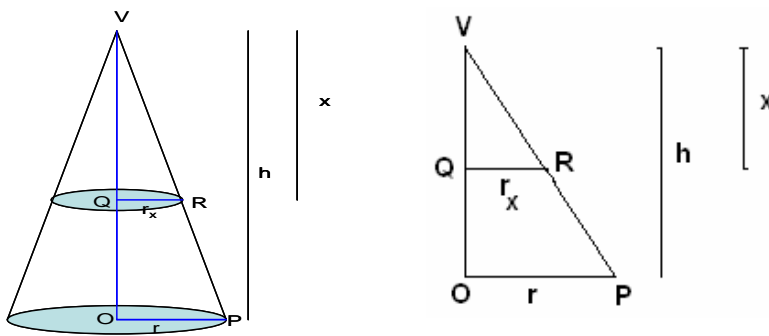
$$\frac{x}{h} = a_x$$

Ellos nos dicen, como ya tenemos a que es equivalente el valor del lado de la sección transversal, entonces solo es reemplazar en la fórmula del área para hallar su valor numérico.

$$A(P_x) = a_x \cdot a_x$$

$$A(P_x) = \frac{x}{h} \cdot \frac{x}{h} = \frac{x^2}{h^2} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$$

Este mismo planteamiento lo realizaron para determinar el área de la sección transversal del cono, como se verá a continuación:



Ubicaron los datos para el cono de la misma forma que en la pirámide:

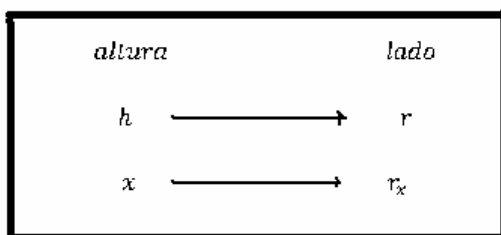


Figura 26: Relación

Para luego determinar el valor de r_x que era lo que se quería:

$$\frac{x \cdot r}{h} = r_x$$

$$\frac{x}{h} \cdot r = r_x$$

Después de determinar este resultado, les quedó remplazar en la fórmula del área del círculo a r_x como radio, dejando indicada la fórmula para el área de la sección transversal del cono.

$$A(C_x) = \pi \cdot (r_x)^2$$

$$A(C_x) = \pi \cdot \left(\frac{x}{h} \cdot r\right) \cdot \left(\frac{x}{h} \cdot r\right) = \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^2$$

Con estas respuestas los estudiantes nos confirmaron que el razonamiento realizado hasta momento a las preguntas era el apropiado.

Las preguntas que siguen fueron muy importantes para dar cumplimiento a los objetivos propuestos para esta actividad.

Explica qué relación hay entre el área de la base y el área de la sección transversal. ¿Se mantendrá esta relación si cortas el sólido a cualquier altura?

Los estudiantes afirmaban que la relación que se estableció entre las áreas de la base y de la sección transversal, tanto para el cono como para la pirámide es una relación de proporcionalidad, a medida que el corte transversal se haga más separado de la base, el área de esa sección transversal disminuye. Ellos decían que ese tema lo habían visto el año anterior, hicieron el siguiente comentario **“eso**

lo trabajamos el año pasado en el curso de matemáticas”.

Cuando íbamos a proseguir con la última pregunta de la actividad, **Jayson** nos preguntó, ***¿por qué las expresiones que acabamos de hallar para las áreas de las secciones transversales se parecen?***

Nos sorprendió esta pregunta, ya que dentro del diseño de la actividad vimos la necesidad de realizar algunas preguntas encaminadas a aclarar la relación entre estos dos sólidos, sin embargo estas preguntas las pensábamos realizar al terminar la sesión pero vimos que era conveniente realizarlas en ese momento, aprovechando la pregunta del estudiante.

A continuación se presentarán estas preguntas:

Comparen y expliquen en qué se relacionan las áreas de las secciones transversales de los dos sólidos trabajados hasta el momento. Y, si existe una relación, ¿Qué puede decir de los volúmenes?

Los estudiantes respondieron:

Estudiantes: **Profesor hay una expresión común en las ecuaciones.**

A lo que les preguntamos, ¿Cuál es esa expresión?

