

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN EN LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA
EN COJINETES

DIEGO ANDRÉS LARA FORERO
JAIME EDUARDO PRIETO GALVIS
ANDREA LIZETH RAMÍREZ MANCIPE
RAFAEL ANDRÉS RAMÍREZ SERRANO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
BUCARAMANGA

2011

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN EN LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA
EN COJINETES

DIEGO ANDRÉS LARA FORERO
JAIME EDUARDO PRIETO GALVIS
ANDREA LIZETH RAMÍREZ MANCIPE
RAFAEL ANDRÉS RAMÍREZ SERRANO

Trabajo de grado para optar al título de Ingeniero Mecánico

Director
Ph.D. Heller Guillermo Sánchez Acevedo

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
BUCARAMANGA

2011

*A Dios, a mis padres, a mi hermano, a mis abuelitos, a mi tía y a Diana por sus consejos,
su comprensión a prueba de todo, su silencio y sobre todo por apoyarme en cada una de
mis decisiones.*

Este es un gran logro de muchos que vendrán.

Diego

*El más importante agradecimiento se lo doy a mis padres y a mi hermano, por el apoyo
incondicional y*

a Nicolas, mi hijo, por alegrarme el día a día.

Jaime

A DIOS, por permitirme alcanzar mis metas y por bendecirme cada día.

A mis PADRES, en especial a mi Mamita por estar a mi lado siempre.

A mis familiares y seres queridos, por su apoyo, y en especial, a Davidcito.

A Manuel Ricardo, por motivarme en cada momento y por su cariño incondicional.

Andre

A Rufinita, mis padres y hermanos que son mi razón de vivir.

A Lina que me hace sonreír todos los días.

Rafa

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Industrial de Santander por posibilitar nuestro crecimiento profesional.
A la escuela de Ingeniería Mecánica y su cuerpo docente por brindarnos las herramientas necesarias para nuestra formación.

A Heller Guillermo Sánchez Acevedo, Ph.D., director del proyecto, por su dedicación, apoyo, asesoría y orientación, lo cual permitió el desarrollo y la culminación exitosa de este proyecto de grado.

A nuestros compañeros y familiares que siempre nos apoyaron

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	41
I SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN	42
1. GENERALIDADES DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN	43
1.1. ORGANIZACIÓN DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN	44
1.2. TEMA DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN	44
1.3. DIRECCIÓN DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN	45
1.4. METODOLOGÍA DEL SEMINARIO	45
2. PLANEACIÓN	47
2.1. ESTUDIO BIBLIOGRÁFICO	47
3. EJECUCIÓN	51
3.1. ACTA	51
4. FINALIZACIÓN	54
4.1. LAS PRESENTACIONES	54
4.2. EL DOCUMENTO	54
II RESULTADOS	57
5. INTRODUCCIÓN	58
6. GENERALIDADES DE LOS COJINETES	65
6.1. PARTES DE UN COJINETE	65
6.1.1. Cojinete	66
6.1.2. Muñón	66
6.1.3. Lubricante	66
6.1.4. Soporte o chumacera	66
6.2. CLASIFICACIÓN Y TIPOS DE COJINETES	66
6.2.1. Según el tipo de cojinete	66
6.2.1.1. Cojinetes de elementos rodantes	67

6.2.1.2. Cojinete de fricción	68
6.2.2. Cojinetes de película gruesa	68
6.2.2.1. Cojinetes Hidrodinámicos	69
6.2.2.2. Cojinetes hidroestáticos	69
6.2.2.3. Cojinetes electromagnéticos	69
6.2.3. Según los esfuerzos a soportar	69
6.2.3.1. Cojinetes radiales o de empuje transversal	70
6.2.3.2. Cojinetes axiales	70
6.2.3.3. Cojinetes de carga combinada	70
6.2.4. Cojinetes porosos impregnados	70
7. FLUJO VISCOSO	72
7.1. INTRODUCCIÓN	72
7.1.1. Viscosidad	72
7.1.2. Condiciones de frontera del flujo	74
7.1.3. Unidades de la viscosidad	74
7.2. VISCOSÍMETROS	76
7.2.1. Viscosímetro capilar	76
7.2.2. Viscosímetro rotacional	79
7.2.3. Viscosímetro de caída de esfera	81
7.3. LA VISCOSIDAD COMO UNA FUNCIÓN DE LA TEMPERATURA	83
7.3.1. Índice de viscosidad	83
7.4. LA VISCOSIDAD COMO UNA FUNCIÓN DE LA PRESIÓN	85
7.5. LUBRICANTES ACEITES	85
7.5.1. Propiedades físico químicas del aceite	87
7.5.1.1. Viscosidad. Método ASTM D-445/446 o DIN 51561/51562	87
7.5.1.2. Índice de viscosidad. Método ASTM D-567	87
7.5.1.3. Untuosidad	87
7.5.1.4. Punto de inflamación (PI). Método ASTM D 92-97	88
7.5.1.5. Punto de fluidez. Método ASTM D-97	89
7.5.1.6. Estabilidad a la oxidación. Método ASTM D-943 o ISO 51587	89
7.5.1.7. Resistencia a la herrumbre y a la corrosión. Método ASTM D-665	90
7.5.1.8. Características de emulsión. Método ASTM D-1401/98	90
7.5.1.9. Estabilidad a la formación de espuma. Método ASTM D-892/97	91
7.5.1.10. Color. Método ASTM D1500/98	91
7.5.2. Aditivos	92
8. ROZAMIENTO DE COJINETES	94
8.1. FRICCIÓN	95
8.1.1. Clases de rozamiento	95

9. TIPOS DE LUBRICACIÓN CON FORMACIÓN DE PELÍCULA	100
9.1. LUBRICACIÓN ESTABLE - NÚMERO CARACTERÍSTICO DEL COJINETE . . .	100
9.2. LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA	102
9.3. LUBRICACIÓN HIDROSTÁTICA	103
9.4. LUBRICACIÓN ELASTOHIDRODINÁMICA	105
9.4.1. Lubricación elastohidrodinámica dura	107
9.4.2. Lubricación elastohidrodinámica blanda	108
9.5. TERMOELASTOHIDRODINÁMICA	109
9.5.1. Ecuaciones básicas del problema LTEHD	110
9.5.2. Procedimiento Numérico	113
9.6. LUBRICACIÓN MARGINAL	114
9.7. LUBRICACIÓN DE PELÍCULA MÍNIMA O MIXTA	115
10. TEORÍA DE LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA	119
10.1. CONDICIONES GEOMÉTRICAS	120
10.2. RELACIONES GEOMÉTRICAS PARA COJINETES CON JUEGO . .	121
10.2.1. Configuración de los cojinetes	123
10.3. ECUACIÓN DE PETROV	125
10.3.1. Ecuación de Petrov para el par de torsión en un cojinete sin carga . . .	128
10.4. OBTENCIÓN DE LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA.	129
10.4.1. Experimentación de Tower e hipótesis de Reynolds.	129
11. MATERIALES PARA COJINETES	138
11.1. CARACTERÍSTICAS DE LOS MATERIALES PARA COJINETES . . .	139
11.1.1. Resistencia a la picadura y agarrotamiento	139
11.1.2. Incrustabilidad	139
11.1.3. Resistencia a la corrosión	139
11.1.4. Resistencia a la fatiga	139
11.1.5. Conformabilidad	139
11.1.6. Coeficiente de fricción	140
11.1.7. Porosidad	140
11.1.8. Conductividad térmica	140
11.1.9. Expansión térmica	140
11.1.10. Resistencia a la compresión	140
11.1.11. Costo	140
11.2. MATERIALES METÁLICOS PARA COJINETES	141
11.2.1. Metal blanco: Aleaciones con base de estaño y plomo (Babbitts)	141
11.2.2. Aleaciones con base de cobre	143
11.2.3. Bronce	143
11.2.4. Fundición de hierro	144
11.2.5. Aleaciones de aluminio	144
11.2.6. Plata	144
11.2.7. Cojinetes de metales porosos	144

11.3. MATERIALES NO METÁLICOS PARA COJINETES	145
11.3.1. Materiales plásticos para cojinetes	145
11.3.1.1. Ventajas de los cojinetes plásticos	146
11.3.1.2. Desventajas de los cojinetes plásticos	146
11.3.2. Materiales cerámicos	147
11.4. ¿CÓMO REDUCIR LA FRICCIÓN EN LOS COJINETES METÁLICOS?	147
11.5. ¿CÓMO REDUCIR LA FRICCIÓN EN LOS COJINETES NO METÁLICOS?	149
12. DISTRIBUCIÓN DE PRESIÓN	151
12.1. COJINETE LARGO	151
12.1.1. DISTRIBUCIÓN DE PRESIÓN DE UN COJINETE	154
12.2. COJINETE CORTO	157
13. MÉTODOS DE DISEÑO DE UN COJINETE	164
13.1. DISEÑO SEGÚN LA ECUACIÓN DE MCKEE-MCKEE	164
13.1.1. Coeficiente de Fricción	165
13.1.2. Equilibrio térmico	166
13.2. MÉTODO DE DISEÑO DE RAIMONDI Y BOYD	167
13.2.1. Diagramas de viscosidad	168
13.2.2. Metodología para diseño de cojinete	168
13.2.3. Ejemplo de Diseño de Cojinete con Raimondi- Boyd	173
14. METROLOGÍA EN LA EXPERIMENTACIÓN	181
14.1. SIGMASCOPE	182
14.1.1. Principio de Funcionamiento	183
14.1.2. Aplicaciones	184
14.2. HOLE TEST GAUGE	185
14.3. METROSCOPE	185
14.4. OTRO TIPO DE INSTRUMENTACIÓN	187
15. MODELADO DE SISTEMAS DINÁMICOS	194
15.1. SISTEMAS Y EXPERIMENTOS	194
15.1.1. Límites de un sistema	196
15.2. EXPERIMENTO	197
15.3. MODELO	197
15.4. SIMULACIÓN	199
15.5. CONSTRUCCIÓN DE MODELOS	199
15.6. CLASIFICACIÓN DE MODELOS	202
16. RUGOSIDAD DE LOS MATERIALES EN LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA	207
16.1. ¿QUÉ ES LA RUGOSIDAD?	207
16.2. MEDICIÓN DE LA RUGOSIDAD	209
16.3. EFECTOS DE LA RUGOSIDAD EN LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA DE COJINETES	212

16.3.1. Efecto de la textura superficial del eje en la distribución de presión del cojinete	212
16.3.2. Efecto de la textura superficial (interior del cojinete) en el desempeño de la lubricación hidrodinámica	218
17.LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA EN PRESENCIA DE CAVITACIÓN	224
17.1. ¿QUÉ ES LA CAVITACIÓN?	224
17.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA Y MODELOS	225
17.2.1. Modelado de la cavitación	227
17.3. ESTUDIO DE APLICACIONES	231
17.3.1. Algoritmo de conservación de masa aplicado a problemas dinámicos con cavitación.	231
17.3.1.1. Modelo matemático y tratamiento numérico	231
17.3.2. Impacto del modelo de cavitación en un cojinete con superficie microtexturada	240
17.3.2.1. Cojinete radial con textura bi - dimensional	242
17.3.3. Cavitación en agujeros usando el algoritmo de conservación de masa .	246
17.3.3.1. Metodología	247
17.3.3.2. Método de solución	251
17.3.3.3. Validación del método	256
17.3.4. Resultados	261
18.EFECTO DE LA TEMPERATURA SOBRE LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA	267
18.1. INTRODUCCIÓN	267
18.1.1. Flujo de calor en los cojinetes	268
18.1.2. Parámetros de Carga Térmica y su Importancia Relativa	271
18.1.3. Régimenes de lubricación térmica	273
18.2. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ENERGÍA	275
18.3. ESTUDIO DE APLICACIONES	278
18.3.1. Estudio termohidrodinámico de un cojinete de láminas	278
18.3.1.1. Expresión de velocidad de flujo	280
18.3.1.2. Ecuación térmica de Reynolds	282
18.3.1.3. Condiciones de frontera	282
18.3.1.4. Propiedades del lubricante	283
18.3.2. Análisis termohidrodinámico de un Foil Journal Bearing	290
18.3.2.1. Reducción de la Ecuación que Gobierna el sistema.	293
18.3.2.2. Condiciones de Frontera	294
18.3.2.3. Esquema Numérico	295
19.LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA EN PRESENCIA DE DESALINEAMIENTO ANGULAR	298
19.1. DESALINEAMIENTO DEL COJINETE CAUSADO POR LA DEFORMACIÓN DEL EJE.	298

19.1.1. Formulación analítica	299
19.1.1.1. Ángulo de desalineamiento en el agujero del cojinete causado por la deformación del eje	299
19.1.1.2. Espesor de película	300
19.1.1.3. Ecuación de Reynolds	301
19.1.1.4. Capacidad de carga y posición angular	302
19.1.1.5. Caudal por fugas en los extremos	303
19.1.1.6. Coeficiente de fricción	303
19.1.1.7. Momento por desalineamiento	303
19.1.2. RESULTADOS	304
19.2. ESTUDIO Y SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LOS SISTEMAS ROTOR-COJINETE CON Y SIN DESALINEAMIENTO	308
19.2.1. Estabilidad en los sistemas rotor-cojinete	308
19.2.2. Solución y análisis numérico del Sistema Rotor-Cojinete sin desalineamiento	311
19.2.3. Solución y análisis numérico del Sistema Rotor-Cojinete con desalineamiento	313
19.2.4. Comparación numérica entre los sistemas rotor-cojinetes Con y Sin Desalineamiento	315
20. LUBRICACIÓN TURBULENTA	317
20.1. ECUACIÓN DE TIEMPO-PROMEDIO DE MOVIMIENTO Y EL ESFUERZO DE REYNOLDS	318
20.2. REDUCCIÓN DE LA FRICCIÓN EN UN COJINETE TURBULENTO BAJO EL EFECTO DE TOM	321
20.3. VÓRTICES DE TAYLOR	322
20.4. MODELOS DE FLUJO TURBULENTO	324
20.5. MODELO DE LONGITUD MIXTA (MIXING LENGTH MODEL)	325
20.5.1. Teoría de la lubricación turbulenta usando el modelo de longitud mixta	327
20.5.2. Comparación de los análisis de uso de la longitud de mezcla contra un Modelo experimental	333
20.6. MODELO $k - \varepsilon$	336
20.6.1. Teoría de la lubricación turbulenta usando el modelo $k - \varepsilon$	337
20.6.2. Aplicación del modelo $k - \varepsilon$ a una película de aceite	338
20.6.3. Ecuación turbulenta de Reynolds	339
20.6.4. Comparación de análisis usando el modelo $k - \varepsilon$ con experimentos	341
21. MODELOS PARA SISTEMA ROTOR COJINETE	346
21.1. ANÁLISIS PARA COJINETES PRESURIZADOS	348
21.1.1. Teoría de cojinetes presurizadas con puertos puntuales: caso del cojinete corto	349
21.2. EFECTO DE LA HOLGURA EN LOS COEFICIENTES ROTODINÁMICOS	357

21.2.1. Un modelo no lineal para la predicción de los coeficiente dinámicos en un cojinete hidrodinámico	357
21.2.2. Predicción no lineal de los coeficientes rotodinámicos para un cojinete hidrodinámico	364
21.3. EFECTO DE LA TURBULENCIA EN LOS COEFICIENTES ROTODINÁMICOS	370
21.3.1. Análisis dinámico no lineal del contacto superficial de un rotor soportado por un cojinete turbulento con una suspensión no lineal	370
21.3.2. Análisis rotodinámico de sistemas con un modelo no lineal de cojinete de almohadilla incluyendo los efectos de la turbulencia	378
21.4. EFECTO DE LA TEMPERATURA EN LOS COEFICIENTES ROTODINÁMICOS	387
21.4.1. Influencia de la temperatura de entrada del aceite en el umbral de estabilidad en un sistema rotor cojinete	387
21.5. EFECTO DE LA SIMETRÍA EN LOS COEFICIENTES ROTODINÁMICOS	392
21.5.1. Respuesta dinámica y estabilidad de un sistema roto-dinámico con claro radial no simétrico	393
22. MÉTODOS NUMÉRICOS	401
22.1. GENERALIDADES DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS	402
22.2. TEORÍA Y SERIE DE TAYLOR	403
22.3. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	405
22.3.1. Criterio de terminación y estimación de errores	407
22.3.2. Desventajas del Método de Newton-Raphson	409
22.4. DIFERENCIAS FINITAS	409
22.4.1. Generalidades	409
22.4.2. Fundamentos de las Diferencias Finitas	411
22.4.2.1. Derivación numérica	412
22.5. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	413
22.5.1. Método de Galerkin	414
22.5.1.1. Solución numérica de la ecuación de Reynolds formulación diferencial vs. formulación integral	419
22.6. REDES NEURONALES ARTIFICIALES	427
22.6.1. Características de las redes neuronales artificiales	428
22.6.2. La neurona artificial	429
22.6.2.1. Determinación del coeficiente de fricción de un cojinete por método experimental y por medio de redes neuronales [138]	432
22.7. VOLÚMENES FINITOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES	434
22.7.1. Leyes de conservación: las formas diferencial e integral	435
22.7.2. Método de volúmenes finitos	436
22.7.3. Comparación de FVM y FDM	438
22.8. OTROS MÉTODOS DE SOLUCIÓN	438

23.BANCOS EXPERIMENTALES	442
23.1. PELÍCULA DE PRESIÓN EN COJINETES HIDRODINÁMICOS	444
23.1.1. Banco de prueba	445
23.2. ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LAS CARACTERÍSTICAS DE OSCILACIÓN DE LA ALMOHADILLA EN COJINETES DE ALMOHADILLA INCLINADA	457
23.3. INVESTIGACIONES EXPERIMENTALES DE COJINETES POROSOS BAJO CAR- GAS VERTICALES FLUCTUANTES SINUSOIDALES	464
23.3.1. Instrumentación y banco de prueba	464
23.4. PRUEBAS EXPERIMENTALES DE COJINETES CON DOS COMPONENTES EN LA CAPA SUPERFICIAL EN PRESENCIA DE CONTAMINANTES ABRA- SIVOS	467
23.4.1. Diseño del cojinete	468
23.4.2. Metodología	469
23.4.3. Nueva hipótesis	471
23.5. PLATAFORMA EXPERIMENTAL PARA DESLIZAMIENTO Y DETECTAR FISU- RAS EN EJES ROTATORIOS DE MAQUINARIA EN OPERACIÓN	472
23.5.1. Características del equipo:	473
 CONCLUSIONES	 479
 RECOMENDACIONES	 486
 BIBLIOGRAFÍA	 487

LISTA DE TABLAS

2.1. Temas y subtemas de la investigación.	49
3.1. Asignación de sesiones para Relator y Correlator	52
7.1. Coeficiente presión - viscosidad, $\alpha [m^2/N]$, para diferentes lubricantes	86
12.1. Datos de demostración	155
14.1. Espesores mínimos de película según su uso	181
14.2. Tablas de comparación de dispositivos	187
14.3. Termopares normalizados	191
15.1. Parámetros	204
16.1. Promedio aritmético y grado de rugosidad	211
17.1. Parámetros Experimentales	247
17.2. Parámetros de entrada para la validación del caso 1	258
17.3. Parámetros validación caso 2	260
17.4. Parámetros de validación caso 2	261
17.5. Parámetros de comparación para las simulaciones de las teorías	262
18.1. Medidas de la relación N para determinar la importancia relativa de los modos de transferencia de calor	271
18.2. Datos de cojinete y lubricante	285
19.1. Parámetros del cojinete y propiedades del lubricante	304
21.1. Coeficientes de rigidez y amortiguamiento de un cojinete corto en el sistemas de coordenadas R-T.	354
21.2. Coeficientes de rigidez y amortiguamiento de un cojinete corto en el sistemas de coordenadas $x - y$	354
21.3. Condiciones tomadas de Lund y Thomsen [124]	361
21.4. Condiciones tomadas de Muller-Karger y Granados, 1997	364
21.5. Parámetros del cojinete y condiciones de operación.	367
21.6. Propiedades del eje	383
21.7. Valores iniciales de las propiedades del cojinete.	384

21.8. Juego de parámetros usado en la simulación	385
21.9. Especificaciones del sistema rotor cojinete	391
22.1. Tabla de iteraciones	408
22.2. Funciones de activación más utilizadas	429
23.1. Dispositivos de medición	454
23.2. Parámetros físicos del cojinete de prueba	459
23.3. Condiciones de prueba para el cojinete.	461
23.4. Datos del muñón y del cojinete	466
23.5. Entradas externas del control de velocidad	476
23.6. Entradas externas del control de velocidad	476

LISTA DE FIGURAS

1.1. Metodología Seminario Investigación	46
3.1. Ejemplo de un acta diligenciada	53
4.1. Formato de presentación	55
4.2. Ejemplo de diapositiva	55
4.3. Interfaz gráfica de LyX	56
5.1. Bases de datos	59
5.2. Publicaciones hidrodinámicas	59
5.3. Publicaciones de modelos matemáticos	60
5.4. Publicaciones de cojinetes hidrodinámicos por países.	60
5.5. Publicaciones de modelos matemáticos por país	61
5.6. Publicaciones por instituciones a nivel mundial	62
5.7. Metodología general de análisis en la lubricación hidrodinámica de cojinetes	64
6.1. Partes básicas de un cojinete	65
6.2. Clasificación de los cojinete de elementos rodantes.	67
6.3. Clasificación de los cojinetes de película gruesa	68
7.1. Flujo con esfuerzo cortante simple	73
7.2. Carta de conversión de viscosidad de segundo universal Saybolt	77
7.3. Características importantes de un viscosímetro capilar	78
7.4. Esquema viscosímetro rotacional cilíndrico	79
7.5. Viscosímetro de cono plano	80
7.6. Carta de viscosidad vs. temperatura	83
7.7. Ilustración del índice de viscosidad	84
7.8. Elección de lubricantes según la carga y la velocidad.	88
8.1. Tipos de Rozamiento	96
8.2. Rozamiento líquido	98
9.1. Curva de Stribeck	101
9.2. Lubricación hidrostática	104
9.3. Uniones Abiertas	105
9.4. Cambios en la fricción según la velocidad relativa	106

9.5. Mecanismos de desarrollo de Presión (a) Cojinete deslizante (b) Cojinete con película presionada (c) cojinete con presión externa	107
9.6. Cojinete en Lubricación hidrodinámica	108
9.7. Características de la LEH dura y suave	109
9.8. a) Dominio del contacto, b) Elemento diferencial de resistencias térmicas	114
10.1. Mecanismo de lubricación. El ángulo de excentricidad ϕ sitúa a h_o	121
10.2. Cojinete central parcial con juego, posición de giro. Relación geométrica para cualquier cojinete simple de deslizamiento.	122
10.3. Configuración de cojinetes. a) Cojinete completo; b) cojinete parcial; c) cojinete elíptico o de limón; d) cojinete descentrado; e) cojinete oscilante; f) cojinete quicionero; g) cojinete trilobular; h) cojinete de cuatro lóbulos; i) cojinete de hojas múltiples; j) cojinete de anillo flotante; k) cojinete de almohadilla pivotada; l) cojinete de hoja.	124
10.4. Cojinete centrado con el eje, totalmente lubricado	126
10.5. Película entre dos superficies paralelas	128
10.6. Dispositivo de Tower	130
10.7. Distribución de Presión obtenida por Tower	131
10.8. Muñón soportado por una película de aceite	132
10.9. Fuerzas en las caras de un elemento diferencial	133
11.1. Resistencia a la fatiga como una función del espesor de metal blanco. En general el diseño de estos revestimientos depende de los picos de carga y de la temperatura de fundición del material.	141
11.2. Diagrama de equilibrio Pb-Sn	143
11.3. Ejemplo de un cojinete antifricción. (a). Montaje del cojinete. (b) Esquema detallado de cojinete antifricción	148
12.1. Cojinete completo	152
12.2. Desarrollo de la superficie del muñón y el cojinete	153
12.3. Distribución de presión alrededor de un cojinete largo	156
12.4. Distribución de presión cojinete corto - superficie extendida	159
12.5. Comparación entre las soluciones de cojinete corto y largo	160
13.1. h_o/C vs. Número de cojinete	170
13.2. $\frac{r}{c} \cdot f$ vs. S	171
13.3. Caudal Q	171
13.4. Relación $\frac{q_s}{q}$	172
13.5. Viscosidad vs Temperatura	173
13.6. Espaciamiento diametral mínimo	174
13.7. Cálculo de Sommerfeld	175
13.8. Calculo de $\frac{r}{c} \cdot f$	176
13.9. Estimación de $\frac{Q}{rcNl}$	176
13.10. Obtención de $\frac{q_s}{q}$	177
13.11. Solución con los dos puntos hallados	179

14.1. Dispositivo Sigmascope	183
14.2. Corrientes de Eddy	183
14.3. Profundidad de las corrientes Eddy	184
14.4. Display del Sigmascope	184
14.5. Calibradores para prueba de orificio	185
14.6. Metroscope	186
14.7. Diagrama de bloques de los flujos de información en los procesos estándar de medida a), y control b).	188
14.8. Respuesta (en milivoltios) de los principales termopares normalizados	191
14.9. Principio de funcionamiento del sensor óptico	192
15.1. Configuración de un sistema	195
15.2. Entradas y salidas	196
15.3. Límites de un sistema	196
15.4. Relación que liga las acciones U_i (entradas), con los efectos Y_j (salidas), según $Y = R(U)$, que constituye la representación formal de un modelo.	198
15.5. Estructura de las tres fases para la construcción de modelos	200
15.6. Tiempo continuo - Tiempo discreto	202
15.7. Estático - Dinámico	203
15.8. Esquema modelo físico	204
15.9. Esquema modelo matemático	205
16.1. Electromicrografía de (a) una superficie de cobre mecánicamente pulida y (b) oro electrodepositado en latón.	208
16.2. Tamaño comparativo de las superficies relacionadas con el fenómeno	208
16.3. Los tres componentes de la textura superficial	209
16.4. El efecto de la rugosidad de ancho de corte es para remover todos los componentes de un perfil completo cuyas longitudes de onda son más largas que el corte.	210
16.5. (a) Modelo sólido del banco experimental y (b) la sección transversal y vista frontal del banco.	214
16.6. Análisis de rugosidad de los ejes estudiados (LTS)	215
16.7. Diagrama esquemático de una neurona y conexiones en la red	216
16.8. Eje I Textura superficial: (a) sección transversal y (b) perfil de superficie visto de arriba (SEM).	216
16.9. Eje I: Curva de presiones para diferentes velocidades	217
16.10. (a) Sección transversal del cojinete. (b) Geometría del agujero (textura)	219
16.11. Distribución de la textura en la superficie del cojinete (Arriba). Arreglo de la textura y zona texturizada en la superficie del cojinete (Abajo).	221
16.12. Espesor de película y campos de presión para cuatro casos de configuración de textura	222
17.1. Película de fluido extendida en un cojinete completo.	225

17.2. Dominio Ω donde se formula el problema de N - S (región pintada de gris) y su contra parte correspondiente D_ℓ donde se formula el problema de lubricación (limitado por la línea azul).	226
17.3. Dominio D_ℓ donde se formula el problema de la lubricación. Se indica la zona activa D_ℓ^+ , la zona cavitada D_ℓ^0 y la frontera de cavitación Σ	228
17.4. Sistema unidimensional considerando el problema de la placa oscilante en flujo tipo squeeze.	234
17.5. Comparación entre modelos de Elrod-Adams y Reynolds	235
17.6. Representación esquemática del cojinete radial y del dominio computacional considerado	236
17.7. Evolución en el tiempo de la posición en el eje, cargas aplicadas W_X^a , W_Y^a y capacidad de carga W_X , W_Y	239
17.8. Estudio de convergencia: evolución en el tiempo del máximo valor de la presión . . .	240
17.9. Estudio de convergencia: evolución en el tiempo de la excentricidad.	240
17.10. Campos de presión predichos por el modelo de Reynolds y el modelos de Elrod-Adams para el cojinete de empuje axial.	241
17.11. Distribución geométrica de agujeros y capacidad de carga	242
17.12. Esquema de cojinete radial y el correspondiente dominio bidimensional incluyendo las micro texturas periódicas.	243
17.13. Comparación de los modelos de Reynolds y $p - \theta$ de Elrod-Adams para el flujo Q a través de líneas de x_2 constante para un cojinete radial liso y con textura.	244
17.14. Vista 3D de los campos de presión obtenidos con el modelo de Reynolds (izquierda) y el modelo $p - \theta$ de Elrod-Adams (derecha)	245
17.15. Perfiles de presión a lo largo de la línea $x_2 = B/2$ para los casos estudiados en la figura 17.13	245
17.16. Torque por fricción T en función de la carga aplicada W_a para diferentes valores de profundidad de textura. Izquierda: modelo de Reynolds, Derecha: Modelo de Elrod-Adams	246
17.17. Estructura del disco	248
17.18. Rejilla para la computación	252
17.19. Esquema del principio de multi-rejilla para V-ciclo	253
17.20. Diagrama de flujo de la programación	257
17.21. Distribución de presión de un solo agujero	259
17.22. Distribución de la presión para ambos resultados	259
17.23. Presión del cojinete y resultados de los cálculos de la película contenida, (A) Resultados de Elrod y (B) Resultado de la simulación actual	260
17.24. Distribución de presión a lo largo de la línea de centro del cojinete ($z=L/2$) obtenidos utilizando diferentes condiciones de frontera en la cavitación	262
17.25. Contorno de presión de la celda de agujeros obtenidos a partir de diferentes teorías	263
17.26. Distribución de presión a lo largo de la línea central de la celda de agujeros ($r=0.023m$)	264
18.1. Modos de transferencia de calor	269

18.2. Red de resistencias equivalentes para un cojinete	270
18.3. Regímenes de lubricación hidrodinámica usando carga no dimensional w^*	274
18.4. Regímenes de lubricación hidrodinámica usando espesor no dimensional H^*	275
18.5. Transferencia de energía por flujo de calor y masa	276
18.6. Bosquejo de cojinete de láminas con múltiples perforaciones	280
18.7. Modelo geométrico de la lámina y análisis de fuerzas.	280
18.8. Flujos dentro del cojinete de láminas para aire	282
18.9. Diagrama de flujo computacional	284
18.11. Espesor de película adimensional para un MWFB	285
18.10. Presión adimensional de un MWFB	286
18.12. Perfil de temperaturas en el medio de la capa del aire $z = h/2$	286
18.13. Perfil de temperaturas en la sección media transversal $y = h/2$	287
18.15. Torque adimensional para cálculos THD e isotérmico ($\bar{T}_q = T_q/p_a C R^2$)	288
18.14. Capacidad adimensional de carga para cálculos THD e isotérmico ($\bar{W} = W/p_a R^2$)	288
18.16. Máximo incremento en la temperatura para un MWFB Vs. Carga adimensional	289
18.17. Comparación de los resultados experimentales y analíticos	290
18.18. Esquema de un <i>cojinete de lámina</i>	291
19.1. Plano de trabajo combinado del eje y del cojinete	299
19.2. Cojinete desalineado	300
19.3. Distribución de presión p , de un cojinete desalineado	305
19.4. Distribución de presión p , de un cojinete desalineado a otros ángulos	306
19.5. Parámetros afectados por el desalineamiento.	307
19.6. Incremento de la amplitud en el tiempo, solución lineal en su condición inestable	310
20.1. Comparación del establecimiento de la turbulencia para varios lubricantes	318
20.2. Esfuerzo de Reynolds	319
20.3. Vórtices de Taylor entre dos cilindros excéntricos	323
20.4. Ramas de los vórtices de Taylor	324
20.5. Distribución de velocidad cerca de la superficie del muro	328
20.6. Flujo turbulento en la holgura	330
20.7. Resultados de los cálculos de los Coeficientes de turbulencia para gradientes de presiones iguales en las direcciones x y z (a) y para gradientes de presión diferentes (b)	333
20.8. Película de fluido sellada	334
20.9. Capacidad de carga y razón de excentricidad en una película de fluido sellado.	335
20.10. Localización del centro del cojinete en una película de fluido sellada	336
20.11. Distribución de velocidad promedio para flujo de Couette	342
20.12. Valores teóricos (<i>símbolos</i>) y experimentales (<i>líneas</i>) de la distribución de presión adimensional en un cojinete de longitud finita	343
20.13. Capacidad de carga adimensional y recíproco del número de Sommerfeld versus la relación de excentricidad.	343
20.14. Distribución de presión adimensional en un cojinete de longitud finita para los casos analizados en la figura 20.13	344

21.1. Configuración de un cojinete presurizado usado por BENTLY	350
21.2. Propiedades dinámicas de rigidez y amortiguamiento (coeficientes rotodinámicos) de la película del lubricante en un cojinete hidrodinámico	351
21.3. Descomposición de fuerzas de la película de lubricante en el cojinete	352
21.4. Coeficientes rotodinámicos de rigidez para un cojinete corto no presurizado	355
21.5. Coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento para un cojinete corto no presurizado	355
21.6. Comparación de los coeficientes de rigidez (en la dirección vertical) de un cojinete corto para diferentes valores de presurización en su parte superior ($L/D = 1/4$)	356
21.7. Velocidad umbral de estabilidad contra el número de Sommerfeld par aun rotor rígido soportado por cojinetes cortos con inyección superior de lubricante para diferentes valores de fuerza de presurización. $L/D = 1/4$	356
21.8. Variación de los coeficientes de orden superior con la relación de excentricidad a diferentes relaciones L/D	362
21.9. Representación de coeficientes dinámicos para tres números de Sommerfeld bajo carga dinámica ($F_d = 0,6$)	363
21.10. Geometría y configuración de cojinete de doble ranura axial	366
21.11. (<i>Izquierda</i>). Respuesta transitoria del muñón para $S = 1,1252$. (<i>Derecha</i>). Respuesta transitoria del muñón para $S = 0,1643$	368
21.12. Variación del coeficiente de rigidez (<i>izquierda</i>) y amortiguamiento (<i>derecha</i>) a lo largo de la trayectoria del cojinete para $\alpha = 0^\circ C$ y $F_d = 0,6$	369
21.13. Modelo de un rotor flexible soportado dos cojinetes turbulentos.	371
21.14. Las fuerzas de rozamiento e impacto.	372
21.15. Diagramas de bifurcación del centro del cojinete y el centro del rotor en las direcciones horizontal y vertical.	374
21.16. Trayectoria y mapa de Poincaré para el centro del cojinete y centro del rotor $s = 0,84$	375
21.17. Espectro de potencia para el centro del cojinete y centro del rotor $s = 0,84$	376
21.18. Trayectoria y mapa de Poincaré para el centro del cojinete y centro del rotor $s = 5,3$	377
21.19. Espectro de potencia para el centro del cojinete y centro del rotor $s = 5,3$	378
21.20. Parámetros geométricos del cojinete de almohadillas inclinadas.	379
21.21. Esquema de rotor Jeffcot/Laval soportado por dos cojinetes.	382
21.22. Configuraciones “entre almohadillas” y “en la almohadilla”	385
21.23. Desplazamiento horizontal (a) y vertical (b) durante la aceleración del rotor.	385
21.24. Efecto de almohadilla precargada en la órbita del eje, modelo sin efecto de turbulencia (a) y modelo con efecto de turbulencia (b).	386
21.25. Efecto de la posición de la almohadilla (“en almohadilla” y “entre almohadillas”) en la órbita del eje, modelo sin turbulencia (a) y modelo con turbulencia (b).	387
21.26. Modelo de rotor ligero y cargado centralmente soportado por dos cojinetes hidrodinámicos de aceite.	388
21.27. Modelo simplificado de un sistema rotor cojinete.	389
21.28. Estabilidad de un sistema rotor cojinete ($L/D = 0,5$)	391
21.29. Efecto de la temperatura de ingreso de aceite en la velocidad umbral de estabilidad	392
21.30. Sistema de rotor Jeffcott	393

21.31. Estabilidad del sistema	394
22.1. Newton-Raphson	406
22.2. Método de diferencias finitas	411
22.3. Etapas en el FEA	414
22.4. Algunos pasos en la etapa de análisis	414
22.5. Condiciones de frontera típicas	416
22.6. Una aproximación lineal por tramos de una función $u^\delta(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(t)N_i(x)$	418
22.7. Bases de expansión para elementos finitos	419
22.8. Canal convergente-divergente, simétrico respecto a su centro ($s = 0$).	425
22.9. Resultados correspondientes a las formulaciones A y B para una distribución nodal simétrica. (a) Formulación diferencial A . (b) Formulación diferencial B	426
22.10. (a) Predicciones obtenidas para una distribución nodal simétrica par de 40 nodos. (b) Error porcentual en los nodos para las predicciones presentadas en la figura (22.10) (a)	426
22.11. (a) Predicciones obtenidas para una distribución nodal NO simétrica par de 40 nodos. (b) Error porcentual en los nodos para las predicciones presentadas en la figura (22.11)(a)	427
22.12. Modelo de neurona artificial	429
22.13. ANN de una capa	430
22.14. ANN de múltiples capas	431
22.15. Arquitectura de la ANN para el cojinete (a) seco y (b) lubricado.	432
22.16. Discretización del dominio	437
23.1. Banco de pruebas versátil.	446
23.2. Esfuerzo máximo de la estructura	447
23.3. Tensión en el punto de unión entre la carcasa superior del cilindro y la viga	447
23.4. Vibración en la estructura del banco de pruebas	448
23.5. Una vista de explosión de la unidad del cojinete	449
23.6. Unidad de cojinete ensamblado	449
23.7. Tres cilindros hidráulicos del sistema de carga.	450
23.8. Sistema de accionamiento.	451
23.9. Esquema del sistema de lubricación.	452
23.10. Esquema del sistema de control	453
23.11. Esquema de los dispositivos de medición en la manga superior (1) del primer alojamiento HS.	455
23.12. Esquema de los dispositivos de medición en la manga superior (1) del segundo alojamiento HO.	455
23.13. Esquema de la termocupla	456
23.14. Sensor óptico de presión	457
23.15. Fotografía del equipo de experimentación	458
23.16. Diagrama esquemático del equipo de experimentación	459
23.17. Esquema del cojinete de prueba.	460

23.18. Fotografía del acelerómetro instalado en las almohadillas superiores.	461
23.19. (a) Variación de las características de oscilación de la almohadilla No. 2 con la velocidad del eje. ($Q_S = 70 [l/min]$, $W_L = 0 [kN]$). (b) Condiciones de (a), para $W_L =$ $10 [kN]$	462
23.20.(a) Distribución circunferencial de la presión de la película y espesor de la película en el plano medio ($Q_S = 70 [l/min]$, $W_L = 0 [kN]$, $N = 1800 [rpm]$). (b) Igual que (a) $N = 3600 [rpm]$	463
23.21. Diagrama esquemático de la instalación de prueba para la aplicación de cargas estáticas y dinámicas en el cojinete	464
23.22. Diagrama de bloques de los sistemas de instrumentación	466
23.23. Cojinete con dos componentes en la capa superficial	469
23.24. Polígrama de un cojinete con dos componentes en la capa superficial	469
23.25. Diagrama	470
23.26. Principio de cojinete de manguito con surcos	472
23.27. Rotor kit modelo RK 4 de Bently Nevada	473
23.28. Proximitor	474
23.29. Señal de RF	475
23.30. Entrada y salida de la RF del proximitor	476
23.31. Disco inercial	477

GLOSARIO

AMORTIGUACIÓN: Es una técnica de control de vibraciones; consiste en aplicar amortiguadores o medios disipadores de energía para evitar respuestas de amplitud excesiva en la zona de resonancia. El amortiguador, es el medio que relaciona la fuerza la velocidad.

ANISOTRÓPICO: Es la propiedad que tiene diferentes valores en diferentes direcciones radiales. La rigidez de la película de fluido es isotrópica cuando el muñón opera a bajas relaciones de excentricidad.

AUTOACTUANTE: Tipo de cojinete de lámina con características propias, son de segunda operación, sin requerimiento de presiones externas, con un peso más reducido que el cojinete rígido de aceite y costos de mantenimiento bajos.

BANCO EXPERIMENTAL: Es una estructura cuidadosamente diseñada para provocar, repetir y estudiar un fenómeno en particular de un sistema. Para cojinetes hidrodinámicos generalmente se componen por subsistemas de: accionamiento, carga, medición, temperatura y lubricación.

BUCLE DE REALIMENTACIÓN: Es una cadena cerrada de acciones elementales entre los elementos de un sistema.

CARGA TÉRMICA: Esfuerzos internos en las estructuras producto de la dilatación resultante del aumento de temperatura.

CAVITACIÓN: La cavitación o aspiración en vacío es un efecto hidrodinámico que se produce cuando el agua o cualquier otro fluido en estado líquido pasa a gran velocidad por una arista afilada, produciendo una descompresión del fluido debido a la conservación de la constante de Bernoulli. Puede ocurrir que se alcance la presión de vapor del líquido de tal forma que las moléculas que lo componen cambian inmediatamente a estado de vapor, formándose burbujas o, más correctamente, cavidades.

COEFICIENTES ROTODINÁMICOS: Parámetros con los que se caracteriza la dinámica del sistema rotor cojinete. La identificación de estas características es fundamental para la predicción del comportamiento dinámico, control de vibraciones y diagnóstico o análisis rotodinámico de turbomaquinaria. Así también se conocen a los coeficientes de rigidez y amortiguamiento.

COJINETE: Se denomina, la parte interior del soporte, o sea la que está en contacto con el árbol. Se compone de una o dos piezas. La superficie interna del cojinete puede tener ranuras en determinada disposición, las cuales si están bien trazadas facilitan la lubricación.

COJINETE DE LÁMINA: Especiales a diferencia de los cojinetes rígidos, tienen una estructura particular. Proporcionan la rigidez y amortiguamiento deseado para el sistema deseado.

CONSISTENCIA: En los métodos numéricos es una propiedad que supone que la ecuación discretizada de un modelo, realmente aproxima a una ecuación diferencial de partida. Esta propiedad se enfoca al método de las diferencias finitas y no hace referencia a las soluciones, sino a la relación entre las ecuaciones diferencial y en diferencias finitas.

CONVERGENCIA: Permite observar la diferencia que existe entre la solución aproximada de un modelo matemático y la solución exacta o solución conocida experimentalmente.

CUERPO: En un sistema mecánico vibratorio el cuerpo (con masa y momento de inercia) es un elemento que actúa como almacenador de energía cinética. Es el elemento que relaciona la fuerza con la aceleración.

DIRECCIÓN ALTERNA IMPLÍCITA (ADI): Es un método de diferencias finitas para resolver parabólicas y elípticas de ecuaciones diferenciales parciales.

DISCRETIZACIÓN: Consiste en dividir el dominio de la solución en elementos finitos

EIGENVALORES: Las raíces de un polinomio que satisfacen una ecuación.

ELEMENTO: En los métodos numéricos, es un segmento del dominio que contiene sus propiedades y está limitada por nodos. La suma de los elementos conforma el dominio del sistema. Las propiedades se definen a través de las funciones de forma.

ENTRENAMIENTO NO SUPERVISADO: Son sistemas de aprendizaje de las redes neuronales artificiales que no requieren de un vector de salidas deseadas y por tanto no se realizan comparaciones entre las salidas reales y salidas esperadas. El conjunto de vectores de entrenamiento consiste únicamente en vectores de entrada.

ENTRENAMIENTO SUPERVISADO: Son algoritmos que requieren el emparejamiento de cada vector de entrada con su correspondiente vector de salida, para poder llegar a la solución del problema.

EQUILIBRIO TÉRMICO: Puede extenderse para hablar de un sistema o cuerpo en equilibrio térmico. Cuando dos porciones cuales sean de un sistema se encuentran en equilibrio térmico se dice que el sistema mismo es térmicamente homogéneo.

ESFUERZO DE REYNOLDS: El esfuerzo se expresa en la forma de una potencia de la coordenada transversal, depende del espesor de la capa límite, porque la condición de frontera para la velocidad, en su región inercial, es proporcional a este espesor.

ESPESOR MÍNIMO DE PELÍCULA: Las superficies lubricadas se encuentran completamente separadas por una película lubricante, la cual debe ser suficientemente gruesa para separar los cuerpos en contacto.

ESQUEMA NEWMARK: Es un algoritmo direccional de una serie truncada de Taylor con expansión cuadrática, que es el mínimo requerimiento para problemas de segundo orden comúnmente encontrados en estructuras dinámicas.

ESQUEMA UPWIND: En dinámica computacional de fluidos (CFD), el esquema upwind designa una clase de método de discretización numérica para resolver ecuaciones diferenciales hiperbólicas. El esquema upwind utiliza una solución adaptativa o sensible a la plantilla de diferencias finitas para simular numéricamente más propiedades en la dirección de propagación de información en un campo de flujo.

ESTABILIDAD: En los métodos numéricos, es una propiedad que se puede analizar dentro del propio sistema, cuando enfrenta cambios externos o variaciones de sus parámetros, también cuando se quiere conocer la perdurabilidad de las soluciones de las ecuaciones que rigen este sistema ante cambios en las condiciones iniciales, condiciones de contorno o ante errores en los datos.

ESTATOR: Es la parte estacionaria de la máquina que contiene el rotor. El rotor gira dentro y es soportado por apoyos en el estator. El propósito de los apoyos es eliminar la fricción mientras previene un contacto indeseado entre el rotor y el estator.

ESTOCÁSTICO: Teoría estadística de los procesos cuya evolución en el tiempo es aleatoria, tal como la secuencia de las tiradas de un dado.

EXCENRICIDAD: Distancia entre el centro geométrico de una pieza y su centro de giro.

EXACTITUD: En los métodos numéricos, es la puntualidad y fidelidad en la ejecución de la herramienta numérica; está siempre presente debido a que al tratar de aproximar un proceso infinito, como calcular la derivada o la integral, mediante otro proceso finito siempre se van a presentar errores de aproximación o errores de truncamiento.

EXCITACIÓN: Es la acción externa (o inherente al movimiento del sistema) que causa la vibración del sistema en consideración, representada en una fuerza variable o un movimiento que desplaza al sistema alternativamente en torno a su posición de equilibrio.

FLUJO DE COUETTE: Se refiere al flujo laminar de un fluido viscoso fluido en el espacio entre dos planos paralelos (placas), en el que uno está en movimiento relativo con respecto al otro.

FLUJO LAMINAR: Se llama flujo laminar o corriente laminar, al movimiento de un fluido cuando éste es ordenado, estratificado, suave. En un flujo laminar el fluido se mueve en láminas paralelas sin entremezclarse y cada partícula de fluido sigue una trayectoria suave, llamada línea de corriente.

FLUJO TURBULENTO: Se llama flujo turbulento o corriente turbulenta al movimiento de un fluido que se da en forma caótica, en que las partículas se mueven desordenadamente y las trayectorias de las partículas se encuentran formando pequeños remolinos aperiódicos.

FRECUENCIA NATURAL: La frecuencia natural es la frecuencia a la que un sistema mecánico seguirá vibrando, después que se quita la señal de excitación. A veces se le llama la frecuencia de resonancia pero eso no es correcto, ya que la frecuencia de resonancia es la frecuencia a la que vibraría el sistema, si no hubiera amortiguación.

FRONTERA CÍCLICA: La condición de frontera de la salida para una celda, es la misma para la frontera de entrada que la precede.

FUERZAS EXTERNAS: Son fuerzas que generan algún tipo de perturbación, o disturbio del sistema, tal como una fuerza de impacto debido al contacto entre el rotor y el estator, cargas radiales estáticas, o fuerzas de perturbación deliberadamente inducidas

FUERZAS INTERNAS: Son las fuerzas que aparecen de la interacción de la máquina consigo misma. Las fuerzas de soporte en los cojinetes, las fuerzas resultantes de la deflexión del eje y las fuerzas debidas a la interacción del rotor con el fluido circundante son algunos ejemplos de fuerzas internas

GRADO DE LIBERTAD: En ingeniería se refiere al número mínimo de parámetros que necesitamos especificar para determinar completamente la velocidad de un mecanismo o el número de reacciones de una estructura.

HERRUMBRE: Capa rojiza, porosa y quebradiza de óxido de hierro, que se forma sobre la superficie de los objetos de hierro y ciertas aleaciones al estar expuestas a la humedad y al aire. También llamado orín.

INCERTIDUMBRE EN LA MEDIA: Al realizar el proceso de medición, el valor obtenido y asignado a la medida diferirá probablemente del “valor verdadero” debido a causas diversas. El llamado “valor verdadero” es en realidad un concepto puramente teórico y absolutamente inaccesible. En el proceso de medición únicamente pretendemos estimar de forma aproximada el valor de la magnitud medida. Para ello debemos dar un número con sus unidades y una estimación del error. Dicho de otra manera el resultado de cualquier medida es siempre incierto y a lo más que podemos aspirar es a su grado de incertidumbre.

INCRUSTABILIDAD: Es la capacidad del material para absorber partículas que circulan en la corriente de lubricante. Una buena incrustabilidad es fundamental ya que evita que dichas partículas produzcan abrasión en el eje.

ÍNDICE DE PLASTICIDAD: Indica si la deformaciones en las regiones de contacto serán predominantemente elásticas o plásticas.

INESTABILIDAD DINÁMICA: En turbomaquinaria se caracteriza por vibración de alta amplitud que incrementa bruscamente con el aumento de la velocidad de rotación del eje, por lo regular se presenta por arriba de la velocidad crítica (en una velocidad supercrítica).

INESTABILIDAD NUMÉRICA: Es una propiedad de los algoritmos numéricos. Describe cómo los errores en los datos de entrada se propagan a través del algoritmo. Es un método inestable, cualquier error en el procesamiento se magnifica conforme el cálculo procede.

ISOTRÓPICO: Describe las propiedades de un sistema que son radialmente simétricas. El término isotrópico es distinto del término *simétrico*, que implica una simetría geométrica (forma).

MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL: Es un método iterativo utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales, esto significa, que se parte de una aproximación inicial y se repite el proceso hasta llegar a una solución con un margen de error tan pequeño como se quiera.

MÉTODO DE RELAJACIÓN (SOR): La idea de relajación consiste, en cada iteración aplicar la relación de recurrencia de tal forma que se mejoren las prestaciones del procedimiento avanzando un paso mas amplio, o más corto ω .

MÉTODOS NUMÉRICOS: La matemática aplicada es la rama de las matemáticas que se dedica a buscar y aplicar las herramientas más adecuadas a los problemas basados en diferentes modelos. Desafortunadamente, no siempre es posible aplicar métodos analíticos clásicos por diferentes razones:

- No se adecuan al modelo concreto.
- Su aplicación resulta excesivamente compleja.
- La solución formal es tan complicada que hace imposible cualquier interpretación posterior.
- Simplemente no existen métodos analíticos capaces de proporcionar soluciones al problema.

En estos casos son útiles las técnicas numéricas, que mediante una labor de cálculo más o menos intensa, conducen a soluciones aproximadas que son siempre numéricas. El importante esfuerzo de cálculo que implica la mayoría de estos métodos hace que su uso esté íntimamente ligado al empleo de computadores.

METROLOGÍA: Es la ciencia e ingeniería de la medida, incluyendo el estudio, mantenimiento y aplicación del sistema de pesas y medidas, tiene dos características muy importantes el resultado de la medición y la incertidumbre de medida.

MICROGRAFÍA: Es la imagen fotográfica obtenida de objetos no visibles mediante la ayuda de instrumentos ópticos o electrónicos como lupas y microscopios. No debe confundirse con la microfotografía que se refiere a fotografías realizadas a tamaño miniaturizado como los microfilmes.

MODELO: Un modelo de un sistema es cualquier cosa a la que se puede aplicar un “experimento”, con el fin de responder a preguntas respecto del sistema. Modelo también es resultado del proceso de generar una representación de sistemas a fin de analizar esos fenómenos o procesos.

MODOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR: Mecanismos por los cuales se transfiere el calor, puede ser: conducción, convección y radiación.

NO SINCRÓNICO: Se refiere a cualquier frecuencia diferente a la sincrónica. La frecuencia *no sincrónica* puede ser *supersincrónica* (más alta que la velocidad de giro) o *subsincrónica* (a una velocidad más baja que la de giro).

NORMA: Solución que se adopta para resolver un problema repetitivo, es una referencia respecto a la cual se juzgará un producto o una función y, en esencia, es el resultado de una elección colectiva y razonada.

NÚMERO DE SOMMERFELD: El número de Sommerfeld (S), es un número adimensional de la tecnología de la lubricación y se utiliza ampliamente en el diseño de cojinetes y ejes, se define como: $S = \frac{\mu N}{P} (r/c)^2$, donde: μ : viscosidad del lubricante; N : velocidad de rotación del eje; P : carga del cojinete dividida entre el área de proyección del cojinete; r : radio del eje; c : tolerancia radial entre el eje y el cojinete.

PROCESS ELEMENT: En las Redes Neuronales Artificiales, ANN, la unidad análoga a la neurona biológica es el elemento procesador, *PE (process element)*. Un elemento procesador tiene varias entradas y las combina, normalmente con una suma básica. La suma de las entradas es modificada por una función de transferencia y el valor de la salida de esta función de transferencia se pasa directamente a la salida del elemento procesado.

RED NEURONAL ARTIFICIAL: (Denominadas habitualmente como RNA o en inglés como: ANN) son un paradigma de aprendizaje y procesamiento automático inspirado en la forma en que funciona el sistema nervioso de los animales. Se trata de un sistema de interconexión de neuronas en una red que colabora para producir un estímulo de salida.

REOLOGÍA: La Reología es la ciencia del flujo que estudia la deformación de un cuerpo sometido a esfuerzos externos. Su estudio es esencial en muchas industrias, incluyendo las de plásticos, pinturas, alimentación, tintas de impresión, detergentes o aceites lubricantes, etc.

RESONANCIA: La resonancia es un estado de operación en el que una frecuencia de excitación se encuentra cerca de una frecuencia natural de la estructura de la máquina. Cuando ocurre la resonancia, los niveles de vibración que resultan pueden ser muy altos y pueden causar daños muy rápidamente.

RIGIDEZ: En ingeniería la rigidez es la capacidad de un objeto sólido o elemento estructural para soportar esfuerzos sin adquirir grandes deformaciones o desplazamientos. Los *coeficientes de rigidez* son magnitudes físicas que cuantifican la rigidez de un elemento resistente bajo diversas configuraciones de carga.

ROTODINÁMICA: En términos generales la rotodinámica es la disciplina que analiza y predice el comportamiento dinámico de maquinaria rotatoria (o también llamadas turbomáquinas), históricamente ha implicado una combinación de áreas separadas como: vibraciones, dinámica estructural e hidrodinámica.

ROTOR: Es el ensamble del eje en rotación que es soportado en los apoyos. El rotor puede estar rígidamente acoplado a otros rotores en otras máquinas, formando una cadena extendida del rotor.

ROTOR JEFFCOTT: Un disco simple centrado en un eje uniforme, flexible y de masa despreciable, que está soportado por dos apoyos idénticos, es el sistema más ampliamente utilizado por los investigadores para estudiar y entender los fenómenos básicos rotodinámicos. Si los apoyos son infinitamente rígidos, este modelo se conoce normalmente como *Rotor Laval* en Europa y *Rotor Jeffcott*, en otras partes del mundo.

RUGOSIDAD: Es el conjunto de irregularidades que posee una superficie en aquellas secciones donde se corrigieron los errores de forma y las ondulaciones que pudiesen presentarse durante su proceso de fabricación.

SINCRÓNICO: Se refiere a cualquier cosa que está rotando a la misma frecuencia del rotor. El desbalanceo es un ejemplo de una fuerza de rotación sincrónica (1X).

SISTEMA: Es un objeto o colección de objetos operativamente interrelacionadas del que se interesa considerar fundamentalmente su comportamiento global, que responde ante unas entradas para producir unas salidas.

SISTEMA DINÁMICO: Un sistema dinámico es un sistema cuyo estado evoluciona con el tiempo. El comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus relaciones; de esta forma se puede elaborar modelos que buscan representar la estructura del mismo sistema.

SISTEMA ROTOR: Incluye todas las partes mecánicas envueltas en la vibración. Estos incluyen el eje con cualquier disco atado a ellos, los cojinetes que soportan el eje, las estructuras que soportan los cojinetes, el cuerpo de la máquina, los cimientos del sistema, máquinas acopladas y la tubería asociada al sistema.

TERMOHIDRODINÁMICA (LTH): Es aquella que como lo indica su nombre, tiene en cuenta la influencia de la temperatura sobre el proceso de lubricación hidrodinámico, en especial, sobre las propiedades reológicas del lubricante afectando de forma directa su capacidad de crear película.

TRIBOLOGÍA: (Del griego tribos, "frotar o rozar") es la ciencia que estudia la fricción, el desgaste y la lubricación que tienen lugar durante el contacto entre superficies sólidas en movimiento. El término es usado universalmente desde finales del siglo XX.

TURBULENCIA: Es un régimen de flujo caracterizado por baja difusión de momento, alta convección y cambios espacio-temporales rápidos de presión y velocidad.

UNTUOSIDAD: Es la capacidad del aceite de adherirse a superficies metálicas formando una capa o película muy efectiva para disminuir el rozamiento. La untuosidad depende del contenido del aceite en el ácido graso, de las características de éstas moléculas, así como también de la naturaleza de las superficies sobre la cual se desea formar la película superficial.

VELOCIDAD CRÍTICA: La velocidad crítica se define como la velocidad máxima que puede adquirir un objeto en ciertas condiciones.

VELOCIDAD UMBRAL: En vibraciones mecánicas es aquella velocidad límite antes de alcanzar la resonancia.

VIBRACIÓN: Es la oscilación de un sistema físico o de una propiedad alrededor de una posición de equilibrio (o de referencia). Un sistema mecánico (mecanismos, máquina, estructura, etc.) vibra cuando sobre él actúan fuerzas variables y la intensidad (o amplitud) de la vibración depende de la movilidad del sistema.

VISCOSIDAD: La viscosidad es la oposición de un fluido a las deformaciones tangenciales.

VÓRTICE: Un vórtice es un flujo turbulento en rotación espiral con trayectorias de corriente cerradas. Como vórtice puede considerarse cualquier tipo de flujo circular o rotatorio que posee vorticidad.

VORTICIDAD: Es un concepto matemático usado en dinámica de fluidos que se puede relacionar con la cantidad de circulación o rotación de un fluido. La vorticidad se define como la circulación por unidad de área en un punto del flujo.

RESUMEN

TÍTULO: SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN EN LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA EN COJINETES *

AUTORES: DIEGO ANDRÉS LARA FORERO

JAIME EDUARDO PRIETO GALVIS

ANDREA LISETH RAMÍREZ MANCIPE

RAFAEL ANDRÉS RAMÍRES SERRANO **

PALABRAS CLAVES: Lubricación, hidrodinámica, cojinetes, Reynolds, termohidrodinámica, cavitación, turbulencia, desalineamiento, no lineal, métodos numéricos.

DESCRIPCIÓN:

Este trabajo de grado presenta el estado del arte de los cojinetes hidrodinámicos estudiando su comportamiento lineal y no lineal, producido a partir de los parámetros que se exhiben durante el régimen hidrodinámico. Parte de los estudios en cojinetes, bajo este tipo de régimen, se han desarrollado a partir de modelos matemáticos que dan solución al problema haciendo hipótesis de linealidades en todas o casi todas las variables que afectan dicho fenómeno. Debido a la presencia de no linealidades; se encuentra que las soluciones lineales no representan con fidelidad el comportamiento real del sistema, ocasionando que deba ser revaluado para mostrar resultados que se adapten a las suposiciones asumidas. Por tanto, siendo un tema tan complejo, se hace necesario compilar la información existente, para así dar una base teórica de la cual se pueda partir hacia investigaciones más profundas y específicas. A partir de la síntesis de la información recopilada, se establecen metodologías de solución al problema no lineal de las fuerzas en cojinetes hidrodinámicos con base en las diferentes variables que las generan, como la temperatura, la cavitación, la turbulencia y el desalineamiento. Se muestran los métodos numéricos más relevantes que se usan para la resolución de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento no lineal y se analiza diferentes bancos de experimentación para identificar los elementos constitutivos más representativos que permitan modelar físicamente el comportamiento de la lubricación hidrodinámica en los cojinetes.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ingenierías Físico Mecánicas, Escuela de Ingeniería Mecánica, Director Ph. D. Heller Sánchez Acevedo

ABSTRACT

TÍTULO: SEMINARY OF INVESTIGATION IN HYDRODYNAMIC LUBRICATION IN JOURNAL BEARING *

AUTORES: DIEGO ANDRÉS LARA FORERO

JAIME EDUARDO PRIETO GALVIS

ANDREA LISETH RAMÍREZ MANCIPE

RAFAEL ANDRÉS RAMÍRES SERRANO **

PALABRAS CLAVES: Lubrication, hydrodynamic, journal bearing, Reynolds, thermohydrodynamic, cavitation, turbulence, misalignment, non-linear, numerical methods..

DESCRIPCIÓN:

This degree work shows the state of the art for hydrodynamics bearings considering its linear and non-linear behavior produced from the parameters that are displayed during the hydrodynamic regime. Some studies on bearings, under this type of regime, have been developed from mathematical models that provide solutions to the problem by assuming linearity hypothesis in all or almost all the variables that affect this phenomenon. Due to the presence of non-linearities, it has been found that these linear solutions do not faithfully represent the actual behavior of the system, which means it should be reevaluated to show results that suit the assumptions. Therefore, for such a complex matter, it is necessary to compile the existing information in order to provide a theoretical basis for further and more specific research. From the synthesis of information collected, set methodologies of solution to nonlinear hydrodynamic forces on bearings based on the variables that generate them, such as temperature, cavitation, turbulence and misalignment. It shows the most relevant numerical methods used to solve the equations governing the nonlinear behavior and it analyzed different banks of experimentation to identify the most representative elements that allow physically modeling the behavior of hydrodynamic lubrication in the bearings.

* Degree Project

** Faculty of Mechanical Engineering Physics, School of Mechanical Engineering, Director: Ph.D Heller Sánchez Acevedo.

INTRODUCCIÓN

Actualmente un gran porcentaje de los sistemas dinámicos basan su funcionamiento en un movimiento rotacional, donde el sistema de apoyo de los ejes constituye una parte imprescindible en el estudio de cualquier máquina rotatoria. Entre los sistemas de apoyo existe una amplia variedad y la elección del tipo de apoyo depende de las cargas a soportar, del tipo de máquina y de la planificación del mantenimiento, entre otros, y su diseño es muy importante ya que son los elementos encargados de transmitir las fuerzas de los elementos rotativos a la bancada, buscando bajas pérdidas de potencia, bajo desgaste de las piezas, asequibilidad en costo de fabricación y mantenimiento. Una de las alternativas más atractivas para soportar los árboles son cojinetes hidrodinámicos, debido a que cumple con las condiciones antes mencionadas y gracias a su versatilidad, pueden variar su forma y diseño según la función y aplicación de la máquina, y así soportar altas temperaturas, velocidades y cargas, etc.

Siendo este un tema del cual no se ha investigado en la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad Industrial de Santander, es necesario tener una buena fundamentación y metodología para empezar a profundizar acerca de la lubricación hidrodinámica. Esta base teórica se proporciona mediante el desarrollo de un Seminario de Investigación en Lubricación Hidrodinámica en Cojinetes, el cual permitirá introducir bases fundamentales, las variables más influyentes y sus métodos de solución, para establecer una metodología en la que cualquier investigador interesado en el tema pueda aplicar confiablemente. Este trabajo puede ser utilizado como base de futuros proyectos y/o investigaciones que permitan caracterizar de manera cercana a la realidad los sistemas rotodinámicos presentes en la industria, que pueden llegar a lograr mejoras desde el diseño hasta el mantenimiento de la maquinaria.

Parte I

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN

Capítulo 1

GENERALIDADES DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN

Como una modalidad para la obtención del grado como profesional, la Universidad Industrial de Santander brinda la opción de realizar un seminario de investigación basado en el realizado por la Universidad de Gottingen en Alemania, que consiste en estudiar, discutir e intercambiar experiencias acerca de un tema en particular, un grupo, en el cual sus participantes, se intercomunican exponiendo dicho tema, complementándolo, evaluándolo, aportando ideas entre todos, abstrayendo conclusiones y planteando nuevos interrogantes, permitiendo que todo ello quede registrado en una memoria escrita. El grupo del seminario debe estar acompañado y guiado por un director que a partir de su experiencia y vasto conocimiento sobre el tema central permita cumplir los objetivos que se establezcan alcanzar.

El objetivo principal de esta actividad académica, es formar a los participantes para la investigación científica mediante el desarrollo de habilidades específicas aplicadas al asumir los diferentes roles dentro del seminario. Dichas habilidades están orientadas a desarrollar la capacidad de lector crítico de resultados de investigación en cualquiera de las áreas del conocimiento, a fortalecer la capacidad de observar e identificar los problemas presentes en tópicos bajo análisis, a buscar respuestas a preguntas claves y sustentarlas teórica y metodológicamente en forma verbal y por escrito, y a identificar las relaciones del problema objeto de estudio con el contexto económico, político o social, a fin de enriquecer con una mirada integral, el conocimiento para el grupo de estudiantes.

El seminario de investigación, como herramienta para el desarrollo integral, presenta entre otras ventajas, adquirir el hábito de documentarse acerca del tema bajo estudio, experimentar la eficiencia del trabajo en equipo y usar y dominar distintas herramientas didácticas de apoyo al desarrollo de las sesiones. Para que se realice a buen término el seminario de investigación es importante que prime un ambiente amable y cooperativo, además que exista el diálogo para compartir los conocimientos adquiridos; los participantes deben tener una alta responsabilidad que les permita preparar de manera óptima cada sesión para lograr el aprendizaje esperado.

1.1. ORGANIZACIÓN DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN

El Seminario de Investigación se compone de las siguientes actividades: la Relatoría, la Correlatoría, la Discusión y el Protocolo, las cuales deben girar en torno a un tema, del que se desprenden los subtemas a tratar durante las sesiones. Dichas actividades son responsabilidad de los integrantes del grupo, por lo cual a cada uno de ellos es asignado un rol, de carácter rotativo; es así como una persona que en una sesión asume el rol de correlator, en la siguiente puede ser el protocolante, es decir el responsable del protocolo.

Director: Ph.D. Heller Guillermo Sánchez Acevedo

Participantes: Diego Andrés Lara Forero
Jaime Eduardo Prieto Galvis
Andrea Lizeth Ramírez Mancipe
Rafael Andrés Ramírez Serrano

A los participantes se les asigna un rol diferente para cada sesión. Las sesiones se llevan a cabo en las instalaciones de la Escuela de Ingeniería Mecánica con asistencia abierta a la comunidad universitaria. El número de sesiones que abordan los temas y subtemas relacionados con el seminario son mostrados en el cuadro 2.1. Las sesiones se programan para una duración de 2 horas.

1.2. TEMA DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN

Actualmente un gran porcentaje de los sistemas dinámicos basan su funcionamiento en un movimiento rotacional, donde el sistema de apoyo de los ejes constituye una parte imprescindible en el estudio de cualquier máquina rotatoria. Entre los sistemas de apoyo existe amplia variedad y la elección del tipo de apoyo depende de las cargas a soportar, del tipo de máquina y de la planificación del mantenimiento, entre otros. En la actualidad, los cojinetes hidrodinámicos son ampliamente utilizados, variando su forma y diseño según la función y aplicación de la máquina.

La teoría matemática actual de la lubricación hidrodinámica está basada en el trabajo de Reynolds (1886) [10, 44, 114], que formula una ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales elíptica, cuya solución analítica ha sido estudiada ampliamente, pero aún no ha sido hallada [121]. Los estudios de los cojinetes hidrodinámicos se han desarrollado a partir de modelos matemáticos, que dan solución al problema haciendo hipótesis de linealidades en todas, o casi todas, las variables que afectan dicho fenómeno. Debido a la presencia de factores como la rugosidad de la superficies, la cavitación, temperatura, desalineamiento del eje y turbulencia se encuentra que estas soluciones lineales no representan con fidelidad el comportamiento real del sistema [?], lo que conlleva que deba ser reevaluado para mostrar resultados que se adapten a las suposiciones asumidas. Siendo un tema tan complejo y en el cual ha habido relativamente pocas investigaciones,

se hace necesario estructurar la información existente, para así dar una base teórica de la cual se pueda partir hacia investigaciones más profundas y específicas.

Debido a lo anterior el seminario de investigación se centra en el establecimiento del estado del arte en la lubricación hidrodinámica, enfocado al planteamiento de una metodología que involucre los parámetros que generan no linealidad, los procesos matemáticos y la aplicación a los sistemas rotodinámicos.

1.3. DIRECCIÓN DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN

La dirección del Seminario de Investigación: Lubricación Hidrodinámica en Cojinetes, estuvo a cargo del Doctor Heller Guillermo Sánchez Acevedo, quien tiene la experiencia y conocimiento necesario para orientar el trabajo hacia los objetivos propuestos.

Formación Académica

- **Doctorado** Universidad Pública de Navarra
Doctorado en Ingeniería Mecánica Aplicada y Computacional
Noviembre de 2001 - Junio de 2009
Planteamiento de un Modelo Matemático para la Simulación del Comportamiento Dinámico de Rotores Flexibles
- **Especialización** Universidad Santo Tomás De Aquino - Sede Bucaramanga - USTAbuc
Especialización en Docencia Universitaria
Junio de 2000 – Junio de 2001
Pensum Académico para la Carrera de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Pamplona
- **Pregrado/Universitario** Universidad Francisco De Paula Santander - UFPS
Ingeniería Mecánica
Marzo de 1993 - Diciembre de 1999
Estudio de optimización del proceso de laminado y recocido, y reorganización administrativa de la empresa Aluminios Onava S.A

1.4. METODOLOGÍA DEL SEMINARIO

Con base en los lineamientos establecidos por el modelo del Seminario Alemán y con el propósito de garantizar la fluidez de las sesiones y el cumplimiento de los objetivos planteados para el seminario, la metodología a desarrollar se esquematiza en la figura 1.1.

Figura 1.1: Metodología Seminario Investigación



Capítulo 2

PLANEACIÓN

En esta etapa se establecen los lineamientos bajo los cuales se desarrolla el seminario, se definen los objetivos, alcances y resultados que se esperan obtener mediante la selección del tema, el estudio bibliográfico, los subtemas y la planificación de las sesiones.

Los alcances y objetivos del seminario son:

- Recopilar y sintetizar la información y documentación existente acerca de la lubricación hidrodinámica en cojinetes.
- Establecer las metodologías de solución del problema no lineal de las fuerzas en cojinetes hidrodinámicos.
- Identificar los métodos numéricos más relevantes que se usan en la solución de ecuaciones no lineales enfocándolos hacia la resolución de las ecuaciones que rigen la lubricación hidrodinámica.
- Establecer el estado del arte acerca de los parámetros que conducen al comportamiento no lineal de la lubricación hidrodinámica.
- Escribir un artículo en formato revista científica, que muestre, de forma condensada, el contenido y las conclusiones del seminario de investigación; dos (2) documentos \LaTeX , uno tipo Book que condense el contenido y otro tipo Beamer para las presentaciones.

