

EL NÚMERO DE ORO

LIGIA AMPARO ORTIZ CÁCERES

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2006**

EL NÚMERO DE ORO

LIGIA AMPARO ORTIZ CÁCERES

Monografía presentada como requisito para optar al
título de Licenciada en Matemáticas

Director

RAFAEL FERNANDO ISAACS GIRALDO

Magíster en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2006

Dedicatoria

*A Dios que día a día ilumina mi camino.
A mi familia que es lo más preciado que hay en mi vida.
Y a la memoria de mi nonita, quien con su ternura y sabiduría formó este ser que hay en
mí.*

Agradecimientos

Doy mi más profundo agradecimiento a aquellos sin cuya colaboración y apoyo este trabajo no hubiera sido posible:

- A **Dios**, por darme la sabiduría y la fortaleza para terminar mis estudios.
- A **Dios**, por darme la sabiduría y la fortaleza para terminar mis estudios.
- A **mis padres** **Ciro y María**, por su cariño, esfuerzo y comprensión durante toda mi vida.
- A mis hermanas **Iris Rocío y Nancy Yesenia**, mis dos tesoritos que hacen de mi vida un mar de alegría.
- A mi mejor amiga **Juliana** por brindarme su amistad y enseñarme su valor.
- Al profesor **Rafael**, por su colaboración, por su apoyo incondicional y por su acertada orientación durante el desarrollo en esta monografía.
- A los profesores **Bernardo Mayorga y Rafael**, por su apoyo incondicional en esos momentos difíciles que pase en la UIS.
- A los profesores **Edilberto Reyes y Arnoldo Teheran, Luis H.**, por su valiosa colaboración, aportes y comentarios que me permitieron desarrollar satisfactoriamente ésta monografía.
- A **mis compañeros**: Nicolás, Jairo, Jhoany, Walter, Luisiño, Elder, Luz Genny, Claudia Johanna, Deyanira, Martha, Trinidad, William González, Yamid, Nancy, William Calderón; por su amistad, con quienes compartí mis estudios en esta universidad.
- A **mis amigos**, que de una u otra forma estuvieron presentes en todos los momentos, les estaré siempre agradecida por permitieron dar este escalón en mi formación profesional.
- A **Claudia y Doña Gilma**, por creer en mí y brindarme la oportunidad de trabajar a su lado.

la **UIS**, institución que me dió la oportunidad de escalar otro peldaño en mi formación profesional.

TITLE: THE GOLD NUMBER ¹

AUTHOR: LIGIA AMPARO ORTIZ CÁCERES ²

KEY WORDS: the gold number, golden section, proportion divine, the number Phi Dias, golden ratio, golden triangle, golden rectangle, golden segment, la section, Fibonacci sequence .

DESCRIPTION:

The Euclid's Elements are considered the first documental source of the number of gold. In this treaty it is mentioned as the division of a finite segment in extreme and middle ratio, which allows the construction of some polygons and regular polyhedrons.

The monograph it's organized in five chapters in the following way: in the first chapter it finds the chronology of the gold number and some applications that were mentioned through the history. The second chapter is presented definitions and propositions corresponding to the Euclidean geometry used along this monograph. The third chapter uses the elementary geometry to build the golden segment, golden triangle and golden rectangle showing the relationship that exists with the gold number, properties and important theorems of the gold number they are also shown. The fourth chapter itself expose one of the generalized principle of the golden section; the relationship that exists among the gold number of gold with the Fibonacci sequence, the continuous fractions and the geometric series. In the fifth chapter they are given to know some general applications of the gold number as: the construction of the Parthenon, the pyramid of Egypt, the Egyptian calendar and the design of stereophonic sound spaces. This monograph is appropriate for all students who possess good geometric skills and are curious

¹Monograph

²Faculty of Sciences, School of Mathematics. Rafael Fernando Isaacs Giraldo, Magister in Mathematics

TÍTULO: EL NÚMERO DE ORO³

AUTOR: LIGIA AMPARO ORTIZ CÁCERES⁴

PALABRAS CLAVES: El número de oro, sección áurea, divina proporción, número de Fidias, razón áurea, triángulo áureo, rectángulo áureo segmento áureo, la sección, serie de Fibonacci.

DESCRIPCIÓN:

Los elementos de Euclides son considerados la primera fuente documental del número de oro. En este tratado se menciona como la división de un segmento finito en media y extrema razón, el cual permite la construcción de algunos polígonos y poliedros regulares.

La monografía esta organizado en cinco capítulos de la siguiente manera: en el primer capítulo se encuentra la cronología del número de oro y se mencionan algunas aplicaciones que han surgido a través de la historia. El segundo capítulo se presentan definiciones y proposiciones correspondientes a la geometría de Euclides usadas a lo largo de esta monografía. El tercer capítulo utiliza la geometría elemental para construir el segmento áureo, triángulo áureo y rectángulo áureo mostrando la relación que existe con el número de oro, además se muestran propiedades y teoremas importantes del número de oro. El cuarto capítulo se expone una de las generalizaciones del principio de la sección áurea; la relación que existe entre el número de oro con la sucesión de Fibonacci, las fracciones continuas y las series geométricas. En el quinto capítulo se dan a conocer algunas aplicaciones generales del número de oro como son la construcción del Paternón, la pirámide de Egipto, el calendario egipcio y el diseño de espacios sonoros estereofónicos. Esta monografía es apropiada para todos los estudiantes que poseen habilidades geométricas y son curiosos.

³Monografía

⁴Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas. Rafael Fernando Isaacs Giraldo, Magister en Matemáticas

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE CONTENIDO	0
INTRODUCCIÓN	1
1. CRONOLOGÍA	3
2. PRELIMINARES	8
2.1. Teoría de proporciones	8
2.2. Triángulo, ángulos y círculo	9
2.2.1. Semejanza de Triángulos	9
2.2.2. Triángulos	10
2.2.3. Círculo	10
3. GEOMETRÍA DEL NÚMERO DE ORO	15
3.1. Segmento Áureo	15
3.2. Rectángulo Áureo	21
3.3. Triángulo Áureo	23
3.3.1. El decágono.	24
3.3.2. El pentágono.	25
4. OTRAS IMPLICACIONES MATEMÁTICAS	29
4.1. Relación de ϕ con la sucesión de Fibonacci	29
4.1.1. Representación de ϕ mediante la serie geométrica	35
4.2. Generalización del principio de la sección áurea	37
5. APLICACIONES	41
5.1. Las pirámides de Egipto	41
5.2. El calendario egipcio	42
5.3. El Partenón	43
5.4. El diseño de espacios sonoros estereofónicos.	44
CONCLUSIÓN	47
BIBLIOGRAFÍA	48

INTRODUCCIÓN

“La Geometría tiene dos grandes tesoros: uno de ellos es el Teorema de Pitágoras; el otro, la división de un segmento en media y extrema razón. El primero lo podemos comparar a una medida de oro; el segundo lo podríamos considerar como una preciosa joya.” *Johannes Kepler.*

El número de oro ha estado presente en todos los tiempos de una forma tanto implícita como explícita en la naturaleza, las ciencias, las artes, las ingenierías y ha sido la base de creaciones artísticas y arquitectónicas, así como la inspiración de muchos artistas.

Este número también es llamado: *número de Fidias (ϕ), el número ϕ , la sección, la divina proporción, razón áurea, el número de Fibonacci, razón dorada, proporción áurea, sección áurea* o simplemente como se menciona en la geometría euclidiana *la división de un segmento en media y extrema razón.*

En la actualidad el número irracional ϕ ha pasado desapercibido en los actuales programas de enseñanza; por esta razón decidí a través de esta monografía explicar con la ayuda de la geometría euclidiana, la historia y un lenguaje matemático muy sencillo, las implicaciones del número de oro en algunas áreas del saber, con una fácil comprensión para cualquier tipo de lector.

El presente trabajo se encuentra organizado en cinco capítulos de la siguiente manera: en el primer capítulo el lector encontrará la historia de *la divina proporción* y la influencia que ha tenido en las diferentes culturas.

El segundo capítulo incluye las definiciones y proposiciones correspondientes a la geometría euclidiana usados a lo largo de esta monografía, pero sólo se demostraron las más convenientes para nuestro interés. Para el tercer capítulo utilizamos todas las herramientas de la geometría elemental para construir: el segmento áureo, rectángulo áureo, triángulo áureo, la espiral logarítmica, el decágono, el pentágono, el pentagrama y el

dodecaedro y así mostrar la relación que existe con *la razón áurea* de una forma didáctica.

El cuarto capítulo se menciona la versión moderna de la generalización del principio de la sección áurea y la relación que existe entre la *sección áurea* con la sucesión de Fibonacci.

En el quinto capítulo mostraremos algunas aplicaciones generales del número de Fidiás como son: *la construcción del Partenón, la pirámide de Egipto, el calendario egipcio y el diseño de espacios sonoros estereofónicos.*

Capítulo 1

CRONOLOGÍA

La historia del número de oro se remonta no a siglos sino a milenios, y su actualidad sigue vigente hoy en día. En este capítulo realizaremos una breve descripción de la historia de este número.

Los babilónicos y egipcios usaban la matemática en forma tanto pragmática como para diversión o satisfacción del espíritu; prueba de este hecho se encuentra en una colección de problemas de geometría y aritmética, compilados en un papiro escrito por el sacerdote Ahmes, que vivió aproximadamente en 1700 a. de J.C. titulado: *Orientaciones para conocer todas las cosas oscuras*. El papiro se encuentra actualmente en el museo British en Londres Inglaterra ([15], pág. 8).

No conocemos exactamente a que nivel llegó la precisión teórica de los egipcios, sin embargo hicieron significativos progresos en la ciencia de las mediciones exactas, lo que les permitió realizar construcciones con gran riqueza geométrica, por ejemplo, la gran pirámide de Keops que ha sido objeto de estudio a lo largo de la historia, relacionando la ciencia matemática y el arte de la construcción por medio de la sección dorada, aportando a la obra una belleza especial que deja perplejo a quien la estudia.

Debido al comercio que existía entre Mesopotamia, Egipto y Grecia, los griegos visitaban con frecuencia a los sacerdotes de Egipto con quienes compartían el goce por la astronomía, la filosofía y la matemática. En particular Tales de Mileto, un rico comerciante aristócrata, quien abandonó el comercio y se dedicó de tiempo completo a estas disciplinas, convirtiéndose en uno de los siete sabios de Grecia y miembro de la escuela de Mileto ([15], págs. 10-11).

La influencia de este gran maestro fue notable en sus discípulos; tal es el caso de Pitágoras que fundó su propia sociedad o hermandad cuyo principio filosófico se fundamentaba en que todas las cosas son número o están formadas por números, es decir, se explicaba en términos de *arithmos* (propiedades intrínsecas de los números naturales y de sus razones) ([3], págs. 78-81).

Los pitagóricos creían que siempre era posible reducir las longitudes de los segmentos a múltiplos de longitudes conmensurables (números racionales) menores, parecía ser una simple cuestión de paciente subdivisión, hasta hallarse la medida deseada. Pitágoras descubrió que no siempre era posible encontrar una medida común para dos longitudes dadas, es decir, descubrió la existencia de las magnitudes inconmensurables (números irracionales). No se sabe cuándo ocurrió el descubrimiento de lo inconmensurable, puede citarse los siguientes ejemplos:

- Aristóteles sugiere que la demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado es como sigue: Si la razón entre la diagonal (p) y el lado (q) del cuadrado es conmensurable, suponga que p y q son números enteros primos entre sí. Entonces el cuadrado de la diagonal es el doble que el cuadrado del lado, es decir, $p^2 = 2q^2$. Luego p^2 es un número par, y p también debe ser par. Por tanto, puede considerarse a p como $2r$, siendo $p^2 = 4r^2$, y, por consiguiente, $q^2 = 2r^2$. Esto exige que q sea par; lo cual es imposible por que dos números p y q primos entre sí no pueden ser ambos pares. Así el supuesto originario es insostenible; no puede existir ninguna medida común y la razón es, por tanto irracional”
- Cuando una línea a es dividida en extrema y media razón: “Con ello se indica que la razón de a , toda la línea, a la parte b , es igual a la razón de b a la otra parte c . Aquí c cabe una vez en b con un resto d ; y luego d cabe una vez en c con un resto e ; y así sucesivamente, formando una progresión geométrica infinita y la medida (conmensurable) común deseada no se halla nunca ([15], págs. 15-18).

Tiempo después estalló en Crotona una sangrienta revolución que trajo como consecuencia la desaparición de la secta pitagórica, pero para entonces sus doctrinas e ideales habían sido asimilados y asumidos por la Academia de Platón. Este filósofo considera la sección áurea como la más rigurosa de las relaciones matemáticas, y para él significa la clave de la física del cosmos ([14], págs. 46-50). En la escuela de Platón predominaban dos corrientes, *la experimental del médico Filistión y la logicista-matemático, de corte pitagórico, de Eudoxo y Espeusipo* ([17], págs. 7-10) quienes estudiaron los problemas relativos a la sección áurea, que fueron continuados por Hipsicles. A partir de la difusión de las traducciones árabes de los *Elementos de Euclides* los problemas relacionados con la razón áurea alcanzaron una gran difusión.