Nos indicaron que la expresión común era $\frac{r^2}{h^2}$

Además agregaron, con nuestra guía, que al combinar una ecuación con la otra se podía expresar el área del círculo en término del área del cuadrado, al combinar una ecuación con la otra podemos expresar el área de la sección transversal del cono en términos del área de la sección transversal de la pirámide.

$$\text{Área del cuadrado} = l * l = A(P_x) = \left(\frac{x}{h}\right) \cdot \left(\frac{x}{h}\right) = \frac{x^2}{h^2}$$

$$\text{Área del círculo} = \pi \cdot r^2 = A(C_x) = \pi \cdot \left(\frac{x}{h} \cdot r\right)^2 = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{x^2}{h^2}$$

Como esas dos expresiones son iguales, se puede escribir el área del círculo de la siguiente forma:

$$A(C_x) = \pi \cdot r A(P_x)$$

Con esto se dieron cuenta que si tomaban el área de la sección transversal de la pirámide y la multiplicaban por π y por el cuadrado del radio de la base del cono, obtenían exactamente el área de la sección transversal del cono.

A esto el estudiante Eduardo afirma: ***“Profe: así como se encontró una relación entre las áreas de las secciones transversales de los sólidos, lo mismo debe suceder con los volúmenes”***.

Para estar seguros que el estudiante estaba pensando en el razonamiento apropiado le realizamos la siguiente pregunta:

¿Puede ser más claro con lo que afirma?

- Sí, si acabamos de encontrar una relación entre las áreas de esas secciones transversales, también se podrá encontrar una relación entre los volúmenes de esos sólidos.

$$\text{volumen del cono} = \pi \cdot r^2 \cdot (\text{volumen de la pirámide})$$

De esta manera el estudiante responde a las preguntas que se les había acabado de realizar.

Cabe aclarar que debido a la intervención del estudiante Eduardo, se permitió

adelantar el orden de las preguntas propuestas para llevar a cabo la actividad y desafortunadamente no se realizaron las preguntas previas a esta intervención.

Para terminar les contamos a los estudiantes que esos aportes que ellos habían hecho en esta actividad, los había realizado hace aproximadamente cinco siglos atrás el matemático Bonaventura Cavalieri, les expusimos una breve biografía de él y sus aportes a la matemática. Esto los emocionó y les llamó mucho la atención.

CONCLUSIONES DE LA ACTIVIDAD DOS:

- Los estudiantes se vieron motivados a trabajar esta guía que les permitió seguir aprendiendo sobre las características de los sólidos anteriores (ver actividad 1), logrando alcanzar nuevos aportes a los ya habían adquirido y concluir de manera más clara los nuevos resultados.
- Los estudiantes realizaron deducciones acertadas con el material manipulable acerca de las secciones transversales tanto del cilindro como de la pirámide. Además se pudo observar que los estudiantes encontraron relaciones de proporcionalidad entre las áreas de las bases (de cada sólido) con sus respectivas secciones transversales, que más adelante les sirvieron para poder determinar el área de dichas secciones.
- En la investigación, para facilitar la comprensión de lo que se esperaba, se les señaló en una cartelera los datos necesarios para determinar el área de la sección transversal por donde pasaba el plano. En este punto presentaron dificultad en el planteamiento para proponer una relación de proporcionalidad, como es natural pues había que utilizar conocimientos en el tratamiento de triángulos semejantes.
- Los estudiantes usaron la proporcionalidad para encontrar el área de una sección transversal de un sólido en un caso concreto, luego entendieron que se podía generalizar a cualquier altura.

- En esta actividad los estudiantes, con nuestra ayuda, determinaron el volumen de un sólido (pirámide cuadrada) con el volumen de otro sólido (cono) a partir del Principio de Cavalieri. Es bueno recordar que dentro de la hipótesis del Principio de Cavalieri se concluye que, los sólidos deben compartir ciertas características, por ejemplo:
 - Que estén sobre un mismo plano.
 - Que tengan la misma altura (sólidos).
 - Que las secciones transversales correspondientes a los dos sólidos tomadas a una misma altura de la base conserven siempre la constante de proporcionalidad sin importar la altura del corte.