2.1. ESTUDIO BIBLIOGRÁFICO

Inicialmente se identificaron unas referencias bibliográficas que aportaron al conocimiento básico de la lubricación hidrodinámica y algunas generalidades sobre el comportamiento no lineal del sistema. La bibliografía definida antes de la ejecución del seminario fue:

- HAMROCK, B.J., JACOBSON, B.O., SCHMID, S.R.; Elementos de Máquinas. McGraw-Hill, 2000. El enfoque de este libro proporciona los fundamentos básicos de los elementos de máquinas, abordando temas como la fricción y la rodadura, desgaste por adherencia, abrasividad, corrosión, lubricación hidrodinámica, lubricantes y sistemas de lubricación, selección de lubricantes, cojinetes hidrostáticos, hidrodinámicos y autolubricados
- SHIGLEY, J.E., MISCHKE, C.R.; Diseño en Ingeniería Mecánica. 5ª ed., McGraw-Hill, 1990. El Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley tiene el enfoque básico estándar para el diseño de maquinaria que se ha empleado a través de los años. Combina el enfoque directo sobre los fundamentos tal y como se pueden aplicar en la construcción real y en la enseñanza dentro de la academia.
- WILLIAM F. AMES; Numerical methods for differential partial equations, segunda edición. Esta fuente bibliográfica es de gran importancia porque ayuda a la comprensión y utilización de diferentes métodos para las posibles soluciones de todas aquellas ecuaciones diferenciales parciales en problemas concretos de ingeniería.
- VALKONEN, A., Oil Film Pressure In Hydrodynamic Journal Bearings; Doctoral Dissertation. Este estudio determina la presión de la película de aceite en tiempo real en cojinetes hidrodinámicos en condiciones realistas. El estudio se centró en los cojinetes del motor, los experimentos en bancos de prueba, simulaciones y cálculos se llevaron a cabo para determinar la presión de la película de aceite y comprender su relación con otros parámetros de funcionamiento.
- PINTOR BOROBIA, J. M., LÓPEZ ARTEAGA, I.; Influencia del comportamiento no lineal de cojinetes hidrodinámicos en la dinámica de rotores flexibles, modelización matemática del sistema rotor cojinete. Febrero de 1997. En este trabajo se estudia el carácter no lineal de las fuerzas de origen hidrodinámico que tienen lugar en los cojinetes haciéndose referencia a su influencia sobre la respuesta dinámica de rotores flexibles. Se ha desarrollado un modelo matemático que integra la ecuación de Reynolds, bajo la hipótesis de flujo laminar, permitiendo calcular la distribución de presiones que se establece en la película de fluido lubricante y, a partir de ahí, la resultante de los esfuerzos de reacción que tienen lugar en el cojinete.
- HAMROCK, B.J., JACOBSON, B.O., SCHMID, S.R; Fundamentals of fluid film lubrication, second edition. Este libro posee información enfatizada en lubricación hidrodinámica y elastohidrodinámica, estudiadas analíticamente a partir de soluciones lineales y soluciones numéricas para cojinetes radiales y axiales.
- DI PAOLO J., CORVALÁN C. M., SAITA F. A.; Solución numérica de la ecuación de Reynolds formulación diferencial vs. formulación integral; Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. (1995).

Una vez estudiadas las referencias básicas se plantean los temas y subtemas del seminario, disponibles en el cuadro 2.1.

Cuadro 2.1: Temas y subtemas de la investigación.

TEMAS	SUBTEMAS
GENERALIDADES DE LOS COJINETES	Partes de un cojinete. Clasificación de los cojinetes.
FLUJO VISCOSO	Medición de la viscosidad. La viscosidad como función de la temperatura. La viscosidad como función de la presión. Lubricantes aceites.
ROZAMIENTO DE COJINETES	Generalidades. Fricción.
TIPOS DE LUBRICACIÓN	Lubricación hidrodinámica. Lubricación marginal. Lubricación de película mínima. Lubricación hidrostática. Lubricación elastohidrodinámica y termoelastohidrodinámica.
TEORÍA DE LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA	Relaciones geométricas para cojinetes. Ecuación de Petrov. Obtención de la lubricación hidrodinámica.
MATERIALES PARA COJINETES	Características de los materiales para cojinetes. Materiales metálicos para cojinetes. Materiales no metálicos para cojinetes. ¿Cómo reducir la fricción en los cojinetes metálicos? ¿Cómo reducir la fricción en los cojinetes no metálicos?
DISTRIBUCIÓN DE PRESIÓN	Solución lineal de la ecuación de Reynolds. Solución lineal de cojinetes cortos. Solución lineal de cojinetes largos.
MÉTODOS DE DISEÑO DE UN COJINETE	Diseño según la ecuación de Mckee-Mckee. Método de diseño de Raimondi y Boyd.
METROLOGÍA EN LA EXPERIMENTACIÓN	Medición e instrumentos.
MODELADO DE SISTEMAS DINÁMICOS	Sistemas, experimentos y modelos. Clasificación y construcción de modelos.

Cuadro 2.1 (Continuación)

TEMAS	SUBTEMAS
RUGOSIDAD DE LOS MATERIALES EN LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA	¿Qué es la rugosidad? Medición de la rugosidad. Efectos de la rugosidad en la lubricación hidrodinámica de cojinetes.
LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA EN PRESENCIA DE CAVITACIÓN	¿Qué es la cavitación? Formulación del problema y modelos. Estudio de aplicaciones.
EFEECTO DE LA TEMPERATURA SOBRE LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA	Introducción. Deducción de la ecuación de energía. Estudio de aplicaciones.
LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA EN PRESENCIA DE DESALINEAMIENTO ANGULAR	Desalineamiento del cojinete causado por la deformación del eje. Estudio y simulación numérica de los sistemas rotor cojinete con y sin desalineamiento.
LUBRICACIÓN TURBULENTA	Ecuación de tiempo promedio de movimiento y esfuerzo de Reynolds. Vórtices de Taylor. Modelo de longitud mixta. Modelo $k - \epsilon$
MODELOS PARA SISTEMA ROTOR COJINETE	Efecto de la holgura en los coeficientes rotodinámicos. Efecto de la turbulencia en los coeficientes rotodinámicos. Efecto de la temperatura en los coeficientes rotodinámicos. Análisis para cojinetes presurizados. Efecto de la simetría en los coeficientes rotodinámicos.
MÉTODOS NUMÉRICOS	Generalidades de los métodos numéricos. Teoría y serie de Taylor. Método de Newton Raphson. Diferencias finitas. Método de elementos finitos. Redes neuronales artificiales. Volúmenes finitos. Otros métodos de solución.
BANCOS EXPERIMENTALES	Generalidades. Estudio de aplicaciones.

Capítulo 3

EJECUCIÓN

En esta etapa se desarrolló lo establecido en la planeación; la preparación del documento por parte del relator de cada subtema y el desarrollo de la respectiva sesión. El cuadro 3.1 presenta la asignación de sesiones por tema y los roles dentro del seminario. Es importante resaltar que los demás integrantes de la investigación participaban activamente de la discusión, análisis y conclusión de cada tema profundizado por sesión. En diversas ocasiones se tuvo el valioso aporte de la comunidad de Ingeniería Mecánica UIS y UPB.

- El documento previo a la sesión se redacta de forma clara en un archivo LyX tipo Book, cumpliendo las normas NTC 1486 y es estudiado por los participantes con antelación para garantizar el éxito de la sesión.
- Se levanta un acta donde se especifica su número consecutivo, la fecha y hora de la sesión, lugar, participantes, tema desarrollado observaciones y conclusiones.
- Se preparan las presentaciones en LyX Beamer


3.1. ACTA

Es la evidencia escrita de cada sesión del seminario y un insumo para la elaboración del informe final. Permitted plasmar las actividades tal y como fueron desarrolladas utilizando una redacción clara y concisa. En este documento se registró el tema, día, duración, asistentes, funciones y tareas cumplidas (síntesis de la relatoría y correlatoría), desarrollo de la discusión, aportes de los participantes, interrogantes nuevos sobre el tema, validaciones y acuerdos entre los miembros del seminario. El acta fue revisada por el director del seminario quien realizó algunos aportes para su optimización. Ver la figura 3.1

Cuadro 3.1: Asignación de sesiones para Relator y Correlator

TEMAS	RELATOR	CORRELATOR
GENERALIDADES DE LOS COJINETES	Diego Lara	Rafael Ramírez
FLUJO VISCOSO	Jaime Prieto	Andrea Ramírez
ROZAMIENTO DE COJINETES	Rafael Ramírez	Diego Lara
TIPOS DE LUBRICACIÓN	Andrea Ramírez	Rafael Ramírez
TEORÍA DE LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA	Diego Lara	Jaime Prieto
MATERIALES PARA COJINETES	Jaime Prieto	Andrea Ramírez
DISTRIBUCIÓN DE PRESIÓN	Rafael Ramírez	Diego Lara
MÉTODOS DE DISEÑO DE UN COJINETE	Andrea Ramírez	Jaime Prieto
METROLOGÍA EN LA EXPERIMENTACIÓN	Diego Lara	Rafael Ramírez
MODELADO DE SISTEMAS DINÁMICOS	Jaime Prieto	Andrea Ramírez
RUGOSIDAD DE LOS MATERIALES EN LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA	Rafael Ramírez	Diego Lara
LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA EN PRESENCIA DE CAVITACIÓN	Andrea Ramírez	Rafael Ramírez
EFFECTO DE LA TEMPERATURA SOBRE LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA	Diego Lara	Jaime Prieto
LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA EN PRESENCIA DE DESALINEAMIENTO ANGULAR	Jaime Prieto	Andrea Ramírez
LUBRICACIÓN TURBULENTA	Diego Lara	Rafael Ramírez
MODELOS PARA SISTEMA ROTOR COJINETE	Rafael Ramírez	Jaime Prieto
MÉTODOS NUMÉRICOS	Jaime Prieto	Rafael Ramírez
BANCOS EXPERIMENTALES	Diego Lara	Andrea Ramírez

Figura 3.1: Ejemplo de un acta diligenciada



SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN EN LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA EN COJINETES

ACTA No. 6 Sesión 4. TEORÍA DE LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA		
Fecha: 18/05/2011	Hora: 11:00 a.m.	Lugar: Escuela Ingeniería Mecánica UIS
Asistentes y funciones		
DIEGO ANDRÉS LARA FORERO	Relator	
JAIME EDUARDO PRIETO GALVIS	Correlator	
ANDREA LIZETH RAMÍREZ MANCIPE	Protocolante	
RAFAEL ANDRÉS RAMÍREZ SERRANO	Participante	
HELLER GUILLERMO SÁNCHEZ	Director	
Tema		
1) Teoría de la lubricación hidrodinámica: a) Obtención de la lubricación hidrodinámica b) Relaciones geométricas de un cojinete hidrodinámico c) Experimentación de Tower e hipótesis de Reynolds.		
Contenido y desarrollo de la discusión		
Se muestran los aspectos fundamentales, condiciones y ecuaciones que gobiernan la lubricación hidrodinámica. Se especifican las relaciones geométricas de un cojinete de este tipo de lubricación y se establece la nomenclatura para el uso en ecuaciones futuras. En esta sesión, también se señalan las características y escenarios de los distintos regímenes de lubricación comparados con la LHD y se señalan alguna teorías que rigen ésta, empezando desde las experimentos de Beauchamp Tower hasta el establecimiento de la teoría de Osborne Reynolds, basados contundentemente en la ley de viscosidad de Newton. Finalmente se muestra la obtención de la Ecuación de Reynolds que rige todo sistema hidrodinámico y las condiciones principales que debe cumplir un fluido para regirse bajo ésta.		
Anotaciones y observaciones		
<ul style="list-style-type: none"> Las diapositivas deben mejorar más en su presentación y en su contenido; se debe aclarar que estas son ayudas para el relator y no debe reemplazarlo. Es importante que los integrantes del seminario se apropien de los conceptos y ecuaciones básicas. 		
CONCLUSIONES		
<ul style="list-style-type: none"> La ecuación de Reynolds para hidrodinámica no tiene una solución general. En la mayoría de los casos, asumiendo determinadas condiciones, la ecuación se linealiza y se obtiene una solución. Para poder resolver la ecuación de Reynolds asumiendo parámetros del comportamiento real del sistema, se hace necesario el uso de métodos numéricos y métodos de relajación para acelerar este proceso. Para la obtención de la lubricación hidrodinámica se tienen que cumplir simultáneamente ciertas condiciones de velocidad, viscosidad, carga y parámetros geométricos. 		
Firma de los participantes		
HELLER GUILLERMO SÁNCHEZ Director	DIEGO ANDRÉS LARA FORERO Relator	
JAIME PRIETO GALVIS Correlator	ANDREA RAMÍREZ MANCIPE Protocolante	RAFAEL RAMÍREZ SERRANO Participante

Capítulo 4

FINALIZACIÓN

Al finalizar las sesiones se ha recopilado una cantidad importante de experiencias, información, documentos y conclusiones acerca de la lubricación hidrodinámica en cojinetes. Posteriormente se describen las características del producto del seminario.

4.1. LAS PRESENTACIONES

Las presentaciones, se realizaron para cada tema y subtema, con diapositivas que sirven como guía al expositor, las cuales dan orden lógico a la presentación y favorecen el entendimiento del auditorio. Las presentaciones fueron hechas en **LyX** Beamer con clase de documento **JuanLesPins**, en un ambiente gráfico que garantizó la interiorización de la temática. Las diapositivas presentan los integrantes del seminario, institución, fecha, una introducción del tema estudiado, contenido, referencias bibliográficas y conclusiones. La figura 4.1 es la diapositiva de apertura en todas las sesiones y la figura 4.2 es un ejemplo de las de las diapositivas utilizadas. Durante el seminario el director sugirió, que mediante un mapa mental, se visualizara globalmente el desarrollo de las sesiones, la temática y las conclusiones principales obtenidas hasta la fecha; para ello se generó una presentación dinámica en **PersonalBrain 6.0**.

4.2. EL DOCUMENTO

El *documento* escrito fue elaborado según la norma NTC 1486. Éste es el fruto de la apropiación de los conceptos básicos, la interpretación de las metodologías para solucionar el problema hidrodinámico, el análisis de las herramientas numéricas, la abstracción de los resultados entregados por las publicaciones internacionales y la síntesis de las discusiones en las sesiones.

Figura 4.1: Formato de presentación

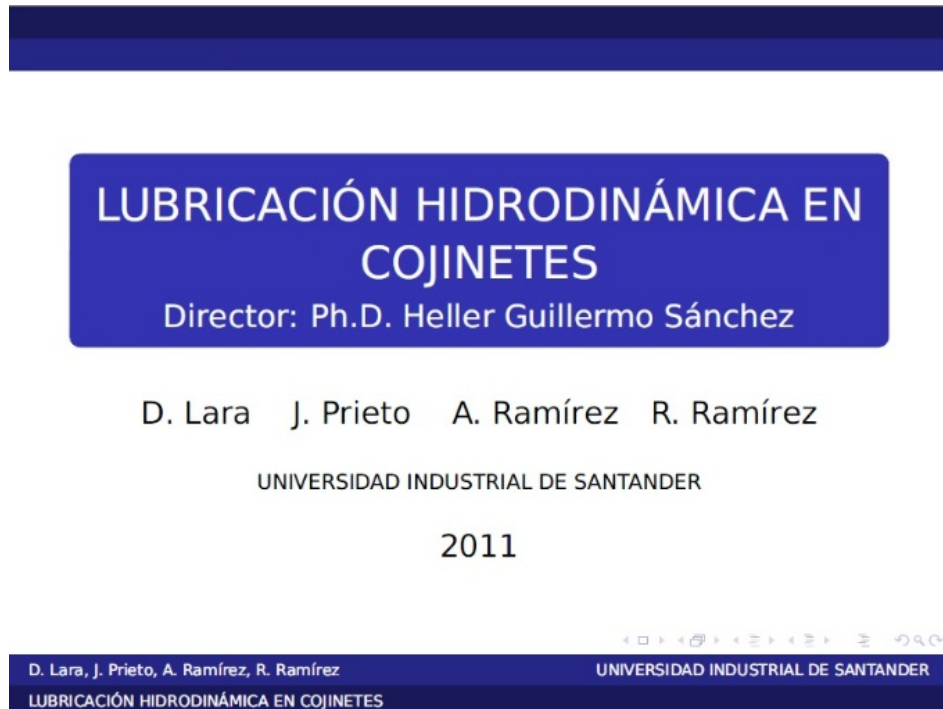


Figura 4.2: Ejemplo de diapositiva

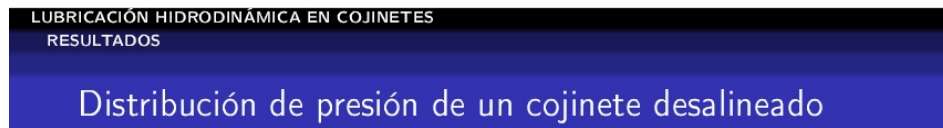
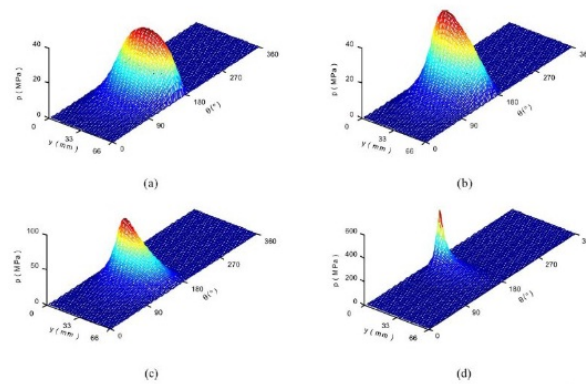


Figura: Distribución de la presión de película de un cojinete desalineado



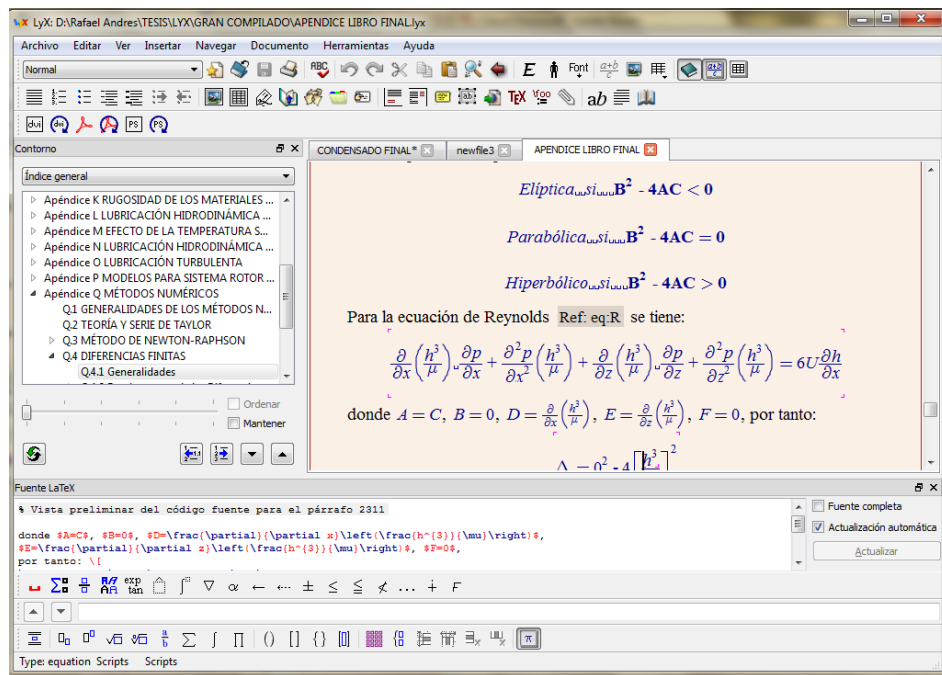
Fuente: Hydrodynamic lubrication analysis of journal bearing, SUN, J. & CHANG-LIN, G., 2004.

Para evaluar de forma específica y resumida la temática estudiada, se preparó un *documento condensado*, que garantiza el cumplimiento de los objetivos planteados sin pérdida de profundidad. Está compuesto por 15 capítulos. El primero, es introductorio y presenta la pertinencia de esta investigación, asociado a una estructura metodológica para enfrentar el problema de la lubricación hidrodinámica no lineal en cojinetes. Los capítulos posteriores son una recopilación condensada de los temas expuestos en el cuadro 2.1. El documento enfoca la temática mediante la aplicación de casos de interés y relaciones entre las distintas fuentes bibliográficas.

El *documento extenso (o extendido)* que da origen al condensado, presenta más detalles sobre cada capítulo, las referencias consultadas y las conclusiones particulares de cada temática.

El producto fue diseñado en el editor de texto LyX, cuyas ventajas en la estructura del documento, edición de ecuaciones, vínculos entre los objetos del texto y control sobre las citas bibliográficas lo hacen superior y eficiente. La figura 4.3 es un esquema de la interfaz gráfica de LyX.

Figura 4.3: Interfaz gráfica de LyX



Se escribe también un documento con formato de revista científica, sustentando las generalidades de la investigación.

Parte II
RESULTADOS

Capítulo 5

INTRODUCCIÓN

En busca de brindar herramientas teóricas y metodológicas a la escuela de Ingeniería Mecánica, para fomentar el planteamiento de proyectos de investigación, que puedan ser desarrollados a través del programa de Maestría, y que a su vez ayuden a fortalecer los grupos de investigación, se ha planteado realizar un seminario de investigación en el área de la lubricación hidrodinámica, con el objeto de establecer una base bibliográfica que abarque los principios generales, los modelamientos matemáticos y el estado del arte de los cojinetes hidrodinámicos, sentando una base para que se realicen proyectos en este campo de la ingeniería, a partir de esquemas metodológicos desarrollados durante el seminario.

Las metodologías que se establecen como fruto del procesamiento de información, permiten analizar teórica y analíticamente problemas reales en la industria ocasionados directamente por efectos como la cavitación, la temperatura, la turbulencia, los parámetros microgeométricos y los efectos de desalineamiento, que afectan el buen funcionamiento de la máquina.

De manera concreta, este trabajo de grado permitirá fundamentar algunos aspectos que busquen complementar el programa RotoDin desarrollado en la tesis doctoral de Heller Guillermo Sánchez. Con base en la metodología establecida como resultado del seminario de investigación, estudiantes de maestría podrán realizar las ecuaciones que conjuguen los parámetros que hacen comportar al sistema rotodinámico de forma no lineal a partir del régimen de lubricación hidrodinámico y establecer con estas, el comportamiento de las fuerzas que allí interactúan.

Figura 5.1: Bases de datos



Un estudio realizado en las diferentes bases de datos como CRCnetbase, Knovel , Pro-Quest, e-Libro, SpringerLink, Elsevier Science y ISI Web of Knowledge (ver figura 5.1), entre otras, demuestran la importancia y pertinencia de desarrollar investigaciones y proyectos para la lubricación hidrodinámica en cojinetes. Por tanto, realizando un registro y un análisis de estos datos recopilados, a continuación se exponen diferentes gráficas que respaldan de manera significativa la conveniencia de este seminario de investigación.

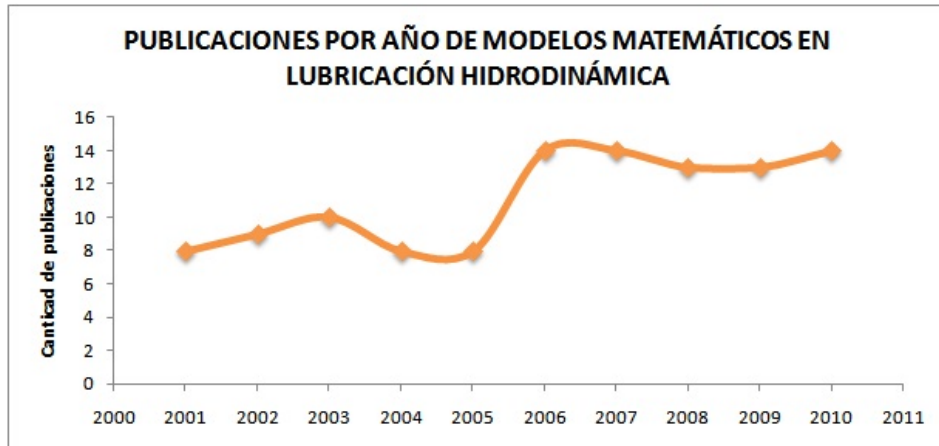
Figura 5.2: Publicaciones hidrodinámicas



La figura 5.2 resalta la tendencia creciente de los últimos 4 años en la investigación sobre cojinetes hidrodinámicos, además, indica que a lo largo de 11 años no se han tenido valores bajos en investigaciones y siempre se han mantenido entre 30 y 40 publicaciones aproximadamente.

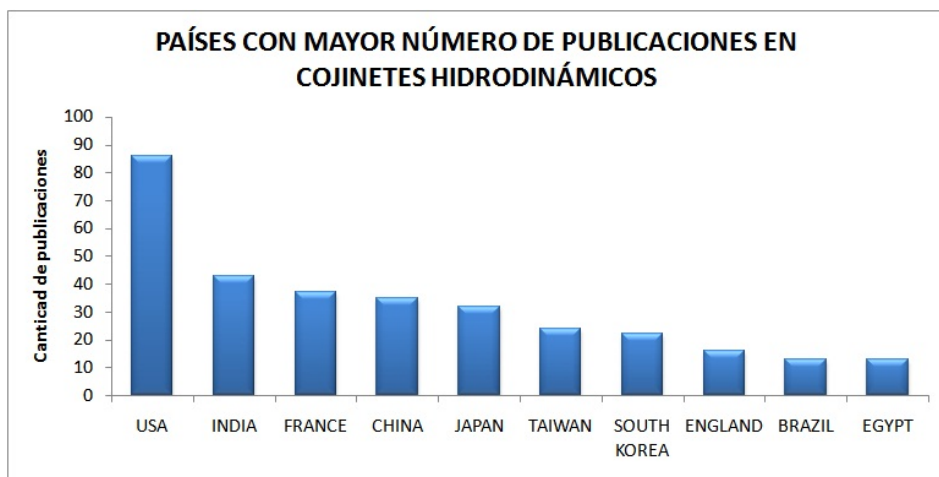
Por otro lado, debido a que el seminario de investigación plantea esquemas metodológicos que incluyen modelos matemáticos y herramientas numéricas para su solución, se establece que, también existen varios investigadores que abordan esta línea respecto al análisis de la lubricación hidrodinámica y en concordancia con los datos anteriores, existe una tendencia a aumentar el número de publicaciones por año, como se muestra en la gráfica 5.3.

Figura 5.3: Publicaciones de modelos matemáticos



Es importante resaltar que los países emergentes económicamente están investigando la lubricación hidrodinámica de cojinetes, lo que respalda el hecho de profundizar en el tema. En la figura 5.4 se presenta la cantidad de publicaciones por naciones en los últimos diez años.

Figura 5.4: Publicaciones de cojinetes hidrodinámicos por países.



La figura 5.4, se enfoca específicamente en el estudio de los modelos matemáticos. El nivel de desarrollo de los países que aparecen en la figura demuestra que la academia

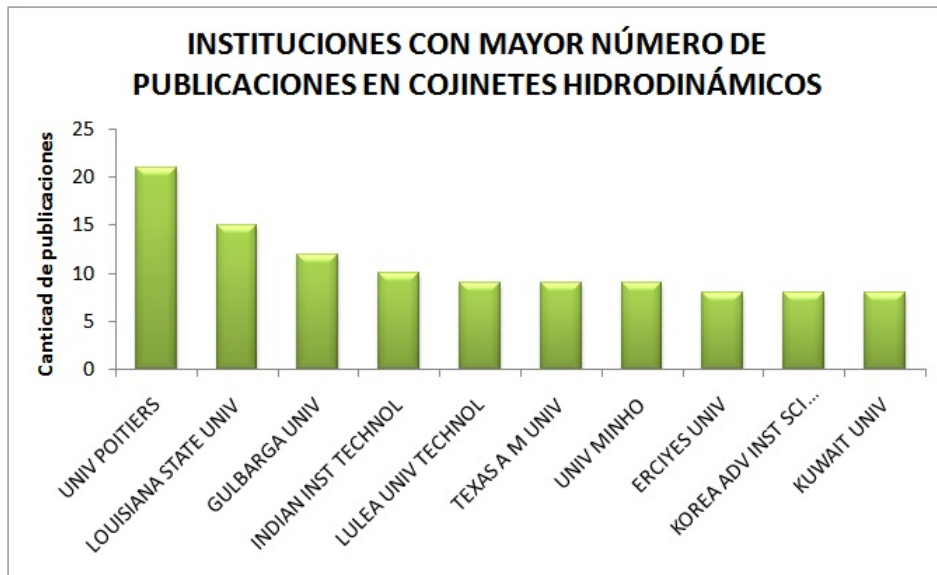
juega un papel preponderante al momento de realizar estudios meramente numéricos, como es el caso de Suecia e Italia que tienen un mayor desarrollo en la educación, en comparación con Taiwán y Brasil.

Figura 5.5: Publicaciones de modelos matemáticos por país



Finalmente, y en concordancia con los datos de los países, las instituciones que a nivel mundial han realizado mayores publicaciones, se muestran en la figura 5.6

Figura 5.6: Publicaciones por instituciones a nivel mundial



De manera particular se debe señalar que entre estas diez universidades se encuentra la Texas A&M University con la que la Universidad Industrial de Santander tiene convenio y de manera conjunta se puede continuar desarrollando proyectos en lubricación hidrodinámica.

Visión general de la metodología en la lubricación hidrodinámica en cojinetes.

A partir de un profundo análisis realizado sobre las herramientas que los investigadores utilizan para resolver la ecuación de Reynolds y sus variaciones, se abstrae una estructura metodológica global, que localiza el problema de la lubricación hidrodinámica dentro de una secuencia de etapas, donde el objetivo principal es describir la fuerza debida a la presión en la película de aceite.

En la figura 5.7 la fuerza (F) es el centro de atención de la metodología. Como se ve, inicialmente el análisis de la lubricación hidrodinámica requiere de una formación básica orientada al entendimiento y obtención de la ecuación de lubricación de Reynolds; elemento clave e indispensable en la formulación problema. Por un lado, una forma de solucionar la ecuación de Reynolds es simplificarla y transformarla a una forma lineal, teniendo dos opciones: la solución por cojinete corto y por cojinete largo. Lo anterior es una salida y muchos modelos que parten de esta simplificación se aproximan al sistema real, pero no es el adecuado para todas las implicaciones dinámicas que se omiten.

Ahora, el problema bien se puede estudiar bajo condiciones que se aproximan a la realidad. La rugosidad, la holgura, la cavitación, la temperatura, el desalineamiento del eje y la turbulencia del flujo son los parámetros más significativos en el comportamiento

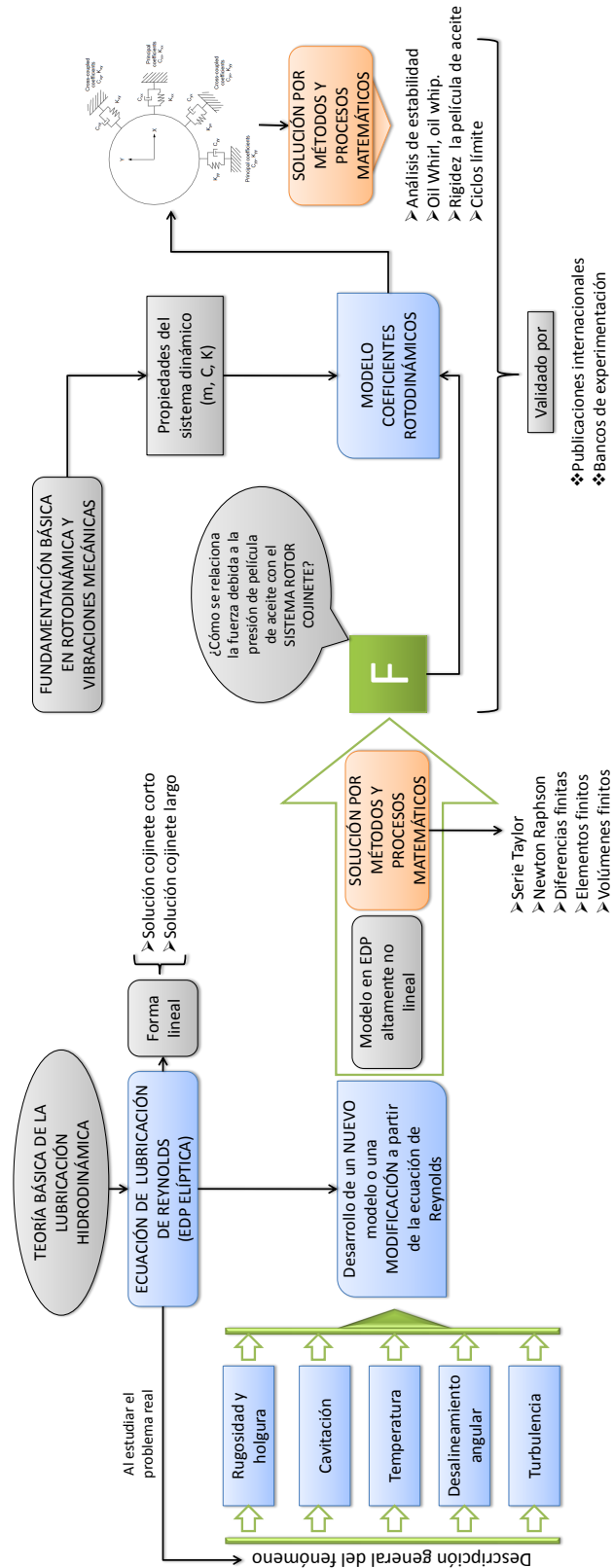
no lineal de la lubricación, presentes en los sistemas de rotación reales. Estos parámetros afectan la lubricación independientemente o de manera simultánea. Por ejemplo, un caso de estudio puede presentar lubricación hidrodinámica teniendo en cuenta la rugosidad de las superficies y en otro de mayor complejidad se suma el efecto de la temperatura del lubricante a la entrada del cojinete.

El esquema de la figura 5.7 muestra que la relación entre la ecuación de Reynolds y los parámetros de rugosidad, cavitación, temperatura, holgura, desalineamiento angular y turbulencia, necesariamente implica el desarrollo de un nuevo modelo o modificación de la ecuación gobernante. Por la diversidad de las características de los cojinetes y relaciones entre sus componentes, el sistema indudablemente será modelado mediante una ecuación en derivadas parciales (EDP) de la presión en la película, que presenta un alto comportamiento no lineal. La revisión bibliográfica mostró que el mecanismo adecuado para resolver este problema, es mediante métodos y procesos matemáticos donde se discretiza el dominio de interés, y la solución aproximada se considera la solución del medio continuo. En esta instancia, es muy probable estar en capacidad de describir el comportamiento hidrodinámico del sistema; el torque, la fricción, el caudal de aceite, inclusive la fuerza, hacen parte de las variables conocidas, pero para comprobar la validez del modelo se deben comparar los resultados matemáticos, con experiencias de laboratorio en bancos de prueba específicos, o con resultados encontrados en publicaciones científicas similares.

Las ecuaciones de movimiento de un sistema rotor cojinete contienen coeficientes que corresponden a la película del lubricante de los cojinetes (de rigidez y amortiguamiento), éstos parámetros cambian con la velocidad de rotación, la trayectoria y la aceleración del sistema; en rotodinámica a los coeficientes de rigidez y amortiguamiento se les conoce como *coeficientes rotodinámicos*. La presión de la película de aceite tiene una relación íntima con el comportamiento dinámico del rotor. De este modo, las ecuaciones de presión para lubricación hidrodinámica integran el modelo del sistema rotor cojinete. Esta formulación se resuelve utilizando los métodos numéricos y se basa en el mismo esquema de validación.

El análisis de estabilidad, la variación de la rigidez en la película de aceite y los ciclos límites son algunos de los problemas que responden a la intervención de los parámetros reales de la lubricación hidrodinámica. En los capítulos subsiguientes se profundizan los elementos de la metodología general de análisis, soportada por reconocidas referencias bibliográficas.

Figura 5.7: Metodología general de análisis en la lubricación hidrodinámica de cojinetes



Capítulo 6

GENERALIDADES DE LOS COJINETES

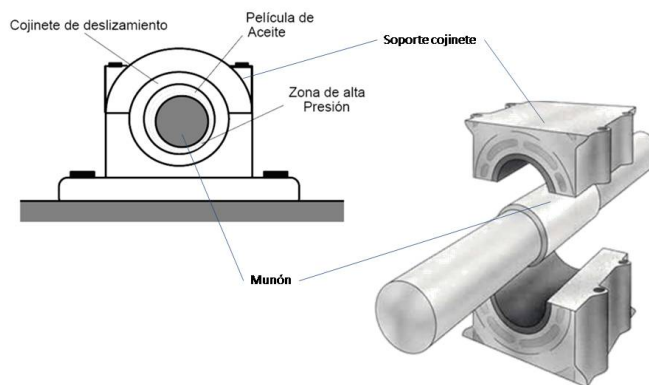
El diccionario de la Real Academia de la Lengua Española define cojinete como: “Pieza o conjunto de piezas en que se apoya y gira el eje de un mecanismo.” [1]

En el sentido más amplio, se puede decir, que siempre que dos piezas tengan movimiento relativo entre ellas, constituyen por definición un cojinete, sin importar su forma o configuración. Por lo general, en cualquier cojinete debe haber lubricación, a fin de reducir la fricción y eliminar el calor. Los cojinetes giran o se deslizan o ambas cosas a la vez [33].

Para el tema que nos compete, la función de los cojinetes es dirigir el movimiento de los ejes o árboles que están colocados en ellos y soportar los esfuerzos actuantes sobre estos elementos. Para ello se tienen diferentes tipos de cojinetes en los cuales varía desde la geometría hasta el modo básico de funcionamiento.

6.1. PARTES DE UN COJINETE

Figura 6.1: Partes básicas de un cojinete



6.1.1. Cojinete¹

Se denomina, la parte interior del soporte, o sea la que está en contacto con el árbol. Normalmente es la parte fija, se compone de una o dos piezas. La superficie interna del cojinete puede tener ranuras en determinada disposición, las cuales si están bien trazadas facilitan la lubricación. Los cojinetes metálicos normalmente están revestidos en su superficie interna de metal antifricción de una, o varias capas.

6.1.2. Muñón

Parte del árbol² o eje que gira u oscila dentro del cojinete.

6.1.3. Lubricante

La sustancia viscosa que compone la película que separa las superficies de cojinete y muñón [96].

6.1.4. Soporte o chumacera

Elemento contenedor del cojinete, existen de varios tipos según el sistema de lubricación que se adopte y de montaje que se exija. No hay un criterio unificado de la forma de los soportes. Son elaborados en materiales comunes tales como fundición, acero y bronce.

6.2. CLASIFICACIÓN Y TIPOS DE COJINETES

“Si los elementos de una máquina se mueven, debe haber superficie de apoyo para estos elementos, algunas de las cuales se lubrican con facilidad, otras con alguna dificultad y otras no se pueden lubricar” [96].

Los cojinetes se pueden clasificar de varias maneras: según el modo básico de funcionamiento (de fricción, hidrodinámicos, hidrostáticos o de elementos rodantes), de acuerdo con la dirección y naturaleza de la carga aplicada (de empuje axial o radial) o según su geometría “(tapered land, stepped parallel surface, or tilting pad) [25].

6.2.1. Según el tipo de cojinete

Las máquinas, que por lo general tienen partes rotativas, no podrían operar a alta velocidad tal cual lo se necesita sin algún medio para deducir fricción y el desgaste que se produce por el movimiento relativo entre las partes fijas y móviles. Inventos muy importantes de ingeniería han hecho posible el buen funcionamiento de los ejes altamente cargados

¹En ocasiones se le llama cojinete al conjunto de piezas muñón cojinete.

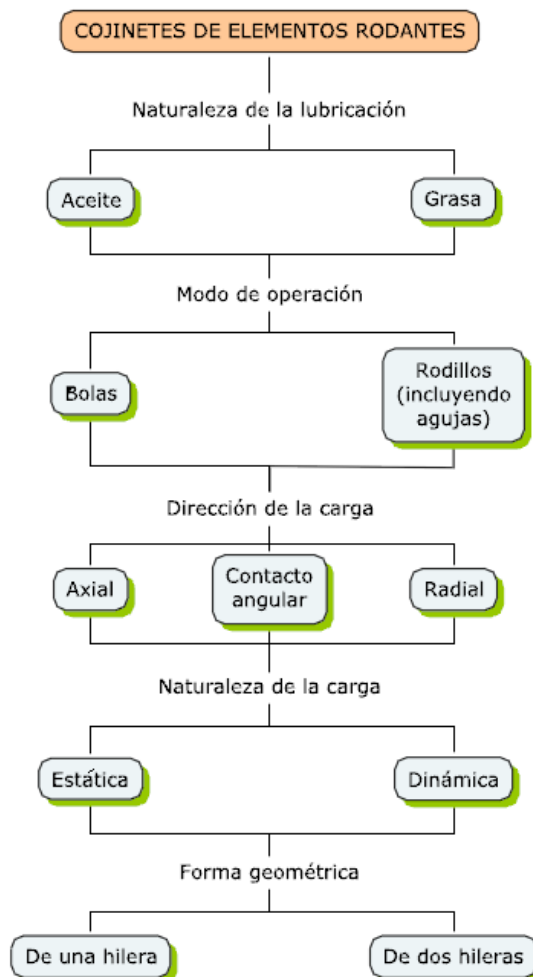
²Barra fija o giratoria que en una máquina sirve para soportar piezas rotativas o para transmitir fuerza motriz de unos órganos a otros.

a elevadas velocidades, incluyendo los cojinetes de elementos rodantes, hidrodinámicos, hidroestáticos y magnéticos.

6.2.1.1. Cojinetes de elementos rodantes

Se caracterizan por el movimiento de rodadura o contacto rodante, como sucede en los cojinetes de esferas o de rodillos. La ventaja del movimiento de rodadura es que produce mucha menor fricción y desgaste, en comparación con el movimiento de deslizamiento de los cojinetes de buje o manguito. En la figura 6.2 vemos la subclasificación de los cojinetes de elementos rodantes.

Figura 6.2: Clasificación de los cojinete de elementos rodantes.



Fuente Fundamentals of fluid film lubrication, Hamrock B.J., 1994.

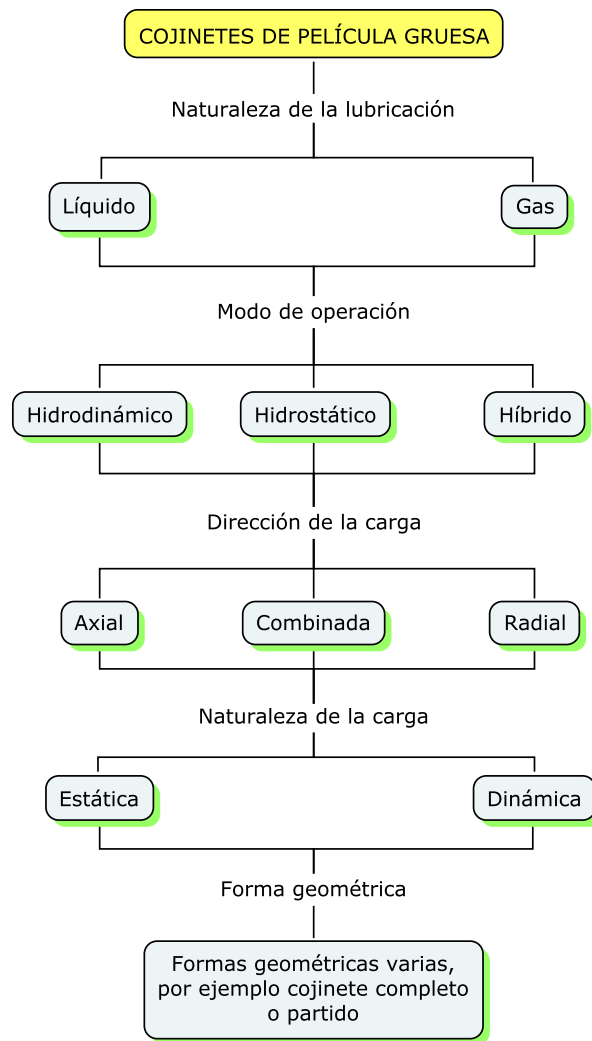
6.2.1.2. Cojinete de fricción

En los cojinetes de fricción las dos superficies (muñón cojinete) rozan en deslizamiento, y generalmente es lubricado por lubricación marginal. Ejemplos de cojinetes de fricción son los cojinetes no lubricados hechos de materiales como naylon, politetrafluoroetileno (teflón), etc.

6.2.2. Cojinetes de película gruesa

En la figura 6.3 se observa la clasificación de los cojinetes que son lubricados por película gruesa, concepto que se explicará en el capítulo 10.

Figura 6.3: Clasificación de los cojinetes de película gruesa



Fuente Fundamentals of fluid film lubrication, Hamrock B.J., 1994.

6.2.2.1. Cojinetes Hidrodinámicos

Son elementos mecánicos que pueden tener la forma de casquillo cilíndrico, de asiento plano o de casquillo cónico, etc. (ver sección 10.2.1) que se constituyen de diversas variantes de diseño y en diferentes materiales. El propósito de un cojinete es el de proporcionar una posición relativa y libertad de rotación, además de transmitir una carga entre dos estructuras, usualmente un eje y una carcasa [26].

El término *cojinete hidrodinámico*, denominados también como cojinetes de fricción, cojinetes lisos o cojinetes de contacto plano, hace referencia a un cojinete de buje o de plano inclinado deslizante cuando la superficie deslizante flota sobre una película de lubricante. La película de fluido se mantiene a una alta presión que soporta la carga del cojinete, y mantiene separada las superficies de deslizamiento. El lubricante puede ser introducido dentro del cojinete a presión atmosférica o superior. La onda de presión en la película de lubricante se genera por la rápida acción rotativa del eje que actúa produciendo un efecto de cuña debido a la viscosidad y velocidad, generando alta presión y por tanto capacidad de carga. Las superficies de deslizamiento están separadas por la película de fluido, y así el desgaste se previene.

6.2.2.2. Cojinetes hidroestáticos

En contraposición a los cojinetes hidrodinámicos, los *cojinetes hidroestáticos* hacen referencia a una configuración donde la presión en el fluido es generada por una bomba externa de alta presión. El lubricante a alta presión es introducido, con ayuda de la bomba, en las ranuras del cojinete a través de tubos de alta presión. El fluido a alta presión en las ranuras del cojinete, soporta las cargas y separa las superficies de deslizamiento, evitando así la alta fricción y el desgaste.

6.2.2.3. Cojinetes electromagnéticos

Recientemente se ha introducido el concepto de *cojinete electromagnético*. Todavía está en desarrollo pero ya está siendo usado en algunas aplicaciones únicas. El concepto de operación es el uso de la fuerza magnética para soportar las cargas del cojinete. Varios electroimanes son montados en el lado del cojinete (polos del estator). La capacidad de carga del cojinete es generada por el campo magnético entre unas láminas rotatorias, montadas en el eje, y los polos del estator montados en la carcasa o parte fija del cojinete [25].

6.2.3. Según los esfuerzos a soportar

Los cojinetes pueden ser clasificados de acuerdo con la dirección relativa de las cargas con relación a la configuración geométrica del eje.

6.2.3.1. Cojinetes radiales o de empuje transversal

Normalmente son cerrados, bien sea del tipo enterizo o del tipo dividido. También existen del tipo parcial. En los cojinetes de tipo parcial, el ángulo de abrace del cojinete

6.2.3.2. Cojinetes axiales

Denominados también cojinetes de empuje, normalmente soportan el empuje sobre superficies planas y paralelas utilizando, bien sea el extremo mismo del eje o adoptando collares. pueden funcionar sin acción hidrodinámica o pueden lograrla, dependiendo de la forma que tengan las superficies en contacto.

6.2.3.3. Cojinetes de carga combinada

Pueden soportar cargas radiales y axiales simultáneas si se disponen de formas adecuadas, por ejemplo, superficies cónicas o con resalte.

6.2.4. Cojinetes porosos impregnados

En este tipo de cojinetes el material es poroso (usualmente metal) y se impregna con un lubricante, obteniendo así un efecto de auto-lubricante. El material poroso se hace generalmente por sinterizado³ un polvo metálico comprimido. Los poros sirven como reservorios para el lubricante. Las características de transporte de carga y de fricción de los rodamientos depende de las propiedades de la matriz sólida y el lubricante conjuntamente con la oposición del sólido. El lubricante puede ser líquido o una grasa.

En general, la aplicación de los cojinetes porosos se limita velocidades de deslizamiento bajas (normalmente menos de 1 o 1,5 m/s), pero puede llevar a altas presiones medias (a menudo hasta 7 a 15 MPa). Una gran ventaja de estos rodamientos es que son simples y baratos, al igual que los rodamientos de fricción, y son utilizados con frecuencia en baja velocidad o situaciones intermitentes de movimiento.

Es poco probable que los cojinetes porosos operen de forma hidrodinámica, debido a la pequeña cantidad de lubricante que está presente. el comportamiento puede ser descrito como lubricación hidrodinámica parcial.

³Producir piezas de gran resistencia y dureza calentando, sin llegar a la temperatura de fusión, conglomerados de polvo, generalmente metálicos, a los que se ha modelado por presión.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] D. DE LA LENGUA, E. VOL, R. ACADEMIA, E. DE, E. CALPE, E. DEL PROYECTO, ES ESPAÑOLA, J. LUIS, E.E.N.E.L.C. DE EDUCACIÓN, B.P. DE LA EVALUACIÓN, et al. *Diccionario de la lengua española, 22nd ed.* Madrid, 2002.
- [2] V. M. FAIRES. *Diseño de Elementos de Máquinas.* Editorial Uteha, 4 edition, 1998.
- [3] B.J. HAMROCK. *Fundamentals of fluid film lubrication,* 1994.
- [4] B.J. HAMROCK, B. JACOBSON, and S.R. SCHMID. *Elementos de Máquinas.* Tribology and Interface Engineering Series. Mc Graw Hill, 2000.
- [5] R.L. NORTON, G.S. GARCÍA, and C.M.C. CASTELLO. *Diseño de máquinas.* Prentice Hall, 1999.

Capítulo 7

FLUJO VISCOSO

7.1. INTRODUCCIÓN

Para la lubricación hidrodinámica, la viscosidad, μ , es la característica más importante de un lubricante porque desempeña un papel fundamental en la formación de una película de fluido. Sin embargo, para que se forme la película de lubricante también se tienen en cuenta factores como la capacidad de lubricación, la temperatura, la presión, entre otros. Siendo así, este capítulo se enfocará al desarrollo de cuatro aspectos importantes en el flujo de fluidos viscosos:

- La resistencia del flujo en un fluido incrementa con la razón de deformación. Incrementar la velocidad de un fluido, requiere de una fuerza más grande que lo genere suavemente.
- Las moléculas no regresan a su posición original cuando se retira una fuerza. El flujo está envuelto en cambios irreversibles, y el trabajo realizado en la producción de un flujo viscoso aparece como calor en el líquido.
- En un líquido decrece la viscosidad cuando su temperatura incrementa. Más energía térmica disponible en las moléculas para que escapen de sus vecinas¹.
- La viscosidad de un líquido confinado entre dos superficies generalmente incrementa con el aumento de la presión. La viscosidad puede incrementar en varios órdenes de magnitud. Esto es deseable en algunos casos, pues se requerirá mayor presión para expulsar la película de lubricante [10].

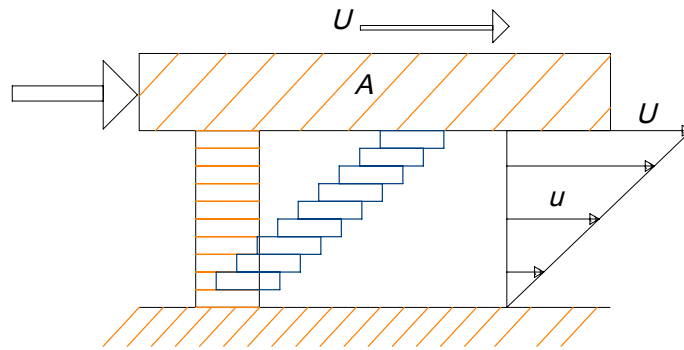
7.1.1. Viscosidad

Viscosidad es la propiedad de un fluido que le causa la resistencia a fluir [43]. En la figura 7.1 se muestra el corte simple del flujo entre dos placas paralelas. Una de las placas es estacionaria y la otra tiene una velocidad U en la dirección paralela a la placa, debido

¹Por consiguiente, representa una fuerza externa menor requerida para detenerlas

a una fuerza externa. Existe entonces, un movimiento de deslizamiento relativo entre una capa de moléculas y la capa adyacente en la dirección de U . En flujo de corte simple, como lo menciona Harnoy [44], la viscosidad es la resistencia al movimiento de una capa de moléculas respecto a otra capa. El esfuerzo cortante, τ , entre las capas incrementa con la razón de esfuerzo², U/h . Además, el esfuerzo cortante, τ , incrementa con la fricción interna entre las capas; por lo siguiente, el esfuerzo cortante es *proporcional a la viscosidad, μ , de un fluido*.

Figura 7.1: Flujo con esfuerzo cortante simple



Los fluidos que demuestran un comportamiento lineal entre el esfuerzo cortante y razón de corte se denominan *fluidos Newtonianos* (muchos lubricantes, incluyendo aceites minerales y sintéticos presentan este comportamiento bajo ciertas condiciones de presión y temperatura). En general, para flujo de corte simple, $u = u(y)$, la razón de corte es determinada por el gradiente de velocidad du/dy , donde u es la componente de la velocidad del fluido en la dirección x y el gradiente du/dy es respecto a y en la dirección normal a las capas de deslizamiento. De este modo, la relación lineal entre los dos elementos está dado por:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (7.1)$$

Siempre que hay flujo viscoso, el esfuerzo cortante debe estar presente para enfrentar las fuerzas de cohesión entre moléculas. De hecho, las fuerzas de cohesión y el esfuerzo cortante *decrecen con la temperatura*, que indican una disminución de la viscosidad con el incremento de la temperatura. Para el análisis de los cojinetes hidrodinámicos (en la mayoría de los casos), se asume que la viscosidad, μ , aproximadamente solo depende la temperatura. Sin embargo, la viscosidad también es función de la presión, aunque llega a ser significativa solo para presiones muy altas. Bajo condiciones extremas de presión, como por ejemplo, en el punto o línea de contacto en los cojinetes de elementos rodantes o en engranajes, la viscosidad se considera una función de la presión del fluido.

²Es una medida de la razón de deslizamiento relativo entre las capas adyacentes

7.1.2. Condiciones de frontera del flujo

El gradiente de velocidad del límite sólido es importante para la determinación de las fuerzas entre el fluido y frontera sólida o entre el fluido y un cuerpo sumergido. El gradiente de velocidad, du/dy , en la frontera es proporcional al esfuerzo cortante en la pared. Una característica importante de los fluidos es que ellos se adhieren a la frontera sólida (hay algunas excepciones; el aceite no se adhiere a una pared de Teflón). Para la mayoría de las superficies, en la frontera de la pared, el fluido tiene la misma velocidad que éste límite, referido como *condición de no deslizamiento*.

Las fuerzas de interacción intermolecular entre el fluido y el sólido son relativamente altas, dando como resultado el desplazamiento sólo de una capa de fluido sobre otra, pero no entre la primera capa de fluido y la pared sólida. A menudo, se usa el término *fricción entre el fluido y el sólido*, teniendo en cuenta que, la fricción viscosa es solamente entre el fluido y él mismo, esto es, una capa de fluido se desliza relativa a otra, resultando en pérdidas por fricción viscosa.

Cerca de la frontera sólida, la primera capa de fluido se adhiere a la superficie sólida mientras que las otras capas de fluido están deslizando una sobre otra, produciendo el gradiente de velocidad. La ecuación 7.1 indica que la caída en el perfil de la velocidad (gradiente de velocidad) es proporcional al esfuerzo cortante. Por lo tanto, el gradiente de velocidad en la pared es proporcional al esfuerzo cortante en la frontera sólida.

La integración de las fuerzas cortantes viscosas en la frontera resultan de la fuerza causada por el esfuerzo cortante. Esta porción de fuerza de arrastre es representada como *fuerza de fricción en la superficie* o *fuerza de arrastre viscosa* entre el fluido y el cuerpo sumergido. La otra parte de la fuerza de arrastre es el *arrastre de forma*, que es debido a la distribución de presión en la superficie del cuerpo sumergido.

Los aceites son prácticamente incompresibles. Esta propiedad simplifica las ecuaciones, porque la densidad del fluido, ρ , se puede asumir constante, aunque esta aproximación no podrá ser aplicada en cojinetes de aire. Muchas de las ecuaciones de mecánica de fluidos, tales como el número de Reynolds, incluyen la relación de viscosidad a densidad, ρ , del fluido. Desde que se ha tenido en cuenta esta relación, ha tomado el nombre de *viscosidad cinemática*. Esta definición es ampliamente utilizada en los dispositivos para la determinación de la viscosidad de los fluidos.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (7.2)$$

La viscosidad μ es generalmente denominada viscosidad absoluta como una clara distinción de la viscosidad cinemática.

7.1.3. Unidades de la viscosidad

La unidad de la presión, p , en el SI, tal como la de esfuerzo de corte, τ , es el Pascal [Pa] = [N/m^2]. Ésta es una unidad pequeña; una unidad mas grande es el kilopascal [kPa] = 10^3 [Pa].

En el sistema de unidades imperiales (sistema inglés), la unidad común de presión, p , tal como las de esfuerzo cortante, τ , es libra fuerza por pulgada cuadrada [psi].

Los factores de conversión de para presión y esfuerzo son:

$$1Pa = 1,4504 \times 10^{-4} psi$$

$$1kPa = 1,4504 \times 10^{-1} psi$$

Unidades SI

A partir de la ecuación 7.1 se puede obtener las unidades SI de μ como [$N - s/m^2$] o [$Pa - s$]:

$$\mu = \frac{\tau}{du/dy} = \frac{N/m^2}{(m/s)/m} = N - s/m^2$$

Las unidades en el SI de la viscosidad cinemática, ν , son [m^2/s]:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{N-s/m^2}{N-s^2/m^4} = m^2/s$$

Unidades cgs

La unidad en el cgs para la viscosidad absoluta, μ , es el *poise* [$dina - s/cm^2$]. En los cálculos de cojinetes se ha usado ampliamente la centésima parte del poise (centipoise), aunque ha sido gradualmente reemplazado por las unidades del SI.

Las unidades cgs para la viscosidad cinemática, ν , es el *stokes* (St) [cm^2/s]; una unidad pequeña es el centistokes (cSt), $cSt = 10^{-2} St$. La unidad cSt es equivalente a [mm^2/s].

Unidades Imperiales En el Sistema Inglés la viscosidad absoluta, μ , es el *reyn* [$psi - s$] (nombrada por Osborne Reynolds). La unidad imperial para la viscosidad cinemática, ν , es [in^2/s].

Segundo Universal Saybolt (SUS)

Sumado a las unidades precedentes, se ha desarrollado un número empírico de viscosidad. Las unidades empíricas de viscosidad son una medida del tiempo de flujo de aceite en un instrumento de laboratorio de geometría estándar. La unidad más común de viscosidad empírica en Estados Unidos es el segundo universal Saybolt (SUS). La viscosidad Saybolt está definida como el tiempo, en segundos, para vaciar un volumen de $60 cm^3$ de fluido a través de un capilar abierto en un viscosímetro Saybolt. Existen ecuaciones para convertir la viscosidad Saybolt a otras unidades de viscosidad cinemática, y para determinar la viscosidad absoluta se requiere la densidad, ρ , del fluido.

El SUS está relacionado con el viscosímetro estándar (en la norma "ASTM D88 - 07 Standard Test Method for Saybolt Viscosity" citado por Harnoy [45]). Este sistema de unidades es ampliamente utilizado por las compañías de aceite de Estados Unidos. La siguiente ecuación convierte el t [SUS] de viscosidad cinemática, ν , en centistokes:

$$v[cSt] = 0,22t - \frac{180}{t} \quad (7.3)$$

A menudo los ingenieros de lubricación utilizan la carta de conversión de la figura 7.2 la viscosidad cinemática en viscosidad absoluta y viceversa. También esta carta es un elemento importante para la conversión entre sistemas unidades.

7.2. VISCOSÍMETROS

La viscosidad de los fluidos puede ser medida de muchos métodos basados en diferentes principios. Aquí se discutirán algunos de los tipos de viscosímetros más importantes, haciendo énfasis en los principios con los que operan. Se estudian por separado los siguientes viscosímetros: capilar, rotacional y de caída de esfera.

7.2.1. Viscosímetro capilar

Este tipo de viscosímetro (mostrado en la figura 7.3) está basado en la medición de la razón con la que un fluido circula a través de un tubo de diámetro pequeño. Usualmente, la forma de tomar la medición es capturar el tiempo transcurrido en descargarse una cantidad dada de fluido. Teniendo en cuenta la expresión desarrollada para el flujo en una tubería circular completa [10], se tiene:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{8\mu_0 q}{\pi a^4}$$

en donde se indica, que el caudal, q , es proporcional a la tasa de cambio de presión en la dirección x , dp/dx , para una viscosidad constante, μ_0 , medida a condiciones estándar. El signo negativo confirma que el flujo se desplaza hacia la zona de menor presión.

Si p_i es la presión a la entrada del líquido contenido y \bar{l}_t , es la longitud del tubo capilar,

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{p_i}{\bar{l}_t}$$

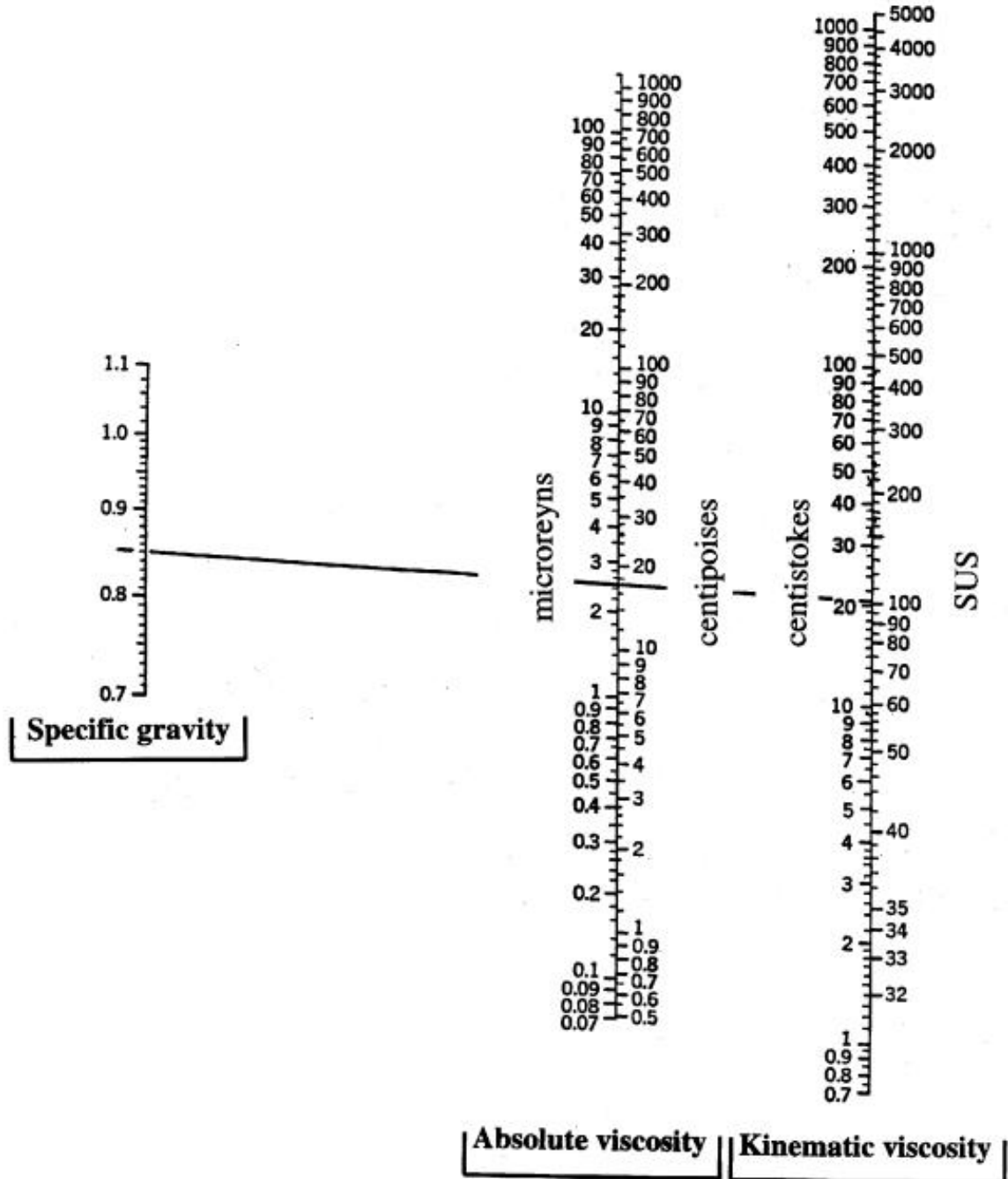
$$\therefore p_i = \frac{8\mu_0 q \bar{l}_t}{\pi a^4}$$

Pero la cabeza de presión desarrollada es simplemente

$$p_i = \rho_0 g h_t$$

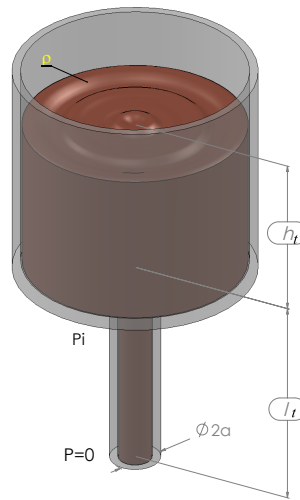
donde h_t es la altura del tubo capilar y ρ_0 es la densidad a $p = 0$ y temperatura constante. Por lo tanto:

Figura 7.2: Carta de conversión de viscosidad de segundo universal Saybolt



Fuente Bearing design in machinery: engineering tribology and lubrication, Harnoy, A.,CRC,2003

Figura 7.3: Características importantes de un viscosímetro capilar



$$h = \frac{8\mu q \bar{l}_t}{\pi a^4 \rho_0 g} = A * q \mu_{k,0} \quad (7.4)$$

donde $\mu_{k,0} = \mu/\rho_0$ es la viscosidad cinemática a $p = 0$ a una temperatura fija. El término A^* recoge los parámetros geométricos. Recordando que q es la razón de volumen por unidad de tiempo.

$$q \propto \frac{1}{t}$$

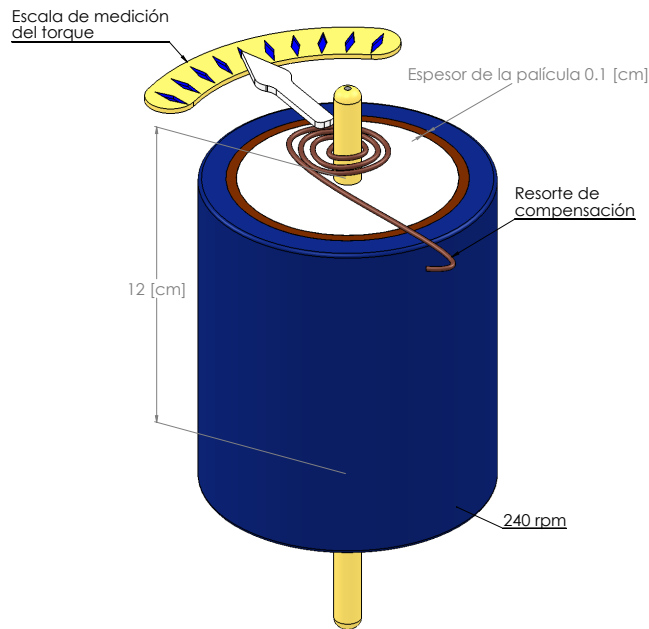
$$\therefore \mu_{k,0} = \frac{h_t}{A * q} = B * t \quad (7.5)$$

donde B^* es una constante que es función del aparato.

Viscosímetro UBBELOHDE

Llamado también el viscosímetro de nivel suspendido, el cual elimina el efecto de tensión superficial a la salida del tubo capilar. Además, este instrumento, con previa calibración puede utilizarse para medir en forma directa y precisa la viscosidad de líquidos mediante la medición del tiempo de emanación del líquido en el viscosímetro, es decir, el tiempo en que un volumen dado del líquido fluye a través del capilar. Es importante hacer énfasis en que este tipo de viscosímetro **no** es adecuado para efectuar estudios reológicos detallados de fluidos *no Newtonianos* ya que la velocidad de corte, du/dy , de la cual la viscosidad depende, es limitada y no uniforme.

Figura 7.4: Esquema viscosímetro rotacional cilíndrico



7.2.2. Viscosímetro rotacional

Se consideran dos tipos de viscosímetros rotacionales: el viscosímetro rotacional cilíndrico y el viscosímetro de cono plano.

Viscosímetro rotacional cilíndrico

Como se muestra en la figura 7.4 el viscosímetro rotacional cilíndrico consiste de dos cilindros concéntricos con un fluido contenido entre ellos. El cilindro exterior rota y el torque es medido en el cilindro interior³. Asumiendo:

- r_i = radio del cilindro interior
- r_o = radio del cilindro exterior
- l_a = longitud anular
- c = holgura radial, $r_o - r_i$ ($c \ll r_i$)
- ω = velocidad angular

Usando el postulado de Newton que presenta la fuerza de fricción en un cojinete radial⁴ (Ecuación. 7.6):

³A menudo este viscosímetro es llamada de *McMichael*. Nótese que la medición de torsión se realiza por medio de un alambre de torsión, a fin de obtener una lectura proporcional a las fuerzas viscosas.

