

**ESTUDIO DEL MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS DE PRUEBA EN DISCOS
RELATIVISTAS DE MORGAN Y MORGAN INMERSOS EN HALOS**

ANGIE ALEJANDRA ARIZA FARFÁN

Autora

Trabajo de grado para optar por el título de física

GUILLERMO A. GONZÁLEZ VILLEGAS, Ph D.

Director

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2023

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres por haber alentado la continuación de mis estudios, por su comprensión en esos momentos en que los resultados académicos no eran los que yo esperaba, gracias por siempre mostrarme la confianza que tienen en mí. Les agradezco especialmente su respaldo cuando decidí cambiar mi rumbo académico para empezar a estudiar física. También quiero agradecer a mis tíos, Cecilia Farfán y Marcos Arévalo, por haberme hecho parte de su hogar durante mis años de estudio, el apoyo que me han dado forma parte importante de este éxito académico y profesional.

Especial agradecimiento a mi director de trabajo de grado, Guillermo González, por su apoyo, el tiempo y la disposición para guiarme durante este proceso académico. Asimismo, agradezco a mi segundo hogar, la sección de comedores UIS, gracias a don Jaime por darme la oportunidad de conocer y ayudar a todas esas hermosas mujeres que trabajan en el servicio de comedores, ellas también forman parte de este logro. De igual forma, quiero agradecer a todas las personas que tuve la oportunidad de conocer y me brindaron su amistad. Aunque con muchas de ellas hoy nos separen distancias de tiempo y espacio, siguen presentes en mi memoria y por siempre agradeceré su amistad.

En particular agradezco a una gran amiga que es mi hermana y de la que hoy me siento orgullosa por el camino que construye en mi alma máter, la Universidad Industrial de Santander. Finalmente, quiero agradecer a una persona muy especial que tuve la oportunidad de conocer tempranamente cuando inicié mis estudios universitarios. A Luis Castellanos, gracias por tu incondicional apoyo, por motivarme constantemente durante la realización de este trabajo de grado, por hacerme creer en mi capacidades, por animarme a alcanzar nuevas metas y gracias por tu amor.

Tabla de Contenido

Introducción	8
1. Discos relativistas de Morgan y Morgan con halo	12
1.1. Soluciones dentro del disco	16
1.2. Soluciones fuera del disco	18
2. Geodésicas temporales y nulas en el plano ecuatorial	20
2.1. Ecuación de las geodésicas	20
2.1.1. Ecuación de las geodésicas en discos de Morgan y Morgan con halo	22
2.2. Trayectorias radiales	24
2.2.1. Geodésicas nulas	25
2.2.2. Geodésicas temporales	28
2.3. Trayectorias no radiales	29
3. Órbitas en el plano ecuatorial	32
3.1. Órbitas circulares	33
3.2. Estabilidad de las órbitas circulares	37
3.3. Ecuación de órbita	41
4. Conclusiones	51
Referencias Bibliográficas	52

Lista de Figuras

- Figura 1. Potenciales efectivos para partículas de masa nula en los modelos $m = 1, 2, 3$, utilizando los parámetros $\tilde{M} = 30$ y $k = 20$. 35
- Figura 2. Potenciales efectivos para partículas masivas en los modelos $m = 1, 2, 3$, utilizando los parámetros $\tilde{M} = 30$ y $k = 20$. 36
- Figura 3. Momento angular en función del radio de las órbitas circulares para geodésicas temporales en los modelos $m = 1, 2, 3$. 40
- Figura 4. Órbitas para partículas de prueba masivas en potenciales efectivos con $\tilde{M} = 30$ y $k = 20$ para el modelo $m = 1$. Parte 1 45
- Figura 5. Órbitas para partículas de prueba masivas en potenciales efectivos con $\tilde{M} = 30$ y $k = 20$ para el modelo $m = 1$. Parte 2 46
- Figura 6. Órbitas para partículas de prueba masivas en potenciales efectivos con $\tilde{M} = 30$ y $k = 20$ para el modelo $m = 2$. Parte 1 47
- Figura 7. Órbitas para partículas de prueba masivas en potenciales efectivos con $\tilde{M} = 30$ y $k = 20$ para el modelo $m = 2$. Parte 2 48
- Figura 8. Órbitas para partículas de prueba masivas en potenciales efectivos con $\tilde{M} = 30$ y $k = 20$ para el modelo $m = 3$. Parte 1 49
- Figura 9. Órbitas para partículas de prueba masivas en potenciales efectivos con $\tilde{M} = 30$ y $k = 20$ para el modelo $m = 3$. Parte 2 50

Lista de Tablas

Tabla 1.	Soluciones analíticas de trayectorias radiales dentro del disco para partículas de masa nula.	26
Tabla 2.	Regiones estables, inestables y ROME en los modelos $m = 1, 2, 3$, utilizando los parámetros $\tilde{M} = 30$ y $k = 20$.	39

RESUMEN

TÍTULO:

ESTUDIO DEL MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS DE PRUEBA EN DISCOS RELATIVISTAS DE MORGAN Y MORGAN INMERSOS EN HALOS¹.

AUTORA:

Angie Alejandra Ariza Farfán²

PALABRAS CLAVE:

Simetría axial, Espacio-tiempo conformestático, discos relativistas, halo, geodésicas

DESCRIPCIÓN:

Se presenta un estudio del movimiento de partículas de prueba, temporales y nulas, en un espacio-tiempo conformestático axialmente simétrico correspondiente a la superposición de los discos relativistas de Morgan y Morgan y un halo esferoidal de materia. Se utiliza el formalismo lagrangiano para analizar el movimiento de las partículas de prueba y se estudia la naturaleza de las posibles órbitas mediante un análisis cualitativo del potencial efectivo y mediante la solución de las ecuaciones de movimiento para trayectorias radiales y no radiales. Se analiza la existencia de orbitas circulares estables, inestables y marginalmente estables, y se determina la órbita circular estable más interna, así como la órbita circular marginalmente ligada.

¹ Trabajo de Grado

² Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Guillermo A. González V., Ph.D.

ABSTRACT

TITLE:

STUDY OF THE MOTION OF TEST PARTICLES IN RELATIVISTIC MORGAN AND MORGAN DISKS IMMERSSED IN HALOS¹.

AUTOR:

Angie Alejandra Ariza Farfán²

KEY WORDS:

Axial symmetry, Conformal space-time, relativistic disks, halo, geodesics

DESCRIPTION:

A study of the motion of test particles, timelike and null, in a conformastatic spacetime with axial symmetry corresponding to the superposition of the relativistic Morgan and Morgan disks and a spheroidal halo of matter is presented. The Lagrangian formalism is used to analyze the motion of the test particles and the nature of the possible orbits are studied by means of a qualitative analysis of the effective potential and by the solution of the equations of motion for radial and non-radial trajectories. The existence of stable, unstable and marginally stable circular orbits is analyzed, and the innermost stable circular orbit are determined, as well as the marginally bound circular orbit.

¹ Bachelor's thesis

² Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Adviser: Guillermo A. González V., Ph.D.

Introducción

La teoría de la relatividad general (RG) publicada por Einstein en 1915 ([Einstein, 1915](#)) nos mostró por primera vez que la fuerza de gravedad descrita por Newton ([Newton, 1687](#)) no es más que la curvatura del espacio-tiempo. Esta teoría constituye un marco teórico capaz de describir adecuadamente los fenómenos relacionados con la gravedad y es en la actualidad uno de los pilares fundamentales de la física. Asimismo, la RG marcó un hito histórico en el entendimiento de la gravitación por sus increíbles implicaciones físicas. Incluso las matemáticas usadas para su desarrollo (novedosas para la época) la convierten en una teoría revolucionaria. De hecho, Einstein consideraba que debido a la complejidad de las ecuaciones solo sería posible la obtención de soluciones aproximadas. Sin embargo, a inicios de 1916 y pocos meses después de la primera publicación de la RG, Karl Schwarzschild obtiene la primera solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein ([Schwarzschild, 1916](#)). Desde entonces la búsqueda de soluciones analíticas a las ecuaciones de la relatividad general ha sido un tema de gran interés para matemáticos y físicos. Algunos frutos de esta búsqueda son la solución de Kerr para describir un cuerpo masivo (p. ej. un agujero negro) rotante estacionario y sin carga eléctrica propuesta en 1963 ([Kerr, 1963](#)) y los primeros modelos de discos para galaxias publicados por Bonnor y Sackfield en 1968 ([Bonnor and Sackfield, 1968](#)) y por Morgan y Morgan en 1969 ([Morgan and Morgan, 1969](#)). A pesar de que la

no linealidad de las ecuaciones de campo de Einstein dificulta la obtención de soluciones exactas, tener una solución analítica nos abre la puerta para estudiar toda la física del sistema.

Uno de los enfoques principales para estudiar un sistema que genera un campo gravitacional, consiste en observar y modelar las trayectorias que siguen la luz y las partículas masivas de prueba. Por ejemplo, las observaciones de la curvatura del trayecto de la luz durante el eclipse total de sol de mayo de 1919 ([Crispino and Kennefick, 2019](#)) y la precesión del perihelio del planeta Mercurio alrededor del Sol ([de Sitter, 1916](#)) son dos ejemplos clásicos de observaciones que respaldan las teorías de la relatividad general ([Asmodelle, 2017](#)). Entender cómo se curva la luz en presencia de potenciales gravitacionales es fundamental para estudiar el fenómeno de lente gravitacional de las galaxias lejanas ([Zheng et al., 2012](#)). De igual forma, al analizar cómo la luz se mueve en las inmediaciones de los agujeros negros, es posible obtener una caracterización de estos objetos astronómicos. De hecho, esto es lo que se ha conseguido estudiando características como la sombra del agujero negro y el anillo de radiación en las primeras imágenes tomadas de los agujeros negros M87* ([Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2019](#)) y Sagitario A* ([Event Horizon Telescope Collaboration et al., 2022](#)). Con los resultados de estas investigaciones se ha podido constatar una vez más la compatibilidad de las observaciones con las predicciones de la relatividad general.

Para estudiar cómo la gravedad afecta el movimiento de partículas masivas y de masa cero, como la luz, es preciso resolver la ecuación de las geodésicas. Es más, la ecuación de las geodésicas puede considerarse una de las herramientas más útiles para comprender la dinámica de un sistema gravitatorio. Por otra parte, mediante este enfoque teórico es posible identificar nuevos efectos introducidos por la relatividad general. Por ejemplo, el problema de la precesión del perihelio de Mercurio no se puede explicar con la gravitación newtoniana. Es dentro del marco teórico de la RG

que dicho problema relacionado con el movimiento de Mercurio se logra solucionar por primera vez usando métodos perturbativos para resolver aproximadamente las ecuaciones de movimiento (de Sitter, 1916). No obstante, las características orbitales de una partícula que se mueve alrededor de una masa esférica se pueden investigar con mayor amplitud haciendo uso de la ecuación de las geodésicas para la métrica de Schwarzschild (Schwarzschild, 1916). Otra manifestación del campo gravitacional desde el punto de vista del movimiento de las partículas de prueba es la desviación de las geodésicas a lo largo de las cuales se mueven las partículas. Las soluciones exactas de las ecuaciones de las geodésicas y las ecuaciones de las orbitas son matemáticamente complicadas e, incluso, en muchas situaciones no pueden resolverse analíticamente. Sin embargo, las soluciones analíticas tienen la importante ventaja de aportarnos mayor información sobre la física de un sistema que las soluciones aproximadas.

En la literatura podemos encontrar soluciones para la ecuación de la geodésicas en distintos espacio-tiempos. Por ejemplo, las trayectorias en la métrica de Schwarzschild fueron analizadas completamente por Hagihara en 1930 (Hagihara, 1930), adicionalmente, en esta métrica se han hallado las geodésicas en términos de funciones elípticas (Scharf, 2011) y la ecuación de la órbita para una partícula masiva (Ribeiro and Lima, 2019). Asimismo, se han obtenido soluciones analíticas de la ecuación de las geodésicas para métricas conocidas tales como la métrica de Kerr (Wilkins, 1972), Gödel (Calvao et al., 1990; Camci, 2014), Schwarzschild-(anti-)de Sitter (Hackmann and Lämmerzahl, 2008a,b) y Kerr-(anti-)de Sitter (Kraniotis, 2004; Hackmann et al., 2010). En general podemos encontrar en la literatura numerosas soluciones exactas para dichas ecuaciones en diversos espacio-tiempos (Panotopoulos and Rincón, 2022; Olum, 2010; Harvey, 1989; Panotopoulos et al., 2021; Lim, 2021; Hackmann and Xu, 2013; Zhou et al., 2012; García et al., 2015; Frost and Perlick, 2021). Incluso se han estudiado las ecuaciones de las geodésicas en espacio-tiempos con

dimensiones superiores ([Hackmann et al., 2008](#); [Guha and Bhattacharya, 2012](#); [González et al., 2021](#)). Centrándonos en métricas con simetría axial, también se han solucionado las ecuaciones de las geodésicas para este tipo de geometría ([Semerák et al., 1999](#); [Hackmann et al., 2009](#); [Del Águila and Matos, 2021](#)). Entre estas soluciones podemos destacar el estudio de geodésicas temporales y nulas en discos de Bonnor-Sackfield ([González and López-Suspes, 2011](#)). Además, se han desarrollado métodos analíticos para proporcionar soluciones de geodésicas para métricas axialmente simétricas ([Ospino et al., 2022](#)) y se ha estudiado la estabilidad de las órbitas en este mismo tipo de geometrías ([López-Suspes and González, 2014](#)). Una revisión bibliográfica sobre las soluciones analíticas para las ecuaciones de las geodésicas se puede encontrar en la referencia ([Hackmann and Lämmerzahl, 2014](#)).