Cabe aclarar que este resultado (Principio de Cavalieri) fue trabajado de manera muy intuitiva y no entramos en detalles técnicos con los estudiantes.

- Los estudiantes presentaron cierta dificultad para determinar el área de la sección transversal de los sólidos, dadas las áreas de las bases y las alturas de las secciones.

ACTIVIDAD 3:

Como en la primera actividad se describe un método para aproximar el volumen de un sólido a partir del área de algunas secciones transversales con grosor fijo usando como unidad de medida este grosor, el propósito de esta actividad es que el estudiante escoja la mejor forma para aproximar el volumen de un sólido a través de algunas secciones transversales con grosor fijo. Para ello se utilizan paquetes de fichas de igual forma pero de diferente grosor, buscando que ellos describan y registren las conjeturas a las que llegan. Para realizar estas conjeturas se espera que ellos hallen el valor numérico del volumen de las fichas (cilíndricas) y las introduzcan dentro del sólido (cono transparente).

Objetivos de esta actividad:

- Registrar y describir cómo el estudiante entiende el proceso de aproximar el volumen de un sólido a partir de los volúmenes de las secciones transversales con grosor fijo.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD TRES:

El desarrollo de esta actividad se realizó de la siguiente manera:

Se formaron grupos de tres personas con los que habían venido trabajando. Se les entregó un paquete con fichas de dos grosores diferentes y se les pidió construir unos conos.

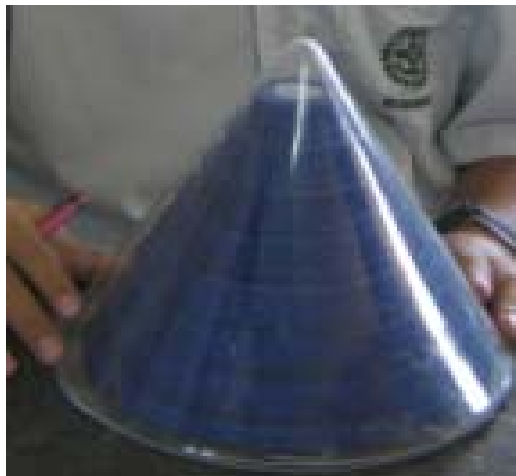


Figura 27: Pirámide elaborada en valso 2

Ahora se les pregunta: ***¿Será que con las fichas entregadas ustedes pueden calcular el volumen del cono? Tengan presente las actividades anteriores ya trabajadas (actividad 1 y actividad 2). Expliquen sus respuestas y redacten sus argumentos.***

Después de haber dado un tiempo moderado para que los estudiantes registraran y describieran como habían realizado las aproximaciones al volumen del sólido, se abrió el espacio para socializar y mostrar los resultados que expondremos a continuación:

Los estudiantes respondieron que **“...Con ninguna de las fichas entregadas estamos de acuerdo”**: justificándolo de la siguiente manera:

- Estudiantes: **“ Lo que hicimos es lo siguiente: miramos cuantas fichas azules caben dentro del cono transparente, y cuantas amarillas. ”**
- Nosotros: **¿Cuántas fichas lograron encajar dentro del cono transparente?**
- Estudiantes: **“Hay 8 fichas azules y 22 fichas amarillas.”**
- Nosotros: **¿Será que con el número de fichas ustedes pueden aproximar el volumen del cono?**
- Estudiantes: **No**
- Estudiantes: **“Para poder determinar el volumen del cono transparente debemos tomar el valor del radio de cada ficha y lo multiplicamos por el grosor de ella, esto para las dos clases de fichas que tenemos y al final sumamos todos los volúmenes encontrados para las fichas de color azules y por aparte para las fichas de color amarillo.”**

Cabe aclarar que el volumen que ellos calcularon de cada ficha era de forma cilíndrica, además ellos dan como respuesta que el volumen de las fichas azules se aproximaría mejor al volumen del cono transparente, de donde surge la siguiente pregunta:

- Nosotros: **¿Entonces porque aseguran que ninguna de las dos fichas entregadas sirven?**
- Estudiantes: **“Porque podemos aproximarlos hasta con otra clase de material que no sean similares al material entregado, como por ejemplo: cajas de chicle, maras (esferas).”**

A nuestro parecer la justificación dada por los estudiantes en este momento es acertada, aunque nosotros no esperábamos esa respuesta inicial porque sospechábamos que respondieran “**las amarillas o azules**”, más no que ninguna de las dos. Y además su argumentación es válida.