⁴Esta expresión se fundamenta en la definición de la constante de viscosidad para dos placas paralelas, aplicada en un cojinete cuya velocidad tangencial del muñón, u , depende de ω , y la distancia entre superficies sólidas es el claro radial c .

$$f = \mu_0 A \frac{u}{c} \quad (7.6)$$

donde

$A = \text{área}, 2\pi r_o l_a$

$u = \text{velocidad}, r_o \omega$

$$\therefore f = \mu_0 (2\pi r_o l_a) \frac{r_o \omega}{c}$$

El torque en el interior del cilindro es

$$t_q = f r_i = \frac{2\pi \mu_0 \omega r_o^2 r_i l_a}{c}$$

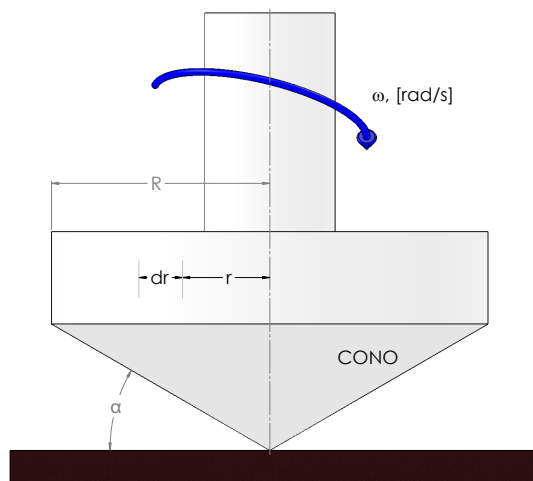
visto de otro modo,

$$\mu_0 = \frac{t_q c}{2\pi \omega r_o^2 r_i l_a} \quad (7.7)$$

Viscosímetro rotacional de cono plano

La figura muestra los elementos esenciales de un viscosímetro de cono plano. El ángulo α es pequeño. La velocidad superficial en el cono para cualquier radio r es $u = \omega r$. El espesor de la película es $h = r \tan \alpha \approx r \alpha$. Del postulado de Newton (Ecuación 7.6),

Figura 7.5: Viscosímetro de cono plano



$$f = \mu_0 A \frac{u}{c} = \int_0^R \mu_0 (2\pi r dr) \frac{\omega r}{r\alpha} = \int_0^R \mu_0 (2\pi r dr) \frac{\omega r}{r\alpha}$$

El torque es

$$t_q = \frac{2\pi\mu_0\omega}{\alpha} \int_0^R r^2 dr = \frac{2\pi\mu_0\omega R^3}{3\alpha}$$

$$\therefore \mu_0 = \frac{3t_q\alpha}{2\pi\omega R^3} \quad (7.8)$$

7.2.3. Viscosímetro de caída de esfera

La viscosidad absoluta, μ_0 , de un fluido a $p = 0$ y a temperatura constante puede ser determinada por la caída de una esfera a través de un tubo (preferiblemente de vidrio para que la esfera pueda observarse fácilmente). Si la esfera está atravesando un fluido bajo una fuerza constante, se asumirá una velocidad constante.

La fórmula de Stokes [13] puede ser aplicada para una esfera que se mueve a través de un fluido infinito. Una esfera cayendo bajo la acción de la gravedad alcanzará una velocidad u_a dada por

$$u_a = \frac{2r^2(\rho_e - \rho_f)g}{\mu_0} \quad (7.9)$$

donde

- r = radio de la esfera, [m]
- ρ_e = densidad de la esfera, [kg/m³]
- ρ_f = densidad del fluido, [kg/m³]
- g = aceleración de la gravedad, [m/s²]
- μ_0 = viscosidad absoluta a $p = 0$ y una temperatura fija, [N.s/m²]

La fórmula de Stokes presentada anteriormente es para un fluido infinito y no para un fluido contenido en un tubo de vidrio como ocurre en el viscosímetro de esfera. Hamrock [10] toma de Jacobson (1991) ⁵ la cantidad corregida de la velocidad teniendo en cuenta el diámetro del tubo y la posición excéntrica de la esfera dentro del tubo:

$$u_a = \frac{B_o r^2 (\rho_e - \rho_f) g \psi^{2,5}}{\mu_0} \quad (7.10)$$

donde

- ψ = $\frac{R-r}{r}$
- R = radio del tubo, [m]

⁵Jacobson, B.O. (1991): *Rheology and Elastohydrodynamic Lubrication*. Elsevier, Amsterdam, Tribology Series 19.

y B_o está dado por:

$$B_o = \frac{2\sqrt{2}c^2}{27 \int_0^\pi \frac{\cos^2 \phi d\phi}{\sqrt{1+\epsilon \cos \phi}}} + \frac{8\sqrt{2}}{27\pi^2} \int_0^\pi (1 + \epsilon \cos \phi)^{2,5} d\phi \quad (7.11)$$

siendo ϵ =relación de excentricidad

$$\epsilon = \frac{e}{R - r} \quad (7.12)$$

y e es la relación de excentricidad de la esfera en el tubo. Se tienen valores notable cuando $\epsilon = 0$ (la esfera es concéntrica con el tubo),

$$B_o = \frac{8\sqrt{2}}{27\pi} = 0,1334 \quad (7.13)$$

y cuando $\epsilon = 1$ (la esfera está en contacto con el tubo),

$$B_o = \frac{2^{10}}{3^4 (5\pi^2)} = 0,2562 \quad (7.14)$$

Para cualquier otra posición excéntrica, se debe evaluar la Eq. 7.11.

Si la esfera cae a velocidad constante, entonces

$$u_a = \frac{\bar{h}_t}{t} \quad (7.15)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{h}_t &= \text{altura a la que cae la esfera, [m]} \\ t &= \text{tiempo que le toma a la esfera en caer, [s]} \end{aligned}$$

Utilizando las ecuaciones (7.10) y (7.15) la viscosidad absoluta a $p = 0$ y una temperatura fija puede ser expresada como

$$\mu_0 = B_o r^2 (\rho_e - \rho_f) g \psi^{2,5} \left(\frac{t}{\bar{h}_t} \right) \quad (7.16)$$

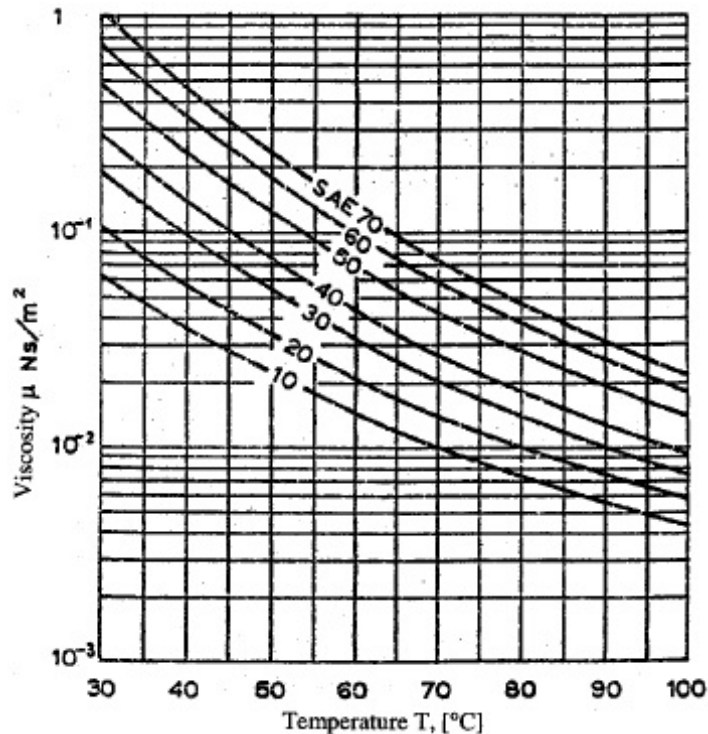
Note que para el viscosímetro de caída de esfera la viscosidad absoluta es directamente proporcional al tiempo que le toma a la esfera en recorrer una distancia fija.

En todos los tipos de viscosímetros estudiados, las condiciones iniciales del fluido, la presión y especialmente la temperatura juegan un papel importante en la determinación de la viscosidad. Estos procedimientos controlados son guiados por las normas internacionales.

7.3. LA VISCOSIDAD COMO UNA FUNCIÓN DE LA TEMPERATURA

El coeficiente de viscosidad de un fluido Newtoniano está relacionado con las interacciones moleculares que pueden ser consideradas mediante una propiedad termodinámica en el escenario macroscópico, variando la temperatura y la presión. En general, la viscosidad de los líquidos *decrece con el incremento de la temperatura* [14]. Uno de los medios más usados para determinar la viscosidad a diferentes temperaturas es la carta viscosidad-temperatura de la ASTM (*ASTM D341-09 Standard Practice for Viscosity-Temperature Charts for Liquid Petroleum Products*). Un ejemplo de una carta se muestra en la figura 7.6. La viscosidad de diferentes aceites minerales es graficado como una función de temperatura. Estas curvas son usadas en el diseño de cojinetes hidrodinámicos.

Figura 7.6: Carta de viscosidad vs. temperatura



Fuente Bearing design in machinery: engineering tribology and lubrication, Harnoy, A.,CRC,2003

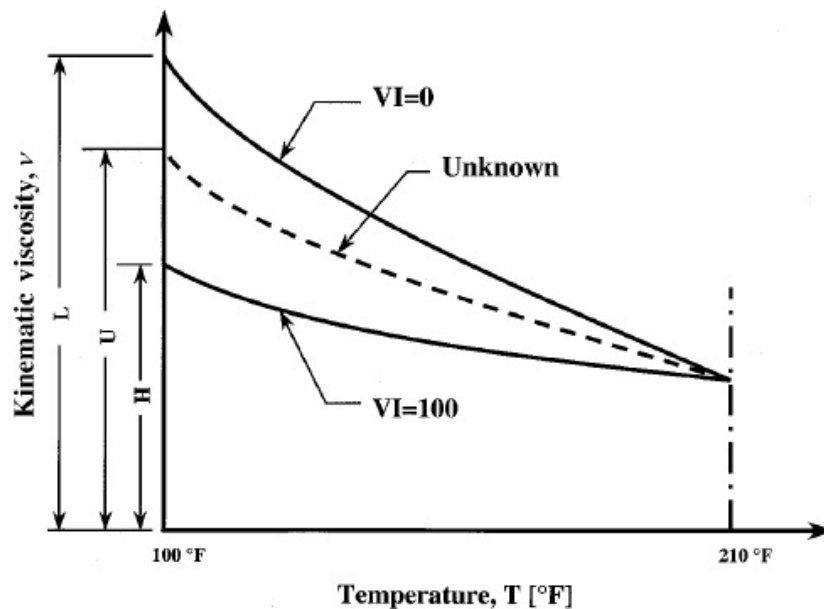
7.3.1. Índice de viscosidad

Los lubricantes que tienen una razón de cambio con la temperatura relativamente baja son deseados, especialmente en los motores de combustión interna. El índice de viscosidad (VI, por sus siglas en inglés) es una medida empírica del nivel de decrecimiento de la viscosidad cuando la temperatura del aceite aumenta. El VI fue introducido como una

base comparativa de los aceites de Pensilvania y la Costa del Golfo. Los aceites de Pensilvania exhibían un cambio de la viscosidad con la temperatura relativamente bajo y se les asignó un valor VI de 100, mientras que un cierto grupo de los aceites de la Costa del Golfo presentaban un cambio relativamente alto asignándoles un valor VI de 0. La curva de viscosidad - temperatura para todos los demás aceites son comparados con los de Pensilvania y la Costa del Golfo. El índice de viscosidad de este grupo de aceites se determina por el alcance de su curva viscosidad - temperatura, comparado con los valores VI=0 y VI=100, como se ilustra en la figura 7.7. El índice de viscosidad para cualquier tipo de aceite se determina según la ecuación 7.17:

$$VI = \frac{L - U}{L - H} \times 100 \quad (7.17)$$

Figura 7.7: Ilustración del índice de viscosidad



Fuente *Ídem*

Aquí, L es la viscosidad cinemática a 100°F de un aceite VI=0, H es la viscosidad cinemática a 100°F de un aceite VI=100, y U es la viscosidad cinemática a 100°F de un aceite recién evaluado. Usualmente un índice de viscosidad alto cercano a 100 o superior es deseable en los cojinetes hidrodinámicos, porque la viscosidad es menos sensible a las variaciones de temperatura y no cambian mucho durante la operación del cojinete.

7.4. LA VISCOSIDAD COMO UNA FUNCIÓN DE LA PRESIÓN

La viscosidad de los aceites tanto minerales como sintéticos se incrementa con la presión. El efecto de la presión en la viscosidad de aceites minerales es significativo solamente en presiones relativamente altas, como ocurre en la lubricación elastohidrodinámica de puntos o líneas de contacto en engranajes o cojinetes de elementos rodantes. Tal consecuencia se considera en la lubricación cuando la presión está por encima de $7000[kPa]$ (alrededor de $1000[psi]$). En el análisis de cojinetes hidrodinámicos el efecto viscosidad-presión es despreciado. Sin embargo, en cojinetes hidrodinámicos altamente cargados, la relación de excentricidad puede ser relativamente alta. En tal caso, la máxima presión (cerca de la región de mínima película) puede ser cercana a $7000[kPa]$. Aunque en tales casos, la temperatura es relativamente alta, y el resultado tiende a compensar el incremento en la viscosidad por presión. Ahora bien, en la lubricación elastohidrodinámica de rodamientos, engranajes, y rodillos, la presión máxima es mucho más alta y el incremento de la viscosidad debe ser considerado en el análisis. Bajo una presión muy alta, alrededor de $140000[kPa]$ ($20000[psi]$), los aceites ciertamente llegan a ser sólidos plásticos.

Barus (1893), tomado de Harnoy [44] introduce la siguiente aproximación exponencial de la viscosidad, μ , contra la presión, p :

$$\mu = \mu_0 e^{\alpha p} \quad (7.18)$$

Aquí, μ_0 es la viscosidad absoluta bajo presión atmosférica y α es el coeficiente presión - viscosidad, que es fuertemente dependiente de la temperatura de operación.

Se han medido los coeficientes de presión - viscosidad, $\alpha [m^2/N]$, para varios aceites. Estos valores se listan en la tabla 7.1.

7.5. LUBRICANTES ACEITES

Esencialmente tienen por objeto:

- Reducir el rozamiento las superficies en contacto
- Contribuir a la absorción y disipación del calor generado por el rozamiento
- Proteger contra la oxidación y la humedad

Los lubricantes pueden ser sólidos, líquidos o pastosos. Su origen puede ser de tipo mineral (petróleo, grafito, etc.), de tipo animal (sebos, aceite de pescado) y de tipo vegetal (ceras, resinas, aceites vegetales).

Los lubricantes más empleados, son aquellos que son derivados del petróleo y que aún siguen siendo los más baratos. En la industria generalmente se usan los aceites y grasas minerales, en casos especiales se emplean sustancias orgánicas (aceites grasos) o bien mezclas de aceites minerales con orgánicos o con emulsiones acuosas. También se utilizan los lubricantes sintéticos en diversas aplicaciones.

Cuadro 7.1: Coeficiente presión - viscosidad, $\alpha [m^2/N]$, para diferentes lubricantes

Fluido	<i>Temperatura, t_m</i>		
	38°C	99°C	149°C
Éster	$1,28 \times 10^{-8}$	$0,987 \times 10^{-8}$	$0,851 \times 10^{-8}$
Éster formulado	1,37	1,00	0,874
Poliamida aromática	1,58	1,25	1,01
Aceite sintético parafínico	1,77	1,51	1,09
Aceite sintético parafínico	1,99	1,51	1,29
Aceite sintético parafínico más aditivo antidesgaste	1,81	1,37	1,13
Aceite sintético parafínico más aditivo antidesgaste	1,96	1,55	1,25
C-Éter	1,80	0,980	0,795
Aceite mineral nafténico super refinado	2,51	1,54	1,27
Hidrocarburo sintético	3,12	1,71	0,937
Polieter de fluoruro	4,17	3,24	3,02

Fuente Bearing design in machinery: engineering tribology and lubrication, Harnoy, A.,CRC,2003

Lubricantes sólidos como el grafito o el bisulfuro de Molibdeno son apropiados cuando la lubricación fluida no es posible o no presenta los mejores resultados. En un cojinete puede aplicarse cualquier aceite sin embargo solo determinados lubricantes proveen una lubricación satisfactoria y ventajosa.

Las propiedades de un aceite lubricante varía según el petróleo crudo del que se derivan, si es de base parafínica, base nafténica o de base mixta, de los procedimientos de refinación utilizados, el grado de refinación, los aditivos que contiene, etc.

Los aceites minerales pueden clasificarse según:

1. La obtención.

- a) Destilados: Son aquellos extraídos del petróleo crudo por destilación, son de poca transparencia.
- b) Refrigerados: Corresponden a los destilados bajo depuración física y química ulterior. Suelen ser transparentes.
- c) Aceites residuales: Son aquellos que quedaron como residuos de la destilación. Se caracterizan por su apariencia oscura o turbia.

2. El grado de viscosidad.

En aceites fluidos, aceites medios y aceites espesos.

3. Otras propiedades.

Por su poder lubricante, comportamiento con los cambios de temperatura, a la presión, resistencia a la oxidación, a la humedad, a la acción de los metales, etc.

4. Su aplicación.

Aceites para engranajes industriales, para transmisiones, para motores a combustión, para sistemas hidráulicos, aceites para corte, entre otros.

7.5.1. Propiedades físico químicas del aceite

La capacidad de lubricación de un aceite depende de ciertas propiedades físicas y químicas del mismo⁶, las principales son [6] [8]:

7.5.1.1. Viscosidad. Método ASTM D-445/446 o DIN 51561/51562

Constituye una medida de la consistencia o cuerpo del aceite; es su resistencia a fluir (Ver sección 7.1). Se clasifica bajo el sistema ISO y los grados más utilizados son el 32, 46, 68 y el 100. Como se explica anteriormente una medida usual de viscosidad es el SSU cuyas temperaturas normales de prueba son 100 y 210[°F]. Los principales factores a considerar en la selección de los lubricantes son la carga y la velocidad. Aquí la viscosidad juega un papel muy importante. La gráfica 7.8, muestra una aproximación importante al tema. Un aumento en la velocidad incrementa la generación de calor por fricción, para ello se recomienda el uso de lubricantes cuya viscosidad sea estable con los cambios de temperatura. Un aumento en la carga fuerza al lubricante a salir de la zona de control por ello como se ve en la gráfica la tendencia está a los lubricantes sólidos. El punto intermedio entre los extremos se consigue con el lubricante líquido con propiedades especiales.

7.5.1.2. Índice de viscosidad. Método ASTM D-567

Es una medida del nivel variación la viscosidad con la temperatura. Ver sección 7.3.1.

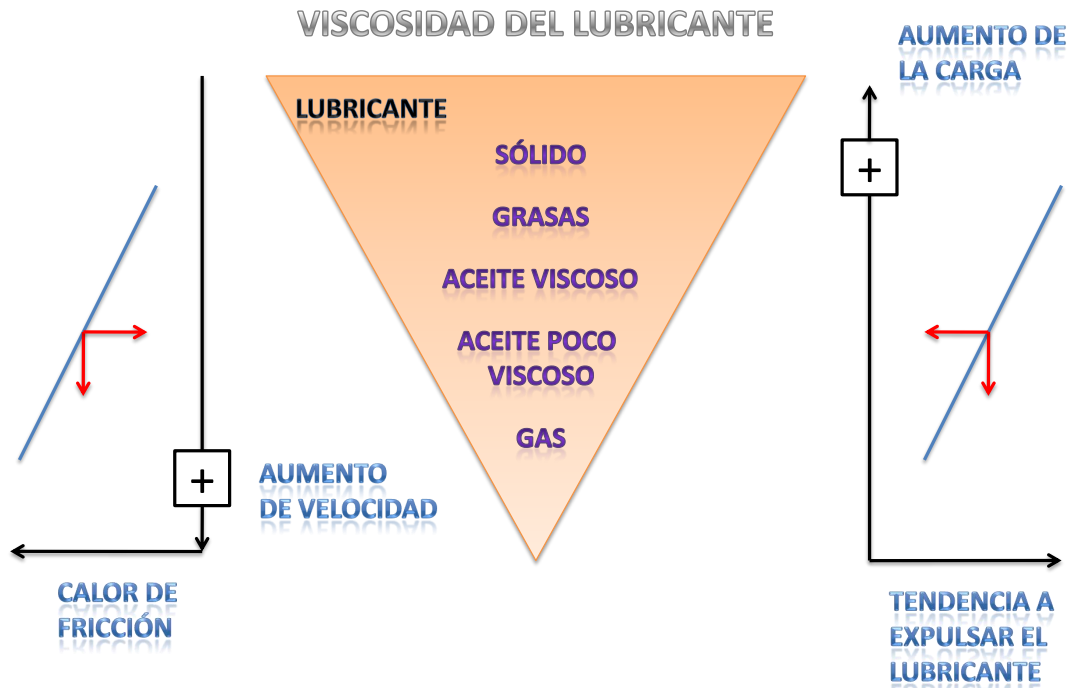
7.5.1.3. Untuosidad

Es la capacidad del aceite de adherirse a superficies metálicas formando una capa o película gruesa y resistente sobre la superficie dura; es muy efectiva para disminuir el rozamiento.

Las sustancias untuosas que se emplean en la construcción de maquinaria, representan en sí una mezcla, fundamentalmente, de distintos hidrocarburos, las moléculas de aceite tienen una forma alargada y al actuar recíprocamente con la superficie dura se dirigen perpendicularmente a esta última. Las capas sucesivas de moléculas pierden esta

⁶La determinación de las propiedades se realiza mediante unas metodologías establecidas que garantizan la fidelidad de los resultados obtenidos. Para especificar y evaluar las características en Norteamérica se utilizan las normas ASTM y en Europa las normas DIN.

Figura 7.8: Elección de lubricantes según la carga y la velocidad.



dirección según el aceite, en tanto mayor grado existe más grosor de la película separadora. La untuosidad depende de la calidad del mismo aceite, del contenido del aceite en el ácido graso, de las características de éstas moléculas, de la naturaleza de las superficies sobre la cual se desea formar la película superficial, también de hasta que punto es capaz un metal dado de interactuar con la especie dada de aceite. Así, por ejemplo, la untuosidad sobre las superficies de una pieza de fundición de diversas marcas, es distinta y depende de la cantidad y forma de las inclusiones de grafito que tenga dicho material.

7.5.1.4. Punto de inflamación (PI). Método ASTM D 92-97

Cuando un aceite es calentado, las fracciones más livianas tienden a evaporarse. Para cada aceite el PI corresponde a una cierta temperatura, a la cual la cantidad de gases volátiles liberados es suficiente para que estos se inflamen momentáneamente, al aplicársele un medio de ignición. Los aceites presentan un punto de inflamación elevado por tanto se aplica el método de “Cleveland”, de vaso abierto. El punto de combustión, que se presenta unos 20 o 30[°C] por encima del PI, representa la temperatura a la que hay que calentar el aceite para que mantenga la llama por cinco segundos [8].

El PI da una idea de posibles contaminaciones con productos livianos, como una dilución con nafta durante el uso, o una descomposición térmica por sobrecalentamiento.

7.5.1.5. Punto de fluidez. Método ASTM D-97

El punto de fluidez o de derrame es la temperatura más baja (en $^{\circ}C$ o $^{\circ}F$) en la que un fluido sigue siendo un líquido vertible, es decir, todavía se sigue comportando como un fluido. Para el caso de los aceites depende de los aditivos y componentes suplementarios presentes en cada aplicación específica.

7.5.1.6. Estabilidad a la oxidación. Método ASTM D-943 o ISO 51587

Los hidrocarburos que constituyen el aceite reaccionan con el oxígeno del aire, formando lentamente productos oxidados, situación que puede ser agravada por la presencia de altas temperaturas, de humedad y por ciertos metales como el cobre, bronce, latón, hierro y/o zinc, que actúan como catalizadores de la oxidación y dan lugar la formación de peróxidos solubles en el aceite altamente corrosivos.

Estos compuestos se pueden hacer insolubles, enfriando el aceite y luego retirando los residuos por filtración. La razón de oxidación depende de las condiciones de operación y de la cantidad y tipos de aditivos presentes en el aceite. Ésta se duplica por cada $20^{\circ}F$ de incremento en la temperatura normal de funcionamiento del aceite.

Un aumento en el color del aceite, en la acidez y en la viscosidad son indicios de él se está oxidando [6]. Algunas de las propiedades relacionadas con la oxidación se terminan de acuerdo a los siguientes métodos:

Número de neutralización. Métodos ASTM D-664/95, ASTM D-974/97, ASTM D-2896/98, ASTM D-4739/96

Los métodos bajo la denominación de *número de neutralización*, cubren los procedimientos para determinar los constituyentes ácidos o básicos de los aceites, por una titulación potenciométrica o colorimétrica. Se informan como:

- TAN, Número de Ácido Total, [mg] de OHK/gr de muestra, necesarios para neutralizar la acidez de la muestra.
- TBN, Número de Base Total, [mg] de ácido expresado como HOK/gr, necesarios para neutralizar la alcalinidad del aceite.

Los TAN o TBN son utilizados para controlar los procedimientos de elaboración o para efectuar un seguimiento del lubricante durante su uso y detectar degradación o contaminación. Esto último se debe tener presente en los aceites modernos, pues algunos de ellos contienen cierta cantidad de aditivos que pueden conferirle acidez orgánica no corrosiva, o alcalinidad alta, precisamente para neutralizar acidez de deterioro y, por lo tanto, pueden confundir los resultados obtenidos.

Las características principales de los distintos métodos se pueden simplificar según:

ASTM D-664/95. Es un método potenciométrico, determina las sustancias ácidas presentes en las muestras solubles en una mezcla de tolueno y alcohol isopropílico. Solución titulante; hidróxido de potasio en alcohol isopropílico.

ASTM D-974/97. Es un método colorimétrico, permite determinar tanto las sustancias ácidas como, en su caso, las bases presentes. Los constituyentes básicos pueden ser; bases orgánicas e inorgánicas, amino compuestos, sales débiles, sales básicas, jabones y algunos inhibidores agregados. La muestra se disuelve en tolueno y alcohol isopropílico, titulando con HOK o HCl según resulte una solución básica o ácida respectivamente.

ASTM D-2896/98. Este método cubre la determinación de los constituyentes básicos de una muestra disuelta en clorobenceno y ácido acético, por titulación potenciométrica con una solución de ácido perclórico en ácido glacial. A los constituyentes básicos ya mencionados, se agregan por este procedimiento las sustancias básicas propias de los aditivos.

ASTM D-4739/96. Es un método potenciométrico, determina las sustancias básicas presentes en la muestra solubles en una mezcla de tolueno, alcohol isopropílico y cloroformo. Solución titulante; ácido clorhídrico en alcohol isopropílico.

7.5.1.7. Resistencia a la herrumbre y a la corrosión. Método ASTM D-665

El fenómeno de la corrosión química es causado por la oxidación del aceite mientras que la herrumbre por el agua y el aire sobre el hierro y el acero. Su acción se previene con los aditivos de tipo polar, que forman capas protectoras sobre las superficies metálicas, pero el porcentaje de estos en el aceite se debe controlar porque pueden ejercer una acción negativa sobre propiedades antiespumantes, antioxidante y de demulsibilidad.

7.5.1.8. Características de emulsión. Método ASTM D-1401/98

El agua mezclada con el aceite forma emulsiones que dependiendo de la aplicación pueden ser totalmente indeseables⁷ porque retienen suciedades, dan lugar a corrosión química, disminuyendo la capacidad lubricante del aceite y producen sedimentos altamente peligrosos. Estos sedimentos pueden ser solubles o insolubles en el aceite. Los solubles permanecen disueltos en el aceite hasta que encuentran temperaturas bajas, como en los enfriadores, en donde se precipitan, formando películas aislantes que impiden que el aceite se enfríe adecuadamente, dando lugar a la oxidación prematura del mismo. Los insolubles se depositan en todo el sistema, llegando a casos extremos en donde se obstruye total o parcialmente la tubería de circulación. Para evitar esta serie de inconvenientes y como es prácticamente imposible eliminar la presencia de agua, se requiere que el aceite tenga buena *demulsibilidad*, para que separe rápidamente esta agua y sea eliminada por

⁷Por ejemplo en los aceites de corte es muy ventajosa la mezcla con el agua, mientras que en aplicaciones como en los cojinetes de las turbinas acelera su deterioro.

el sistema de filtración; la ASTM lo denomina “Separación de agua de aceites de petróleo y fluidos sintéticos”.

El ensayo se realiza en una probeta de 100 [cm³], colocando 40[cm³] de agua y aceite respectivamente. Se lleva a temperatura constante de 54,4[°C] y se agita a 1500[*rpm*] por 5 minutos. Se deja reposar por 5 minutos y se van midiendo las capas de aceite, agua y emulsión en las interfases, durante 30 minutos, cada 5 minutos de agitación y 5 de reposo. Se espera que en un buen aceite demulsificante el ensayo resulte 40-40-0 (5), es decir, se obtiene 40[cm³] de agua, 40[cm³] de aceite, cero de emulsión en 5 minutos.

7.5.1.9. Estabilidad a la formación de espuma. Método ASTM D-892/97

Debido a la composición de los aceites y las condiciones de funcionamiento estos pueden formar espumas con mayor o menor estabilidad. La formación de espumas, más aun si esta es estable, disminuye la viscosidad del aceite cambiando las relaciones de lubricación.

El método de ensayo cubre la determinación de las características de formación de espuma de aceites lubricantes a 25[°C] y a 93,5[°C]. El significado del ensayo es dar una medida de la tendencia a la formación de espuma y de la estabilidad de la misma.

En una probeta de 1000[cm³] se introducen 200[cm³] de aceite de ensayo, colocándola en un baño a temperatura constante, por medio de un difusor calibrado se le pasa al aceite una corriente de 94[cm³/min] de aire durante 5 minutos. Se realizan tres secuencias de ensayo. la primera a 24[°C], la segunda a 93,5[°C] sobre una muestra nueva y la tercera sobre la misma anterior ensayada a 93.5[°C], reensayada a 24[°C], luego de colapsada la espuma.

En cada ensayo se mide el alto de espuma formada a los 5 minutos, que se informa como *tendencia a la formación de espuma*. Se deja en reposo 10 minutos y se mide nuevamente el alto de la espuma remanente, informándose como *estabilidad de espuma*.

EL resultado se informa con seis números, TENDENCIA 400-20-450, ESTABILIDAD 10-0-15, significa que un aceite tiene una tendencia a formar 400[cm³] de espuma en las condiciones del ensayo a 24[°C], que en 10 minutos dada su estabilidad, pasa a 10[cm³]. Que una nueva muestra del mismo aceite, 93,5[°C], tiene una tendencia a formar 20[cm³] de espuma, con una estabilidad de cero, o sea que en 5 minutos desaparece. Por otro lado la misma muestra de la secuencia dos, enfriada y colocada a 24[°C], forma 450[cm³] de en espuma que en 5 minutos pasa a 15[cm³].

7.5.1.10. Color. Método ASTM D1500/98

El uso intensivo de aditivos mejoradores enmascara el color natural de los aceites de petróleo, que para los parafínicos es de una fluorescencia verde para los nafténicos azulada. Esto ha hecho que la determinación de color perdiera actualidad para los lubricantes terminados, en cambio se usa intensivamente en la refinación y fabricación, en etapas intermedias como control de calidad.

El método ASTM D-1500 consiste en comparar el aceite con una serie de vidrios coloreados, en un colorímetro estándar, asignando valores de cero, poco color, a 8, muy coloreado.

En los aceites usados o en servicio, la determinación de color puede resultar una indicación primaria de deterioro o contaminación.

7.5.2. Aditivos

En términos muy generales se puede decir que un aditivo es un grupo químico que imparte una determinada propiedad a la base lubricante. Como este grupo químico puede no ser soluble en aceite, hará falta agregarle una parte a la molécula soluble en hidrocarburo y un grupo que sirva de enlace a las dos anteriores. La presencia de distintos aditivos puede dar tres casos: *indiferencia*, cada uno funciona por su lado, *incompatibilidad*, se pueden producir reacciones indeseables entre ellos o, *sinergismo*, se complementan mejoran la actividad de cada uno.

Los más empleados son para:

- Mejorar el índice de viscosidad.
- Incrementar la capacidad de untuosidad.
- Asegurar una resistencia a presiones extremas y altas temperaturas.
- Aumentar la resistencia a la oxidación y la corrosión.
- Proporcionar propiedades detergentes.
- Hacerlos antiespumantes
- Cambiar el color o reducir el punto de fluidez.
- Disminuir el desgaste y la fuerza de rozamiento.

En el trabajo realizado por Durak et al. [9], se estudia la respuesta de un aceite mineral (SAE 20W50), mezclado con tres aditivos A, B, y C, a dos temperaturas 25 y 100[°C], aplicando diferentes velocidades de rotación y cargas estáticas controladas. El estudio tiene como objeto determinar el *comportamiento* de la fuerza de fricción con la variación de los parámetros, carga, velocidad, temperatura, composición. Se llega a la conclusión de que el aditivo A, es más eficiente en la reducción del coeficiente de fricción para las dos temperaturas a cualquier condición de carga. El valor de la experimentación radica en la metodología empleada para la determinación del coeficiente de fricción controlando las principales variables de un sistema hidrodinámico.

BIBLIOGRAFÍA

- [6] P. ALBARRACÍN. *Lubricación de turbinas de vapor*. ECOPETROL S.A, 2002.
- [7] F.T. BARWELL. *Lubrication of bearings*. Butterworths Scientific Publications, 1956.
- [8] A.A. CERUTTI. *La Refinación del petróleo*. IAPG, 2002.
- [9] E. DURAK, C. KURBANOGLU, and R.F. TUNAY. Experimental study of effects of oil additives into coefficient of friction in journal bearings at different temperatures. *Industrial Lubrication and Tribology*, 58(6):288–294, 2006.
- [10] B.J. HAMROCK, S.R. SCHMID, and B.O. JACOBSON. *Fundamentals of fluid film lubrication*. CRC, 2004.
- [11] A. HARNOY. *Bearing design in machinery: engineering tribology and lubrication*. CRC, 2003.
- [12] A. HARNOY. *Bearing design in machinery: engineering tribology and lubrication*. CRC, 2003, Cap 2, p. 6.
- [13] O. PINKUS and B. STERNLICHT. *Theory of hydrodynamic lubrication*. McGraw-Hill, 1961.
- [14] E.M. WHITE. *Viscous fluid flow*, volume 66. McGraw-Hill New York, 1991.

Capítulo 8

ROZAMIENTO DE COJINETES

Como se ha explicado antes, la designación de los cojinetes consiste en dirigir el movimiento de los ejes o árboles que están colocados en ellos y soportar los esfuerzos actuantes sobre estos elementos. De acuerdo con la naturaleza del rozamiento entre las superficies ajustables, los cojinetes se dividen en cojinetes de rozamiento deslizante y cojinetes de rozamiento rodante o, más usualmente llamados, cojinetes de contacto plano y cojinetes de contacto rodante.

Las pérdidas por rozamiento durante el período estable de trabajo de máquina no pueden ser mayores en el cojinete de contacto plano que las que podrían tener lugar en el mismo caso en un cojinete de contacto rodante, si se tienen las condiciones debidas de lubricación. La adecuada lubricación en el cojinete de contacto plano proporciona una valiosa calidad en relación a su funcionamiento: cuanto mayor sea la velocidad de giro del árbol, tanto será la capacidad de carga del cojinete.

La capa de lubricante que se forma entre el muñón y la parte interna de los cojinetes de contacto plano constituye una especie de almohada oleosa que amortigua los golpes y choques que transmite el árbol sobre la bancada de la máquina, por tanto, los cojinetes de contacto rodante resultan más rígidos debido a que es insignificante la magnitud de las superficies de contacto de los elementos de trabajo, siendo esto una de las causas del ruido y, a veces, de la vibración del conjunto que a menudo acompaña al trabajo de los cojinetes de este tipo, particularmente si los números de revoluciones son elevados. Asegurar la fricción líquida en el cojinete es importante, debido a que las pérdidas por el rozamiento incrementan bruscamente, en comparación con las pérdidas producidas durante la fricción líquida, lo que reduce considerablemente sus cualidades de funcionamiento, además de esto, hay que tener presente que de resultar el contacto directo de algunas zonas entre el árbol y el cojinete, particularmente en el período en que se pone en marcha la máquina, estas superficies se desgastan.[37]

8.1. FRICCIÓN

Las pérdidas producidas por el rozamiento en los cojinetes de contacto rodante, incluso durante la puesta en marcha de la máquina, son insignificantes y el desgaste del muñón o de la ranura del árbol es completamente nulo. El factor principal que determina la magnitud de la fuerza de rozamiento, es el coeficiente de rozamiento de deslizamiento f . Este coeficiente depende de una serie de factores vinculados con la naturaleza de las superficies conjugadas y de las propiedades de la capa intermedia que está entre las superficies. Esta fuerza de rozamiento, también es llamada fuerza de fricción y es la causante de incrementar la temperatura y desgastar las superficies en contacto.[16]

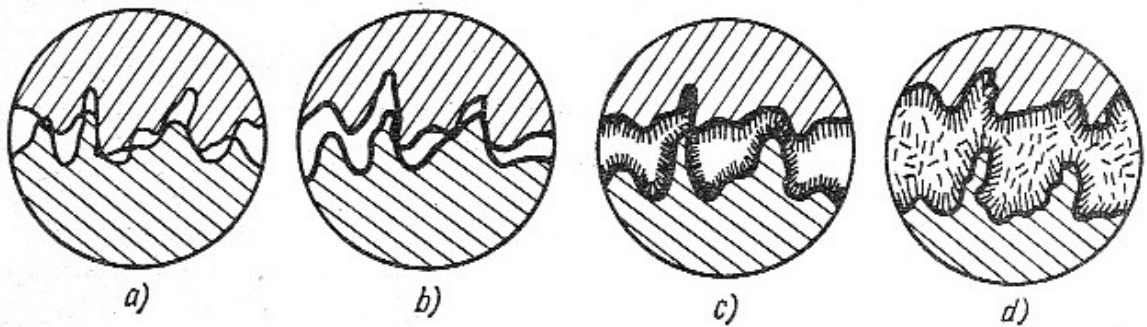
Una superficie por buen acabado que aparente visualmente, siempre presentará irregularidades características. Estas irregularidades son la causa, de que la fuerza no se distribuya uniformemente en la superficie, sino que se efectúe en zonas aisladas debido a las crestas o salientes de ésta (ver figura 8.1 (a)), por eso, el área real de contacto, es muchas veces menor al área nominal, lo que genera enormes presiones locales y elevadas temperaturas durante el desplazamiento de las superficies, lo que ocasiona que las salientes o crestas se fundan entre sí, y luego la unión se rompa por los puntos más débiles que suelen estar en el metal de menor resistencia. Un mecanizado muy pobre de las superficies, origina mayor adherencia de las crestas generando una fuerza que las mantiene unidas, ocasionando con esto, que para que puedan deslizar las dos superficies sea necesario romper estas salientes (figura 8.1 (b)); este proceso de arranque y corte de las salientes es un fenómeno que causa el surgimiento de nuevas asperezas y aumenta debido a que la dureza del material varía de un punto a otro junto con las deformaciones producidas.

8.1.1. Clases de rozamiento

Se distinguen cuatro tipos de rozamiento:

- **Rozamiento Seco:** Tiene lugar entre dos superficies idealmente acabadas, ante la ausencia de cualquier sustancia entre ellas. La naturaleza del rozamiento seco está vinculada con dos fenómenos que influyen recíprocamente uno sobre el otro: la fuerza de la adhesión molecular de las superficies y la adherencia recíproca de la aspereza (irregularidades, crestas) de éstas, que es imposible de eliminar completamente incluso mediante el mecanizado minucioso, figura 8.1 (a).

Figura 8.1: Tipos de Rozamiento



Fuente Elementos de máquinas, Dobrovolski, V. and Zablonski, K. and RADCHIK, A. and ERLIJ, L. Moscú: Editorial MIR (1976)

La aspereza de la superficie es la causa de que la carga se distribuya irregularmente por las superficies portantes, sólo por áreas aisladas de los salientes; por eso, el área real de contacto es cien mil veces menor que el área (nominal) asignada. Las enormes presiones locales y el calor que surge durante el deslizamiento relativo de las superficies, reblandecen los salientes y aumentan la adherencia de las superficies de contacto, de aquí se deduce que el mecanizado insuficientemente minucioso de las superficies: en primer lugar aumenta la adherencia mecánica de las crestas y, en segundo lugar, eleva la fuerza de la adherencia molecular; el proceso de arranque y de corte de los salientes causa el surgimiento de nuevas asperezas (rugosidades), este fenómeno aumenta debido a que la dureza del metal es distinta en diferentes puntos de la superficie y, por consiguiente, las deformaciones de ésta son también distintas, al cargarla en diferentes puntos.

El coeficiente del rozamiento seco es mayor que los coeficientes de otros tipos de rozamiento deslizante y puede ser considerablemente mayor que la unidad; el rozamiento seco es realizable sólo en las condiciones de laboratorio.[15]

- **Rozamiento Semiseco:** Se obtiene cuando dos superficies están en contacto, pero entre ellas se encuentra alguna sustancia, por ejemplo, gas, humedad, entre otras, que son absorbidas del exterior. Pese a que el espesor de estas películas es extraordinariamente pequeño, del orden de algunos angstroms ($1 [angstroms] = 10^{-4} [\mu]$), sin embargo, la película disminuye la posibilidad de adherir las moléculas y del enganche de las asperezas; el coeficiente de rozamiento semiseco es notablemente menor que el coeficiente seco, su magnitud es de varias décimas, figura 8.1 (a).
- **Rozamiento Mixto:** Es un rozamiento con una capa introducida artificialmente de alguna sustancia untuosa, por ejemplo, aceite, de 0,1 a $0,5\mu$ de espesor. En los límites de esta capa se revela una de las principales propiedades físicas de la sustancia untuosa, la llamada untuosidad u oleosidad. La capacidad de la sustancia untuosa de

formar capas intermedias estables con relación a las fuerzas exteriores, se caracteriza por dos cualidades independientes: untuosidad y viscosidad (temas explicados en el capítulo 9).

El rozamiento mixto no excluye la adherencia recíproca de las asperezas, por consiguiente, no excluye el desgaste, pero deja para éste sólo las irregularidades más salientes de la superficie; el coeficiente de rozamiento mixto alcanza hasta 0,1 y más.

- **Rozamiento Líquido:** A medida que aumenta el espesor de la capa lubricante disminuye el grado de influencia de la superficie dura en las moléculas del aceite, y las capas que están aproximadamente a una distancia mayor de $0,5 \mu$, pueden desplazarse libremente una con respecto a la otra. Esta capa de aceite que no sufrió la influencia de las superficies, posee la propiedad común de las sustancias líquidas y gaseosas, es decir, *viscosidad*, la cual caracteriza la fuerza de resistencia del desplazamiento mutuo de las capas adyacentes de la sustancia (rozamiento interior).

Se llama rozamiento líquido (figura 8.1 (d)) si éste transcurre en una capa viscosa continua. El rozamiento líquido es el más deseable para los cojinetes de las máquinas, puesto que excluye completamente el contacto directo de las superficies de apoyo, para retener la capa viscosa en el huelgo existen dos maneras de hacerlo:

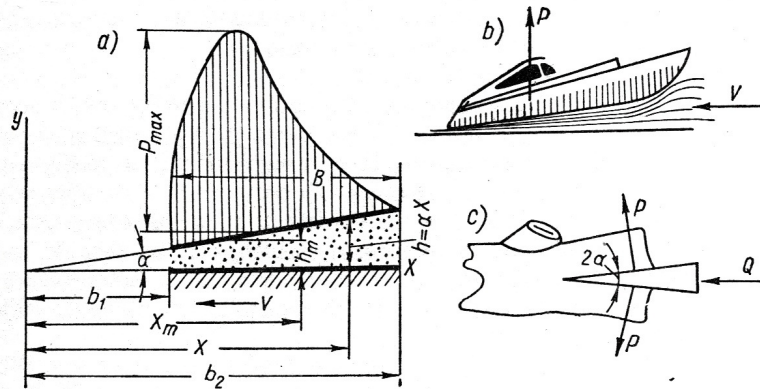
1. Suministrar lubricante en el huelgo entre las superficies casadas a una presión que sea capaz de equilibrar la carga exterior (lubricación hidrostática)
2. Crear determinadas condiciones, con las cuales esta capacidad surja en la misma capa (lubricación hidrodinámica, elastohidrodinámica y termoelastohidrodinámica)

El suministro del aceite en el huelgo del cojinete, a una debida presión, requiere la aplicación de dispositivos y tuberías de bombeo de suficiente capacidad, lo que prácticamente es desfavorable y consecutivamente no es siempre realizable. Se debe anotar, que el segundo camino es más admisible. En la figura 8.2 (a) se representan dos planos que corresponden en este esquema a las superficies de un conjunto de apoyo muñón cojinete, en donde se aprovecha la superficie convergente divergente para crear presión, a lo cual se denomina presión hidrodinámica y que será profundizada posteriormente.

Supongamos que la longitud de los planos es ilimitada, infinitamente grande, en sentido perpendicular al dibujo. Supongamos después que el plano inferior se mueve a una velocidad v y el superior que está algo inclinado con respecto al primero, es inmóvil. La sección menor de la hendidura cuneiforme¹ entre ambos planos la consideraremos suficientemente grande para que en ella se aloje la capa de líquido viscoso, por ejemplo, aceite. Siendo la dirección del movimiento del plano inferior la indicada en la figura 8.2 (a),

¹con forma de cuña

Figura 8.2: Rozamiento líquido



el flujo de aceite entra en la parte ancha de la hendidura cuneiforme y sale por su parte angosta.

Puesto que la compresibilidad del líquido es extremadamente pequeña, entonces por la condición de continuidad del flujo, (para esto, los gastos de líquido deben ser iguales, tanto por la parte ancha como por la angosta), se deduce que en esta hendidura debe surgir una presión hidrodinámica interna que tiende a separar las superficies, como resultado de esto, en una de estas “se emerge” la capa de líquido, tal como ocurre con un hidrodensizador (hidroaéreo). figura 8.2 (b). La fuerza cortante P , en este caso es creada por la velocidad v . Si la cuña es dura (figura 8.2 (c)) aparece la fuerza cortante, debido a la acción de la fuerza Q .

El fundador de la teoría del rozamiento líquido en los conjuntos de apoyo de las máquinas, fue el destacado científico ruso e ingeniero N. Petrov (1836-1920) que elaboró la teoría hidrodinámica del engrase. La presión hidrodinámica en la hendidura o huelgo varía desde $p = 0$ en la entrada del flujo hasta $p = 0$ en la salida, pasando, en este caso por el valor $p = p_{m\acute{a}x}$ (figura 8.2 (a)). El cambio de presión por la longitud de la hendidura cuneiforme con un flujo bidimensional, sin incluir el derramamiento del aceite por los extremos y debido a la hipótesis hecha sobre la longitud infinita del huelgo por la anchura, se expresa por la fórmula:

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu v \frac{h - h_m}{h^3}$$

siendo

μ el coeficiente dinámico de viscosidad del aceite

v la velocidad de desplazamiento relativo de las superficies

h_m la altura del huelgo en la sección en que $p = p_{m\acute{a}x}$

h la altura del huelgo en la sección que está a la distancia x del origen de las coordenadas

Si las superficies conjugadas son paralelas, es decir el muñón y el cojinete tienen el mismo diámetro entonces el flujo de líquido no puede oponer resistencia en el huelgo a la carga exterior y, por consiguiente, no es realizable el régimen de rozamiento líquido [94].

BIBLIOGRAFÍA

- [15] PE ALLAIRE and RD FLACK. Journal bearing design for high speed turbomachinery. *Bearing Design. Present Technology and Future Problems*, 4:111–160, 1980.
- [16] J. AMIN, B. FRIEDLAND, and A. HARNOY. Implementation of a friction estimation and compensation technique. *Control Systems Magazine, IEEE*, 17(4):71–76, 1997.
- [17] EBOOKS CORPORATION. *Bearing design in machinery: engineering tribology and lubrication*, volume 147. CRC Press, 2002.
- [18] V. DOBROVOLSKI, K. ZABONSKI, A. RADCHIK, and L. ERLIJ. *Elementos de máquinas*. Moscú: Editorial MIR, 1976.

Capítulo 9

TIPOS DE LUBRICACIÓN CON FORMACIÓN DE PELÍCULA

El término lubricación, se refiere al proceso en el que un fluido se introduce entre las superficies en contacto de dos cuerpos con movimiento relativo, que rozan por acción de una carga, y este fluido forma una película de separación física entre las superficies de los cuerpos, que reduce la fuerza de deslizamiento y con ello el desgaste mutuo. En el proceso de lubricación intervienen muchos factores diferentes que hacen de él un tema complejo, de los cuales trataremos las cuestiones principales que permitan comprender su naturaleza.

la lubricación se puede clasificar en:

1. Lubricación de película completa
 - a) Hidrostática
 - b) Hidrodinámica
 - c) Elastohidrodinámica
 - d) Termoelastohidrodinámica
2. Lubricación de película mixta
3. lubricación de película mínima o al límite

9.1. LUBRICACIÓN ESTABLE - NÚMERO CARACTERÍSTICO DEL COJINETE

Un concepto muy útil para entender la comprensión del papel de los diferentes regímenes de lubricación es la curva de Stribeck mostrada en la figura 9.1. Históricamente, la curva de Stribeck fue ampliamente difuminada debido a los experimentos sistemáticos y definitivos experimentos realizados por Stribeck, que explican la fricción en los cojinetes,

un tema que hasta ese momento había sido de gran confusión. La ordenada en la figura es el coeficiente de fricción en condiciones estables. La abscisa, es un número adimensional, denominado a veces como el número de Hersey [25] o también como número característico del cojinete, y es dado por:

$$H_s = \frac{\mu N}{p} \quad (9.1)$$

donde

μ = viscosidad absoluta, $[Pa \cdot s]$

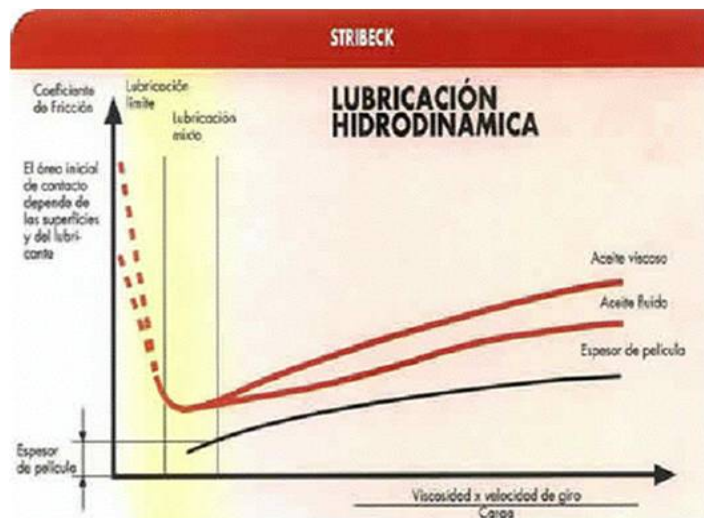
N = velocidad angular, $[rps]$

p = Presión, $[Pa]$

Un número de Hersey grande usualmente significa una capa de lubricante relativamente gruesa, mientras que un número bajo resultará una capa muy delgada. Analicemos a la derecha de la gráfica, es decir en la lubricación hidrodinámica, y supongamos por ejemplo, que ocurre un incremento la temperatura del lubricante, con lo cual baja la viscosidad μ , y por consiguiente $\frac{\mu N}{p}$ bajará también, nótese que el coeficiente de fricción f disminuye al igual que la generación de calor; con esto desciende la temperatura del lubricante; podemos concluir que la zona hidrodinámica es una lubricación estable, porque las variaciones se corrigen por sí solas [25].

En la lubricación límite, una disminución de la viscosidad produce aumento de la fricción f , y la temperatura con este, que reduce más la viscosidad y por lo tanto habrá contacto metal - metal. en consecuencia la zona de la izquierda representa una lubricación inestable.

Figura 9.1: Curva de Stribeck



Fuente <http://www.predic.com/lubricantes/lubricacion.html>, revisado el 23 de octubre de 2011

9.2. LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

La lubricación hidrodinámica (LHD) se caracteriza por superficies concordantes con una lubricación por película fluida. Se tiene éste tipo de lubricación en un cojinete cuando las dos superficies que soportan la carga externa, cojinete - muñón, están separadas por una película de lubricante relativamente gruesa, suficiente para impedir el contacto metal - metal. Una presión positiva se desarrolla en un cojinete de empuje lubricado hidrodinámicamente, porque las superficies del cojinete convergen, y su movimiento relativo y la viscosidad del fluido separan las superficies. Para ello se debe suministrar suficiente lubricante a la interfaz en el deslizamiento para permitir que la velocidad relativa de las superficies en contacto bombeen lubricante dentro del espacio que las separa, donde en su holgura el muñón y el cojinete generan un anillo delgado que puede atrapar lubricante y permite así que el eje lo distribuya alrededor de este anillo. En los extremos hay una fuga, por lo que para reemplazar lo perdido debe proporcionarse un suministro continuo de aceite. Este suministro puede estar alimentado por gravedad o por presión. Por ejemplo, tal sistema se aplica para lubricar los cojinetes del cigüeñal y del árbol de levas de un motor de combustión interna. Se bombea aceite filtrado a los cojinetes a una presión relativamente baja para reponer el aceite perdido por los extremos de los cojinetes, pero el estado dentro de éstos es hidrodinámico, lo que crea presiones mucho más elevadas para soportar cargas en cada cojinete [33, 26].

En un cojinete de manguito o buje hidrodinámico en reposo, el muñón o superficie de rodamiento se asienta poniéndose en contacto con la parte inferior del cojinete, según se observa en la Figura 10.1 (a). Conforme empieza a girar, la línea de centros del muñón se desplaza excéntricamente dentro del cojinete y el muñón actúa como una bomba, para succionar una película de aceite que se adhiere todo alrededor de la superficie, según se observa en la figura 10.1 (b). (El lado exterior de la película de aceite queda adherida al cojinete estacionario). Así se establece un flujo dentro del pequeñísimo espesor de la película de aceite. Si la velocidad relativa es suficiente, el muñón “se monta” sobre una cuña del aceite bombeado, con lo que desaparece el contacto metal - metal con el cojinete, según se muestra en la figura 10.1 (a) [33].

Por lo que un cojinete lubricado hidrodinámicamente sólo entra en contacto con el muñón al detenerse o al girar a una velocidad inferior a su “velocidad de hidroplaneo”¹. Eso significa que sólo puede ocurrir desgaste por adhesión durante los periodos transitorios de arranque y de parada. Siempre que el lubricante y la velocidad de operación sean suficientes para permitir la elevación hidrodinámica del muñón, que la separa del cojinete, esencialmente no habrá desgaste por adhesión. Esto incrementa de manera importante la vida por desgaste, comparado con la situación de un contacto continuo. De la misma manera que en el caso de la lubricación hidrodinámica, el aceite debe mantenerse libre de contaminantes, a fin de evitar otras formas de desgaste, como la abrasión. El coeficiente de fricción de una interfaz hidrodinámica varía desde 0,002 a 0,010 [33].

Por lo general la magnitud de la presión que se desarrolla (casi siempre menor que

¹Velocidad a la cual se forma una película suficientemente gruesa.

5 MPa) no es lo suficientemente grande para causar una deformación elástica significativa en las superficies. En un cojinete lubricado hidrodinámicamente el espesor mínimo de la película es una función de la carga normal que se aplica W , de la velocidad u_b , de la viscosidad absoluta del lubricante μ_0 y de la geometría R_x y R_y . El espesor mínimo de la película h_{min} , como una función de u_b y W para el movimiento deslizante se obtiene por medio de la ecuación

$$(h_{min})_{HL} \propto \left(\frac{u_b}{W}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.2)$$

El espesor mínimo de la película normalmente excede 1 [μm].

En general, en la lubricación hidrodinámica las películas son gruesas, de manera que se previene que las superficies sólidas opuestas entren en contacto. Con frecuencia a esta condición se le denomina la *forma ideal de lubricación*, porque proporciona fricción baja y resistencia alta al desgaste. La lubricación de las superficies sólidas se rige por las propiedades físicas del volumen del lubricante, especialmente por la viscosidad; por su parte, las características de fricción se originan puramente del cortante del lubricante viscoso [26].

Para que un cojinete soporte carga normal se deben desarrollar perfiles de presión positiva sobre la longitud del cojinete, para ello se debe disminuir el espesor de la película del lubricante en la dirección del deslizamiento.

Para que haya lubricación hidrodinámica se requiere un abastecimiento adecuado de lubricante en todo momento. La presión de la película la origina la superficie en movimiento de giro, que arrastra el lubricante hacia la sección en forma de cuna a una alta velocidad.

La lubricación hidrodinámica es llamada también lubricación de película gruesa, lubricación completa o fluida.

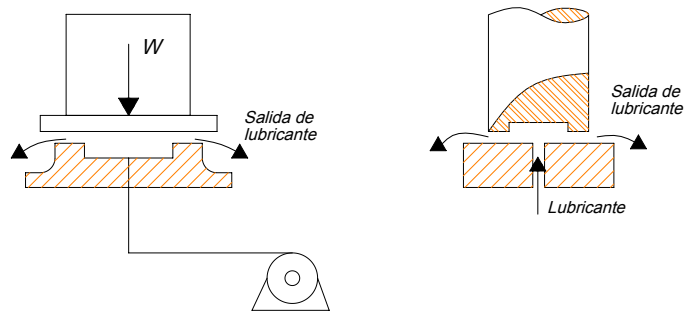
9.3. LUBRICACIÓN HIDROSTÁTICA

En un cojinete presurizado externamente, algunas veces denominados *cojinete hidrostático*, la caída de presión en el cojinete soporta la carga. La capacidad de soporte de carga es independiente del movimiento del cojinete y la viscosidad del lubricante. No existe desgaste por contacto superficial al arrancar ni al detenerse, como el que existe con el cojinete deslizante [26].

Se refiere al suministro continuo de un flujo de lubricante, que puede ser grasa, aceite, agua o gas, a la interfaz deslizante, a alguna presión hidrostática elevada ($\approx 10^2 - 10^4$ [psi]). Esto requiere un depósito (sumidero) como almacén, de una bomba para presurizar y tuberías para distribuir el lubricante. Cuando se hace correctamente, con las holguras de cojinete apropiadas, este procedimiento puede eliminar todo contacto metal - metal en la interfaz durante el deslizamiento, aún cuando los arranques y paradas se efectúan a plena carga. Las superficies quedan separadas por la película de lubricante, que si se mantiene libre de contaminantes, reducen casi a cero la tasa de desgaste. A una velocidad relativa igual a cero, la fricción se considera como cero. Con una velocidad relativa, el coeficiente

de fricción, en una interfaz hidrostáticamente lubricada, es de 0,002 a 0,010. Se trata del mismo principio del cojinete neumático, lo que permite que con muy poco esfuerzo se pueda impulsar. Los cojinetes hidrostáticos de empuje son más comunes que los de tipo radial.[33]

Figura 9.2: Lubricación hidrostática



Expresa Hamrock [26] en su obra: En los cojinetes de deslizamiento, se usa un mecanismo generador de presión dentro del cojinete de cuña física para desarrollar presión dentro del cojinete. Tales cojinetes, además de tener un bajo arrastre de fricción y, por tanto, pérdida de potencia baja, tienen la gran ventaja de que son básicamente simples y por ende confiables y baratos, y requieren poca atención, Sin embargo tienen ciertas desventajas importantes:

1. Si la velocidad de diseño es baja, quizá no sea posible generar suficiente presión hidrodinámica.
2. la lubricación por película fluida puede fallar durante el arranque, al cambiar de dirección y al parar.
3. En una cojinete deslizante, el eje trabaja excéntricamente y la localización del muñón varía con la carga lo que implica rigidez baja.

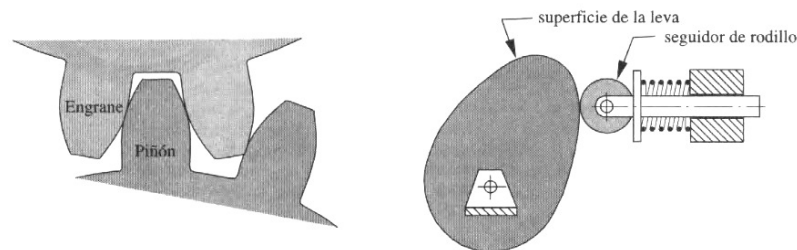
En los cojinetes lubricados hidrostáticamente se evitan las desventajas 1 y 2 y se reduce la variación de la situación del cojinete que se mencionó en la desventaja 3. Las características de los cojinetes lubricados hidrostáticamente son:

1. Fricción extremadamente baja.
2. Capacidad de soportar carga extremadamente alta a bajas velocidades.
3. Alta precisión en aplicaciones de alta velocidad y carga ligera.
4. Un sistema de lubricación más complicado que para los cojinetes deslizantes.

9.4. LUBRICACIÓN ELASTOHIDRODINÁMICA

La lubricación elastohidrodinámica (LEH) se tiene cuando las superficies en contacto no son concordantes, como en los dientes de engrane o de una leva y su seguidor, como se muestra en la figura 9.3, resulta más difícil formar una película completa de lubricante, ya que las superficies no concordantes tienen tendencia a expulsar el fluido, en vez de atraparlo. A bajas velocidades, estas uniones funcionarán con lubricación marginal y pueden resultar en una elevada tasa de desgaste, con posible rozadura y raspadura, lo que ocasionará una huella de contacto causada por las deflexiones elásticas de la superficie. Como Robert Norton lo anota [33], “esta pequeña huella de contacto puede hacer que se cree una superficie plana suficientemente grande como para permitir la formación de una película totalmente hidrodinámica, siempre que la velocidad relativa de deslizamiento sea lo suficientemente elevada.” Este estado nombrado por Norton, se conoce como **lubricación elastohidrodinámica (LEH)**, ya que depende de las deflexiones elásticas de la superficie y del hecho que la alta presión (de 100 a 500 kpsi) en la zona de contacto incrementa de manera importante la viscosidad del fluido.

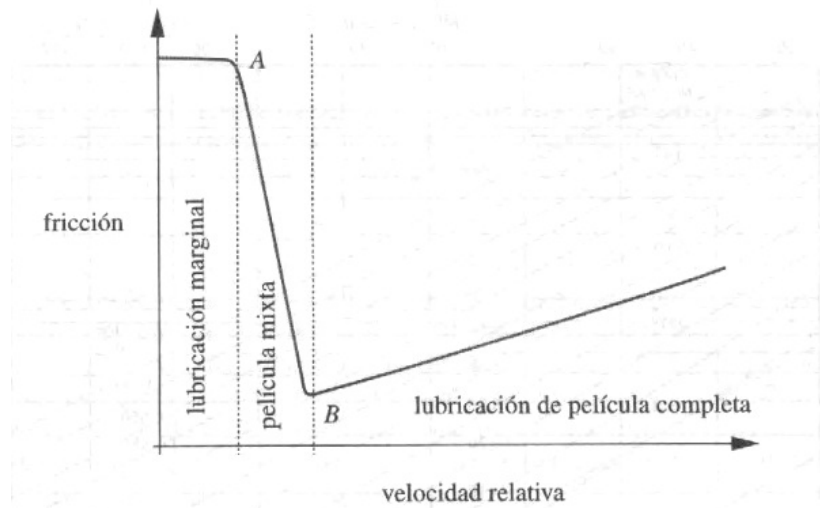
Figura 9.3: Uniones Abiertas



Fuente Diseño de Máquinas, Robert L. Norton, 1999.

Así, los dientes de los engranes pueden operar en cualquiera de las tres condiciones mostradas en la figura 9.4. En la operación de start-stop habrá lubricación marginal, y si se prolonga, causará un desgaste severo. Otro ejemplo típico que se puede anotar, son las uniones leva-seguidor que experimentan cualquiera de los regímenes de la 9.4, pero más probablemente estarán en modo de la lubricación marginal en aquellas posiciones sobre la leva con pequeño radio de curvatura. Los cojinetes de elementos rodantes pueden operar también en cualquiera de los tres regímenes.

Figura 9.4: Cambios en la fricción según la velocidad relativa

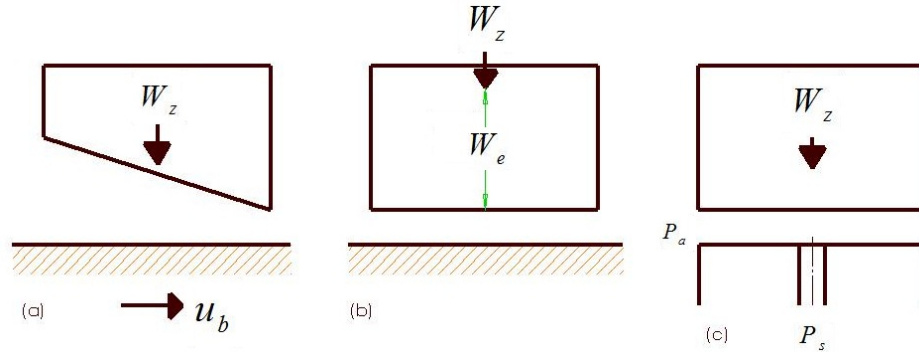


Fuente *Ídem*

El parámetro de mayor importancia, que determina qué ocurrirá en superficies no concordantes, es la razón entre la película de fluido y la aspereza que se presente en la superficie. Así, para obtener una lubricación de película completa y evitar el contacto entre asperezas, la aspereza superficial rms promedio (R_q), no debe ser superior a mediciones entre 1/2 y 1/3 del espesor de la película de aceite. Como se explica más adelante, un espesor de película completa de LEH, normalmente es del orden de $1[\mu m]$. A cargas muy elevadas o a bajas velocidades, el espesor de película en la LEH llega a ser demasiado pequeña para separar las asperezas superficiales y puede retornarse a situaciones de lubricación de película mixta o de lubricación marginal. El incremento en la velocidad relativa o el incremento en la viscosidad del lubricante, así como el incremento en el radio de curvatura en el contacto, son los factores que tienen mayor efecto en la creación de la elastohidrodinámica. Otros factores como la carga unitaria o la reducción de la rigidez del material tienen un menor efecto.

Se puede concluir entonces, que la lubricación elastohidrodinámica (LEH) es una forma de lubricación hidrodinámica, donde la deformación elástica de las superficies lubricadas llega a ser significativa. En este tipo de lubricación, también son importantes las características de un cojinete deslizante lubricado hidrodinámicamente (figura 9.5 (a)): convergencia de espesor de la película de aceite, movimiento deslizante, y un fluido viscoso entre la superficies. La Lubricación elastohidrodinámica normalmente es asociada con las superficies no concordantes y con la lubricación por película fluida. Hay dos formas distintas de LEH, tal como se menciona en la obra *Elementos de Máquinas* [26], lubricación elastohidrodinámica dura (LEH dura) y lubricación elastohidrodinámica blanda (LEH blanda).

Figura 9.5: Mecanismos de desarrollo de Presión (a) Cojinete deslizando (b) Cojinete con película presionada (c) cojinete con presión externa



Fuente Fundamentals of Fluid Film, Hamrock, B.J. and Schmid, S.R. and Jacobson, 2004.

9.4.1. Lubricación elastohidrodinámica dura

La lubricación elastohidrodinámica dura (LEH dura) se relaciona para materiales de alto módulo elástico como los metales. En esta forma de lubricación la deformación elástica y los efectos de la presión y la viscosidad son igualmente importantes. La figura 9.7 a la izquierda, muestra las características de la lubricación elastohidrodinámica dura. El valor de la presión máxima oscila típicamente entre los 0,5 y los 3 [GPa]; el espesor mínimo de película normalmente excede el 0,1 [μm]. Esas condiciones, son dramáticamente diferentes de las encontradas en la lubricación hidrodinámica común (figura 9.6). En cargas normalmente experimentadas en elementos de máquina no concordantes, las deformaciones elásticas son de magnitudes mayores al espesor mínimo de película. Por otro lado, la viscosidad del lubricante puede variar en el orden de 10 veces su magnitud dentro de la conjunción lubricada. El espesor mínimo de película es una función de los mismos parámetros de la lubricación hidrodinámica, pero con la diferencia que en la LEH dura se tienen en cuenta los efectos del módulo de elasticidad efectivo E y el coeficiente ξ de viscosidad-presión del lubricante. El módulo de elasticidad efectivo es:

$$E = \frac{2}{\frac{1-\nu_a^2}{E_a} + \frac{1-\nu_b^2}{E_b}}$$

ν razón de poisson

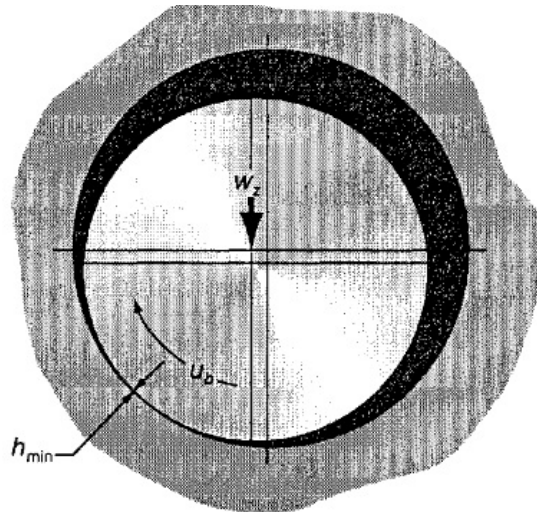
E módulo de elasticidad, [Pa]

La relación entre el espesor mínimo de película h_{min} , la carga normal aplicada W y la velocidad de la superficie superior para la u_b LEH dura, a partir de investigaciones de Hamrock y Dowson en 1977, son:

$$(h_{min})_{LEHD} \propto W_z^{-0,073} \quad (9.3)$$

$$(h_{min})_{LEHD} \propto u_b^{0,68}$$

Figura 9.6: Cojinete en Lubricación hidrodinámica



Conformal surfaces
 $p_{max} \sim 5 \text{ MPa}$
 $h_{min} = f(w_z, u_b, \eta_0, R_x, R_y) > 1 \mu\text{m}$
 No elastic effect

Comparando los resultados para LEH dura (Ecuaciones anteriores) con los de la lubricación hidrodinámica, se llega a las siguientes conclusiones:

1. El exponente de la carga normal aplicada, es aproximadamente, siete veces más grande para la lubricación hidrodinámica que para la LEH dura. Esto implica que el espesor de película es afectado ligeramente por la carga cuando se presenta LEH, pero cuando se presenta lubricación hidrodinámica este espesor es afectado significativamente.
2. El exponente de la velocidad media es ligeramente más alto para la LEH dura que para la lubricación hidrodinámica.

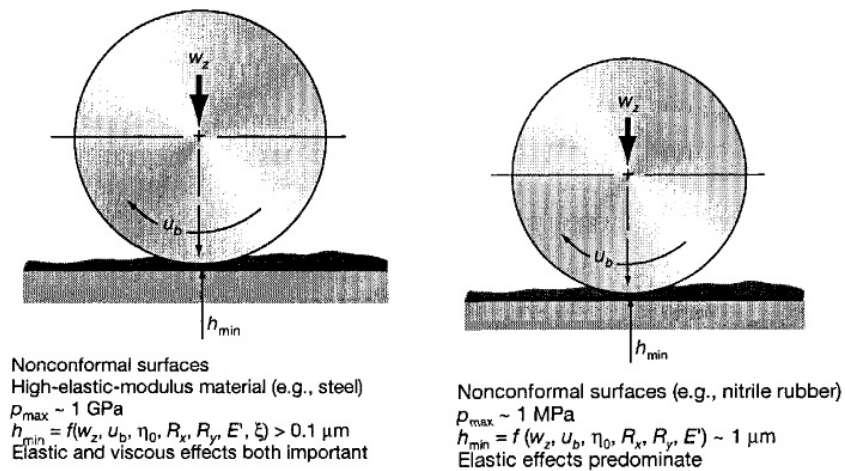
Las aplicaciones de ingeniería donde la lubricación elastohidrodinámica es importante son los materiales de alto módulo de elasticidad, como los engranajes, los cojinetes de contacto rodante y las levas.