En este trabajo, abordaremos el movimiento de partículas de prueba en espacio-tiempos conformes con simetría axial. Concretamente, centraremos nuestra atención en el espacio-tiempo correspondiente a la superposición de los discos relativistas de Morgan y Morgan y un halo esferoidal de materia publicada por G. A. González y O. M. Pimentel ([González and Pimentel, 2016](#)). En el primer capítulo se introduce la estructura de las ecuaciones que definen el espacio-tiempo bajo estudio y algunas expresiones que serán útiles para los capítulos posteriores. En el segundo capítulo nos enfocamos en hallar soluciones analíticas de las ecuaciones de las geodésicas temporales y nulas haciendo uso del formalismo lagrangiano. El tercer capítulo está dedicado a estudiar la naturaleza de las posibles órbitas mediante un análisis cualitativo del potencial efectivo. En este capítulo también se incluye una sección donde se resuelven las ecuaciones de movimiento para partículas de prueba masivas usando métodos numéricos. Finalmente, en el cuarto capítulo se condensan las conclusiones del trabajo.

CAPÍTULO 1

Discos relativistas de Morgan y Morgan con halo

En relatividad general el espacio-tiempo se describe usando variedades diferenciables: espacios que son continuos y diferenciables en cada punto. Es decir, en la vecindad de cada punto de una variedad diferenciable podemos definir un mapeo al espacio euclidiano que preserva las derivadas de las funciones escalares en ese punto. De manera que podemos definir uno-formas y vectores (Schutz, 2009) cuyo mapeo está proporcionado por la métrica. La métrica $g_{\alpha\beta}$ es un tensor simétrico de tipo $(0, 2)$. En relatividad general, la métrica empleada tiene signatura lorentziana y, usando el convenio de suma de Einstein, definimos su inversa como

$$g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = g_{\beta\mu} g^{\alpha\mu} = \delta_{\beta}^{\alpha}. \quad (1)$$

Desde el punto de vista físico, la métrica: suministra una noción de pasado y futuro; permite el cálculo del tiempo propio y longitud propia; determina la “distancia más corta” entre dos puntos y, por lo tanto, el movimiento de las partículas de prueba; reemplaza el campo gravitacional Newtoniano; proporciona una noción de marcos de referencia localmente inerciales; determina la

causalidad, definiendo la velocidad de la luz como la máxima velocidad a la que cualquier señal puede viajar; reemplaza el producto punto del espacio Euclidiano tridimensional de la mecánica Newtoniana (Carroll, 2003). Además, existe una estrecha relación entre la métrica y el elemento de línea,

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (2)$$

razón por la cual es usual que estos dos términos se usen indistintamente en la literatura.

Cuando se quiere describir espacio-tiempos estáticos y axialmente simétricos lo más apropiado es hacer uso de la solución general desarrollada por H. Weyl. Concretamente nos centraremos en la solución conocida como métrica conformestática. En coordenadas cilíndricas, (t, r, φ, z) , el elemento de línea para esta métrica toma la forma (González et al., 2008; Sygne, 1960)

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{-2\psi} (dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2), \quad (3)$$

donde ψ es una función continua de las coordenadas r y z . Ahora bien, partiendo de la métrica conformestática es posible describir sistemas de disco-halo. En lo que refiere al fluido del halo, tenemos la siguiente ecuación de estado

$$p = \frac{\rho}{3(2k - 1)}, \quad (4)$$

donde p es la presión, ρ es la densidad y $k \geq 1$ define el tipo de fluido del halo siendo un fluido de radiación si $k = 1$ y un fluido de polvo si k tiende a infinito. En cuanto a la función métrica ψ tenemos que para la superposición de disco y halo es necesario que se satisfaga la relación

(González and Pimentel, 2016):

$$e^{-k\psi} = 1 - U, \quad (5)$$

donde U debe ser solución a la ecuación de Laplace. De esta forma la densidad de energía y presión del fluido en el halo quedan completamente determinados por la función U . Además, para definir de manera adecuada la fuente de nuestro campo gravitacional, la función U debe cumplir las condiciones

$$U(r, z) = U(r, -z) \quad (6)$$

$$U_{,z}|_{z=0^+} \neq 0. \quad (7)$$

La ecuación (6) garantiza que U sea una función axialmente simétrica y que posea simetría de reflexión alrededor del plano del disco ($z = 0$). La ecuación (7) garantiza la existencia de una discontinuidad en la primera derivada del tensor métrico con respecto a z , $g_{\alpha\beta,z}|_{z=0^+} \neq 0$. Si se satisfacen estas condiciones se logra definir apropiadamente una distribución discoidal de materia en el plano $z = 0$. En consecuencia las propiedades físicas que describen al sistema disco-halo: densidad de energía del halo y del disco, presión del halo, masa del sistema y velocidades de rotación; quedan descritas en términos de la función U (González and Pimentel, 2016). Por lo tanto, la elección apropiada de la función U nos permitirá generar una familia de soluciones o un modelo particular.

Un sistema de disco-halo de interés es aquel formado por un disco finito. Este tipo de sistemas representan una aproximación a objetos astrofísicos como, por ejemplo, las galaxias espirales. Una solución para discos relativistas finitos fue conseguida por Morgan y Morgan en 1969 (Mor-

gan and Morgan, 1969). Morgan y Morgan trabajaron en el sistema de coordenadas esferoidales oblatas, (ξ, η, φ) por ser las que mejor se adaptan a la simetría de un disco finito ya que introducen de manera natural un radio de corte para el disco. Las coordenadas esferoidales oblatas se relacionan con las coordenadas cilíndricas mediante las transformaciones (González et al., 2009)

$$r^2 = a^2(1 + \xi^2)(1 - \eta^2), \quad (8)$$

$$z = a\xi\eta, \quad (9)$$

donde $0 \leq \xi \leq \infty$, $-1 \leq \eta \leq 1$ y a es el radio del disco con coordenadas $\xi = 0$ y $0 \leq \eta^2 < 1$.

De manera que la solución general para un disco axialmente simétrico de radio a está dada por (Bateman, 1944)

$$U(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta), \quad (10)$$

donde C_{2n} son constantes, $q_{2n}(\xi) = i^{2n+1} Q_{2n}(i\xi)$ con $Q_{2n}(i\xi)$ son funciones de Legendre de segundo tipo de argumento imaginario y $P_{2n}(\eta)$ son los polinomios de Legendre de orden $2n$.

A pesar de que U se expresa usando una sumatoria infinita, podemos garantizar la convergencia de dicha sumatoria ya que tanto los polinomios como las funciones de Legendre son solución a problemas de Sturm-Liouville y por consiguiente forman una base completa del espacio de Hilbert.

La solución de Morgan y Morgan para discos finitos es solución a la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas y resulta ser una buena candidata para la función U que describe la métrica del sistema disco-halo. Si deseamos soluciones particulares de la ecuación (10) podemos considerar a U como el potencial gravitacional de discos finitos newtonianos y determinar las constantes C_{2n} a partir de la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre (González-

lez and Reina, 2006). De esta forma se consigue restringir la sumatoria y las constantes quedan definidas por

$$C_{2n} = \frac{K_{2n}}{(2n+1)q_{2n+1}(0)}, \quad (11)$$

donde

$$K_{2n} = \frac{M}{2a} \left[\frac{\pi^{1/2}(4n+1)(2m+1)!}{2^{2m}(m-n)!\Gamma(m+n+3/2)} \right], \quad (12)$$

donde M y a son la masa total y el radio del disco newtoniano, respectivamente. Notemos que si $n \leq m$ entonces $C_{2n} \neq 0$ y $C_{2n} = 0$ si $n > m$, para $m \geq 1$; de modo que la suma queda restringida por el valor de m y obtenemos una familia de soluciones infinitas U_m para modelar la superposición de un disco de Morgan y Morgan con un halo. Para este trabajo tomaremos las tres primeras soluciones particulares con $m = 1, 2, 3$ de la familia de soluciones infinitas, U_m , para realizar el estudio del movimiento de partículas de prueba.

1.1. Soluciones dentro del disco

La fuente de campo gravitacional que estamos estudiando tiene dos regiones claramente diferenciadas sobre el plano ecuatorial: la región dentro del disco y la región fuera del disco.

Dentro del disco la coordenada ξ se anula, de modo que la ecuación (10) se reduce a

$$U(\eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} q_{2n}(0) P_{2n}(\eta), \quad (13)$$

que es una función de una sola variable. Ahora, para los casos particulares con $m = 1, 2, 3$, podemos expresar las soluciones dentro del disco como

$$U_1 = -\frac{3\pi\tilde{M}}{8} (\eta^2 + 1), \quad (14)$$

$$U_2 = -\frac{15\pi\tilde{M}}{128} (3\eta^4 + 2\eta^2 + 3), \quad (15)$$

$$U_3 = -\frac{35\pi\tilde{M}}{512} (5\eta^6 + 3\eta^4 + 3\eta^2 + 5), \quad (16)$$

donde $\tilde{M} = M/a$. Para determinar la primera derivada respecto a r de las soluciones dentro del disco nos apoyamos en la transformación entre coordenadas esferoidales oblatas y coordenadas cilíndricas presentadas en (8) y (9). Dentro del disco estas transformaciones toman la forma $\eta = \sqrt{1 - \tilde{r}^2}$ y $\xi = 0$ donde $\tilde{r} = r/a$. De manera que obtenemos las expresiones para la primera derivada respecto a r

$$U_{1,r} = \frac{3\pi\tilde{M}\tilde{r}}{4a}, \quad (17)$$

$$U_{2,r} = \frac{15\pi\tilde{M}\tilde{r}}{32a} (3\eta^2 + 1), \quad (18)$$

$$U_{3,r} = \frac{35\pi\tilde{M}\tilde{r}}{256a} (15\eta^4 + 6\eta^2 + 3), \quad (19)$$

y también las segundas derivadas respecto a r

$$U_{1,rr} = \frac{3\pi\tilde{M}}{4a^2}, \quad (20)$$

$$U_{2,rr} = \frac{15\pi\tilde{M}}{32a^2} (9\eta^2 - 5), \quad (21)$$

$$U_{3,rr} = \frac{35\pi\tilde{M}}{256a^2} (75\eta^4 - 42\eta^2 - 9). \quad (22)$$

1.2. Soluciones fuera del disco

Para la parte exterior del disco que se ubica sobre el plano ecuatorial tenemos que la coordenada η es ahora la que se anula. Bajo estas condiciones la ecuación (10) toma la forma

$$U(\eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} q_{2n}(\xi) P_{2n}(0), \quad (23)$$

que, nuevamente, es una función de una sola variable. A menos de que se mencione lo contrario, de ahora en adelante nos referiremos a la región sobre el plano ecuatorial fuera del disco solamente como la región fuera del disco. Centrándonos ahora en los casos particulares $m = 1, 2, 3$, tenemos que las soluciones fuera del disco son

$$U_1 = -\frac{3\tilde{M}}{4} ((1 - \xi^2) \operatorname{acot} \xi + \xi), \quad (24)$$

$$U_2 = -\frac{15\tilde{M}}{64} ((3\xi^4 - 2\xi^2 + 3) \operatorname{acot} \xi - 3\xi^3 + 3\xi), \quad (25)$$

$$U_3 = -\frac{35\tilde{M}}{256} \left((-5\xi^6 + 3\xi^4 - 3\xi^2 + 5) \operatorname{acot} \xi + 5\xi^5 - \frac{14}{3}\xi^3 + 5\xi \right). \quad (26)$$

Por otra parte, la relación entre las coordenadas esferoidales oblatas y las coordenadas cilíndricas (8) y (9) se reducen a $\xi = \sqrt{\tilde{r}^2 - 1}$ y $\eta = 0$. Con estas relaciones podemos calcular la primera derivada respecto a r de las tres primeras soluciones particulares de U_m fuera del disco,

$$U_{1,r} = \frac{3\tilde{M}}{2a\tilde{r}} ((1 + \xi^2) \operatorname{acot} \xi - \xi), \quad (27)$$

$$U_{2,r} = \frac{15\tilde{M}}{16a\tilde{r}} \left((1 - 2\xi^2 - 3\xi^4) \operatorname{acot} \xi + 3\xi^3 + \xi \right), \quad (28)$$

$$U_{3,r} = \frac{35\tilde{M}}{128a\tilde{r}} \left((3 - 3\xi^2 + 9\xi^4 + 15\xi^6) \operatorname{acot} \xi + \xi(3 - 4\xi^2 - 15\xi^4) \right), \quad (29)$$

y de igual modo nos será útil hacer el cálculo de la segunda derivada

$$U_{1,rr} = \frac{3\tilde{M}}{2a^2\tilde{r}^2} \left((1 + \xi^2) \operatorname{acot} \xi - \xi - 2/\xi \right), \quad (30)$$

$$U_{2,rr} = \frac{15\tilde{M}}{16a^2\tilde{r}^2} \left(9\xi^3 + 11\xi - (9\xi^4 + 14\xi^2 + 5) \operatorname{acot} \xi \right), \quad (31)$$

$$U_{3,rr} = \frac{35\tilde{M}}{128a^2\tilde{r}^2} \left((75\xi^6 + 117\xi^4 + 33\xi^2 - 9) \operatorname{acot} \xi - 75\xi^5 - 92\xi^3 - 9\xi \right). \quad (32)$$

Separando las soluciones de Morgan y Morgan entre las regiones dentro y fuera del disco logramos reducir la complejidad de la función métrica dada por la relación (5). Esto nos facilitará, posteriormente, encontrar las ecuaciones de las geodésicas temporales y nulas y realizar un análisis del potencial efectivo para determinar la naturaleza de las posibles órbitas.