En el siglo XII, Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci, autor del Liber Abaci, propone una serie de problemas teóricos y prácticos donde se destaca su famosa *sucesión de Fibonacci*, en la cual la razón entre cada par de números consecutivos va oscilando por encima y por debajo de la razón áurea, a medida que se avanza en la serie, la diferencia de la razón de Fibonacci con la razón áurea se va haciendo cada vez menor. En otras palabras, el límite del cociente de los términos consecutivos de esta sucesión tiende a la razón áurea ([4], págs. 326-331).

En el renacimiento (siglo XIV al XVI) el fraile Luca Pacioli inspirado en los Elementos de Euclides y los diálogos de Platón destacó las virtudes de la sección áurea o proporción divina en su tratado *La Divina Proporción*. Este libro comienza con un poema de Rafael Alberti titulado *La Divina Proporción* luego en los primeros cuatro capítulos trata sobre la importancia fundamental de las cuatro disciplinas matemáticas: aritmética, geometría, astronomía y música. Del capítulo V al XXIII considera la división de una línea en media y extrema razón, lo que hoy llamamos sección áurea y que él llama divina proporción, donde describe sus propiedades comparándola con Dios. En los capítulos del XXIV al XXXI habla de los cinco cuerpos regulares relacionándolos con la divina proporción. En los demás capítulos estudió las construcciones de figuras geométricas basándose en la geometría Euclidiana, también estudió las proporciones de algunas construcciones arquitectónicas, las letras del alfabeto y del cuerpo humano ([16]). Este libro fue ilustrado por el famosísimo Leonardo da Vinci quién llamó a la sección áurea *le nombre d'or* y la utilizó en sus composiciones de arte, una de ellas es su famosa *Mona Lisa* o mejor conocida como *la Joconde* ([8], págs. 10-11); también el artista alemán *Alberto Durero*, el pintor italiano *Rafael Sandio* y otros artistas de su época consideraban la geometría y las proporciones matemáticas (sección áurea) la clave para entender su arte. ([3], págs. 28-30).

Por la misma época, el físico y filósofo alemán Johannes Kepler (1571-1630), en su obra *la maravillosa proporción de los orbes celestes y sobre las causas genuinas y verdaderas del número, magnitud y movimiento periódico de los cielos, demostrado mediante los cinco sólidos geométricos regulares*, que se publicó en 1596, se refiere a la sección áurea como uno de los dos grandes tesoros que hay en la geometría y siendo el otro el teorema de Pitágoras. ([3], págs. 30-31 y [4], pág. 81).

En el siglo XIX se efectuaron varios estudios sobre las proporción áurea, sobresaliendo los trabajos de:

- El físico y sicólogo alemán *Theodor Fechner* fundador de la *psicofísica*¹ y representante de la estética experimental, quien realizó en 1876 una serie de ensayos, de los cuales concluyó que la gente tenía mayor predilección por el rectángulo áureo.
- El artista *Georges Seurat* iniciador de la corriente artística *cromoluninarismo* o *divisionalismo*² se interesa por la sección áurea, dividiendo los laterales de sus cuadros en *media y extrema razón* creando proporciones armónicas o secciones áureas. ([3], pág. 31-33).

¹La psicofísica es la disciplina que se dedica a cuantificar o medir las sensaciones a partir de la estimulación.

²El cromoluninarismo o divisionalismo: técnica pictórica, consiste en dar pequeñas pinceladas yuxtapuestas de forma circular o alargada con colores puros, consiguiendo una mayor luminosidad de los cuadros.

◦ *Adolf Zeising* quien publicó sus obras *Neue Lehre von den Proportionen* y *Aesthetische Forschungen* destacando las cualidades de la sección áurea en ciertos fenómenos de la naturaleza, el arte y la música.

Para el siglo XX podemos encontrar la presencia de la sección áurea o número de oro en las composiciones musicales del etnomusicólogo húngaro *Béla Bartók*, el cual integra movimientos primitivos pentatónicos basado en el sistema de la sección de oro. *Ernö Lendvai* concluyó que la característica principal de la técnica cromática³ de Bartók obedecía a la sección de oro en todos sus elementos y demostró que toda unidad de la sonata para dos pianos y percusión, están divididas según la regla de la sección áurea ([3], pág. 42-43).

También encontramos la presencia de $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en las escalas musicales donde la frecuencia fundamental se multiplica por ϕ y concuerdan con sólo unas notas pues la relación entre 1 y ϕ determina intervalos muy amplios. De la misma derivan la escala pentatónica donde su razón es de 1 a $\sqrt{\phi}$ y la escala decatónica donde su razón es de 1 a $\sqrt[10]{\phi}$ ([1], pág. 416).

En 1912, se realizó la primera y magistral exposición alusiva a *la Section D'Or* en la galería La Boétie de París, en ella se presentaron obras de *Gleizes, Metzinger, Lhote, Duchamp, Duchamp Villon, La Fresnaye, Marcoussis, Archipenko, Laurencin, Picabia Henri Valensi, Kupka, Villon, Léger, Gris* y otros.

También el pintor y escultor español Salvador Dalí muestra en sus obras la influencia de la sección áurea por medio de las espirales y el suizo *Charles Édouard Jeanneret*, apodado *Le Corbusier* y Pierre con su proyecto de arquitectura, que preveía la disposición de los edificios sobre el terreno de acuerdo con trazos áureos, además, *Le Corbusier* publicó su obra *el Modulor* basado en la relación que hay entre la sección áurea y proporciones del cuerpo ([3], págs. 33-50).

Hoy en día las investigaciones y los estudios que encontramos sobre la sección áurea son numerosos y con una amplia bibliografía. Algunos de los estudios realizandos son:

- *El artículo Las dimensiones locales del la circunvolución de Bernoulli asociado con el número áureo* por *Tian-You- Hu*.
- *La Sección áurea y geometría no Euclidiana en la naturaleza y arte* por *Voznar OY*.
- *La proporción áurea en la relatividad especial* por *Leonardo Di G. Sigalotti* quien

³Técnica cromática: utilización de los doce grados de la escala cromática de tal modo que haya al menos sucesiones de dos semitonos.

pertenece al I.V.I.C. Instituto Venezolano de Investigaciones científicas, Centro de Física y *Antonio Mejias* que quien pertenece al Instituto Universitario Tecnológico de Ejido en el Estado Mérida, Venezuela.

- *La Importancia de la Sección Áurea en el Diseño de Espacios Sonoros Estereofónicos* por *Álvarez Gómez* miembro del Departamento de Construcción e Ingeniería de Fabricación de la Universidad de Oviedo.

- *A fuzzy linguistic interpretation of the golden section* por *Thananchai Leephakpreeda*.

- De los artículos de *Alexey Stakhov* se destacan: *La generalización de las proporciones áureas, una nueva teoría de los números reales, y la aritmética espejo-simétrica ternaria, La Proporción áurea en la tecnología digital, La generalización del principio de la sección áurea y las aplicaciones en las matemáticas, las ciencias y las ingenierías.*

Como podemos ver, el número de oro se encuentra presente no solo en todos los lugares sino en todos los tiempos y ha fascinado y seguirá fascinando al ser humano, porque su historia aún no se ha terminado de escribir y hoy en día, historiadores, físicos, matemáticos, continúan estudiando y utilizando sus propiedades.

Capítulo 2

PRELIMINARES

El propósito en este capítulo es presentar las definiciones y los resultados básicos para el estudio de los capítulos posteriores.

2.1. Teoría de proporciones

Los números racionales no fueron conocidos por los babilónicos, ni por los egipcios, aunque ambos disponían de ciertas formas de fracciones de numerador uno. Solo hasta la civilización griega aparecieron los racionales, pero no como números, sino como ciertas razones de magnitudes, ya que los únicos números identificados como tales eran los enteros.

Entonces los griegos no inventaron un nuevo tipo de número sino una teoría de proporciones entre magnitudes geométricas completamente independiente de los números, a las que ellos llamaban magnitudes conmensurables (números racionales). Esta teoría de proporciones llevó a la escuela pitagórica a descubrir otra clase de magnitudes, las cuales llamaron magnitudes inconmensurables (números irracionales). Fue sólo hasta el siglo XIX que se estableció el concepto de número irracional ([10], págs 6-10).

Definición 2.1. Se llama *razón geométrica* o *relación entre dos cantidades* al cociente que resulta de dividir la primera cantidad entre la segunda cantidad, siendo estas cantidades números reales no negativos. La razón entre a y b es $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$ y se lee a es a b .

La siguiente definición es clave para demostrar las proposiciones de esta sección.

Definición 2.2. Una *proporción* es una igualdad entre dos razones, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$. Las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son proporcionales si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Algunas propiedades de las proporciones y razones se resume en la siguiente proposición.

Proposición 2.1. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ con b y d no nulos se da:

(i) $a.d = b.c$

(ii) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

(iii) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

(iv) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

2.2. Triángulo, ángulos y círculo

En esta sección se presentan algunas propiedades sobre triángulos y se ilustran algunas clases de ángulos que permiten al lector comprender resultados posteriores.

2.2.1. Semejanza de Triángulos

La semejanza de triángulos enlaza gran parte de la historia de las matemáticas, no sólo en la geometría, sino también en el álgebra, la teoría de números y la física matemática. Es el tercer teorema empírico importante de los babilónicos en la geometría pura y el vestigio registrado más antiguo que se posee sobre los orígenes del análisis matemático, véase [4].

Es necesario aclarar la diferencia entre congruencia y semejanza de triángulos; la congruencia es cuando existe correspondencia entre sus elementos, por lo tanto, al superponerse coincidan en todos sus puntos; mientras la semejanza se refiere solo a la congruencia de los ángulos de un triángulo con respecto a otro triángulo.

Postulado 2.1. Si tres ángulos de un triángulo son congruentes con los tres ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

Proposición 2.2. Los triángulos son semejantes. Si:

(i) Dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulo de otro triángulo.

(ii) Los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados de otro triángulo.

(iii) Un ángulo de un triángulo es congruente con un ángulo de otro triángulo, y si los lados correspondientes que incluyen al ángulo son proporcionales.

La demostración de está proposición se puede encontrar en ([22]págs. 316-317, 326-327).

2.2.2. Triángulos

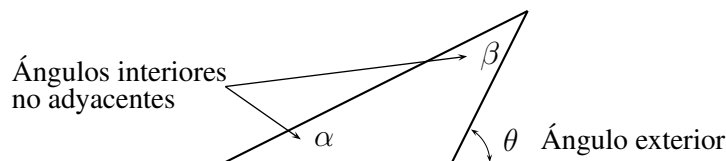
En particular, medir un ángulo es compararlo con otro que se toma como unidad. Si se utiliza el sistema sexagesimal, la medida del ángulo esta dada en grados y en el sistema circular esta dada en radianes ($360^\circ \equiv 2\pi$ radianes).

Definición 2.3. *Dos ángulos cuyas medidas suman 90° son llamados **ángulos complementarios** y dos ángulos cuyas medidas suman 180° son llamados **ángulos suplementarios**.*

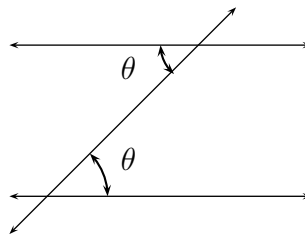
La definición anterior es básica para demostrar las proposiciones correspondientes a medidas de ángulos.

Proposición 2.3. *La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° y la medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de sus dos ángulos interiores no adyacentes.*

Figura 2.1: Ángulo exterior



Proposición 2.4. *Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.*



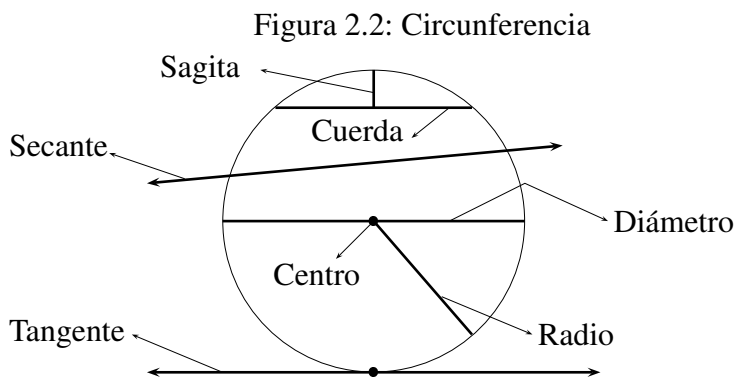
A continuación se enuncia uno de los teoremas más importantes y conocidos en geometría el **teorema de Pitágoras**.

Teorema 2.1. *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.*

2.2.3. Círculo

En la siguiente figura se ilustran algunos elementos notables de una circunferencia los cuales tienen como objeto la comprensión de algunos resultados que presenta esta sección.