9.4.2. Lubricación elastohidrodinámica blanda

La lubricación elastohidrodinámica blanda (LEH blanda) es utilizada para aquellos materiales de bajo módulo elástico como el caucho. La figura 9.7 a la derecha, muestra las características de los materiales con LEH blanda. En la LEH blanda las distorsiones

elásticas son largas, aún con cargas ligeras. La presión máxima para la LEH blanda es típicamente de 1 Mpa, en contraste de la presión de 1 Gpa que presenta la LEH dura La figura 9.7 a la izquierda. Esta baja presión tiene un efecto despreciable sobre la variación de la viscosidad fuera de régimen de LEH [25] . El espesor mínimo de película es una función de los mismos parámetros de la lubricación hidrodinámica con diferencia que se debe tener en cuenta el módulo elástico efectivo. El espesor mínimo de película para LEH blanda es típicamente $1[\mu m]$. Las aplicaciones de ingeniería donde la lubricación elastohidrodinámica es importante para materiales de bajo módulo elástico, incluye juntas, articulaciones humanas, neumáticos, y un número de elementos de la máquinas lubricadas que usan el caucho como material.

Figura 9.7: Características de la LEH dura y suave



Fuente Fundamentals of Fluid Film, Hamrock, B.J. and Schmid, S.R. and Jacobson, 2004

Las características comunes de la LEH dura y blanda son que la deformación elástica local de los sólidos, proporcionan películas de fluidos uniformes(coherentes) y la interacción entre las asperezas de las superficies es impedida en gran medida. Esto implica que la resistencia a la fricción para el movimiento es ocasionada sólo por el esfuerzo de corte en el lubricante.

9.5. TERMOELASTOHIDRODINÁMICA

La lubricación termoelastohidrodinámica (LTEHD), es un tipo lubricación que se establece, como su nombre lo dice, cuando se considera la deformación elástica de las superficies del lubricante y además se tiene en cuenta el efecto de la temperatura. Debido al marco teórico de este trabajo de grado, se realiza una reseña de forma general donde se explican los aspectos más importantes de este tipo de lubricación y se señalan algunas teorías que deben ser tenidas en cuenta.

Las condiciones extremas impuestas en los contactos con lubricación elastohidrodinámica, ya sean puntuales o lineales, hacen que la suposición de temperatura constante

en el dominio del contacto deje de ser válida. El calor producido por la fricción viscosa del lubricante tiene como consecuencia un aumento de la temperatura del mismo y de las superficies en movimiento relativo. Al incrementar la temperatura se producen variaciones de las condiciones del contacto respecto a un modelo isoterma: disminución del espesor de película, variación del coeficiente de fricción, etc. Se presenta un procedimiento capaz de resolver el problema termoelastohidrodinámico aplicando un modelo de resistencias térmicas que permite realizar el cálculo de las distribuciones de temperatura en el lubricante y en las superficies. Para comprobar la validez del método desarrollado se han realizado cálculos del coeficiente de fricción en un contacto Bola-Disco para un amplio rango de velocidades (1-3m/s) y deslizamiento (5-200% de SRR), que han sido contrastados con resultados experimentales medidos en un equipo Mini Traction Machine (MTM).[22]

Para reallizar un análisis TEHD, es de suma importancia conocer la distribución de temperaturas en el lubricante, que determina sus propiedades viscosas, además la temperatura afecta al comportamiento reológico, influyendo en parámetros fundamentales como el espesor de película del contacto y en el coeficiente de fricción. [19, 20]

En el intervalo de años, 1935 a 1943, los investigadores Blok [21] y Jaeger [29], estudiaron el incremento de la temperatura originado por el calor en fuentes estacionarias y móviles con diferentes geometrías (circulares, cuadradas o en forma de banda) sobre un sólido semi-infinito y en ausencia de lubricante. Analizaron la evolución temporal del incremento de temperatura a través de integración numérica hasta llegar al estado estacionario.

Una de las primeras soluciones numéricas del problema lubricado fue desarrollada por Cheng [23], quién obtuvo los perfiles de presión, temperatura y espesor de película para un contacto LTEHD lineal entre dos rodillos lubricados con un fluido Newtoniano y cargas relativamente bajas. Análogamente, la resolución numérica del caso puntual para fluidos Newtonianos fue planteada por Zhu and Wen [28], y en las condiciones de funcionamiento analizadas no se apreciaron efectos térmicos significativos. Por otro lado, Sui y Sadeghi resolvieron el problema LTEHD lineal para lubricantes no Newtonianos [34], donde la ecuación de Reynolds generalizada fue modificada introduciendo el modelo reológico de Eyring para incorporar efectos no-Newtonianos en el fluido, pero lo desfavorable de este estudio es que no trabajan con cargas y deslizamientos altos. Recientemente [31, 35], y en la actualidad, se emplean principalmente resoluciones del problema TEHL aplicando las técnicas multinivel basadas en los estudios realizados por Lubrecht [32]. Estas técnicas han permitido resolver el problema TEHL bajo cargas y deslizamientos elevados.

La mayoría de este tipo de problemas de lubricación se resuelve a partir de la ecuación de Reynolds, la ecuación de energía y el modelo diferencial de la viscosidad, estos tres planteamientos permitan un análisis en el que se considera la transferencia de calor y el cambio de las propiedades del lubricante y de las superficies con las que tiene contacto.

9.5.1. Ecuaciones básicas del problema LTEHD

A continuación se presentan las ecuaciones que intervienen en el problema termoelastohidrodinámico, el comportamiento reológico del lubricante y la generación de calor

por fricción viscosa, con la finalidad de obtener una predicción del coeficiente de fricción.

La forma de la ecuación de Reynolds que describe el comportamiento hidrodinámico de los contactos puntuales lubricados bajo régimen LEH en estado estacionario de funcionamiento es [30].

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12u_m \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} \quad (9.4)$$

Donde p es la presión del fluido, h el espesor de película, u_m la velocidad media superficial de los dos cuerpos, y η y ρ la viscosidad y la densidad del lubricante respectivamente.

Aplicando la teoría de Boussinesq's [35] para la deformación elástica lineal de dos cuerpos semiinfinitos en contacto, homogéneos e isotrópicos, se obtiene la siguiente expresión para el espesor de película lubricada.

$$h(x, y) = h_0 + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + \frac{2}{\pi E'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \quad (9.5)$$

Siendo E' el módulo equivalente de Young de las dos superficies, R_x y R_y los radios equivalentes en las direcciones x e y , y h_0 la separación mínima de las superficies en contacto en el caso de cuerpos totalmente rígidos. La tercera ecuación que interviene en el problema LEH es la ecuación del balance de carga.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = W \quad (9.6)$$

Donde W es la carga soportada por el contacto. Los valores de densidad ρ y viscosidad η del lubricante, que intervienen en la ecuación 9.4, dependen no sólo de la presión, p , sino también de la temperatura del lubricante, T . Por esta razón, es importante realizar un balance térmico para estimar el valor de la temperatura del lubricante en cada punto $T(x, y)$. Para obtener las distribuciones de temperatura en el lubricante y las superficies en contacto, es necesario resolver las ecuaciones diferenciales de conservación de la energía para un volumen diferencial del fluido, ecuación 9.7, y de los sólidos, ecuación 9.8, [22].

Fluido:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_1 \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_1 \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \varepsilon T \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \tau_x \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_y \frac{\partial v}{\partial z} = \rho_l c_l \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (9.7)$$

Sólido:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\rho_s c_s}{k_s} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (9.8)$$

Los tres primeros sumandos de la ecuación 9.7 representan la energía térmica neta de entrada al volumen diferencial por conducción en el lubricante, el cuarto término es el

calor generado por compresión del fluido, el quinto el calor generado por fricción viscosa, siendo el sexto término despreciable debido a que la velocidad en dirección perpendicular al flujo se considera nula. La suma de estos términos es igual a la energía almacenada por la inercia térmica del fluido. En el caso de los cuerpos sólidos la ecuación en 9.8 no existe generación de calor, y por tanto, sólo se tienen en cuenta los términos de conducción de calor y el término de la energía almacenada.

Modelo de viscosidad Para resolver la ecuación de Reynolds 9.4 y las ecuaciones diferenciales de conservación de la energía y 9.8 es necesario conocer el comportamiento de la viscosidad del lubricante bajo las distintas condiciones de funcionamiento que se producen en cada punto (x, y) del dominio del contacto. Para tener en cuenta la naturaleza no-Newtoniana del aceite se ha considerado la viscosidad del lubricante dependiente de la presión, la temperatura y la velocidad de cizalla según el modelo de Carreau [23]

$$\eta(p, T, \dot{\gamma}) = \eta_{ls}(p, T) \left[1 + \left(\frac{\eta_{ls}(p, T)}{G} \dot{\gamma} \right)^2 \right]^{(n-1)/2} \quad (9.9)$$

Donde γ es la velocidad con la que está siendo cizallado el lubricante, η_{ls} es la viscosidad del lubricante para bajos valores de γ , G es el módulo a cortante del lubricante y n el exponente de Carreau. La viscosidad η_{ls} se caracteriza según la ley de Barus [22]

$$\eta_{ls}(p, T) = \eta_{ls0}(T) \cdot \exp[\alpha(T) \cdot p] \quad (9.10)$$

donde η_{ls} es la viscosidad del lubricante a presión ambiente y α es el coeficiente de presión-viscosidad.

Modelo de densidad Las altas cargas soportadas por el aceite en los contactos EHL provocan que éste se comprima en la zona de contacto. La variación de la densidad del aceite con la presión se ha representado empleado el modelo propuesto por Feng y Ramesh [27].

$$\frac{\rho(p)}{\rho_0} = \left\{ 1 + \frac{C_1}{2C_2} \right\} \left[1 + s \sqrt{1 + \frac{4C_2(p - C_3)}{C_1^2}} \right]^{-1} \quad (9.11)$$

Donde ρ_0 es la densidad a presión ambiente, y s , C_1 , C_2 y C_3 son constantes de ajuste para cada aceite.

Fuentes de calor Cuando las condiciones de funcionamiento de los contactos LEH son severas: altas cargas, altas velocidades o altos deslizamientos, deja de ser válida la hipótesis de contacto isoterma. Como se observa en la ecuación 9.7, el calor generado en el lubricante se debe a la compresión originada por las altas presiones y a la fricción viscosa del lubricante a lo largo del contacto. El flujo de calor generado por fricción viscosa al cizallar una columna de lubricante por unidad de área se representa como:

$$\dot{q}_{fric} = \tau |u_1 - u_2| \quad (9.12)$$

Donde τ es la tensión de cizalla del lubricante y $u_{1,2}$ las velocidades lineales de las superficies en contacto. Para valores típicos de funcionamiento de los contactos LEH puntuales el calor generado por fricción viscosa es dos órdenes de magnitud superior al debido a la compresión, por lo general se supondrá despreciable el calor generado por compresión.

Cálculo del coeficiente de fricción La fuerza de fricción viene determinada por la integración de la tensión cortante generada en el lubricante a lo largo del área de contacto. Esta tensión depende del comportamiento reológico del lubricante bajo las condiciones de funcionamiento alcanzadas. Para realizar el cálculo más rápido se asume un comportamiento no-Newtoniano del lubricante con límite a tensión cortante.

$$\tau = \min [\eta \dot{\gamma}, \tau_L] \quad (9.13)$$

Donde τ_L es la tensión cortante límite y su valor depende de la presión y la temperatura. Para lubricantes con reducidos tiempos de relajación², esta dependencia con la temperatura se ajusta a un comportamiento lineal de la forma [27]:

$$\tau_L = \tau_0 + \zeta(T) \cdot p$$

Donde τ_0 es la tensión cortante límite a presión atmosférica y ζ el parámetro de tensión cortante límite-presión.

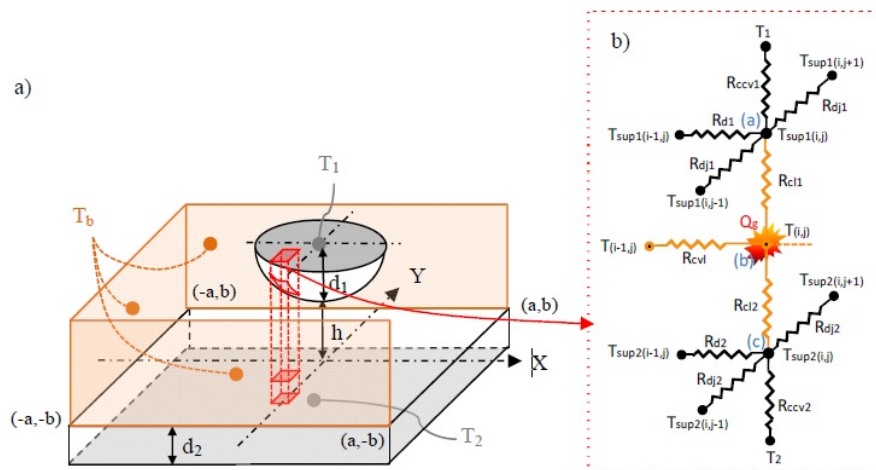
9.5.2. Procedimiento Numérico

Con el objetivo de facilitar la resolución numérica del problema LTEH, en primer lugar se adimensionalizan las ecuaciones 9.4, 9.5 y 9.6 y las condiciones de contorno que se desean imponer. Aplicando las técnicas multilevel descritas por Lubrecht [32] se resuelve el problema LEH para una distribución de temperatura $T(x, y)$ determinada. En un primer cálculo, se suponen todos los valores de la matriz $T(x, y)$ iguales a la temperatura del baño, obteniéndose una aproximación de la distribución de presión $p(x, y)$ y del espesor de película $h(x, y)$ en un mallado de dimensiones $m \times m$. El método más común de solucionar el problema térmico de los contactos LEH consiste en resolver de forma simultánea la ecuación de la energía en el lubricante, la ecuación de conducción en los sólidos y las ecuaciones del problema LEH [22]. Sin embargo, este procedimiento conlleva elevados tiempos de cálculo. En la investigación de Chacón [22], se presenta un método de resolución independiente al cálculo LEH que consiste en generar un circuito equivalente de resistencias térmica. Este procedimiento permite calcular el calor generado, Q_g , y la distribución, $T(x, y)$, en el lubricante y en los sólidos, con las distribuciones de $p(x, y)$ y $h(x, y)$

²El tiempo necesario para que, el esfuerzo disminuya a una fracción de su valor inicial bajo deformación constante.

obtenidas en la resolución de las ecuaciones de la EHL. Para un contacto puntual, el circuito equivalente resulta más complicado, pero sigue una lógica ya establecida por muchos investigadores. Analizando un elemento diferencial del contacto como el que se muestra en la figura 9.8, se observa como el calor que se genera en el lubricante (Q_g) se puede difundir hacia las superficies de los sólidos en contacto, a través de la resistencia térmica de conducción de la película del lubricante (R_{cl}), y/o hacia el lubricante en movimiento a través de una resistencia de convección (R_{cvt}). Una vez que el flujo de calor alcanza los cuerpos en contacto, se difunde superficialmente hacia los elementos adyacentes ($i-1, j$), ($i, j+1$) e ($i, j-1$) por las resistencias combinadas de conducción-convección R_d y/o hacia el interior del cuerpo a través de la resistencia de conducción R_{ccv} .

Figura 9.8: a) Dominio del contacto, b) Elemento diferencial de resistencias térmicas



Fuente Resolución del problema TEHD puntual y su aplicación a la predicción del coeficiente de fricción, Chacón, E *et al.* Revista del XVIII Congreso Nacional de ingeniería mecánica (2010)

9.6. LUBRICACIÓN MARGINAL

La lubricación marginal se refiere a situaciones en las que algunas combinaciones en la geometría de la interfaz, de niveles elevados de carga, de baja velocidad o de insuficiente lubricante evitan la iniciación de un estado hidrodinámico. En esta situación, la fricción y el desgaste quedan determinados por las propiedades de las superficies en contacto y las propiedades del lubricante distintas a su viscosidad de masa. La viscosidad del lubricante resulta no ser factor [33].

La lubricación marginal es una situación menos deseable que los otros tipos arriba descritos, porque permite que entren en contacto las asperezas superficiales y se desgaste con rapidez. Es a veces inevitable, como en los ejemplos de levas, engranes y cojinetes. Los lubricantes para extrema presión, arriba mencionados, se crearon para estas aplicaciones de lubricación marginal, especialmente y cargas elevadas. El coeficiente de fricción de una

interfaz de deslizamiento lubricada marginalmente depende de los materiales empleados, así como del lubricante, pero es de 0,05 a 0,15, quedando la mayoría alrededor de 0,10 [33].

Como en la lubricación marginal los sólidos separados por el lubricante, los efectos de la película fluida son insignificantes y existen un contacto de las asperezas importante. El mecanismo de lubricación por contacto se rige por las propiedades físicas y químicas de las películas delgadas de superficie de proporciones moleculares. Las propiedades volumétricas de lubricante tienen menor importancia, y el coeficiente de fricción es esencialmente independiente de la viscosidad del fluido. Las propiedades de los sólidos y la película del lubricante en las interfaces comunes determinan las características de la fricción. El espesor de las películas de superficie varía de 1 a 10 [nm], dependiendo del tamaño molecular [26].

En la figura ³ se indica el comportamiento del coeficiente de fricción en los regímenes de lubricación. En la lubricación marginal, aunque la fricción es bastante mayor que en el régimen hidrodinámico, aún es mucho menor que para las superficies no lubricadas. El coeficiente de fricción medio se incrementa hasta un total de tres órdenes de magnitud al pasar el régimen hidrodinámico, al elastohidrodinámico, al marginal y al no lubricado [25].

A medida que se incrementa la carga relativa en el régimen no lubricado, la tasa de desgaste se incrementa hasta que se presentan estrías o cuando ocurre el agarrotamiento y el elemento de máquina ya no opera adecuadamente. La mayoría de los elementos de máquinas no operan por mucho tiempo sin lubricación en sus superficies [25].

La lubricación marginal se utiliza en los elementos de máquinas con cargas pesadas y bajas velocidades de operación, donde es difícil obtener una lubricación por película fluida. Los mecanismos como las bisagras de las puertas operan en condiciones de lubricación marginal. En otras aplicaciones para las cuales el bajo costo es de primordial importancia se recomienda la lubricación marginal, como en el caso de los cojinetes de manguito de fricción [25].

9.7. LUBRICACIÓN DE PELÍCULA MÍNIMA O MIXTA

Si las presiones en los elementos de máquinas lubricadas elastohidrodinámicamente resultan demasiado altas o las velocidades de operación son demasiado bajas, la película del lubricante se dispersa; habrá algún contacto entre las asperezas, y entonces ocurrirá la lubricación parcial (algunas veces se le denomina lubricación mixta). El comportamiento de la conjunción en un régimen de lubricación parcial se rige por una combinación de efectos marginales y de película fluida. La interacción ocurre entre una o más capas moleculares de películas de lubricación marginal. La acción parcial de la lubricación de película fluida se desarrolla en el volumen del espacio entre los sólidos. El espesor promedio de la película en una conjunción de **lubricación parcial** es menor que 1 [μm] y mayor que 0,01 [μm] [26].

³escanera fig 8.3 hamrock

Es importante reconocer que la transición de la lubricación elastohidrodinámica a la parcial no ocurre instantáneamente a medida que la severidad de la carga se incrementa, sino que las presiones dentro del fluido que llena el espacio entre los sólidos opuestos soportan una proporción decreciente de la carga. A medida que ésta se incrementa, la mayor parte la soporta la presión de contacto entre las asperezas de los sólidos. Además, el régimen de la lubricación para superficies concordantes va directamente de la lubricación hidrodinámica a la parcial [26].

La lubricación mixta implica que en la interfaz siempre habrá algún contacto metal-metal. Si la película de lubricante no es lo suficientemente gruesa para “enterrar” las asperezas de la superficie, esto resultará cierto. Si la velocidad relativa o el suministro de lubricante de una interfaz hidrodinámica se ve reducida, se volverá a una situación de lubricación marginal. Las superficies como la de los dientes de engrane o las interfaces de levas y seguidores que no se envuelven una a la otra, pueden estar en modo de lubricación marginal si no predominan condiciones para la lubricación elastohidrodinámica. Los cojinetes de bolas y rodillos también se pueden operar en modo de lubricación marginal si la combinación de velocidades y cargas no permiten que ocurra la lubricación elastohidrodinámica [33].

Se presenta éste tipo de lubricación, cuando se tiene alguno de los siguientes motivos:

- Área de contacto insuficiente
- Baja velocidad de la superficie móvil
- Lubricante escaso
- Aumento excesivo de la carga
- Incremento de la temperatura del lubricante, que implica una disminución de la viscosidad

Cualquiera de estas causas puede impedir la formación de película gruesa. Si ello ocurre las crestas o salientes de las superficies llegan a tocarse. A este tipo de lubricación se le llama de película mínima, imperfecta o parcial.

BIBLIOGRAFÍA

- [19] S. BAIR. Deformation behavior of thin lubricant films at elevated pressure. Technical report, DTIC Document, 1994.
- [20] S.S. BAIR. *High-pressure rheology for quantitative elastohydrodynamics*, volume 54. Elsevier Science, 2007.
- [21] H. BLOK. *Theoretical study of temperature rise at surfaces of actual contact under oiliness lubricating conditions*, volume 2. 1937.
- [22] E. CHACÓN, E. De la GUERRA, J. ECHEVERRI, P. LAFONT, and MUÑOZ-GUIJOSA. Resolución del problema tehd puntual y su aplicación a la predicción del coeficiente de fricción. *Revista del XVIII Congreso Nacional de ingeniería mecánica*, 2010.
- [23] HS CHENG and B. STERNLICHT. A numerical solution for the pressure, temperature, and film thickness between two infinitely long, lubricated rolling and sliding cylinders, under heavy loads. *Trans. ASME, J. Basic Engng*, 87:696–707, 1965.
- [24] V. M. FAIRES. *Diseño de Elementos de Máquinas*. Editorial Uteha, 4 edition, 1998.
- [25] B.J. HAMROCK. *Fundamentals of fluid film lubrication*, 1994.
- [26] B.J. HAMROCK and B. JACOBSON and S.R. SCHMID. *Elementos de Máquinas*. Tribology and Interface Engineering Series. Mc Graw Hill, 2000.
- [27] E. HOGLUND. Influence of lubricant properties on elastohydrodynamic lubrication. *Wear*, 232(2):176–184, 1999.
- [28] Y.Z. HU and D. ZHU. A full numerical solution to the mixed lubrication in point contacts. *Journal of tribology*, 122:1, 2000.
- [29] JC JAEGER. *Moving sources of heat and the temperature of sliding contacts*, volume 76. 1942.
- [30] JY JANG, MM KHONSARI, and S. BAIR. On the elastohydrodynamic analysis of shear-thinning fluids. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 463(2088):3271, 2007.
- [31] M. KANETA, H. NISHIKAWA, T. KANADA, and K. MATSUDA. Abnormal phenomena appearing in ehl contacts. *Journal of tribology*, 118:886, 1996.
- [32] A. LUBRECHT. The numerical solution of the elastohydrodynamically lubricated line and point contact problem, using multigrid techniques(ph. d. thesis). 1987.

- [33] R.L. NORTON, G.S. GARCÍA, and C.M.C. CASTELLO. *Diseño de máquinas*. Prentice Hall, 1999.
- [34] PC SUI and F. SADEGHI. Non-newtonian thermal elastohydrodynamic lubrication. *Journal of tribology*, 113:390, 1991.
- [35] CH VENNER and W.E. NAPEL. Multilevel solution of the elastohydrodynamically lubricated circular contact problem part i: Theory and numerical algorithm. *Wear*, 152(2):351–367, 1992.

Capítulo 10

TEORÍA DE LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

La lubricación hidrodinámica es el efecto dinámico de un fluido que genera una película de separación completa entre las superficies deslizantes. La película de fluido es una delgada capa entre dos superficies en movimiento relativo. El efecto hidrodinámico genera un perfil de presión en la película de fluido que resulta en una *capacidad de sostenimiento de carga*, en el sentido de que la película de fluido tiene la suficiente presión para soportar la carga externa en el cojinete. La onda de presión es originada por una cuña de lubricante trazada en la holgura entre las dos superficies convergentes o por una acción de compresión de película.

La holgura de un deslizador plano y al igual que en un cojinete tiene la forma de una cuña delgada convergente (figura 10.1 d). El fluido que se adhiere a la superficie sólida es arrastrado a interior de la cuña. Debido al movimiento de las superficies en la cuña se presenta un elevado esfuerzo cortante. A su vez, se debe construir la presión elevada en la película antes de que el fluido viscoso se escape a través de la holgura entre superficies. De este modo, la película hidrodinámica puede separar completamente las superficies en contacto, y por lo tanto, se previene el desgaste entre ellas. Bajo condiciones estables, la capacidad de carga hidrodinámica, W , de un cojinete es igual a la carga externa, F , en el cojinete, pero ésta actúa en dirección opuesta. La teoría hidrodinámica de la lubricación se resuelve para la velocidad de fluido, perfil de presión y capacidad de carga resultante.

La experimentación y los análisis hidrodinámicos han indicado que la capacidad de carga hidrodinámica es proporcional a la velocidad de deslizamiento y a la viscosidad del fluido. Al mismo tiempo, la capacidad de carga incrementa dramáticamente para una película más delgada, Sin embargo, hay un límite práctico hasta donde los diseñadores reducen el espesor de la película. Siempre que la película hidrodinámica es demasiado pequeña, se presenta contacto entre las superficies ocasionando desgaste severo. Reconocer el espesor óptimo de película es una importante decisión en el proceso de diseño.

Tower (1880) llevó a cabo experimentos y demostró por primera vez la existencia de un perfil de presión en un cojinete hidrodinámico. Más tarde, Reynolds (1886) desarrolló *la teoría clásica de la lubricación hidrodinámica*. Se ha desarrollado un gran volumen de

trabajos a partir del valioso aporte de Reynolds. La teoría clásica de Reynolds y sus seguidores está basada en varios supuestos que se adoptaron para simplificar las derivaciones matemáticas, la mayoría de los cuales se siguen aplicando hoy en día. Como en otras disciplinas, la introducción de los computadores permitió la solución de complejos problemas de lubricación hidrodinámica utilizando los métodos numéricos. Los problemas se aproximan cada vez más a condiciones reales sin tener que depender de supuestos que pueden desviar la solución.

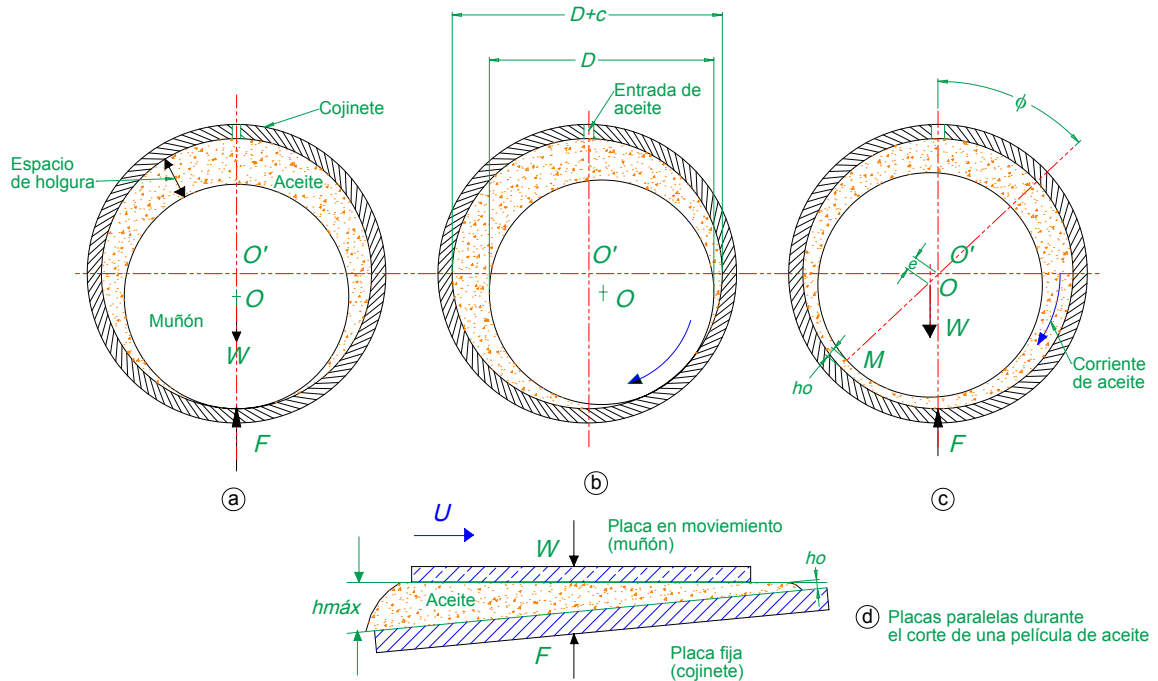
A comienzos del siglo XX se habían diseñado cojinetes eficientes para la época, basados en la primicia de que la longitud del cojinetes era superior al diámetro del muñón, $L > D$. Después se encontraron las ventajas de la condición contraria, $L < D$, como son: mejor refrigeración del aceite por una circulación más rápida del lubricante, menor sensibilidad al desalineamiento y diseño compacto.

Muchos modelos toman como simplificación del problema asumir el cojinete *infinitamente largo o infinitamente corto*. Pero, para longitudes finitas hay un flujo tridimensional que debe ser solucionado numéricamente.

10.1. CONDICIONES GEOMÉTRICAS

Considérese un muñón con carga W descansando en su cojinete con contacto metal a metal, y el espacio de holgura o juego lleno de aceite (figura 10.1 a). Cuando el muñón comienza a girar en el sentido de las agujas del reloj, primero hay un frotamiento metal sobre metal y el muñón asciende hacia la parte superior derecha (figura 10.1 b). Puesto que el aceite se adhiere a la superficie del muñón, con la rotación es arrastrada una película de aceite entre las superficies, después de lo cual el muñón se mueve hacia la izquierda del centro del cojinete O' ; ésta es la posición de desequilibrio (figura 10.1 c). El canal constituido en forma de cuña es el requerido por la teoría hidrodinámica (figura 10.1 d). La presión aumentará hasta que no haya contacto metal y metal (si el cojinete hidrodinámico ha sido correctamente proyectado). El espesor mínimo de película de aceite se denomina por h_o . Una consideración algo intuitiva (especialmente teniendo en cuenta la ecuación 7.6) sugiere que (considerando una variable a la vez): cuanto más rápido gire el muñón, mayor es la cantidad de aceite que pasa a través del área que soporta la carga y mayor es h_o ; cuanto mayor es la viscosidad, mayor es h_o ; cuanto mayor es la presión menor es h_o .

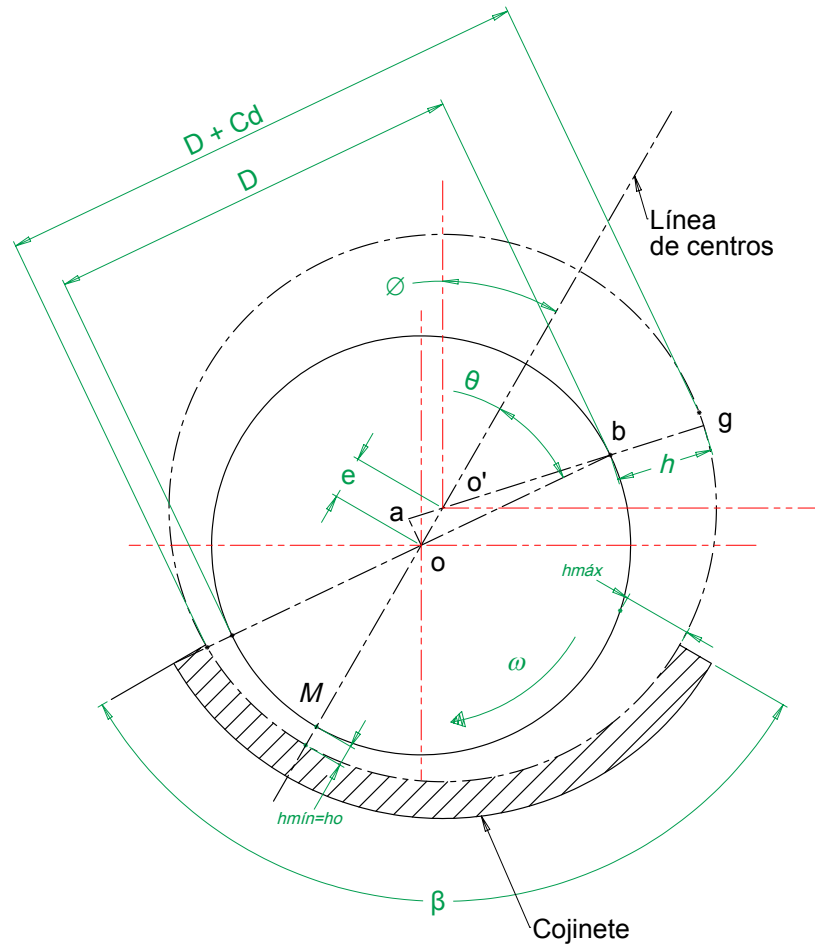
Figura 10.1: Mecanismo de lubricación. El ángulo de excentricidad ϕ sitúa a h_o .



10.2. RELACIONES GEOMÉTRICAS PARA COJINETES CON JUEGO

La línea que pasa por los centros del muñón y del cojinete se llama ***línea de centros*** (figura 10.2). En esta línea aparece el espesor mínimo de película $h_{min} = h_o$ siempre que la amplitud o la longitud angular del cojinete sea suficiente para incluir el punto M . Si el cojinete se extiende sólo hasta la sección de corte del cojinete presentada en la figura 10.2 el mínimo espesor de la película h_{min} está en el borde de escape o de salida del cojinete, y la separación de las circunferencias en M se designa por h_o .

Figura 10.2: Cojinete central parcial con juego, posición de giro. Relación geométrica para cualquier cojinete simple de deslizamiento.



La distancia $e = OO'$ entre los centros del muñón y del cojinete llamada **excentricidad del muñón**, es:

$$e = \frac{c_d}{2} - h_o = c_r - h_o$$

donde c_r es el juego radial. La excentricidad e dividida por el juego radial c_r se llama **relación de excentricidad**, ϵ (también se llama coeficiente de excentricidad); es decir,

$$\epsilon = \frac{e}{c_r} = \frac{e}{c_d/2} = \frac{c_r - h_o}{c_r} = 1 - \frac{h_o}{c_r} = 1 - \frac{2h_o}{c_d} \quad (10.1)$$

relación geométrica que se debe cumplir en un cojinete de deslizamiento con huelgo. Si dos de las cantidades son conocidas o se les asigna un valor, la otra puede ser calculada por la ecuación 10.1.

El espesor de película h en un ángulo cualquiera θ medido en el sentido de rotación desde la línea de centros, se halla por la figura 10.2 como sigue:

$$\begin{aligned} h &= ag - ab = aO' + O'g - ab \\ &= e \cos \theta + (r + c_r) - \sqrt{(Ob)^2 + (Oa)^2} \\ &= e \cos \theta + r + c_r - \sqrt{r^2 + e^2 \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

Pero como e es muy pequeña comparada con r , el término $e^2 \sin^2 \theta$ se puede omitir con efecto despreciable; lo cual da

$$h = e \cos \theta + c_r = c_r (e \cos \theta + 1) \quad (10.2)$$

La longitud de la superficie que soporta la carga de un cojinete medida en dirección *circunferencial* se llama **longitud de arco L** ; es el arco del muñón o del cojinete subtendido por el ángulo β , figura 10.2,

$$L = \frac{D}{2} \beta = r \beta$$

donde β está expresado en radianes. La longitud del cojinete en dirección *axial* se llama simplemente **longitud L** . El ángulo ϕ (figura 10.2), llamado **ángulo de excentricidad**, determina la posición correspondiente a h_o en que más se aproxima la circunferencia del muñón a la del cojinete, que es igual al mínimo espesor de película si el cojinete se extiende angularmente lo suficiente.

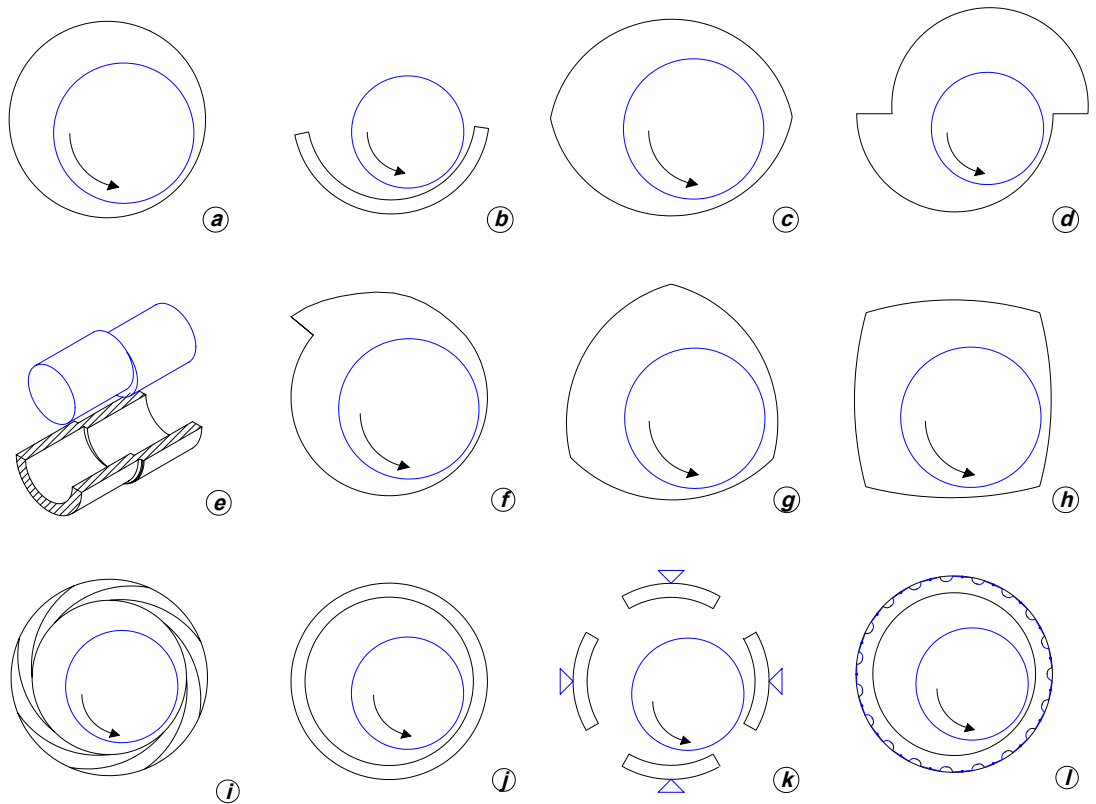
10.2.1. Configuración de los cojinetes

Existe una amplia variedad de configuraciones de cojinete a disposición del diseñador. La figura 10.3 muestra varios de estos cojinetes. La elección de la configuración de los cojinetes depende de diferentes factores a considerar; entre los más importantes están el costo, la carga, la pérdida de potencia, las propiedades dinámicas, la facilidad de construcción y la dificultad de la instalación.

Los cojinetes se denominan **completos** (Fig. 10.3 a) cuando la superficie del cojinete rodea completamente al muñón. Debido a que son fáciles de hacer y no cuestan mucho, éstos cojinetes son los más comúnmente usados en maquinaria giratoria. En el momento de la instalación pueden distorsionarse por lo que pueden no ser perfectamente circulares. La superficie de los **cojinetes parciales** se extienden a lo largo de un segmento de la circunferencia generalmente de 180° o menos (Fig. 10.3 b). Los cojinetes parciales se usan principalmente en cargas unidireccionales. Se ha encontrado que los cojinetes parciales reducen el par de torsión en el muñón y proporcionan en la mayoría de los casos mayor

accesibilidad y en muchas circunstancias requieren una tolerancia estricta de fabricación. Cuando el cojinete tiene un radio superior al muñón se denominan *cojinetes con holgura*, mientras que en los cojinetes parciales donde el radio del muñón y el cojinete son iguales se conocen como *cojinetes ajustados*.

Figura 10.3: Configuración de cojinetes. a) Cojinete completo; b) cojinete parcial; c) cojinete elíptico o de limón; d) cojinete descentrado; e) cojinete oscilante; f) cojinete quicionero; g) cojinete trilobular; h) cojinete de cuatro lóbulos; i) cojinete de hojas múltiples; j) cojinete de anillo flotante; k) cojinete de almohadilla pivotada; l) cojinete de hoja.



Las configuraciones en las que se emplean dos sectores circulares son llamados *cojinetes elípticos o de limón* (Fig. 10.3 c). Estos no son realmente elípticos del todo pero se fabrican uniendo dos mitades de un cojinete circular que hubiese tenido sus caras correlativas maquinadas en forma tal que el cojinete tiene una forma aproximadamente elíptica. Este tipo de cojinetes es el que más se utiliza a bajas y moderadas velocidades. Se utilizan extensamente en turbinas.

Los cojinetes elípticos en los que las dos mitades cilíndricas se desplazan lateralmente a lo largo del eje mayor se llaman *cojinetes descentrados* (Fig. 10.3 d). El desplazamiento relativo de los centros de cada mitad del cojinete es llamado *preajuste*. Cuando la mitad superior del cojinete se desplaza horizontalmente en la dirección de la rotación, el cojinete tiene un preajuste negativo. Se ha encontrado que la capacidad de carga aumenta con el

preajuste negativo. Los cojinetes descentrados tienen una rigidez horizontal relativamente alta que ayuda a evitar la inestabilidad dinámica. Más aún, estos cojinetes permiten un mayor flujo de lubricante y operan más fríos.

La figura 10.3 e) muestra una configuración en la que tanto el muñón como el cojinete se dividen axialmente en segmentos con ejes descentrados. Esta disposición produce un movimiento oscilatorio dinámico que provoca una película de lubricación más gruesa. De acuerdo con el ensamblaje, este juego se ha denominado **cojinete oscilante**.

Cuando se maquina un escalón en la superficie del cojinete (Fig. 10.3 f), el resultante se llama **cojinete de escalón o quicionera**. El propósito del escalón es crear una presión dinámica adicional en la parte superior del muñón a medida que el lubricante se hace pasar por el escalón. A su vez, esta formación para crear presión aumenta la carga sobre el muñón y en consecuencia disminuye la susceptibilidad de crear problemas de vibración. Los cojinetes de escalón son muy populares en la industria petroquímica.

Las configuraciones de los cojinetes que constan de tres o más sectores (Fig. 10.3 g y h) son llamadas de **lóbulos o multilobulares**. En general, los cojinetes de más de tres lóbulos se usan en aplicaciones de lubricación con gas. Los cojinetes multilobulares actúan como varios cojinetes parciales en serie. Su costo es moderado.

El **cojinete de hojas múltiples o láminas múltiples** (Fig. 10.3 i) es una variante del cojinete multilobular. Consta de un cierto número de arcos idénticos, u hojas, cuyos centros están igualmente espaciados alrededor del círculo generador. Las características de operación de un cojinete de hojas múltiples son prácticamente independientes de la dirección de la carga para cojinetes con ocho o más hojas.

En un **cojinete de anillo "flotante"** (Fig. 10.3 j) la película de lubricante se divide en dos por medio de la adición de un anillo flotante en el muñón y el cojinete. Estos cojinetes tienen menos pérdidas por fricción, una reducida generación de calor y proporcionan una mejor estabilidad.

Los cojinetes hidrodinámicos se pueden distinguir por el hecho que la superficie del cojinete se puede pivotar. La ventaja básica de los cojinetes que se pueden *pivotar* o de las **almohadillas inclinables** (Fig. 10.3 k) sobre un cojinete de almohadillas fijas es que pueden absorber, con poca pérdida de rendimiento, cualquier deflexión o desalineamiento del eje.

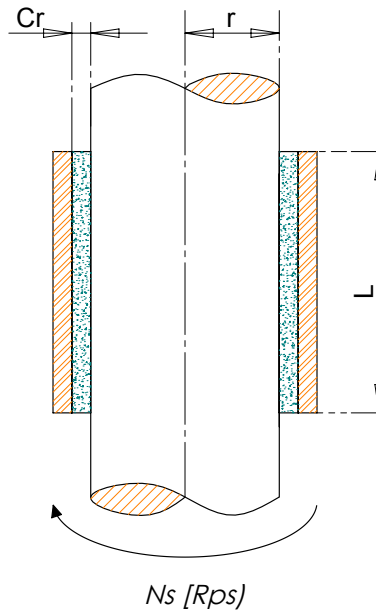
Un **cojinete de hoja** (Fig. 10.3 l) consiste en una superficie muy delgada que descansa en la parte superior de una serie de corrugaciones. Cuando se les compara con un cojinete convencional de gas, el cojinete de hoja tiene una película más gruesa, mayor capacidad de carga, menor pérdida de potencia, mejor estabilidad, y una durabilidad superior a altas temperaturas de operación.

10.3. ECUACIÓN DE PETROV

N.Petrov (1836-1920) fue un destacado científico ruso e ingeniero que elaboró la teoría hidrodinámica del engrase, además fue el primero en explicar el fenómeno del rozamiento en los cojinetes con base en la hipótesis de que el eje o árbol es concéntrico o coaxial

con el cojinete. Muy pocas veces se hará uso del método de análisis de Petrov en lo que sigue, pero es importante porque define grupos de parámetros adimensionales y porque el coeficiente de fricción que predice esta ley resulta aceptable, aun cuando el muñón del eje no sea coaxial.[94][42]

Figura 10.4: Cojinete centrado con el eje, totalmente lubricado



Para llegar al desarrollo de Petrov, se considerará un eje vertical que gira en un cojinete guía. Se supone que éste soporta una carga muy pequeña, que el espacio libre c está completamente lleno de aceite y que las fugas son despreciables (figura 10.4). El radio del eje será designado por r , la holgura por c y la longitud del cojinete por l . Ahora, si el eje gira a N [rps] su velocidad periférica o superficial será:

$$U = 2\pi r N \left[\frac{\text{pulg}}{\text{seg}} \right]$$

Como el esfuerzo tangencial o de deslizamiento que se desarrolla en el lubricante, es igual al producto del gradiente de la velocidad, entonces, por la ecuación de la Ley de Newton de viscosidad, se tiene:

$$\tau = \mu \frac{U}{h} = \frac{2\pi r \mu N}{c}$$

expresión en la cual la holgura radial c sustituye a la distancia o espesor h . La fuerza que se requiere para hacer deslizar la película es igual al esfuerzo tangencial multiplicado por el área. El momento de la fuerza tangencial o deslizante (llamado también par-torque) es igual a la fuerza multiplicada por el brazo de momento. En consecuencia:

$$T = (\tau A) (r) = \left(\frac{2\pi r \mu N}{c} \right) (2\pi r l) (r) = \frac{4\pi^2 r^3 l \mu N}{c}$$

Ahora, se añade la carga pequeña, W , que actúa sobre el cojinete, entonces la presión o carga por unidad P , en unidades de fuerza por unidad de área proyectada, será $P = W/2rl$. El rozamiento es fW , siendo f el coeficiente de fricción; ahora podemos obtener el par de rozamiento, o torque del rozamiento, que es:

$$T = (f) (2rlP) (r) = 2r^2 f l P$$

Ya que durante las últimas ecuaciones se tiene T como el momento deslizante, igualamos las dos últimas expresiones del par de rozamiento para despejar el coeficiente de fricción f , dando como resultado:

$$f = 2\pi^2 \frac{\mu N}{P} \frac{r}{c}$$

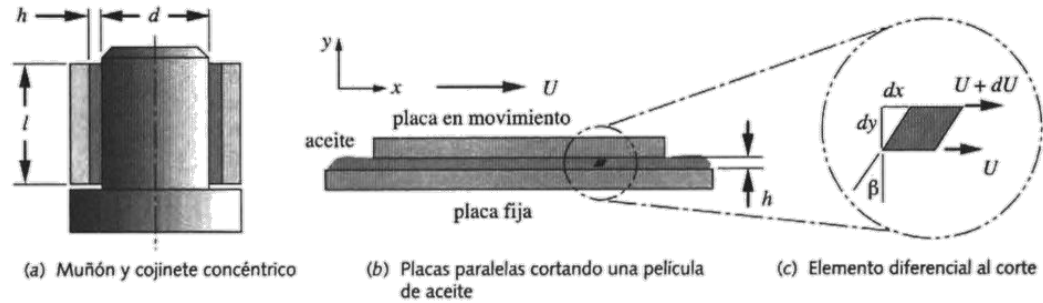
Esta última expresión, es conocida como la *ley de Petrov*, y fue publicada por primera vez en 1883 por este científico ruso. Las cantidades $\frac{\mu N}{P}$ y $\frac{r}{c}$ son parámetros muy importantes en el estudio de la lubricación y si se sustituye cada uno de sus parámetros con las dimensiones adecuadas, se observará que ambas cantidades son adimensionales.[42]

Más adelante se especifica que $\frac{\mu N}{P}$ es una expresión conocida como el *número característico del cojinete* y fundamental para los estudios posteriores realizados por Stribeck (1902) y por los hermanos McKee (1929) quienes describen en curvas, el comportamiento de la fricción según la velocidad de deslizamiento U , holgura del cojinete h , la viscosidad del lubricante μ , la velocidad rotacional N y de la presión ejercida por la carga P . El número característico también es usado para obtener el *Número de Sommerfeld* que se utiliza para analizar la excentricidad en los cojinetes, este número también será definido más adelante [92].

Finalmente se debe anotar que como la ecuación de Petrov se dedujo para cojinetes no cargados, ésta sólo es una aproximación a los cojinetes ligeramente cargados y lubricados normalmente, actuando a velocidades moderadas que hacen que el muñón gire concéntricamente con el cojinete y el gradiente de velocidad $\frac{dv}{dh} = \frac{v}{h}$ sea constante.[39]

10.3.1. Ecuación de Petrov para el par de torsión en un cojinete sin carga

Figura 10.5: Película entre dos superficies paralelas



Fuente Diseño de máquinas, Norton, R.; García, G. & Castello, C. 1999.

Definida la ecuación de Petrov específicamente para la fricción, podemos también aplicarla en mostrar el par torsión en un cojinete sin carga; así, a partir de la figura 10.5 (b), manteniendo la placa inferior estacionada y moviendo la superior hacia la derecha con un velocidad U , será cortado el fluido entre las placas, igual que ocurre en el espacio concéntrico mostrado en la figura 7.1. El fluido moja y se adhiere a ambas placas, haciendo que su velocidad sea cero en la placa estacionaria y U en la placa en movimiento. La figura 10.5(c) muestra un elemento diferencial del fluido en el espacio. El gradiente de velocidad causa la distorsión angular β . En el límite, $\beta = dx/dy$. El esfuerzo cortante τ_x , que actúa sobre un elemento diferencial de fluido dentro del espacio, es proporcional a la tasa de corte:

$$\tau_x = \mu \frac{d\beta}{dt} = \mu \frac{d}{dt} \frac{dx}{dy} = \mu \frac{d}{dy} \frac{dx}{dt} = \mu \frac{du}{dy}$$

En esta ecuación la constante de proporcionalidad, siguiendo el enunciado de Newton para la viscosidad, será μ . Asumiendo un espesor de película constante h , el gradiente de velocidad $du/dy = U/h$ será constante como se había anotado anteriormente. Empezando a sustituir expresiones, tenemos que la fuerza necesaria para cortar la película es $F = A\tau_x = \mu A \frac{U}{h}$, y asumiendo la coaxialidad entre muñón y cojinete de la figura 10.5 (a), se supone que la holgura es igual a $h = c/2$, la velocidad $U = 2\pi r n$, y el área de corte $A = 2\pi r l$ para finalmente obtener el par torsión T_0 , requerido para cortar la película, y está dado por:

$$T_0 = r F = r \mu A \frac{U}{h} = r \mu \pi 2r l \frac{2r\pi N}{c/2}$$

que finalmente es

$$T_0 = \mu \frac{2^3 \pi^2 r^3 l N}{c}$$

Que es la expresión de Petrov para el par torsion sin carga en una película de fluido.[66]

10.4. OBTENCIÓN DE LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMI- CA.

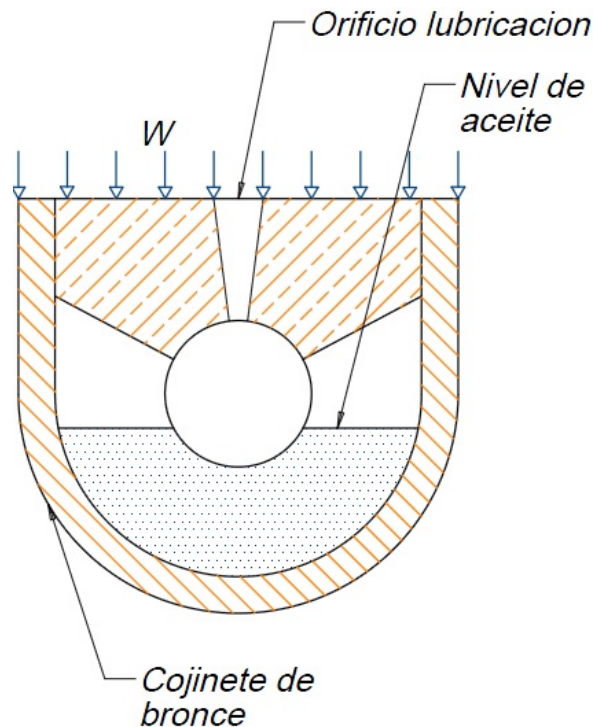
En secciones anteriores, se presentó y describió la lubricación marginal, la hidrostática, la elastohidrodinámica, la termoelastohidrodinámica y la hidrodinámica, exceptuando esta última, se analizó la teoría correspondiente, y debido a las limitaciones del seminario de investigación y a que la teoría matemática es compleja no se profundizaron en el desarrollo de las ecuaciones que las rigen, sin embargo para la lubricación hidrodinámica, que es la base de este seminario, esta sección presentará algunas deducciones completas de las ecuaciones que gobiernan este tipo de lubricación, basándose de manera primordial en las ecuaciones diferenciales parciales establecidas por Osborne Reynolds.

10.4.1. Experimentación de Tower e hipótesis de Reynolds.

La teoría actual de la lubricación hidrodinámica tuvo su origen en el laboratorio de Beachamp Tower, en los primeros años de 1880, en Inglaterra. Tower, estaba encargado de estudiar la fricción en los cojinetes de los ejes de los carros del ferrocarril y, además, de determinar un método más adecuado para lubricarlos. Fue un accidente o error en el curso de esta investigación lo que llevó a analizar el problema con mayor detalle, y esto resultó en un descubriendo que finalmente condujo al desarrollo de la teoría. (author?) [42]

La figura 10.6 es un esquema del soporte de muñón que investigó Tower. Tiene un cojinete parcial de 4 pulg y 6 pulg de longitud, con un arco de contacto de 157° y lubricación del tipo de baño, como se ilustra en la figura 10.6. Los coeficientes de fricción obtenidos por Tower en su investigación con este cojinete, fueron bastante bajos, algo que no sorprende a las investigaciones actuales. Después de ensayar este cojinete, Tower abrió un orificio de 1/2 pulgada de diámetro en la parte superior; pero cuando puso en movimiento el aparato, el aceite brotó por dicho orificio y para tratar de impedir la fuga, usó un tapón de corcho, pero éste también saltó y entonces lo tapó con un taco de madera. Cuando también fue expulsado el taco de madera, Tower se dio cuenta de que, indudablemente, estaba a punto de efectuar un buen descubrimiento. Instaló un manómetro en el agujero lubricador, y éste le indicó una presión mayor que el doble de la carga por unidad del cojinete.

Figura 10.6: Dispositivo de Tower

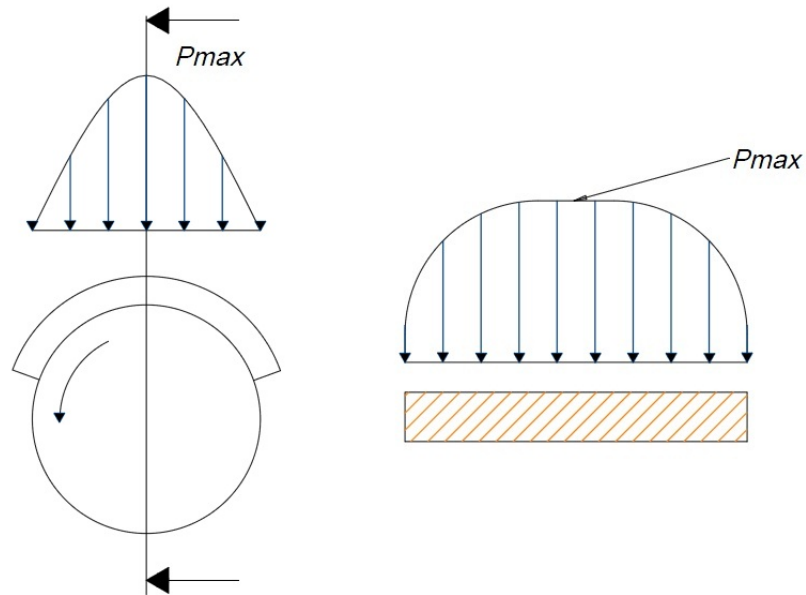


Para llegar a conclusiones más contundentes, Tower finalmente investigó con más detalle las presiones de la película en el cojinete, a todo lo ancho y largo del mismo, y reportó una distribución similar a la de la fig. 10.7, lo que permitió que él llegara a la conclusión de que la distribución de presiones dentro de la película de aceite ocurre de tal manera que la película de aceite ejerce fuerzas de carga. La investigación de Beauchamp permitió considerar por primera vez los cojinetes de película fluida como un sistema dinámico con características de rigidez y generando con esto, la primer medición de presión de la película de aceite.

Los resultados obtenidos por Tower tenían tal regularidad que el matemático, físico e ingeniero irlandés Osborne Reynolds llegó a la conclusión de que debía existir una ley o un modelo definidos que relacionen la fricción, la presión y la velocidad. La teoría matemática actual de la lubricación está basada en el trabajo de Reynolds que siguió los experimentos efectuados por Tower, la ecuación diferencial original, formulada por él, se usó inicialmente para explicar los resultados de Tower. La solución a esta ecuación no ha sido encontrada hasta el día de hoy, pero se han utilizado diferentes métodos numéricos para dar diferentes soluciones aproximadas según diferentes parámetros que se necesiten y también se han llegado a soluciones a partir de condiciones determinadas que linealizan la ecuación permitiendo un mejor manejo matemático.

Reynolds, desarrollando su investigación, imaginó que el lubricante quedaba adherido a ambas superficies y era impulsado por la superficie en movimiento hacia un espacio en forma de cuña, de estrechamiento progresivo y que ocasiona una presión en la película de

Figura 10.7: Distribución de Presión obtenida por Tower



fluido de intensidad suficiente para soportar la carga del cojinete [40].

Una de las más importantes hipótesis que reducen el problema se basó en la apreciación de Reynolds de que las películas de fluido eran tan delgadas, en comparación con el radio del cojinete, que su curvatura podía despreciarse, esto le permitió sustituir al cojinete parcial curvo, con uno plano llamado cojinete plano de deslizamiento, a partir de esta suposición también surgieron otras como [37]:

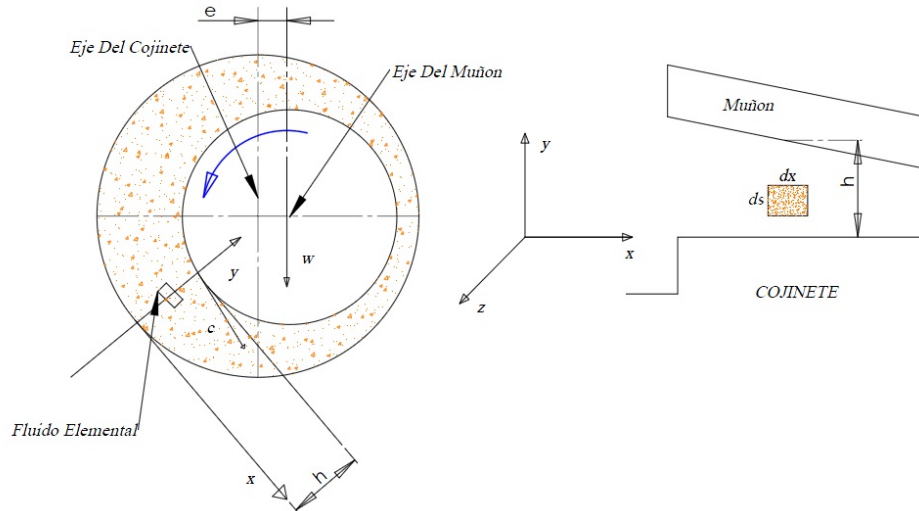
- El lubricante obedece la ley de Newton del movimiento de un fluido viscoso.
- Las fuerzas debidas a la inercia del lubricante son despreciables
- El lubricante es incomprensible
- La viscosidad es constante en toda la película
- La presión no varía en la dirección axial.

La fig 10.8 muestra un muñón soportado por una película de lubricante que gira en el sentido del reloj, de espesor variable h sobre un cojinete parcial que está fijo. Se especifica que el muñón tiene una velocidad superficial constante U y utilizando la suposición de Reynolds de que puede despreciarse la curvatura, en el cojinete fijo se establece un sistema de ejes de referencia xyz . Conociendo lo anterior se puede seguir con otras suposiciones que permiten establecer la ecuación diferencial de Reynolds:

- El cojinete y el muñón se prolongan o extienden indefinidamente en la dirección z . Esto significa que no puede haber flujo de lubricante en dicha dirección.

- La presión de la película es constante en la dirección y . Por tanto, la presión dependerá sólo de la coordenada x .
- La velocidad de una partícula cualquiera del lubricante en la conjunción de la película del lubricante depende sólo de las coordenadas x y y .

Figura 10.8: Muñón soportado por una película de aceite



Teniendo establecidas las condiciones anteriores, ahora, se toma un elemento diferencial de lubricante en el interior de la película (fig.10.8) de dimensiones dx , dy y dz al que se le calculará las fuerzas que actúan en sus caras tal como se muestra en la figura 10.9, en donde existirá fuerzas normales debidas a la presión que actúan en las caras derecha e izquierda, también se tienen fuerzas tangenciales debidas a la viscosidad y a la velocidad del fluido que actúan sobre las cara superior e inferior[40].

Realizando la sumatoria de las fuerzas respecto al eje x , que se presentan en este elemento diferencial, tenemos:

$$\sum F = \left(p + \frac{dp}{dx} dx \right) dydz + \tau dx dz - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) dx dz - p dy dz = 0 \quad (10.3)$$

Esta expresión se reduce a :

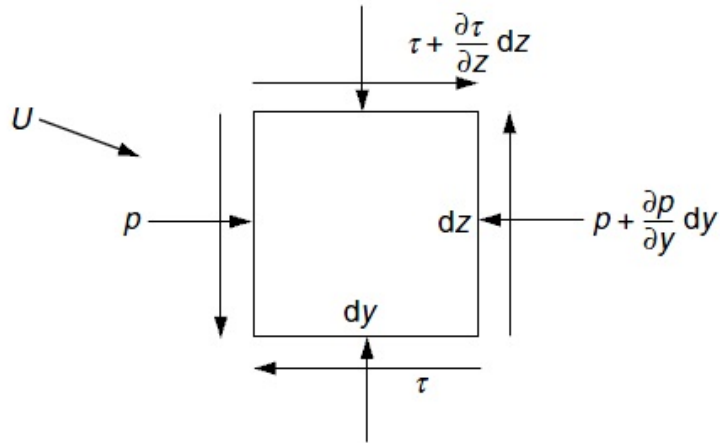
$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (10.4)$$

Por la ecuación de Newton aplicada a la viscosidad tenemos:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (10.5)$$

expresión en la que se emplea la derivada parcial, porque la velocidad u depende tanto de x como de y . Sustituyendo la ecuación 10.5 en la 10.4 se obtiene

Figura 10.9: Fuerzas en las caras de un elemento diferencial



$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (10.6)$$

Manteniendo constante a x ahora se integra dos veces esta expresión con respecto a y . Se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + C_1 \quad (10.7)$$

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (10.8)$$

Las constantes C_1 y C_2 obtenidas de la integración anterior, pueden ser funciones de x , debido al hecho de mantener constante a x . Siguiendo con el desarrollo matemático, ahora se supone que no ocurre deslizamiento alguno entre el lubricante y las superficies confinantes, lo que genera dos grupos de condiciones de frontera para evaluar las constantes C_1 y C_2 , que son:

$$\begin{aligned} y &= 0 & y &= h \\ u &= 0 & u &= -U \end{aligned} \quad (10.9)$$

Obsérvese que, en la segunda condición, h es función de x . Sustituyendo estas condiciones en la ecuación 10.8 y despejando las constantes, se tiene:

$$C_1 = -\frac{U}{h} - \frac{h}{2\mu} \frac{dp}{dx} \quad C_2 = 0 \quad (10.10)$$

Ya con el valor de las anteriores constantes, se obtiene la ecuación de la distribución de la velocidad del lubricante en el seno de la película, en función de la coordenada y y del gradiente de presión $\frac{dp}{dx}$:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) + \frac{U}{h} y \quad (10.11)$$

Esta ecuación indica que la distribución de la velocidad, transversalmente a la película (desde $y = 0$ hasta $y = h$), se obtiene superponiendo una distribución parabólica (primer término) a una distribución lineal (el segundo término). La figura ?? indica la superposición de estos dos términos, para obtener la velocidad en los valores particulares de x y de dp/dx , este último valor, que hace parte del término parabólico, puede ser sumado o restado al término lineal dependiendo del signo del gradiente de la presión, por tanto si la presión es máxima, el gradiente tendrá un valor de cero, $dp/dx = 0$ y la velocidad se convertirá en una relación lineal, como se muestra en la figura 7.1, así:

$$u = -\frac{U}{h} y$$

Continuando con la obtención de la ecuación de Reynolds, ahora se determina el flujo Q como el volumen de lubricante que fluye en la dirección x por unidad de tiempo y usando un ancho igual a la unidad en la dirección z , este flujo del lubricante será determinado a partir de:

$$Q = \int_0^h u dy$$

En esta expresión, reemplazamos el valor de la velocidad u , por el obtenido en la ecuación 10.11, se realiza la integración y se obtiene:

$$Q = \frac{U h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \quad (10.12)$$

Utilizando la hipótesis de que el lubricante es incompresible, el flujo entonces será igual para cualquier sección transversal, por tanto:

$$\frac{dQ}{dx} = 0$$

De la ecuación 10.12 analizada en dx se tiene:

$$\frac{dQ}{dx} = -\frac{U}{2} \frac{dh}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \right) = 0$$

operando se tiene:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{dp}{dx} \right) = -6U \frac{dh}{dx} \quad (10.13)$$

Esta última expresión es una igualdad que muestra la ecuación clásica de Reynolds para flujo unidimensional [42]. Esta expresión desprecia la fugas laterales, es decir, es despreciado el flujo en la dirección z .

De la misma manera como se analizó el eje x , ahora realizaremos el análisis para el elemento diferencial del lubricante en el eje z . Por tanto, si para el eje x , u es la velocidad del fluido en esta dirección, para z , w será la velocidad del fluido en esta dirección, ahora, del equilibrio de fuerzas en este eje tenemos:

$$\sum F = p dx dy - \left(p + \frac{dp}{dz} dz \right) dx dy - \tau dx dz + \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) dx dz = 0$$

Operando en la expresión tenemos:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (10.14)$$

Tal como lo hicimos para el eje x , de la ecuación de Newton para viscosidad:

$$\tau = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \quad (10.15)$$

Sustituyendo la ecuación 10.15 en la 10.16 se obtiene

$$\frac{dp}{dz} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (10.16)$$

Las ecuaciones 10.6 y 10.16 son denominadas como ecuaciones de Navier-Stokes. Integrando dos veces la 10.16. tenemos:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} y + C_3 \quad (10.17)$$

$$w = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dz} y^2 + C_3 y + C_4 \quad (10.18)$$

C_3 y C_4 son funciones únicamente de z , entonces estableciendo condiciones de frontera, las constantes serán:

$$\begin{aligned} y = 0 \quad w = 0 \quad C_4 = 0 \\ y = h \quad w = 0 \quad C_3 = - \left(\frac{h}{2\mu} \right) \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (10.19)$$

Ahora sustituimos en la ecuación 10.18 el valor de las constantes y se obtiene :

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dz} y^2 - \left(\frac{h}{2\mu} \right) \frac{\partial p}{\partial z} y + 0 \\ w &= \left(\frac{1}{2\mu} \right) \frac{\partial p}{\partial z} y (y - h) \end{aligned} \quad (10.20)$$

Con esta última expresión ya se tiene el flujo de lubricante en las direcciones x y z solamente, ya que en el sentido y no existe, obteniéndose así, las velocidades u y w en

el sentido de estas direcciones. Ahora, según la ley de continuidad , el fluido que entra es igual al flujo que sale, así que se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial w}{\partial z} dx dy dz = 0$$

simplificando esta expresión :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

integramos esta a través del espesor h :

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} + \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w dy = 0$$

y por las ecuaciones 10.11 y 10.18 conocemos el u y w respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) - \frac{U}{h} y dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h \left(\frac{1}{2\mu} \right) \frac{\partial p}{\partial z} y (y - h) dy = 0$$

Efectuando las integraciones establecidas y realizando las sustituciones necesarias de esta última expresión, la ecuación, finalmente se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = -6U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (10.21)$$

Para esta última expresión matemática, no existe una solución general, se han obtenido algunas aproximaciones utilizando analogías eléctricas, métodos matemáticos de suma, procedimientos de relajación y métodos numéricos y gráficos, o también simplificando algunos términos. Una de la soluciones representativas fue la encontrada por Sommerfeld [66], que puede expresarse de la siguiente forma:

$$\frac{r}{c} f - \phi \left[\left(\frac{r}{c} \right)^2 \frac{\mu N}{P} \right] \quad (10.22)$$

Donde ϕ indica una relación funcional. Sommerfeld encontró las funciones correspondientes a cojinetes medios y a cojinetes completos, considerando que no ocurren fugas ni escurrimientos laterales.

Para poder resolver la ecuación de Reynolds asumiendo parámetros del comportamiento real del sistema, se hace necesario el uso de métodos numéricos y métodos de relajación para acelerar este proceso que serán profundizadas en secciones posteriores.

BIBLIOGRAFÍA

- [36] E.A. AVALLONE, T. BAUMEITER, and A.M. SADEGH. *Marks' standard handbook for mechanical engineers*. McGraw-Hill New York etc., 2007.
- [37] EBOOKS CORPOTARION. *Bearing design in machinery: engineering tribology and lubrication*, volume 147. CRC Press, 2002.
- [38] V. DOBROVOLSKI, K. ZABLONSKI, S. MAK, and A. RADCHIK. *Elementos de máquinas*. 1991.
- [39] A.S. HALL, D.L. ARANGO, and G.S. BOLIVAR. *Diseño de máquinas*. McGraw-Hill, 1971.
- [40] T.A. HARRIS and M.N. KOTZALAS. *Rolling bearing analysis*. Wiley New York, 2001.
- [41] R.L. NORTON, G.S. GARCÍA, and C.M.C. CASTELLO. *Diseño de máquinas*. Prentice Hall, 1999.
- [42] J.E. SHILEY, C.R. MISCHKE, F.P. BOCANEGRA, and C.O. CORREA. *Diseño en ingeniería mecánica*. McGraw-Hill México;, 1990.