CAPÍTULO 2

Geodésicas temporales y nulas en el plano ecuatorial

2.1. Ecuación de las geodésicas

En el espacio plano el camino más corto es la línea recta. Sin embargo, cuando empezamos a trabajar con espacios curvos se hace necesario ampliar nuestra idea del camino más corto. Empezaremos por definir cómo medir la longitud de un camino arbitrario. En un espacio curvo la noción de distancia está dada por la métrica, de manera que

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \quad (33)$$

es la longitud de la curva entre los puntos a y b . Ahora, basándonos en el principio de mínima acción, el camino más corto es aquel que sea un extremal para la integral anterior. Es conveniente reescribir la ecuación (33) en términos del Lagrangiano. Para esto definimos el Lagrangiano como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}, \quad (34)$$

donde λ es un parámetro afín. De modo que al reescribir el problema variacional presentado en la ecuación (33) en términos del Lagrangiano conseguimos llegar a la expresión

$$\delta \int_a^b \sqrt{2\mathcal{L}} d\lambda = 0, \quad (35)$$

cuya solución es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} = 0. \quad (36)$$

El resultado obtenido en (36) es conocido como la ecuación de Euler-Lagrange, cuyas soluciones son las líneas geodésicas que representan el camino más corto entre dos puntos en un espacio curvo. Las trayectorias geodésicas se llaman geodésicas nulas si corresponden al movimiento de partículas de masa cero y se llaman geodésicas temporales si corresponden al movimiento de partículas masivas. Para el caso de la geodésicas temporales, el parámetro afín se transforma en el tiempo propio τ . Podemos reescribir la ecuación de Euler-Lagrange de la forma (Ryder, 2009)

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (37)$$

Esta última expresión se conoce como la ecuación de las geodésicas, donde $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ son los símbolos de Christoffel que se definen en función de la métrica como (Weinberg, 1972)

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\kappa} \left[\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right]. \quad (38)$$

2.1.1. Ecuación de las geodésicas en discos de Morgan y Morgan con halo

De acuerdo al procedimiento descrito anteriormente, nuestro primer paso será obtener el Lagrangiano para la métrica conformestática haciendo uso de la expresión (34). De esta forma llegamos al resultado (López-Suspés and González, 2014)

$$2\mathcal{L} = -e^{2\psi}\dot{t}^2 + e^{-2\psi} [\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2], \quad (39)$$

donde el punto indica derivada respecto al parámetro afín λ para geodésicas nulas o derivada respecto al tiempo propio τ para geodésicas temporales. Ahora, como el Lagrangiano es independiente de t y φ , podemos incorporar a la ecuación (39) las constantes de movimiento correspondientes a la energía y al momento angular. Estas constantes las determinamos haciendo uso de los momentos canónicos conjugados

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a}, \quad (40)$$

con lo que obtenemos las cantidades conservadas

$$E = e^{2\psi}\dot{t} \quad (41)$$

$$\ell = e^{-2\psi}r^2\dot{\varphi}, \quad (42)$$

que son la energía por unidad de masa y el momento angular por unidad de masa, respectivamente. Como nos vamos a enfocar en las geodésicas en el plano ecuatorial, el movimiento de las partículas de prueba estará confinado en $z = 0$. Al incluir esta restricción junto con las constante de

movimiento a la ecuación (39) llegamos a la expresión

$$2\mathcal{L} = e^{-2\psi}(-E^2 + \dot{r}^2) + \frac{\ell^2}{r^2}e^{2\psi}. \quad (43)$$

Finalmente, hemos conseguido pasar de un Lagrangiano que dependía inicialmente de cuatro variables a uno que solo depende de la variable r en la ecuación (43). Ahora, usando la ecuación de Euler-Lagrange (36) obtenemos una única ecuación de las geodésicas para el movimiento de partículas de prueba en el plano ecuatorial

$$\ddot{r} + \psi_{,r} \left(E^2 - \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{r^2} e^{4\psi} \right) - \frac{\ell^2}{r^3} e^{4\psi} = 0, \quad (44)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Sin embargo, partiendo de la ecuación (43) podemos expresar la ecuación diferencial para la coordenada r en (44) como una ecuación diferencial de primer orden

$$\dot{r}^2 = E^2 - e^{2\psi} \left(\epsilon^2 + \frac{\ell^2}{r^2} e^{2\psi} \right), \quad (45)$$

donde se ha establecido la condición $2\mathcal{L} = -\epsilon^2$ de la cual se obtiene geodésicas nulas cuando hacemos $\epsilon = 0$ y geodésicas temporales cuando hacemos $\epsilon = -1$ (Misner et al., 2000). A continuación dividiremos nuestro estudio de las geodésicas en trayectorias radiales y no radiales, además, nos centraremos en los modelos U_m correspondientes a $m = 1, 2, 3$.

2.2. Trayectorias radiales

Si bien el resultado obtenido en (45) constituye una ecuación para las geodésicas, resolverla no nos proporciona información física relevante sobre el movimiento de las partículas en un sistema de coordenadas como, por ejemplo, las coordenadas cilíndricas o cartesianas. Esto se debe a que la solución que satisface la ecuación de las geodésicas presentada en (45) es una función del parámetro afín λ para el caso de las geodésicas de partículas de masa nula o del tiempo propio τ para el caso de las partículas masivas. Por otra parte, nos resulta más conveniente conocer la dependencia de la coordenada radial r respecto al tiempo t . La ecuación diferencial que nos proporciona la relación entre r y t la podemos hallar usando las expresiones (41) y (45) obteniendo como resultado

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{\dot{r}^2}{\dot{t}^2} = e^{4\psi} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{E^2} e^{2\psi}\right). \quad (46)$$

La expresión (46) proporciona las trayectorias radiales de las partículas de prueba. Para obtener las trayectorias radiales que existen en la superposición del disco finito con un halo, solo necesitamos reemplazar la función métrica ψ por nuestra función U usando la relación (5)

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = (1 - U)^{-4/k} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{E^2} (1 - U)^{-2/k}\right), \quad (47)$$

obteniendo como resultado una ecuación diferencial ordinaria separable. De modo que es posible encontrar la solución por integración directa

$$dt = \frac{(1 - U)^{2/k}}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{E^2} (1 - U)^{-2/k}}} dr \quad (48)$$

2.2.1. Geodésicas nulas

Para obtener las trayectorias radiales que siguen las partículas de masa nula como la luz, es necesario establecer $\epsilon = 0$. Como resultado de esta condición, conseguimos simplificar la ecuación (48) de forma que al integrar a los dos lados de la ecuación obtenemos

$$\tilde{t} = \int (1 - U)^{2/k} d\tilde{r}, \quad (49)$$

donde se han realizado las sustituciones $\tilde{t} = t/a$ y $\tilde{r} = r/a$. Ahora para obtener las soluciones dentro del disco para $m = 1, 2, 3$ necesitaremos resolver las siguientes integrales:

- Para $m=1$

$$\tilde{t} = A_1 \int (B_1 - \tilde{r}^2)^{2/k} d\tilde{r}; \quad A_1 = \frac{3\pi\tilde{M}}{8}, \quad B_1 = \frac{1}{A_1} + 2. \quad (50)$$

- Para $m=2$

$$\tilde{t} = A_2 \int (B_2 + 3\tilde{r}^4 - 8\tilde{r}^2)^{2/k} d\tilde{r}; \quad A_2 = \frac{15\pi\tilde{M}}{128}, \quad B_2 = \frac{1}{A_2} + 8. \quad (51)$$

- Para $m=3$

$$\tilde{t} = A_3 \int (B_3 - 24\tilde{r}^2 + 18\tilde{r}^4 - 5\tilde{r}^6)^{2/k} d\tilde{r}; \quad A_3 = \frac{35\pi\tilde{M}}{512}, \quad B_3 = \frac{1}{A_3} + 16. \quad (52)$$

Lamentablemente no es posible integrar analíticamente las ecuaciones (50), (51) y (52) para cualquier valor de k . Por esta razón en la tabla (1) se presentan únicamente aquellos casos en los que se han logrado encontrar soluciones analíticas.

Tabla 1

Soluciones analíticas de trayectorias radiales dentro del disco para partículas de masa nula.

Modelo	Parámetro k	Solución analítica
$m = 1$	$k = 1$	$\tilde{t} = A_1 \left(B_1^2 \tilde{r} - \frac{2}{3} B_1 \tilde{r}^3 + \frac{1}{5} \tilde{r}^5 \right) + cte$
	$k = 2$	$\tilde{t} = A_1 \left(B_1 \tilde{r} - \frac{1}{3} \tilde{r}^3 \right) + cte$
	$k = 4$	$\tilde{t} = \frac{1}{2} A_1 \left(\arcsin \left(\frac{\tilde{r}}{\sqrt{B_1}} \right) + \tilde{r} \sqrt{B_1 - \tilde{r}^2} \right) + cte$
$m = 2$	$k = 1$	$\tilde{t} = A_2 \left(B_2^2 \tilde{r} - \frac{16B_2}{3} \tilde{r}^3 + \frac{6B_2+64}{5} \tilde{r}^5 - \frac{48}{7} \tilde{r}^7 + \tilde{r}^9 \right) + cte$
	$k = 2$	$\tilde{t} = A_2 \left(B_2 \tilde{r} + \frac{3}{5} \tilde{r}^5 - \frac{8}{3} \tilde{r}^3 \right) + cte$
$m = 3$	$k = 1$	$\tilde{t} = B_3 x + 2B_3 \left(-\frac{5}{7} \tilde{r}^7 + \frac{18}{5} \tilde{r}^5 - 8\tilde{r}^3 \right) + \left(\frac{25}{13} x^{13} - \frac{180}{11} x^{11} + \frac{188}{3} x^9 - \frac{864}{7} x^7 + \frac{576}{5} x^5 \right) + cte$
	$k = 2$	$\tilde{t} = A_3 \left(B_3 - \frac{5}{7} \tilde{r}^7 + \frac{18}{5} \tilde{r}^5 - 8\tilde{r}^3 \right) + cte$

Nota: Se presenta los casos para los cuales ha sido posible determinar una solución analítica de las geodésicas nulas que forman trayectorias radiales dentro del disco.

A continuación, procederemos a obtener las soluciones correspondientes para $m = 1, 2, 3$ fuera del disco. En este caso será necesario resolver las siguientes integrales:

- Para $m=1$

$$\tilde{t} = \int \left[1 + D_1 \left((2 - \tilde{r}^2) \operatorname{acot} \left(\sqrt{\tilde{r}^2 - 1} \right) + \sqrt{\tilde{r}^2 - 1} \right) \right]^{2/k} d\tilde{r}; \quad D_1 = \frac{3\tilde{M}}{4}. \quad (53)$$

- Para $m=2$

$$\tilde{t} = \int \left[1 + D_2 \left((3\tilde{r}^4 - 8\tilde{r}^2 + 8) \operatorname{acot} \left(\sqrt{\tilde{r}^2 - 1} \right) - 3\sqrt{\tilde{r}^2 - 1}(\tilde{r}^2 - 2) \right) \right]^{2/k} d\tilde{r}; \quad D_2 = \frac{15\tilde{M}}{64}. \quad (54)$$

- Para $m=3$

$$\tilde{t} = \int \left[1 + D_3 \left((16 - 24\tilde{r}^2 + 18\tilde{r}^4 - 5\tilde{r}^6) \operatorname{acot}(\sqrt{\tilde{r}^2 - 1}) + \frac{1}{3} \sqrt{\tilde{r}^2 - 1} (15\tilde{r}^4 - 44\tilde{r}^2 + 44) \right) \right]^{2/k} d\tilde{r}; \quad D_3 = \frac{35\tilde{M}}{256}. \quad (55)$$

En lo que respecta a las geodésicas nulas que correspondan a trayectorias radiales fuera del disco, la obtención de soluciones analíticas es aún más restringida que en el caso de las soluciones dentro del disco. Fuera del disco, solo se ha logrado encontrar soluciones analíticas para el caso específico en el que $k = 2$. A continuación, se presentan las soluciones obtenidas para cada uno de los modelos considerados:

- Solución para el modelo $m = 1$

$$\tilde{t} = \tilde{r} + \frac{D_1}{3} \left(4 \operatorname{arcosh}(\tilde{r}) + (6\tilde{r} - \tilde{r}^3) \operatorname{acot}(\sqrt{\tilde{r}^2 - 1}) + \tilde{r} \sqrt{\tilde{r}^2 - 1} \right) + cte. \quad (56)$$

- Solución para el modelo $m = 2$

$$\tilde{t} = \tilde{r} + \frac{D_2}{15} \left(64 \operatorname{arcosh}(\tilde{r}) + (9\tilde{r}^5 - 40\tilde{r}^3 + 120\tilde{r}) \operatorname{acot}(\sqrt{\tilde{r}^2 - 1}) + \sqrt{\tilde{r}^2 - 1} (34\tilde{r} - 9\tilde{r}^3) \right) + cte. \quad (57)$$

- Solución para el modelo $m = 3$

$$\tilde{t} = \tilde{r} + \frac{D_3}{35} \left(256 \operatorname{arcosh}(\tilde{r}) + (-25\tilde{r}^7 + 126\tilde{r}^5 - 280\tilde{r}^3 + 450\tilde{r}) \operatorname{acot}(\sqrt{\tilde{r}^2 - 1}) + \frac{1}{3} \sqrt{\tilde{r}^2 - 1} (75\tilde{r}^5 - 328\tilde{r}^3 + 628\tilde{r}) \right) + cte. \quad (58)$$

2.2.2. Geodésicas temporales

Ahora nos enfocaremos en determinar las trayectorias radiales seguidas por las partículas de prueba masivas. Para lograrlo, es necesario establecer $\epsilon = -1$, que corresponde a la condición para las geodésicas temporales. Como consecuencia, la ecuación (48) se transforma de forma que al integrar en ambos lados de la ecuación obtenemos

$$\tilde{t} = \int \frac{E(1-U)^{2/k}}{\sqrt{E^2 - (1-U)^{-2/k}}} d\tilde{r}, \quad (59)$$

donde se han realizado las sustituciones $\tilde{t} = t/a$ y $\tilde{r} = r/a$. Ahora, con el objetivo de obtener soluciones dentro del disco para $m = 1, 2, 3$, necesitaremos abordar la resolución de las siguientes integrales:

- Para $m=1$

$$\tilde{t} = A_1 E \int \frac{(B_1 - \tilde{r}^2)^{2/k}}{\sqrt{E^2 - A_1(B_1 - \tilde{r}^2)^{-2/k}}} d\tilde{r} \quad (60)$$

- Para $m=2$

$$\tilde{t} = A_2 E \int \frac{(B_2 + 3\tilde{r}^4 - 8\tilde{r}^2)^{2/k}}{\sqrt{E^2 - A_2(B_2 + 3\tilde{r}^4 - 8\tilde{r}^2)^{-2/k}}} d\tilde{r} \quad (61)$$

- Para $m=3$

$$\tilde{t} = A_3 E \int \frac{(B_3 - 24\tilde{r}^2 + 18\tilde{r}^4 - 5\tilde{r}^6)^{2/k}}{\sqrt{E^2 - A_3(B_3 - 24\tilde{r}^2 + 18\tilde{r}^4 - 5\tilde{r}^6)^{-2/k}}} d\tilde{r} \quad (62)$$

En esta ocasión, hemos conseguido resolver de forma analítica únicamente un caso muy específico que corresponde a la ecuación diferencial para el modelo con $m = 1$ y $k = 2$. La

solución obtenida es

$$\tilde{t} = \frac{E}{2} \left(\left(\frac{E^2 + A_1 B_1}{\sqrt{A_1}} \right) \operatorname{arsenh} \left(\frac{\tilde{r} \sqrt{A_1}}{\sqrt{E^2 - A_1 B_1}} \right) - \tilde{r} \sqrt{E^2 - A_1 (B_1 - \tilde{r}^2)} \right) + cte, \quad (63)$$

donde es importante notar que se debe satisfacer la condición $E^2 - A_1 B_1 > 0$. Si ahora realizamos la sustitución de las constantes A_1 y B_1 , logramos obtener una condición explícita para la energía, que puede ser escrita como $E^2 > 1 + \frac{3\pi\tilde{M}}{4}$.