Ahora pasando a la siguiente pregunta: ***De acuerdo con sus respuestas en el punto anterior expliquen o planteen una manera o procedimiento para encontrar el volumen de un sólido, sin el uso de fórmulas. Piensen que tan solo tiene algunas fichas de figuras geométricas (círculos, cuadrados, rectángulos, triángulos).***

El razonamiento expuesto por los estudiantes fue similar a la conclusión de la pregunta anterior:

- Estudiantes: **“Para poder dar una aproximación al valor numérico del volumen sin usar una fórmula matemática, lo ideal es usar un material que sirva para llenar la figura y además que le conozca una fórmula para encontrar sus volúmenes pequeños y que al final sumamos.”**

Con esta respuesta se observa que los estudiantes relacionan la información dada con los conocimientos previos, lo cual es esencial para la construcción del conocimiento.

CONCLUSIÓN DE LA ACTIVIDAD TRES:

- Los estudiantes por medio de registros y descripciones fueron capaces de redactar un procedimiento para calcular el volumen de un sólido a partir de volúmenes de secciones transversales con grosor fijo. Este razonamiento dado por los estudiantes fue apropiado para la pregunta; ya que en ningún momento se pedía construir volúmenes, pues el volumen es una unidad de medida y lo que se construye son los sólidos a utilizar.
- El trabajar con un cono transparente y con unas fichas similares a unos discos; que presentaban un grosor específico, y un diámetro determinado,

permitió que los estudiantes logaran encajar estas fichas en el cono transparente, realizando apreciaciones valiosas. Permitiendo que la dinámica de la clase fuera enriquecedora tanto para ellos como para nosotros.

- El hecho de repetir la construcción de los sólidos y el cambio de dimensión (grosso o delgado), hizo que las respuestas de los estudiantes fueran más encaminadas a lo que se quería, también cabe rescatar el gran aporte que fue el haber manipulado, trabajado y observado el material concreto que se utilizó en las actividades anteriores.

ACTIVIDAD 4:

En esta guía se pretendía evaluar a los estudiantes por medio de algunas preguntas relacionadas con las guías anteriores, que permitían aclarar qué objetivos se alcanzaron en este trabajo de investigación. El diseño de estas preguntas fue de tipo descriptivo, buscando establecer si el estudiante entendía qué significaba el volumen de un sólido, cómo puede calcularlo, cómo calcular aproximaciones de los volúmenes con información de las secciones transversales con grosor y si el material concreto había sido útil durante todo el proceso.

Objetivo de esta actividad:

- Evaluar el proceso de aprendizaje del concepto de volumen en los estudiantes que participaron en este proyecto.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD 4:

Se inicia con la entrega del material, los estudiantes de forma individual dan sus apreciaciones, y de forma unánime coinciden con la respuesta, la variación solo era en la forma de expresar sus ideas.

A continuación mostraremos los resultados de esta actividad:

Se da inicio a la entrega de la guía diseñada de tal forma que la pueden resolver en poco tiempo, sin afán por terminar. ¿Con cuántas fichas sería considerable aproximar al volumen del cuerpo dado? ¿Por qué?

Los estudiantes responden:

“...Profe si se quiere aproximar el volumen de un sólido se puede hacer con cualquier número de fichas, claro, estas fichas deben acomodarse al sólido para poder calcular el volumen, pero hay que tener presente que nosotros siempre debemos encontrar la mejor aproximación al volumen, sería de gran importancia que el material escogido sea el que tenga menos variación con el sólido.”

Ellos nos aclaran que para poder determinar una aproximación a la forma de un sólido, deberían realizar varias pruebas con diferentes materiales para así poder proponer un resultado. Nosotros observamos que los estudiantes se estaban apoyando para dar sus argumentos a esta pregunta en la actividad tres, además nos comentaron que un ejemplo podría ser la aproximación realizada anteriormente con las fichas cilíndricas.