Capítulo 11

MATERIALES PARA COJINETES

Para el diseñador, la selección del material del cojinete es un elemento muy importante en el desarrollo de las etapas de diseño, aunque durante la aplicación surgen diversas dudas conocidas. Se debe tener presente que el material del cojinete es sólo un aspecto de un diseño integrado, inclusive, no siempre el mejor y más caro es el material adecuado para el desempeño eficiente del cojinete. La selección depende de la aplicación, que incluye el tipo de cojinete, velocidad, carga, tipo de lubricación, y condiciones de operación, tales como temperatura y máxima presión de contacto; todo esto se traduce en fuerzas transmitidas a los elementos sostenidos por el cojinete.

Aunque los cojinetes hidrodinámicos son diseñados para operar con una película completa de fluido, durante el arranque y la parada existe contacto de material entre las superficies. Es deseable que este contacto genere la menor cantidad de fallas entre superficies y que la película de lubricante se consiga rápidamente.

En general, un cojinete metálico (plástico o de materiales compuestos) debería tener un balance de las propiedades mecánicas. Por un lado, la matriz de metal debe ser blanda, con suficiente plasticidad para compensar los errores de maquinado y alineamiento así como también permitir que las partículas abrasivas contenidas en el lubricante se incrusten en el cojinete. De otro lado, el metal debe tener suficiente dureza y resistencia a la compresión, incluso a altas temperaturas de operación, para evitar cualquier arrastre de material por el flujo presurizado, así como tener una adecuada resistencia a la fatiga y al impacto. *La selección es un equilibrio entre estos requerimientos contradictorios.* La manufactura del cojinete, requiere fácil soldadura y fundición. Además, los cojinetes metálicos se deben adherir a la camisa de acero soportando la fatiga sin separarse de la carcasa [44].

A continuación se presentan algunos de las características de desempeño más importantes en la selección de materiales para cojinetes.

11.1. CARACTERÍSTICAS DE LOS MATERIALES PARA COJINETES

11.1.1. Resistencia a la picadura y agarrotamiento

La compatibilidad entre dos materiales se refiere a su habilidad para prevenir los daños por picadura y agarrotamiento bajo condiciones de fricción sin una adecuada lubricación. Dos materiales compatibles demuestran un bajo coeficiente de fricción bajo lubricación seca o condiciones límites. Por ejemplo, dos metales similares no son compatibles porque tienden a tener altos coeficientes de fricción. La temperatura que se alcanza con la incompatibilidad ocasiona la picadura y el agarrotamiento; una combinación más adecuada podría ser entre bronce y acero.

11.1.2. Incrustabilidad

Es una característica importante de los materiales blandos, donde pequeñas partículas duras se incrustan en el cojinete y así se minimiza la abrasión. La abrasión se presenta cuando hay cargas elevadas y bajas velocidades; el sobrecalentamiento del cojinete aumenta esta condición dañina.

11.1.3. Resistencia a la corrosión

Los materiales resistentes a la corrosión se deben utilizar en todas las aplicaciones donde estén presentes los agentes corrosivos del lubricante¹ o el ambiente. La presencia de corrosivos puede desarrollar fatiga por corrosión.

11.1.4. Resistencia a la fatiga

Es muy difícil especificar el efecto que origina la falla por fatiga, pues este fenómeno se ve afectado por muchos parámetros, tales como, la frecuencia de oscilación de la carga, temperatura del metal, diseño de la camisa del cojinete y la curvatura del muñón, entre otros. La falla comienza con el crecimiento de las microgrietas en la superficie del cojinete; la temperatura y el lubricante presurizado aceleran este proceso. Es por eso que se requiere materiales con alta resistencia a la fatiga.

11.1.5. Conformabilidad

Es la capacidad para deformarse y compensar las inexactitudes en las dimensiones del cojinete y su ensamble relativo con el muñón. Un ejemplo de esto es la habilidad del material para ajustarse al desalineamiento entre el cojinete y el muñón. Si dicha propiedad corresponde a una deformación plástica considerable, se denomina *deformabilidad*, e indica que el material cede sin causar falla alguna.

¹Los aceites pueden contener ácidos o se forman en el lubricante por la oxidación, que se acelera por el sobrecalentamiento, como ocurre en el motores de combustión interna.

11.1.6. Coeficiente de fricción

El coeficiente de fricción es una función de muchos parámetros, tales como, lubricación, temperatura y velocidad. En la mayoría de las aplicaciones se requiere un bajo coeficiente de fricción y se relaciona normalmente con la compatibilidad.

11.1.7. Porosidad

Es la capacidad del material para contener un lubricante fluido o sólido. Los cojinetes porosos ofrecen ventajas significativas en la reducción de costos de mantenimiento para aplicaciones de lubricación límite, donde se requiere solo una pequeña cantidad de lubricante.

11.1.8. Conductividad térmica

Para la mayoría de aplicaciones, una relativa alta conducción de calor mejora el desempeño del cojinete. La energía de fricción es disipada en el cojinete como calor, y una rápida transferencia reduce la temperatura de operación del conjunto.

11.1.9. Expansión térmica

El coeficiente de expansión térmica es una propiedad muy importante en el diseño de cojinetes. Se desea el equilibrio entre una deformación considerable y una de menor magnitud. Si la deformación térmica es uniforme y grande se evita el riesgo de agarrotamiento térmico. Sin embargo, si es demasiado grande puede afectar la holgura de funcionamiento del cojinete.

11.1.10. Resistencia a la compresión

Los cojinetes deben ser capaces de soportar carga a la temperatura de operación. Esta característica entra en conflicto con la conformabilidad y la incrustabilidad. Usualmente un material con alta resistencia a la compresión también tiene alta dureza, caso opuesto a las propiedades de un material blando.

11.1.11. Costo

Un material para cojinetes debe ser costo efectivo en cualquier aplicación particular. Para reducir los costos de un cojinete se deben tener presente los materiales, el proceso de fabricación y la respectiva aplicación.

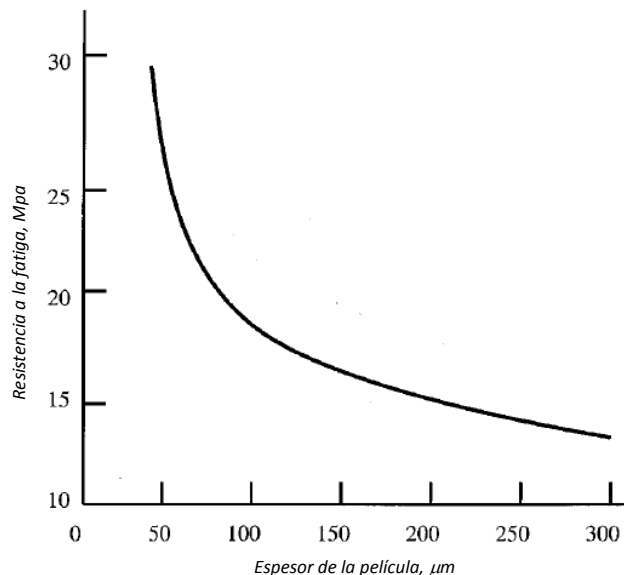
11.2. MATERIALES METÁLICOS PARA COJINETES

Los materiales pueden ser metálicos o no metálicos. Los metálicos incluyen varios tipos de metales blancos, bronce, aleaciones de aluminio, y materiales porosos. Los materiales no metálicos para cojinetes incluyen plásticos, caucho, grafito, cerámicos, carburos cementados, óxidos metálicos, vidrio, y compuestos como fibra de vidrio y fibras de carbono reforzado.

11.2.1. Metal blanco: Aleaciones con base de estaño y plomo (Babbitts)

Las aleaciones con base de estaño y/o de plomo se conocen como *babbitts*. Se funden en superficies de cojinetes como acero, aluminio, bronce, o hierro fundido. El metal blanco soporta deformaciones plásticas, lo que resulta en una excelente *conformabilidad e inrustabilidad*. El límite para el uso de metales blancos es su relativa baja temperatura de soldadura. También, hay límites para la magnitud de la compresión estática ($7[Mpa]$) y un límite mucho menor siempre que se someta a fatiga bajo cargas oscilantes. La figura 11.1 muestra la resistencia a la fatiga del metal blanco respecto de el espesor de la película; como se ve, la resistencia a la fatiga incrementa con la disminución en el espesor en la capa de metal blanco. En este sentido, se deberá buscar el equilibrio entre la capacidad de carga

Figura 11.1: Resistencia a la fatiga como una función del espesor de metal blanco. En general el diseño de estos revestimientos depende de los picos de carga y de la temperatura de fundición del material.



Fuente A. Harnoy. Bearing design in machinery: engineering tribology and lubrication. CRC, 2003.

y la oportunidad de compensar deformaciones y materiales nocivos.

Una ventaja de los metales blancos es la buena adhesión a la carcasa de las camisas, tales como bronce o acero. También es bueno contra el agarrotamiento durante el arran-

que o la parada del rotor. En resumidas cuentas, el metal blanco ha sido considerado el mejor material para cojinetes, y la calidad de otros materiales puede ser determinada con respecto a éste [44].

Por otro lado, es posible realizar aleaciones que mejoren las propiedades antifricción de los metales (una configuración habitual se ve en la figura 11.3); entre las más importantes se pueden mencionar:

Antifricciones al plomo

Son aleaciones de *plomo y antimonio* (Pb-Sb). El plomo ($3 [HB]^2$) y el antimonio ($30 [HB]$) son blandos, por lo que se utiliza la aleación eutéctica, que es algo más dura y tenaz a la vez que posee un punto de fusión bajo. De todos modos a esta aleación debemos agregarle partículas duras, ya que ella sola se desgastaría con rapidez. Para ello se agregan pequeños porcentajes de Cu y de Sn que forman los compuestos intersticiales CuSn y SnSb muy duros. El principal inconveniente de estas aleaciones es su alto límite elástico y punto de fusión, aunque se utilizan bastante.

Antifricciones al estaño

Contienen como metal base el estaño y se les agrega antimonio en porcentajes no superiores al 15%, de forma que se forma una aleación que tiene de fase matriz una solución sólida de estaño y antimonio, y como fase dura y dispersa el compuesto SnSb. También se les suele agregar algo de Cu para que se formen cristales de CuSn.

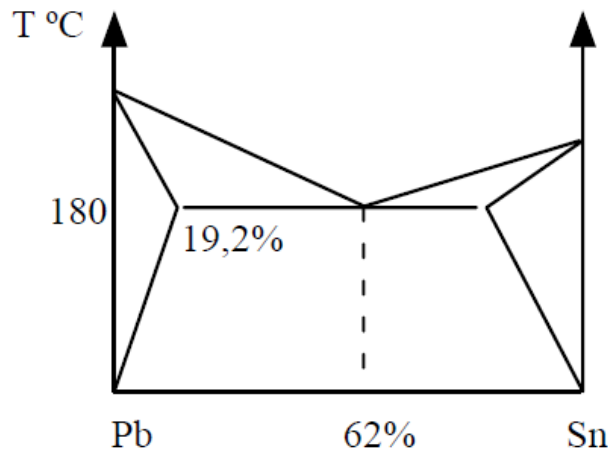
Las babbitt con base estaño son de gran calidad, con un punto de fusión, sobre los 250°C, ligeramente inferiores a las de base plomo. Además tienen una muy buena adherencia con el metal base del cojinete. Se las utiliza mucho en motores Diesel.

Antifricciones al plomo-estaño

Tienen como fase matriz aleaciones próximas al eutéctico Pb-62%Sn y bajo punto de fusión, como puede observarse en el diagrama, por lo que requieren bastante lubricación. Para conseguir las partículas duras se les agrega Cu y Sb.

²Dureza Brinell: se denomina a la medición de la dureza de un material mediante el método de indentación, midiendo la penetración de un objeto en el material a estudiar.

Figura 11.2: Diagrama de equilibrio Pb-Sn



Fuente *Ídem*

Metales blancos: Base de estaño frente a la base de plomo

La base de estaño respecto de su contraparte de metal blanco, incluye una conductividad térmica más alta, mayor resistencia a la compresión, resistencia a la fatiga y cargas de impacto más alta, y mayor resistencia a la corrosión. Por otro lado, los metales blancos con base de plomo, exhiben un coeficiente de fricción más bajo, mejor vinculación con la carcasa, y mejores propiedades de fundición. Sin embargo, el uso más extendido de metales con base de plomo, se atribuye en mayoría de los casos a la reducción de costos.

11.2.2. Aleaciones con base de cobre

Estas aleaciones contienen de 28% a 40% de plomo. Se usan principalmente en aplicaciones automotrices y en la industria de la aviación. Tienen *mayor capacidad* de carga, resistencia a la fatiga y temperatura de operación que los metales blancos. El plomo en la aleación, mejora las propiedades contra la corrosión y el agarrotamiento; sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones también se vincula con estaño e indio.

11.2.3. Bronce

Los bronce más utilizados para cojinetes son los Cu-Sn y los Cu-Pb, existen también Cu-Pb-Sn. En los bronce al estaño la fase blanda es la solución sólida α y la fase dura el eutéctico α - δ , por lo que tienen contenidos entre el 20 y 30% de Sn. Los bronce al Pb contienen de este elemento sobre un 20-30% que actúa de lubricante. Los bronce tienen gran resistencia mecánica y buen coeficiente de rozamiento, se utilizan para trabajos duros.

Todos los bronce pueden ser aplicados como materiales para cojinetes, pero sus propiedades generalmente son mejoradas con aleaciones de plomo. Este mineral mejora el

desempeño del cojinete pues forma bases para los cristales duros. Sin embargo, el plomo tiene un inconveniente en la manufactura, debido a que no se mantiene fácilmente en la solución y su aleación requiere una fundición controlada.

Bronces con alrededor de 30% de plomo se conocen como *bronces plásticos*. En ellos el plomo mejora el coeficiente de fricción de cojinete, pero reduce su resistencia y dureza. Estos bronce tienen una resistencia más alta que los metales blancos y se usan en aplicaciones pesadas.

11.2.4. Fundición de hierro

En la mayoría de las aplicaciones, la relativamente alta dureza de la fundición de hierro lo hace indeseable como un material para cojinetes; sin embargo, las características más importantes de este material son un bajo coeficiente de fricción, alta resistencia al agrietamiento, alta resistencia mecánica, buena vinculación con la carcasa y bajo costo.

11.2.5. Aleaciones de aluminio

Las aleaciones de aluminio tienen dos ventajas importantes. La mayor ventaja es su alta conductividad térmica ($236[W/m^{\circ}C]$). Ésta propiedad garantiza una menor temperatura de operación en la superficie del cojinete. La segunda ventaja es su resistencia a la compresión ($34[Mpa]$ o $5000[psi]$). Las aleaciones de aluminio se usan ampliamente como material de refuerzo con una superposición de metal blanco.

Las aleaciones de aluminio se complementan con otros elementos como cadmio, níquel, estaño, cobre y silicio para mejorar las propiedades de los cojinetes sometidos a alta carga y alta velocidad de operación. La adición de un 1% de cobre incrementa la dureza y mejora la calidad física. El límite de composición de cobre es de 3%.

11.2.6. Plata

La plata se únicamente en aplicaciones donde es estrictamente necesario, debido a su alto costo. Un ejemplo de una aplicación importante es el cojinete de la biela en los motores de aviación. La mayor ventaja de la plata es su alta conductividad térmica y excelente resistencia a la fatiga. Para mejorar la compatibilidad e incrustabilidad se realizan aleaciones con plomo y plomo - indio.

11.2.7. Cojinetes de metales porosos

Los cojinetes de metales porosos, tales como el bronce sintetizado, contienen lubricantes sólidos o fluidos. Una capa muy delgada de aceite o de lubricante sólido migra a través de intersticios de la superficie del cojinete. Estos materiales se utilizan donde la lubricación es límite o hay una pequeña cantidad de lubricante.

11.3. MATERIALES NO METÁLICOS PARA COJINETES

Los materiales no metálicos son usados ampliamente en cojinetes pues ellos ofrecen una variedad de propiedades requeridas en un rango amplio de aplicaciones. Generalmente se utilizan en prácticas donde se requiere auto - lubricación, bajo costo, resistencia química y se mantiene un ambiente a temperatura controlada (estos materiales tienen baja conductividad térmica respecto de los metales). Los cojinetes de materiales no metálicos se dividen en los siguientes grupos:

- Plásticos: PTFE (Teflón), nailon, fenoles, fibra reforzadas de plástico, etc.
- Cerámicos.
- Grafito.
- Caucho.
- Otros materiales diversos, como madera y vidrio.

Se mencionarán algunas de las propiedades más relevantes pues el interés, está en enfocar la temática a la lubricación hidrodinámica de cojinetes. Para consultar con mayor profundidad Harnoy y Barwell [44, 43] son una fuente introductoria muy completa. En general para la aplicación de nuevos materiales, es indispensable el aporte de los fabricantes.

11.3.1. Materiales plásticos para cojinetes

Los cojinetes plásticos, se utilizan en aplicaciones con baja carga. Se desean principalmente por su bajo costo de fabricación y mantenimiento. Estos pueden ser usados con o sin lubricación líquida. Si es posible, se aplica la lubricación líquida pues mejora las condiciones de enfriamiento del sistema, de lo contrario, se incrusta un material antifricción para mejorar la lubricidad del plástico.

Sobre las últimas décadas, ha incrementado el requerimiento de materiales de bajo costo por la producción en masa de maquinaria y aplicaciones. El resultado ha sido, el dramático aumento en el mejoramiento de las propiedades generando nuevos materiales. Actualmente, los plásticos son más ligeros y menos costosos que los metales, tienen buena dureza superficial, pueden ser producidos en masa (moldeado por inyección), y están disponibles en una gran variedad de mangas de cojinetes. También se han reforzado los plásticos compuestos (con fibra de vidrio o de carbono), en diferentes aplicaciones con el objeto de mejorar la resistencia al desgaste, al arrastre de material, y la conductividad térmica.

Los plásticos se dividen en dos grandes grupos, **termoplásticos** y **termoestables**. Las fuerzas intermoleculares de los materiales termoplásticos se debilitan cuando incrementa la temperatura, deformándolos y dándole apariencia de cera. Por otro lado, el término termoestable, significa “estable al calor”. En este caso el proceso de fabricación no consiste en inyección de material sino en el curado por calor.

11.3.1.1. Ventajas de los cojinetes plásticos

- *Bajo costo:* Los materiales plásticos son mucho más económicos que los metales y pueden ser producidos en masa. Otra ventaja es el reducido costo de mantenimiento principalmente en cojinetes autolubricados.
- *Lubricidad (auto-lubricación):* Los plásticos pueden operar bien con poco o ningún lubricante líquido, particularmente cuando los lubricantes son fundidos con la base de plástico. Las industrias farmacéutica y de alimentos son las aplicaciones principales de los cojinetes plásticos.
- *Conformabilidad:* Los plásticos son menos rígidos que los metales, y por lo tanto tienen una conformabilidad superior. Esta habilidad compensa la inexactitud en el ensamble muñón - cojinete.
- *Absorción de vibraciones:* La mayoría de los plásticos pueden absorber cargas de impacto relativamente altas sin una deformación permanente.
- *Incrustabilidad:* Partículas contaminantes, se incrustan en la superficie del cojinete plástico, disminuyendo la picadura.
- *Baja densidad:* Los materiales con bajo peso reducen el peso de la máquina, indispensable en aplicaciones automotrices y aeronáuticas.
- *Resistencia a la corrosión:* La mayoría de los materiales plásticos son inmunes a la acción de sustancias corrosivas.
- *Baja razón de desgaste:* Los plásticos reforzados, tiene una excepcional capacidad antidesgaste en los cojinetes por su compatibilidad con los ejes de acero y la incrustabilidad.
- *Diseño flexible:* Las partes de cojinetes se pueden moldear en amplia variedad de formas, colores, estampados que caracterizan cada aplicación.
- *Aislamiento eléctrico:* Los plásticos tienen menor conductividad eléctrica en comparación con los metales. En algunas ocasiones las descargas eléctricas pueden dañar la superficie del cojinete y del muñón.
- *Amplio rango de temperatura:* Los plásticos pueden operar sin lubricantes, a bajas y altas temperaturas que prohíben el uso de aceites o grasas.

11.3.1.2. Desventajas de los cojinetes plásticos

La mayor desventaja es la baja conductividad térmica, que puede resultar en altas temperaturas en la superficie del cojinete. La combinación de baja conductividad térmica (en comparación con los metales) y bajo punto de fundición *restringe los cojinetes plásticos a aplicaciones de baja carga y baja velocidad.*

Los plásticos también tienen un alto coeficiente de expansión térmica (5 a 10 veces más grande que los metales), que afecta la geometría del cojinete. Para controlar la deformación por temperatura se adicionan materiales estructurales como la fibra de vidrio.

Otra desventaja general de los plásticos es arrastre de material a cargas elevadas, debido a su punto de fluencia relativamente bajo.

11.3.2. Materiales cerámicos

Actualmente ha crecido el interés por el uso de materiales cerámicos en cojinetes pues operan a temperaturas elevadas, incluso mucho más altas que los límites establecidos para los cojinetes metálicos. Las cualidades más importantes de los cerámicos son su alta resistencia y dureza, que se mantienen a altas temperaturas.

Durante las dos últimas décadas, ha sido significativo el progreso en el desarrollo de *cerámicos avanzados para ingeniería*. Las principales características los posicionan como potenciales materiales en el diseño de cojinetes. Son mucho más ligeros que el acero, y al mismo tiempo tienen el doble de su dureza. La temperatura de operación de los materiales cerámicos para ingeniería está varias veces por encima de la temperatura de operación del acero. Requieren mínima lubricación, son químicamente inertes y no conducen la electricidad. Los cerámicos no son magnéticos y tienen un coeficiente de conductividad térmica más bajo que los metales.

Sin embargo, los cerámicos también tienen algunas desventajas. Los cerámicos son mucho más costosos que sus contrapartes metálicas; como son tan duros, se requiere herramientas especiales con punta de diamante para conformarlos. También son frágiles y no se pueden preparar plásticamente para compensar la deformación de las uniones, tiene baja resistencia a los esfuerzos de tensión. Cuando se utiliza incorporado a materiales metálicos la diferencia entre coeficientes de expansión térmica evidencia problemas de concordancia en la geometría.

Los cerámicos para ingeniería en uso, o en etapa de desarrollo, son el nitruro de silicio, carburo de silicio, óxido de circonio, óxido de alúmina, y rubí zafiro [44].

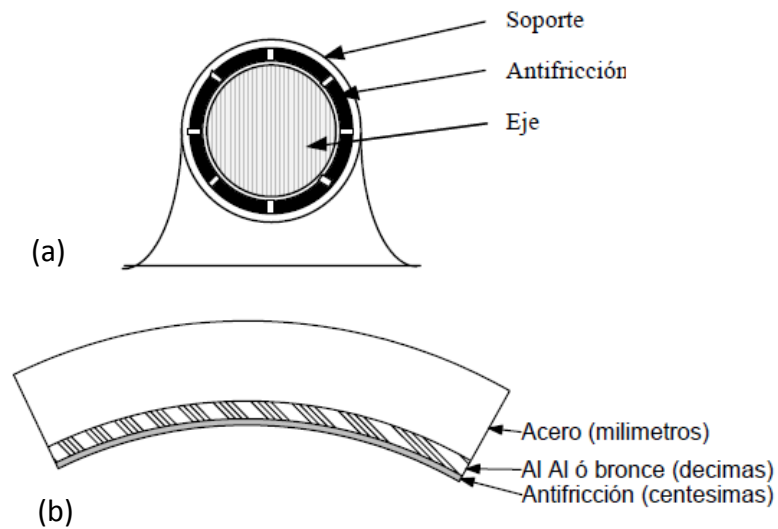
11.4. ¿CÓMO REDUCIR LA FRICCIÓN EN LOS COJINETES METÁLICOS?

La lubricación hidrodinámica de cojinetes requiere de materiales cuya superficie favorezca la durabilidad y un adecuado desempeño de sus funciones, principalmente en la etapa de arranque y parada del eje (muñón). Un método novedoso en la fabricación de cojinetes es la *pulvimetalurgia*, que ha demostrado un avance importante en la generación de cojinetes con bajo coeficiente de fricción. *Se define como el arte de elaborar productos comerciales a partir de polvos metálicos*. En este proceso no siempre se utiliza el calor, pero cuando se utiliza este debe mantenerse debajo de la temperatura de fusión de los metales a trabajar. Cuando se aplica calor en el proceso subsecuente de la metalurgia de los polvos se le conoce como *sinterizado*, este proceso genera la unión de partículas finas con lo que

se mejora la resistencia de los productos y otras de sus propiedades. Las piezas metálicas producto de los procesos de la metalurgia de los polvos son producto de la mezcla de diversos polvos de metales que se *complementan en sus características*. Así se pueden obtener metales con cobalto, tungsteno o grafito según para qué va a ser utilizado el material que se fabrica. El metal en forma de polvo es más caro que en forma sólida y el proceso es sólo recomendable para la producción en masa de los productos, en general el costo de producción de piezas producto de polvo metálico es más alto que el de la fundición, sin embargo es justificable y rentable por las propiedades excepcionales que se obtienen con este procedimiento.

La pulvimetalurgia favorece la generación de materiales para cojinetes porosos de alta calidad. En su trabajo *Nasamov et al.* [46] desarrolla un material a partir de polvo de hierro, arrabio³ y latón principalmente, que en una proporción específica y utilizando el proceso de sinterizado mejora el coeficiente de fricción del producto y es posible expresarlo en términos del desgaste por unidad de recorrido relativo de superficies. Es importante resaltar que el resultado de la experimentación, está validado por la normativa existente y es un gran aporte a la reutilización efectiva de residuos metálicos y no metálicos.

Figura 11.3: Ejemplo de un cojinete antifricción. (a). Montaje del cojinete. (b) Esquema detallado de cojinete antifricción



Fuente *Ídem*

³Se denomina arrabio al material fundido que se obtiene en el alto horno mediante reducción del mineral de hierro. Se utiliza como materia prima en la obtención del acero en los altos hornos

11.5. ¿CÓMO REDUCIR LA FRICCIÓN EN LOS COJINETES NO METÁLICOS?

Los cojinetes de materiales no metálicos tienen propiedades que complementan el funcionamiento de los cojinetes tradicionales y en ciertas aplicaciones estos materiales son indispensables para el óptimo desempeño y trabajo económico. Una característica casi que generalizada en los cojinetes no metálicos es la antifricción al contacto; un ejemplo del avance en el tema es el **MARITEX**.

MARITEX es un material compuesto antifricción concebido para fabricar bujes y cojinetes planos de alto rendimiento y mayor durabilidad que los materiales convencionales aplicado a la industria naval, ferroviaria, del petróleo, minera, automoción y generación de energía. Es un compuesto sintético obtenido bajo procedimientos de alta presión y temperatura a base de:

- Resinas fenólicas.
- Lubricantes sólidos.
- Fibras de refuerzo altamente entrelazadas (Son quienes dan la resistencia y resiliencia al material).

Se caracteriza por:

- Duración del buje hasta 10 veces superior al bronce.
- Reduce el desgaste del eje en un 90%.
- Alta estabilidad dimensional en seco o sumergido indefinidamente (no se hincha).
- Alta tolerancia a la suciedad y abrasivos.
- Nula conductividad eléctrica.
- Alta capacidad de carga.
- Bajo índice de rozamiento.
- Baja conductividad térmica ($0,3 [W / mK]$), máxima temperatura de operación $120 [^{\circ}C]$.
- Bajo efecto slip-stick.
- Fácil mecanización.
- Alta tolerancia a los choques.

BIBLIOGRAFÍA

- [43] F.T. BARWELL. *Lubrication of bearings*. Butterworths Scientific Publications, 1956.
- [44] A. HARNOY. *Bearing design in machinery: engineering tribology and lubrication*. CRC, 2003. ISBN 0824707036.
- [45] A. HARNOY. *Bearing design in machinery: engineering tribology and lubrication*. CRC, 2003, Cap 2, p. 6. ISBN 0824707036.
- [46] SN NASAMOV, N. KRIVIJ, HW GUDENAU, A. BABICH, G. SÁNCHEZ, F. PREGO, C. SÁNCHEZ, et al. Obtención de materiales antifricción hierro-arrabio-latón utilizando residuos de virutas de arrabio. 2003.

Capítulo 12

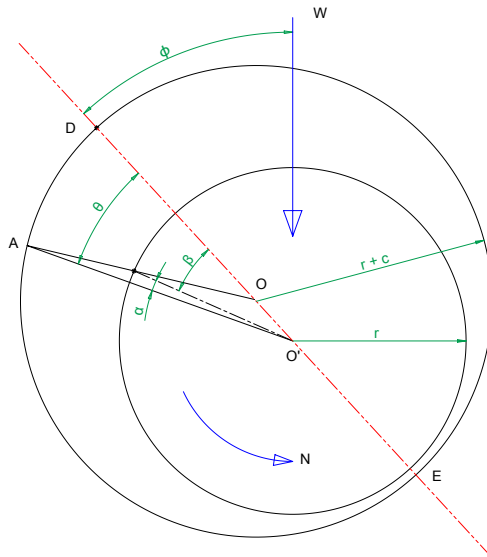
DISTRIBUCIÓN DE PRESIÓN

En busca de dar solución a la ecuación de Reynolds, en la literatura se analizan dos casos en los cuales se pueden hacer suposiciones para linealizarla. Estas suposiciones simplifican en gran medida la ecuación que rige la lubricación hidrodinámica haciendo posible una solución analítica, sin embargo estas linealizaciones hacen que los resultados tengan un error inherente a las :

12.1. COJINETE LARGO

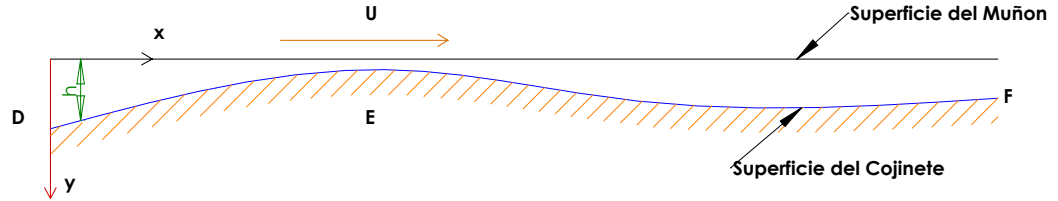
Un cojinete largo consiste de un eje, que es completamente rodeado por un cojinete con un diámetro ligeramente mayor al eje. El muñón gira mientras que el cojinete permanece fijo, restringiendo el movimiento lateral del eje. El aceite se introduce en un punto conveniente en la superficie del cojinete, es llevado en una dirección circunferencial por el muñón, y eventualmente deja al cojinete en esta posición. Las características de funcionamiento son similares a las mencionadas por el cojinete de deslizamiento.

Figura 12.1: Cojinete completo



Bajo carga el muñón se mueve en una posición excéntrica con respecto al cojinete, a partir de una convergencia de la película de aceite que esta mas allá de la mitad de la superficie de apoyo del cojinete, y una divergencia de la película de aceite en la otra mitad. La película de aceite del muñón-cojinete en cualquier practica, es tan delgada con respecto al radio del cojinete que la película puede ser abierta e ignorada en la curvatura del cojinete. La película de aceite de la figura 12.1, es mostrada en la figura 12.2 en condición de abertura, los puntos D y E, son puntos correspondientes en las dos figuras. El cojinete en la figura 12.2, desde el punto D hasta el punto E, tiene la apariencia de cojinete deslizante previamente discutido, excepto que la superficie de la almohadilla no sea plana. Aplicamos la ecuación de Reynolds al cojinete completo, es necesario expresar el espesor de película h , como una función de x .

Figura 12.2: Desarrollo de la superficie del muñón y el cojinete



Referente a la figura 12.1, el radio del muñón es r , y el radio del cojinete es $(r + c)$, c siendo la holgura radial. El muñón es excéntrico de OO' , y designado por la letra e . El espesor de película tiene un valor particular θ que es mostrado.

$$h = AB = r + c - OB \quad (12.1)$$

pero

$$\frac{OB}{\sin \beta} = \frac{r}{\sin \theta} \quad (12.2)$$

y

$$\beta = \theta - \alpha \quad (12.3)$$

y

$$\frac{e}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin \theta} \quad (12.4)$$

Por lo tanto

$$\beta = \theta - \sin^{-1} \left(\frac{e}{r} \sin \theta \right) \quad (12.5)$$

de las ecuaciones 12.2 y 12.5

$$OB = \frac{r}{\sin \theta} \sin \left[\theta - \sin^{-1} \left(\frac{e}{r} \sin \theta \right) \right] \quad (12.6)$$

$$= \sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 \theta} - e \sin \theta \quad (12.7)$$

de la ecuación 12.1

$$h = c + e \sin \theta + r - \sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 \theta} \quad (12.8)$$

siendo r aproximadamente igual a $\sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 \theta}$

$$h = c + e \cos \theta \quad (12.9)$$

Es muy importante y conveniente introducir la cantidad adimensional (e/c), que generalmente se llama relación de excentricidad o posición del cojinete. Sera designado por el símbolo n . La ecuación anterior se puede escribir

$$h = c(1 + n \cos \theta) \quad (12.10)$$

12.1.1. DISTRIBUCIÓN DE PRESIÓN DE UN COJINETE

La ecuación de Reynolds puede ser utilizada ahora para determinar la distribución de presión en la película de aceite. Dejando $dx = r d\theta$ de la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (12.11)$$

da

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (12.12)$$

Integrando con respecto a θ y sustituyendo h de la ecuación 12.10.

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{6\mu U r}{c^2} \left[\frac{1}{(1 + n \cos \theta)^2} + \frac{k}{c(1 + n \cos \theta)} \right] \quad (12.13)$$

donde k es una constante de integración.

Esta ecuación no tiene solución fácil en su forma estándar. Con la ecuación de Reynolds se obtiene una solución de la forma de las series de Fourier, que tiene convergencia solo para los valores de excentricidad hasta la mitad de la holgura. Esto dejó la parte mas interesante sin resolver (para los cojinetes cargados). Sommerfeld fue capaz de resolver la ecuación 12.13, haciendo la siguiente sustitución:

por

$$\frac{1 + n^2}{1 - n \cos \alpha}$$

$$1 + n \cos \theta$$

y

$$\frac{\sqrt{1 - n^2}}{1 - n \cos \alpha} d\alpha$$

por

$$d\theta$$

sustituyendo en la ecuación 12.13,

$$\int_{p_0}^p dp = \frac{6\mu U r}{c^2} \left[\frac{1}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\alpha (1-n \cos \alpha) d\alpha + \frac{k}{c(1-n^2)^{\frac{5}{2}}} \int_0^\alpha (1-n \cos \alpha)^2 d\alpha \right] \quad (12.14)$$

Donde p_0 es la presión cuando θ , o $\alpha = 0$. Integrando y evaluando la constante k , no va hacer la misma presión p cuando θ bien sea, 0 o 2π ,

$$p - p_0 = \frac{6\mu U r}{c^2} \left[\frac{n(2+n \cos \theta) \sin \theta}{(2+n^2)(1+n \cos \theta)^2} \right] \quad (12.15)$$

La distribución de presión del cojinete completo se encontrará en los siguientes pasos para ilustrar el uso de la ecuación 12.15

Diámetro del Cojinete, $2r$	2 in
Longitud del Cojinete, L	2 in
Velocidad, N	2000 rpm
Juego Radial, c	$0,001 \text{ in}$
Viscosidad a la Temperatura de Operación, μ	$1,2 \times 10^{-6} \text{ reyn}$
Presión en el Aceite de Entrada, p_i	30 lb/in^2
Ubicación del agujero de Aceite, θ_i	270°
Excentricidad, e	$0,0008 \text{ in}$

Cuadro 12.1: Datos de demostración

En primer lugar es necesario encontrar el valor de p_0 , (el valor de p , cuando $\theta = 0$). Esto se puede hacer dejando $p = 30$, $\theta = 270$, y resolviendo la ecuación 12.15, para p_0 .

$$30 - p_0 = \left\{ \frac{6(1,2 \times 10^{-6}) \left[\left(\frac{2000}{60} \right) (2\pi) \right] (1)}{(0,001)^2} \right\} \left[\frac{0,8(2 + 0,8 \cos 270) \sin 270}{(2 + 0,64)(1 + 0,8 \cos 270)^2} \right]$$

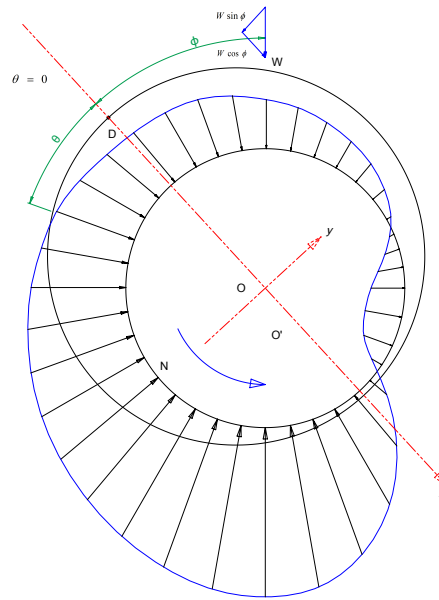
o

$$p_0 = 944 \text{ lb/in}^2$$

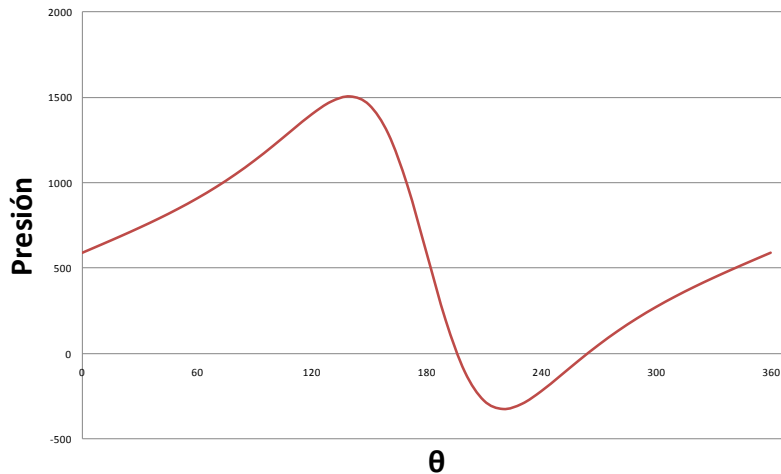
El valor de p en cualquier valor de θ se puede encontrar a partir de la ecuación.

$$p - (944) = \left\{ \frac{6(1,2 \times 10^{-6}) \left[\left(\frac{2000}{60} \right) (2\pi) \right] (1)}{(0,001)^2} \right\} \left[\frac{0,8(2 + 0,8 \cos \theta) \sin \theta}{(2 + 0,64)(1 + 0,8 \cos \theta)^2} \right]$$

Figura 12.3: Distribución de presión alrededor de un cojinete largo



(a) Distribución de presión en forma polar



(b) Distribución de presión superficie extendida

El resultado de este calculo da la distribución de presión que se muestra en la figura 12.3 en forma polar.

La presión se va incrementando gradualmente desde la entrada del aceite que lleva una presión de 30 lb/in^2 , cuando $\theta = 270^\circ$, hasta 944 lb/in^2 , cuando $\theta = 0^\circ$, y en llegar al máximo de 4110 lb/in^2 , cuando $\theta = 160^\circ$. Mas allá de este punto la presión disminuye rápidamente, llegando a alcanzar un valor negativo aproximadamente cuando $\theta = 184^\circ$. La presión sigue siendo negativa en un área considerable en los cojinetes (parte sombreada en la fig 12.3).

Ya que el aceite no puede soportar las tensiones que es una de las condiciones a las cuales se encuentra el cojinete, la película de aceite se romperá cuando la presión cae por debajo de la presión de vapor de el aceite. Para este propósito práctico el cojinete se comportara como si el aceite no estuviera presente en la región donde la presión es negativa.

El área de presión negativa podría evitarse mediante el aumento en el suministro de la presión o cambiando la ubicación del orificio de entrada del aceite en relación con el punto de aproximación mas cercana. Cualquiera de estos cambios aumenta la cantidad de p_0 , y es evidente de la ecuación 12.15, si p_0 es lo suficientemente grande, p no puede ser negativo. Por ejemplo si el orificio de aceite se mantiene en su posición actual $\theta = 270^\circ$, las presiones negativas se pueden evitar mediante el aumento del suministro de presión que tiene un valor un poco fuera de lo normal y a la vez elevado de 2250 lb/in^2 . Por otro lado, la presión negativa también podría evitarse cambiando el orificio de entrada de aceite a la posición $\theta = 200^\circ$, manteniendo el suministro de presión en su valor original de 30 lb/in^2 . Teóricamente el orificio de entrada de aceite debe ser colocado en el punto de mínima presión, que es $\theta = 200^\circ$, para el cojinete bajo consideración.

Puesto que no es indispensable que los orificios de aceite estén en la región de alta presión, por lo general se ponen un poco más allá del punto de mínima presión que puede ser tratado como un factor de seguridad. El aceite que se suministra habitualmente a cojinetes se hace en un rango que va desde 10 a 100 lb/in^2 , y por lo tanto se hicieron pocos intentos en prevenir las apariciones de las regiones de presión negativa por el uso de las altas presiones de entrada. En la práctica, por lo tanto, se debe esperar encontrar regiones de presión negativa de forma moderada en cojinetes muy cargados, incluso sobre la base de una teoría final de fuga.

12.2. COJINETE CORTO

Por diversas razones, en las máquinas modernas no suelen montarse cojinetes largos. En un cojinete largo, pequeñas deflexiones o faltas de alineación en las flechas pueden reducir a cero las tolerancias radiales; además, consideraciones de empaquetamiento a menudo exigen cojinetes cortos. Las razones típicas l/d en los cojinetes modernos ocurren en un rango de $1/4$ a 1. La solución de cojinetes largos de Sommerfeld se supone que no habrá fugas de aceite en los extremos del cojinete, pero en estas razones l/d pequeñas, las

fugas por los extremos pueden ser un factor importante. Ocvirk y DuBois resolvieron una forma de la ecuación de Reynolds que incluye el término por fuga en los extremos.

Partiendo de la ecuación general de Reynolds y despreciando el flujo circunferencial de aceite alrededor del cojinete con base en que un cojinete corto será pequeño en comparación con el flujo en la dirección z (fuga).

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (12.16)$$

La ecuación 12.16 se puede integrar para obtener una expresión para la presión en la película fluida de aceite. en función de θ como de z :

Integrando en z tenemos

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \left(\frac{6\mu U}{h^3} \right) \frac{\partial h}{\partial x} z + C_1$$

cuando $z = 0$, el gradiente de presión $\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

Integrando en z nuevamente, tenemos

$$p = \left(\frac{6\mu U}{h^3} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{z^2}{2} + C_2$$

En el extremo del cojinete; $z = \frac{L}{2}$ y $p = 0 \Rightarrow C_2 = - \left(\frac{3\mu U}{h^3} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{L^2}{4} \right)$. Además $x = r\theta \Rightarrow dx = r d\theta$.

Sustituyendo

$$p = \left(\frac{3\mu U}{r h^3} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \left(z^2 - \frac{L^2}{4} \right)$$

como h es el espesor de la película en cualquier punto derivando la ecuación 10.2 con respecto a θ .

$$\frac{dh}{d\theta} = -\epsilon C_r \cos \theta$$

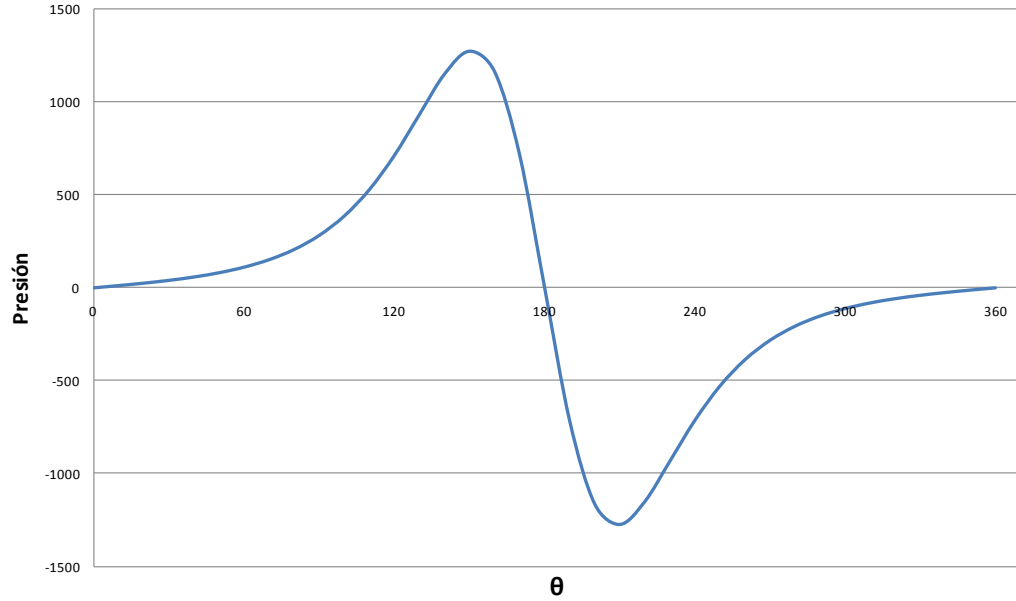
$$p = \left(\frac{3\mu U}{r C_r^2} \right) \left(\frac{L^2}{4} - z^2 \right) \frac{\epsilon \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^3} \quad (12.17)$$

En cojinetes con carga moderada o fuerte, se puede asumir que la carga es soportada por una película que se extiende desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$. La suma de las compresiones verticales de la fuerza producida por la presión de película debe ser igual a la carga W . Por tanto integramos la presión de película para obtener las componentes de las fuerzas en dirección X e Y o sea W_x y W_y

$$W_x = \left(\frac{6\mu U}{r C_r^2} \right) \int_0^\pi \int_0^{L/2} \frac{\epsilon \sin \theta \cos \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^3} \left(\frac{L^2}{4} - z^2 \right) d\theta dz$$

Integrando y sustituyendo límites se tiene

Figura 12.4: Distribución de presión cojinete corto - superficie extendida



$$W_x = \left(\frac{\mu UL^3}{2C_r^2} \right) \int_0^\pi \frac{\epsilon \sin \theta \cos \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^3} d\theta \quad (12.18)$$

ahora integramos para W_y en dirección z

$$W_y = \left(2 \frac{3\mu UL^3}{rC_r^2} \right) \int_0^\pi \int_0^{L/2} \frac{\epsilon \sin^2 \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^3} \left(\frac{L^2}{4} - z^2 \right) d\theta dz$$

$$W_y = \left(\frac{\mu UL^3}{2C_r^2} \right) \int_0^\pi \frac{\epsilon \sin^2 \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} d\theta \quad (12.19)$$

para la solución de las ecuaciones 12.18 y 12.19 consultar apéndice del libro Mechanical Design Analysis de M.F. Spotts.

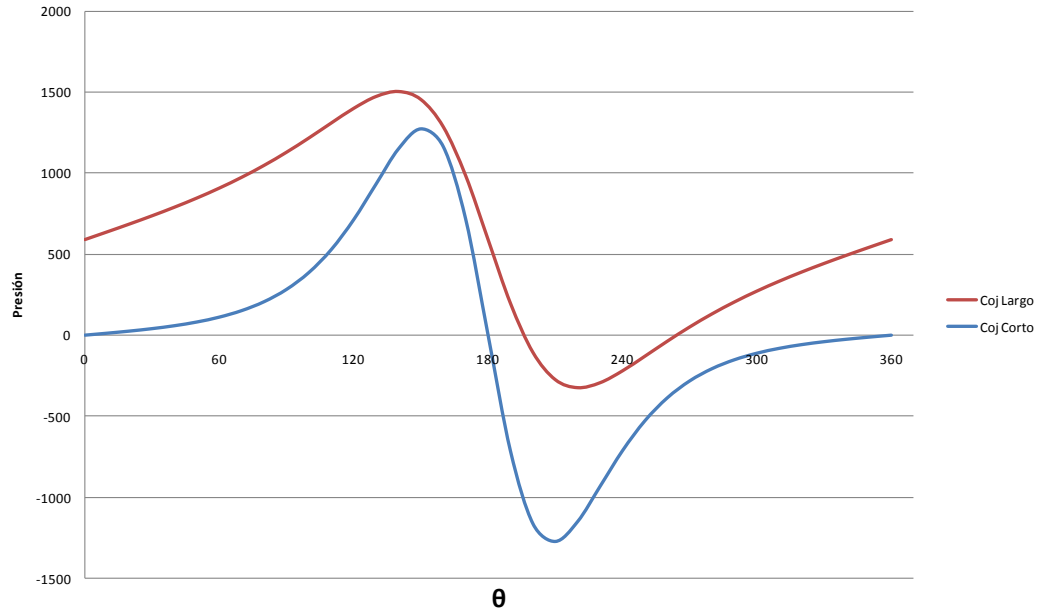
$$W_x = - \left(\frac{\mu UL^3}{C_r^2} \right) \frac{\epsilon}{(1 - \epsilon^2)^2} \quad (12.20)$$

$$W_y = \left(\frac{\mu UL^3}{C_r^2} \right) \frac{\pi \epsilon}{4(1 + \epsilon^2)^{3/2}} \quad (12.21)$$

si tomamos $W_1 = \frac{W}{L}$, carga por unidad axial, la ecuación anterior puede arreglarse

$$\frac{W_1}{\mu U} \left(\frac{C_r}{r} \right)^2 \left(\frac{d}{L} \right)^2 = \frac{\epsilon \sqrt{\pi^2 (1 - \epsilon^2) + 16\epsilon^2}}{(1 - \epsilon^2)^2} \quad (12.22)$$

Figura 12.5: Comparación entre las soluciones de cojinete corto y largo



la ecuación 12.22 es adimensional,

la ecuación 12.17 se conoce como la *solución de Ocvirk* o la *solución para cojinetes cortos*. Se suele evaluar a partir de $\theta = 0$ hasta π , suponiendo la presión igual a cero en la mitad de la circunferencia. La figura 12.4 muestra las distribuciones típicas de presiones sobre θ y z . La posición $\theta = 0$ se toma en $h = h_{max}$ y el eje θ pasa a través de O_b y de O_j . La distribución de presión p con respecto a z es parabólica y llega a un máximo en el centro de la longitud l del cojinete y es cero en $z = \pm l/2$. La presión p varía de manera no lineal en función de θ y es máxima en su segundo cuadrante. Se puede determinar el valor de θ_{max} en p_{max} a partir de

$$\theta_{max} = \cos^{-1} \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 24\epsilon^2}}{4\epsilon} \right) \quad (12.23)$$

y el valor de p_{max} se puede encontrar sustituyendo $z = 0$ y $\theta = \theta_{max}$ en la ecuación 12.23.

la figura 12.5 compara la variación de presión p sobre la película a lo largo de $\theta = 0$ hasta π , para la solución sommerfeld de cojinete largo y la solución Ocvirk para cojinete corto a varias razones l/d , desde $1/4$ hasta 1. Observe el error considerable que ocurriría si se aplicara la solución de cojinete largo para razones inferiores a 1. En $l/d = 1$ las dos funciones dan resultados similares, la solución Ocvirk indicando una presión máxima ligeramente superior a la solución Sommerfeld. DoBois y Ocvirk encontraron las pruebas que la solución de cojinete corto daba resultados razonables para l/d desde $1/4$ hasta 1 que coincidían muy bien con mediciones experimentales, y también coincidían con datos experimentales hasta $l/d = 2$ si esta razón se conserva en 1 para el cálculo de cojinetes con razones reales entre 1 y 2. Dado que la mayor parte de los cojinetes modernos tienen tendencia a

tener razones l/d entre $1/4$ y 2 , la solución Ocvirk es un método práctico y razonablemente preciso. La solución Sommerfeld da resultados precisos para relaciones l/d por arriba de 4 . El método de Boyd y Raimondi da resultados más precisos para razones intermedias de l/d , pero es más incomodo de usar.

En la figura 12.5 notamos que la presión máxima ocurre a un ángulo θ_{max} , según queda definido en la ecuación 12.23. Este ángulo se mide a partir del eje θ cero, que está a lo largo de la línea de centros, tanto del cojinete como del muñón. Pero la línea excéntrica entre centros O_b y O_j la determina la acción de la fuerza P aplicada al eje por factores externos. Esta fuerza P aparece vertical y el ángulo entre la fuerza y el eje $\theta = 0$ aparece como ϕ . Se puede determinar ϕ a partir de

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\pi \sqrt{1 - \epsilon^2}}{4\epsilon} \right) \quad (12.24)$$

y la magnitud de la fuerza resultante P está relacionada con los parámetros del cojinete de la forma

$$P = K_\epsilon \frac{\mu U l^3}{c_r^2} \quad (12.25)$$

donde K_ϵ es un parámetro no dimensional, que es función de la razón de excentricidades ϵ :

$$K_\epsilon = \frac{\epsilon [\pi^2 (1 - \epsilon^2) + 16\epsilon^2]^{\frac{1}{2}}}{4(1 - \epsilon^2)^2} \quad (12.26)$$

La velocidad lineal U se puede expresar de la forma

$$U = \pi d n' \quad (12.27)$$

y al sustituirla en la ecuación 12.25 junto con $c_r = c_d/2$ para obtener

$$P = K_\epsilon \frac{\mu U l^3}{c_r^2} = K_\epsilon \frac{4\pi \mu d n' l^3}{c_d^2} \quad (12.28)$$

BIBLIOGRAFÍA

- [146] M. BERG. *Untersuchungen zum Schmierstoffdurchsatz und zur Reibungsleistung dynamisch belasteter Radialgleitlager*. Univ. Kaiserslautern, 1996.
- [147] MM KHONSARI, MD PASCOVICI, and BV KUCISCHI. On the scuffing failure of hydrodynamic bearings in the presence of an abrasive contaminant. *Journal of tribology*, 121:90, 1999.
- [148] José Manuel MACHORRO LÓPEZ. Experimentación y validación de modelos dinámicos para detectar fisuras en ejes rotatorios de maquinaria en operación. Master's thesis, Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de ingeniería Mecánica y Eléctrica, 2005.
- [149] SA McKEE. Effect of abrassive in lubricant. 1927.
- [150] Y. MIHARA, T. HAYASHI, M. NAKAMURA, and T. SOMEYA. Development of measuring method for oil film pressure of engine main bearing by thin film sensor. *JSAE Review*, 16(2):125–130, 1995.
- [151] R. RAMAN and TS CHENNABASAVAN. Experimental investigations of porous bearings under vertical sinusoidally fluctuating loads. *Tribology international*, 31(6): 325–330, 1998.
- [152] AE ROACH. Performance of oil-film bearings with abrasive-containing lubricant. *Trans. ASME*, 73:677–686, 1951.
- [153] A. RONEN and S. MALKIN. Wear mechanisms of statically loaded hydrodynamic bearings by contaminant abrasive particles. *Wear*, 68(3):371–389, 1981.
- [154] H. RONKAINEN, A. HOKKANEN, M. KAPULAINEN, A. LEHTO, J. MARTIKAINEN, I. STUNS, A. VALKONEN, S. VARJUS, and J. VIRTANEN. Optical sensor for oil film pressure measurement in journal bearings. In *Proceedings of NordTrib 2008, 13th Nordic Symposium of Tribology. Tampere, Finland. June 10-13, 2008*.
- [155] Raúl Antonio LÓPEZ RUIZ. Experimentación y análisis de estabilidad dinámica en sistemas rotor-cumacera con y sin desallineamiento. Master's thesis, Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, México D.F, 2006.
- [156] HG RYLANDER. Effects of solid inclusions in sleeve-bearing oil supply, mech. eng. *Wear*, 74(1):963–966, 1952.

- [157] C. SINANOGLU, F. NAIR, and M.B. KARAMLIS. Effects of shaft surface texture on journal bearing pressure distribution. *Journal of materials processing technology*, 168(2):344–353, 2005.
- [158] T. SOMEYA and Y. MIHARA. New thin-film sensors for engine bearings. In *CIMAC Congress (International Council on Combustion Engines)*, Kyoto, 2004.
- [159] J. SP and A. KUCABA-PITAL. Experimental testing of journal bearings with two-component surface layer in the presence of an oil abrasive contaminant. *Wear*, 249(12):1090–1095, 2001.
- [160] A. VALKONEN. Oil film pressure in hydrodynamic journal bearings.
- [161] V WIKSTRÖM, E HÖGLUND, and R LARSSON. Wear of bearing liners at low speed rotation of shafts with contaminated oil. *Wear*, 162-164, Part B(0):996 – 1001, 1993. ISSN 0043-1648. doi: 10.1016/0043-1648(93)90110-8.
- [162] S.H. YANG, C. KIM, and Y.B. LEE. Experimental study on the characteristics of pad fluttering in a tilting pad journal bearing. *Tribology international*, 39(7):686–694, 2006.

Capítulo 13

MÉTODOS DE DISEÑO DE UN COJINETE

Linealizando la ecuación de Reynolds y empleando técnicas de iteración en computadoras digitales, los hermanos Mckee y posteriormente los investigadores Raimondi y Boyd, establecieron un método que permite diseñar los cojinetes hidrodinámicos basándose en el número característico del cojinete o número de Sommerfeld y en las suposiciones establecidas por Reynolds.

Los hermanos Mckee, experimentalmente basan su teoría en el desarrollo de M. Hersey, quien aplica el análisis dimensional a un cojinete de longitud infinita, adoptando un factor correctivo para los escapes laterales.

13.1. DISEÑO SEGÚN LA ECUACIÓN DE MCKEE-MCKEE

Para este tipo de diseño, se recomienda seguir el procedimiento indicado a continuación conociéndose: la carga, el diámetro y la velocidad del muñón, pues todos estos factores de diseño son datos determinados previamente o valores que pueden estar bajo el control del diseñador.

1. Determinar la longitud L según la relación $\frac{L}{D}$.
2. Revisar la presión $p = \frac{W}{L.D}$.
3. Asumir la relación $\frac{Cd}{D}$.
4. Seleccionar un lubricante para la temperatura de operación inicial t_0 . Esta temperatura por lo general oscila entre 80 a 140 [$^{\circ}F$] y en las turbinas de vapor este valor de temperatura alcanza los 180 $^{\circ}$, esta temperatura será correcta si al final de este procedimiento se alcanza un equilibrio térmico en los cojinetes.
5. Determinar el valor del número de Sommerfeld $\frac{\mu N}{P}$ para la temperatura del cojinete, este valor se puede verificar con el recomendado en los estándares. Lo que asegura la película de lubricante efectiva.
6. Determinar el coeficiente de fricción a partir de la ecuación 13.1.

7. Determinar el calor generado por la ecuación 13.2.
8. Determinar el calor disipado por la ecuación 13.3.
9. Si al determinar el calor generado y disipado se logra un equilibrio térmico, se verifica que la temperatura asumida es satisfactoria a las condiciones de operación.
10. Si el equilibrio térmico entre el calor generado y el disipado no se cumple, se debe revisar una nueva temperatura de operación, cambiar de aceite, variar la relación $\frac{L}{D}$ o en último recurso enfriar artificialmente.

Se debe aclarar que este procedimiento propuesto por los hermanos Mckee, considera que tanto la carga como la velocidad, son constantes en magnitud y dirección.

13.1.1. Coeficiente de Fricción

El trabajo de rozamiento que se produce en el cojinete es tanto mayor cuanto sea el coeficiente de rozamiento f , el cual a su vez, varía de acuerdo con los parámetros del régimen del cojinete [94].

De secciones anteriores, se conoce la importancia en el diseño de la fricción pues permite calcular las pérdidas de potencia y para este procedimiento específico establecido por Mckee-Mckee, se permite estimar las condiciones de equilibrio térmico.

El coeficiente de fricción f se expresa como:

$$f = \frac{F}{W} = \frac{T}{wr}$$

- F Fuerza de rozamiento
- W Carga soportada
- T Torque
- r Radio de cojinete

Realizando un análisis dimensional del coeficiente de fricción para un cojinete, este puede ser:

$$f = \phi \left(\frac{\mu N}{P}, \frac{D}{C_d}, \frac{L}{D} \right)$$

Al observar el comportamiento dimensional de la fricción los hermanos Mckee a partir de la experimentación, establecieron una ecuación para estimar los valores de f en cojinetes lubricados y enteros. La ecuación es:

$$f = \frac{473}{10^{10}} \frac{\mu N}{P} \frac{D}{C_d} + K \quad (13.1)$$

- μ Viscosidad [*Centipoise*]
- N [*Rpm*]
- P $\frac{W}{L.D}$ [*Psi*]; L, D en [*pulg*]; W en [*lbs*].
- C_d Holgura diametral [*pulgadas*]
- K Factor correctivo para fugas laterales

El factor correctivo K se toma a un valor de 0,02, y para factores $\frac{L}{D}$, se toman valores entre [0,75–2,8]. Estos se pueden comparar con los recomendados en la **tabla 3**, para asegurar un margen de seguridad, entre las condiciones de operación y el punto de ruptura en la película.

La ecuación 13.1, da valores de f , muy cercanos a los obtenidos por el procedimiento de Raimondi y Boyd, con valores del número de sommerfeld altos, los cuales también son cojinetes ligeramente cargados y completos.

13.1.2. Equilibrio térmico

Muchos cojinetes están fabricado con un dispositivo de suministro de lubricante incorporado, como, por ejemplo, un anillo de engrase o un collar aceitado en que hay un pozo local para depósito de lubricante. Este tipo de cojinetes se puede proyectar para entregar la cantidad de aceite adecuada a las necesidades hidrodinámicas, pero debe poder disipar todas las pérdidas por rozamiento al ambiente sin aumento excesivo de temperatura y en la mayoría de los casos la temperatura media del cojinete no es conocida y para su determinación es necesario hacer un cálculo térmico [65, 94].

Los hermanos Mckee luego de establecer la fricción que se genera en el cojinete, también experimentaron con la transferencia de calor que se presenta dentro de este, estableciendo, que para que se alcance un equilibrio térmico, el calor generado y el calor disipado por el cojinete deben ser aproximadamente iguales.

- **Calor Generado:** Conociendo el coeficiente de fricción f , se puede hallar el calor generado debido a la fricción del fluido y de las superficies en contacto:

$$H_1 = f W V \tag{13.2}$$

- H_1 Calor generado en $\left[\frac{lbs.pies}{min} \right]$
- W Carga en [*lbs*]
- V Velocidad de frotamiento $\left[\frac{pies}{min} \right]$

- **Calor Disipado:** El calor disipado se expresa en términos del producto del área de disipación, por el cambio de temperatura entre la superficie del cojinete y el aire circundante.

$$H_2 = C.A(t_b - t_a) \tag{13.3}$$

- H_2 Calor disipado por el cojinete $\left[\frac{lb.pies}{min} \right]$
 A Área proyectada $L * D$ $[pulg^2]$.
 t_b Temperatura de la superficie del cojinete en $[^{\circ}F]$
 t_0 Temperatura de la película de aceite $[^{\circ}F]$
 C Coeficiente de disipación de calor, $\left[\frac{Lb.pies}{min pulg^2 ^{\circ}F} \right]$;

Los valores de C fueron determinados por O.Lasche. Estos valores dependen del tipo de cojinete, de su ventilación y de la diferencia de temperatura, **la figura 26 (pág38 rojas)** muestra la disipación de calor en cojinetes lisos.

Las experiencias demuestran que la temperatura en la superficie exterior de cojinetes industriales corresponden aproximadamente a la mitad entre la temperatura de la película y la temperatura de los alrededores, por tanto:

$$t_b - t_a = \frac{1}{2}(t_0 - t_a)$$

En las aplicaciones de los cojinetes, se puede anotar, que en bombas de agua fría la conducción de calor va del cojinete al exterior, mientras que en turbinas de vapor, puede haber conducción hacia el cojinete, pero ya que la conductividad del acero es baja, la conducción por el eje o muñón es relativamente baja.

13.2. MÉTODO DE DISEÑO DE RAIMONDI Y BOYD

Entre los investigadores más reconocidos que han dado una solución aproximada a la ecuación de Reynolds, se encuentran A.A Raimondi y Jhon Boyd, de Westinghouse Research Laboratories, quienes emplearon una técnica de iteración para resolver la ecuación en una computadora digital para un cojinete finito.

Los trabajos de Raimondi y Boyd fueron publicados en tres partes y contienen 45 diagramas detallados y 6 tablas de información numérica. en las tres partes se emplean diagramas o gráficas para definir las variables, según relaciones de longitud a diámetro (l/d) de 1:4, 1:2 y 1:1, y para ángulos β de 60° a 360° . En ciertas condiciones la solución de la ecuación de Reynolds da presiones negativas en la parte divergente de la película de lubricante. Como generalmente los lubricantes no pueden soportar esfuerzos de tensión, en la parte III de los trabajos de Raimondi y Boyd se supone que la película se rompe cuando se anula la presión en la misma. La parte III también contiene datos para el cojinete de longitud infinita; como este elemento no tiene extremos, no puede haber fugas laterales [42]. Los diagramas que se incluyen en este trabajo provienen de dicha parte de esos trabajos y son únicamente para cojinetes de deslizamiento completos ($\beta = 360^{\circ}$). El espacio no permite incluir diagramas para cojinetes parciales. Lo que significa que cuando se trate de ángulos β menores de 360° es importante revisar el trabajo original de los investigadores Raimondi y Boyd; de manera práctica en esta sección se explica la metodología de diseño por este método y se procede a plasmar un ejemplo.

Como primera medida, es importante recordar el *número característico del cojinete*, o *número de Sommerfeld*, que lo define la ecuación

$$S = \left(\frac{r}{c}\right)^2 \frac{\mu N}{P}$$

- S número característico del cojinete
 r radio del muñón, pulg
 c holgura radial, pulg
 μ viscosidad absoluta, reyn
 N velocidad relativa entre muñón y cojinete, rps
 P carga por unidad de área proyectada, psi.

El número de Sommerfeld contiene todas las variables usualmente especificadas por el diseñador y es adimensional; por tanto el número es usado como abscisa en los diagramas, excepto, en los de viscosidad.

13.2.1. Diagramas de viscosidad

Una de las hipótesis importantes consideradas en el análisis de Raimondi-Boyd es que la viscosidad del lubricante se mantiene constante cuando pasa por el cojinete. Pero como se realiza trabajo sobre el lubricante durante su movimiento, la temperatura del aceite es más alta cuando sale de la zona de carga que cuando entra. Los diagramas de viscosidad indican claramente que su magnitud decrece significativamente al elevarse la temperatura. Puesto que el análisis se basa en una viscosidad constante, el problema consiste ahora en determinar el valor de viscosidad a emplear en el análisis [66].

Parte del lubricante que se introduce al cojinete emerge como escurrimiento lateral que transporta una cierta cantidad de calor. El resto atraviesa la zona de carga del cojinete y se lleva la parte restante del calor generado. Al determinar el valor de viscosidad que se ha de utilizar se empleará una temperatura que sea el promedio de las temperaturas de entrada y salida, es decir:

$$T_{med} = T_1 + \frac{\Delta T}{2}$$

Donde T_1 es la temperatura de entrada y ΔT , es el aumento o elevación de temperatura del lubricante desde la entrada hasta la salida. Desde luego, la viscosidad utilizada en el análisis debe corresponder a T_{med} .

Uno de los objetivos de un análisis de lubricación es determinar la temperatura de salida del lubricante cuando se especifican éste y su temperatura de entrada. Este es un tipo de problema para solución por aproximación sucesiva (ensayo y error).