A continuación deberíamos resolver las ecuaciones diferenciales para las geodésicas temporales fuera del disco. Sin embargo, no fue posible encontrar soluciones analíticas fuera del disco para ninguno de los modelos considerados. Desafortunadamente, la integración analítica solo ha sido posible para el modelo con $m = 1$ y $k = 2$ mencionado anteriormente.

2.3. Trayectorias no radiales

Ya realizamos el estudio analítico para las trayectorias radiales y logramos obtener soluciones analíticas para algunos casos especiales, sin embargo, en general las integrales obtenidas no se pudieron resolver analíticamente. Otro tipo de trayectorias que son de interés son las órbitas acotadas o no acotadas que siguen las partículas de prueba en el plano ecuatorial. Estas trayectorias son llamadas trayectorias no radiales y son el objeto de estudio de esta sección. En esta ocasión lo que deseamos conocer es la dependencia de la coordenada radial r respecto a la coordenada azimutal φ . La ecuación diferencial que nos proporciona esta relación la podemos hallar usando

las expresiones (42) y (45) obteniendo como resultado

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\dot{r}^2}{\dot{\varphi}^2} = r^2 \left((E^2 - e^{2\psi} \epsilon^2) \frac{r^2}{\ell^2} e^{-4\psi} - 1 \right). \quad (64)$$

La expresión (64) proporciona las trayectorias no radiales de las partículas de prueba. Para obtener las trayectorias radiales que existen en la superposición del disco finito con un halo, solo necesitamos reemplazar la función métrica ψ por nuestra función U usando la relación (5)

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = r^2 \left((E^2 - (1 - U)^{-2/k} \epsilon^2) \frac{r^2}{\ell^2} (1 - U)^{4/k} - 1 \right) \quad (65)$$

obteniendo como resultado una ecuación diferencial ordinaria separable. De modo que es posible encontrar la solución por integración directa.

$$d\varphi = \frac{\ell dr}{r \sqrt{(E^2 - (1 - U)^{-2/k} \epsilon^2) (1 - U)^{4/k} r^2 - \ell^2}}, \quad (66)$$

A continuación, si integramos a ambos lados de la igualdad y hacemos las sustituciones $\tilde{\varphi} = \varphi/a$ y $\tilde{r} = r/a$, obtenemos la integral a resolver para geodésicas nulas

$$\tilde{\varphi} = \int \frac{\ell d\tilde{r}}{\tilde{r} \sqrt{E^2 \tilde{r}^2 (1 - U)^{4/k} - \ell^2}}, \quad (67)$$

donde se ha hecho $\epsilon = 0$. Por otro lado, si tomamos $\epsilon = -1$ obtenemos la integral correspondiente para las geodésicas temporales

$$\tilde{\varphi} = \int \frac{\ell d\tilde{r}}{\tilde{r} \sqrt{\tilde{r}^2 (E^2 (1 - U)^{4/k} - (1 - U)^{2/k}) - \ell^2}}. \quad (68)$$

Al reemplazar la función U por cada uno de los modelos que hemos considerado hasta el momento ($m = 1, 2, 3$), no hemos logrado resolver ninguna de las integrales de forma analítica. Incluso tomando los casos más simples ha sido imposible realizar la integración analítica. Por consiguiente, para las trayectorias no radiales, no disponemos de soluciones analíticas y debemos recurrir a métodos numéricos de integración para abordar el problema. La ausencia de soluciones analíticas para las trayectorias no radiales representa una desventaja significativa en el estudio de estos modelos. La falta de soluciones analíticas también dificulta la exploración sistemática de diferentes parámetros y condiciones iniciales. En ausencia de expresiones analíticas, no podemos realizar análisis teóricos detallados y estudiar el impacto de diferentes variables en el comportamiento de las trayectorias. Esto limita nuestra capacidad para comprender completamente la física subyacente. Bajo estas circunstancias, los métodos numéricos de integración son la herramienta idónea para continuar con el estudio de las trayectorias no radiales. A través de ellos, podemos obtener resultados numéricos precisos y realizar simulaciones detalladas que nos permiten explorar y comprender el comportamiento de las trayectorias no radiales en ausencia de soluciones analíticas. Usando métodos numéricos, podemos obtener resultados cuantitativos y realizar comparaciones detalladas con observaciones astronómicas, lo que contribuye a la validación y verificación de los modelos teóricos.

CAPÍTULO 3

Órbitas en el plano ecuatorial

Debido a la simetría del sistema disco finito más halo, el plano ecuatorial se convierte en una región de gran interés para el estudio de las posibles órbitas. Sin embargo, esta no es la única motivación para centrarnos en esta zona particular. El plano ecuatorial se caracteriza por albergar la mayor concentración de materia en las galaxias espirales, y las estrellas que se encuentran en esta región tienden a seguir trayectorias que se aproximan a órbitas circulares. Por otra parte, fuera del disco, el contenido de materia es menos denso y el movimiento de los cuerpos presentes en esta región resulta ser caótico.

La elección del plano ecuatorial como área de enfoque en el sistema disco finito más halo se justifica tanto por su simetría como por la alta concentración de materia que alberga. Dentro de esta región, es posible observar órbitas más estables que contrastan con el movimiento caótico que ocurre fuera del disco. Al enfocarnos en el plano ecuatorial, podemos comprender mejor las dinámicas de las galaxias espirales al obtener información significativa sobre las propiedades y características de las posibles órbitas.

3.1. Órbitas circulares

El estudio cualitativo del potencial efectivo es un método comúnmente usado para determinar órbitas tanto en física clásica como relativista. Mediante este enfoque podemos determinar el radio de las orbitas circulares. Las órbitas circulares son un caso especial en el que tenemos $r = r_c = \text{constante}$ y una velocidad radial nula, es decir, $\dot{r} = 0$. En términos del potencial efectivo esto se traduce en que el radio de una órbita circular corresponde a un máximo o un mínimo del potencial. Con la primera derivada del potencial efectivo podemos hallar los puntos críticos y, por lo tanto, obtenemos las órbitas circulares

$$\left. \frac{dV_{eff}}{dr} \right|_{r=r_c} = 0. \quad (69)$$

Para determinar el potencial efectivo de nuestro sistema, vamos a retomar la ecuación (45) que obtuvimos en el capítulo anterior. Podemos reescribir esta ecuación de manera conveniente como

$$E^2 = \dot{r}^2 + e^{2\psi} \left[\epsilon^2 + \frac{\ell^2}{r^2} e^{2\psi} \right], \quad (70)$$

y partiendo de ella, podemos definir el potencial efectivo mediante la expresión

$$V_{eff} = e^{2\psi} \left[\epsilon^2 + \frac{\ell^2}{r^2} e^{2\psi} \right], \quad (71)$$

donde solo hace falta reemplazar la función métrica ψ para obtener el potencial efectivo de la superposición disco-halo. Para lograr esto, utilizamos la relación (5) para despejar la función métrica y luego la reemplazamos en la ecuación (71). De esta manera, llegamos a la siguiente expresión

final

$$V_{eff} = \frac{1}{(1-U)^{2/k}} \left[\epsilon^2 + \frac{\ell^2}{a^2 \tilde{r}^2 (1-U)^{2/k}} \right], \quad (72)$$

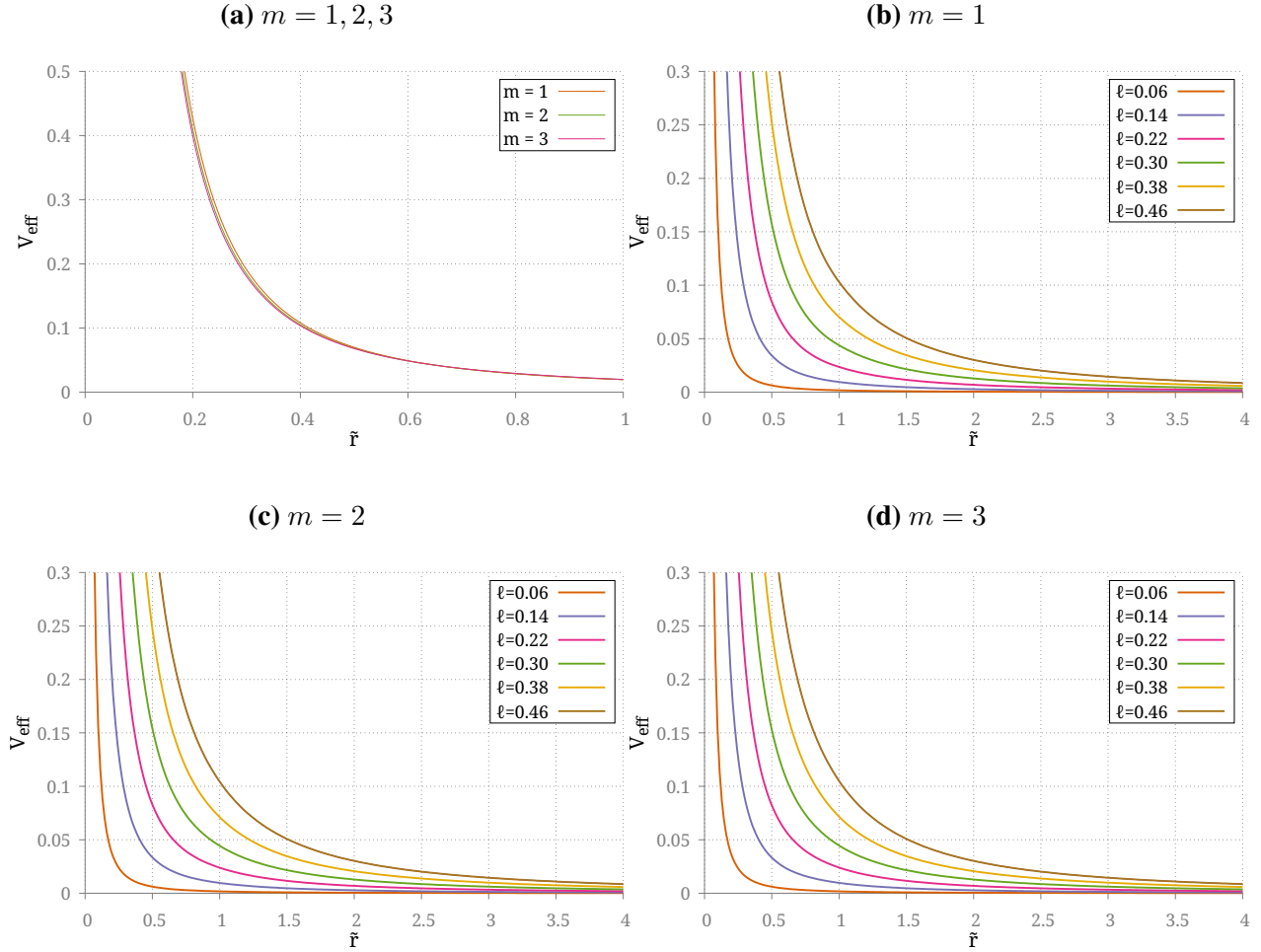
que es una función que solo depende de la variable r y representa el potencial efectivo en el plano ecuatorial.

Ahora vamos a enfocar nuestro estudio nuevamente en los modelos con $m = 1, 2, 3$. Para obtener los resultados particulares que buscamos, simplemente reemplazamos U con las soluciones dentro del disco (14), (15) y (16), así como las soluciones fuera del disco (24), (25) y (26). De manera que conseguimos establecer el potencial efectivo como una función definida por partes. Para representar gráficamente los potenciales efectivos de partículas de masa nula, es necesario establecer la condición $\epsilon = 0$. Los resultados obtenidos se presentan en la figura 1. En estos gráficos, se observa la ausencia de un pozo de potencial para el conjunto de parámetros seleccionados, lo que implica que no existen órbitas acotadas ni órbitas circulares en este caso. Para considerar partículas masivas, se impone la condición $\epsilon = -1$ para obtener los potenciales efectivos correspondientes. Los resultados obtenidos se presentan en la figura 2. En estos gráficos, a diferencia del caso anterior, sí observamos la presencia de un pozo de potencial para el conjunto de parámetros seleccionados. Esto nos indica que las partículas masivas pueden experimentar una fuerza centrípeta que las mantiene en trayectorias circulares. Como resultado, podemos establecer la existencia de órbitas circulares y, por tanto, de órbitas acotadas. Sin embargo, aún queda por determinar la naturaleza de estas órbitas, es decir, si son estables, inestables o marginalmente estables. Este tema será abordado en la próxima sección.

Por último, para determinar los puntos críticos del potencial efectivo, derivamos la expre-

Figura 1

Potenciales efectivos para partículas de masa nula en los modelos $m = 1, 2, 3$, utilizando los parámetros $\tilde{M} = 30$ y $k = 20$.



Nota: En la figura (a), se representan los potenciales efectivos utilizando un valor constante de momento angular $\ell = 0.2$ para los tres modelos. En las figuras (b), (c) y (d) se muestran de forma individual los modelos $m = 1, 2, 3$, respectivamente, y se grafican los potenciales efectivos para diferentes valores del momento angular.