Ellos en ese momento ya tenían claro que la aproximación la podían realizar con otro tipo de material diferente a las fichas cilíndricas, siempre y cuando tuvieran la fórmula para determinar el volumen del material usado. Así que respondieron que el número de fichas debía depender del volumen que tuvieran y de qué tanto se acercaban al volumen del sólido con las fichas, es decir, que no tuvieran mucho espacio vacío.

En la siguiente pregunta: ***Con los siguientes sólidos se puede determinar el volumen de uno ellos con los datos del otro ¿sí o no?; en caso de ser acertada su respuesta, haga una breve descripción de las condiciones que debe tener en cuenta para su solución.***



No dudan en decir que sí se puede determinar el volumen del casquete o del cilindro con los datos del otro y hacen mención de las condiciones a tener en cuenta: Con nuestra ayuda **“... que tengan la misma altura, que estén sobre un mismo plano, que se les realicen cortes transversales paralelos a la base para saber si sus áreas son proporcionales y luego encontrar el término semejante entre ellas y así buscar una relación entre los volúmenes y poner uno en función del otro.”**

Esta apreciación dada por los estudiantes nos sorprendió, ya que muestra que ellos entienden que para determinar el volumen desconocido se debe encontrar algún término común entre las áreas que permitan poner una ecuación en términos de la otra.

Ya en la siguiente pregunta: ***¿Se necesita de una fórmula siempre para poder determinar el volumen de un sólido? Si o no ¿Por qué?***

Ellos respondieron: **“...para determinar el volumen de un sólido no es necesario tener su fórmula, lo podemos calcular por volúmenes de secciones transversales con grosor fijo (claro, siempre y cuando se conozca cómo encontrar el volumen de la sección). Además se menciona de nuevo que por medio del volumen de un sólido conocido se puede determinar el volumen de otro siempre y cuando los dos sólidos compartan ciertas propiedades.**

Aquí ellos nos aclaran: **“...qué se saca con tener una fórmula si no se tiene datos, por eso sería ideal encontrar alguna relación con otro que si se conozca su volumen.”**

Otras de las preguntas ***¿Cómo se pueden determinar el volumen de un sólido dado?***

Ellos respondieron: **“...descomponiendo un sólido cualquiera se pueden determinar los volúmenes de sus secciones transversales con grosor fijo, aproximándolos a pequeños cilindros.”**

Están pensando en aproximar el volumen a calcular.

Concerniente a la última pregunta: ***¿Al cortar el sólido a dos alturas cualesquier, las áreas de las secciones transversales obtenidas siempre serán las mismas?*** Los estudiantes responden:

“...Para que las áreas de las secciones transversales sean las mismas, siempre que se realice un corte se debe comparar el área de esa sección, con el área de la base del sólido que se encuentra sobre la superficie. Una comparación puede ser superponiendo el área de la sección transversal sobre la superficie.”

Este argumento nos pareció muy acertado y nos mostraba como los estudiantes habían adquirido un conocimiento verdadero innovando en la forma de plantear soluciones a las preguntas planteadas. Además nuestro acompañamiento en el

transcurso de la investigación fue de gran importancia para orientar a los estudiantes en la construcción del nuevo conocimiento, pues nosotros intervenimos en todo momento aclarando y justificando las afirmaciones de los estudiantes.

CONCLUSIONES DE LA ACTIVIDAD CUATRO:

- En esta guía los estudiantes por medio de algunas preguntas relacionadas con las guías anteriores, mostraron avances en el aprendizaje de nuevo conocimiento.
- Los estudiantes lograron responder las preguntas con buenas descripciones. Lograron comprender que una forma de realizar un cálculo de volumen puede ser a través de aproximaciones por medio de otros volúmenes más sencillos de calcular.
- Se pudo concluir que el objetivo de esta actividad como el de las anteriores se logró a cabalidad.