13.2.2. Metodología para diseño de cojinete

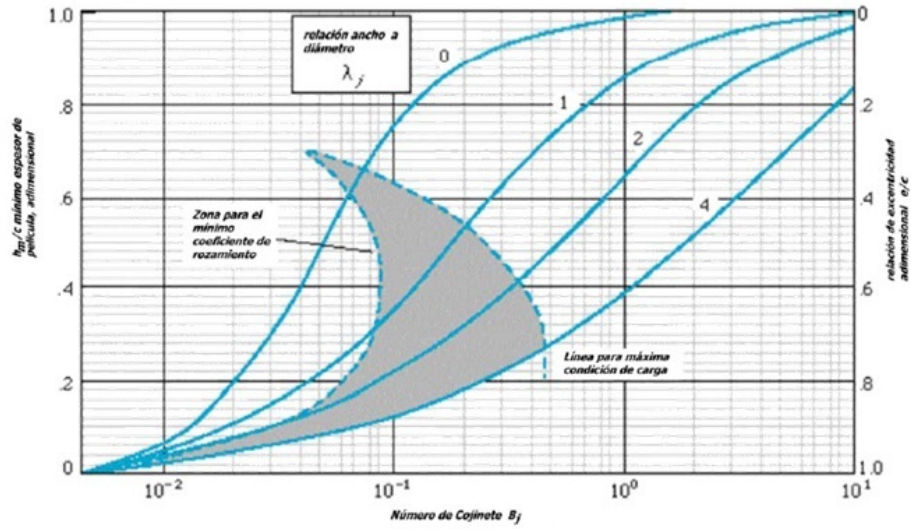
Para ilustrar como utilizar el estudio de Raimondi y Boyd, a continuación se realizará un ejemplo donde se busca las características básicas de funcionamiento de un cojinete de una turbina de vapor. Pero para aplicar este método es importante tener en cuenta las siguientes variables:

Viscosidad	μ
Carga unitaria de área proyectada	P
Velocidad	N
Dimensiones del cojinete	r, c, β y L
Coefficiente de fricción	f
Incremento de Temperatura	ΔT
Flujo de aceite	Q
Espesor mínimo de película	h

Para realizar el ejemplo se desarrolla los siguientes apartados:

1. *Carga Unitaria:* Se especifica una presión nominal de operación del cojinete a partir de $P = \frac{W}{L \times d}$
2. *Calcular la razón L/d :* El cual debe ser un valor entre: $0,25 \leq \frac{L}{d} \leq 1,5$
3. *Seleccionar un desplazamiento diametral:* A partir de la gráfica de aceites, en función de N y d y estimar el valor c/r
4. *Caracterizar la rugosidad de la superficie del cojinete:*
 - a) 16 a 32 [*micropulg*] → cojinete lijado de buena calidad
 - b) 8 a 16 [*micropulg*] → cojinete de alta precisión, pulido.
5. *Calcular el espesor mínimo de la película de lubricante h .*
 - a) $h_0 \geq 0,0002 + 0,00004d$ si h_0 y d están en [*pulg*]
 - b) $h_0 \geq 0,05 + 0,00004d$ si h_0 y d están en [*mm*]
6. *Calcular relación de espesor de película h_0/C*
7. *Calcular el número de Sommerfeld en función de h_0/C , a partir figura 13.1*

Figura 13.1: h_0/C vs. Número de cojinete

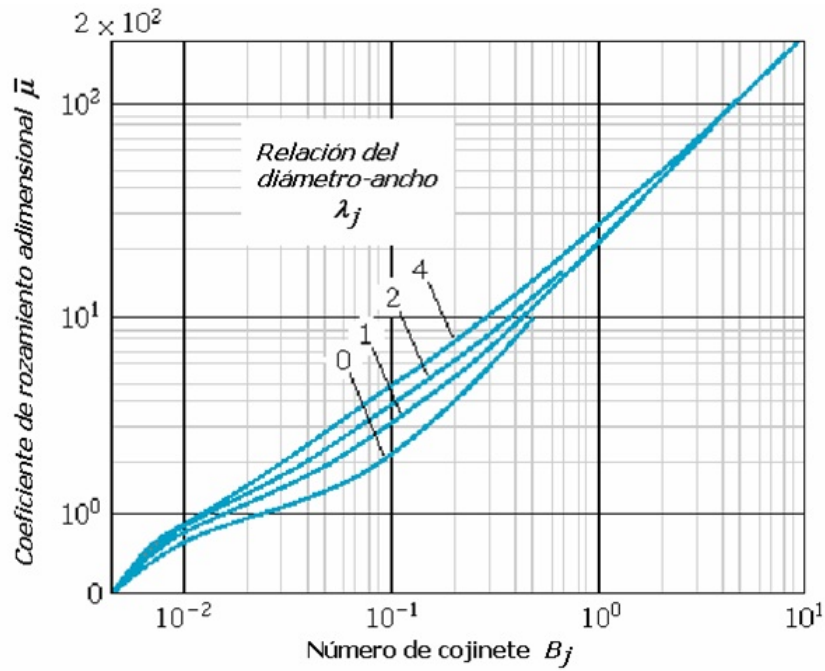


8. Calcular viscosidad μ a partir de :

$$S = \left(\frac{r}{c}\right)^2 \times \frac{\mu N}{P}$$

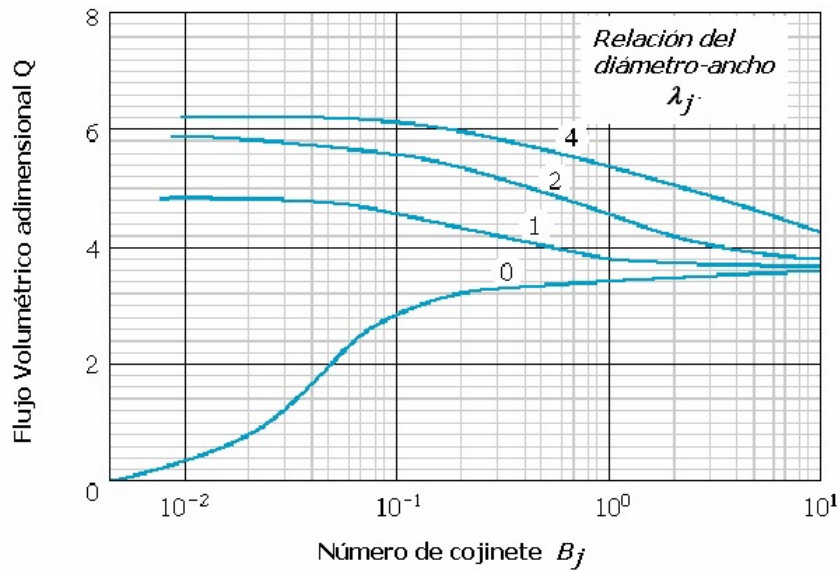
a) Obtenido el S del paso 7 y el $\frac{L}{d}$ que se nombra λ , a partir de la figura 13.2, se obtiene $\frac{r}{c} \cdot f$.

Figura 13.2: $\frac{r}{c} \cdot f$ vs. S



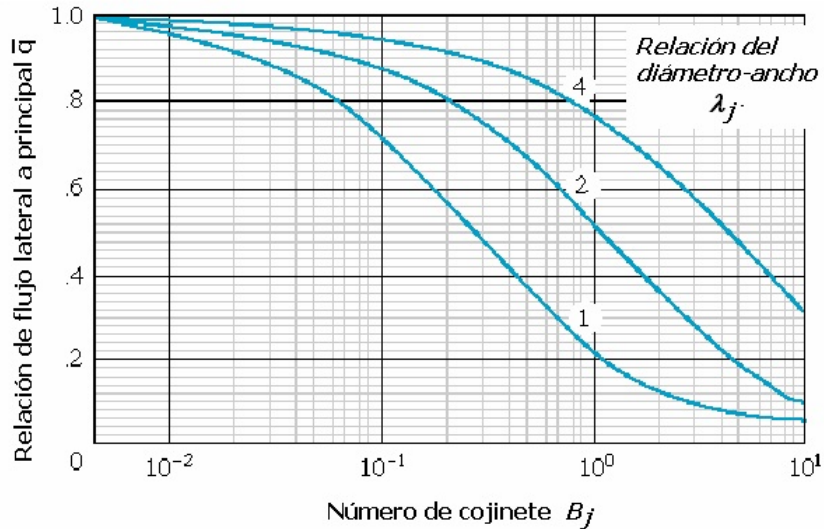
b) Obtención del Q para obtener el factor $\frac{Q}{rcNl}$, de la figura 13.3

Figura 13.3: Caudal Q



c) Cálculo de la relación de caudal $\frac{q_s}{q}$, de la figura 13.4

Figura 13.4: Relación $\frac{q_s}{q}$



9. *Estimación del incremento de temperatura:* A partir de las relaciones halladas en los apartados anteriores, se obtiene:

$$\Delta T_1 = \frac{0,103 \cdot P}{\left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{q_s}{q}\right)\right]} \cdot \frac{\frac{r}{c} \cdot f}{rcNl}$$

Con este incremento hallado podemos operar con:

$$T_1 = T_0 + \frac{\Delta T_1}{2}$$

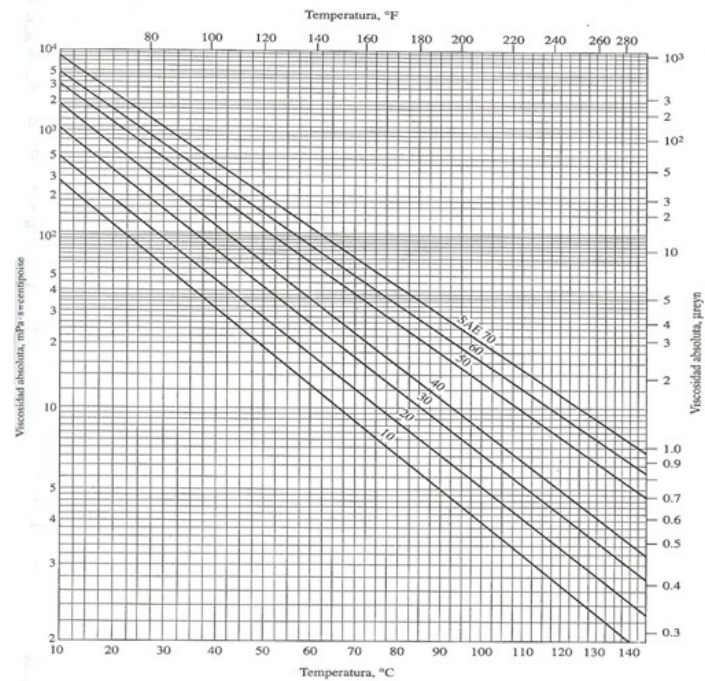
10. *Indicar en la figura 13.5 de viscosidad vs temperatura el punto de viscosidad y temperatura obtenidos μ_1 y T_1 .*

11. *Luego de obtener un primer punto de referencia, de manera cuidadosa se toma un valor de viscosidad mayor a μ_1 , y se calcula S_2 .*

12. *Se calculan nuevamente todos los parámetros :*

$$\frac{r}{c} \cdot f; \frac{Q}{rcNl}; \frac{q_s}{q}$$

Figura 13.5: Viscosidad vs Temperatura



Fuente Diseño elementos de Máquinas, Spotts, M.F and Shoup, TE, 1999.

Se estima nuevamente ΔT_2 , obteniéndose con esto otro valor de temperatura T_2 , y nuevamente se indica el punto (T_2, μ_2) en la figura 13.5

- Finalmente obtenidos dos puntos e indicados sobre la figura 13.5, *se unen con un segmento de línea recta y se intercepta la curva del lubricante deseado* y se obtienen los valores para viscosidad y número de Sommerfeld (número característico del cojinete) definitivos.

13.2.3. Ejemplo de Diseño de Cojinete con Raimondi- Boyd

Para la turbina de vapor a analizar se tiene los siguientes datos:

W	585 [lb]
d	2,25 [in]
l	$3 \frac{3}{8}$ [in]
N	1800 [rpm]
$T_{ambiente}$	60 [°F]
$T_{prompelículaaceite}$	140 [°F]
$Tipo\ aceite$	SAE 10

Entonces siguiendo el desarrollo especificado anteriormente se tiene:

1. Carga unitaria:

$$P = \frac{W}{d \cdot L} = \frac{585}{2,25 \cdot 3,375} = 77 [psi]$$

Si no se conociera todos los datos, existe una tabla donde según la aplicación se especifica la presión nominal.

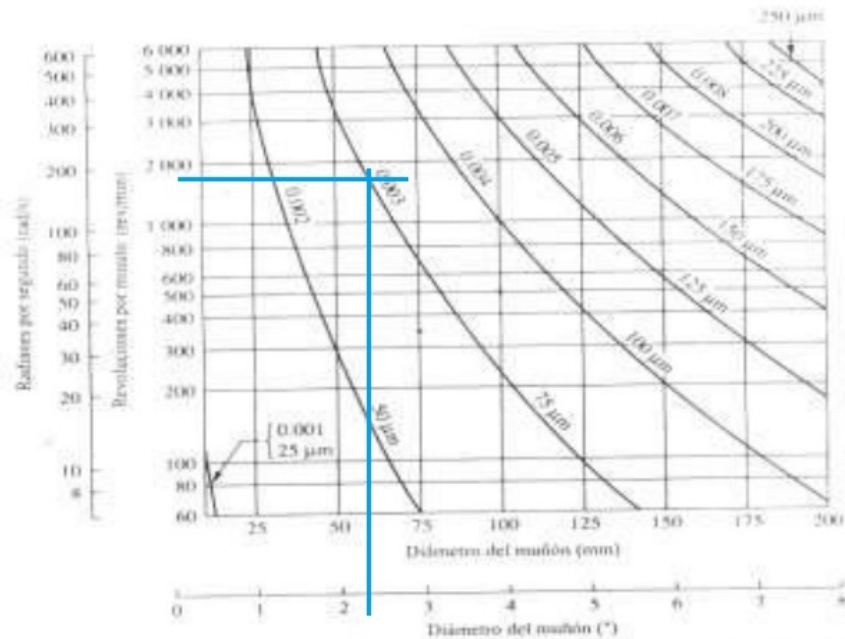
2. Razón l/d :

$$\frac{l}{d} = \frac{3\frac{3}{8} in}{2,25 in} = 1,5$$

Y efectivamente cumple estar en el rango determinado.

3. Valor de $\frac{c}{r}$: A partir de la figura 13.6, de espaciamento diametral.

Figura 13.6: Espaciamento diametral mínimo



El valor de $\frac{c}{r}$, por tanto es 0,003.

4. La *rugosidad* de la superficie afectará el espesor mínimo de película pero será un factor que se tendrá en cuenta si se conoce de forma real el cojinete.

5. El *espesor mínimo de película* será:

$$h_0 \geq 0,0002 + 0,00004 \cdot (2,25) = 0,00029$$

$$h_0 = 0,0003$$

Se recomienda que para un funcionamiento confiable el cojinete esté entre 0,00005 [in] a 0,0002 [in].

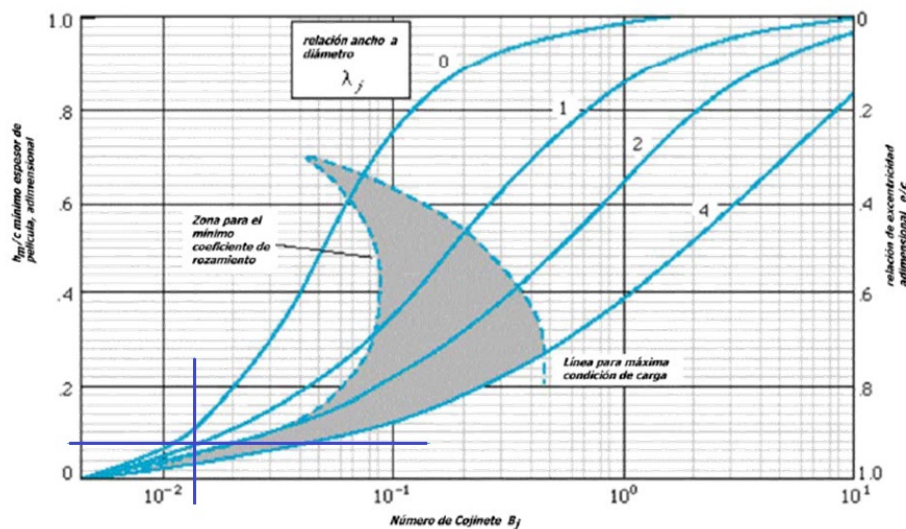
6. Estimación de la relación de espesor de película h_0/C

Conociendo la relación $\frac{C}{r} = 0,003 \rightarrow C = 0,003 \cdot 1,125 = 0,003375$

$$\frac{h_0}{C} = \frac{0,0003}{0,003375} = 0,0859$$

7. Calcular el número de Sommerfeld, figura 13.7.

Figura 13.7: Cálculo de Sommerfeld



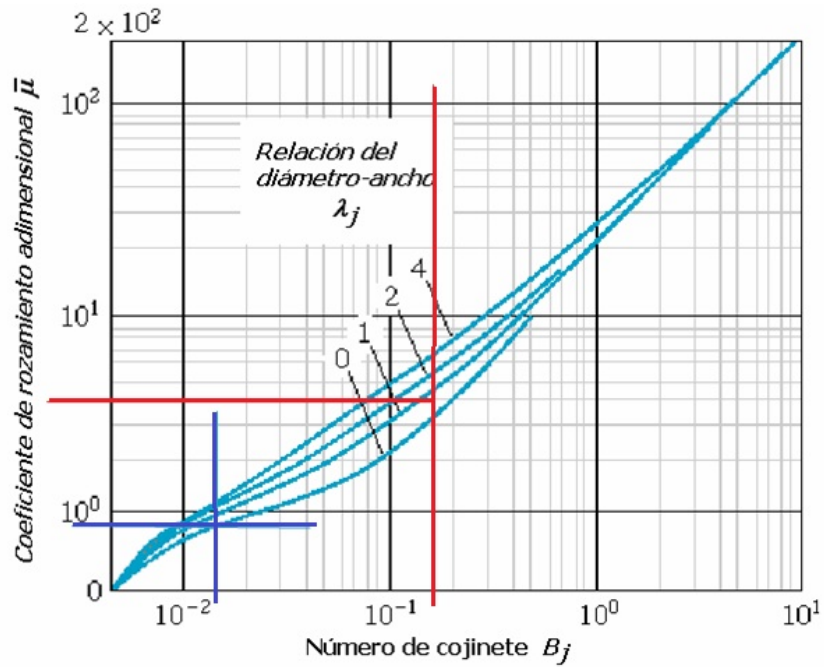
Obteniéndose un número de Sommerfeld de $S=0.015$

8. Ahora se calcula μ a partir de la ecuación:

$$\mu = \frac{S_1 P}{n} \left(\frac{C}{r} \right)^2 = \frac{(0,0015)(77)}{30} (0,003)^2 = 3,46 \times 10^{-7} [\text{Reynolds}]$$

a) Estimación del coeficiente de fricción f , a partir del factor $\frac{l}{c} \cdot f$, figura 13.8.

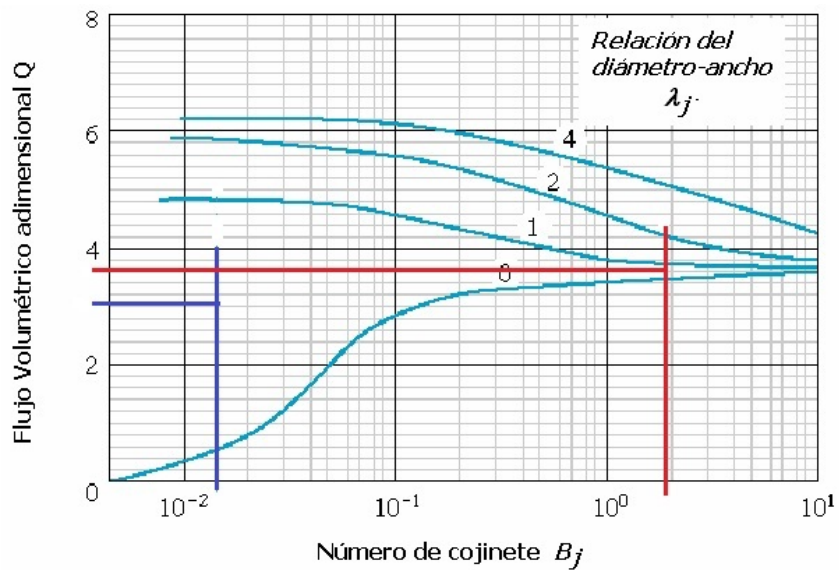
Figura 13.8: Cálculo de $\frac{l}{c} \cdot f$



dando un valor aproximado $\frac{l}{c} \cdot f = 0,9 \rightarrow f = (0,9) (0,003) = 0,0027$

b) Para el valor de la relación $\frac{Q}{rcNI}$, de la figura 13.9, se tiene:

Figura 13.9: Estimación de $\frac{Q}{rcNI}$

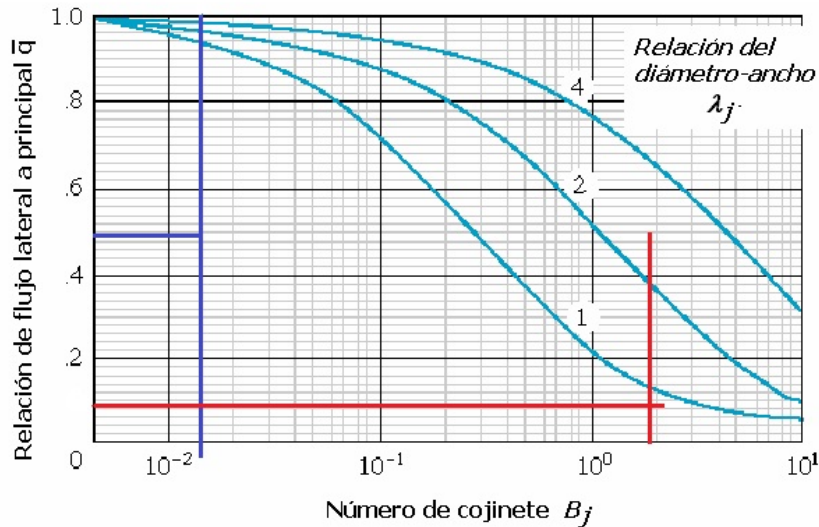


cuyo valor es $\frac{Q}{rcNl} = 3,2$ y despejando $Q = (3,2) (1,125) (0,003375) (30) (3,375)$

$$Q = 1,2 \left[\frac{in^3}{seg} \right]$$

c) Para la relación $\frac{q_s}{q}$, de la figura 13.10, se tiene:

Figura 13.10: Obtención de $\frac{q_s}{q}$



el valor de la relación $\frac{q_s}{q} = 0,5 \rightarrow q_s = (0,5) (1,2) = 0,6 \left[\frac{in^3}{seg} \right]$

9. Estimación del incremento de temperatura:

$$\Delta T_1 = \frac{0,103 \cdot P}{\left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{q_s}{q} \right) \right]} \cdot \frac{\frac{r}{c} \cdot f}{\frac{Q}{rcNl}}$$

$$\Delta T_1 = \frac{0,103 \cdot (77)}{\left[1 - \frac{1}{2} (0,5) \right]} \cdot \frac{(0,9)}{(3,2)} = 1,487$$

para el anterior incremento se tiene $T_1 = T_0 + \frac{\Delta T_1}{2} = \mathbf{61,487^\circ F}$

10. Por tanto ya obtenemos nuestro primer punto:

$$P_1 (T_1, \mu_1) \rightarrow P_1 (61,487^\circ F, 3,46 \times 10^{-7} [Reynolds]).$$

11. Para hallar el punto 2, se realiza nuevamente el procedimiento anterior con la única diferencia que de manera aproximada se debe establecer un nuevo valor de viscosidad, donde el nuevo μ_2 será un valor de viscosidad mayor que el μ_1 , para que se

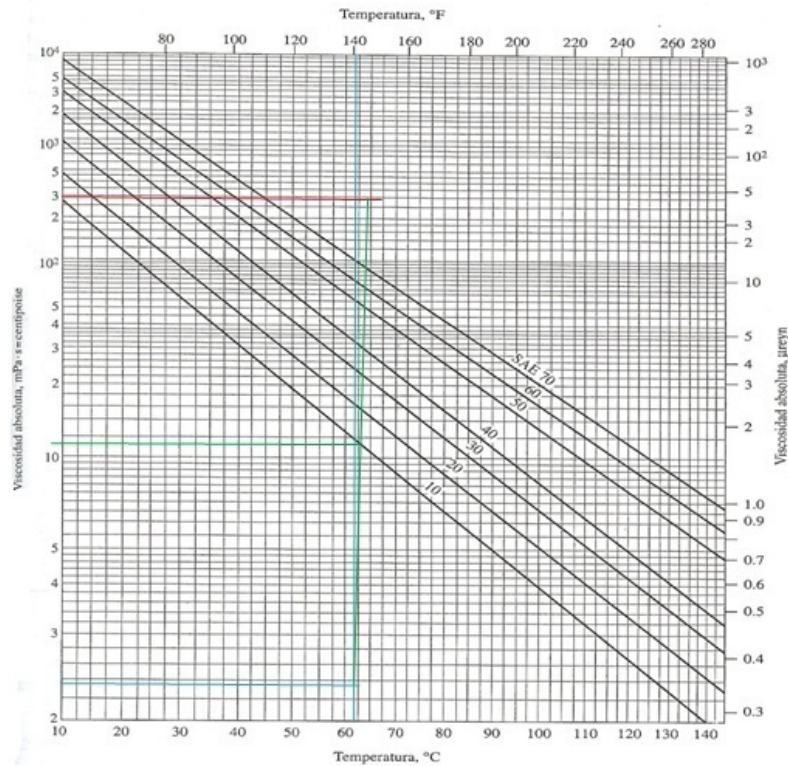
obtenga un intervalo grande que pueda encerrar el verdadero valor de viscosidad. Por tanto, el valor seleccionado para viscosidad es $\mu_2 = 4,35 \times 10^{-7} [Reynolds]$, y realizando los mismos pasos para punto P_1 , se obtienen los siguientes valores, que para efectos prácticos son analizados en la misma figura 13.11, pero con un segmento de recta color rojo.

S_2	1,885
$\frac{r}{c} \cdot f$	13
f	0,039
$\frac{Q}{rcNl}$	$1,3839 [\frac{in^3}{seg}]$
$\frac{q_s}{q}$	0,09
q_s	$0,124551 [\frac{in^3}{seg}]$
ΔT_2	78,01
T_2	138,01[°F]

De los datos de la tabla anterior se obtienen los valores para el punto $P_2 (T_2, \mu_2) \rightarrow P_2 (138,01^\circ F, \mu_2 = 4,35 \times 10^{-7} [Reynolds])$

12. Teniendo dos puntos de temperatura y viscosidad, P_1 y P_2 , se unen con un segmento de línea recta (color verde) y se intercepta la curva del lubricante deseado y se obtiene el μ y S , definitivos para la operación del cojinete.

Figura 13.11: Solución con los dos puntos hallados



Finalmente el trazo verde me indica que el valor definitivo para μ es:

$$\mu = 11,1 [\text{centipoises}] = 1,61 \times 10^{-6} [\text{Reynolds}]$$

y para el número característico del cojinete, se tiene:

$$S = \left(\frac{r}{c}\right)^2 \times \frac{\mu N}{P}$$

$$S = \left(\frac{1}{0,003}\right)^2 \times \frac{1,61 \times 10^{-6} \times 30}{77} = 0,06969$$

Con este nuevo Sommerfeld ya se termina el análisis al cojinete a partir de las gráficas de Raimondi y Boyd y se puede obtener un torque de operación y una potencia respectiva, sin embargo si se quiere realizar un análisis más profundo se puede seguir con el análisis térmico especificado por los hermanos Mckee.

BIBLIOGRAFÍA

- [64] V. DOBROVOLSKI, K. ZABLONSKI, A. RADCHIK, and L. ERLIJ. *Elementos de máquinas*. Moscú: Editorial MIR, 1976.
- [65] V.M. FAIRES and F.P. BOCANEGRA. *Diseño de elementos de máquinas*. Montaner y Simon, 1977.
- [66] R.L. NORTON, G.S. GARCÍA, and C.M.C. CASTELLO. *Diseño de máquinas*. Prentice Hall México;, 1999.

Capítulo 14

METROLOGÍA EN LA EXPERIMENTACIÓN

La redondez, la rugosidad y el claro radial, son los principales parámetros microgeométricos que influyen en el desempeño del cojinete, así que estos, son propiedades que pueden ser controladas para que el cojinete alcance un alto desempeño, por tanto, es importante utilizar los dispositivos adecuados que permitan realizar una buena medición para lograr las dimensiones adecuadas de estos parámetros, cuyo último fin es ayudar al buen establecimiento del espesor mínimo de película que por pocos milímetros puede llegar a hacer la diferencia en la estabilidad de la lubricación hidrodinámica. En el cuadro 14.1, se muestra algunos valores característicos del espesor de película para diferentes aplicaciones.

Cuadro 14.1: Espesores mínimos de película según su uso

Metal antifricción	Cojinetes usados en	Espesor de película lubricante
Metal blanco	Motores de baja revolución	$\geq 0,019$ [mm]
Bronce, acabado fino	Aviones y automóviles	$\geq 0,0025$ [mm]
Metal rosado (Babbitt)	Turbogeneradores	$De 0,075$ [mm] a $0,125$ [mm]

Fuente Cojinetes de Deslizamiento y Lubricación, Hernán Rojas, Publicaciones UIS, 1983.

A lo largo de esta sección se presenta algunos elementos de medición importantes para el control de la holgura radial y finalmente se realiza una comparación de estos con base en un estudio metrológico realizado por investigadores de la Universidad de Queenslan y por la Escuela de ingeniería de la Universidad de Melbourne en Australia [67]. Este estudio experimental mide la deficiencia en la redondez (out-of-roundness) y el claro radial de los cojinetes hidrodinámicos con alta precisión, examinando el impacto sobre el espesor mínimo de película.

Se debe tener en cuenta que varios estudios experimentales demuestran que la metrología del claro radial juega un papel muy importante no sólo en el fabricante del cojinete sino también en el usuario, pues al ser consciente de este parámetro exigirá precisión y

esto ocasionará que el diseñador de los cojinetes también se le reste importancia a este hecho. Teóricamente un claro radial no debe variar más de los 16 [μm], pues para un claro radial de 90 [μm], se tiene que por cada micrometro adicionado el espesor mínimo de película se reducirá en un 1% y esto empezará a complicar el problema (Chiu and Kay, 1974).

Para realizar la medición del claro radial de un cojinete, se puede diseñar un cojinete con base en la norma ESDU 84031, que es un método que permite realizar pruebas a un cojinete hidrodinámico de espesor mínimo de película igual de 16 [μm]. Cuando se realice la fabricación de este cojinete es importante comprobar sus dimensiones de acuerdo a lo establecido por los planos de la norma europea y además utilizar diferentes dispositivos de medida para tener un óptimo cojinete que permita ser un gran elemento de pruebas.

Como dispositivos importantes para la medición de la holgura radial, con base en el estudio experimental antes nombrado, se tiene: el sigmascope, el hole test gauge, el calibrador vernier y el metroscopio, el lector puede realizar el estudio detenido de cada uno de estos y de otros de manera externa, ya que la profundidad en la teoría de estos está fuera del alcance de los objetivos del presente trabajo.

14.1. SIGMASCOPE

Instrumento de medida portátil, que proporciona una medición rápida y simple de una superficie con o sin necesidad de contacto directo, que mide específicamente la conductividad (el sigma) de los metales no magnéticos; por tanto, se basa en la propiedades magnéticas de los materiales utilizando el principio de inducción magnética a través de las corrientes de eddy, las cuales son corrientes eléctricas circulantes inducidas por un campo magnético alterno en un conductor aislado, también llamadas corrientes parásitas o de Foucault, como se muestra en la figura 14.1, que permiten identificar o diferenciar entre una amplia variedad de condiciones físicas, estructurales y metalúrgicas en partes metálicas ferromagnéticas y no ferromagnéticas, y en partes no metálicas que sean eléctricamente conductoras. La conductiva eléctrica (sigma) medida con este dispositivo se rige de acuerdo a la norma DIN EN 2004-1 y ASTM E 1004.

Figura 14.1: Dispositivo Sigmascope

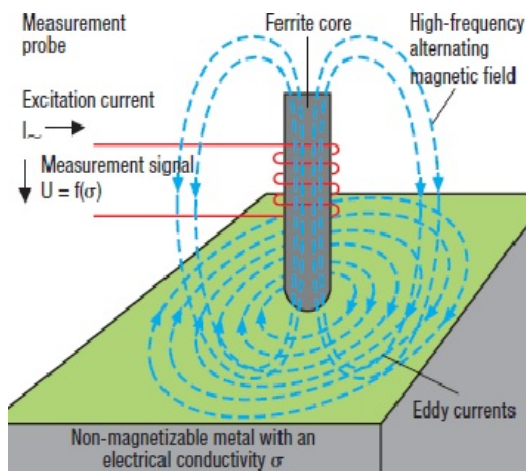


Fuente Datasheet SIGMASCOP® SMP10, de Fisher Company

14.1.1. Principio de Funcionamiento

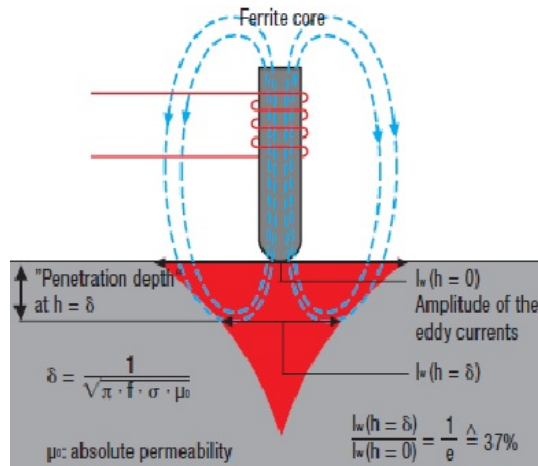
El principio de la prueba se basa en el proceso de inducción electromagnética, el cual incluye una bobina de prueba (sonda del dispositivo) a través de la cual se hace pasar una corriente alterna. El flujo de la corriente variante en una bobina de prueba produce un campo magnético variante alrededor de la bobina, el cual es conocido como campo primario, cuando un objeto (cojinete) de prueba eléctricamente conductor es colocado en el campo primario, una corriente eléctrica será inducida en el objeto y según de la profundidad alcanzada por las corrientes de Eddy se puede conocer a que distancia se encuentra otra superficie sólida, como se muestran en las figura 14.214.3.

Figura 14.2: Corrientes de Eddy



Fuente *Ídem*

Figura 14.3: Profundidad de las corrientes Eddy



El Display mostrado en la figura 14.4, muestra algunas funciones que tiene este tipo de dispositivos como: variar la frecuencia de la medición, la temperatura a la que se toma la prueba para compensar la conductividad eléctrica, la desviación estándar y el tipo de unidades de medida con las que se puede trabajar, IACS (International Annealed Cooper Standard, Estándar Internacional de Cobre no Aleado) permitirá conocer el porcentaje de cobre en la aleación y que nivel (alto, medio o bajo) de conductividad se puede tener.

Figura 14.4: Display del Sigmascope



14.1.2. Aplicaciones

- Medición de la conductividad eléctrica de todos los metales no magnéticos, inclusive del acero inoxidable, por ejemplo monedas de euro.

- Medición de la dureza y resistencia de materiales tratados térmicamente, como las aleaciones de aluminio, el dispositivo permite la inspección para daño por calor.
- Medición del contenido de fósforo en el cobre.
- Monitoreo de los procesos de deposición de componentes químicos, como se presenta en la aleaciones de Cobre- Cromo.
- Determinación del grado de pureza del material% (IACS).
- Verificación de la homogeneidad de las aleaciones .

14.2. HOLE TEST GAUGE

Dispositivo que permite realizar la medición entre dos superficies internas de una manera exacta con una precisión que oscila entre los 0.002 y 0.005 [mm] dependiendo del modelo del equipo, en el mercado se puede encontrar el dispositivo análogo o digital. El principio de funcionamiento es tan sencillo como el de un calibrador Vernier, con la diferencia que éste permite medir dos superficies de manera más efectiva y en formas geométricas de los objetos más compleja, pues su disposición física varía según el modelo, llegándose a utilizar dispositivos micrométricos para diámetros internos más pequeños, en la figura 14.5, se muestran algunos de ellos.

Figura 14.5: Calibradores para prueba de orificio



Fuente Datasheet Mitutoyo®, hole test.

14.3. METROSCOPE

Los resultados mostrados en el estudio, muestran que las medidas de Vernier son las más pobres en términos de precisión y los resultados del Sigmascoppe son las más pobres en términos de repetibilidad y esto se debe a que con este dispositivo se tiene el inconveniente de la sensibilidad del posicionamiento del cursor. La experimentación demostró también que el mejor instrumento de medición es el calibrador de orificio, pero los mejores resultados con una precisión de hasta 5 [μm] fueron los obtenidos con el metroscoppe, como se muestra en la figura 14.6.

Figura 14.6: Metroscope



Fuente , Journal bearing performance and metrology issues, Sharma, S. and Hargreaves, D. and Scott, W. Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering ,2009.

Los principales errores del claro radial se debe a los errores en la medición y a la redondez deforme (out-off). Los errores de medición se deben principalmente a la calidad inherente de cada uno de los equipos y a la manipulación de estos. Los resultados muestran contundentemente que el calibrador de Vernier no es el mejor equipo para medir los elementos del cojinete que requieren tanta precisión debido al equipo como tal y a los errores humanos al momento de la medición tal como pasa con el sigmascope y el metroscope que son aparatos que requieren de una comparación óptica, como se muestra en el cuadro 14.2.

Cuadro 14.2: Tablas de comparación de dispositivos

(a) Mediciones ID en cojinetes					(b) Mediciones ID en cojinetes: análisis estadístico			
Observación No.	Vernier calliper	Sigmatoscope	Hole test gauge	Metroscope	Instrumento	Desviación estándar	Mediana	Promedio
1	39,90	39,948	40,015	40,005	Vernier	0,222962	40,005	40,043
2	40,01	39,974	40,000	40,000	Sigmatoscope	0,302116	39,965	39,8355
3	40,00	39,951	40,005	40,002	Hole test gauge	0,018421	40,0025	39,9953
4	39,95	39,956	40,005	40,005				
5	39,96	40,000	39,990	40,000	Metroscope	0,002121	40,002	40,0025
6	40,02	39,989	39,990	40,005				
7	40,03	40,005	40,010	40,002				
8	40,02	40,008	40,010	40,002				
9	40,66	39,282	39,966	40,004				
10	39,88	39,246	39,962	40,000				
Promedio	39,986	39,9783	40,0031	40,0026				

Fuente Journal bearing performance and metrology issues, Sharma, S. and Hargreaves, D. and Scott, W. Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering ,2009.

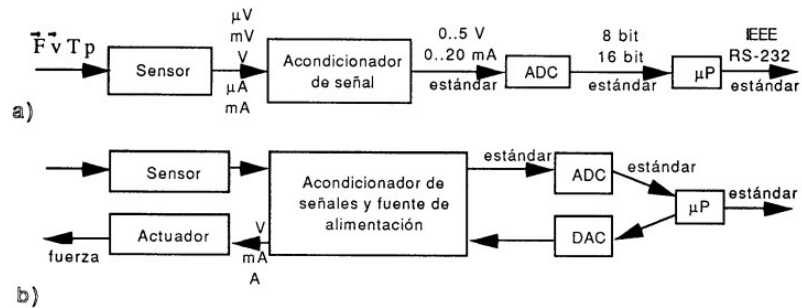
14.4. OTRO TIPO DE INSTRUMENTACIÓN

Los instrumentos son dispositivos de medida o de control de las variables de un proceso. Tradicionalmente se distinguía según la terminación en: -scopio (cualitativo y visual), -metro (cuantitativo y visual), y -grafo (registro cuantitativo sobre papel), aunque existe una tendencia general a usar siempre la terminación -metro, y a que toda la instrumentación sea eléctrica, para aprovechar la potencia de tratamiento de la información que tienen los microprocesadores digitales, siguiendo el esquema general de la figura 14.7. En la figura ADC y DAC son convertidores analógico-digital y digital-analógico, respectivamente, los cuales pueden estar dedicados a una línea, o multiplexados (exploración secuencial de líneas), [μP] es microprocesador, y las otras etiquetas corresponden a ejemplos representativos. El tratamiento digital posibilita las siguientes tareas:

- Muestreo redundante para minimizar el efecto del ruido aleatorio.
- Muestreo simultáneo para obtener variables combinadas.
- Muestreo rápido para señales transitorias.
- Presentación de datos elaborados en tiempo real,

que de otra forma resultan impensables o muy complejas (se puede utilizar un registro masivo como la fotografía a alta velocidad, como se muestra en la sección 17.3.3y luego hacer el procesador en diferido).

Figura 14.7: Diagrama de bloques de los flujos de información en los procesos estándar de medida a), y control b).



Muchos sensores están normalizados (p.e. termopares), muchos acondicionadores de señal son también estándar. Los acondicionadores de señal incluyen a veces otros sensores, como los sensores del punto cero de los termopares. En realidad, en lugar de hacer una acondicionamiento de señal especial para cada sensor (p.e. linealización de la respuesta del termopar y diferencia de temperatura de referencia), se pueden usar simples acondicionadores de rango de voltaje o intensidad, y dejar todas las correcciones para el microprocesador, aunque no es normal porque se penaliza severamente la velocidad de muestreo, que actualmente suele ir de $1 [Hz]$ a varios $[kHz]$ (los de $[MHz]$ son especiales y se usan en digitalización de imágenes).

Los equipos de medida y de control pueden incluir todos los componentes desde el sensor al microprocesador (sistemas autónomos, que son como ordenadores, pero con pantalla, teclado y almacenamiento de información rudimentarios), o bien excluir el microprocesador (sistemas de tarjetas enchufables), en cual puede ser entonces compartido con otras aplicaciones informáticas.

Todo instrumento tiene una curva de calibración característica que relaciona la salida del instrumento con el valor patrón de la magnitud correspondiente (si no se sabe, habrá que determinarla experimentalmente con ayuda de otros instrumentos). Normalmente sólo se calibran unos pocos puntos y el resto se extrapola con leyes sencillas. La curva de calibración debe ser comprobada de vez en cuando, según la confianza que merezca el instrumento.

Características metrológicas

Las características metrológicas de un instrumento de medida son:

- Rango
- Precisión
- Resolución
- Sensibilidad

- Relación señal/ruido (SNR)
- Tiempo de respuesta
- Interfase

Incertidumbre en la medida

No es posible aislar totalmente un sistema y por ello el valor de una variable fluctuará con el tiempo debido a perturbaciones incontroladas o incontrolables, por mucho que se trate de impedirlo. La medida de esa variable acusará esas fluctuaciones si trata de ser precisa, y el problema que subyace es cómo cuantificar la incertidumbre asociada a un proceso de medida.

En última instancia se sabe que el proceso mismo de medir conlleva una perturbación del mesurando, limitada inferiormente por el Principio de incertidumbre de Heisenberg¹, que puede expresarse en la forma $\Delta E \Delta t \geq h/(4\pi)$, donde ΔE es la energía que se le comunica al sistema a medir (variará su estado) y Δt es el tiempo que dura la medida. Pero como $h = 6,6 \times 10^{-34} [Js]$, la incidencia práctica de esta incertidumbre en la medida de variables macroscópicas es despreciable.

En realidad, es la influencia de parámetros que no se sabe o no se puede controlar bien durante la duración de la medida, y de las imperfecciones de los instrumentos involucrados, lo que explica las fluctuaciones en la medida, que dan lugar a esa incertidumbre que se trata aquí de cuantificar y que a veces se llama error de la medida, aunque no se puede hablar de un valor "exacto" porque no existe, como se ha dicho antes, y además la palabra error tiene un sentido de culpabilidad inaceptable (supuesto que se mida correctamente).

En definitiva, se trata de determinar un valor probable (la media, la mediana o la moda) y un intervalo de confianza (la desviación típica, el rango en el que está el 99 % de las medidas, etc). Los métodos estadísticos sirven también para correlacionar variables dependientes, correlaciones temporales de una misma variable, etc.

Termoresistencias

Si se arrolla un hilo conductor sobre un soporte aislante (varilla o placa) y se hace circular una corriente de intensidad constante (para que no influya el efecto Joule), las variaciones de temperatura ocasionan variaciones de resistividad y por tanto variaciones de voltaje entre sus bornes. Si se utiliza una alimentación a voltaje constante, se dispone la termoresistencia en un brazo del puente de Wheatstone, y, para compensar la resistencia del hilo de prueba, se prolonga el brazo adyacente también hasta el sensor, por lo que

¹Werner Karl Heisenberg (Wurzburgo, Alemania, 5 de diciembre de 1901 – Múnich, 1 de febrero de 1976) fue un físico alemán. Es conocido sobre todo por formular el principio de incertidumbre, una contribución fundamental al desarrollo de la teoría cuántica. Este principio afirma que es imposible medir simultáneamente de forma precisa la posición y el momento lineal de una partícula. Heisenberg fue galardonado con el Premio Nobel de Física en 1932. El principio de incertidumbre ejerció una profunda influencia en la física y en la filosofía del siglo XX.

de éste salen tres o cuatro hilos. Si se utiliza una alimentación a intensidad constante, también salen cuatro hilos del sensor: dos por donde llega la corriente y otros dos que van al voltímetro.

El equipo es caro, pero la respuesta es muy lineal y el intervalo de temperaturas de utilización grande, aunque tiene mucha inercia (son grandes para que den más señal; el sensor normalizado es de $100 [\Omega] a 0 [^{\circ}C]$). El más usado es el de platino, para el cual $d \ln R / dT \approx 0,004 [K^{-1}]$ desde $-250 [^{\circ}C] a 950 [^{\circ}C]$ con una incertidumbre mínima de $\pm 0,001 [^{\circ}C]$, aunque los aparatos normales sólo dan $\pm 0,1 [^{\circ}C]$.

También se usa el níquel, para el cual $d \ln R / dT \approx 0,007 [K^{-1}]$ desde $-250 [^{\circ}C] a 300 [^{\circ}C]$. Se los conoce como RTDs (Resistance Temperature Detector) y la mayoría de los sistemas de adquisición de datos ya están preparados para aceptar directamente la pequeña señal de los RTD estándar.

Termopares

Si con dos hilos conductores distintos, se establece un circuito eléctrico abierto y se aplica una diferencia de temperatura entre las uniones heterogéneas, aparece una diferencia de potencial o fuerza electromotriz (f.e.m.). Estos termómetros son los más utilizados en la práctica, ya que, pese a su baja sensibilidad ($\approx 10^{-5} [V/K]$), su no linealidad y su necesidad de conocer una temperatura de referencia, son muy baratos, muy cómodos, tienen una inercia mínima y pueden funcionar en cualquier intervalo de temperatura, desde $-270 [^{\circ}C] a 3000 [^{\circ}C]$, aunque las inhomogeneidades en los hilos y la deriva secular en sus propiedades (debido a la metastabilidad de los tratamientos que se le imponen: trefilado, evaporación, oxidación, corrosión, difusión en la soldadura, etc.) hace que la precisión sea sólo de $\pm 0,1 [^{\circ}C]$ y se requiera una calibración periódica (p.e. cada mes).

Aunque los semiconductores darían mis f.e.m., su fragilidad hace que sólo se utilicen hilos metálicos. La unión de los hilos puede ser por simple trenzado, por soldadura de aporte (al estaño, para baja temperatura), o por soldadura autógena en atmósfera controlada (la eléctrica es la mejor). Conviene que la soldadura de prueba esté protegida por una vaina, que será cerámica en ambientes químicamente hostiles y metálica en ambientes eléctricamente hostiles (en este último caso no debe haber contacto entre la unión y la vaina). La protección y el grosor de los hilos alargan la vida, pero a veces es más importante la rapidez de respuesta o el pequeño tamaño (puede llegarse hasta algunos micrómetros). Los termopares están estandarizados y se designan por una letra según el cuadro 14.3, en la figura 14.8, se muestra la salida que suministran.

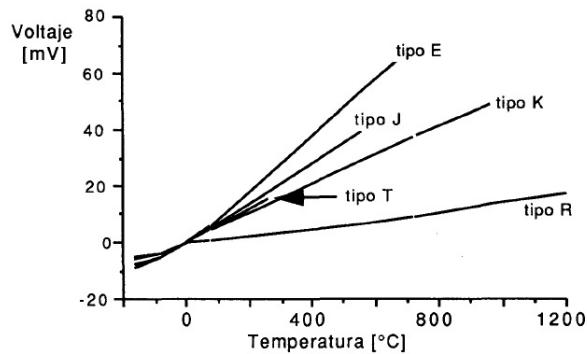
Cuadro 14.3: Termopares normalizados

Tipo	Hilos (+/-)	Rango	Precisión	Comentarios
T	Cu / Constantán	-200 [°C] a 300 [°C]	±1 [°C]	Es el mejor en su rango
J	Fe / Constantán	0 [°C] a 750 [°C]	±2,2 [°C]	Requiere antioxidación
E	Crómel / Constantán	-200 [°C] a 900 [°C]	±1,7 [°C]	Es el de mayor f.e.m
K	Cu / Alúmel	-200 [°C] a 1200 [°C]	±2,2 [°C]	Uso general
R	PtRh (13 %) / Pt	0 [°C] a 1500 [°C]	±1,5 [°C]	Necesita protector
S	PtRh (10 %) / Pt	0 [°C] a 1500 [°C]	±1,5 [°C]	Necesita protector
B	PtRh (30 %) / Pt (6 %)	870 [°C] a 1700 [°C]	±0,5 [°C]	Necesita protector
N	Nicrosil / Nisil	0 [°C] a 1250 [°C]	±2,2 [°C]	Es como el K y se oxida menos

Fuente Metrología Térmica, I. Martínez

Figura 14.8: Respuesta (en milivoltios) de los principales termopares normalizados

Nota: Constantán=CuNi(55/45), Crómel=NiCr(90/10), Alúmel=NiMnAlSi(95/L/2/1), Nicrosil=NiCrSi(84,5/14/1,5), Nisil=NiSi(95,5/4,5)



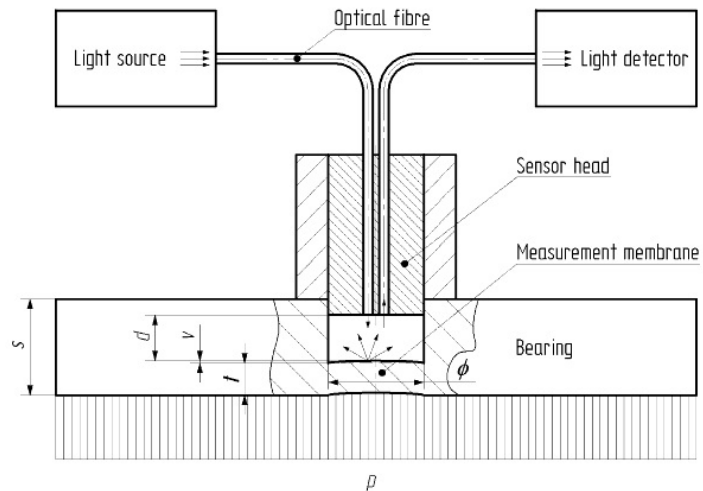
Fuente *Ídem*

Sensor óptico de presión

Para la determinación experimental de la presión de película de aceite, sensores de presión fueron utilizados. En el trabajo de Valkonen [160], los sensores de presión se basan en la tecnología de fibra óptica que ofrece beneficios tales como la falta de sensibilidad a la contaminación electromagnética y la capacidad de transmitir información a grandes

distancias. Los sensores ópticos se integraron en el cojinete de tal manera que la superficie de deslizamiento del cojinete se mantenía sin cambios y actuaba como una membrana de medición, en la figura 14.9, se muestran su principio de funcionamiento.

Figura 14.9: Principio de funcionamiento del sensor óptico



Fuente Oil film pressure in hydrodynamic journal bearings, A. Valkonen.

Contiene una fuente de luz de fibra óptica que ilumina la membrana de medición con el espesor t y un diámetro ϕ del cojinete con el espesor s . Parte de la luz reflejada de la membrana de medición se acopló a otra fibra óptica. La intensidad de la luz acoplada fue medida por el detector de luz. La intensidad de la luz depende de la distancia d , entre el sensor y la membrana de medición. La variación de la presión de la película de aceite p sobre la superficie de deslizamiento del cojinete causa la variación en la deflexión v de la membrana de medición y, por tanto tanto, también en la distancia d .

BIBLIOGRAFÍA

- [67] S. SHARMA, D. HARGEAVES, and W. SCOTT. Journal bearing performance and metrology issues. *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*, 32:6, 2009.
- [68] A. VALKONEN. Oil film pressure in hydrodynamic journal bearings. 2009.

Capítulo 15

MODELADO DE SISTEMAS DINÁMICOS

El modelado de sistemas dinámicos, es la obtención de un conjunto de ecuaciones matemáticas que describen el comportamiento de un sistema físico [69]. A partir de la utilidad que se vaya a tener el modelo, se decide que señales son las de entrada o excitación, las de respuesta o salida, que variables van internas y cuáles son los parámetros (constantes) a tener en cuenta. También puede dibujarse inicialmente bloques (sin ecuaciones matemáticas) que describan la interacción entre las variables, luego se pueden escribir las relaciones matemáticas que relacionan las variables de entrada y salida de cada elemento del conjunto. Se añaden las ecuaciones que ligan unos elementos con otros y finalmente se obtiene un modelo mediante funciones de transferencia del conjunto.

Para tener un poco más claro el concepto de de modelos dinámicos primero se debe aclarar las diferencias entre sistema y experimentos, profundizar un poco mas en el campo de la simulación y finalmente los modelos, su construcción, clases, metodología, análisis y algunos ejemplos de sistemas dinámicos.

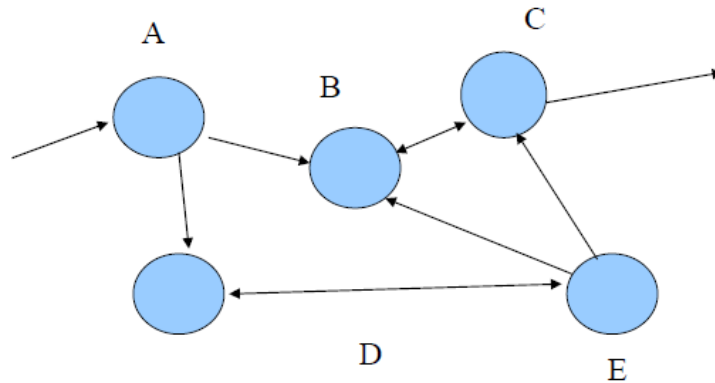
15.1. SISTEMAS Y EXPERIMENTOS

¿Qué es un sistema? Un sistema puede ser casi cualquier cosa. Un sistema puede contener subsistemas, que a su vez también son sistemas, como lo muestra la figura 15.1. Por otro parte, se puede decir que un sistema es un objeto o colección de objetos operativamente interrelacionadas del que se interesa considerar fundamentalmente su comportamiento global. El deseo de muchos de estudiar ciertas propiedades seleccionadas de los objetos es central en esta definición. El aspecto de “estudio” es importante, a pesar del hecho que es subjetivo. La selección y definición de lo que constituye un sistema es algo arbitrario y debe estar guiado por el uso que se va hacer del sistema.

1. Estudiar un sistema para comprenderlo, con la finalidad de construirlo, así se ve desde el punto de vista de la ingeniería.
2. Satisfacer la curiosidad humana, por ejemplo, para comprender más acerca de la naturaleza, es desde el punto de vista de la ciencia natural.

Estas son las dos grandes motivaciones a destacar del porque es importante estudiar un sistema.

Figura 15.1: Configuración de un sistema



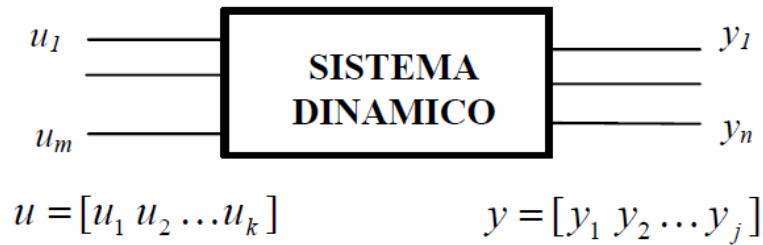
Una propiedad importante de los sistemas es que deberían ser observables. Algunos sistemas, en lo que no se incluyen los grandes sistemas naturales como el universo, son también controlables ya que podemos influir en su comportamiento a través de ciertas entradas, es decir:

- Las entradas de un sistema son las variables del entorno que influyen sobre el comportamiento del sistema. Estas entradas pueden o no ser controlables por nosotros.
- Las salidas de un sistema son las variables determinadas por el sistema y que pueden influir sobre el entorno que le rodea.

En muchos sistemas, las mismas variables actúan como entrada y salida. Se habla de conducta causal, a las relaciones o influencias entre las variables que no tienen una dirección causal, que es el caso para las relaciones descritas por ecuaciones. Por ejemplo, en un sistema mecánico las fuerzas del entorno influyen sobre el deslizamiento de un objeto, pero por otra parte el desplazamiento del objeto afecta a las fuerzas entre el objeto y el entorno. En este caso, la decisión de que es entrada y que es salida es fundamentalmente una elección del observador.

Un sistema puede ser considerado como un proceso que responde ante unas entradas para producir unas salidas, como se ve en la figura 15.2.

Figura 15.2: Entradas y salidas



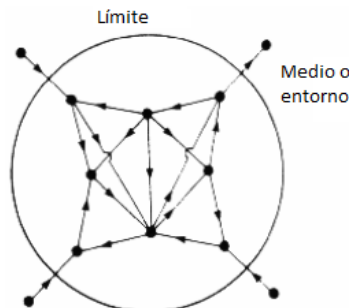
15.1.1. Límites de un sistema

- Existen unos límites que separan el sistema del medio ambiente en el que está incluido.
- Los límites del sistema deben escogerse de tal manera que se incluyan en su interior aquéllos elementos necesarios para generar el comportamiento que muestra el sistema
- La selección de elementos estima cuales son los que interactúan para producir el comportamiento a investigar (elementos interiores), excluyendo los que son irrelevantes (elementos exteriores).

Regla para determinar los límites de un sistema

Las relaciones causa-efecto entre el medio y el sistema son unidireccionales, mientras que los elementos en el interior del sistema están relacionados por medio de *bucles de realimentación*¹, como se muestra en la figura 15.3, que determinan una fuerte interacción entre ellos. Con el concepto de límite, se puede hacer una clasificación de los elementos que forman un sistema: elementos exógenos² y elementos endógenos³.

Figura 15.3: Límites de un sistema



¹Un bucle de realimentación es una cadena cerrada de acciones elementales entre los elementos de un sistema.

²Susceptibles de ser modificados desde el exterior.

³Su comportamiento viene determinado por la estructura del sistema

15.2. EXPERIMENTO

De acuerdo a la definición de sistema, la observabilidad es esencial si se desea estudiar un sistema. Se debe al menos ser capaz de observar algunas de las salidas del sistema. Podremos aprender más acerca del sistema si somos capaces de excitarlo controlando sus entradas. Este proceso se llama experimentación. Es decir:

Un experimento es el proceso de extraer información de un sistema excitando sus entradas

Para poder realizar un experimento sobre un sistema, éste debe de ser controlable y observable. Se aplican un conjunto de condiciones externas a las entradas accesibles y se observa la reacción del sistema al medir aquellas de sus salidas que son accesibles. Una de las desventajas del método experimental es que para un gran número de sistemas muchas entradas no son ni accesibles y controlables. Estos sistemas están bajo la influencia de entradas inaccesibles, algunas veces llamadas entradas de perturbación. Igualmente, a menudo muchas de las salidas que son realmente útiles no están accesibles, con lo que no pueden ser medidas. Éstas suelen denominarse estados internos del sistema. Surgen también una serie de problemas prácticos asociados con la realización de un experimento, por ejemplo:

- El experimento podría ser demasiado *costoso*: investigar la resistencia de los barcos construyéndolos y haciéndolos colisionar es un método muy caro de obtener información.
- El experimento podría ser demasiado *peligroso*: no es aconsejable entrenar a los operarios de las plantas nucleares acerca de cómo solventar situaciones peligrosas, poniendo para ello el reactor en estados de funcionamiento de riesgo.
- El sistema sobre el que se desea experimentar podría *no existir aún*. Esto sucede típicamente con sistemas que están aún por diseñar o fabricar.

Las desventajas del método experimental nos llevan al concepto de modelo. Si hacemos un modelo de un sistema y el modelo es lo suficientemente realista, entonces podemos emplear este modelo para investigar y responder a muchas preguntas referentes al sistema real.

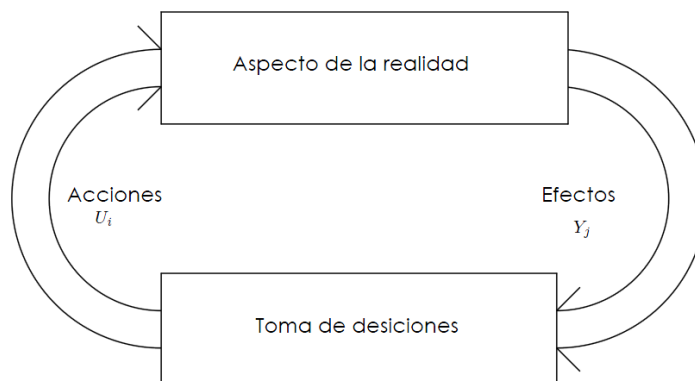
15.3. MODELO

Debido a las definiciones antes mencionadas acerca de sistemas y experimento, se puede ahora intentar definir la noción de modelo: Un modelo de un sistema es cualquier cosa a la que se puede aplicar un “experimento”, con el fin de responder a preguntas respecto del sistema.

Esto implica que puede usarse un modelo, para responder preguntas acerca de un sistema, sin realizar experimentos sobre el sistema real. En su lugar, realizamos “experimentos” simplificados sobre el modelo. El modelo, a su vez, puede considerarse como un sistema simplificado que refleja las propiedades del sistema real. En el caso más simple, el modelo puede ser simplemente cierta información que se usa para responder a preguntas acerca del sistema. En la figura 15.4, se muestra la representación formal de un modelo.

Dada esta definición, cualquier modelo también constituye un sistema. Los modelos, al igual que los sistemas, son por naturaleza jerárquicos⁴. Si se separa una parte del modelo, se obtiene un nuevo modelo, que es válido para un subconjunto de los experimentos para los que a su vez el modelo original también es válido. Un modelo está siempre relacionado con el sistema al que representa y con los experimentos a los que puede estar sujeto.

Figura 15.4: Relación que liga las acciones U_i (entradas), con los efectos Y_j (salidas), según $Y = R(U)$, que constituye la representación formal de un modelo.



Hablamos de diferentes clases de modelos dependiendo de cómo se representa:

- **Modelo mental:** Una sentencia como “esta persona es fiable” nos ayuda a responder a preguntas acerca de la conducta de esa persona en diversas situaciones.
- **Modelo verbal:** Esta clase de modelo se expresa mediante palabras. Por ejemplo, la frase “si se aumenta el límite de velocidad, entonces ocurrirán más accidentes” es un ejemplo de un modelo verbal. Los sistemas expertos es una técnica que formaliza modelos verbales.
- **Modelo físico:** Se trata de un objeto físico que reproduce algunas propiedades de un sistema real, para ayudarnos a responder preguntas del sistema. Por ejemplo, en la fase de diseño de edificios, aviones, etc., frecuentemente se construyen pequeños modelos físicos con la misma forma y apariencia que los objetos reales a estudiar, por ejemplo con respecto a sus propiedades aerodinámicas y estéticas.

⁴Serie de cosas ordenadas gradualmente.

- **Modelo matemático:** Es una descripción de un sistema donde las relaciones entre las variables del sistema se expresan de forma matemática. Las variables pueden ser cantidades medibles, tales como el tamaño, la longitud, el peso, la temperatura, el nivel de desempleo, el flujo de información, la velocidad medida en bits por segundo, etc. La mayoría de las leyes de la naturaleza son modelos matemáticos. Por ejemplo, la Ley de Ohm describe la relación entre la corriente y la caída de tensión en una resistencia; las Leyes de Newton describen relaciones entre la velocidad, la aceleración, la masa, la fuerza, etc.

15.4. SIMULACIÓN

Anteriormente se mencionó la posibilidad de efectuar “experimentos” sobre modelos, en lugar de sobre los sistemas reales que corresponden a los modelos. Este es realmente uno de los usos principales de los modelos, y se denota por el término simulación, del Latín *simulare*, que significa fingir. La definición de simulación sería: Una simulación es un experimento efectuado sobre un modelo. En analogía con nuestra definición previa de modelo, esta definición de simulación no impone que el modelo deba ser representado matemáticamente o mediante un software. Es importante recalcar que las dos partes de la simulación, es decir, la descripción del experimento y del modelo, son entidades conceptualmente separadas. Por ejemplo, un modelo es válido sólo para una cierta clase de experimentos.

15.5. CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

En principio, existen dos fuentes principales de conocimiento útil para la construcción de modelos matemáticos de los sistemas:

- La *experiencia general* reunida en los dominios relevantes de la ciencia y la tecnología, que se encuentra disponible en la literatura y que poseen los expertos en estas áreas. Esto incluye las leyes de la naturaleza, por ejemplo, las leyes de Newton para los sistemas mecánicos, las leyes de Kirchhoff para los sistemas eléctricos, las relaciones aproximadas que se aplican a sistemas no técnicos basados en teorías económicas o sociológicas, etc.
- El propio *sistema*, es decir, observaciones y experimentos realizados sobre el sistema que necesitamos modelar.

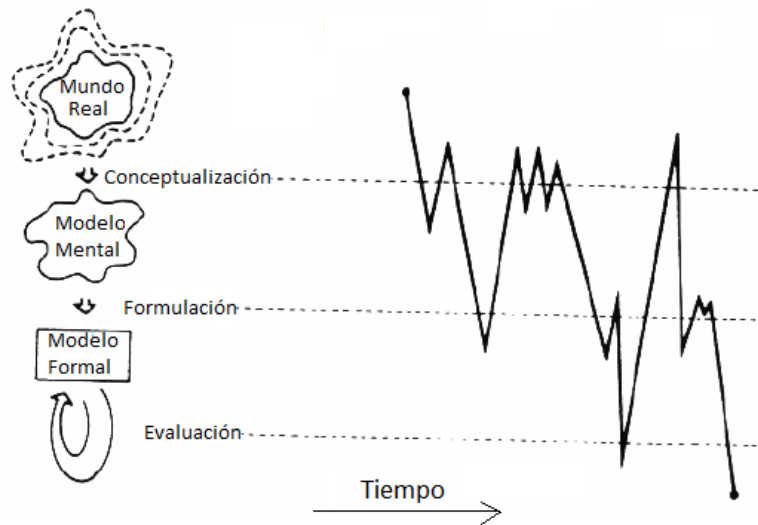
Además del conocimiento anterior referente al sistema, existe también un conocimiento especializado acerca de la construcción de modelos, en dominios y aplicaciones específicos, así como mecanismos genéricos para manejar hechos y modelos. Por ejemplo:

- **Experiencia en la aplicación:** dominar el área y las técnicas de la aplicación, lo cual permite usar todos los hechos relativos a una aplicación de modelado específica.

• Ingeniería del software y del conocimiento: conocimiento genérico acerca de cómo definir, manejar, usar, y representar modelos y software. Por ejemplo, la orientación a objetos, las técnicas de componentes de sistemas, la tecnología de los sistemas expertos, etc.

De la misma manera existen tres fases para que la construcción de modelos sea mas fácil y eficiente, en la figura 15.5 se ve de manera mas detallada el proceso de construcción:

Figura 15.5: Estructura de las tres fases para la construcción de modelos



Fase de conceptualización

Consiste en la obtención de una comprensión mental de un cierto fenómeno del mundo real:

1. Obtención de información a través de la opinión de expertos y la literatura al respecto.
2. Definición de aspectos del problema a resolver.
3. Particularización del comportamiento dinámico del sistema mediante la estructura más simple que lo genere.
4. Identificación de elementos del sistema, lo que llevará a establecer los límites del sistema.

Fase de formulación

Trata de representar los elementos manejados en la fase anterior por medio de un lenguaje formal:

1. Establecimiento de diagramas formales.
2. Cálculo de ecuaciones dinámicas del modelo.
3. Implementación en computador utilizando un lenguaje apropiado que procese el conjunto de ecuaciones dinámicas (Simulink, Modélica, etc.)

Fase de evaluación

Consiste en el análisis del modelo así como el sometimiento a criterios de aceptabilidad:

1. Ensayos mediante simulación donde las hipótesis sobre las que se asienta el modelo y su consistencia.
2. Análisis de sensibilidad para estudiar la dependencia de las conclusiones extraídas del modelo con las variaciones de los parámetros que aparecen en el mismo.
3. El criterio de aceptabilidad será “evaluación generalizada”, que se tendrá en cuenta no solo las discrepancias predicción-observación, sino todos los aspectos cuantitativos y cualitativos del modelo.

Normas básicas para la construcción de un modelo

- Es necesario la descripción explícita del comportamiento dinámico, formada por el modo de referencia (gráficos), las hipótesis acerca de sus causas y los mecanismos básicos.
- Las hipótesis dinámicas se obtienen a través de una exploración combinada del comportamiento histórico del sistema con estructuras simples de comportamiento conocido.
- Los límites del sistema se deben elegir lo suficientemente amplios para acoger los procesos que generen el comportamiento dinámico.
- El objetivo del modelo no es predecir, sino ensayar las hipótesis dinámicas.
- El modelo inicial debe contener únicamente los mecanismos básicos que generen el modo de referencia.
- Para reducir la complejidad del modelo debe proceder a restringir el número de detalles.

15.6. CLASIFICACIÓN DE MODELOS

Nuevamente se reitera que un modelo de un sistema es básicamente una herramienta que permite responder interrogantes sobre este último sin tener que recurrir a la experimentación sobre el mismo. Es una representación siempre simplificada de la realidad (si el sistema físico existe) o es un prototipo conceptual. Son expresiones matemáticas que describen las relaciones existentes entre las magnitudes caracterizantes del sistema. Pueden ser sistemas de ecuaciones, inecuaciones, expresiones lógico-matemáticas. Pueden ser:

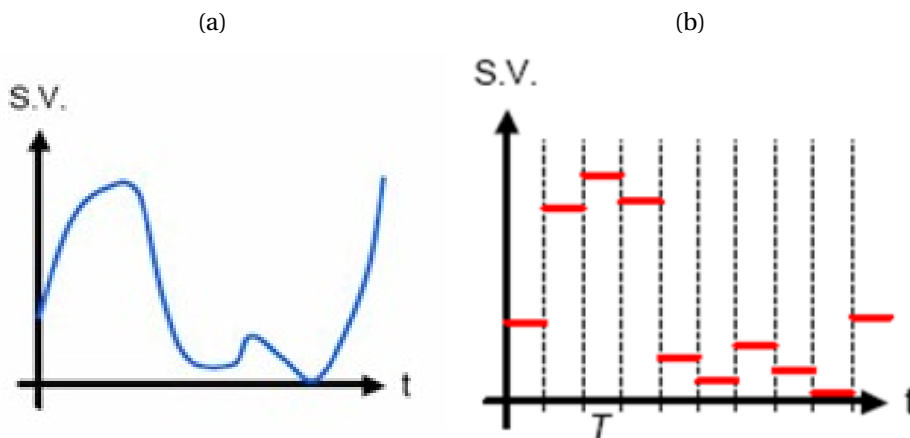
1. Tiempo continuo o tiempo discreto
2. Estáticos o dinámicos
3. Determinísticos o estocásticos
4. Parámetros distribuidos o parámetros concentrados
5. Paramétricos o No paramétricos
6. Lineales o No lineales
7. Estacionarios o no estacionarios
8. Físicos o matemáticos

Tiempo continuo o tiempo discreto

Continuo 15.6a: El estado de las variables cambia continuamente como una función del tiempo: $e = f(t)$

Discreto 15.6b: El estado del sistema cambia en tiempos discretos del tiempo: $e = f(nt)$

Figura 15.6: Tiempo continuo - Tiempo discreto

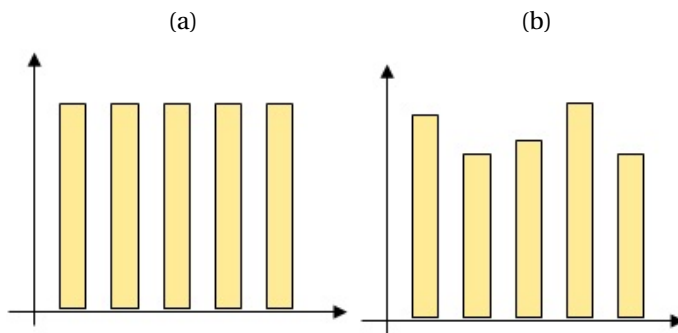


Estático o dinámico

Estático 15.7a: El estado de las variables no cambia mientras se realiza algún cálculo:
 $f[n(t)] = f[n(t+1)]$

Dinámico 15.7b: El estado de las variables puede cambiar mientras se realiza algún cálculo:
 $f[n(t)] \neq f[n(t+1)]$

Figura 15.7: Estático - Dinámico



Estocásticos o deterministas

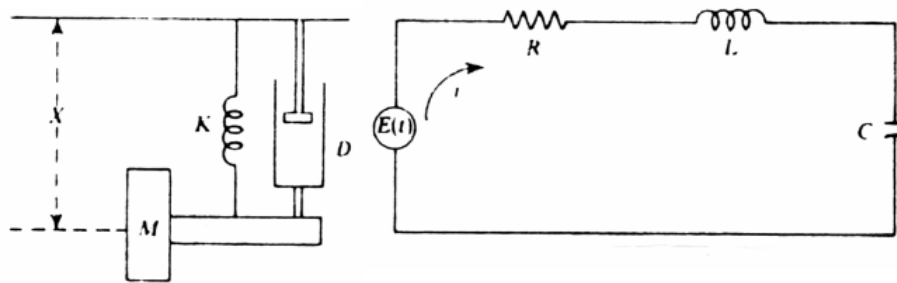
Estocásticos: El estado de la variable en el siguiente instante de tiempo no se puede determinar con los datos del estado actual. El método analítico utilizado: usa probabilidades para determinar la curva de distribución de frecuencias.