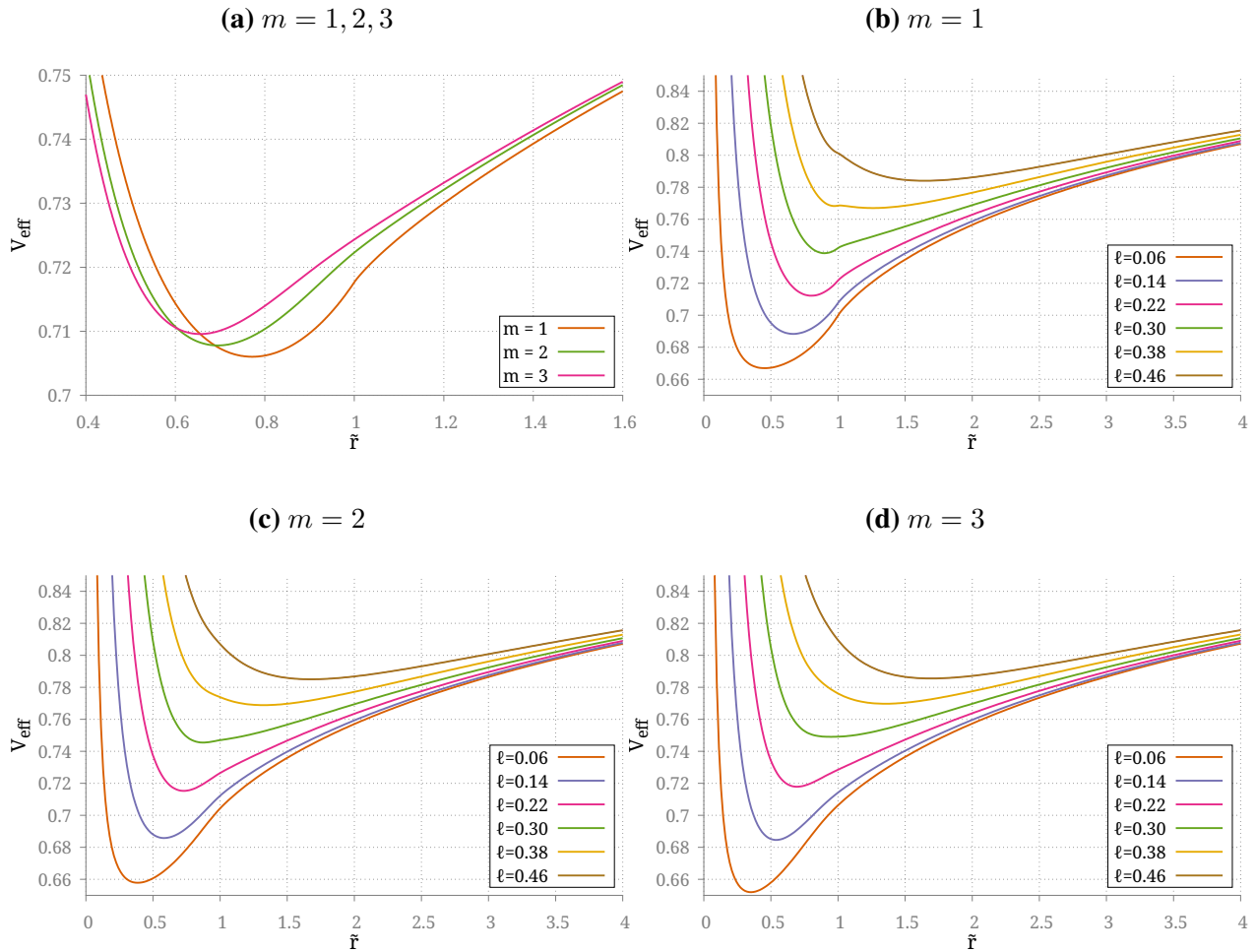
sión (72) y la igualamos a cero. Como resultado, obtenemos la ecuación

$$(2a\tilde{r}U_{,r} - k(1 - U))\ell^2 + a^3\tilde{r}^3(1 - U)^{2/k}U_{,r}\epsilon^2 = 0, \quad (73)$$

cuyas raíces representan los radios de las órbitas circulares en el plano ecuatorial. Dada la naturaleza de las funciones U para el sistema de disco-halo, la ecuación (73) no es sencilla de resolver.

Figura 2

Potenciales efectivos para partículas masivas en los modelos $m = 1, 2, 3$, utilizando los parámetros $M = 30$ y $k = 20$.



Nota: En la figura (a), se representan los potenciales efectivos utilizando un valor constante de momento angular $\ell = 0.2$ para los tres modelos. En las figuras (b), (c) y (d) se muestran de forma individual los modelos $m = 1, 2, 3$, respectivamente, y se grafican los potenciales efectivos para diferentes valores del momento angular.

Es bien sabido que las raíces de polinomios de quinto orden o superiores no pueden resolverse mediante radicales, y se hace necesario recurrir a la teoría de Galois para obtener dichas raíces.

Dado que la ecuación (73) es, en general, un polinomio de orden superior, será necesario utilizar métodos numéricos para determinar los radios de las órbitas circulares.

3.2. Estabilidad de las órbitas circulares

En la sección anterior, obtuvimos la expresión (73) que nos permite determinar las órbitas circulares. Sin embargo, esta expresión no nos proporciona información sobre la estabilidad de dichas órbitas. Por lo tanto, nuestro enfoque ahora se centra en establecer las regiones donde las órbitas son estables o inestables, así como determinar la posible existencia de órbitas marginalmente estables. Para ello, utilizaremos los criterios de estabilidad de las órbitas circulares en el plano ecuatorial (López-Suspes and González, 2014), los cuales se obtienen a partir de la segunda derivada del potencial efectivo:

- Una órbita circular es estable si

$$\left. \frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} \right|_{r=r_c} > 0. \quad (74)$$

- Una órbita circular es inestable si

$$\left. \frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} \right|_{r=r_c} < 0. \quad (75)$$

- Una órbita circular es marginalmente estable si

$$\left. \frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} \right|_{r=r_c} = 0. \quad (76)$$

En el contexto de los modelos de galaxias en forma de disco, se encuentra una forma alternativa y ampliamente utilizada en la literatura científica para definir los criterios de estabilidad. En este enfoque, se utiliza la primera derivada del momento angular para determinar la estabilidad de

las órbitas circulares mediante la expresión (Letelier, 2003)

$$\ell \frac{d\ell}{dr} > 0, \quad (77)$$

donde ℓ representa el momento angular en función del radio de las órbitas circulares. Partiendo de la ecuación (73), podemos obtener una expresión de dicha función ℓ para las partículas masivas

$$\ell^2 = \frac{a^3 \tilde{r}^3 (1 - U)^{2/k} U_{,r}}{k(1 - U) - 2a\tilde{r}U_{,r}}, \quad (78)$$

donde establecemos la restricción $0 \leq \frac{\tilde{r}U_{,r}}{1-U} < \frac{k}{2a}$ para asegurar que el cuadrado del momento angular sea siempre positivo. Además, cuando existen dos puntos críticos para el potencial efectivo, podemos obtener el radio de la órbita marginalmente estable para partículas masivas mediante la ecuación $\frac{d\ell^2}{dr} = 0$ (López-Suspes and González, 2014).

Finalmente, usando el momento angular, podemos establecer la condición de estabilidad como

$$\frac{d\ell^2}{dr} \geq 0, \quad (79)$$

que para nuestro caso de estudio es

$$k^2(1 - U)^2(rU_{,rr} + 3U_{,r}) + rU_{,r}^2(4rU_{,r} + (k^2 - 6k)(1 - U)) \geq 0, \quad (80)$$

donde la igualdad se cumple para los radios de las órbitas marginalmente estables, mientras que la desigualdad se cumple para las órbitas circulares estables. Ahora ya tenemos todo listo para estudiar las regiones estables, inestables y las orbitas circulares marginalmente estables. Estas regiones

se calcularon usando el conjunto de parámetros $\tilde{M} = 30$ y $k = 20$ para cada uno de los modelos ($m = 1, 2, 3$) y los resultados se presentan en la tabla 2. Además, en la figura 3 hemos graficado el momento angular en función del radio de las órbitas circulares para tener una visión más amplia del comportamiento de las órbitas circulares en el plano ecuatorial.

Tabla 2

Regiones estables, inestables y ROME en los modelos $m = 1, 2, 3$, utilizando los parámetros $\tilde{M} = 30$ y $k = 20$.

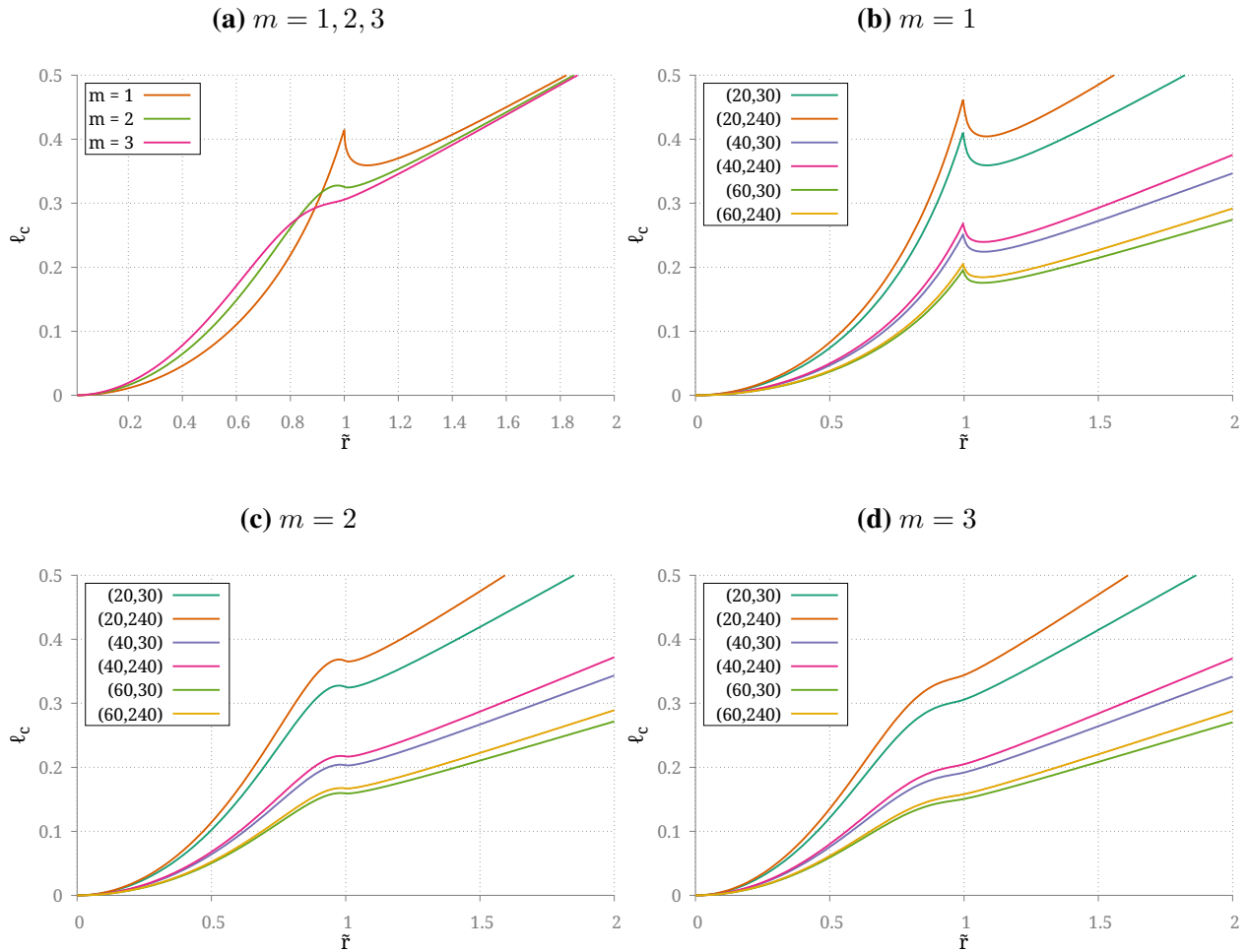
Modelo	Región estable	ROME	Región inestable
$m = 1$	$0 \leq \tilde{r} < 1$ $1,085 < \tilde{r} < \infty$	$\tilde{r} = 1,085$	$1 < \tilde{r} < 1,085$
$m = 2$	$0 \leq \tilde{r} < 0,975$ $1,011 < \tilde{r} < \infty$	$\tilde{r} = 0,975$ $\tilde{r} = 1,011$	$0,975 \leq \tilde{r} < 1,011$
$m = 3$	$0 \leq \tilde{r} < \infty$	No existe	No existe

Nota: Se presentan los intervalos correspondientes a las regiones que contienen órbitas circulares estables e inestables, así como los radios de las órbitas circulares marginalmente estables (ROME).

En cuanto a la estabilidad de las órbitas circulares, se observan diferencias significativas entre los tres modelos. En primer lugar, se nota que la discontinuidad se suaviza considerablemente a medida que aumenta el orden del modelo. Mientras que en el modelo $m = 1$ se observa un pico pronunciado en $\tilde{r} = 1$, en el modelo $m = 3$ se puede apreciar una transición más suave en el mismo punto. Es importante destacar que el modelo $m = 3$ no tiene ninguna órbita marginalmente estable, y todas las órbitas circulares son estables en el plano del disco. En lo que refiere al modelo $m = 2$, se observa la presencia de dos órbitas marginalmente estables: una dentro del disco y otra fuera del disco. Esto implica que el modelo tiene dos regiones con órbitas circulares estables, separadas por una región inestable. En relación al modelo $m = 1$, también presenta dos regiones estables separadas por una región inestable. Sin embargo, solo existe una órbita marginalmente

Figura 3

Momento angular en función del radio de las órbitas circulares para geodésicas temporales en los modelos $m = 1, 2, 3$.