CONCLUSIONES

Con las actividades propuestas en este trabajo se logró el objetivo general, ayudar a los estudiantes a desarrollar destrezas para que identifiquen y usen correctamente el concepto de volumen, apoyados en el Principio de Cavalieri y la manipulación de material concreto. Gracias a la estrategia didáctica de utilizar material manipulable como apoyo para facilitar la adquisición de conceptos, se superó el aprendizaje memorístico, donde el conocimiento fácilmente se olvida.

La manipulación, la transformación de figuras y las tareas de repetición fueron importantes para que los estudiantes entendieran que existen otras formas de calcular volúmenes de sólidos.

Las ideas del Principio de Cavalieri para el trabajo de calcular volúmenes de los sólidos que construyeron fueron muy útiles, ya que permitieron a los estudiantes olvidarse un poco de las formulas enseñadas y pasar a trabajar un poco los conocimientos previos y algunas características de los sólidos.

Los materiales: icopor, vidrio, valso entre otras, y cortados en rebanadas permitieron al estudiante quitar o poner, logrando así que el estudiante se esforzará en observar y reflexionar para que construyera sus propias ideas matemáticas y de esta manera visualizará otra forma de trabajar las áreas y los volúmenes.

Haber abordado esta experiencia desde una perspectiva cualitativa y haber trabajado con estudiantes directamente posibilitó un acercamiento mayor, en primer lugar, porque permite conocer lo que pensaban o conocían los estudiantes y, en un segundo lugar, porque se pudo seguir el proceso de construcción del concepto relacionado con el tema que nos importaba a medida que se desarrollaban las actividades.

Consideramos que esta experiencia de aula “vívida” con los estudiantes surgió de nuestro interés porque sabíamos que una de las dificultades que se observan en la enseñanza del concepto de volumen es el mal manejo que se ha dado al pensamiento espacial. Los textos matemáticos presentan figuras tridimensionales como planas y, sumado a esto, el poco uso del material concreto no favorece la comprensión. Adicionalmente los estudiantes presentan dificultad al recordar una fórmula para calcular volúmenes.

La forma en que se presentó el concepto de volumen generó en los estudiantes otra actitud hacia la materia: los alumnos fueron más activos y participativos. En las clases se dieron discusiones en torno a las preguntas de los diferentes talleres. De igual forma, la clase se dinamizó rompiendo el esquema expositivo del profesor y dando paso al trabajo en grupos de los estudiantes. Así los estudiantes abordaron los problemas involucrándose hasta construir una solución.

El carácter constructivo y dialéctico en todo proceso fue fundamental para concretar las ideas y las dudas de los estudiantes permitiendo un buen desarrollo de las actividades.

Pensamos que llegar a esta etapa de ser profesores con la responsabilidad que esto amerita es un placer siempre y cuando se piense y se mire como un trabajo social y humanista buscando mejorar y motivar a los muchachos.

BIBLIOGRAFÍA

AJA F, J y otros. (1999). Enciclopedia General de la Educación, Grupo Editorial Océano, Pág.263.

ALIENDRO, E; ASTORGA, A. (2005). Retorno de la Geometría. Recuperado el 17 julio de 2008 de http://www.union-matematica.org.ar/reunion_anual/reunion05/cursos_prof05/aliendro.

BIOGRAFIAS y VIDA, (2004). Bonaventura Francesco Cavalieri. Recuperado el 30 de julio de 2008 de <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/c/cavalieri.htm>

BURGOS N Viadys, y otros. Juegos Educativos Y Materiales Manipulativos: Un Aporte A la Disposición Para El Aprendizaje De Las Matemáticas. Noviembre 2005 Temuco – México .Pdo. Pág. 32. Recuperado el 31 de julio de 2008 de <http://www.aprendizajedelamatematicas.com/~maestriaedu/manupilativos.Pdf>.

CABALLERO, C; (2002). Propuesta Didáctica para la Enseñanza del Concepto de Volumen de Cilindro, Esfera, Cono, Cubo y Pirámide a niños de sexto grado. Bucaramanga .Universidad Industrial de Santander, Trabajo de Grado.

CARRETERO, M. (1993). Constructivismo y Educación, Editorial Luís Vives, Pág. 57.