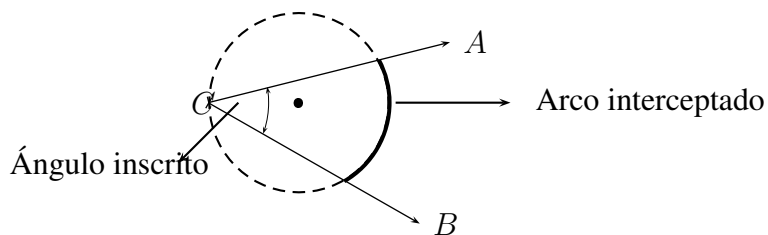
La medida de un arco se determina por la medida de un ángulo central (ángulo cuyo vértice está en el centro de una circunferencia). Podemos pensar en la circunferencia como un arco de medida igual a 2π radianes.



Al valor constante de la razón de la longitud de la circunferencia y su diámetro, se le llama ***pi*** y es representado por la letra griega π .

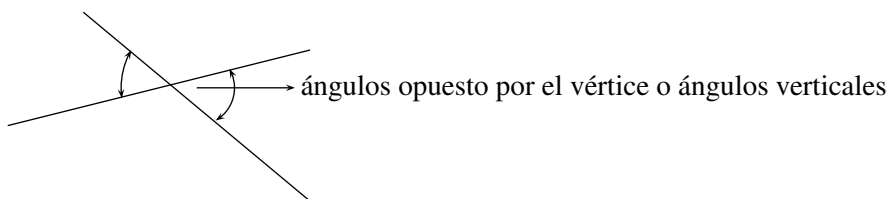
Definición 2.4. *Ángulo inscrito o periférico* es un ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son semirectas que determinan dos cuerdas.

Figura 2.3: Arco interceptado y ángulo inscrito



Definición 2.5. *Arco interceptado* es un ángulo inscrito ACB es el arco AB que está en el interior del ángulo.

Figura 2.4: Ángulos verticales

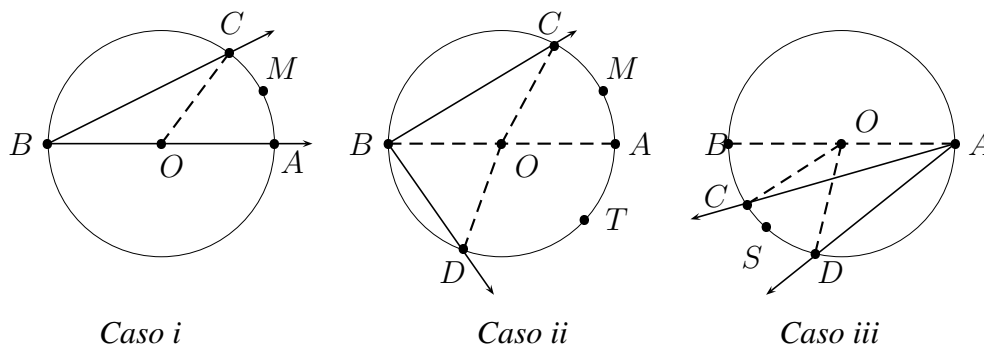


Proposición 2.5. Si dos rectas se intersecan los **ángulos verticales** u opuestos por el vértice son congruentes.

La demostración de la anterior proposición la puede encontrar en ([22], págs. 150-151) y la siguiente proposición será de suma importancia en esta sección y el siguiente capítulo.

Proposición 2.6. La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida de su arco interceptado.

Figura 2.5: Medida de un ángulo inscrito



Demostración. Consta de tres partes, donde se tiene en cuenta la posición del centro de la circunferencia con respecto al ángulo inscrito en la circunferencia, es decir, si el centro de la circunferencia está dentro, fuera o sobre el ángulo inscrito, como se muestra en la figura 2.5.

(i) Sea el ángulo $\angle ABC$ inscrito en la circunferencia de radio \overline{OC} que forma el triángulo isósceles $\triangle COB$ así pues, el ángulo $\angle CBO$ es congruente con el ángulo $\angle BCO$, por la proposición 2.3 la suma de los ángulos $\angle CBO$ y $\angle BCO$ es igual a la medida del ángulo $\angle COA$ como los ángulos $\angle BCO$ y $\angle CBO$ son el mismo, por lo tanto la medida del ángulo $\angle CBO$ es igual a la mitad del ángulo $\angle COA$. Entonces el arco correspondiente al ángulo $\angle COA$ es el arco AMC luego la medida del ángulo $\angle ABC$ es igual a la mitad del arco AMC .

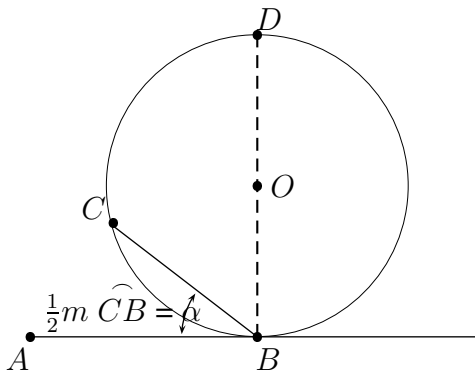
(ii) Caso ii: Usando el resultado anterior se tiene que la medida del ángulo $\angle ABC$ es igual a la mitad del arco AMC , en forma análoga la medida del ángulo $\angle ABD$ es igual a la mitad del arco DTA entonces sumamos los ángulos se tiene que la medida del ángulo $\angle DBC$ es igual a la mitad del arco DAC .

(iii) En forma análoga a los casos anteriores se obtiene que la medida del ángulo $\angle BAC$ es igual a la mitad del arco BC y la medida del ángulo $\angle BAD$ es igual a la mitad

del arco BCD entonces de la diferencia de los ángulos se tiene que la medida del ángulo $\angle DAC$ es igual a la mitad del arco CSD . \square

Proposición 2.7 (Ángulo Seminscrito). *La medida de un ángulo formado por una tangente y una cuerda trazada al punto de contacto es igual a la mitad del arco interceptado.*

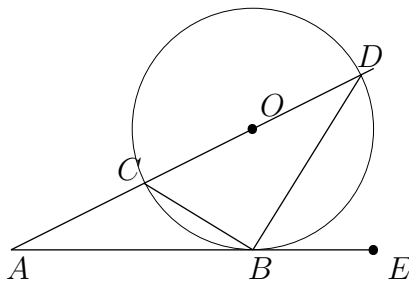
Figura 2.6: Ángulo seminscrito



Demostración. Sea \overleftrightarrow{AB} la tangente, \overline{BC} la cuerda trazada al punto de contacto y \overline{BD} el diámetro trazado al punto de contacto, por la proposición 2.6, el ángulo $\angle DBC$ es igual a la mitad del arco DC y el ángulo $\angle ABD$ es igual a la mitad del arco DB , además, el ángulo $\angle ABC$ es igual a la diferencia entre el ángulo $\angle ABD$ y el ángulo $\angle DBC$, entonces por propiedad transitiva el ángulo $\angle ABC$ es igual a la diferencia entre la mitad del arco DB y la mitad del arco DC , es decir, el ángulo $\angle ABC$ es igual a la mitad del arco CB \square

Proposición 2.8. *Si se traza un segmento tangente y un segmento secante desde un punto exterior a un círculo, entonces el cuadrado de la longitud del segmento tangente es igual al producto de las longitudes del segmento secante por su segmento secante externo.*

Figura 2.7: Medidas entre secantes



Demostración. Sea \overline{AB} un segmento tangente y \overline{AD} el segmento secante a un círculo, dibújese las cuerdas \widehat{CB} y \widehat{DB} , como se muestra en la figura 2.7, por la proposición 2.7 la medida del ángulo $\angle ABC$ es igual a la mitad del arco BC y por la proposición 2.6 la medida del ángulo $\angle CDB$ es igual a la mitad del arco BC ; debido a que las medidas de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle CDB$ son iguales, el ángulo $\angle ABC$ es congruente con el ángulo $\angle CDB$, además, por propiedad reflexiva el ángulo $\angle A$ es congruente con sí mismo y por la proposición 2.2 el triángulo $\triangle ABC$ es semejante al triángulo $\triangle ADB$ luego por definición de triángulos semejantes el segmento \overline{AB} es al segmento \overline{AD} , como el segmento \overline{AC} es al segmento \overline{AB} , entonces por la proposición 2.1 el cuadrado de la longitud del segmento tangente es igual al producto de las longitudes del segmento secante por su segmento secante externo

□

Capítulo 3

GEOMETRÍA DEL NÚMERO DE ORO

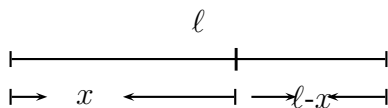
El polinomio $x^2 - x - 1$ tiene dos soluciones a saber $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, a la solución $\phi := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, se le llama **número de oro** el cual es irracional, además, se puede construir con regla y compás.

El objetivo de este capítulo es hacer una construcción de ϕ haciendo uso de la geometría euclidiana, presentar algunas aplicaciones a la construcción de otras figuras geométricas y destacar la importancia de la sección áurea dentro de la teoría de proporciones.

3.1. Segmento Áureo

La proporción áurea consiste en cortar un segmento finito en dos partes desiguales de tal manera que el cociente entre la longitud del segmento total ℓ y el segmento mayor x sea igual al cociente de la longitud del segmento mayor y el segmento menor.

Figura 3.1: Segmento áureo



Definición 3.1 (Segmento Áureo). *Se dice que un segmento ha sido cortada en **extrema y media razón** cuando la longitud del segmento total es al segmento mayor como el (segmento) mayor al menor, es decir,*

$$\frac{\ell}{x} = \frac{x}{\ell - x}$$

De la anterior definición se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Dado un segmento que ha sido cortado en extrema y media razón; la relación que existe entre la medida del segmento mayor y el segmento menor está dada por el número de oro.*

Demostración. Sea ℓ la longitud de la recta finita y x el segmento mayor. Aplicando la definición de media geométrica se tiene:

$$\frac{\ell}{x} = \frac{x}{\ell - x} \quad (3.1)$$

Por la proposición 2.1,

$$\begin{aligned} x^2 &= \ell(\ell - x) \\ &= \ell^2 - \ell x, \end{aligned}$$

es decir,

$$x^2 + \ell x - \ell^2 = 0. \quad (3.2)$$

Resolviendo la ecuación cuadrática,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-\ell \pm \sqrt{\ell^2 - 4(-\ell^2)}}{2} \\ &= \frac{-\ell \pm \sqrt{5\ell^2}}{2} \end{aligned}$$

Se obtiene dos soluciones de las cuales se elige la positiva por tratarse de medidas de segmentos, es decir,

$$x_1 = \frac{-\ell + \sqrt{5}\ell}{2} \quad (3.3)$$

Combinando las ecuaciones 3.1 y 3.3 se obtiene,

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{x}{\ell - x} \\ &= \frac{\frac{-\ell + \sqrt{5}\ell}{2}}{\ell - \frac{-\ell + \sqrt{5}\ell}{2}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Es decir, dividir un segmento en media y extrema razón es hallar su parte áurea. □

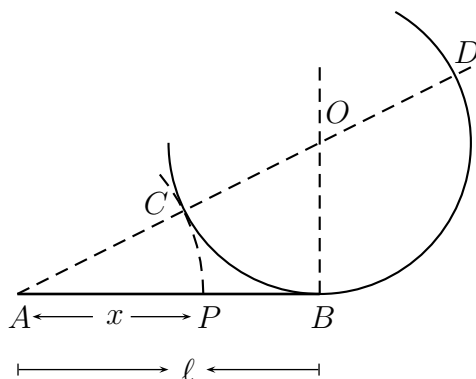
Para obtener el inverso del número de oro análogamente se hace el mismo procedimiento, el cual sera necesario para el siguiente capítulo.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi} &= \frac{\ell - x}{x} \\ &= \frac{\ell - \frac{-\ell + \sqrt{5}\ell}{2}}{\frac{-\ell + \sqrt{5}\ell}{2}} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

A continuación se presenta la construcción geométrica con regla y compás del segmento áureo.

Proposición 3.1. *Para obtener un segmento áureo síga la siguiente construcción:*

Figura 3.2: Construcción del segmento áureo



1. Dado el segmento \overline{AB} , levante una perpendicular en el punto B del segmento.
2. Con un compás traslade la medida $\frac{AB}{2}$ al segmento perpendicular, colocando la punta del compás en B y marque el punto O .
3. Dibuje una circunferencia con centro en O y con radio $OB = \frac{AB}{2}$
4. Una el punto A con el punto O formando el triángulo rectángulo $\triangle ABO$.
5. Marque el punto C correspondiente a la intersección entre la hipotenusa del $\triangle ABO$ y la circunferencia.