Nota: En la figura (a), se grafica el momento angular en función del radio de las órbitas circulares utilizando los parámetros $\tilde{M} = 30$ y $k = 20$ para los tres modelos. En las figuras (b), (c) y (d) se muestran de forma individual los modelos $m = 1, 2, 3$, respectivamente, y se modifican los valores para \tilde{M} y k . Cada una de estas curvas está etiquetada con un par de números (k, \tilde{M}) .

estable en este caso. No obstante, es importante destacar que aún queda por determinar si en el borde del disco, en $\tilde{r} = 1$, puede existir una órbita marginalmente estable. Este punto está fuera del alcance del análisis actual debido a que al existir una discontinuidad la función no es diferenciable en dicho punto.

3.3. Ecuación de órbita

Para estudiar órbitas no circulares se utiliza el mismo tratamiento que en Mecánica Clásica para resolver el problema de Kepler. De manera que si resolvemos la ecuación diferencial

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right) = \frac{\dot{r}^2}{\dot{\varphi}^2}, \quad (81)$$

podemos conocer la dependencia de la coordenada radial respecto a la coordenada azimutal. Esta ecuación se conoce como la ecuación de la órbita de una partícula y es aplicable tanto para mecánica clásica como para relatividad general. Sin embargo, como se mencionó en la sección 2.3, no existe una solución analítica para esta ecuación diferencial. Por lo tanto, es necesario realizar cálculos numéricos para obtener las trayectorias orbitales.

Para determinar las órbitas no circulares, solucionaremos numéricamente el sistema autónomo formado por las siguientes ecuaciones

$$\dot{\varphi} = \frac{\ell}{r^2} e^{2\psi}, \quad (82)$$

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{r^3} e^{4\psi} - \psi_{,r} \left(E^2 - \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{r^2} e^{4\psi} \right), \quad (83)$$

donde la primera ecuación diferencial se deduce de la expresión (42) para el momento angular conservado y la segunda ecuación se obtiene de la ecuación de las geodésicas (44). El anterior sistema de ecuaciones involucra derivadas de primer y segundo orden, no obstante, resulta más conveniente tener un sistema formado por ecuaciones diferenciales de primer orden. Por esta razón incluiremos una nueva variable v_r para reducir el orden del sistema de ecuaciones, de forma que

ahora tendremos un sistema formado por tres ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{\varphi} = \frac{\ell}{r^2} e^{2\psi}, \quad (84)$$

$$\dot{r} = v_r, \quad (85)$$

$$\dot{v}_r = \frac{\ell^2}{r^3} e^{4\psi} - \psi_{,r} \left(E^2 - v_r^2 + \frac{\ell^2}{r^2} e^{4\psi} \right), \quad (86)$$

donde v_r representa la velocidad radial de la partícula de prueba.

Para definir las condiciones iniciales debemos tener en cuenta la ecuación (45) para establecer de manera adecuada la velocidad radial inicial, v_0 , de la partícula. De modo que la condición para la velocidad inicial es

$$v_0 = E^2 - V_{eff}(r_0), \quad (87)$$

donde r_0 representa la posición radial inicial de la partícula de prueba. Por otra parte, valiéndonos de la relación (5) podemos calcular la primera deriva de la función métrica

$$\psi_{,r} = \frac{U_{,r}}{k(1-U)}, \quad (88)$$

donde las primeras derivadas respecto a r de la función U ya fueron determinadas en el capítulo 1 para los primeros tres modelos $m = 1, 2, 3$. Finalmente realizamos las sustituciones $\tilde{\varphi} = \varphi/a$, $\tilde{r} = r/a$ y $\tilde{v}_r = v_r/a$. De modo que al realizar estas sustituciones y reemplazar la función métrica

ψ y sus derivadas obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{\tilde{\phi}} = \frac{\ell}{a\tilde{r}^2(1-U)^{2/k}}, \quad (89)$$

$$\dot{\tilde{r}} = \tilde{v}_r, \quad (90)$$

$$\dot{\tilde{v}}_r = \frac{\ell^2}{a^4\tilde{r}^3(1-U)^{4/k}} - \frac{U_{,r}}{ak(1-U)} \left(E^2 - a^2\tilde{v}_r^2 + \frac{\ell^2}{a^2\tilde{r}^2(1-U)^{4/k}} \right), \quad (91)$$

y la condición para la velocidad inicial se transforma en

$$a\tilde{v}_0 = E^2 - V_{eff}(\tilde{r}_0). \quad (92)$$

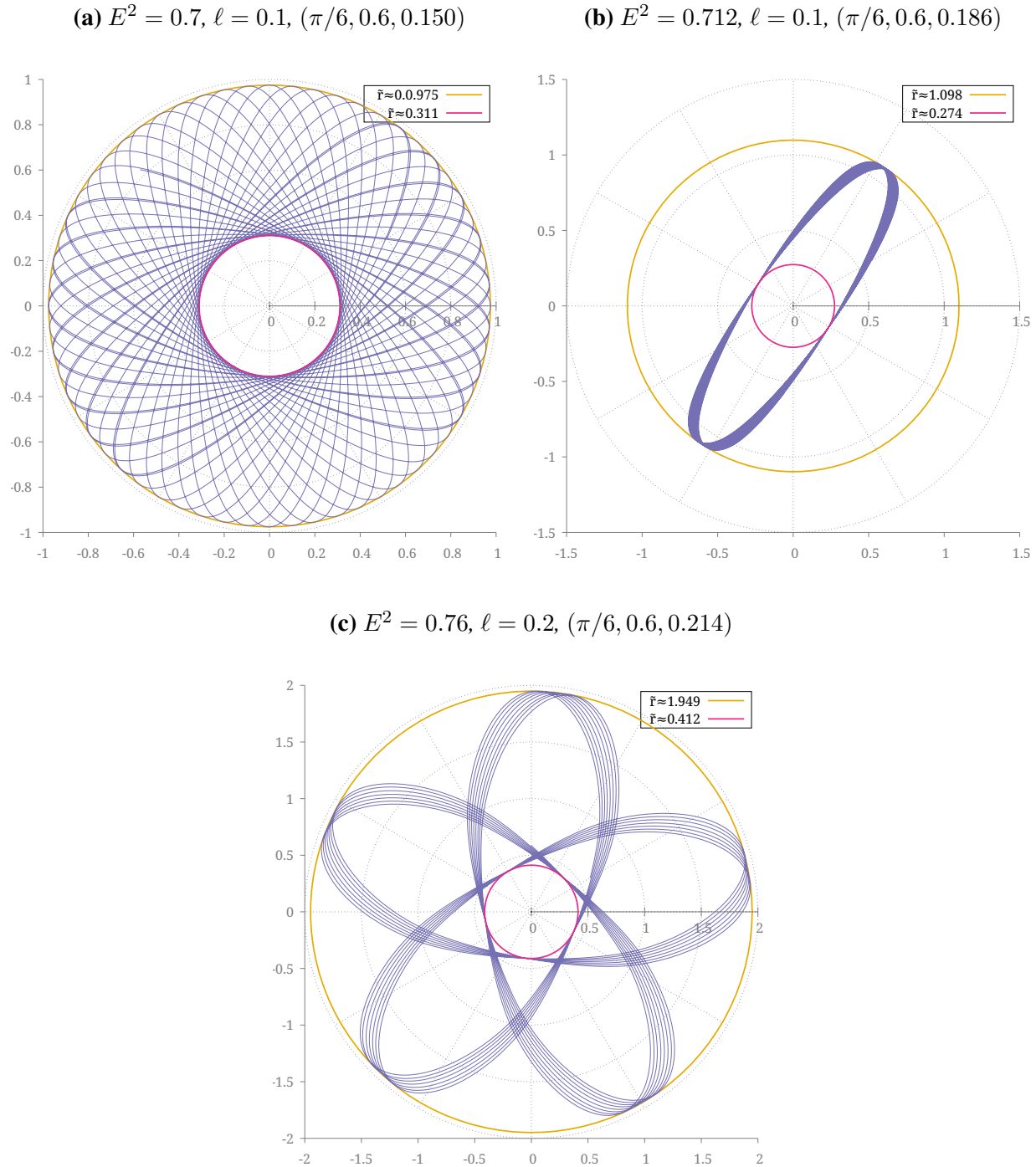
Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales compuesto por (89), (90) y (91), hemos usado el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden incluido en el software matemático Maxima. Por simplicidad, hemos establecido un radio fijo para el disco, $a = 1$, para todas las órbitas. En las figuras 4, 5, 6, 7, 8 y 9 se muestran las trayectorias resultantes para los modelos $m = 1, 2, 3$, respectivamente. Hemos calculado órbitas para partículas confinadas dentro del disco como para partículas que se mueven exclusivamente fuera del disco, incluyendo también aquellas que salen y entran del mismo.

Nuestros resultados revelaron un comportamiento consistente en el movimiento de las partículas en todas las configuraciones analizadas. Se observó que las trayectorias exhiben un radio mínimo, conocido como perihelio, y un radio máximo, denominado afelio. Estos puntos extremos se encontraban bien definidos en todas las órbitas y concuerdan con lo esperado del análisis del potencial efectivo. Cabe destacar que, a pesar de la discontinuidad generada en el límite del disco, no se detectaron comportamientos anómalos en las trayectorias de las partículas que atravesaban el

borde del disco. Esto sugiere que el sistema mantiene una coherencia dinámica a lo largo de todo el rango de movimiento de las partículas.

Figura 4

Órbitas para partículas de prueba masivas en potenciales efectivos con $\tilde{M} = 30$ y $k = 20$ para el modelo $m = 1$. Parte 1



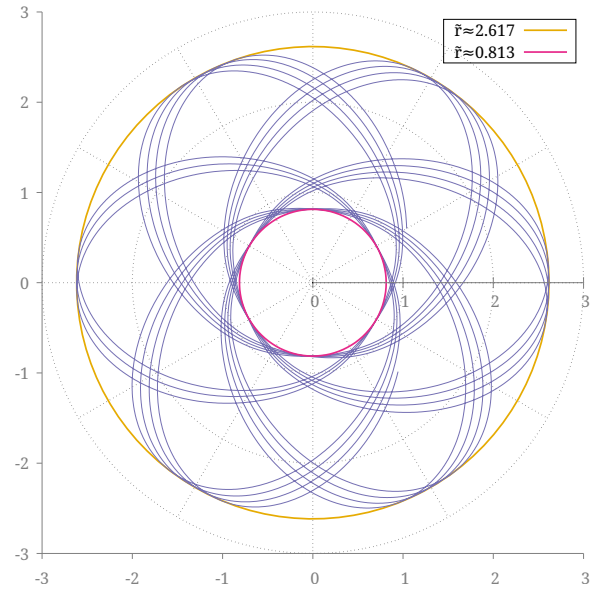
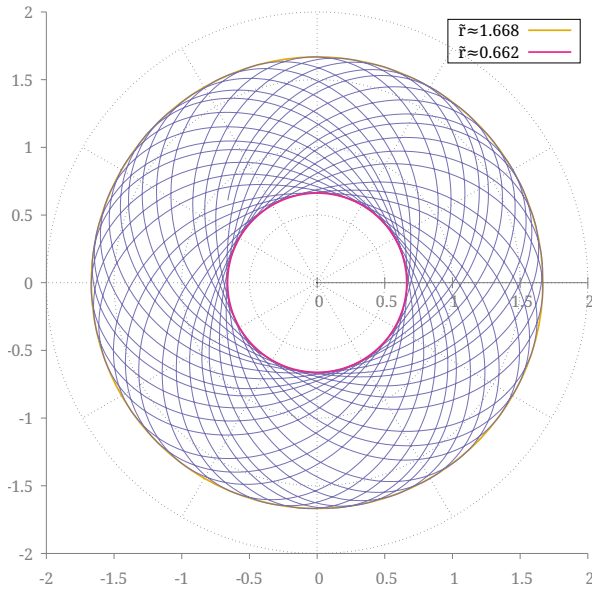
Nota: En parte la superior de cada gráfica se especifica la energía E^2 y el momento angular ℓ de la partícula de prueba. También se presenta el conjunto de números $(\varphi_0, \tilde{r}_0, \tilde{v}_0)$ que corresponden a las condiciones iniciales usadas para hallar numéricamente la órbita.

Figura 5

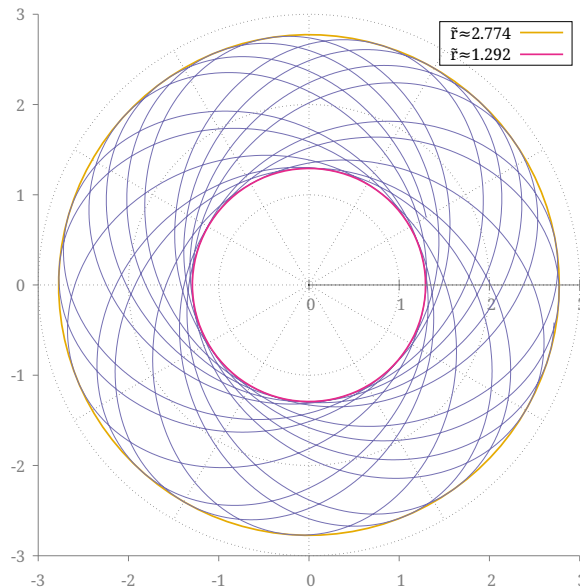
Órbitas para partículas de prueba masivas en potenciales efectivos con $\tilde{M} = 30$ y $k = 20$ para el modelo $m = 1$. Parte 2