C.H. EDWARDS (1979). The Historical Development of the Calculus. Pág. 98-109.

DIAZ, F; HERNANDEZ, R. (1999). Gerardo Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista. México. MC Grall-Hill. Pág. 13-33.

ESTRADA, W. (2002). De La Generación Espontánea de las Formulas de Volumen a su Construcción. Memorias del XIII Encuentro de Geometría y I de Aritmética. Universidad Pedagógica Nacional. Pág. 167 – 181. Recuperado el 2 de Junio de 2008 de http://dma.pedagogica.edu.co/dmdocuments/encuentro_13/Construccion_de_formulas_de_Volumen.pdf

MEN. Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Magisterio.

OLMO, M; MORENO, F; GIL, F. (1993). Superficie y Volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas? Síntesis. Madrid.

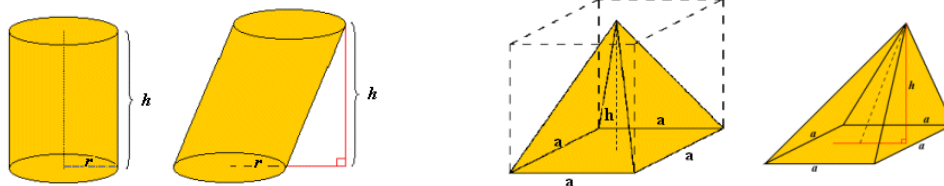
SAIZ, M. (1999). El Volumen ¿Por dónde Empezar? Recuperado el 24 julio de 2008 de <http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig4/ConfMagist.pdf>

ANEXOS

Estudiantes: _____ Grado: _____

ACTIVIDAD Nº 1

1. Hagan grupos de tres personas.
2. Con el material entregado construyan.
 - a. Un cilindro
 - b. Una pirámide.
3. ¿Cuánto material utilizaste para el cilindro? _____. ¿Cuánto para la pirámide? ____
4. Con la ayuda de una regla intenta medir el área de la base del cilindro que construiste y anótalo _____. ¿Qué área tiene la base de la pirámide? _____
5. Con los datos recogidos en los puntos 3 y 4. ¿Puedes aproximar el cálculo del volumen del cilindro? ¿El volumen de la pirámide? Si lo puedes hacer, explica el procedimiento y anota el resultado. si no lo logras, explica cuál fue el problema.
6. Ahora tomen el cilindro que construyeron e inclínenlo un poco como lo muestra la siguiente figura.



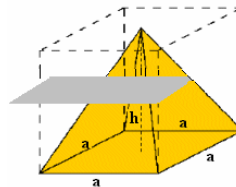
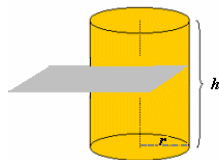
¿Qué pasó con el volumen del cilindro? ¿Cambió? Expliquen su respuesta.

***El genio hace lo que hay que hacer, el talento lo que puede.
Edgard G. Bulwer-Lytton***

Estudiantes: _____ Grado: _____

ACTIVIDAD Nº 2

1. Reúnete de nuevo en grupos de tres personas.
2. Con la ayuda de un acetato corta las figuras sólidas a una misma altura como lo indica el dibujo.



Al cortar obtenemos, en la parte superior del sólido que nos queda una región plana, lo que llamaremos SECCIÓN TRANSVERSAL.

3. Si comparas el área de la sección transversal con el área de la base del sólido correspondiente, ¿qué observas?
4. ¿Por qué en algunos casos, las áreas son diferentes? ¿qué puedes decir de los radios de las secciones transversales?
5. ¿Qué propones para medir al área de la sección transversal?
6. Explica qué relación hay entre el área de la base y el área de la sección transversal. ¿Se mantendrá esta relación si cortas el sólido a cualquier altura?
7. Explica qué sucede si comparas el volumen del sólido que resulta después de cortar con el volumen del sólido original. ¿Cómo se relacionan estas dos mediciones?

Usted es hoy lo que sus pensamientos han hecho de usted; usted será mañana lo que sus pensamientos hagan de usted.