Deterministas: El estado de la variable en el siguiente instante de tiempo se puede determinar con los datos del estado actual. El método numérico utilizado: algún método de resolución analítica.

Físico o matemático

Los modelos **físicos**, como se muestran en la figura 15.8, se apoyan en una analogía entre el sistema bajo estudio y otro sistema de diferente naturaleza cuyo comportamiento es fácilmente determinable. La analogía se basa en una similitud subyacente entre las fuerzas que gobiernan el comportamiento de uno y otro sistema respectivamente.

Figura 15.8: Esquema modelo físico



Ejemplos de modelos representados en ecuaciones se presentan continuación:

1. Ecuación dinámica de sistema mecánico (15.1)
2. Ecuación dinámica de un sistema electrónico (15.2).

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E \quad (15.1)$$

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = F \quad (15.2)$$

Cuadro 15.1: Parámetros

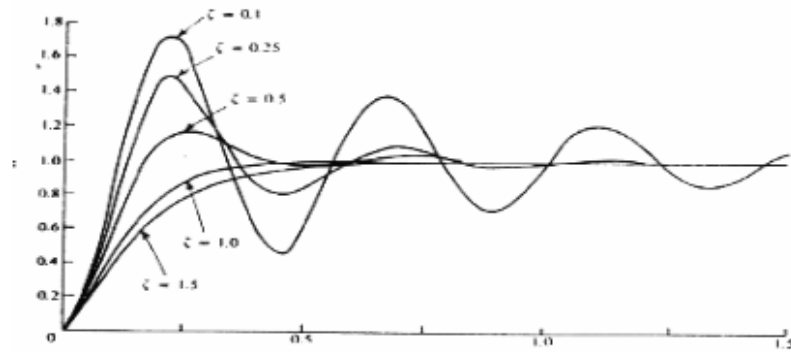
Desplazamiento	x	q	Carga
Velocidad	d_x/d_t	$I(d_q/d_t)$	Corriente
Fuerza	F	E	Voltaje
Masa	M	L	Inductancia
Cte Amortiguación	D	R	Resistencia
Rigidez	K	$1/C$	Capacitancia ⁻¹

Los modelos **matemáticos**, como se muestra en la figura 15.9, dan el comportamiento en forma de relaciones entre variables (ecuaciones) [70], cuya resolución pueden ser analítica o mediante simulación.

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \omega_x^2F$$

$$2\xi\omega_n = \frac{D}{M} \quad \omega_n^2 = \frac{K}{M}$$

Figura 15.9: Esquema modelo matemático



Es muy importante no perder de vista que los modelos descritos resultarán adecuados sólo para resolver determinados problemas y dentro de un rango de operaciones dado. Es decir, el sistema físico idealizado dependerá no sólo del sistema real en sí, sino también del problema a resolver y del intervalo de validez que se pretenda tener para el modelo resultante. Lamentablemente, no hay una metodología que nos permita realizar estas simplificaciones de forma sistemática. Esta etapa del modelado se resuelve en gran medida a partir de consideraciones sujetas a la experiencia y al conocimiento del proceso real. Sin embargo los sistemas complejos pueden habitualmente dividirse en subsistemas más simples de los cuales se encuentran modelos en base a simplificaciones ya probadas en problemas similares. Por eso es fundamental antes de comenzar a realizar las primeras simplificaciones de un sistema real, buscar en la literatura modelos de sistemas similares en los cuales se manifiesten los mismos fenómenos. Es muy importante tener en cuenta siempre que debido a que la obtención de un modelo se basa en la aplicación de hipótesis simplificadoras, los modelos tendrán validez siempre que se respeten las hipótesis mencionadas.

Con el objeto de analizar los parámetros que influyen en el comportamiento de la lubricación hidrodinámica, se dedican los siguientes capítulos para identificar la metodología, las herramientas matemáticas y mecanismos de validación cuando el problema en cojientes, tiene en cuenta la rugosidad de las superficies (capítulo 16), la cavitación del lubricante (capítulo 17), la temperatura del sistema (capítulo 18), el desalineamiento angular del eje (capítulo 19) y la turbulencia del lubricante (capítulo 20).

Una vez el problema sea tratado mediante un *modelo* más aproximado a la realidad, de él se obtienen resultados interesantes que describen de forma eficiente el fenómeno. Es por eso, que cada metodología se vincula con un sistema dinámico rotor cojinete y así comprender como los parámetros de la lubricación hidrodinámica afectan los coeficientes rotodinámicos (capítulo 21).

BIBLIOGRAFÍA

- [69] LI GARCÍA and C. RÉREZ. Modelado de sistemas dinámicos, editorial club universitario. Technical report, ISBN 84-8454-422-2, 2005.
- [70] B. VINAGRE. *Modelado y control de sistemas dinámicos caracterizados por ecuaciones integro-diferenciales de orden fraccional*. PhD thesis, PhD thesis, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid, 2001.

Capítulo 16

RUGOSIDAD DE LOS MATERIALES EN LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

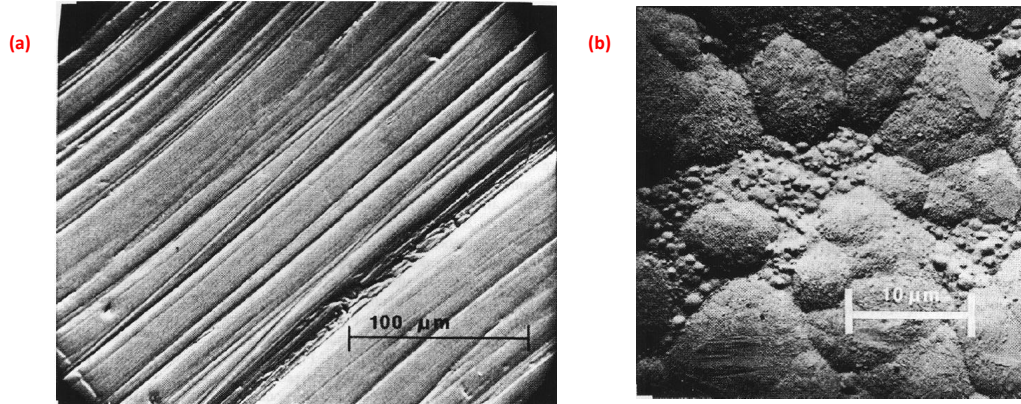
16.1. ¿QUÉ ES LA RUGOSIDAD?

Todas las superficies son rugosas¹. El mundo de la ingeniería está hecho de sólidos cuyas superficies adquieren su textura como resultado de una gran variedad de procesos. En algunos casos ésta es simplemente un subproducto de la producción en masa, por ejemplo, en la fundición, moldeado y corte. Con mayor frecuencia las piezas terminadas se someten a un tratamiento que afecta solamente las capas superficiales. Algunos tratamientos para eliminar el material, como en la molienda y grabado. Otros, tales como laminado, fumigado de llama, y pulverización, también afectan la superficie. Sin embargo, otros se limitan a redistribuir la capa superficial: granallado y calandrado son ejemplos. Además, algunas superficies a menudo presentan marcas de tratamientos no planificados tales como el desgaste y la corrosión [71].

Las texturas superficiales encontradas en la ingeniería moderna varían ampliamente. La figura 16.1 (a), por ejemplo, muestra una superficie mecánicamente pulida, mientras la figura 16.1 (b) muestra una que ha sido galvanizada. Tales superficies pueden sentirse suaves y dar una apariencia reflectiva, aunque la electromicrografía muestre que están cubiertas por colinas y valles. La figura 16.2 coloca la rugosidad en perspectiva frente a otros fenómenos relacionados en ingeniería.

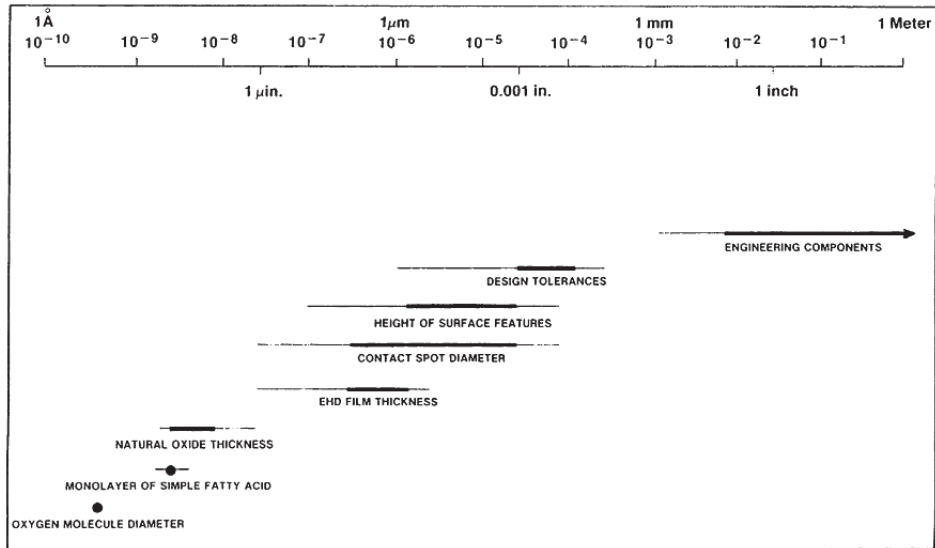
¹La *topografía* se ocupa de la descripción del conjunto de particularidades geométricas naturales o artificiales que caracterizan una superficie. Uno de los conceptos que se usa para describir las *irregularidades* de las superficies es la *rugosidad*.

Figura 16.1: Electromicrografía de (a) una superficie de cobre mecánicamente pulida y (b) oro electrodepositado en latón.



Fuente CRC handbook of lubrication (Theory and practice of tribology), Booser, E.R.,1983.

Figura 16.2: Tamaño comparativo de las superficies relacionadas con el fenómeno



Fuente *Ídem*

Tanto en aplicaciones industriales como en la vida cotidiana, el grado de rugosidad de las superficies es importante, en ocasiones es deseable tener rugosidad “alta” y en otras ocasiones esta condición es indeseable. En algunos casos se busca que la superficie del producto terminado presente un mínimo de rugosidad, ya que esto le da brillo, mejor apariencia y disminuye la fricción de la superficie al estar en contacto con otra, reduciendo el fenómeno de desgaste y la corrosión o erosión de dichos materiales. En la sección 16.3 se

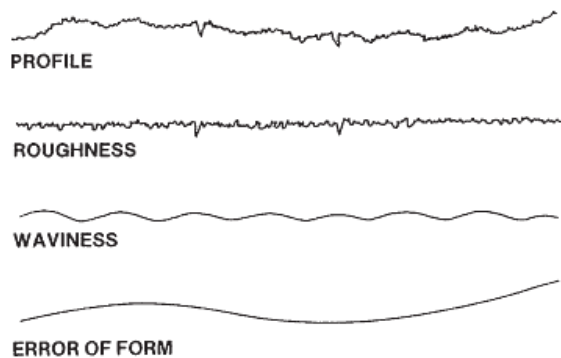
presenta la importancia de la rugosidad en la lubricación hidrodinámica de cojinetes y el efecto que tiene en la determinación de los parámetros de diseño del cojinete.

16.2. MEDICIÓN DE LA RUGOSIDAD

Los principales instrumentos usados para estudiar la forma de las superficies son el microscopio electrónico de barrido (SEM, por sus siglas en inglés) y el analizador de perfiles. El SEM puede proveer micrografías con suficiente resolución para revelar detalles individuales; sin embargo, en la tribología práctica, éste tiene dos desventajas: el tamaño de la muestra es limitado y la rugosidad no puede ser cuantificada.

Para comparar una superficie con una especificación o medición, y cómo la textura influye en el rendimiento, es necesario de descripción numérica. El analizador de perfiles es el instrumento más ampliamente usado para esto. Se ubica ligeramente un lápiz afilado sobre la muestra y detecta su movimiento, ya que este sigue la textura. La señal es ampliada y grabada en una carta para producir un perfil de superficie. Muchas superficies contienen defectos, tales como roturas, perforaciones y rasguños. La posición adecuada para la prueba, es la que evita lo máximo posible los defectos poco frecuentes. Los perfiles de las superficies contienen usualmente tres componentes principales, como se ve en la figura 16.3).

Figura 16.3: Los tres componentes de la textura superficial

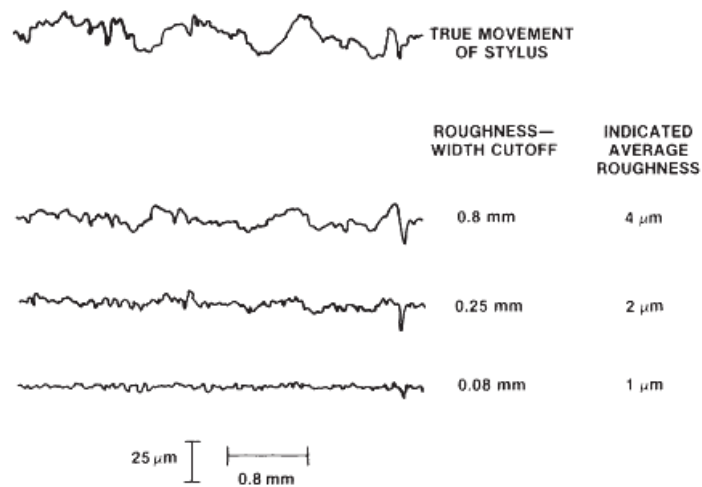


Fuente *Ídem*

1. **Rugosidad:** Irregularidades muy próximas entre sí. El alto, ancho y dirección de estas crean un patrón predominante.
2. **Ondulatorio:** Superficies irregulares con espacios más grandes que en la rugosidad. Ellos menudo son el resultado de tratamiento térmico, flexión de piezas o máquinas, vibraciones o esfuerzos por pandeo.
3. **Errores de forma:** Derivaciones en bruto de la forma nominal. Estas normalmente no se consideran parte de la textura superficial.

Es importante analizar el perfil de características de la superficie a través de una longitud adecuada. Si la función de una superficie en particular depende principalmente de sus irregularidades longitud de onda corta, por ejemplo, un valor engañosamente grande de la rugosidad que se obtendría si el perfil completo, incluyendo la ondulación, fueran analizadas. El mayor espacio de irregularidades de la superficie a tener en cuenta se llama la "**rugosidad de ancho de corte**". En la mayoría de los instrumentos modernos un filtro electrónico elimina los componentes no deseados del perfil, como se ilustra en la figura 16.4.

Figura 16.4: El efecto de la rugosidad de ancho de corte es para remover todos los componentes de un perfil completo cuyas longitudes de onda son más largas que el corte.



Fuente *Ídem*

La parte superior del perfil representa el movimiento actual de la aguja (punta del lápiz) en la superficie. Los de abajo muestran el mismo perfil usando un corte de 0,8, 0,25 y 0,08 [mm] (valores establecidos por el estándar internacional).

El valor preferido de corte es 0,08 [mm] a menos que se especifique lo contrario. La rugosidad del perfil filtrado se describe más frecuentemente en términos de un promedio aritmético derivado de sí mismo, que es llamado R_a . Anteriormente este valor era llamado "promedio aritmético" (AA) o "promedio de línea central" (CLA). R_a se usa casi universalmente en la ingeniería de dibujo; el cuadro 16.1 presenta valores adoptados internacionalmente junto con la alternativa numérica "grado de rugosidad".

La segunda medida importante de la textura superficial es la establecida por la Organización Internacional de Estandarización (ISO), y evalúa la elevación media de los cinco picos más grandes por encima de los valles más bajos, llamado así R_z o el 10 puntos de altura ISO. Esta se mide sobre una longitud de prueba (rugosidad de ancho de corte), que es particularmente útil cuando solo se dispone de una pequeña superficie para la evaluación. El valor promedio R_a de un rango completo de alturas en el perfil, es poco sensible a picos y valles ocasionales. Por otro lado, R_z , describe la rugosidad en términos de la al-

Cuadro 16.1: Promedio aritmético y grado de rugosidad

<i>Valor recomendado de R_a</i>		<i>Número de grado de rugosidad</i>
μm	μin	
0,025	1	N1
0,05	2	N2
0,1	4	N3
0,2	8	N4
0,4	16	N5
0,8	32	N6
1,6	63	N7
3,2	125	N8
6,3	250	N9
12,5	500	N10
25	1000	N11

tura extrema y es útil cuando el rendimiento de la superficie podría verse afectada por protuberancias o grietas.

R_a y R_z se determinan fácilmente y son ampliamente utilizados para vigilar la uniformidad de la producción. Ellos tienen una desventaja importante: ambos dan el mismo peso a la forma de los valles y picos.

En la práctica, sin embargo, el comportamiento de una superficie en contacto con otra depende esencialmente de la textura de sus estratos más altos, y casi nada de la forma de sus valles. Con frecuencia las partes más altas de las superficies de ingeniería difiere significativamente de la textura general.

Algunos analizadores modernos de superficie proveen un voltaje análogo que permite un análisis computacional detallado del perfil superficial. En particular se calcula, la distribución de alturas de las colinas y el radio de curvatura de sus cumbres, que son los componentes del *índice de plasticidad*².

Los cambios en la superficie de un perfil también pueden ser expresados en términos de la desviación de la raíz cuadrada media. Esta medida de rugosidad, llamada R_q , es similar al promedio aritmético R_a , aunque a menudo 10 a 20% más alto. Este valor es particularmente importante en la teoría de contacto superficial. En la ingeniería práctica este es frecuentemente, usado de forma incorrecta, indistintamente como R_a . La oblicuidad es una medida útil de la asimetría del perfil.

²El índice de plasticidad indica si la deformación en las regiones de contacto será predominantemente elástica o plástica. El índice está dado por $\frac{E'}{H} \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}}$, donde $\frac{1}{E'} = \frac{(1-\nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1-\nu_2^2)}{E_2}$ y E_1, E_2, ν_1 y ν_2 son los módulos de Young y las relaciones de Poisson de los sólidos en contacto, H es la dureza, σ es la desviación estándar de las alturas de las colinas y β es el radio medio de sus cumbres.

16.3. EFECTOS DE LA RUGOSIDAD EN LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA DE COJINETES

Las características de la lubricación hidrodinámica en la operación del sistema rotor cojinete se ven afectadas por las variaciones en la superficie del muñón y del cojinete. El modelo matemático que soporta el estudio, generalmente, es una modificación razonable del planteado en la teoría Reynolds (ver sección 10.4), que tiene en cuenta el microsistema conformado por el perfil superficial. Sumado a esto, se desarrollan bancos experimentales para garantizar la medición de la capacidad de carga a diferentes condiciones de rugosidad.

Se seleccionan dos publicaciones que relacionan la rugosidad de las superficies con el desempeño de la lubricación hidrodinámica de cojinetes, por su valor metodológico, experimental y bibliográfico.

16.3.1. Efecto de la textura superficial del eje en la distribución de presión del cojinete

El propósito de este trabajo es presentar un análisis de la presión desarrollada en el cojinete para diferentes texturas superficiales y velocidades de operación usando una red neuronal propuesta (Ver la sección 22.6, para ampliar este método numérico). Los datos de la experimentación se usan como información de aprendizaje para la red neuronal y así establecer un modelo de predicción confiable aplicado a la lubricación hidrodinámica de cojinetes [142].

La primera razón para medir la rugosidad superficial es predecir el desempeño del componente. La superficie de un cojinete, debe permitir la lubricación hidrodinámica, manteniendo el fluido entre las superficies, pero también debe permitir la circulación del flujo. La introducción de depresiones y ondulaciones controladas puede mejorar las propiedades tribológicas.

Una mejora significativa en la capacidad de carga, resistencia al desgaste, coeficiente de fricción, etc., de los componentes mecánicos tribológicos se puede lograr por la formación de micro estructuras regulares superficiales en forma de microagujeros como lo menciona Etsion [75] en su trabajo de 2004. Los resultados muestran que el factor de fricción cae con el incremento de la presión en el cojinete especialmente en las zonas de lubricación mixta y de película completa. Se encontró que la rugosidad de la superficie llevó al incremento del factor de fricción.

En el presente estudio, se investiga experimentalmente la influencia de la **textura superficial del eje** en el cojinete. El experimento se conduce a 18 [°C] para sistemas con eje de acero a diferentes texturas superficiales. La velocidad del eje se fija en 1000, 1250 y 2000 [rpm]. Por otro lado, se propone una red neuronal como un sistema de predicción de las variaciones de presión.

Análisis del cojinete

Se utiliza la ecuación de Reynolds para flujo unidimensional (ver sección 10.4). Sin embargo, para representar el efecto de la rugosidad se emplea un modelo de flujo teórico promedio, con lo cual el espesor de película local está dado por la ecuación 16.1

$$h_{min} \geq R_{t1} + R_{t2} \quad (16.1)$$

donde R_{t1} y R_{t2} son las alturas máximas de rugosidad en superficie del eje y del cojinete.

La distribución de presión de la película de aceite en el cojinete es expresada con la función de Sommerfeld. (Ecuación 16.2)

$$p - p_0 = \frac{6\mu U r}{c^2} \left[\frac{\varepsilon (2 + \varepsilon \cos \theta) \sin \theta}{(2 + \varepsilon^2) (1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right] \quad (16.2)$$

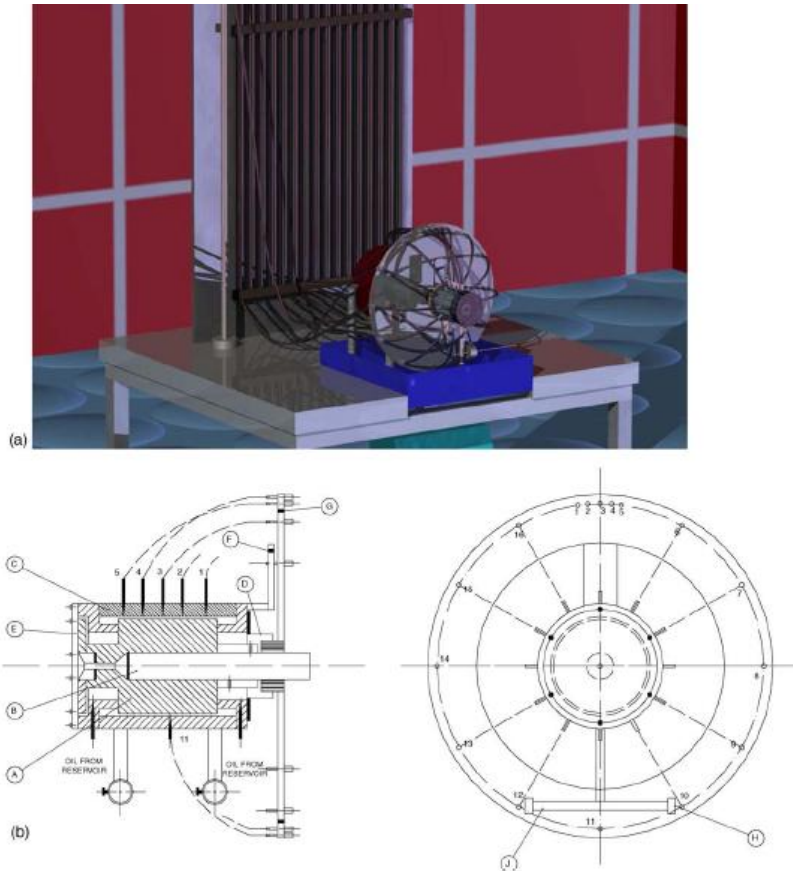
Estudio experimental

El cojinete radial de la figura 16.5 se compone de un cojinete de plexiglás montando en un muñón de acero (A), que se fija al eje del motor. La velocidad del eje del motor (B) es controlado por una unidad, que esta montada dentro y en frente de la estructura principal.

El cojinete (C) tiene 12 puntos de muestreo de presión equiespaciados ubicados alrededor de su circunferencia y 4 (cuatro) puntos de presión adicionales extendidos a lo ancho. Los últimos cuatro puntos ubicados en la parte superior del cojinete se sellan con un diafragma flexible de goma (D) de un lado, y del otro, por un disco de plexiglás transparente y anillo de sello (E). Un cursor (F) fijo al cojinete en su parte trasera se mueve en contra de una línea grabada en un marco fijo (G). El cojinete está en su posición normal cuando el cursor y la marca en la estructura están alineados. Un peso pequeño (H) sumado a dos barras (J) durante la prueba mantiene el cojinete en su posición normal al tomar las lecturas. Los pesos se ajustan libremente a lo largo de las barras.

La presión de la película de aceite está monitoreada por 16 tubos. El extremo superior de los tubos manométricos está conectado a un colector común y cualquier desbordamiento se devuelve a un depósito.

Figura 16.5: (a) Modelo sólido del banco experimental y (b) la sección transversal y vista frontal del banco.

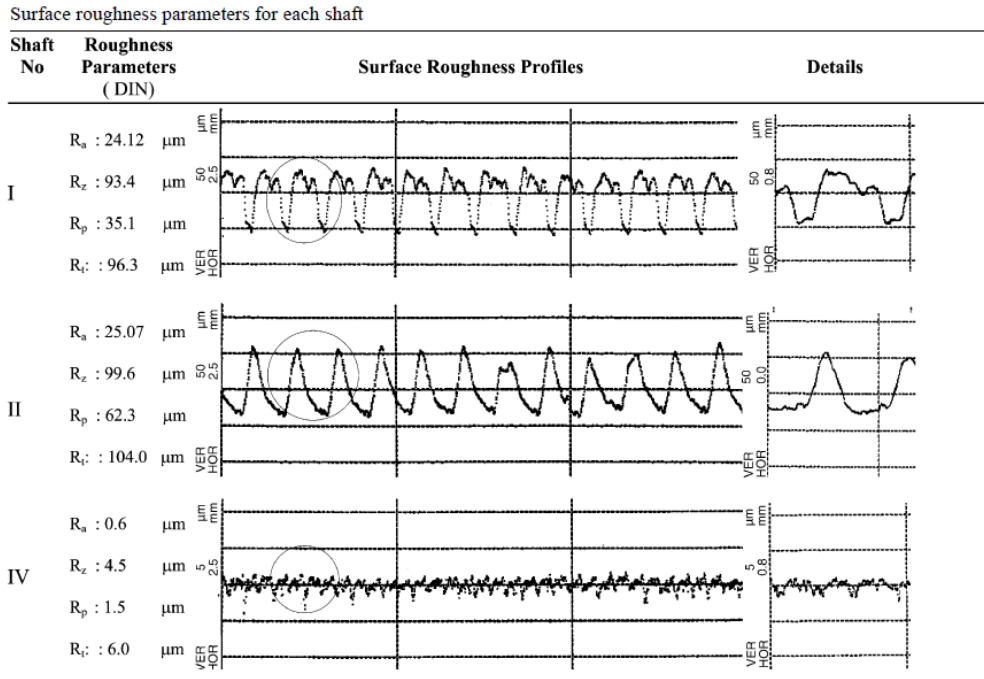


Fuente Effects of shaft surface texture on journal bearing pressure distribution, Sinanoglu *et al.*, 2004.

El lubricante usado es un aceite sintético 0W-40 con una densidad de $864 \text{ [kg/m}^3\text{]}$. El diámetro del eje es $54,8 \text{ [mm]}$, y el diámetro del interior del cojinete es de 55 [mm] , el ancho del cojinete es 70 [mm] y su peso es de 650 [g] . Inicialmente, el nivel de tanque de aceite se fija en 735 [mm] (cabeza de aceite de suministro $p_0 = 735 \text{ [mm]}$) y por tanto, p es la presión en la gráfica de la lectura y p_0 la presión estática.

Se toman cuatro texturas superficiales para el eje. La superficie del **eje I** tiene un perfil trapezoidal. Las superficies de los **ejes II** y **III** tiene perfil de sierra con diferente altura y valores pico. El **eje IV** tiene una superficie suave. La rugosidad superficial de los ejes I, II y IV fue medida por métodos de contacto y de no contacto (SEM), como los vistos en la sección 16.2. La rugosidad del eje III fue solamente medida con SEM debido a su cobertura respecto del método de contacto. Los parámetros de cada eje se muestran en el figura 16.6.

Figura 16.6: Análisis de rugosidad de los ejes estudiados (LTS)

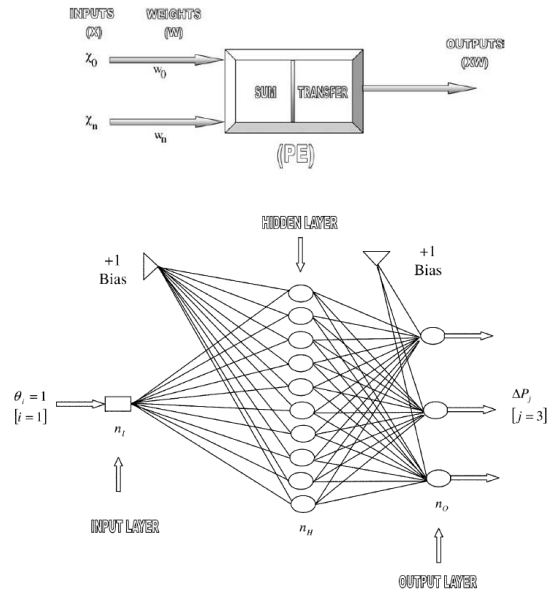


Fuente *Ídem*

Red neuronal artificial (ANN)

Los autores utilizan una red neuronal con una arquitectura (1 : 10 : 3), donde 1 es la neurona de entrada, 10 neuronas ocultas y 3 neuronas a la salida, en un sistema de aprendizaje no supervisado, con una función de ajuste tipo Sigmoid (Ver sección 22.6, donde se presentan los fundamentos acerca de las ANNs). La neurona de entrada consiste en una posición angular y las salidas constituyen la diferencia de presión a diferentes velocidades. La figura 16.7 muestra el esquema de un elemento de proceso, **PE** (neurona artificial, en la parte superior) y el sistema de recorrido en la red propuesta. Las conexiones pueden representar los valores actuales de cada peso. El cuadrado representa el nodo de entrada; los círculos indican las neuronas, las del extremo derecho son las de salida. Los triángulos representan la tendencia de neurona.

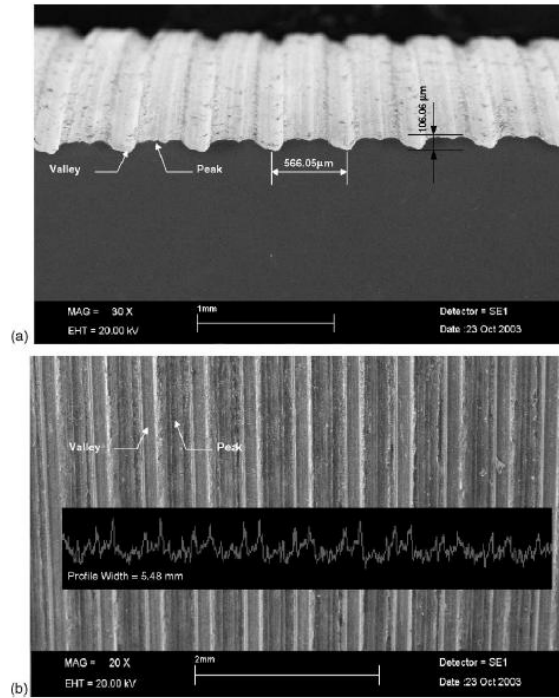
Figura 16.7: Diagrama esquemático de una neurona y conexiones en la red



Fuente *Ídem*

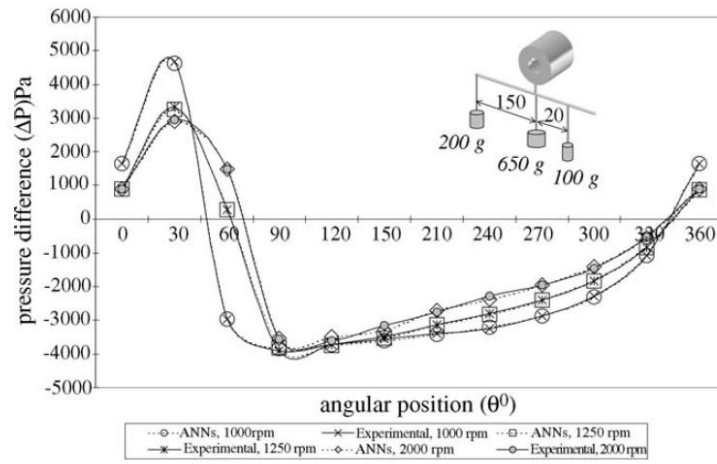
Los resultados experimentales y simulación

Figura 16.8: Eje I Textura superficial: (a) sección transversal y (b) perfil de superficie visto de arriba (SEM).



Fuente *Ídem*

Figura 16.9: Eje I: Curva de presiones para diferentes velocidades



Fuente *Ídem*

Con el objeto de describir la metodología utilizada en el proceso de análisis, se presenta la experiencia para el perfil de superficie tipo trapezoidal (figura 16.8) y sus resultados; sabiendo que el mecanismo de estudio es similar con los demás ejes. La figura 16.9 presenta las diferentes variaciones de presión contra la posición angular del lubricante y como las cargas de 200 y 100 [g] fueron aplicadas en las posiciones de 150 y 20 [mm], respectivamente. Los valores de diferencia de presión medida en los tubos de presión 3, 6 y 7 son positivos debido al estrechamiento de la cuña de aceite se presenta entre 0° y 60°, y entre 330° y 360°. Los otros valores de diferencia de presión en los tubos 8 – 15 dados entre 90°, 120°, 150°, 180°, 210°, 240°, 270°, y 300° fueron negativos. En estas regiones, ya que la reducción de la cuña de aceite no se forma, se produce una presión negativa.

En la región positiva la máxima presión incrementa hasta 4680 [Pa] para una velocidad angular de 1000 [rpm] y 30° de posición angular. La mínima presión positiva con valor de 2960 [Pa] a la misma posición angular y a 2000 [rpm]; la presión cae un 36%.

La red neuronal artificial presenta un desempeño superior para el planteamiento desarrollado.

El proceso se realiza para los otros ejes de prueba obteniendo reducciones en la presión de hasta el 55% con el incremento de la velocidad de 1000 – 2000 [rpm] (Ver publicaciones recomendadas por Sinanoglu [142]).

Con el análisis de sistema se concluye que:

- El espesor mínimo de la película de aceite en la zona de soporte de carga incrementa con el aumento en la rugosidad, y entonces la presión en la película de aceite disminuye. Por tanto, la capacidad de soportar carga decrece.
- Para carga fija, el cojinete con menor presión en la película mínima de aceite, debe

ser seleccionado en cuanto a capacidad de carga se refiere, ya que puede soportar mayores presiones a diferentes condiciones de carga.

- El tipo de predicción por red neuronal puede ser aplicado a sistemas rotor cojinete en aplicaciones en tiempo real.

16.3.2. Efecto de la textura superficial (interior del cojinete) en el desempeño de la lubricación hidrodinámica

El propósito de este estudio es examinar la influencia de la localización de la textura superficial en el desempeño de la lubricación hidrodinámica en cojinetes. Se usa un modelo numérico para la analizar el efecto de la forma cilíndrica de la textura en las características de la LHD y se demuestra la importancia de un arreglo adecuado de la textura en el cojinete [76].

Este trabajo está soportado por más de 40 publicaciones internacionales, y se destacan el número de aplicaciones dedicadas al estudio de la influencia de la rugosidad aleatoria. La rugosidad aleatoria (o natural) en cojinetes hidrodinámicos puede ser introducida debido a la presencia de polvo, aditivos en el lubricante y desgaste.

La rugosidad también puede ser determinística. La rugosidad determinística es la textura superficial inducida deliberadamente en el cojinete con la ayuda de las técnicas de microfabricación. Actualmente es posible producir microgeometrías controladas en la superficie del cojinete para mejorar las condiciones tribológicas incluyendo la reducción de la fricción, mejoramiento de la confiabilidad, aumento de las condiciones severas y disminución del consumo de energía. En general, este trabajo define una textura superficial determinística.

Estudios recientes como el de Cupillard *et al.* [74], mencionado por Tala-Ighil han establecido que la geometría de la textura superficial, tales como profundidad, ancho, número de texturas y posición influyen en el desempeño del cojinete.

Por otro lado, formular el modelo adecuado para las condiciones del cojinete implica modificaciones de la ecuación de Reynolds y será válido mientras el contacto sea no cavitado (Buscaglia *et al.* [72]).

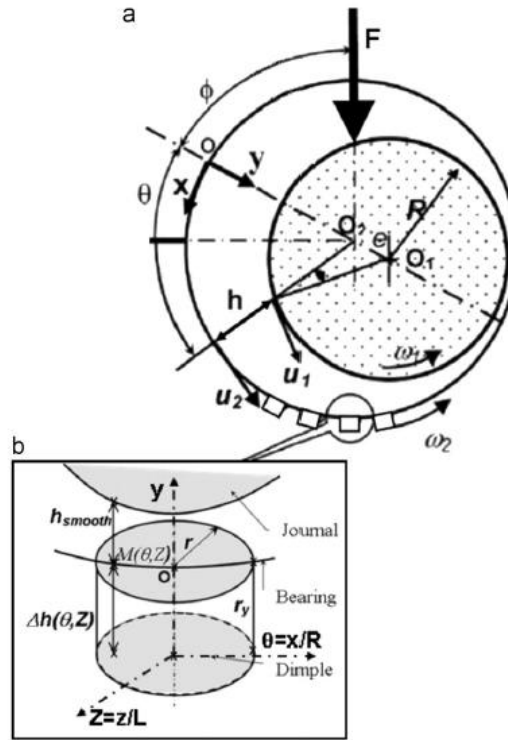
Formulación del problema

En este caso se utiliza la ecuación de Reynolds, para coordenadas cartesianas, cuando el espesor de la película h está en la dirección del eje y , descrita por la ecuación 16.3, y como se ve en la figura 16.10.

$$h_{min} = h_{smooth}(\theta) + \Delta h(\theta, Z) \quad (16.3)$$

Es conocido que el espesor de la película de lubricante para cojinete suave es $h_{smooth} = c(1 + \varepsilon \cos\theta)$. En la ecuación 16.3, el término $\Delta h(\theta, Z)$, es la variación del espesor en la película debido textura superficial como se muestra en la figura 16.10 (b). Se utiliza la condi-

Figura 16.10: (a) Sección transversal del cojinete. (b) Geometría del agujero (textura)



Fuente Effect of textured area on the performances of a hydrodynamic journal bearing, Tala-Ighil *et al.*, 2010

ción de frontera $\partial p / \partial \theta = \partial p / \partial Z = 0$ y $P = 0$ en los límites de la ruptura de la película lubricante. En el caso del presente estudio, el cojinete opera bajo condiciones de estado estable; la carga aplicada F es constante. Los parámetros se calculan para una excentricidad fija. La carga total W se calcula por la integración del campo de presión a lo largo de la superficie de contacto del cojinete, para así obtener el ángulo de actitud ϕ (figura 16.10 (a)).

$$W = \sqrt{\left(\int_0^1 \int_0^{2\pi} Pr \cos \theta \, d\theta \, dZ \right)^2 + \left(\int_0^1 \int_0^{2\pi} Pr \sin \theta \, d\theta \, dZ \right)^2}$$

La geometría de los agujeros en la superficie texturada es cilíndrica y se define según la ecuación 16.4

$$(x - x_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2 \quad (16.4)$$

Las coordenadas del centro O_c se denominan (x_c, y_c, z_c) . Este centro está localizado en la superficie haciendo $y_c = 0$. La profundidad del punto $M(\theta, Z)$ en la textura superficial se

define por Δh .

La determinación de la presión en la película de lubricante requiere de resolución numérica de la ecuación de Reynolds usando el método de las diferencias finitas. La solución del sistema lineal obtenido después de la discretización se hace por el método iterativo de *Gauss-Seidel*³

Para el régimen en estado estable, el procedimiento computacional consiste en asignar valores iniciales para la excentricidad $\varepsilon = e/c$. El campo de presión se obtiene por la verificación de la condición de convergencia $|\Delta P_i|/|P_i| \leq \varepsilon_p$, para cada punto nodal i de la superficie del cojinete. La carga soportada W y el ángulo de actitud del cojinete ϕ , son calculadas. La carga calculada y la carga fija F son comparadas; el proceso se detiene cuando la condición de convergencia de carga $|F-W|/|F| \leq \varepsilon_W$, se satisface. Si este error de control no es satisfecho, el valor de la excentricidad se carga nuevamente y el proceso se repite. Para los resultados, la precisión de la convergencia en la presión P y la carga W son $\varepsilon_p = 10^{-4}$ y $\varepsilon_W = 10^{-5}$, respectivamente.

En la figura 16.11 se presentan detalles geométricos sobre la distribución de los agujeros en los cojinetes (figura de arriba) y un ejemplo para un caso particular de prueba (figura de abajo).

Resultados y discusión

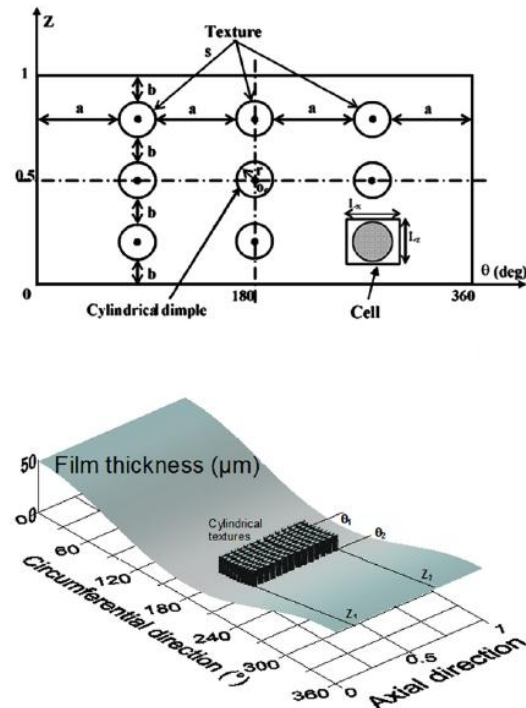
Los autores validan la metodología numérica sin textura superficial (cojinete suave), con respecto al trabajo realizado por Vincent *et al.*⁴; comprobándose un alto grado de similitud en los resultados. Del mismo modo, para las superficies texturadas, la figura 16.12 se presentan cuatro de las 25 configuraciones de textura superficial analizadas en el trabajo para el mejoramiento de las características del cojinete. La optimización consiste en el incremento del espesor de película de aceite, disminución del torque por fricción, mejoramiento de presencia de lubricante en algunas regiones y mantenimiento del flujo constante y así evitar la cavitación. En la mayoría de los casos, la presión es sensiblemente disminuida, sin embargo, el desempeño mejora en el cojinete debido a la disminución de la zona de cavitación en el contacto hidrodinámico. Al apreciar la figura 16.12 el caso 25 posee una zona más amplia para capacidad de carga que su contraparte, el caso 1; se ha aumentado la zona lubricada en un 5,8%. En general, la textura ubicada a la salida de la región de contacto (zona de máxima carga), donde la pendiente del campo de presión es altamente negativa, permite una mejor alimentación del flujo y se reduce la zona cavitada.

En el caso 17 la celda de agujeros se ubica a la entrada de la zona de carga. Esta configuración, incrementa el factor de fricción alrededor de 12,6% y el espesor mínimo de película disminuye un 25,6%, la presión máxima aumenta un 10,6% y la zona de película completa se reduce un 3,8%. **Es una condición contraproducente**, pero una vez más

³El método de Gauss-Seidel está disponible en Chapra, S.C., *Métodos numéricos para ingenieros*, McGraw-Hill, 2003, pág. 310

⁴Del simposio en tribología. Vincent. B, *Starvation and cavitation effects infinite grooved journal bearing*. Simposio de tribología en Lyon, sesión "machine elements", 1994, pág 455-64.

Figura 16.11: Distribución de la textura en la superficie del cojinete (Arriba). Arreglo de la textura y zona texturizada en la superficie del cojinete (Abajo).

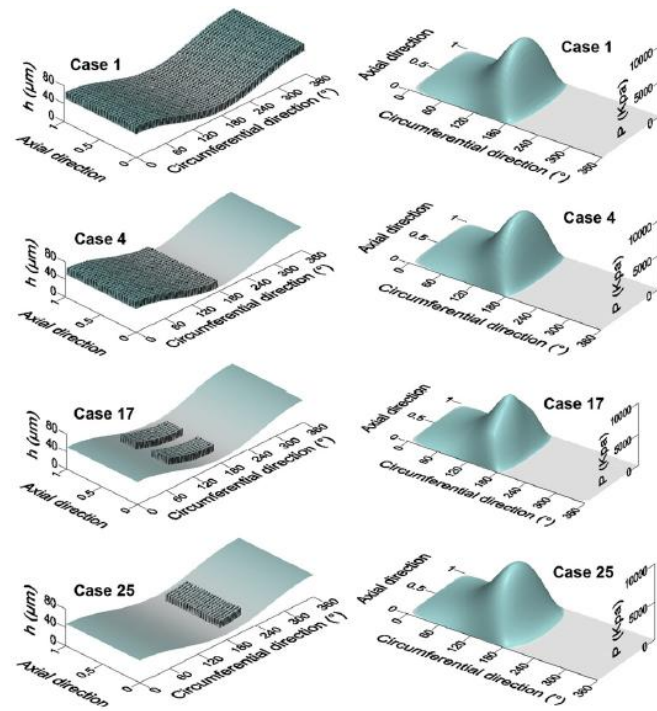


Fuente *Ídem*

muestra las ventajas de ubicar la zona texturizada en la posición adecuada dependiendo del sentido de giro del rotor. También sirve de indicador de las fallas de texturación natural, por ejemplo, si se deposita suciedad a la entrada de la zona de carga necesariamente las características de desempeño del cojinete se ven afectadas notablemente.

El caso 25 es el que garantiza un mejor desempeño de la lubricación hidrodinámica del cojinete. El diseño del área óptima textura depende en gran medida de los parámetros geométricos y las condiciones de funcionamiento del cojinete.

Figura 16.12: Espesor de película y campos de presión para cuatro casos de configuración de textura



Fuente *Ídem*

BIBLIOGRAFÍA

- [71] E.R. BOOSER. *CRC handbook of lubrication (Theory and practice of tribology)*, volume II. CRC Press (Boca Raton, Fla.), 1983.
- [72] G.C. BUSCAGLIA, I. CIUPERCA, and M. JAI. On the optimization of surface textures for lubricated contacts. *Journal of mathematical analysis and applications*, 335(2):1309–1327, 2007.
- [73] C. Cem SINANOGLU, Fehmi NAIR, and M. Baki KARAMLS. Effects of shaft surface texture on journal bearing pressure distribution. *Journal of Materials Processing Technology*, 168(2):344 – 353, 2005.
- [74] S. CUPILLARD, S. GLAVATSKIH, and MJ CERVANTES. Computational fluid dynamics analysis of a journal bearing with surface texturing. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 222(2):97–107, 2008.
- [75] I. ETSION. Improving tribological performance of mechanical components by laser surface texturing. *Tribology Letters*, 17(4):733–737, 2004.
- [76] Nacer TALA-IGHIL, Michel FILLON, and Patrick MASPEYROT. Effect of textured area on the performances of a hydrodynamic journal bearing. *Tribology International*, 44(3):211 – 219, 2011.

Capítulo 17

LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA EN PRESENCIA DE CAVITACIÓN

17.1. ¿QUÉ ES LA CAVITACIÓN?

La cavitación es el cambio rápido de fase de líquido a vapor que ocurre en un líquido siempre que la presión local es igual o menor a la *presión de vapor*¹. La primera aparición de la cavitación es en el punto de más baja presión del campo de flujo. Se han identificado cuatro tipos de cavitación [87]:

1. ***Cavitación móvil:*** Existe cuando se forman burbujas de vapor o cavidades, son transportadas corriente abajo y se colapsan.
2. ***Cavitación fija:*** Ocurre cuando existe una cavidad de vapor fija como región separada. La región separada puede unirse otra vez al cuerpo o puede englobar la parte de atrás del cuerpo y quedar encerrada por el flujo principal en cuyo caso se llama *supercavitación*.
3. ***Cavitación de vórtices:*** Se encuentra en el centro de alta velocidad (y por tanto baja presión) de un vórtice.
4. ***Cavitación vibratoria:*** Puede existir cuando una onda de presión se mueve en un líquido. Una onda de presión consiste en un pulso de presión que tiene una presión alta seguida de una baja presión. La parte baja de la presión de la onda (o la vibración) puede producir cavitación.

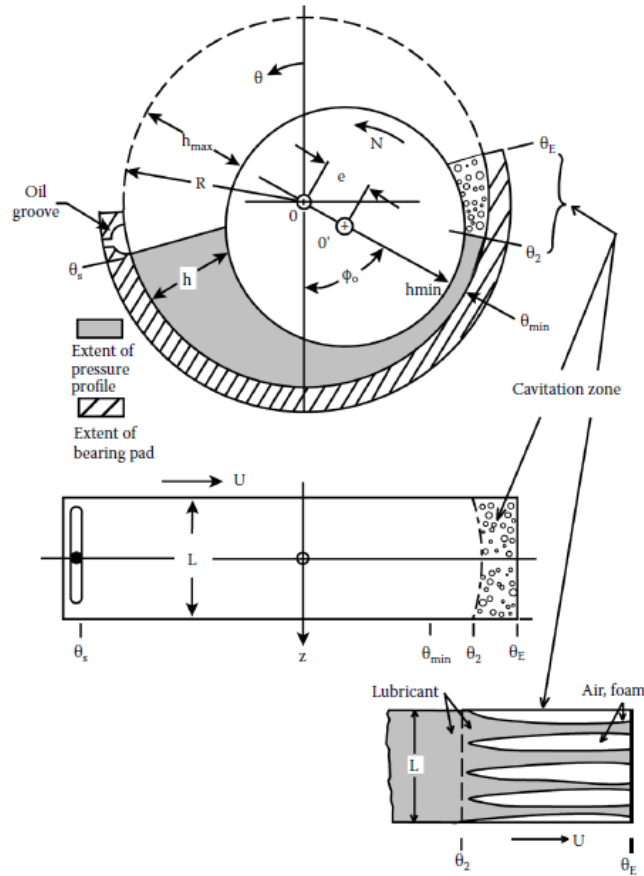
Es bastante difícil evitar que el fenómeno de la cavitación se presente en la lubricación hidrodinámica de cojinetes y se da principalmente por la repentina caída de presión a la salida en la zona divergente de la película de fluido. Efectos como la velocidad del flujo,

¹La presión de vapor, es la que se presenta en una sustancia cuando se ha alcanzado el equilibrio entre líquido y vapor en un intercambio molecular de vaporización.

variación de la temperatura, cargas oscilantes y factores microgeométricos se asocian a la cavitación.

En la figura 17.1 se observa la geometría y distribución de presión en un cojinete completo en presencia de cavitación.

Figura 17.1: Película de fluido extendida en un cojinete completo.



Fuente Tribology of Interface Layers, Heshmat H., 2010

El perfil de presión comienza al principio de la almohadilla en θ_s , y termina en algún θ_2 por delante del final del límite físico de la almohadilla. La región $(\theta_E - \theta_2)$ es una región de cavitación (separada por una frontera en θ_2), donde el lubricante se destruye en corrientes como lo muestra la figura 17.1. La parte donde ocurre la cavitación no contribuye a la capacidad de carga y la presión sobre esta región se acerca o está ligeramente por encima de la presión de vapor del aceite.

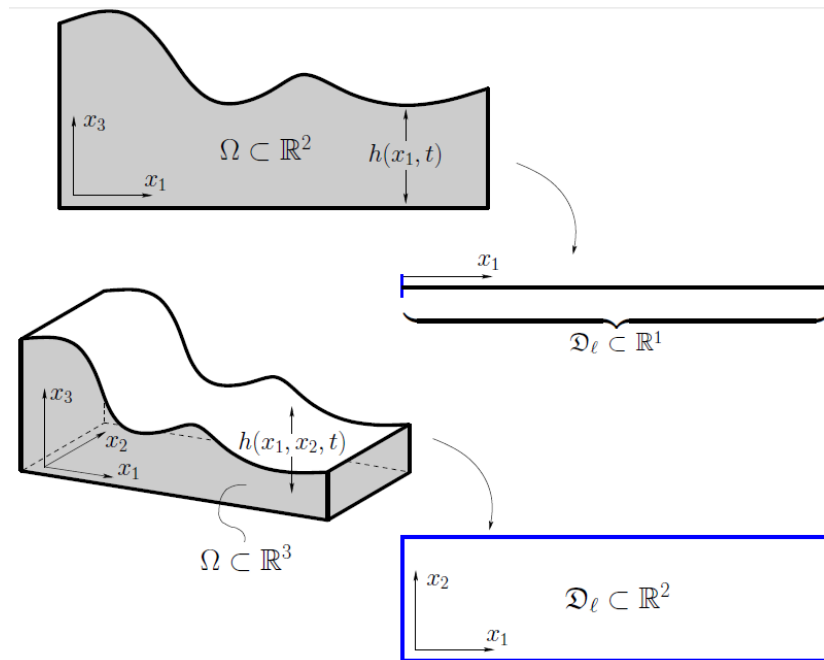
17.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA Y MODELOS

La cavitación en la lubricación hidrodinámica es un problema que debe ser analizado mediante una *interfaz móvil* (o frontera) que separa al fluido lubricante de la zona de ca-

vitada. El fenómeno puede ser tratado mediante las ecuaciones de Navier - Stokes con la dificultad de solucionarlas en un sistema convergente. La otra posibilidad es emplear una formulación de orden reducido que en éste caso no es otra cosa que la ecuación de Reynolds. Esta ecuación gobierna los problemas de la lubricación en régimen hidrodinámico. El problema es que estos modelos **NO** son enteramente válidos para atacar la presencia de la frontera móvil. Estudiando el trabajo del Doctor Roberto Ausas [77] se desarrollará el problema de la frontera móvil y la importancia de los resultados obtenidos al comparar el modelo de Reynolds y el del Elrod - Adams.

Supóngase que una película fluida que llena el espacio $0 < x_3 < h(x_1, x_2, t)$, donde (x_1, x_2) pertenece al dominio que para el problema de lubricación será denotado D_ℓ , el cual está contenido en \mathbb{R}^{d-1} , como se muestra en la figura 17.2.

Figura 17.2: Dominio Ω donde se formula el problema de N - S (región pintada de gris) y su contra parte correspondiente D_ℓ donde se formula el problema de lubricación (limitado por la línea azul).



Fuente Simulación numérica en flujo de dos fases inmiscibles con aplicaciones en lubricación hidrodinámica, Ausas *et al.*, Tesis para optar el título de Doctor, 2010.

Ahora bien en un problema típico de lubricación, la dimensión característica h_0 del dispositivo lubricado a lo largo de la coordenada x_3 es mucho menor que cualquier dimensión característica (sea L) a lo largo de las coordenadas x_1 o x_2 . Debido a esto, el flujo generalmente es laminar dado por:

$$\vec{J} = -\frac{h^3}{12\mu} \nabla p + \frac{h}{2} \vec{\alpha} \quad (17.1)$$

Donde se evidencia el flujo de *Couette*, debido a la velocidad de la superficie $\vec{\alpha}$ y el flujo de *Poiseuille* debido al campo de presiones. Al integrar la ecuación de Reynolds² con respecto a x_3 se obtiene:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{h^3}{12\mu} \nabla p - \frac{h}{2} \vec{\alpha} \right) \quad (17.2)$$

Se debe notar que el campo escalar $h(x_1, x_2, t)$ puede no ser conocido a priori, y por lo tanto ser una incógnita más del problema, para lo cual las ecuaciones de movimiento de las superficies lubricadas, sobre las cuales el fluido ejerce una fuerza, deben ser integradas como parte de la resolución completa del problema, es decir, el campo $h(x_1, x_2, t)$ dependerá de la forma de las superficies y de los grados de libertad $\vec{r}(t)$ en general de la siguiente forma:

$$h(x_1, x_2, t) = \bar{h}_1(x_1, x_2, t) + \bar{h}_2(x_1, x_2, \vec{r}(t)) \quad (17.3)$$

Donde típicamente $\bar{h}_1(x_1, x_2, t)$ representa la contribución de alguna textura o rugosidad, mientras que $\bar{h}_2(x_1, x_2, \vec{r}(t))$ representa la contribución teniendo un periodo comparable a L con $\vec{r}(t)$ evolucionando de acuerdo a:

$$M \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{W}(t) + \vec{W}^a(t) \quad (17.4)$$

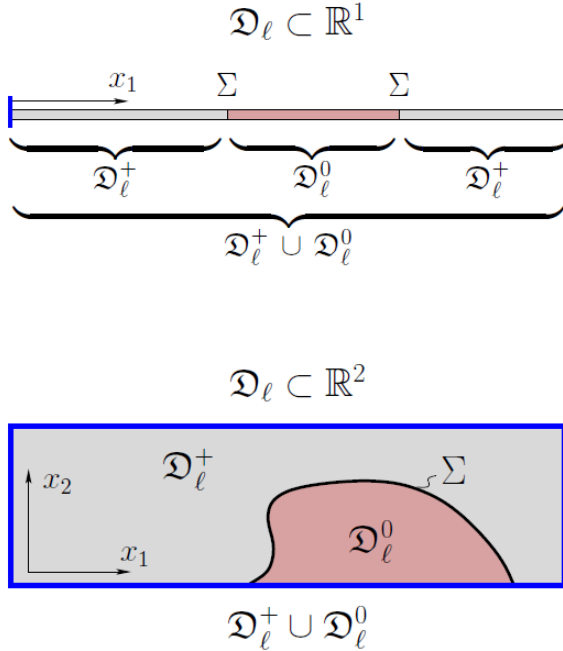
Donde M es la masa de la parte lubricada, $\vec{W}^a(t)$ representa las soluciones externas sobre el dispositivo lubricado y $\vec{W}(t)$ es un elemento que depende las tensiones normales de computo. Para el caso estacionario ($\partial h / \partial t = 0$) el problema se plantea para $\vec{W}(t) + \vec{W}^a(t) = 0$.

17.2.1. Modelado de la cavitación

La cavitación toma lugar cuando la presión cae por debajo de la presión de vapor del fluido (acá se asumirá sin pérdida de generalidad, como igual a cero). La ecuación 17.2 predice la aparición de presiones negativas pero son difíciles de controlar. Como consecuencia, el dominio D_ℓ se divide en dos regiones a través de una frontera Σ , con lo cual se tiene una *región activa* D_ℓ^+ , donde la presión es estrictamente positiva y la película de aceite llena completamente el espacio entre las dos superficies, y una *región cavitada* D_ℓ^0 , donde la presión el aceite es esencialmente cero y el aceite llena parcialmente el espacio. El mecanismo de la cavitación es bastante complejo y no es de interés para el modelado pues entra en el detalle de la formación, simplemente es importante saber que, $D_\ell = D_\ell^+ \cup D_\ell^0$ y $\Sigma = D_\ell^+ \cap D_\ell^0$, como se ve en la figura 17.3.

²La deducción de la ecuación de Reynolds en la presentación vectorial se encuentra en el apéndice A del trabajo de R. Ausas. [77].

Figura 17.3: Dominio D_ℓ donde se formula el problema de la lubricación. Se indica la zona activa D_ℓ^+ , la zona cavitada D_ℓ^0 y la frontera de cavitación Σ .



Fuente *Ídem*

Y se cumple que:

$$D_\ell^+ = \{(x_1, x_2) \in D_\ell, p(x_1, x_2, t) > 0\}$$

$$D_\ell^0 = \{(x_1, x_2) \in D_\ell, p(x_1, x_2, t) = 0\}$$

Debido a que la frontera móvil de cavitación Σ no es conocida en principio, se requiere de un modelo para definir las condiciones de contorno impuestas sobre ésta y así definir su posición. Existen esencialmente dos modelos matemáticos que emplean este fenómeno: el *modelo de Reynolds* y el *modelo de Elrod-Adams*. Por un lado, el modelo de Reynolds es bastante simple y atractivo para ser implementado numéricamente, ya que se reduce a una *desigualdad variacional*, pero su principal limitación es que no implica una estricta conservación de masa en la frontera de cavitación Σ . Por otro lado el modelo de Elrod-Adams, impone una estricta conservación de masa y por lo tanto es más realista, pero su discretización numérica es más proclive a inestabilizarse padeciendo de problemas de convergencia en algunos casos.

Para el modelado se emplearán las siguientes variables adimensionales (pero omitiendo los sombreros por facilidad de notación):

$$\hat{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \quad \hat{x}_2 = \frac{x_2}{L}, \quad \hat{h} = \frac{h}{h_0}, \quad \hat{t} = \frac{t\alpha_0}{L}, \quad \hat{p} = \frac{ph_0^2}{6\mu\alpha_0L}$$

Modelo de Reynolds

De ahora en adelante se asumirá la dirección de la velocidad de deslizamiento \hat{e}_1 . Asumiendo las variables adimensionales se tiene la ecuación del flujo [78]

$$\vec{J} = -\frac{h^3}{2}\nabla p + \frac{h}{2}\hat{e}_1 \quad (17.5)$$

Para este modelo, la condición de contorno a ser impuesta en Σ puede ser expresada de la siguiente manera:

$$(\vec{J}_+ - \vec{J}_-) \cdot \hat{n} \geq 0 \quad \text{en } \vec{x} \in \Sigma \quad (17.6)$$

Donde \hat{n} es el vector unitario (arbitrario) a Σ en $\vec{x} = (x_1, x_2) \in D_\ell$ y los límites laterales del flujo, presión y espesor de película en \vec{x} son:

$$\begin{aligned} \vec{J}_\pm(\vec{x}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \vec{J}(\vec{x} \pm \epsilon \hat{n}) \\ (\nabla p)_\pm(\vec{x}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \nabla p(\vec{x} \pm \epsilon \hat{n}) \\ h_\pm(\vec{x}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} h(\vec{x} \pm \epsilon \hat{n}) \end{aligned}$$

Nótese que para el caso en que h es una función continua ($h_+ = h_-$) la condición de la ecuación (17.6) se reduce simplemente a:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_- - \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_+ \geq 0 \quad (17.7)$$

Pero dado que p es siempre positiva o idénticamente nula, entonces:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_- \leq 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_+ \geq 0, \quad (17.8)$$

Por lo tanto las condiciones de las ecuaciones (17.7) y (17.8) solo se satisfacen simultáneamente si:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_- = \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_+ = 0 \quad (17.9)$$

Es decir que la derivada normal de la presión en Σ es continua e igual a cero. Esta es la forma en que la condición de Reynolds suele aparecer en la literatura. Es obvio por la ecuación 17.6, que el modelo *no es conservativo* (Comprobado por Bayada y Chambat [80, 81]).

Modelo de Elrod-Adams, formulación $[p - \theta]$

Para este modelo se introduce un campo escalar adicional θ el cual representa la fracción de espaciamiento total h que es ocupada por la película lubricante (i.e. $h_{film} = h\theta$) [78]. El campo θ está definido de tal forma que toma valores entre 0 y 1, con $\theta = 1$ y $p > 0$ en la región de película completa y $0 \leq \theta < 1$ y $p = 0$ en la región cavitada. En este caso la expresión de flujo de lubricante de la ecuación 17.5, es cambiada por:

$$\vec{J} = -\frac{h^3}{2}\nabla p + \frac{h\theta}{2}\hat{e}_1 \quad (17.10)$$

Resultando la siguiente formulación diferencial para el problema de la lubricación:

$$\frac{\partial(h\theta)}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{h^3}{2}\nabla p - \frac{h\theta}{2}\hat{e}_1 \right) \quad (17.11)$$

$$p > 0, \quad \theta = 1 \quad \text{en } D_\ell^+ \quad \text{y} \quad p = 0, \quad 0 < \theta < 1 \quad \text{en } D_\ell^0$$

Luego, para hallar el campo de presiones p se debe resolver el siguiente problema elíptico en D_ℓ^+

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{h^3}{2}\nabla p - \frac{h}{2}\hat{e}_1 \right) \quad \text{en } D_\ell^+$$

mientras que para hallar el campo θ se debe resolver el siguiente problema hiperbólico en D_ℓ^0

$$\frac{\partial(h\theta)}{\partial t} + \hat{e}_1 \cdot \nabla \left(\frac{h\theta}{2} \right) = 0 \quad \text{en } D_\ell^0$$

Para este modelo, la condición a ser impuesta en la frontera de cavitación viene dada por

$$(\vec{J}_+ - \vec{J}_-) \cdot \hat{n} = 0 \quad \text{en } \vec{x} \in \Sigma \quad (17.12)$$

Si h es continua ($h_+ = h_-$) y el problema es considerado estacionario ($\partial h / \partial t = 0$), las predicciones hechas por ambos modelos de cavitación coinciden con los llamados *bordes de ruptura* de la frontera Σ . Esto es, si se define \hat{n} como la normal saliente a D_ℓ^+ , entonces se puede decir que:

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{n} > 0, \quad \theta_- = 1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_+ = 0$$

de lo cual resulta, empleando la ecuación 17.12:

$$h^3 \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_- = h(1 - \theta_+) \hat{e}_1 \cdot \hat{n} \geq 0 \quad (17.13)$$

Pero teniendo en cuenta la ecuación 17.8, que sigue siendo válida pues es una consecuencia de que $p \geq 0$, se concluye que también $(\partial p / \partial n)_-$ debe anularse, tal como ocurría en la ecuación 17.9. La cuestión es distinta en los bordes de *reformación*, donde se produce un salto en la derivada normal de la presión y en el valor de θ para cumplir con la condición de estricta conservación a diferencia del modelo de Reynolds.

17.3. ESTUDIO DE APLICACIONES

Con el objeto de evaluar los modelos tratados y su influencia en el comportamiento de la lubricación hidrodinámica se seleccionaron tres publicaciones referentes al tema, donde se estudia además de los modelos de Reynolds y Elrod - Adams los mecanismos de solución numérica y se comprueba la divergencia entre un modelo y otro. Se estudió:

- “A Mass-Conserving Algorithm for Dynamical Lubrication Problems With Cavitation”, Ausas *et al* [79].
- “The Impact of the Cavitation Model in the Analysis of Microtextured Lubricated Journal Bearings”, Ausas *et al* [78].
- Predicción de la cavitación usando el algoritmo de conservación de masa M. M. Khonsari [88].

17.3.1. Algoritmo de conservación de masa aplicado a problemas dinámicos con cavitación.

El propósito del artículo es introducir una *simple, robusta y libremente disponible metodología* para resolver numéricamente problemas de lubricación hidrodinámica modelados con una formulación de conservación de masa. Éste fue hecho primero para el caso en el que el espesor de una abertura es una función conocida en el tiempo, y así para el caso dinámico. Cada caso fue ilustrado con un ejemplo detallado, y el lector es invitado por los autores [77], a descargar el código y tener los resultados completos³. Este artículo va orientado a los primeros investigadores, quienes en el desarrollo de sus funciones, puedan acceder a una fuente de programación eficiente y sin costo alguno.

17.3.1.1. Modelo matemático y tratamiento numérico

Ecuaciones de gobierno

El problema a considerar es el de un dispositivo lubricado con un espesor de película dependiente del tiempo $h(x_1, x_2, t)$. El eje x_1 es escogido paralelo (fijo) a la dirección de la

³<http://www.lcad.icmc.usp.br/~buscaglia/download>

velocidad de deslizamiento, y el dominio de cálculo D_ℓ se asume como el rectángulo de coordenadas (x_1, x_2) . Las variables son asumidas adimensionales. El modelo matemático conservativo (en su forma $(p - \theta)$ debido a Elrod-Adams, mencionado por Ausas [79]) se lee:

$$\operatorname{div}(h^3 \nabla p) = \alpha \frac{\partial(\theta h)}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial(\theta h)}{\partial t} \quad \text{en } D_\ell \setminus \Sigma \quad (17.14)$$

$$p \geq 0, \quad \theta = 1 \quad \text{en } D_\ell^+ \quad (17.15)$$

$$p = 0, \quad \theta < 1 \quad \text{en } D_\ell^0 \quad (17.16)$$

$$p = 0 \quad \text{sobre } \Sigma \quad (17.17)$$

$$p = p_a \quad \text{sobre } \Gamma_a \text{ (alimentación)} \quad (17.18)$$

$$p = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0 \text{ (salida de aceite)} \quad (17.19)$$

Complementando con las condiciones de conservación de la masa en la frontera de cavitación:

$$(h_0 \theta_0 - h_+) \alpha \vec{e}_1 \cdot \vec{n} + h_+^3 \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_+ = 2(h_0 \theta_0 - h_+) V_n \quad \text{sobre } \Sigma \quad (17.20)$$

Donde α es la velocidad de deslizamiento no dimensional, asumida paralela a \vec{e}_1 , el vector unitario paralelo a x_1 , \hat{n} es el vector normal unitario a Σ , orientado como saliente de D_ℓ^+ , V_n representa la velocidad normal local a la cual se mueve la frontera Σ y los sub-índices 0 y + se refieren a los valores límite de las variables cuando nos acercamos a Σ desde la zona cavitada o desde la zona activa respectivamente. Este conjunto de ecuaciones y condiciones de contorno se resuelve en el tiempo comenzando desde una condición inicial:

$$\theta(x_1, x_2, t = 0) = \theta_0(x_1, x_2)$$

Para todos los puntos perteneciendo a $D_\ell^0(t = 0)$, la región cavitada inicial. El problema tratado, se estudia utilizando un *esquema upwind*⁴, basado en el balance de

⁴En dinámica computacional de fluidos (CFD), el *esquema upwind* designa una clase de método de discretización numérica para resolver ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas. El esquema upwind utiliza una solución adaptativa o sensible a la plantilla de diferencias finitas para simular numéricamente más propiedades en la dirección de propagación de información en un campo de flujo.

masas en cada nodo, con flujos unívocamente determinados, que lo hace automáticamente conservativo.

El método aplicado por el autor (para ver detalladamente el desarrollo matemático consulte la referencia para conservación de masa de Ausas. [79]) consiste esencialmente en:

- Discretización de las variables de tiempo y espacio para el nodo (i, j) , aplicadas a las condiciones de la ecuación de Elrod-Adams con lo que se obtiene:

$$2\Delta x_1^2 \frac{c_{i,j}^n - c_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} + \alpha \Delta x_1 (c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n) = s_{i,j}^n p_{i+1,j}^n - (s_{i,j}^n + s_{i-1,j}^n) p_{i,j}^n + s_{i-1,j}^n p_{i-1,j}^n + q^2 [s_{i,j+1}^n p_{i-1,j}^n - (s_{i,j+1}^n + s_{i,j}^n) p_{i,j}^n + s_{i,j}^n p_{i,j-1}^n]$$

Donde

$$s_{i,j}^n = \frac{h_{i,j}^3 + h_{i+1,j}^3}{2}, \quad c_{i,j} = \theta_{i,j} h_{i,j}, \quad q = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \quad (17.21)$$

La variable temporal se discretiza en pasos de tiempo uniformes de longitud Δt , y un superíndice n sobre una variable se refiere a su valor al tiempo $t_n = n\Delta t$.