6. Trace un arco con centro en A y radio \overline{AC} que corte al segmento \overline{AB} en el punto P .

7. Finalmente se halla el segmento áureo \overline{AP} .

Demostración. Sea \overleftrightarrow{AB} tangente y \overleftrightarrow{AD} secante a la circunferencia como se muestra en la figura 3.2. Entonces por la proposición 2.8. el segmento \overline{AD} es al segmento \overline{AB} como el segmento \overline{AB} es al segmento \overline{AC} aplicando la proposición 2.1

$$\frac{AD - AB}{AB} = \frac{AB - AC}{AC} \quad (3.4)$$

y por construcción se tiene que los segmentos \overline{AB} y \overline{CD} son congruentes. Análogamente los segmentos \overline{AC} y \overline{AP} son congruentes, además, la diferencia entre la medida de los segmentos AD y CD es igual a la medida del segmento AC , similarmente la diferencia entre AB y AP es igual a PB , así

$$AD - AB = AC = AP \quad y \quad AB - AC = PB, \quad (3.5)$$

combinando las ecuaciones (3.5) y (3.4) se tiene que AP es a AB como PB es a AP y por el teorema 3.1 el segmento áureo es AP \square

Otra prueba sencilla de la proposición anterior se basa en el teorema de Pitágoras.

Demostración. Utilizando el teorema de Pitágoras,

$$(AO)^2 = (AB)^2 + (BO)^2 \quad (3.6)$$

como lo muestra la figura 3.2 y por construcción

$$CO = BO = \frac{AB}{2}, \quad AC = AP \quad y \quad AO = AC + CO. \quad (3.7)$$

Reemplazando la ecuación (3.7) en la ecuación (3.6)

$$\left(AP + \frac{AB}{2} \right)^2 = AB^2 + \frac{AB^2}{4} \quad (3.8)$$

$$= \frac{5}{4} AB^2 \quad (3.9)$$

haciendo operaciones

$$AP + \frac{AB}{2} = \pm \sqrt{\frac{5}{4} AB^2} \quad (3.10)$$

De lo anterior se escoge la solución positiva por ser una medida de segmentos,

$$AP = \left(-\frac{AB}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}AB \right) \quad (3.11)$$

$$= AB \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \quad (3.12)$$

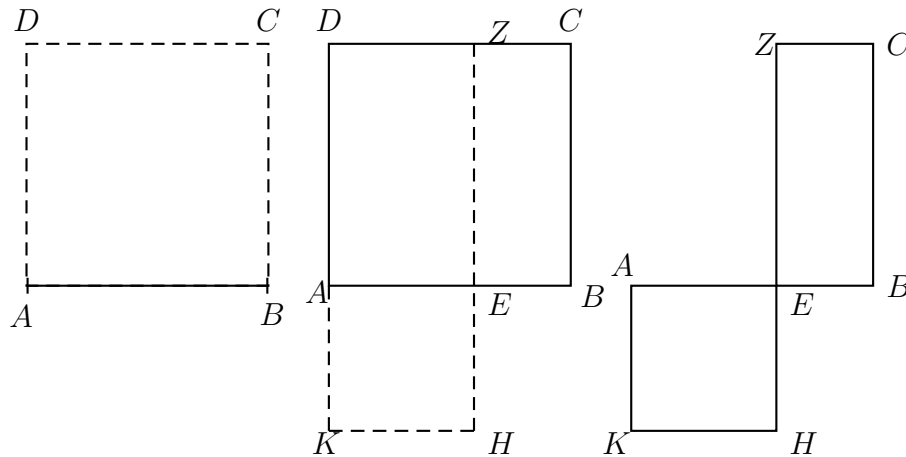
Luego la parte áurea de una cantidad se obtiene multiplicando dicha cantidad por el inverso del número de oro. \square

Los Elementos de Euclides dedican un gran número de proposiciones a la *división de una recta finita en media y extrema razón*, que podemos encontrar en el libro II, proposición 11, en el libro VI, proposición 30 y su aplicación en los libros IV, proposiciones 10-14 y el libro XIII.

A continuación se presenta la demostración dada en ([7], págs. 285-286) donde se compara los cuadrados y paralelogramos en términos de área.

Proposición 3.2. *Dividir un segmento finito dado en extrema y media razón.*

Figura 3.3: El segmento áureo

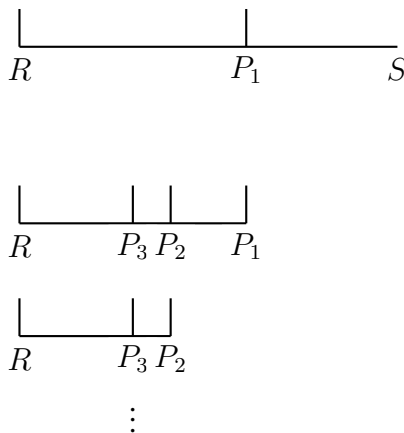


Demostración. (Vease, figura 3.3) Sea \overline{AB} la recta finita dada. Así pues, hay que dividir la recta finita AB en extrema y media razón. A partir de \overline{AB} construya el cuadrado $\square ABCD$ y aplique \overline{DA} el paralelogramo $\square DKHZ$ igual al cuadrado $\square ABCD$ y que exceda en la figura el cuadrado $\square AEHK$ semejante al cuadrado $\square ABCD$, es decir, tome la distancia que hay entre la mitad del lado del cuadrado y el vértice, luego extiendase hata formar

el paralelogramo $\square DKHZ$. Ahora bien, $\square ABCD$ es un cuadrado; entonces $AEHK$ es también un cuadrado. Y como el cuadrado $\square ABCD$ es igual al cuadrado $\square DKHZ$, quite de ambos el paralelogramo $\square AEZD$; entonces el (paralelogramo) restante $\square EBCZ$ es igual al (paralelogramo) restante $\square AEHK$. Pero son también equiángulos; entonces los lados que comprenden los ángulos congruentes de los (paralelogramo) $\square EBCZ$, $\square AEHK$ son inversamente proporcionales¹; entonces, como \overline{ZE} es a \overline{EH} ; así pues, \overline{AE} a \overline{EB} . Pero \overline{ZE} es congruente a \overline{AB} y \overline{EH} a \overline{AE} . Por tanto, como \overline{BA} es congruente a \overline{AE} , así \overline{AE} a \overline{EB} . Pero \overline{AB} es mayor que \overline{AE} ; así pues, AE es también mayor que EB . Por consiguiente se ha dividido la recta \overline{AB} en extrema y media razón por \overline{EB} y su segmento mayor es \overline{AE} . \square

Una de las propiedades importantes de la sección es la "auto-reproductiva", es decir, que si un punto P_1 divide en media y extrema razón a un segmento \overline{RS} , con $\overline{RP_1}$ la parte más larga, y si sobre $\overline{RP_1}$ queda subdividido a su vez en media y extrema razón por un punto P_2 como se muestra en la figura 3.4.

Figura 3.4: División del segmento áureo



Si tomamos de nuevo un punto P_3 sobre $\overline{RP_2}$ tal que $RP_3 = P_1P_2$, entonces el segmento $\overline{RP_2}$ quedará dividido por P_3 en media y extrema razón; este procedimiento se puede repetir tantas veces como se quiera, y el resultado que se va obteniendo es un segmento cada vez más pequeño $\overline{RP_n}$ dividido en media y extrema razón P_{n+1} .

La propiedad de la auto-reproducción de la sección áurea se puede ver en las espirales, los girasoles y figuras que se reproducen a partir de la sección áurea.

¹Dos cantidades [magnitudes] proporcionales se dicen recíprocamente proporcionales a otras dos, cuando una de las primeras es a una de las segundas, como la restante de las segundas a las restantes de las primeras (vease, [7]).

3.2. Rectángulo Áureo

Definición 3.2. *Rectángulo Áureo* es un rectángulo tal que si se corta un cuadrado unitario en un extremo, los lados del rectángulo resultante estarán en la misma proporción que los del rectángulo original.

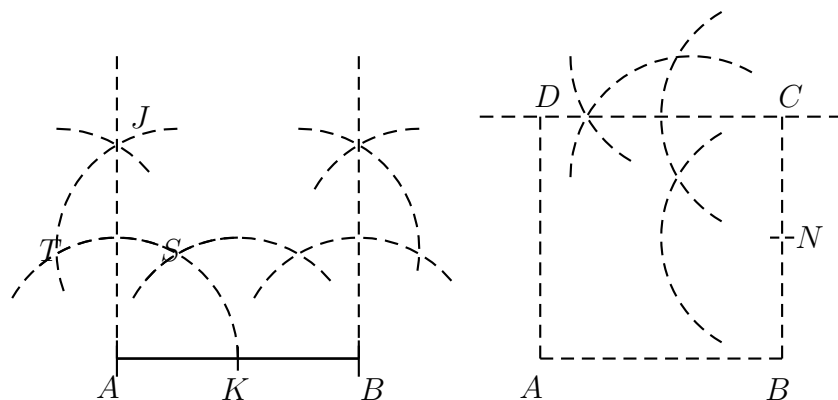
Para construir el rectángulo áureo se utiliza un procedimiento similar a la construcción del segmento áureo, pero en este caso se hace en términos de área.

La siguiente proposición muestra la construcción con regla y compás del rectángulo áureo.

Proposición 3.3. *Para obtener un rectángulo áureo siga la siguiente construcción:*

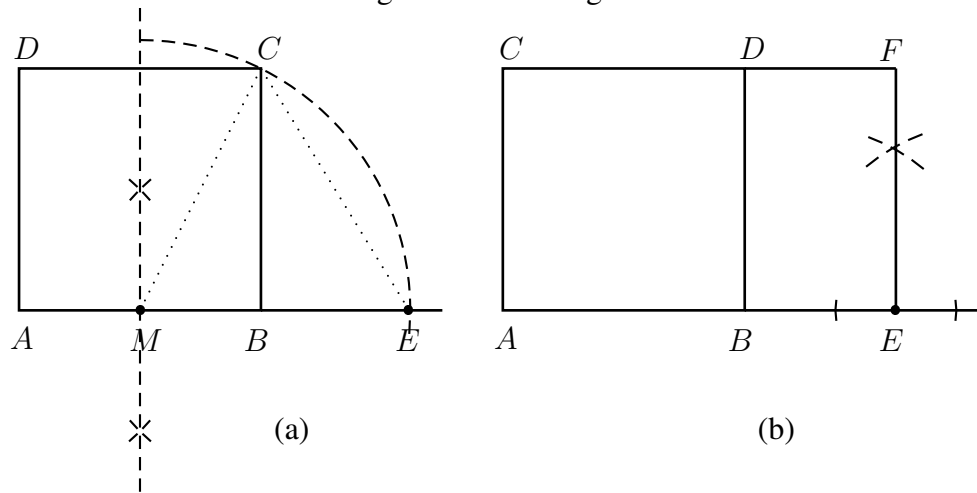
1. Constrúyase un cuadrado unitario $ABCD$ como lo muestra la siguiente figura.

Figura 3.5: Construcción del cuadrado con regla y compás



- Dado el segmento \overline{AB} , haciendo centro en el punto A y con una abertura cualquiera de compás, se describe un arco al segmento \overline{AB} en el punto K y con la misma abertura de compás haciendo centro en K se determina S , siendo este punto la intersección de los dos arcos, con la misma abertura del compás y haciendo centro en S se determina T .
- Haga centro en los puntos S y T trazando los arcos que determinan el punto J ; ahora trace el segmento que pase por los puntos A y J que es la perpendicular pedida.
- Para obtener las otras perpendiculares repeta el mismo proceso para los puntos B , C y D .

Figura 3.6: Rectángulo áureo



2. Construya el punto medio del lado \overline{AB} . Con M como centro y \overline{MC} como radio, dibuje un arco que interseque a \overline{AB} en E (véase, figura 3.6(a)).
3. Trace $\overline{EF} \perp \overline{AE}$ y complete el rectángulo áureo $\square ACFE$ (véase, figura 3.6(b)).

Demostración. Sea $\square ABCD$ un cuadrado y M el punto medio de \overline{AB} entonces los lados \overline{MB} y \overline{BC} forman un triángulo rectángulo (véase, figura 3.6 (a)) entonces aplicando el teorema de pitágoras

$$(MC)^2 = (MB)^2 + (BC)^2. \quad (3.13)$$

Como $MB = \frac{AB}{2}$ y $CB = AB$ se reemplaza en la ecuación 3.13 se deduce,

$$(MC)^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (AB)^2 \quad (3.14)$$

$$= \left(\frac{5}{4}AB\right)^2 \quad (3.15)$$

luego despejamos la ecuación 3.16 y se obtiene

$$MC = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}AB. \quad (3.16)$$

Por construcción se tiene que $MC = ME$ entonces el lado del rectángulo se tiene:

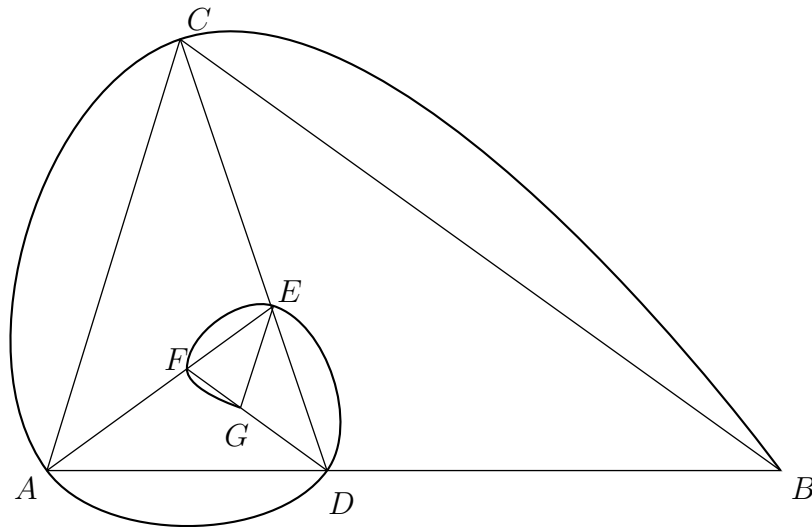
$$\begin{aligned}
 AE &= AM + ME \\
 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) AB \\
 &= \phi AB
 \end{aligned}$$

□

3.3. Triángulo Áureo

Un triángulo es áureo cuando la razón entre la hipotenusa y uno de sus catetos es igual a ϕ , con los triángulos áureos se forman figuras geométricas como los polígonos regulares: pentágono y decágono, también, poliedros; por ejemplo: La espiral logarítmica que se obtiene a partir de triángulos áureos, que tienen la propiedad de dividirse iteradamente en triángulos áureos.