(a) $E^2 = 0.76$, $\ell = 0.3$, $(\pi/6, 0.7, 0.082)$

(b) $E^2 = 0.79$, $\ell = 0.4$, $(\pi/6, 1.2, 0.132)$



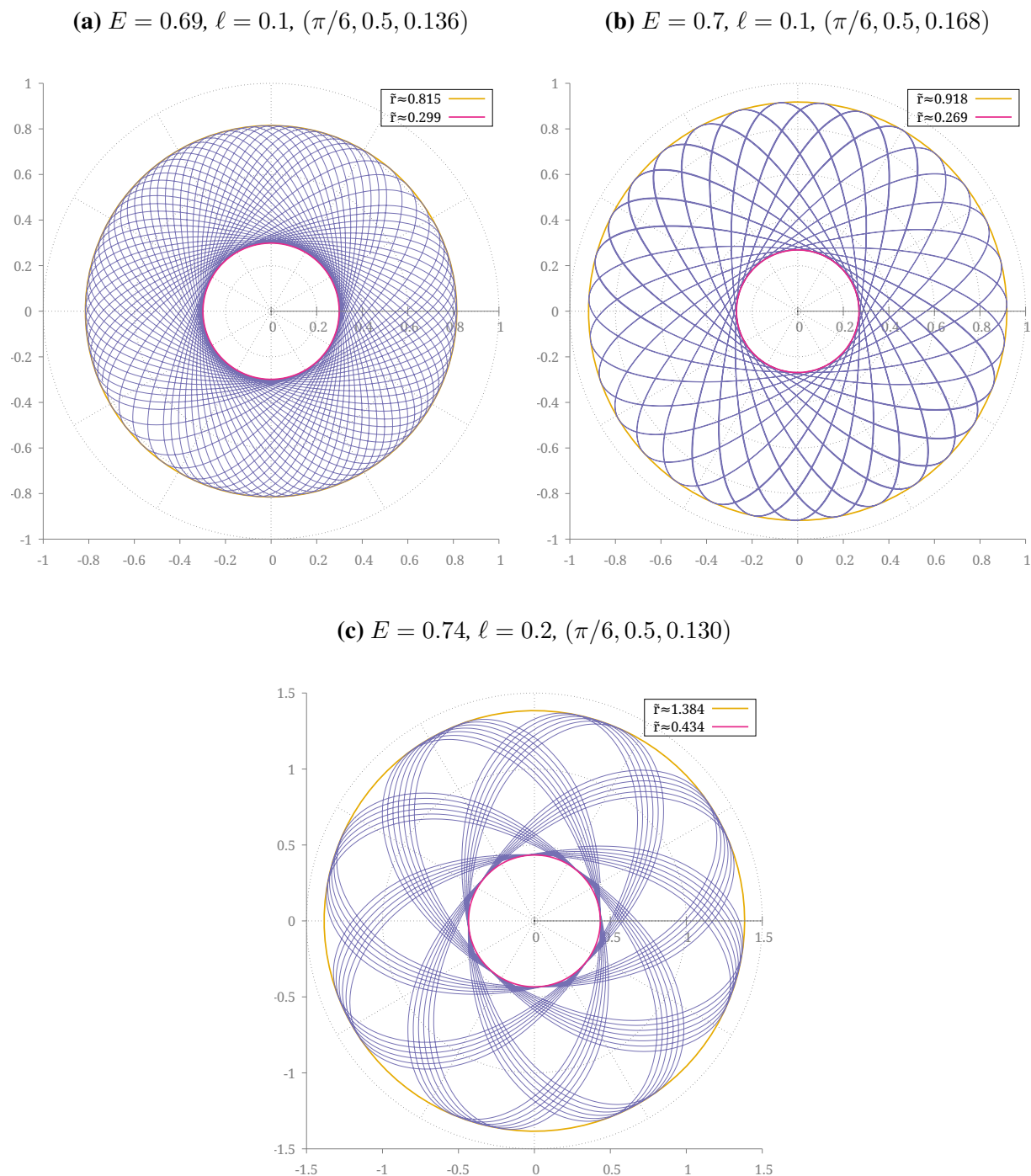
(c) $E^2 = 0.8$, $\ell = 0.5$, $(\pi/6, 1.5, 0.079)$



Nota: En parte la superior de cada gráfica se especifica la energía E^2 y el momento angular ℓ de la partícula de prueba. También se presenta el conjunto de números $(\varphi_0, \tilde{r}_0, \tilde{v}_0)$ que corresponden a las condiciones iniciales usadas para hallar numéricamente la órbita.

Figura 6

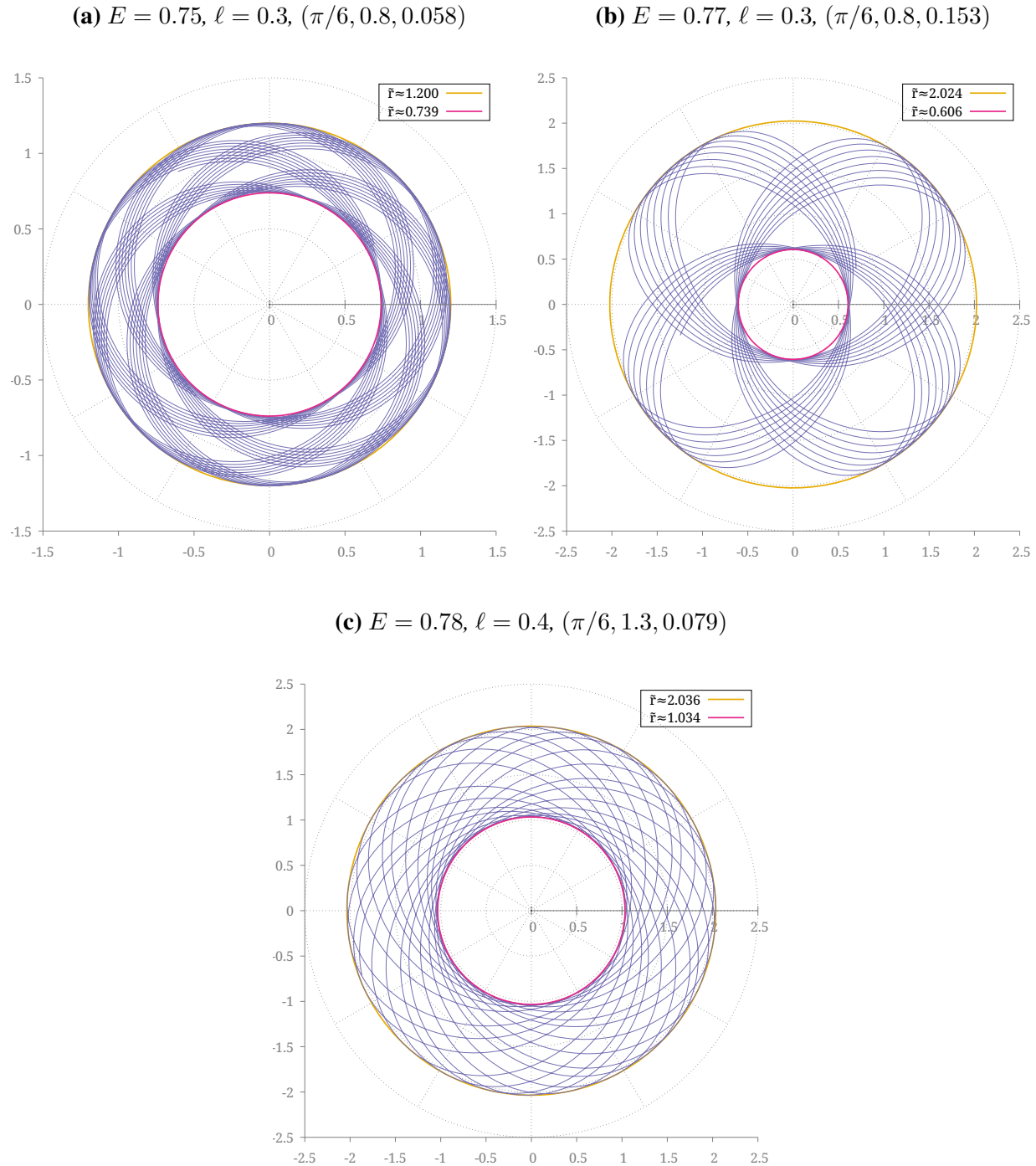
Órbitas para partículas de prueba masivas en potenciales efectivos con $\tilde{M} = 30$ y $k = 20$ para el modelo $m = 2$. Parte 1



Nota: En parte la superior de cada gráfica se especifica la energía E^2 y el momento angular ℓ de la partícula de prueba. También se presenta el conjunto de números $(\varphi_0, \tilde{r}_0, \dot{\tilde{r}}_0)$ que corresponden a las condiciones iniciales usadas para hallar numéricamente la órbita.

Figura 7

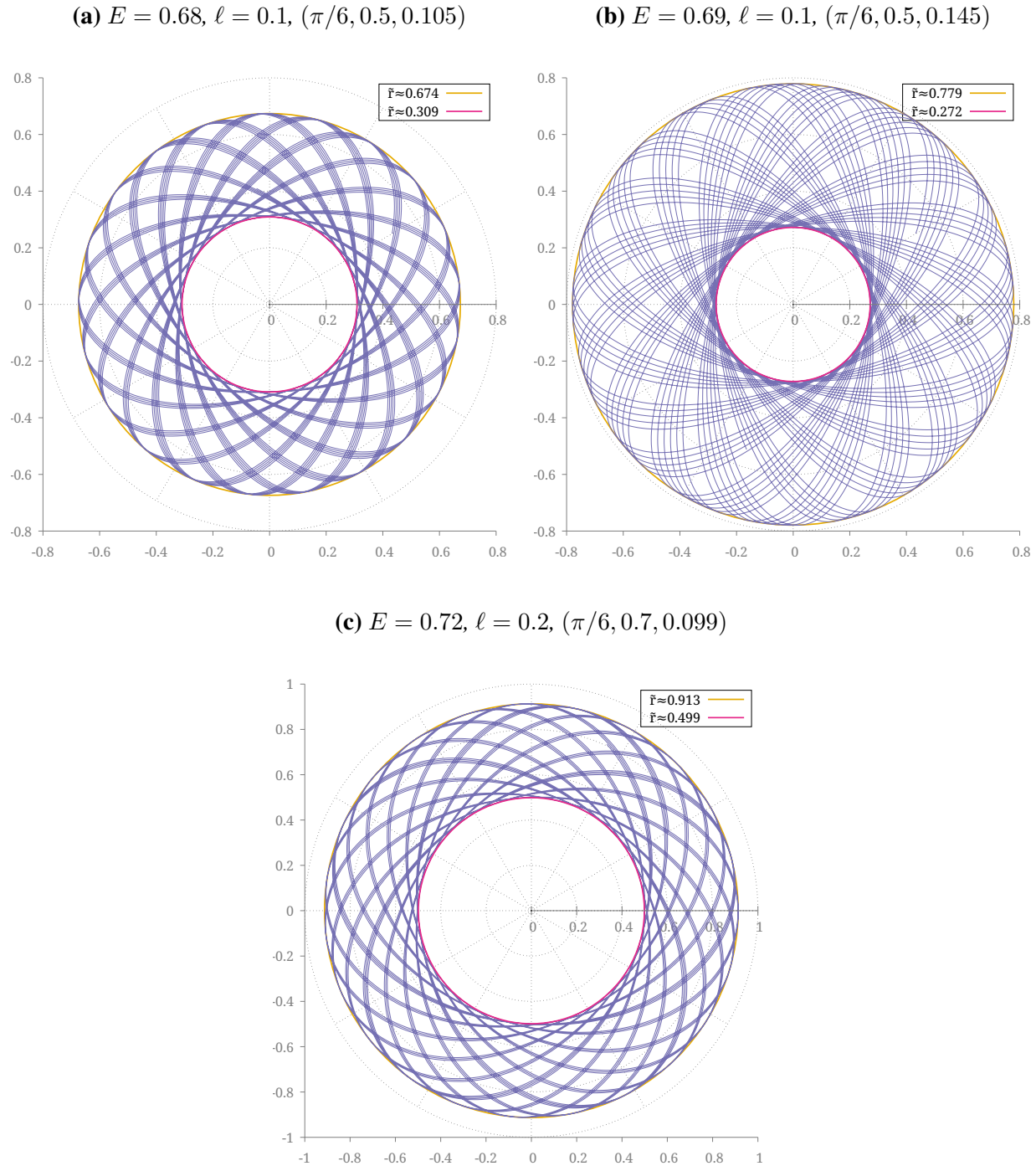
Órbitas para partículas de prueba masivas en potenciales efectivos con $\tilde{M} = 30$ y $k = 20$ para el modelo $m = 2$. Parte 2



Nota: En parte la superior de cada gráfica se especifica la energía E^2 y el momento angular ℓ de la partícula de prueba. También se presenta el conjunto de números $(\varphi_0, \tilde{r}_0, \dot{\tilde{r}}_0)$ que corresponden a las condiciones iniciales usadas para hallar numéricamente la órbita.