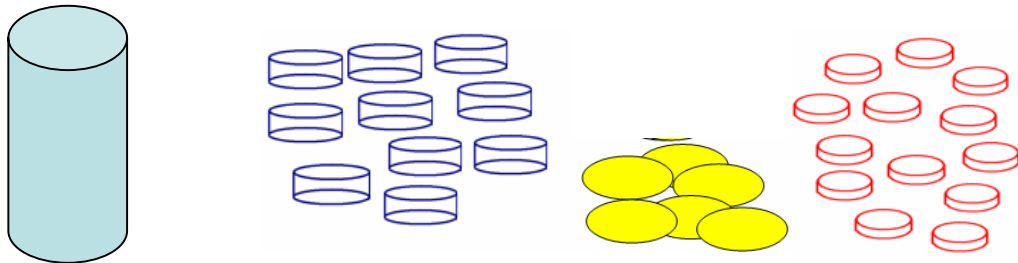
James Allen



Estudiantes: _____ Grado: _____

ACTIVIDAD N° 3

1. Hagan grupos de tres personas con los que ha venido trabajando.
2. ¿Con el material entregado, construya el sólido como aparece en la figura y responda las siguientes preguntas?

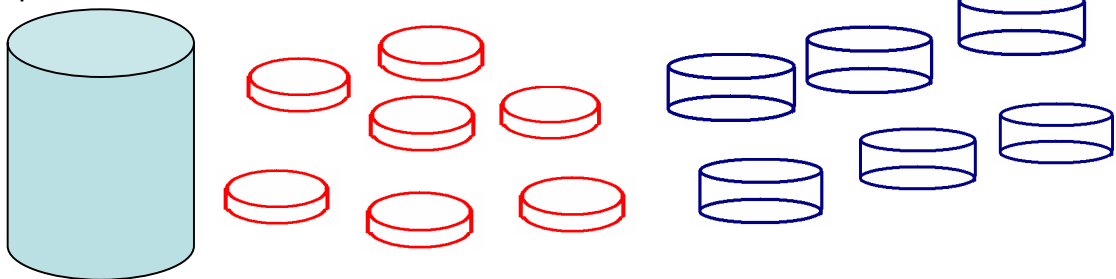


Utiliza ambos tamaños y grosor de las fichas entregadas para construir su sólido y responda las siguientes preguntas.

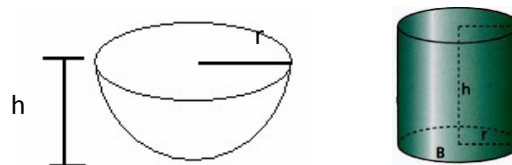
- a) ¿Con cuál de los tamaños y grosor conjetura ustedes para que al calcular el volumen sea lo más exacto posible? tenga presente las actividades anteriores ya trabajadas. Explica tu respuesta y si no estás de acuerdo con ninguna redacte sus argumentos. Recuerda repetir lo anterior tanto para las fichas delgadas de grosor finito, como para las fichas gruesas de grosor delgado y viceversa.
- b) De acuerdo con su respuesta en el inciso 2a explique o plantee una manera o procedimiento para medir el volumen del sólido que usted escogió, sin el uso de fórmulas. Piensa en que no se sabe ninguna fórmula, que tan solo tiene algunas fichas de figuras geométrica (círculos, cuadrados, rectángulos triángulos).

Actividad N° 4

1. Con cuantas fichas se puede aproximar al volumen del cuerpo dado? ¿Por qué?



2. Con los siguientes sólidos se puede determinar el volumen de uno ellos con los datos del otro ¿sí o no?; en caso de ser acertada su respuesta, haga una breve descripción de las condiciones que debe tener en cuenta para su solución.



3. ¿Se necesita de una fórmula siempre para poder determinar el volumen de una figura geométrica? Si o no ¿Por qué?
4. ¿Cómo se puede determinar el volumen de una figura geométrica dada?
5. ¿Al cortar el sólido a cualquier altura las áreas de las secciones transversales siempre serán las mismas?
6. ¿Qué pasa con el volumen de un sólido si usted toma el área de las secciones transversales y esta área siempre es igual?
7. Al cortar un sólido con un plano transversal a su base, las áreas serán las mismas