Figura 3.7: Espiral



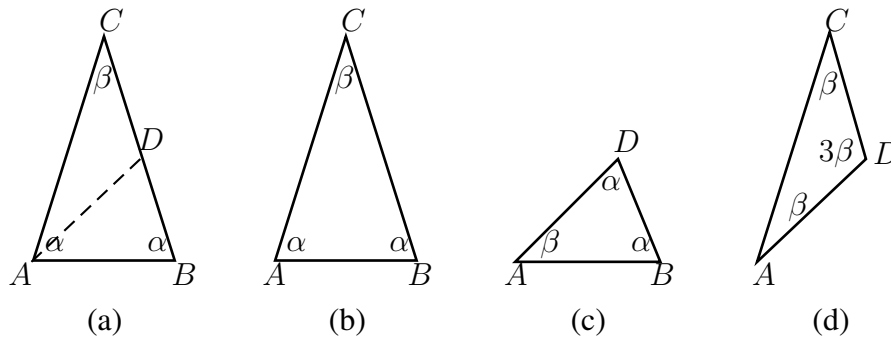
Tome el triángulo áureo $\triangle ABC$ y trace la bisectriz \overline{CD} donde queda dividido en los triángulos áureos $\triangle ACD$ y $\triangle DCB$. Repitiendo $n - veces$ el anterior procedimiento con el triángulo áureo que sea semejante al triángulo inicial y finalmente trace una curva que encierre a los triángulos áureos semejantes al inicial (véase, figura 3.7).

dodecaedro y otras figuras.

Teorema 3.2. *La relación que existe entre uno de los ángulos α de la base con el otro lado β de un triángulo isósceles esta dada por el número de oro. Si α es igual a 2β o α' es igual a 3β .*

El teorema consta de dos parte donde se tiene en cuenta la

Figura 3.8: Triángulo áureo



Demostración. Se presenta dos casos: (i) Si $\alpha = 2\beta$ y el triángulo $\triangle ABC$ es isósceles donde se traza la bisectriz en uno de los ángulos de la base como se muestra en la figura 3.8 por lo tanto aplicamos el postulado 2.1 se tiene que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle BDA$ son semejantes por consiguiente, el segmento \overline{CA} es al segmento \overline{AB} como \overline{AB} es al segmento \overline{BD} además, los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ADC$ son isósceles como se muestra en la figura 3.8(c)(d) entonces los segmentos \overline{AB} , \overline{AD} y \overline{CD} son congruentes entonces el segmento \overline{CB} es al segmento \overline{CD} como \overline{CD} es al segmento \overline{DB} luego por teorema 3.1. la relación que existe entre la base con otro de sus lados en un triángulo isósceles está dada por el número de oro.

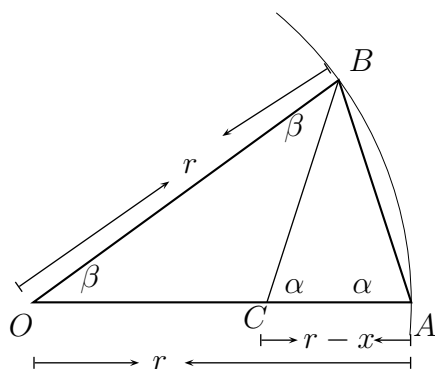
(ii) Si $\alpha' = 3\beta$ y el triángulo $\triangle ADC$ es isósceles (véase, figura 3.8(d)) entonces por la parte (i) se tiene que el segmento \overline{AC} es congruente con el segmento \overline{BC} y el segmento \overline{AD} es congruente con el segmento \overline{AB} luego la relación entre los segmento \overline{AC} y \overline{AD} está dada por el número de oro. \square

3.3.1. El decágono.

Para construir el decágono es necesario conocer el radio de la circunferencia y la división en media y extrema razón del radio que es igual al lado del decágono.

Proposición 3.4. *El lado del decágono regular inscrito en una circunferencia es igual al segmento áureo del radio.*

Figura 3.9: Decágono

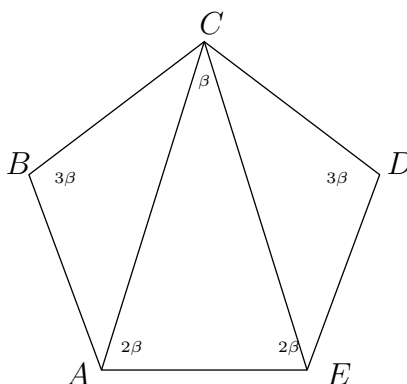


Demostración. Dado un decágono inscrito en una circunferencia con centro en O y radio r , donde los radios \overline{OA} y \overline{OB} forman el triángulo isósceles $\triangle OAB$, además, se traza la bisectriz \overline{BC} como se muestra en la figura 3.9 donde se forman los triángulos isósceles $\triangle BCO$ Y $\triangle BCA$ entonces por el teorema 3.2 la relación que existe entre el radio con el lado del decágono está dada por el número de oro. \square

3.3.2. El pentágono.

El pentágono incluye varios figuras notables que se usaron ampliamente en algunas obras de arte, como la taza dorada conocida por los escultores antiguos y por los artesanos comerciales *dorados*.

Figura 3.10: El pentágono



En la figura anterior podemos ver el modelo geométrico de un pentágono, que esta formado por triángulos áureo, este hecho relaciona el número de oro con este polígono.

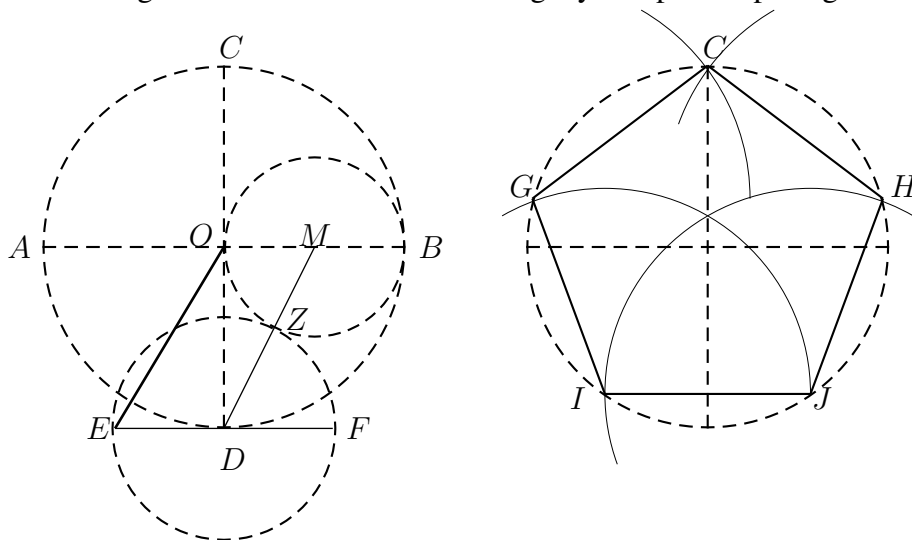
Proposición 3.5. *El lado del pentágono regular inscrito en un circunferencia es igual a la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el lado del radio y el lado del decágono inscrito en dicha circunferencia.*

La demostración de esta proposición la encuentra en ([2], págs. 180-181)

Proposición 3.6. *Para inscribir un pentágono regular en una circunferencia dada de centro O y radio \overline{OB} , se procede de la siguiente manera:*

1. *Trace una circunferencia con radio OB y los diámetros perpendiculares \overline{AB} y \overline{CD} .*
2. *Marque el punto medio M del radio OB .*
3. *Trace el segmento \overline{MD} y una circunferencia con radio $\frac{OB}{2}$ con centro en M .*
4. *Halle el punto de intersección Z del segmento \overline{MD} y la circunferencia que acaba de trazar.*
5. *Haga una circunferencia con centro en D y radio DZ , dibuje el diámetro \overline{EF} que es paralelo al segmento \overline{AB} .*
6. *Trace el segmento \overline{OE} .*
7. *Tome el compás con apertura \overline{OE} cortando la circunferencia de radio OB hasta dividirla en cinco partes iguales como se muestra en la figura 3.11.*

Figura 3.11: Construcción con regla y compás del pentágono



Demostración. Dada la circunferencia de radio OB , se divide el radio \overline{OD} en extrema y media razón según la proposición 3.1 de donde se obtiene el triángulo $\triangle ODE$ como se muestra en la figura 3.11, entonces por el teorema de Pitágoras hallamos el segmento \overline{OE} es decir,

$$(\overline{OE})^2 = (\overline{OD})^2 + (\overline{ED})^2. \quad (3.17)$$

lados del pentágono regular los triángulos isósceles $\triangle BCD$ y $\triangle CDE$ y de acuerdo con la proposición 2.2 tenemos que son semejantes. De lo anterior se deduce que los ángulos $\angle DBC$, $\angle CDB$, $\angle ECD$, $\angle DEC$ son congruentes y por la proposición 2.5, los ángulos $\angle EWD \cong \angle BWC$ son congruentes, entonces por la proposición 2.2 los triángulos $\triangle EWD$ y $\triangle BWC$ son isósceles semejantes, luego

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CD}{DW}$$

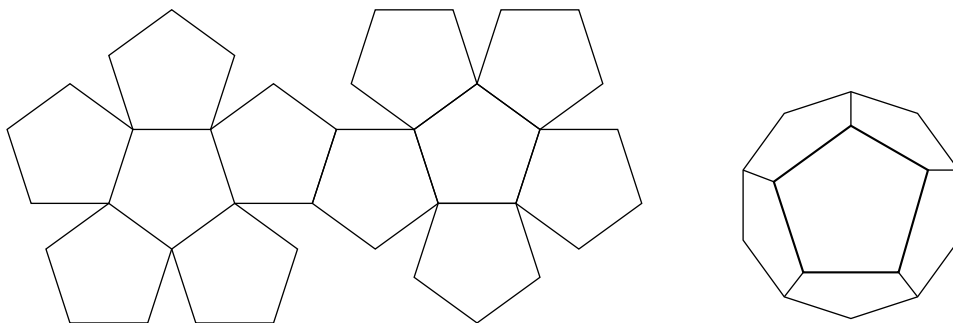
y por propiedad transitiva se tiene que la medida de los segmentos BC, CB, BW, DE, EW, DC son iguales, por lo tanto,

$$\frac{DB}{WB} = \frac{WB}{DW}$$

así la diagonal \overline{BD} del pentágono queda cortada en extrema y media razón por el punto W . \square

No se sabe en qué época se conocieron los cinco poliedros regulares convexos (cubo, tetraedro, octaedro, icosaedro y dodecaedro), que también son conocidos como *sólidos platónicos*. Para nuestro interés se nombrará las características del dodecaedro, ya que tiene una estrecha relación con nuestro objeto de estudio.

Figura 3.13: Dodecaedro



El *dodecaedro* está formado por dos casquetes iguales; cada uno de ellos está formado por un pentágono bordeado de pentágonos como se muestra en la figura 3.13 además, tiene treinta aristas, veinte vértices y doce caras pentagonales que relacionan al dodecaedro con el número de oro.

Capítulo 4

OTRAS IMPLICACIONES MATEMÁTICAS

Este capítulo trata la relación que existe entre la sucesión de Fibonacci y el número de oro; además se presenta una versión del principio de generalización de la sección áurea. Suponemos que el lector ya está familiarizado con el concepto de límite y sucesión ¹ tal como es introducido en el Cálculo elemental.

4.1. Relación de ϕ con la sucesión de Fibonacci

Una de las propiedades que tiene el número de oro es expresar las **potencias** mediante sumas de potencias de ϕ . Para comprobar este hecho se parte de la siguiente ecuación

$$\frac{1}{\phi} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (4.1)$$

sumando 1 a la ecuación 4.1,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi} + 1 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + 1 \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ &= \phi. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Haciendo operaciones en la ecuación 4.2

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0. \quad (4.3)$$

De aquí resulta

$$\phi^2 = 1 + \phi. \quad (4.4)$$

¹Una sucesión es una familia cualquiera cuyo dominio es un subconjunto de los números naturales. En consecuencia, hablando de funciones reales una sucesión será una función, ([12], pág 211).