Figura 8

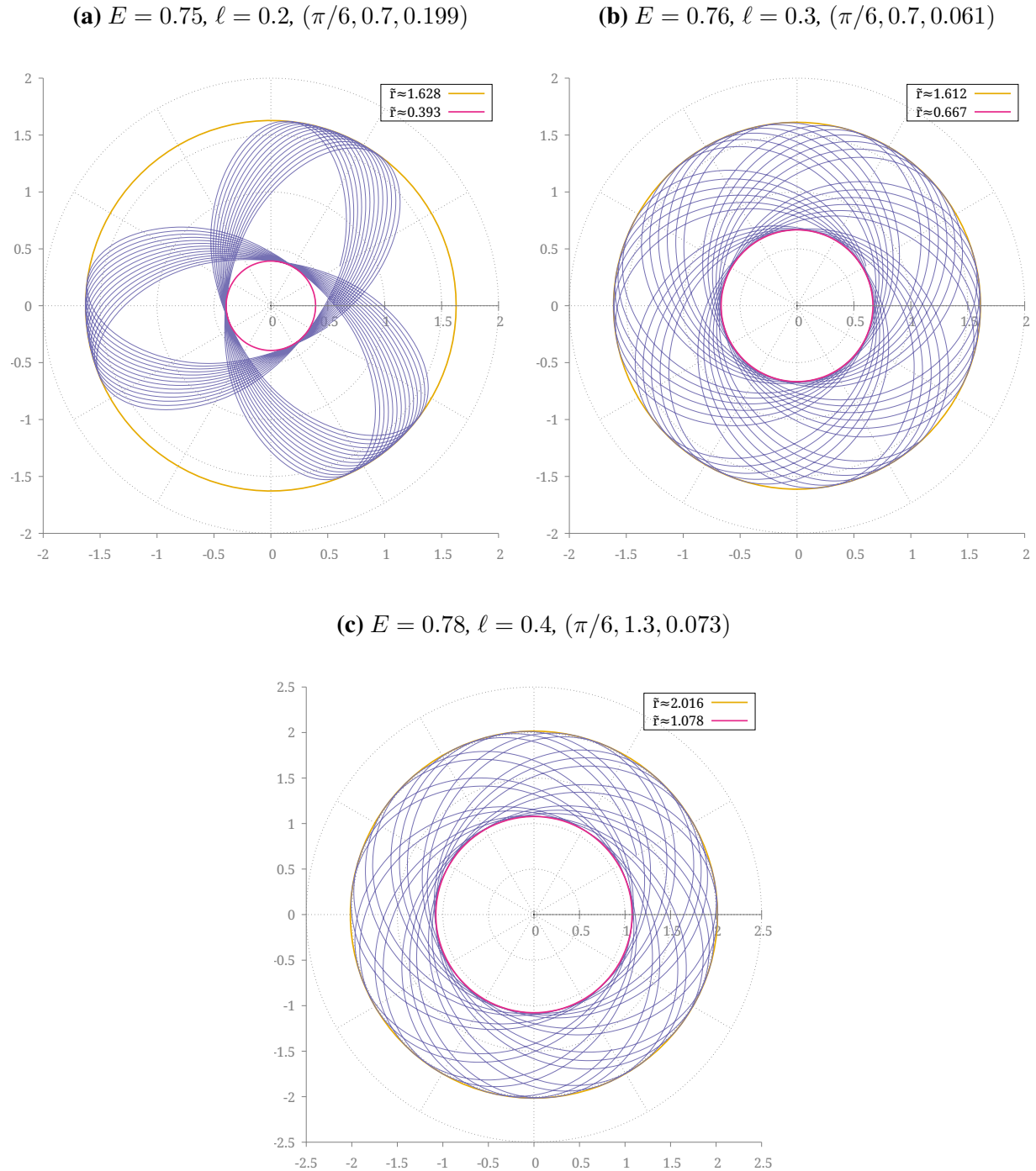
Órbitas para partículas de prueba masivas en potenciales efectivos con $\tilde{M} = 30$ y $k = 20$ para el modelo $m = 3$. Parte 1



Nota: En parte la superior de cada gráfica se especifica la energía E^2 y el momento angular ℓ de la partícula de prueba. También se presenta el conjunto de números $(\varphi_0, \tilde{r}_0, \dot{\tilde{r}}_0)$ que corresponden a las condiciones iniciales usadas para hallar numéricamente la órbita.

Figura 9

Órbitas para partículas de prueba masivas en potenciales efectivos con $\tilde{M} = 30$ y $k = 20$ para el modelo $m = 3$. Parte 2



Nota: En parte la superior de cada gráfica se especifica la energía E^2 y el momento angular ℓ de la partícula de prueba. También se presenta el conjunto de números $(\varphi_0, \tilde{r}_0, \dot{\tilde{r}}_0)$ que corresponden a las condiciones iniciales usadas para hallar numéricamente la órbita.

CAPÍTULO 4

Conclusiones

En este trabajo, examinamos el movimiento de partículas de prueba en espacio-tiempos conformestáticos y axialmente simétricos producidos por discos relativistas de Morgan y Morgan dentro de halos esferoidales. Nos centramos en los tres primeros modelos de la familia infinita de soluciones, restringiendo el movimiento de las partículas de prueba al plano formado por la distribución discoidal de materia, el plano ecuatorial.

Para los tres modelos escogidos, se buscaron soluciones analíticas de las ecuaciones de la geodésicas temporales y nulas empleando el formalismo lagrangiano. Gracias a la inclusión de las constantes de movimiento y a la restricción al plano ecuatorial, conseguimos reducir las ecuaciones de las geodésicas a ecuaciones diferenciales separables de primer orden. A pesar de las simplificaciones realizadas, la integración analítica no ha sido posible para trayectorias no radiales. Sin embargo, sí pudimos integrar analíticamente algunas trayectorias radiales. El mayor conjunto de soluciones analíticas lo hemos conseguido para geodésicas nulas dentro del disco, como se detalla en la tabla 1. Para las geodésicas nulas fuera del disco solo hemos encontrado soluciones analíticas cuando $k = 2$. En cuanto a las geodésicas temporales, el éxito fue más limitado, obteniendo

soluciones analíticas únicamente para geodésicas dentro del disco para el modelo $m = 1$ cuando $k = 2$. Para las trayectorias radiales no se han encontrado soluciones de forma analítica para las geodésicas temporales fuera del disco.

Al estudiar la naturaleza de las posibles órbitas mediante el análisis del potencial efectivo, hemos encontrado que en general no existen orbitas acotadas para partículas de masa nulas. Para partículas masivas, identificamos la presencia de pozos de potencial y, por tanto la existencia de órbitas circulares. Todos los modelos estudiados muestran regiones que pueden contener órbitas circulares estables para partículas masivas, siendo particularmente destacable el modelo $m = 3$, donde las orbitas circulares estables son posibles en toda la extensión del plano ecuatorial. Además, observamos que la discontinuidad en el borde del disco se vuelve menos abrupta a medida que el orden del modelo aumenta, con el modelo $m = 3$ mostrando las transiciones más fluidas.

Finalmente, complementamos nuestro análisis con una sección de soluciones numéricas para las ecuaciones de movimiento para las partículas de prueba masivas. Las gráficas obtenidas con este procesamiento evidencian un comportamiento consistente para el movimiento de las partículas y que presentan órbitas con un radio mínimo y máximo durante su recorrido. Estos puntos extremos se encuentran bien definidos en todas las órbitas y son coherentes con nuestro análisis previo del potencial efectivo. Es importante señalar que, a pesar de la discontinuidad generada en el límite del disco, no se detectaron comportamientos anómalos en las trayectorias de las partículas que atravesaban el borde del disco y se mantuvieron consistentes y sin anomalías, reflejando una dinámica coherente en todo el sistema.

Los resultados de este trabajo se presentaron en el XXIX Congreso Nacional de Física realizado del 21 al 23 de febrero de 2022 en la ciudad de Armenia, obteniendo una mención al mejor trabajo en la modalidad mural.

Referencias Bibliográficas

Asmodelle, E. (2017). Tests of general relativity: A review. *arXiv:1705.04397*.

Bateman, H. (1944). *Partial differential equations of mathematical physics*. Dover Publications, New York, 1st american edition.

Bonnor, W. and Sackfield, A. (1968). The interpretation of some spheroidal metrics. *Communications in Mathematical Physics*, 8(4):338–344.

Calvao, M., Damiao Soares, I., and Tiomno, J. (1990). Geodesics in gödel-type space-times. *General relativity and gravitation*, 22(6):683–705.

Camci, U. (2014). Symmetries of geodesic motion in gödel-type spacetimes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014(07):002–002.

Carroll, S. M. (2003). *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison-Wesley.

Crispino, L. C. and Kennefick, D. J. (2019). A hundred years of the first experimental test of general relativity. *Nature Physics*, 15(5):416–419.

- de Sitter, W. (1916). On Einstein's Theory of Gravitation and its Astronomical Consequences. First Paper. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 76(9):699–728.
- Del Águila, J. C. and Matos, T. (2021). Geodesics near a curvature singularity of stationary and axially symmetric space–times. *Classical and Quantum Gravity*, 38(5):055008.
- Einstein, A. (1915). Grundgedanken der allgemeinen relativitätstheorie und anwendung dieser theorie in der astronomie. *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte (Part 1)*, 315.
- Event Horizon Telescope Collaboration, Akiyama, K., Alberdi, A., and *et al.* (2019). First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875:L1.
- Event Horizon Telescope Collaboration, Akiyama, K., Alberdi, A., and *et al.* (2022). First sagittarius a* event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole in the center of the milky way. *The Astrophysical Journal Letters*, 930(2):L12.
- Frost, T. C. and Perlick, V. (2021). Lightlike geodesics and gravitational lensing in the spacetime of an accelerating black hole. *Classical and Quantum Gravity*, 38(8):085016.
- García, A., Hackmann, E., Kunz, J., Lämmerzahl, C., and Macías, A. (2015). Motion of test particles in a regular black hole space–time. *Journal of Mathematical Physics*, 56(3):032501.
- González, G. A., Gutiérrez-Piñeres, A. C., and Ospina, P. A. (2008). Finite axisymmetric charged dust disks in conformastatic spacetimes. *Phys. Rev. D*, 78:064058.
- González, G. A., Gutiérrez-Piñeres, A. C., and Viña Cervantes, V. M. (2009). Relativistic static

- thin dust disks with an inner edge: An infinite family of new exact solutions. *Phys. Rev. D*, 79:124048.
- González, G. A. and Pimentel, O. M. (2016). Static thin disks with haloes as sources of conformastatic spacetimes. *Phys. Rev. D*, 93:044034.
- González, G. A. and López-Suspes, F. (2011). Timelike and null equatorial geodesics in the Bonnor-Sackfield relativistic disk. *Revista Integración*, 29:59 – 72.
- González, G. A. and Reina, J. I. (2006). An infinite family of generalized Kalnajs discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 371(4):1873–1876.
- González, P., Olivares, M., Vásquez, Y., and Villanueva, J. (2021). Null geodesics in five-dimensional reissner–nordström anti-de sitter black holes. *The European Physical Journal C*, 81(3):1–11.
- Guha, S. and Bhattacharya, P. (2012). Geodesic motions near a five-dimensional reissner–nordström anti-de sitter black hole. *Journal of Physics: Conference Series*, 405:012017.
- Hackmann, E., Kagramanova, V., Kunz, J., and Lämmerzahl, C. (2008). Analytic solutions of the geodesic equation in higher dimensional static spherically symmetric spacetimes. *Phys. Rev. D*, 78:124018.
- Hackmann, E., Kagramanova, V., Kunz, J., and Lämmerzahl, C. (2009). Analytic solutions of the geodesic equation in axially symmetric space-times. *EPL (Europhysics Letters)*, 88(3):30008.
- Hackmann, E. and Lämmerzahl, C. (2008a). Complete analytic solution of the geodesic equation in schwarzschild-(anti-)de sitter spacetimes. *Phys. Rev. Lett.*, 100:171101.

- Hackmann, E. and Lämmerzahl, C. (2008b). Geodesic equation in schwarzschild-(anti-)de sitter space-times: Analytical solutions and applications. *Phys. Rev. D*, 78:024035.
- Hackmann, E., Lämmerzahl, C., Kagramanova, V., and Kunz, J. (2010). Analytical solution of the geodesic equation in kerr-(anti-) de sitter space-times. *Phys. Rev. D*, 81:044020.
- Hackmann, E. and Lämmerzahl, C. (2014). Analytical solution methods for geodesic motion. In *AIP Conference Proceedings*. American Institute of Physics, AIP Publishing LLC.
- Hackmann, E. and Xu, H. (2013). Charged particle motion in kerr-newmann space-times. *Phys. Rev. D*, 87:124030.
- Hagihara, Y. (1930). Theory of the Relativistic Trajectories in a Gravitational Field of Schwarzschild. *Japanese Journal of Astronomy and Geophysics*, 8:67.
- Harvey, A. (1989). Geodesics in kasner universes. *Phys. Rev. D*, 39:673–676.
- Kerr, R. P. (1963). Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11:237–238.
- Kraniotis, G. V. (2004). Precise relativistic orbits in kerr and kerr-(anti) de sitter spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 21(19):4743–4769.
- Letelier, P. S. (2003). Stability of circular orbits of particles moving around black holes surrounded by axially symmetric structures. *Physical Review D*, 68(10):104002.
- Lim, Y.-K. (2021). Null geodesics in the c metric with a cosmological constant. *Phys. Rev. D*, 103:024007.

- López-Suspes, F. and González, G. A. (2014). Equatorial circular orbits of neutral test particles in weyl spacetimes. *Brazilian Journal of Physics*, 44(4):385–397.
- Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A. (2000). *Gravitation*. Freeman San Francisco, CA.
- Morgan, T. and Morgan, L. (1969). The gravitational field of a disk. *Phys. Rev.*, 183:1097–1101.
- Newton, I. (1687). *Philosophiae naturalis principia mathematica*. J. Societatis Regiae ac Typis J. Streater.
- Olum, K. D. (2010). Geodesics in the static mallett spacetime. *Phys. Rev. D*, 81:127501.
- Ospino, J., Hernández-Pastora, J. L., and Núñez, L. A. (2022). All analytic solutions for geodesic motion in axially symmetric space-times. *The European Physical Journal C*, 82(7).
- Panotopoulos, G. and Rincón, A. (2022). Orbits of light rays in (1+2)-dimensional einstein–power–maxwell gravity: Exact analytical solution to the null geodesic equations. *Annals of Physics*, 443:168947.
- Panotopoulos, G., Rincón, A., and Lopes, I. (2021). Orbits of light rays in scale-dependent gravity: Exact analytical solutions to the null geodesic equations. *Phys. Rev. D*, 103:104040.
- Ribeiro, A. S. and Lima, F. N. (2019). An exact solution of the orbit equation for a massive particle in schwarzschild metric. *arXiv:1910.00083*.
- Ryder, L. (2009). *Introduction to general relativity*. Cambridge university press.
- Scharf, G. (2011). Schwarzschild geodesics in terms of elliptic functions and the related red shift. *Journal of Modern Physics*, 02(04):274–283.

- Schutz, B. (2009). *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2nd edition.
- Schwarzschild, K. (1916). Über das gravitationsfeld einer kugel aus inkompressibler flüssigkeit nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der königlich preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 424–434.
- Semerák, O., Žáček, M., and Zellerin, T. (1999). Test-particle motion in superposed weyl fields. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 308(3):705–717.
- Synge, J. (1960). *Relativity: The General Theory*. North-Holland series in physics. North-Holland Publishing Company.
- Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley, New York, NY.
- Wilkins, D. C. (1972). Bound geodesics in the kerr metric. *Phys. Rev. D*, 5:814–822.
- Zheng, W., Postman, M., Zitrin, A., Moustakas, J., Shu, X., Jouvel, S., Høst, O., Molino, A., Bradley, L., Coe, D., et al. (2012). A magnified young galaxy from about 500 million years after the big bang. *Nature*, 489(7416):406–408.
- Zhou, S., Chen, J., and Wang, Y. (2012). Geodesic structure of test particle in bardeen spacetime. *International Journal of Modern Physics D*, 21(09):1250077.