Ahora se halla ϕ^3 y se expresa como $\phi^3 = \phi\phi^2$ donde se reemplaza la ecuación 4.4 en la anterior ecuación así,

$$\begin{aligned}\phi^3 &= \phi(1 + \phi) \\ &= \phi + \phi^2 \\ &= \phi + 1 + \phi\end{aligned}$$

es decir,

$$\phi^3 = 1 + 2\phi.$$

De la misma manera se encuentran otras potencias ϕ^n donde $n \in \mathbb{N}$. Así pues,

$$\begin{aligned}\phi^0 &= 1 \\ \phi^1 &= \phi \\ \phi^2 &= \phi^0 + \phi^1 = 1 + \phi \\ \phi^3 &= \phi^1 + \phi^2 = 1 + 2\phi \\ \phi^4 &= \phi^2 + \phi^3 = 2 + 3\phi \\ \phi^5 &= \phi^3 + \phi^4 = 3 + 5\phi \\ \phi^6 &= \phi^4 + \phi^5 = 5 + 8\phi \\ &\vdots \\ \phi^n &= \phi^{n-1} + \phi^{n-2}\end{aligned}$$

También se pueden expresar las **potencias** de ϕ por medio del inverso del número de oro, para ello se parte de la ecuación 4.3 de donde se deduce

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \phi^{-1}, \quad (4.5)$$

como ya se dijo $\phi^2 = 1 + \phi$, en consecuencia $\phi^2 = 1 + 1 + \phi^{-1} = 2 + \phi^{-1}$, con $n > 2$ similarmente se encuentra:

$$\begin{aligned}\phi^0 &= 1 \\ \phi^1 &= 1 + \phi^{-1} \\ \phi^2 &= 2 + \phi^{-1} \\ \phi^3 &= 3 + 2\phi^{-1} \\ \phi^4 &= 5 + 3\phi^{-1} \\ \phi^5 &= 8 + 5\phi^{-1} \\ \phi^6 &= 13 + 8\phi^{-1} \\ &\vdots \\ \phi^n &= \phi^{n-1} + \phi^{n-2}\end{aligned}$$

Basta con observar los términos que va presentando cada potencia de ϕ correspondientes a uno de los términos de la sucesión que a continuación se define.

Definición 4.1. La sucesión de Fibonacci $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está definida recursivamente de la siguiente manera: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, y para todo $n \geq 3$, $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$. Más precisamente, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots)$.

La **sucesión de Fibonacci** es aquella donde cada número es el resultado de sumar los dos que lo preceden. Está sucesión fue llamada así en honor del italiano *Leonardo de Piza* por el teórico francés *Eduard Lucas*.

De la definición anterior y las potencias del número de oro se da la siguiente proposición.

Proposición 4.1. Los términos f_n de la sucesión de Fibonacci satisfacen las desigualdades $\forall n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$

$$\phi^{n-2} \leq f_n \leq \phi^{n-1} \quad (4.6)$$

Demostración. La demostración se efectúa haciendo uso del principio de inducción matemática.

Se verifica para $n = 1$ que corresponde a $\phi^{-1} \leq f_1 = 1 \leq 1$ y para $n = 2$ se da $1 \leq f_2 = 1 \leq \phi$. Supongamos que se cumple para $n = k$, de donde se deduce

$$\phi^{k-2} \leq f_k \leq \phi^{k-1}$$

y se demuestra para $n = k + 1$ siendo

$$\phi^{k-1} \leq f_{k+1} \leq \phi^k.$$

Partiendo de la hipótesis se tiene, $f_k \leq \phi^{k-1}$ ahora se le suma $f_{k-1} \leq \phi^{k-2}$ así pues,

$$f_k + f_{k-1} \leq \phi^{k-1} + \phi^{k-2} = \phi^k,$$

es decir, $f_{k+1} \leq \phi^k$. Análogamente, $f_k \geq \phi^{k-2}$, sumando $f_{k-1} \geq \phi^{k-3}$ se tiene

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \geq \phi^{k-2} + \phi^{k-3} = \phi^{k-1}$$

□

A la relación recursiva $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ se le asocia la ecuación 4.3. Para hallar la **fórmula explícita** de la sucesión de Fibonacci se tiene las condiciones iniciales $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ y se comienza por resolver la ecuación 4.3 donde las soluciones son $\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Se puede ver que cualquier sucesión que cumpla $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ es de la forma

$$f_n = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad \text{donde } n \in \mathbb{N}$$

para satisfacer las condiciones iniciales de la sucesión de Fibonacci debe tenerse

$$f_1 = 1 = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \quad \text{y} \quad f_2 = 1 = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2.$$

Solucionando el sistema se obtiene $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, por lo cual, una fórmula explícita para la sucesión de Fibonacci es:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad (4.7)$$

de igual forma se puede escribir $f_n = \frac{\phi^n - \phi^{-n}}{\sqrt{5}}$.

Es sorprendente que f_n es una sucesión de los enteros, la cual se expresa mediante combinaciones algebraicas del número irracional $\sqrt{5}$, ϕ y su inverso. Además la ecuación 4.7 se le conoce como **fórmula de Binet**, en honor del matemático que la probó por primera vez.

Proposición 4.2. *El número de Fibonacci f_n es el entero más cercano al n -ésimo término de la progresión $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$ donde el primer término es $\frac{\phi}{\sqrt{5}}$ y cuya razón es ϕ .*

Demostración. Obviamente, basta demostrar que el valor absoluto de la diferencia de f_n y $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$ siempre es menor que $\frac{1}{2}$. Pero

$$\left| f_n - \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{\phi^n - \phi^{-n}}{\sqrt{5}} - \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \right| = \frac{\phi^{-n}}{\sqrt{5}}$$

puesto que $|\phi^{-1}| = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 1$, se tiene $\phi^{-n} < 1$, lo cual significa que para n

arbitrario $\frac{\phi^{-n}}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$, puesto que $\sqrt{5} > 2$. □

A partir del cociente de los términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci se construye la siguiente sucesión.

Definición 4.2. *Definimos la sucesión $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como $\Gamma_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

$$\Gamma = \left(1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \dots \right)$$

Ahora se calcula el límite de Γ_n teniendo en cuenta que f_n es el entero más próximo a $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$; esto significa que $f_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \theta_n$, donde $|\theta_n| < \frac{1}{2}$ para todo n .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \theta_n}{\frac{\phi^{n-1}}{\sqrt{5}} + \theta_{n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi^n + \theta_n \sqrt{5}}{\phi^{n-1} + \theta_{n-1} \sqrt{5}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\theta_n \sqrt{5}}{\phi^n}}{\frac{1}{\phi} + \frac{\theta_{n-1} \sqrt{5}}{\phi^n}} \end{aligned}$$

Pero $\theta_n \sqrt{5}$ está acotado (su valor absoluto es menor que 2), mientras que ϕ^n tiende a infinito ya que $\phi > 1$, por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\theta_n \sqrt{5}}{\phi^n} \right) = 0,$$

por las mismas razones

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\theta_{n-1} \sqrt{5}}{\phi^n} \right) = 0$$

y se obtiene el $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \phi$

A continuación se calcula de manera más intuitiva el límite de la sucesión Φ_n , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{\phi^n}{\phi^{n-1}} = \phi, \quad (4.8)$$

además, de la proposición 4.2 se tiene

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}. \quad (4.9)$$

Reemplazando la ecuación 4.9 en la ecuación 4.8 se obtiene:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_n}{f_{n-1}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_{n-1} + f_{n-2}}{f_{n-1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} \right)\end{aligned}\tag{4.10}$$

Aplicando la propiedades de límite se encuentra:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_n}{f_{n-1}} \right) &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} \right) \\ &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}} \right)}\end{aligned}\tag{4.11}$$

$$= 1 + \frac{1}{x} = x,\tag{4.12}$$

de donde se deduce de la ecuación 4.3, que el

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \phi$$

Las **fracciones continuas** se usan para obtener aproximaciones racionales de los números irracionales.

Definición 4.3. Una fracción continua es un número de la forma:

$$x = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}}}\quad \text{donde los } b_i \text{ son números enteros.}\tag{4.13}$$

Realmente x es el límite de $\left(b_0, b_0 + \frac{1}{b_1}, b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2}}, \dots \right)$

Para representar el número de oro mediante fracciones, partimos de la siguiente ecuación 4.5

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}.$$

Para obtener la forma general basta aplicar reiteradamente la ecuación 4.5,

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}\tag{4.14}$$

De la ecuación anterior se obtiene:

$$1, \quad 1 + 1, \quad 1 + \frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{2}{3}, \quad 1 + \frac{3}{5} \dots$$

La característica de representar el número de oro mediante fracciones continuas es que tiene n denominadores parciales iguales a 1 y la fracción es igual a $\frac{f_n}{f_{n-1}}$. La demostración de esta afirmación se hace utilizando el principio de inducción ([24], págs. 47-48).

4.1.1. Representación de ϕ mediante la serie geométrica

Recordando que la suma de una serie geométrica es igual a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \quad \text{si } |r| < 1 \quad (4.15)$$

Esta fórmula se puede aplicar a la suma de las potencias de ϕ^{-1} que fueron deducidas en la sección 4.1, ya que

$$|\phi^{-1}| = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1.$$

Aplicando la fórmula de serie geométrica se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\phi}\right) \left(\frac{1}{\phi}\right)^n = \frac{\frac{1}{\phi}}{1 - \frac{1}{\phi}} = \frac{1}{\phi - 1} = \frac{1}{\phi^{-1}} \quad (4.16)$$

De donde se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\phi^n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

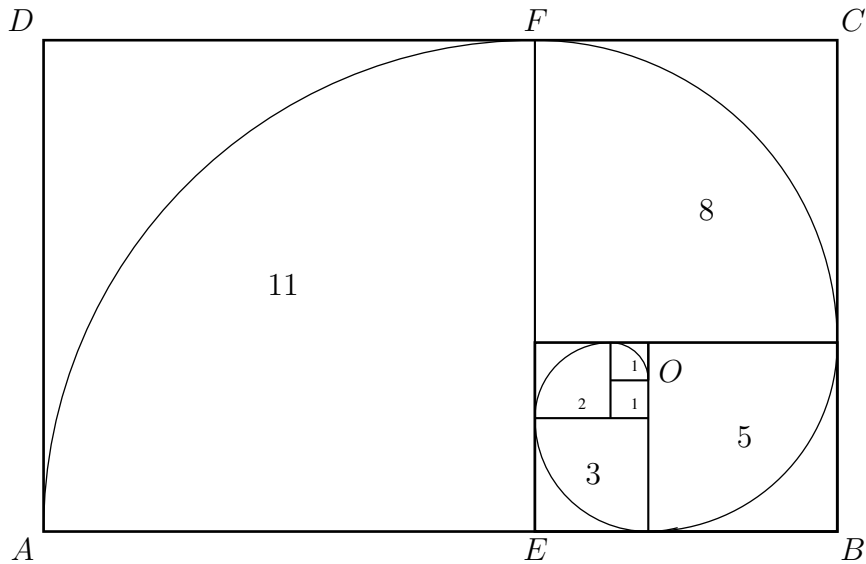
Lo interesante de la **espiral áurea** es que tiene una íntima relación con la sucesión de Fibonacci, ya que los rectángulos áureos encajados tiene de lado uno de los términos de esta sucesión.

A continuación se muestra la construcción de esta espiral de adentro hacia afuera:

1. Construya un rectángulo áureo a partir de unir dos cuadrados de unidad uno y un cuadrado de unidad dos.
2. Una el rectángulo áureo con el cuadrado de unidad 3 formando un nuevo rectángulo áureo.
3. Haga el mismo proceso una los cuadrados cuya longitud es la suma de los dos términos consecutivos de los anteriores y así formar los n -rectángulos áureos encajados.

4. Finalmente trace un cuarto de circunferencia sobre cada cuadrado formando la espiral.

A medida de que el rectángulo áureo se hace más grande el cociente entre el lado mayor y el menor se aproxima al número de oro.



Ahora se muestra la construcción de la espiral áurea de afuera hacia adentro:

1. Dibuje un rectángulo áureo donde los lados correspondientes son los términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci.
2. Trace el cuadrado mayor correspondiente al rectángulo dado.
3. Con el rectángulo que aparece dibuje el cuadrado mayor.
4. Haga este procedimiento reiteradamente hasta encontrar el cuadrado de unidad uno.
5. Finalmente trace un cuarto de circunferencia sobre cada cuadrado formando la espiral.

4.2. Generalización del principio de la sección áurea

Uno de los estudios sobre el principio de la generalización de la sección áurea fue realizado por Alexey Stakhov². Según el autor esta teoría matemática permite realizar estudios en las ciencias Matemáticas y la ingeniería [20].

Generalización de la sección áurea

En la generalización de la sección áurea para un número entero no negativo p existe una notable relación con el problema de dividir un segmento en media y extrema razón (sección áurea) que fue tratado en el capítulo 3. Dividamos el segmento \overline{AB} en el punto C como se hace en la figura 4.1, obteniendo la siguiente relación.

$$\frac{CB}{AC} = \frac{AB}{CB}$$

Para generalizar podemos elevar a la p la razón de la parte derecha de la ecuación anterior,

$$\frac{CB}{AC} = \left(\frac{AB}{CB} \right)^p, \quad (4.17)$$

como $AC = AB - CB$, se reemplaza en la ecuación 4.17 y multiplicamos tanto el numerador como el denominador de la razón del lado izquierdo por $\frac{1}{CB}$, de donde se obtiene:

$$\frac{1}{\frac{AB}{CB} - 1} = \left(\frac{AB}{CB} \right)^p. \quad (4.18)$$

Si $x = \frac{AB}{CB}$ entonces $x_p = \frac{AB}{CB}$, de donde se obtiene,

$$\frac{1}{x - 1} = x^p, \quad (4.19)$$

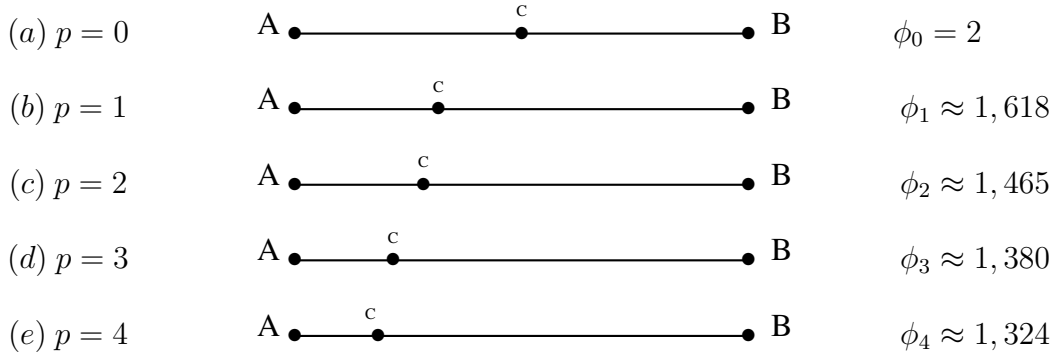
por lo tanto, es una familia de ecuaciones algebraicas

$$x^{p+1} = x^p + 1. \quad (4.20)$$

Sea ϕ_p las raíces positivas de la familia de ecuaciones 4.20, esta familia de ecuaciones describe un número infinito de divisiones del segmento \overline{AB} donde varía las divisiones, generando para cada p su propia subdivisión como lo muestra la siguiente figura.

²Alexey Stakhov doctor en ciencias y ciencias de la computación y profesor del Departamento de Matemáticas de la Vinnitsa State Pedagogical University en Ukraine.

Figura 4.1: Las p-secciones áureas



Para el caso $p = 0$ se obtiene la ecuación $x^{0+1} = x^0 + 1$ donde la raíz $\phi_0 = 2$, para el caso $p = 1$ se da $\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (razón áurea), por lo cual el proceso de seguir haciendo subdivisiones de esta forma se llama *generalización de la sección áurea* de los p -segmentos áureos y las raíces positivas ϕ_p de la familia de ecuaciones algebraica 4.20 son llamadas la generalización de la proporciones áureas o p -proporciones áureas.

A partir de esta familia de ecuaciones algebraicas se muestra la identidad fundamental que relaciona las p -proporciones áureas con las ϕ_p raíces. Para ello multiplicamos la ecuación 4.20 por x^{n-p-1} y se hace $x = \phi_p$ obteniendo:

$$\phi_p^n = \phi_p^{n-1} + \phi_p^{n-p-1} = \phi_p \times \phi_p^{n-1} \quad \text{donde } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.21)$$

Nótese que para el caso $p = 0$, $\phi_0 = 2$ donde la ecuación 4.21 se reduce a $2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1}$ y para $p = 1$

$$\phi_n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}.$$

Ahora se utiliza los términos de la ecuación 4.21 y se divide por ϕ_p^n la siguiente ecuación y se obtiene como resultado de está división:

$$1 = \phi_p^0 = \phi_p^{-1} + \phi_p^{-p-1} \quad (4.22)$$

Usando la ecuaciones 4.21 y la ecuación 4.22 construimos el siguiente modelo según las p -proporciones áureas:

De una forma más general se obtiene la siguiente ecuación:

$$1 = \phi_p^{-1} + \phi_p^{-(p+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_p^{-(i-1)(p+1)-1} \quad (4.23)$$

Cuando ϕ_p son las p -proporciones, con $p \in (0, 1, 2, 3, \dots)$. Este es *el principio general de la sección áurea*.

$$1 = \phi_p^0 = \phi_p^{-1} + \phi_p^{-(p+1)}$$

$$\phi_p^{-(p+1)} = \phi_p^{-(p+1)-1} + \phi_p^{-2(p+1)}$$

$$\phi_p^{-2(p+1)} = \phi_p^{-2(p+1)-1} + \phi_p^{-3(p+1)}$$

$$1 = \phi_p^0 = \phi_p^{-1} + \phi_p^{-(p+1)} + \phi_p^{-(p+1)-1} + \phi_p^{-2(p+1)} + \phi_p^{-2(p+1)-1} + \phi_p^{-3(p+1)}$$

A continuación se muestran algunos valores muy cercanos a la raíz en la siguiente tabla

Generalización del principio de la sección áurea		
Ecuación	Raíces	$\frac{f_p(n)}{f_p(n-1)}$, donde $p \in \mathbb{N}$
$x^2 = x + 1$	1.618	1, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{13}{8}$, $\frac{21}{13}$, ...
$x^3 = x^2 + 1$	1.465	1, 1, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{13}{9}$, $\frac{19}{13}$, $\frac{28}{19}$, $\frac{41}{28}$, $\frac{60}{41}$, ...
$x^4 = x^3 + 1$	1.380	1, 1, 1, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{10}{7}$, $\frac{14}{10}$, $\frac{19}{14}$, ...
$x^5 = x^4 + 1$	1.324	1, 1, 1, 1, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{15}{11}$, ...

De la ecuación 4.20 se obtiene $x^3 = x^2 + 1$ cuando $p = 2$; se hace el cálculo de la raíz a partir de la siguiente identidad

$$f_2(n) = f_2(n-1) + f_2(n-3),$$

tal que, $f_2(0) = 0$, $f_2(1) = 1$ y $f_2(2) = 1$. Utilizando el resultado de la identidad se halla los cocientes de los términos consecutivos encontrando valores tan próximo como se quiera a la raíz de la ecuación $x^3 - x^2 - 1$ como se muestra en la tabla anterior. Para mostrar que esta sucesión tiende a la raíz se tiene,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_2(n)}{f_2(n-1)} \right),$$

ahora,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_2(n)}{f_2(n-1)} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_2(n-1) + f_2(n-3)}{f_2(n-1)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \left(\frac{f_2(n-3)}{f_2(n-1)} \right) \\ &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_2(n-3) f_2(n-2)}{f_2(n-1) f_2(n-2)} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

Para hallar la raíz de cada ecuación se sigue el mismo procedimiento.

Capítulo 5

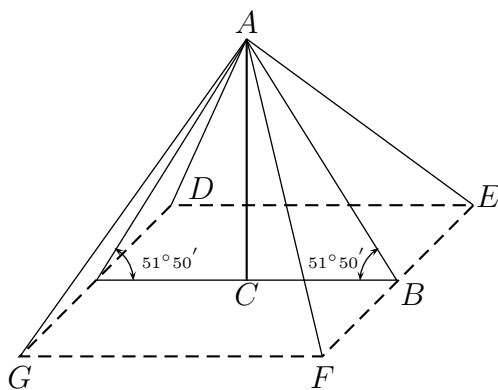
APLICACIONES

La sección áurea es considerada como la proporción más armoniosa para la sensibilidad humana. Esta relación la encontramos entre las diferentes medidas de la cara, las ramas de los árboles, los cristales, las conchas marinas, el huevo y otros objetos. El objetivo de este capítulo es presentar algunas aplicaciones del número de oro.

5.1. Las pirámides de Egipto

Las pirámides de Gizeh son una de las siete maravillas del mundo construida sobre la meseta rocosa de *Gizehen Egipto* , durante la IV dinastía (2680-2544 A-C). Entre las pirámides egipcias es de interés principal para nuestro estudio la pirámide del faraón *Khufu* o *pirámide de Keops* ya que tiene relación con la sección áurea.

Figura 5.1: Pirámide de Egipto



En 1837 el coronel ingles *G. Vaise* midió el ángulo de inclinación de las caras de la pirámide que tenia el valor de $\alpha = 51^{\circ}51'$. La mayoría de los investigadores reconocen este valor hoy en día. El valor indicado del ángulo de inclinación corresponde a la tangente que es igual a 1,27306. Este valor corresponde a la altura de la pirámide *AC* y la mitad de la base

CB , es decir,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{H}{\frac{L}{2}} = \frac{2H}{L}$$

Si tomamos la raíz cuadrada sobre la sección áurea

$$\sqrt{\Phi} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}},$$

se da el siguiente resultado $\sqrt{\Phi} \approx 1,272$ comparando este valor con el valor de la $\tan \alpha \approx 1,27306$, podemos ver que estos valores están relacionados, si tomamos el ángulo $\alpha = 51^\circ 51'$. El radio $\frac{AC}{CB} = \sqrt{\Phi} \approx 1,272$, aparece en la base del triángulo ACB de la pirámide de Khufu. El nuevo triángulo $\triangle ACB$ con los lados: $CB = 1$; $AC = \sqrt{\Phi}$. De acuerdo con el teorema de Pitágoras se calcula la altura de AB de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{CB^2 + AC^2} \\ &= \sqrt{1 + \Phi} \\ &= \sqrt{\Phi^2} = \Phi. \end{aligned} \tag{5.1}$$

La altura de la pirámide es:

$$H = \frac{L}{2} \times \sqrt{\Phi} = 148,28 \text{ metros}$$

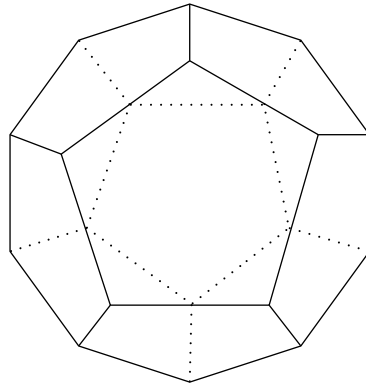
Como la altura AB del triángulo $\triangle AEF$ es igual a Φ , luego el área de cada cara lateral es igual a S_{Δ} es equivalente Φ , entonces el área común de las cuatro caras laterales de la pirámide es igual a 4Φ y la razón de la suma de las áreas externas del área de la base de la pirámide es igual a la Proporción áurea ([21], págs. 497-498).

5.2. El calendario egipcio

El calendario solar egipcio fue elaborado aproximadamente cuatro milenios A.C. constaba de 365 días, el año era dividido en 12 meses con cada uno de 30 días; al final del año las cinco celebraciones no hicieron parte de los días del mes, se agregaban.

Así, el año civil egipcio, tenía la siguiente estructura: $365 = (12 \times 30) + 5$, además, un día estaba dividido en 24 horas, pero estas subdivisiones correspondían al sistema egipcio de medida de tiempo, donde sus unidades eran la hora, el minuto y el segundo, es decir una hora es igual a 60 minutos y un minuto a 60 segundos. ¿Por qué los egipcios seleccionaron este calendario y éste sistema de medida de tiempo? Para contestar esta pregunta nos debemos referir al *dodecaedro* (figura 5.2) que está basado en la *sección áurea*, ya que el dodecaedro tiene 12 caras, 30 bordes, y tiene ángulos de 60° en la superficie plana. comparando los números con los ciclos del sistema solar que constan de tres ciclos básicos que son determinados por el movimiento de la Tierra, Saturno y Júpiter

Figura 5.2: Dodecaedro



alrededor del Sol, el ciclo de Júpiter es de 12 años, el de Saturno es de 30 años y el ciclo del sistema solar es de 60 años.

Debido a esta correlación entre las características numéricas del dodecaedro y los procesos cíclicos del sistema solar los antiguos científicos decidieron escoger al dodecaedro como la principal figura del universo, que simbolizó la armonía del universo y siguiendo estrictamente sus características numéricas los egipcios construyeron a partir del dodecaedro su sistema de tiempo, el calendario y la mediación de ángulos. Estos sistemas eran completamente coordinados con su teoría de la armonía basada en la sección áurea por que esta intrínsecamente en el dodecaedro ([21], págs. 498-499).

5.3. El Partenón

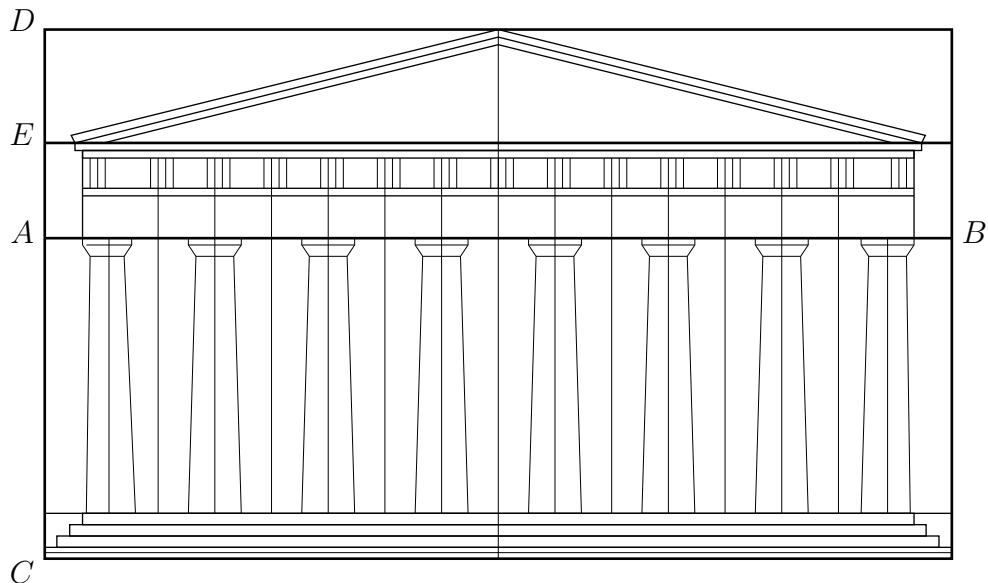
En los orígenes de la Acrópolis de Atenas se había construido el *Paternón* o casa de la virgen (Parthenos) por los arquitectos *Iktino* y *Kalícrátides*, que fue destruido por los persas. Al regresar los griegos a Atenas bajo la orden de Pericles el templo fue reconstruido, convirtiéndose en el mayor de los templos griegos, dedicado a la diosa Atenea, realizado por los arquitectos *Ictinus* y *Callicrates* y el escultor *Fidias*.

Este santuario se caracterizó por ser un templo dórico, de ocho columnas en las fachadas principales y diecisiete en las laterales. Las columnas, de casi once metros de altura, ligeramente inclinadas, los frisos de las fachadas tenían líneas que no eran horizontales, sino curvas; todas las líneas del Paternón tenían inflexiones y desviaciones premeditadas para contrarrestar efectos de óptica y de perspectiva. En el año de 1687, los venecianos provocaron una gran explosión en el Partenón, desplomando las fachadas laterales y desgarraron las estatuas que aún se conservaban.

Durante los años 1801 al 1803, lord *Elgin*, arrancó las esculturas que quedaban en las fachadas que fueron compradas en 1816 por la nación inglesa para el museo Británico,

donde se encuentran hoy en día.

Figura 5.3: El Partenón



En el siglo XIX, arquitectos y arqueólogos trataron de encontrar respuestas a las hermosas proporciones, para determinar las reglas y parámetros que seguía su construcción. Pero fue *Zeising* que descubrió la presencia de la proporción áurea en el frontispicio del templo.

$$\frac{AC}{AD} = \frac{ED}{AE},$$

Es decir, que la fachada dividida en dos segmentos, el mayor es al menor, como el mayor es al todo ([6],pág. 34). Basándonos el análisis realizado por *Jay Hambidge* se muestra la contracción geométrica del frontón del Partenón.

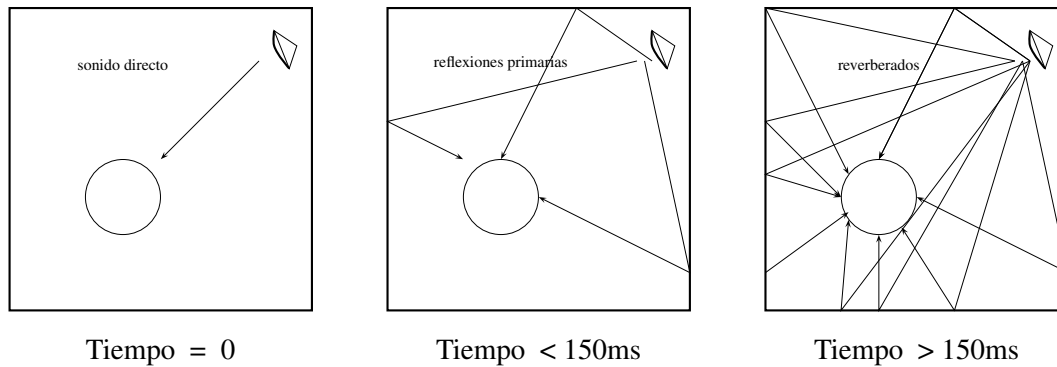
5.4. El diseño de espacios sonoros estereofónicos.

En Santander, España se realizó entre el 5 y 7 de junio del año 2002, el XIV Congreso Internacional de ingeniería gráfica. Un grupo de ingenieros de la universidad de Oviedo presentaron su trabajo titulado: *La importancia de la sección áurea en el diseño de espacios sonoros estereofónicos*. A continuación comentamos este trabajo:

Los principales problemas existentes en los ambientes estereofónicos domésticos es minimizar la influencia de los sonidos reflejados y reverberados diferenciándolos de los sonidos directos procedentes del instrumento musical o equipo emisor. El conflicto, ocurre cuando escuchamos un sonido, puesto que en realidad estamos oyendo algo más que las ondas sonoras que se desplazan inicialmente desde la fuente o instrumento, sonido directo,

también percibimos la reflexión sonora de una pared a otra como resultado del choque de las ondas con las diferentes paredes de la sala, ondas que vuelven o se reflejan hacia la fuente y hacia el oyente. El fenómeno se complica cada vez más, como plantea la tercera imagen de la figura 5.4, debido a que se continúan oyéndose aún después de que haya cesado el sonido directo.

Figura 5.4: Secuencia del sonido en un recinto cerrado



El análisis del problema nos encamina a meditar sobre los siguientes aspectos:

1. El oyente debe ser capaz de diferenciar entre el sonido directo y el sonido reflejado, localizando espacialmente la fuente o el emisor del sonido.
2. La reducción del efecto de las primeras reflexiones, ya que los sonidos pueden llegar casi al mismo tiempo que el sonido directo.
3. No deben ignorar las reverberaciones.
4. El arquetipo de sala por el tiempo de reverberación, definido como el tiempo en segundos necesario para que la energía sonora disminuya 60 db.

Puesto que los sonidos no vibran a una sola frecuencia fundamental,

$$f_0 = \frac{V}{\lambda},$$

donde V es la velocidad de propagación del sonido $344,8 \frac{m}{s}$ y λ la longitud de onda; sino también a otras frecuencias múltiplos pares o impares de aquella denominadas armónicos. O sea, un tono musical consiste en un tono fundamental acompañado de una serie de armónicos que son múltiplos de la frecuencia fundamental.

El diseño óptimo para una sala de audición doméstica, a nivel geométrico debe reunir las estipulaciones siguientes:

1. La forma será ortoédrica.
2. Las tres dimensiones del ortoedro han de ser diferentes.
3. Estas tres dimensiones no deben ser números enteros, han de ser números irracionales.

Como las ondas estacionarias son movimientos ondulatorios estables que se caracterizan porque su número es entero y no fijo. Luego la longitud de onda no puede ser cualquiera y sólo puede cambiar de manera continua por saltos de un valor a otro.

En consecuencia hemos de alejarnos de la condición de número entero en el dimensionamiento de la sala para evitar situaciones de condiciones modales que aparecerán como fenómenos resonantes cuando las medidas de la sala coincidan con la longitud de onda λ o con un múltiplo de λ .

Por consiguiente, si se utilizan números irracionales, se elige a ϕ como el módulo pues, es un irracional por excelencia.

Además, el número ϕ permite a través de la sucesión de potencias $\phi^{-1}, \phi^0, \phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \phi^5 \dots$ agregar ondas progresivas, del tipo ϕ^{-1} y sus múltiplos, con la ventaja de que la serie de frecuencias relacionadas por potencias de ϕ es no lineal, propiedad que debemos estimar.

El diseño de sala ortoédrica tiene de alto $H = 2,55$ metros, entonces la longitud debe ser $L = \phi^2$, $H = 6,68$ m y anchura $W = \phi$, $H = 4,13$ m. El diseño áureo de salas de audición, además de la estética geométrica que aporta, mejora notablemente el carácter del sonido dependiente de la proporción de armónicos o sobretonos, lo que se conoce como timbre de la *reproducción sonora*.

CONCLUSIÓN

La sección áurea es un objeto matemático de gran importancia en la teoría de proporciones porque permite la construcción de figuras geométricas como el pentágono, el decágono, el dodecaedro entre otras. Además se encuentra implícitamente en la naturaleza, el arte, el calendario egipcio, en el diseño de espacios sonoros y en las diferentes ciencias. Actualmente se han conformado grupos de investigación como el “International Club of the Golden Section” el cual realiza, estudios avanzados sobre la sección áurea y sus aplicaciones en las matemáticas, las ciencias y las ingenierías. Su director es Alexey Stakhov doctor en Sciences in Computer Science. También encontramos aproximadamente 11.745.000 referencias en el Internet sin contar los artículos que se están publicando en revistas científicas y libros que van saliendo al mercado.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ÁLVAREZ J.M. & SUÁREZ J. *La Importancia de la Sección Áurea en el Diseño de Espacios Sonoros Estereofónicos*. En: Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica. Ingeggraf. Santander España: (2002). pp. 403-416.
- [2] BALDOR Aurelio. *Geometría plana y del espacio con una introducción a la trigonometría*, Bogotá Colombia: Editorial Cultural Colombiana LTDA. 1967. p. 423
- [3] BONELL Carmen. *La divina proporción: Las formas geométricas*, México: ediciones Alfaomega, 2003. p. 128
- [4] BOYER Carl B. *Historia de la matemática*, Madrid: Editorial Alianza S.A. 1992. p.808
- [5] CARDONA Arturo. *Geometría*, Medellín Colombia: Editorial Bedout S.A. 1974. p.326
- [6] CONSUEGRA David. *En busca del cuadrado*, Bogotá: Editorial Univesidad Nacional de Colombia. (1992), p. 188
- [7] EUCLIDES de Alejandria. *Los Elementos de Euclides* En PUERTAS, Castaños Maria Luisa. Traducción y notas, España: Editorial Gredos & Planeta Deagostini. (1976).
- [8] GINDIKIN S. & BENDOUKIDZE A. "Le nombre D'or". *Mathématiques*, venues d'ailleurs (febrero 1982), pp. 9-14.
- [9] GLIDDEN Peter L. *Beyond the Golden Ration: A Calculator-Based Investigation*, Mathematics Teacher 2 (2001), pp. 138-144
- [10] HOUZEL Christian. *¿Qué es un número?*, Mundo científico (1981), pp. 6-10.
- [11] LÓPEZ Samuel. *Fracciones continuas*, monografía de grado, Universidad Industrial de Santander, Escuela de Matemáticas, Bucaramanga, (2004)
- [12] MAYORGA Bernardo. *Libro de lecturas de Calculo*, Univercidad Industrial de Santander, (1996)

- [13] MEJIAS Antonio. & SIGALOTTI Leonardo. *The golden ratio in special relativity*, Chaos Solitons and Fractals 30 (2006) 521–524
- [14] MOSTERÍN Jesús. *Historia de filosofía: La filosofía griega prearistotélica, tomo III*, Alianza Editorial, Madrid España, (1984)
- [15] TURNBULL Herbert. *Los grandes matemáticos* En NEWMAN James R. Enciclopedia Sigma: El mundo de las matemáticas. Barcelona España: Wester ediciones & Grijalbo 4 edición (1979)
- [16] PACIOLI Luca. *La divina proporción*, Buenos Aires Argentina: Editorial Losada S.A. (1946), pp. 1-400.
- [17] PLATÓN. traducción y notas: Duran M. & Lisi Francisco. *Dialogos de Platón: Filebo, Timeo, Critas*, Planeta Deagostini, Editorial Gedos S.A., España (1998)
- [18] PERERO Mariano. *Historia e Historias de Matemáticas*, México: Grupo Editorial Iberoamérica, (1975), p. 345
- [19] SALVAT Juan. *Gran Enciclopedia del Saber Universitas: La Matemática*, Tomo 12, España: Editorial Salvat S.A. (1979)
- [20] STAKHOV Alexey. *The Generalized Principle of the Golden Section and its Applications in Mathematics, Science and Engineering*, Chaos Solitons & Fractals 26 (2005), pp. 263–289.
- [21] STAKHOV Alexey. *The golden section, secrets of the Egyptian civilization and harmony mathematics*, Chaos Solitons & Fractals 30 (2005), pp. 490–505.
- [22] STANLEY R. Clemens. *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*, Addison-Wesley Iberoamericana, (1994), p.600
- [23] THANANCHAI Leephakpreeda. *A fuzzy linguistic interpretation of the golden section*, Fuzzy Sets and Systems (2006)
- [24] VOROBYOV N. N. *Los números de Fibonacci*, México: Editorial Limusa, (1973), p. 69