- Establecimiento de las condiciones para las variables discretizadas.

$$p_{i,j}^n > 0 \Rightarrow \theta_{i,j}^n = 1 \quad (17.22)$$

o, equivalentemente,

$$\theta_{i,j}^n < 0 \Rightarrow p_{i,j}^n = 0 \quad (17.23)$$

- Desarrollo del algoritmo iterativo. Se agrega un segundo superíndice (k) para denotar el número de la iteración.

Hallar $p_{i,j}^n, \theta_{i,j}^n$, **for** $i = 1, 2, \dots, N_1$ y $j = 1, 2, \dots, N_2$ tal que:

$$(p_{i,j}^n, \theta_{i,j}^n) = \lim_{k \rightarrow \infty} (p_{i,j}^{n,k}, \theta_{i,j}^{n,k}), \quad (p_{i,j}^{n,0}, \theta_{i,j}^{n,0}) = (p_{i,j}^{n-1}, \theta_{i,j}^{n-1})$$

Para describir la forma en que el k -ésimo iterando es construido definamos primero $p_{i,j}^{n,k}$ y $\theta_{i,j}^{n,k}$, los cuales son valores intermedios de la presión p y del campo de fracción de fluido θ que son obtenido de la ecuación discretizada por eliminación de los valores nodales con todas las otras incógnitas congeladas en la iteración previa. Éstas vienen entonces dadas por:

$$p_{i,j}^{n,k} = \frac{1}{s_{i,j}^{n,k-1} + s_{i-1,j}^{n,k-1} + q^2 (s_{i,j+1}^{n,k-1} + s_{i,j}^{n,k-1})} * [-2\Delta x_1^2 \frac{c_{i,j}^{n,k-1} - c_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} - \alpha \Delta x_1 (c_{i,j}^{n,k-1} - c_{i-1,j}^{n,k-1}) + s_{i,j}^{n,k-1} p_{i+1,j}^{n,k-1} + s_{i-1,j}^{n,k-1} p_{i-1,j}^{n,k-1} + q^2 (s_{i,j+1}^{n,k-1} p_{i,j+1}^{n,k-1} + s_{i,j}^{n,k-1} p_{i,j-1}^{n,k-1})] \quad (17.24)$$

$$\Theta_{i,j}^{n,k} = \frac{1}{\left(\frac{2\Delta x_1^2}{\Delta t} + \alpha\Delta x_1\right) h_{i,j}^n} * \left[\frac{2\Delta x_1^2 c_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} + \alpha\Delta x_1 c_{i-1,j}^{n,k-1} + s_{i,j}^n p_{i+1,j}^{n,k} - \left(s_{i,j}^n + s_{i-1,j}^n\right) p_{i,j}^n + s_{i-1,j}^n p_{i-1,j}^n + q^2 \left[s_{i,j+1}^n p_{i,j+1}^n - \left(s_{i,j+1}^n + s_{i,j}^n\right) p_{i,j}^n + s_{i,j}^n p_{i,j-1}^n \right] \right] \quad (17.25)$$

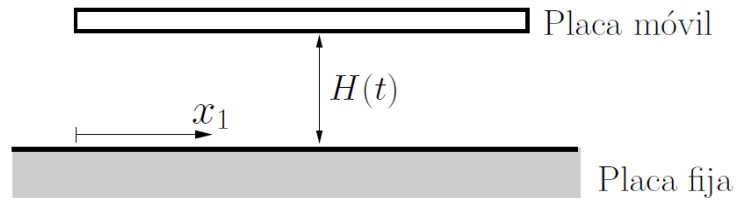
- Establecimiento de mecanismo de convergencia de las ecuaciones discretizadas (*esquema de relajación*). Como se ha mencionado en el modelo de Elrod-Adams se dificulta la convergencia de los datos por las condiciones de la frontera móvil.

Adelante se describen entonces dos ejemplos donde se aplica el modelo y el método numérico utilizado, con el fin de evaluar su convergencia y la divergencia entre la ecuación de Reynolds y el modelo de Elrod-Adams en la frontera de cavitación.

Primer ejemplo: Placas oscilantes en flujo “squeeze”

El problema se estudia en sistema unidimensional de dos placas paralelas en donde la placa inferior se considera en reposo, mientras que la placa superior se encuentra en movimiento vertical ($\alpha = 0$) con una función del tiempo prescrita, i.e., como se ve en la figura 17.4.

Figura 17.4: Sistema unidimensional considerando el problema de la placa oscilante en flujo tipo squeeze.



Fuente A Mass-Conserving Algorithm for Dynamical Lubrication Problems With Cavitation, Ausas *et al.*, Journal of Tribology, 2009

$$h(x_1, x_2, t) = H(t) = 0,125 \cos(4\pi t) + 0,375$$

Se imponen las siguientes condiciones de contorno:

$$p(x_1 = 0, x_2, t) = p(x_1 = 1, x_2, t) = p_0 = 0,025$$

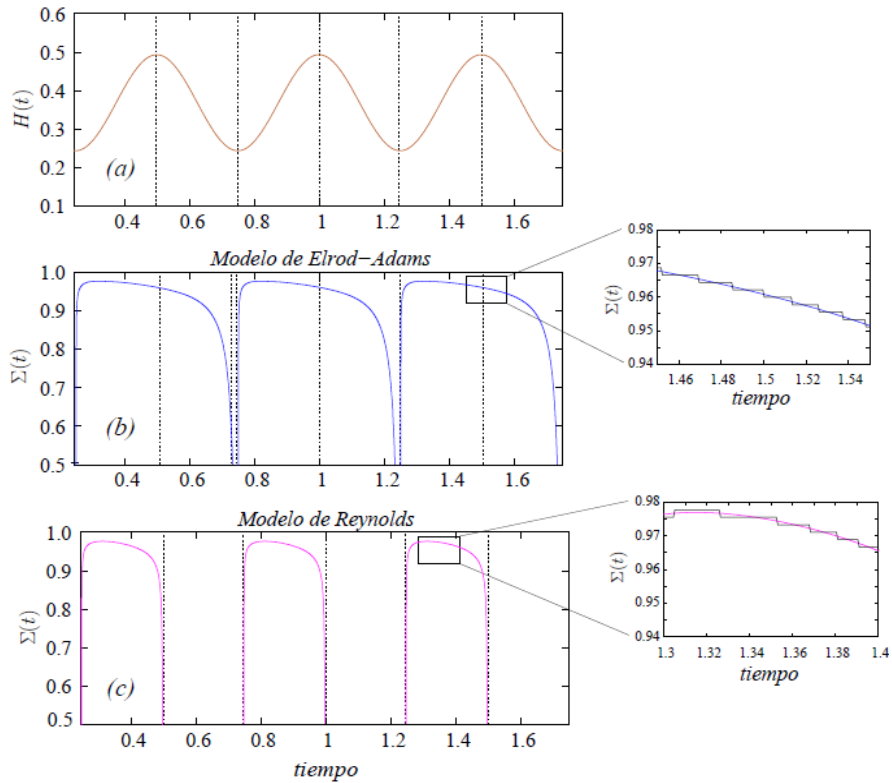
En la solución exacta de este problema se conoce el instante en el ocurre la ruptura ($t_{rup} = 0,250079$).

A partir de esto se describe la posición de la frontera derecha de D_ℓ^0 , $\Sigma(t)$ al tiempo t de acuerdo a:

$$\Sigma(t) = 1 - \left[\frac{p_0 H^3(t)}{H'(t)} \right]^{1/2} \quad (17.26)$$

La solución exacta para el proceso de reformación es más difícil de obtener que la correspondiente para el proceso de ruptura. En este caso, usando la ecuación (17.20) se obtiene una ecuación diferencial de la forma $\Sigma'(t) = F(p_0, H(t), \theta(\Sigma(t), t), \Sigma(t))$. Para resolver esta ecuación se almacena el tiempo al cual la ruptura ocurre en cada posición, debido a que es necesario computar $\theta(\Sigma(t), t)$. Los resultados son presentados en la figura 17.5. En la figura (a) espesor de película $H(t)$ usada en el problema de las placas oscilantes en un flujo squeeze. (b) frontera de cavitación derecha $\Sigma(t)$ para el modelo conservativo de Elrod-Adams, comprobando los resultados numéricos con la solución exacta. (c) Igual que en (b) para el modelo no conservativo de Reynolds. Nótese en el detalle en (b) y (c), mostrando la forma de tipo escalera para la posición en función del tiempo de la frontera de cavitación numérica computada.

Figura 17.5: Comparación entre modelos de Elrod-Adams y Reynolds



Fuente *Ídem*

En la parte (a) de la gráfica se muestra la naturaleza cosenoidal del movimiento de la placa superior desde $t = 0,25$. En la parte (b) se muestra el gráfico de $\Sigma(t)$ predicho por el método estudiado, sobrepuesto con el obtenido numéricamente. En (c) se muestran los gráficos obtenidos con el modelo de Reynolds; como se percibe el modelo de Reynolds sobre estima la velocidad a la cual la película se reforma.

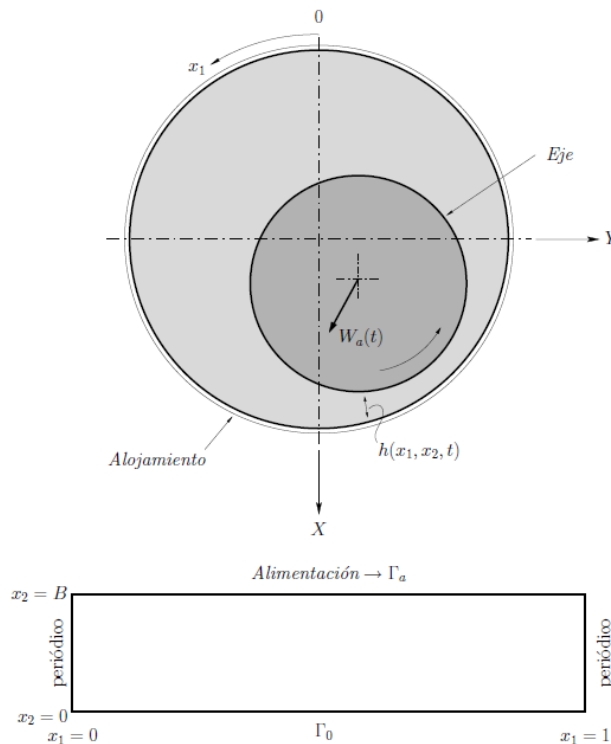
Segundo ejemplo: cojinete radial con carga dinámica

Este problema evalúa el comportamiento de la cavitación en un cojinete lubricado hidrodinámicamente que soporta una carga variable en el tiempo; de este modo, la función de espesor de la película $h(x_1, x_2, t)$, resulta de la interacción dinámica del cojinete con la carga aplicada.

La *metodología* seguida por el autor se basa en:

- Definición de la geometría y condiciones de frontera. En la figura 17.6 se presenta la geometría definida, sobre el dominio $D_\ell = (0, 1) \times (0, B)$, considerando la posición del centro del eje en tiempo como $(X(t), Y(t))$.

Figura 17.6: Representación esquemática del cojinete radial y del dominio computacional considerado



Fuente *Ídem*

$$h(x_1, x_2, t) = 1 + X(t) \cos(2\pi x_1) + Y(t) \sin(2\pi x_1) \quad (17.27)$$

Y las condiciones de contorno sobre ∂D_ℓ dadas por:

$$p = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0 = \{(x_1, x_2) \in \partial D_\ell; x_2 = 0\} \quad (17.28)$$

$$p = p_a \quad \text{sobre } \Gamma_a = \{(x_1, x_2) \in \partial D_\ell; x_2 = 0\} \quad (17.29)$$

$$p(0, x_2) = p(1, x_2) \quad x_2 \in (0, B) \quad (17.30)$$

$$\nabla p(0, x_2) = \nabla p(1, x_2) \quad x_2 \in (0, B) \quad (17.31)$$

Donde las ecuaciones (17.28) y (17.29), representan las condiciones de contorno a ser aplicadas sobre los bordes de salida y alimentación respectivamente y las ecuaciones (17.30) y (17.31), son las condiciones de borde periódicas por la presión y su gradiente respectivamente sobre $x_1 = 0$ y $x_1 = 1$.

- Caracterización de la carga transmitida al cojinete. El problema está orientado a los cojinetes en los pistones de los de motores de combustión interna, con lo cual se parte de $W_X^a(t)$ y $W_Y^a(t)$, respectivamente, las componentes X e Y de la carga aplicada, y por M la masa del eje. Las ecuaciones dinámicas para $X(t)$ e $Y(t)$ son

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} = W_X(t) + W_X^a(t) \quad (17.32)$$

$$M \frac{d^2 Y}{dt^2} = W_Y(t) + W_Y^a(t) \quad (17.33)$$

Donde $W_X(t)$ y $W_Y(t)$ es la capacidad de carga en cada dirección de trabajo dadas por

$$W_X(t) = \int_{D_\ell} p(x_1, x_2, t) \cos(2\pi x_1) d\vec{x} \quad (17.34)$$

$$W_Y(t) = \int_{D_\ell} p(x_1, x_2, t) \sin(2\pi x_1) d\vec{x} \quad (17.35)$$

Nótese la fuerte vinculación entre las expresiones (17.32) y (17.33) con la teoría hidrodinámica de la lubricación.

- Desarrollo del algoritmo. En este caso, el espesor de la película es una incógnita más del problema por lo que se recurre a un *esquema de Newmark*⁵ para (17.32) y (17.33):

⁵El esquema de Newmark es un algoritmo direccional de una serie truncada de Taylor con expansión cuadrática, que es el mínimo requerimiento para problemas de segundo orden comúnmente encontrados en estructuras dinámicas.

$$X^n = X^{n-1} + \Delta t U^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{2M} (W_X^n + W_X^a(t_n)) \quad (17.36)$$

$$U^n = U^{n-1} + \frac{\Delta t}{M} (W_X^n + W_X^a(t_n)) \quad (17.37)$$

$$Y^n = Y^{n-1} + \Delta t V^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{2M} (W_Y^n + W_Y^a(t_n)) \quad (17.38)$$

$$V^n = V^{n-1} + \frac{\Delta t}{M} (W_Y^n + W_Y^a(t_n)) \quad (17.39)$$

Donde U^n (resp. V^n) aproximan $X'(t_n)$ (resp. $Y'(t_n)$). En este sistema fuertemente no lineal, debido a que W_X^n y W_Y^n dependen de X^n e Y^n . La estrategia iterativa propuesta actualiza las variables dinámicas X e Y simultáneamente con los campos de presión y fracción de fluido. (Ver detalles en [79]).

Para el ejemplo, el periodo no dimensional de la carga se hace igual a $T = 1$. Se considera entonces la carga analítica dada por (para $0 \leq t \leq 1$)

$$W_X^a(t) = 0,01 [\exp(-400(t - 0,25)^2) + 0,95534 \exp(-400(t - 0,5)^2)] \quad (17.40)$$

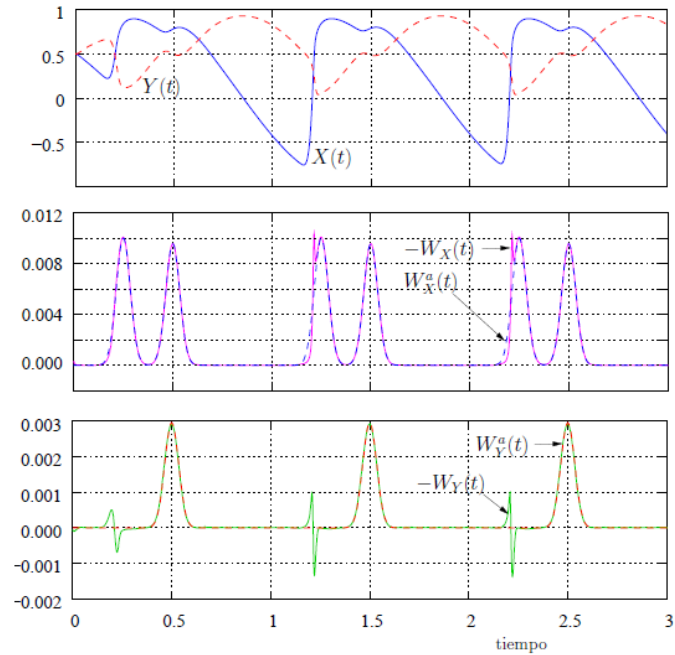
$$W_Y^a(t) = 0,29552 \times 10^{-2} \exp(-400(t - 0,5)^2) \quad (17.41)$$

La geometría y parámetros iniciales serán omitidos por simplicidad pero está detallado en el trabajo de referencia de Ausas [79]. Las condiciones iniciales son:

$$\theta(x_1, x_2, t = 0) = 1, \quad X(t = 0) = Y(t = 0) = 0,5, \quad U(t = 0) = V(t = 0) = 0$$

Bajo estas condiciones de carga, se obtienen en la figura 17.7, la evolución en el tiempo del centro del eje y la aplicación de las cargas W_X^a y W_Y^a junto a la capacidad de carga W_X y W_Y (cambiando su signo por simplicidad de comparación con W_X^a y W_Y^a). Después de una revolución, el comportamiento del sistema se hace periódico. La inercia del eje crea un pico de carga (W_X y W_Y) en los tiempos 1,21, 2,21. etc.

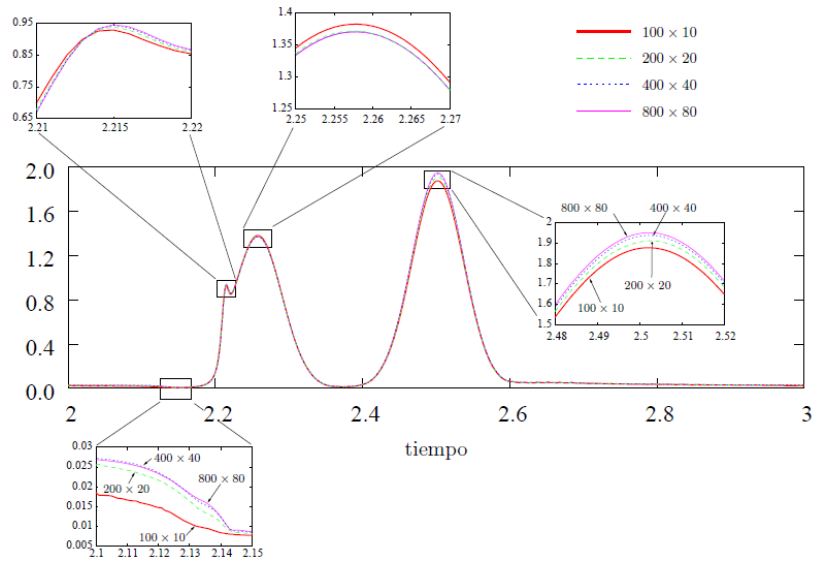
Figura 17.7: Evolución en el tiempo de la posición en el eje, cargas aplicadas W_X^a , W_Y^a y capacidad de carga W_X , W_Y .



Fuente *Ídem*

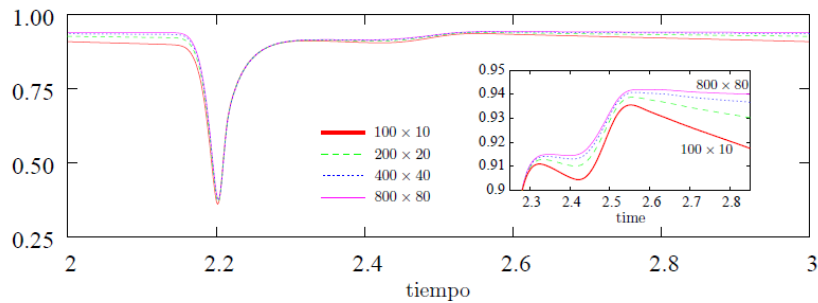
Se realiza un estudio de convergencia para este problema, empleando mallas de 100×10 , 200×20 , 400×40 y 800×80 celdas sobre el valor máximo de la presión $p_{m\acute{a}x}(t)$ y la excentricidad $e(t) = [X(t)^2 + Y(t)^2]^{1/2}$. En la figura 17.8, se gráfica la presión del sistema en el intervalo de tiempo $2 < t < 3$; se detallan cuatro periodos para evaluar el desarrollo de las mallas. Es importante notar los efectos de la carga cíclica aplicada. Más adelante, en el mismo periodo de tiempo, se gráfica la excentricidad, como se muestra en la figura 17.9.

Figura 17.8: Estudio de convergencia: evolución en el tiempo del máximo valor de la presión .



Fuente *Ídem*

Figura 17.9: Estudio de convergencia: evolución en el tiempo de la excentricidad.



Fuente *Ídem*

17.3.2. Impacto del modelo de cavitación en un cojinete con superficie microtexturada

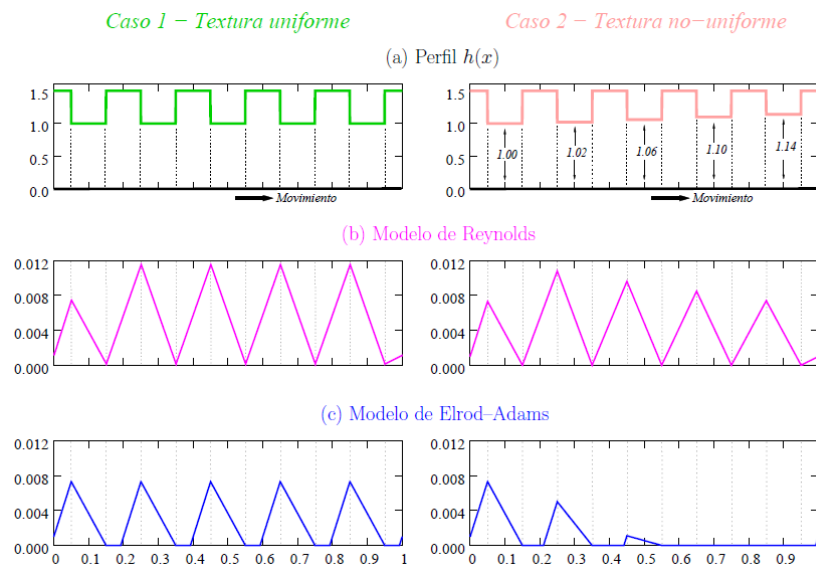
El propósito de este artículo es reportar una comparación numérica entre el modelo de lubricación de Reynolds y el diseñado por Elrod-Adams [83] en presencia de cojinetes con superficies micro - texturada bajo carga estática⁶. Se ha comprobado que en cojinetes lisos ambos modelos se comportan eficientemente prefiriéndose el de Reynolds por su

⁶En la sección 17.3.1 se comparan los modelos en presencia de cavitación para cojinetes sometidos a carga dinámica

confiabilidad en la convergencia numérica; sin embargo, en superficies micro texturadas el modelo tradicional, subestima ampliamente el área cavitada ocasionando la desviación de variables importantes tales como el torque de fricción (altamente sensible a textura y la cavitación) y la capacidad de carga [78].

En problemas estáticos, las soluciones de los modelos difieren en la predicción de la *frontera de reformación*. En particular, en el caso de dispositivos micro - texturados el fenómeno de la reformación puede ocurrir localmente, al nivel de la celda texturada elemental. En este caso, la frontera de reformación se torna muy compleja, consistiendo de muchas partes no conectadas. Para comprender este fenómeno considérese un cojinete de empuje unidimensional de placas paralelas con texturas discontinuas de *profundidad uniforme* a lo largo del dominio como lo muestra el *Caso 1*, de la figura 17.10. Se puede apreciar claramente (columna a la izquierda) que ambos modelos predicen que la presión se recupera en cada celda de textura, pero que los puntos de reformación de la película no coinciden. Esto conduce a una diferencia de presión en el máximo, que crece cuando la presión de alimentación ($p(0) = p(1)$) disminuye. Para el *Caso 2* (a la derecha) donde las placas no son paralelas se simula el comportamiento en la zona divergente de la teoría de lubricación de cojinetes. En las partes (b) y (c) se puede ver que el modelo de Reynolds incorrectamente predice reformación de película donde no se conserva la masa.

Figura 17.10: Campos de presión predichos por el modelo de Reynolds y el modelos de Elrod-Adams para el cojinete de empuje axial.

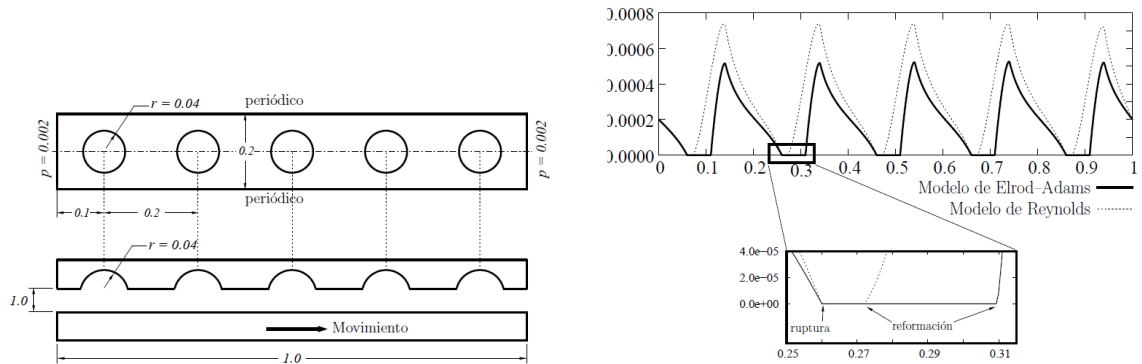


Fuente The Impact of the Cavitation Model in the Analysis of Microtextured Lubricated Journal Bearings, Ausas *et al.*, Journal of Tribology, 2003.

Ausas *et. al* [78] presenta otro ejemplo con texturas esféricas (“dimples”, figura 17.11 izquierda). En la figura 17.11 (derecha) se muestra la presión para ambos modelos a lo

largo de la línea que pasa por el centro de las texturas. Claramente, la región de cavitación predicha por el modelo de Elrod-Adams es significativamente mayor.

Figura 17.11: Distribución geométrica de agujeros y capacidad de carga



Fuente *Ídem*

17.3.2.1. Cojinete radial con textura bi - dimensional

En la figura 17.12 se muestra el esquema del cojinete a estudiar, donde las condiciones de contorno son las mismas que las dadas en (17.28) - (17.31). En este caso, el espesor de película tiene la siguiente forma:

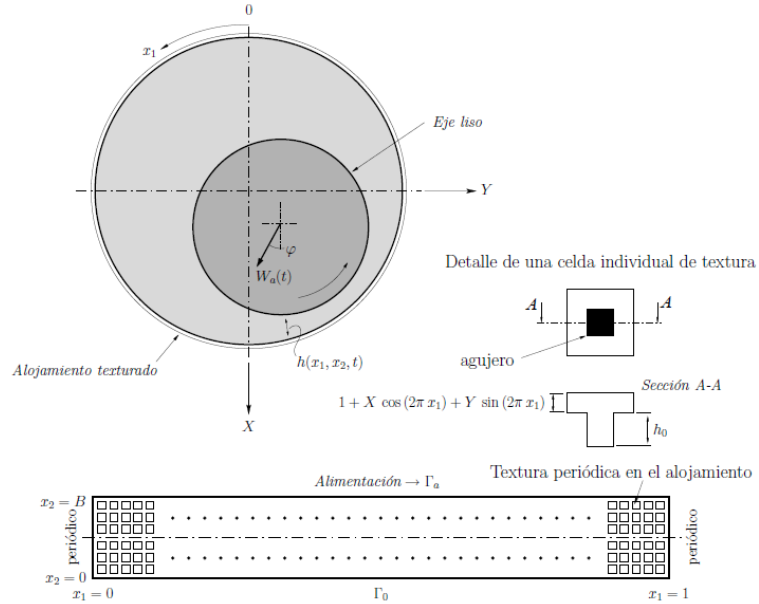
$$h(x_1, x_2) = 1 + X \cos(2\pi x_1) + Y \sin(2\pi x_1) + h_t(x_1, x_2) \quad (17.42)$$

Donde h_t representa la contribución de la textura al espesor total. La textura tendrá forma cuadrada y quedará caracterizada por los siguientes parámetros:

- Número de celdas de textura a lo largo de las direcciones x_1 y $x_2 \rightarrow N_1$ y N_2
- Profundidad de la textura $\rightarrow h_0$
- Fracción de área $\rightarrow s$

Donde la fracción de área s representa la fracción de una celda de textura individual que está cubierta por el agujero de profundidad h_0 .

Figura 17.12: Esquema de cojinete radial y el correspondiente dominio bidimensional incluyendo las micro texturas periódicas.



Fuente *Ídem*

Torque por fricción y carga

El torque será calculado según la expresión 17.43:

$$T = \int_{D_i^+} \frac{1}{h} d\vec{x} + \int_{D_i^+} 3h \frac{\partial p}{\partial x_1} d\vec{x} \quad (17.43)$$

El primer término en T se llama término de *Couette* y el segundo es el término de *Poiseuille*. El torque de fricción T es evaluado en una cierta posición de equilibrio (X, Y) correspondiente a una carga aplicada dada W_a sobre el eje. Esta posición se halla mediante un proceso iterativo de *Newton-Raphson* (Ver sección 22.3) sobre la siguiente condición de equilibrio:

$$W_a \cos \varphi + W_X(X, Y) = 0 \quad W_a \sin \varphi + W_Y(X, Y) = 0$$

Donde φ es el ángulo de la carga aplicada como se indica en la figura 17.12

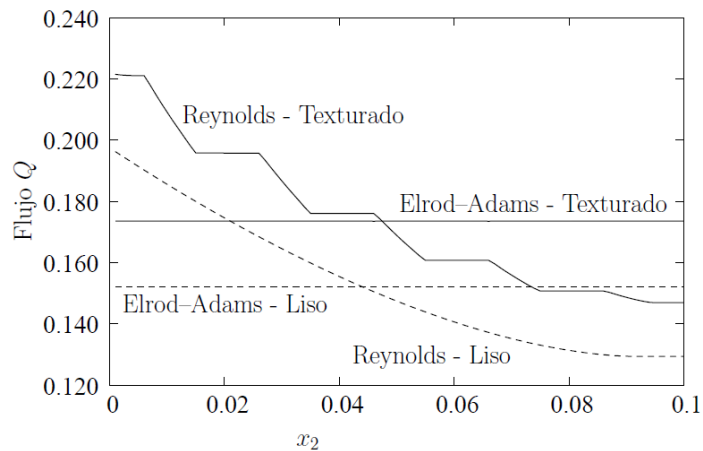
Simulaciones numéricas

Las simulaciones buscan representar el flujo, la capacidad de carga y el torque de fricción. Si se define el flujo de lubricante Q a través de una línea de x_2 constante como sigue:

$$Q(x_2) = \int_0^1 \vec{J}(x_1, x_2) \cdot \hat{e}_2 dx_1 \quad (17.44)$$

Donde \vec{J} está dado por la ecuación (17.5) en el modelo de Reynolds y por la ecuación (17.10) en el modelo de Elrod-Adams. Es claro que si la conservación de la masa se cumple, entonces Q será *independiente* de x_2 . En la figura 17.13 se muestran los resultados obtenidos para el caudal. Nótese que el modelo de Reynolds subestima el flujo extraído de la línea de alimentación por cerca de 15% (No se conserva la masa en el modelo de Reynolds).

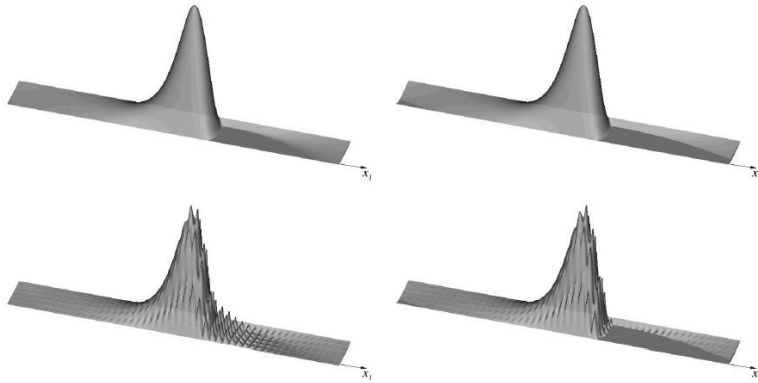
Figura 17.13: Comparación de los modelos de Reynolds y $p - \theta$ de Elrod-Adams para el flujo Q a través de líneas de x_2 constante para un cojinete radial liso y con textura.



Fuente *Ídem*

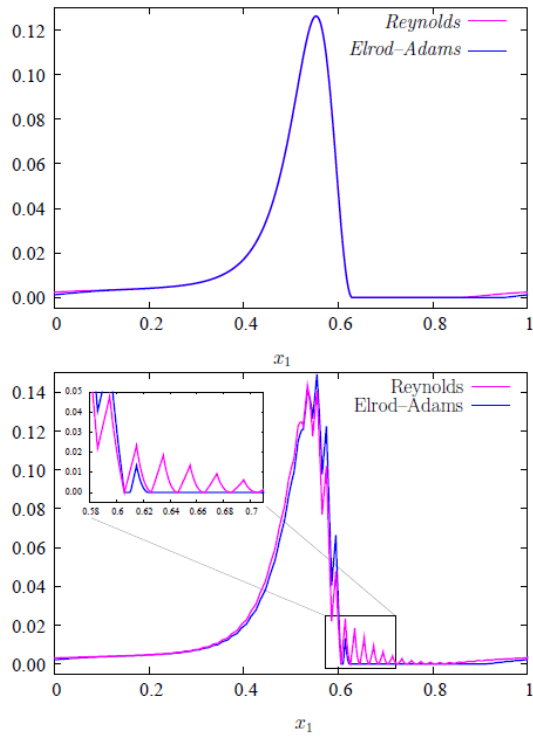
Los campos de presión predichos por ambos modelos se presentan en la gráfica 17.14. Para mayor claridad se estudian mirando los perfiles de presión a lo largo de la línea $x_2 = B/2$, como se ve en la figura 17.15. En el caso texturado el modelo de Reynolds predice presiones positivas en cada celda individual de textura, lo cual no es físicamente realista (como ya se mostró se presencia la misma *reformación espuria*).

Figura 17.14: Vista 3D de los campos de presión obtenidos con el modelo de Reynolds (izquierda) y el modelo $p - \theta$ de Elrod-Adams (derecha)



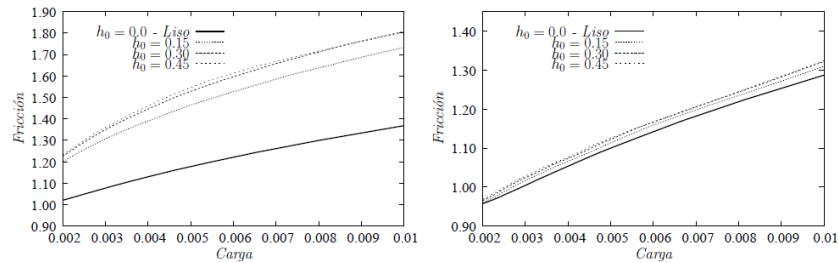
Fuente *Ídem*

Figura 17.15: Perfiles de presión a lo largo de la línea $x_2 = B/2$ para los casos estudiados en la figura 17.13



Fuente *Ídem*

Figura 17.16: Torque por fricción T en función de la carga aplicada W_a para diferentes valores de profundidad de textura. Izquierda: modelo de Reynolds, Derecha: Modelo de Elrod-Adams



Fuente *Ídem*

En el caso de cojinete liso se observa un acuerdo razonable entre los modelos, mientras que en el caso texturado la parte de Couette de la fricción, cambia dramáticamente de un modelo a otro. Para ver esto, se gráfica en la figura 17.16, el torque por fricción en función de la carga aplicada para diferentes valores de la profundidad h_0 y un valor fijo del 20% para la fracción de área s .

17.3.3. Cavitación en agujeros usando el algoritmo de conservación de masa

Debido a lo anterior expuesto acerca de la cavitación, Khonsari en su trabajo muestra la textura de la superficie de un sello mecánico y de un cojinete axial de la forma de surcos o microagujeros, para determinar por medio del algoritmo de conservación de masa la mejora en el rendimiento, la resistencia al desgaste y la capacidad de carga, y poder mostrar como se ven afectados por la cavitación que ocurre cuando se les aplica una prueba por medio de un marcador láser, por otra parte utilizan un método de multi-rejilla para acelerar la velocidad en la convergencia de los resultados

Estructura, geometría y parámetros.

Khonsari en su experimento utilizó un tribómetro universal LRI-1⁷, que fue diseñado para analizar la cavitación. Su estructura lleva dos discos, el primer disco es el inferior, este es fabricado de bronce y en su superficie hay una serie de agujeros grabados para efecto de la prueba con un diámetro de 2 [mm]. El segundo disco, es el superior; este es fabricado de un material transparente *Plexiglas*, y gira a una velocidad específica controlada por un computador.

Para observar el efecto de la prueba con mas detenimiento una cámara de alta definición

⁷Debido a la baja resolución de la gráficas es recomendable ver el artículo: Y. Qiu, MM Khonsari, et al. On the prediction of cavitation in dimples using a massconservative algorithm. *Journal of Tribology*, 131:041702, 2009.

fue montada en la parte superior para registrar el comportamiento de los agujeros a través del disco superior transparente. La carga que se le es aplicada es mantenida durante toda la prueba. Las condiciones de la prueba se muestran en la cuadro 17.1.

Cuadro 17.1: Parámetros Experimentales

<i>Parámetros experimentales</i>	
Disco: Diámetro interno del agujero	0,0254 [m]
Disco: Diámetro externo del agujero	0,0127 [m]
Profundidad del agujero	~ 20 [μm]
Carga	1,8 [Kg]
Presión a la entrada y a la salida	1 [atm]
Velocidad Rotacional	600 [rpm]
Lubricante	<i>Aceite de Motor (SAE10)</i>
Temperatura de la Cámara	24 – 27 [°C]
Humedad	50 – 60 %

La cámara constantemente va captando imágenes donde se puede observar con mas detenimiento la generación de la cavitación ⁸. Un área oscura en los agujeros, muestra que estos están llenos de aire/gas, generado por el disco superior debido a que este va girando (sentido anti-horario). De la misma manera se observa la frontera entre la película completa y el área de cavitación; indica como se divide la película y la reformación dentro de los agujeros. Debido a que la superficie del disco inferior no es perfectamente plana, la desuniformidad de la superficie puede afectar el espesor de película en ciertos agujeros y estos a su vez influyen en la generación de la cavitación.

17.3.3.1. Metodología

Estructura de los Micro-agujeros

La geometría es básica, como se ve en la figura 17.17. La superficie del anillo estacionario, es la que tiene la microestructura de los agujeros, y esta colocada en el eje que gira a una velocidad ω , con un radio interno r_i , y un radio externo r_0 . Se asumió que los agujeros estaban simétricamente axial en columnas que se extienden desde el diámetro interno al diámetro externo y están dispuestos en círculos concéntricos circunferencialmente.

Forma de los Micro-agujeros

La forma de los agujeros en el plano X-Y, se asume que es circular. En dirección Z (profundidad), se asume que es de casquete esférico, como se ve en la figura 17.17. Por lo tanto,

⁸Y. Qiu, MM Khonsari, et al. *Ídem*

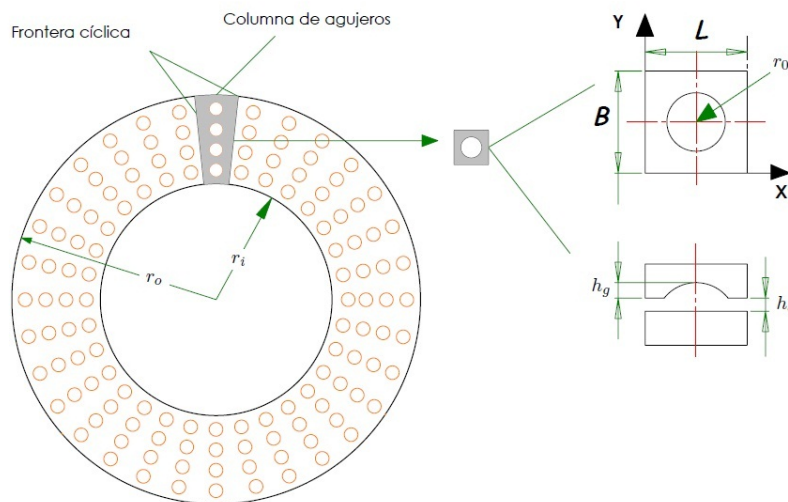
el espesor de película se puede describir así:

$$r = \sqrt{(x - x_c)^2 - (y - y_c)^2} \quad (17.45)$$

$$h = \begin{cases} \{h_0\} & \text{cuando } \geq r_0 \\ \sqrt{\left[\frac{(r_0^2 + h_g^2)}{2h_g}\right]^2 - r^2} - \frac{(r_0^2 + h_g^2)}{2h_g} + h_g + h_0 & \text{cuando } < r_0 \end{cases} \quad (17.46)$$

r_0 , es el radio del agujero, x_c , y y_c , son los centros de coordenadas del agujero, y h_g y h_0 son la profundidad del agujero y el espesor de la película de fluido, como se ve en la figura 17.17.

Figura 17.17: Estructura del disco



Ecuación de Reynolds

Para este estudio se utiliza nuevamente la ecuación de Reynolds en estado compresible.

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} P &= P_{in} \text{ en } y = 0 \\ P &= P_{ex} \text{ en } y = B \end{aligned} \quad (17.47)$$

En la figura 17.17, se observa, que en la geometría de la sección sombreada toma la forma de un aspa de un ventilador a lo largo de su línea central. Si el radio de r_i a r_0 es grande, el efecto de curvatura se puede despreciar y la columna se convierte en una celda rectangular con agujeros, si las presiones de entrada y salida son idénticas, solo una celda de agujeros sería suficiente para representarse. Por lo tanto, una condición de frontera cíclica⁹ de este dominio podría agregarse, muestra en la figura.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (17.48)$$

$$P_{izq} = P_{der} \quad (17.49)$$

Condiciones de frontera en la cavitación

Cuando la presión local del fluido cae por debajo de la presión de vapor, en la película de fluido se produce ruptura y cavitación. Dentro de la zona de cavitación, la película contiene una mezcla de vapor y gas, la mezcla pasa a través de la zona de cavitación y con el aumento de la presión de la mezcla une los componentes de la película completamente al finalizar la zona cavitada; el proceso es llamado reformación de película. Khonsari de acuerdo con Floberg-Jakobsson-Olsson (JFO) [84, 86] tomó las siguientes suposiciones básicas de la teoría:

1. En la zona de cavitación, la mezcla de fluidos en la zona más estrecha separa por completo el vapor y el gas.
2. Dentro de la zona cavitada, la presión de cavitación P_c , sigue siendo constante.
3. Sobre las fronteras entre la región de presión completa y cavitación, el gradiente de presión es cero. Por lo tanto, la ubicación de la ruptura de la película es:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0 \quad (17.50)$$

Cuando n , representa el vector normal hacia afuera de la frontera de ruptura de la película.

4. La ubicación de la reformación de película, esta contenida en la siguiente relación:

$$\frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial n} = \frac{V_n}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c} \right) \quad (17.51)$$

⁹La condición de frontera de la salida para una celda, es la misma para la frontera de entrada que la precede.

Donde V_n , es la velocidad del fluido en dirección n , ρ y ρ_c son la densidad del fluido en el área local y el área de cavitación, h representa el espesor de película del fluido local, y μ denota la viscosidad del fluido.

Elrod [82] en sus estudios, desarrollo un algoritmo computacional para implementar la teoría de JFO, mediante la función de cambio ¹⁰ se implementarían las condiciones de frontera de la teoría de JFO. De esta manera, el algoritmo de Elrod ofrece una sola ecuación de gobierno que describe el campo de flujo completo (tanto en la película completa como en la región de cavitación), y está garantiza la conservación de masa. Muchos más autores como Vijayaraghavan y Keith [89, 90, 91] aplicaron la teoría de JFO de manera sistemática y propusieron un algoritmo más eficiente que evita el proceso de prueba y error, por lo tanto es mas sólido.

El método de la investigación de Khonsari se basa en el algoritmo propuesto por Vijayaraghavan y Keith [89]. Las suposiciones básicas del modelo son:

1. El espesor de película y la profundidad del agujero son tan pequeños (se puede aplicar la ecuación de Reynolds).
2. El fluido es Neptuniano con una viscosidad constante.
3. Si el espesor de película es pequeño, se puede asumir que el fluido es laminar
4. El problema es el estado estable.

Conservación de masa de Elrod en la forma de la ecuación de Reynolds es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{h^3 g \partial \varphi}{12 \mu \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta \frac{h^3 g \partial \varphi}{12 \mu \partial y} \right) = \frac{U}{2} \frac{\partial \varphi h}{\partial x} \quad (17.52)$$

Cuando β , es el modulo de compresibilidad del lubricante. Que satisface la siguiente relación.

$$\beta = \rho \frac{\partial P}{\partial \rho} \quad (17.53)$$

φ , Es el parámetro que describe la película, y se define como $\varphi = \rho / \rho_c$, (ρ) cuando el lubricante esta en la región de película completa y el termino fraccionado (ρ_c), es cuando la película esta en la región de cavitación.

g , es el cambio de la función y se define como:

$$\begin{aligned} g &= \{1\} \text{region de película completa} \\ g &= \{0\} \text{region de cavitación} \end{aligned}$$

¹⁰Función de transferencia

Mediante el uso de la función de cambio, la ecuación 17.52, automáticamente se para la región de película completa de la región de cavitación sin necesidad de los detalles de la generación de la misma.

En forma adimensional, la ecuación 17.52, se convierte en:

$$\frac{\beta h_0^3 \partial}{12 \mu r_0^2 \partial \bar{x}} \left(\frac{\bar{h}^3 g \partial \varphi}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\beta h_0^3 \partial}{12 \mu r_0^2 \partial \bar{y}} \left(\frac{\bar{h}^3 g \partial \varphi}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{U h_0}{2 r_0} \frac{\partial \varphi \bar{h}}{\partial \bar{x}} \quad (17.54)$$

Con $\bar{r} = r/r_0$, $\bar{h} = h/h_0$, donde h_0 , es el espesor de película en el área libre del agujero. La ecuación 17.52 puede escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\bar{h}^3 g \partial \varphi}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\bar{h}^3 g \partial \varphi}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\lambda}{\bar{\beta}} \frac{\partial \varphi \bar{h}}{\partial \bar{x}} \quad (17.55)$$

Donde $\lambda = 6 \mu r_0 U / P_a h_0^2$, es el parámetro del disco, $\bar{\beta} = \beta / P_a$ y P_a es la presión ambiente.

17.3.3.2. Método de solución

Discretización

Khonsari para discretizar la solución al problema propuesto, uso el método de diferencias finitas y siguiendo el esquema presentado por Vijayaraghavan y Keith [89], la ecuación 17.55 se puede discretizar de la siguiente manera:

$$A_p \varphi_p + A_s \varphi_s + A_n \varphi_n + A_e \varphi_e + A_w \varphi_w + F = 0 \quad (17.56)$$

Donde:

$$A_p = -\frac{\lambda}{2 \bar{\beta} \Delta x} \bar{h}_p \left(2 - \frac{g_e}{2} - g_p - \frac{g_w}{2} \right) + \frac{-1}{\Delta x^2} [\alpha_e + \alpha_w] g_p + \frac{-1}{\Delta y^2} [\alpha_n + \alpha_s] g_p$$

$$A_s = \frac{1}{\Delta y_2} \alpha_s g_s$$

$$A_n = \frac{1}{\Delta y_2} \alpha_n g_n$$

$$A_w = -\frac{\lambda}{2 \bar{\beta} \Delta x} \bar{h}_w \left(-2 + \frac{g_w + g_p}{2} \right) + \frac{1}{\Delta x^2} \alpha_w g_w$$

$$A_e = -\frac{\lambda}{2\bar{\beta}\Delta x} \bar{h}_e \left(\frac{g_e + g_p}{2} \right) + \frac{1}{\Delta x^2} \alpha_e g_e$$

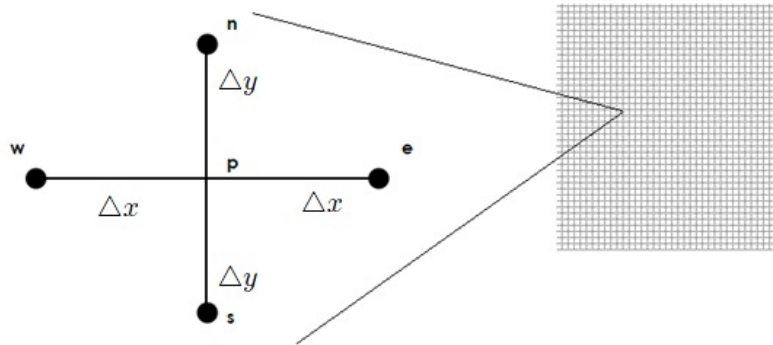
$$F = \frac{1}{\Delta x^2} [-\alpha_e g_e + [\alpha_e + \alpha_w] g_p - \alpha_w g_w] + \frac{1}{\Delta y^2} [-\alpha_n g_n + [\alpha_n + \alpha_s] g_p - \alpha_s g_s]$$

$$\alpha_n = \frac{(\bar{h}_n + \bar{h}_p)^3}{8}, \quad \alpha_s = \frac{(\bar{h}_s + \bar{h}_p)^3}{8}, \quad \alpha_e = \frac{(\bar{h}_e + \bar{h}_p)^3}{8},$$

$$\alpha_w = \frac{(\bar{h}_w + \bar{h}_p)^3}{8}$$

g , representa el valor local de la función de transferencia, h es el espesor de película local y n , s , w , e , y p denota la posición relativa del centro del nodo. Los parametros Δx y Δy es el tamaño de la rejilla en la dirección circunferencial y radial respectivamente como se muestra en la figura 17.18.

Figura 17.18: Rejilla para la computación



Iteración del método

Existen muchos métodos numéricos que están disponibles para la solución de la discretización mencionada anteriormente como lo son:

- Método de Gauss-Seidel¹¹: Es un método iterativo utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales, esto significa, que se parte de una aproximación inicial y se repite el proceso hasta llegar a una solución con un margen de error tan pequeño como se quiera.

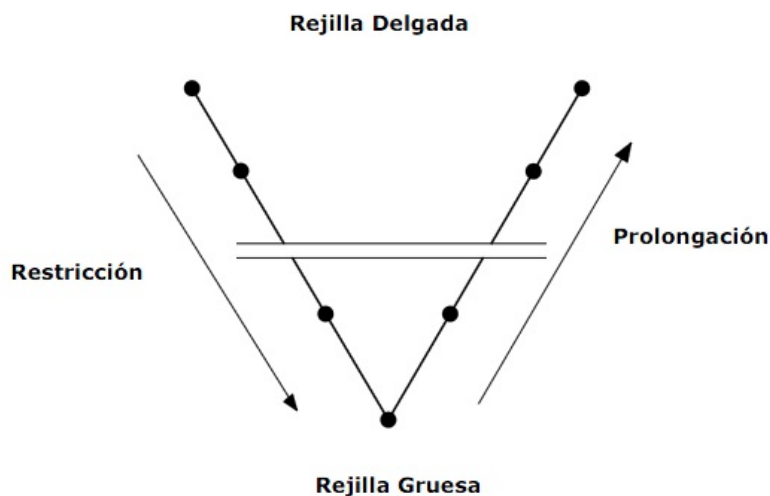
¹¹El método se llama así en honor a los matemáticos alemanes Carl Friedrich Gauss y Philipp Ludwig von Seidel

- Método de relajación (SOR): La idea de relajación consiste, en cada iteración aplicar la relación de recurrencia de tal forma que se mejoren las prestaciones del procedimiento avanzando un paso mas amplio, o más corto ω .
- Dirección alterna implícita (ADI): Es un método de diferencias finitas para resolver parabólicas y elípticas de ecuaciones diferenciales parciales.

Khonsari utiliza el método de multi-rejilla para todas las simulaciones, ya que es casi 10 veces más rápido que el (ADI), y de 20-30 veces más rápido que el método de Gauss-Seidel. Cuando la solución del sistema de ecuaciones usa el método de iteración de multi-rejilla a escala fina, el error de frecuencia alta decaerá rápidamente, mientras que el error de baja frecuencia es difícil de eliminar. El método multi-rejilla es aplicado para acelerar el método de iteración convencional.

La idea principal del método de multi-rejilla es la transferencia del error (o residuo) de un proceso iterativo en una rejilla fina para poder de esta manera y seguidamente configurar una red más gruesa, esto se hace para encontrar un valor de corrección y luego transferir el valor de corrección de vuelta de la rejilla más gruesa a la rejilla más fina. La transferencia del error de una rejilla fina a una rejilla gruesa se llama restricción, y la transferencia de regreso se llama prolongación. Hay varios niveles de escala de la rejilla, el residuo de cada configuración de la rejilla es transferido al siguiente nivel de la rejilla más gruesa, el proceso continua hasta que alcanza el nivel más grueso, entonces, la corrección se transfiere de nuevo capa por capa del más grueso al más fino de los niveles. El nivel de proceso se llama V-ciclo, y se repite hasta que los criterios de convergencia sean alcanzados, en la figura 17.19 se ve claramente el diagrama esquemático del V-ciclo.

Figura 17.19: Esquema del principio de multi-rejilla para V-ciclo



La siguiente ecuación, los subíndices tienen el mismo significado que los que se muestran en la figura 17.18, los superíndices representan los niveles de la rejilla, 1 corresponde a los más finos y los números posteriores representan a las rejillas más gruesas.

1. El método de iteración de Gauss-Seidel se aplica a la ecuación 17.56 varias veces. Los resultados son una aproximación de la solución φ^1 . Este es el valor aproximado del parámetro contenido de la película. El residuo R^1 se obtiene de la siguiente ecuación:

$$R^1 = A_s \varphi_s^1 + A_n \varphi_n^1 + A_e \varphi_e^1 + A_w \varphi_w^1 + A_p \varphi_p^1 + F \quad (17.57)$$

2. El residuo R^1 , es transferido a la siguiente rejilla gruesa usando la restricción del siguiente operador:

$$R = \begin{bmatrix} 1/16 & 1/8 & 1/16 \\ 1/8 & 1/4 & 1/8 \\ 1/16 & 1/8 & 1/16 \end{bmatrix} \quad (17.58)$$

Donde la resultante residual R_T^2 se puede expresar de la siguiente manera:

$$R_T^2 = \frac{1}{16} (R_{nw}^1 + R_{ne}^1 + R_{sw}^1 + R_{se}^1) + \frac{1}{8} (R_n^1 + R_e^1 + R_s^1 + R_w^1) + \frac{1}{4} R_p^1 \quad (17.59)$$

3. La iteración de Gauss-Seidel es aplicada para la rejilla gruesa. Aquí el sistema de ecuaciones para el residuo R_T^2 es generada de la misma manera de la rejilla gruesa para la rejilla fina. El resultado de φ^2 , representa la aproximación del valor de la corrección de φ^1 . El sistema de ecuaciones para la rejilla gruesa es:

$$A_p^2 \varphi_p + A_s^2 \varphi_s + A_n^2 \varphi_n + A_e^2 \varphi_e + A_w^2 \varphi_w - R_T^2 = 0 \quad (17.60)$$

El residuo se obtiene por

$$R^2 = A_s^2 \varphi_s^2 + A_n^2 \varphi_n^2 + A_e^2 \varphi_e^2 + A_w^2 \varphi_w^2 + A_p^2 \varphi_p^2 - R_T^2 \quad (17.61)$$

4. Los pasos 2 y 3 son repetitivos hasta que alcanza el nivel más grueso de la rejilla J.
5. La solución del ultimo nivel J se transfiere de nuevo al nivel más fino siguiente (J+1). El valor de la rejilla en el valor más grueso se interpola con sus nodos adyacentes en la rejilla más fina a través de un operador de prolongación lineal:

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \quad (17.62)$$

6. Los valores de la matriz, representan el peso del nodo de la rejilla más gruesa en el nodo de la rejilla fina. Después de la prolongación, una corrección a la rejilla fina u^J . La solución aproximada en el nivel de la rejilla mas fina se convierte en:

$$\varphi_{nuevo}^{J-1} = \varphi^{J-1} + u^J \quad (17.63)$$

7. El esquema de iteración de Gauss-Seidel se ejecuta en la malla más fina j_1 veces para refinar los resultados.

8. Los pasos 4 y 5 son repetidos hasta que el programa regresa a la rejilla más fina.

Los pasos 1-4 representan la parte baja del v-ciclo en el que se lleva a cabo solo una restricción, mientras los pasos 5-7 son la porción ascendente en la que se lleva a cabo la única prolongación. Por lo general, el V-ciclo debe repetirse varias veces antes que el criterio de convergencia se satisfice.

Criterio de convergencia

Hay dos criterios de convergencia:

1. Las sumas calculadas de los cambios fraccionales en el valor del contenido de la película entre dos iteraciones sucesivas sea inferior a un valor de tolerancia especificado, es decir:

$$\sum_i \sum_j \left| \frac{\varphi_{i,j}^{viejo} - \varphi_{i,j}^{nuevo}}{\varphi_{i,j}^{nuevo}} \right| < \varepsilon \quad (17.64)$$

Donde i y j son los índices de los nodos de la geometría; φ_{ij}^{viejo} , es el valor de la iteración anterior; φ_{ij}^{nuevo} , es el valor de la iteración actual; ε es el error de tolerancia ($\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$).

2. Khonsari describe la segunda condición de convergencia que fue introducida por Lebeck [85]. Se establece que cuando la función de cambio (g), modelo/configuración se repite durante la iteración, el programa se considera que es convergente. Por lo general, el primer criterio se utiliza al principio, pero si este ha de fallar el segundo criterio es aplicado. De esta manera casi todos los cálculos deberían de llegar a un resultado de convergencia.

Determinación de la distribución de presión y la capacidad de carga

Una vez que se logre la convergencia, el programa procede a determinar la distribución de presión. La presión se calcula a partir del parametro que contiene la película φ

$$p = \begin{cases} p_c + \beta \ln(\varphi) & \text{para } \varphi > 1 \\ p_c & \text{para } \varphi \leq 1 \end{cases} \quad (17.65)$$

La capacidad de carga W para un agujero individual o para una columna de agujeros es:

$$W = \int_0^L \int_0^B p dx dy \quad (17.66)$$

El promedio de la presión de un agujero o de una columna de agujeros se puede obtener utilizando:

$$P_{promedio} = \frac{W}{A} \quad (17.67)$$

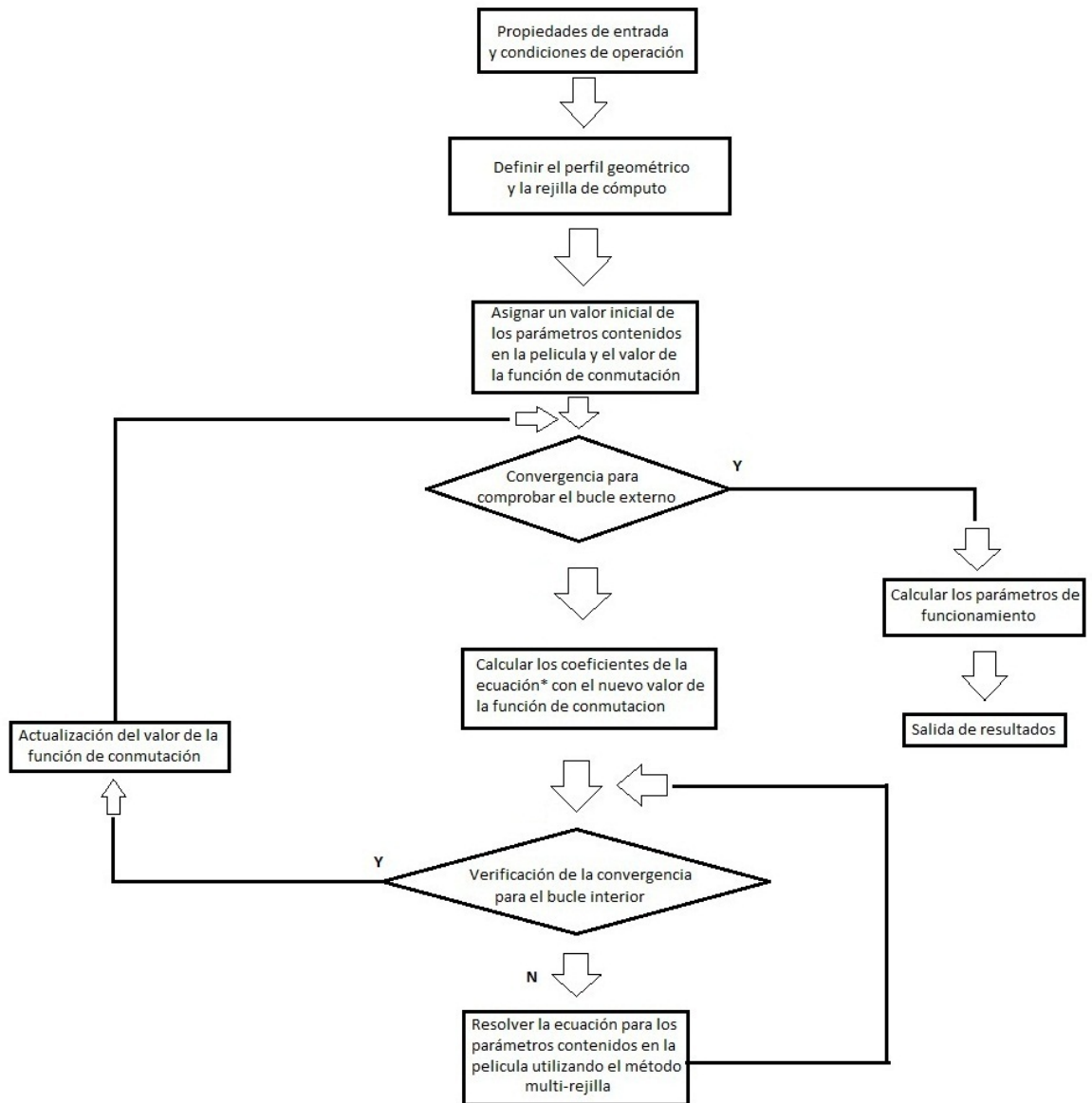
Donde A , es el área total de una celda de agujeros o de una columna de agujeros.

17.3.3.3. Validación del método

Estructura del programa

El diagrama de flujo se presenta en la figura 17.20, el programa incluye dos ciclos. La esencia de este programa es el bucle interior donde esta contenido el método multi-rejilla de la película φ en una determinada configuración de g . Cada momento en el que el bucle interno converge, la función de conmutación g , en cada nodo está asignando un nuevo valor calculado a partir de la nueva serie de valores de φ ; entonces si el bucle externo no converge, una nueva serie de coeficientes de las ecuaciones se evalúan. La nueva ecuación entonces se pone en uso en otra serie de ciclos interiores. La iteración del bucle continuará hasta que el criterio de convergencia externa este satisfecho.

Figura 17.20: Diagrama de flujo de la programación



* Ecuación para discretizar la ecuación 1.12 utilizando el método de diferencias finitas y siguiendo el esquema presentado por Vijayaraghavan y Keith.

$$A_p\varphi_p + A_s\varphi_s + A_n\varphi_n + A_e\varphi_e + A_w\varphi_w + F = 0$$

Comparación con los resultados del CFD para el caso de la región no cavitada

Como se ha discutido anteriormente la ecuación 17.52 es una combinación de las ecuaciones de flujo para las regiones de la película completa como de la región cavitada. Si no ocurre cavitación, la función de cambio g será 1 para todo el dominio de la ecuación.

ción 17.52 , y pasara a ser la ecuación convencional de Reynolds. Para probar el programa Khosari diseño una situación de no cavitación en una celda.

Se utilizó el método de volúmenes finitos para el problema de discretización e iterando se resuelve la ecuación (la solución del gradiente conjugado al cuadrado/la solución algebraica de la multi-rejilla), con el fin de resolver las ecuaciones lineales.

La solución principal del software emplea un módulo de flujo que trata la ecuación de Navier-Stokes. Para los problemas de lubricación hidrodinámica en una película de fluido delgada en 3D, existen soluciones rápidas y precisas que se pueden obtener con este software. La comparación en este caso realmente representa una comparación de la solución de la ecuación de Reynolds con la ecuación de Navier-Stokes.

Para garantizar que no se produzca cavitación en el agujero, la presión del ambiente se establece en un valor elevado [1 *Mpa*] de modo que la mínima presión se debe a la caída en la región divergente de un agujero y esta será mayor que la presión del liquido cavitado.

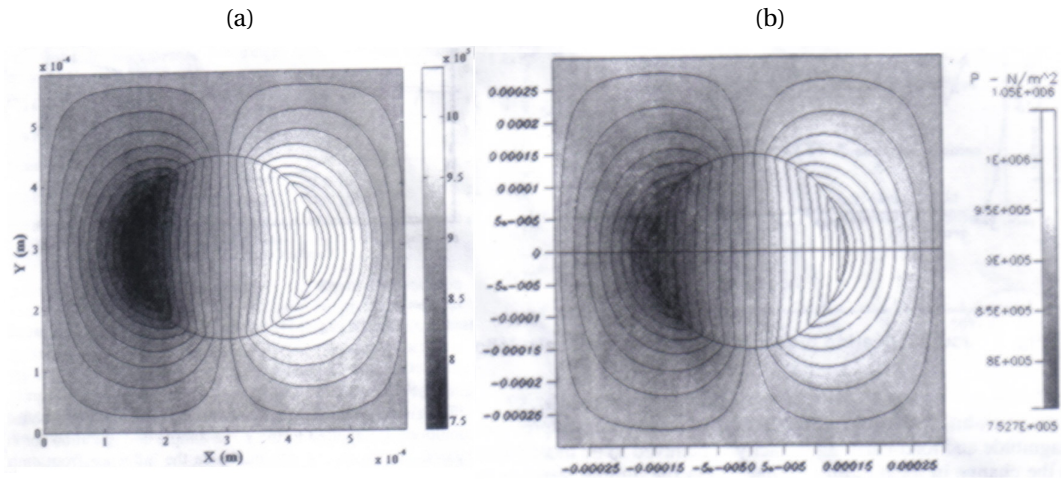
Los parametros de entrada se muestran en la cuadro 17.2.; los agujeros se suponen de forma circular y su casquete de forma esférica.

Cuadro 17.2: Parámetros de entrada para la validación del caso 1

<i>Parámetros experimentales</i>	
Diámetro del agujero (μm)	300
Profundidad del agujero (μm)	10
Tamaño de la celda (μm)	600
Presión de entrada (<i>Pa</i>)	1×10^6
Presión de salida (<i>Pa</i>)	1×10^6
Viscosidad del fluido (<i>Pa s</i>)	0,0035
Velocidad pared superior (<i>m/s</i>)	10
Forma inferior	<i>Cap</i>
Espesor de película (μm)	4

Los contornos de la presión de película del lubricante de la superficie superior se muestran en la figura 17.21. La figura 17.21a, representa la simulación de la multi-rejilla, y la figura 17.21b, muestra los resultados obtenidos con el software de dinámica computacional de fluidos (CFD). Ambas figuras muestran una distribución de presión antisimétrica. La presión máxima y mínima ocurren en el borde del agujero en la posición descendente y ascendente respectivamente.

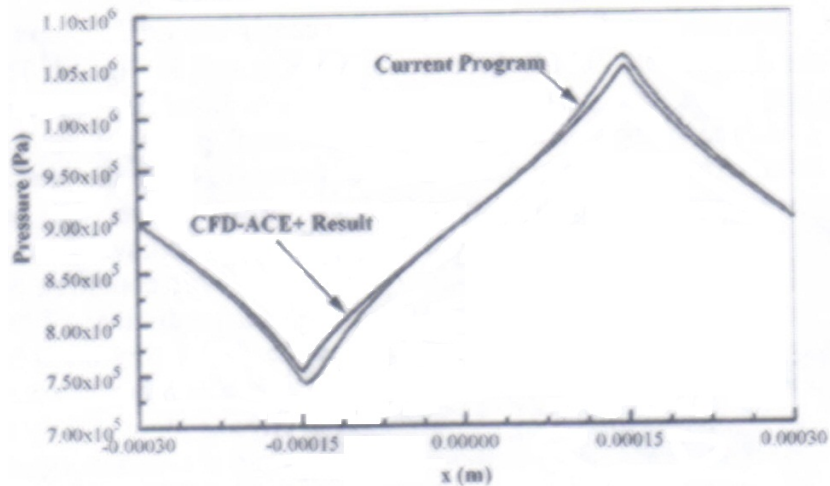
Figura 17.21: Distribución de presión de un solo agujero



Fuente *On the prediction of cavitation in dimples using a massconservative algorithm. Journal of Tribology*, Y. Qiu, MM Khonsari, et al. 131:041702, 2009.

Figura 17.22, muestra las distribuciones de presión a lo largo de la línea central de las celdas de los agujeros para ambos resultados. Se puede llegar a concluir que hay alrededor de 6% de diferencia entre los dos resultados. El error en el cálculo actual se supone es debido a la simplificación hecha por la ecuación de Reynolds. Ambos resultados presentan la misma tendencia en el cambio en las amplitudes de la presión a lo largo de la línea central en las celdas de los agujeros.

Figura 17.22: Distribución de la presión para ambos resultados



Fuente *Ídem*

Caso de cavitación en un cojinete

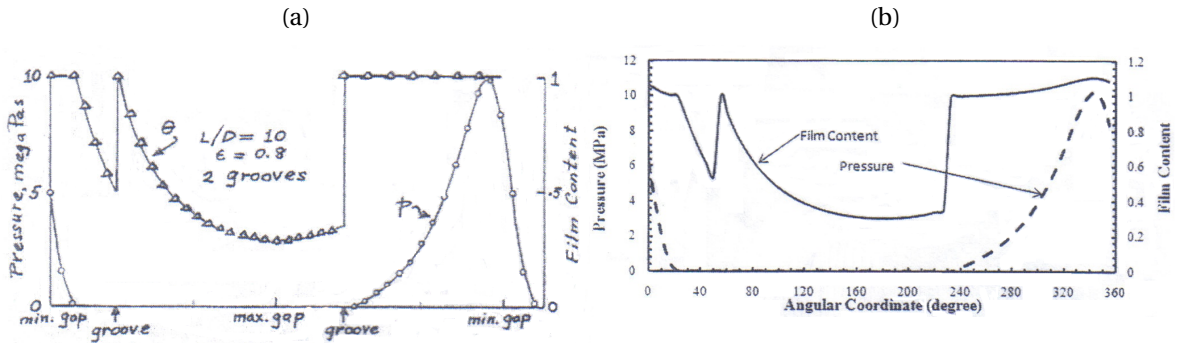
En este caso se busca la manera de probar la validez del algoritmo desarrollado para un cojinete en el que se produce cavitación. Se trata de un cojinete de longitud infinita con una relación (L/D) de 10; dos ranuras están posicionados en 60 grados y de 240 grados, además de la localización del espesor de película mas pequeño donde se recarga el lubricante. Los parametros de entrada se muestran en el cuadro 17.3.

Cuadro 17.3: Parámetros validación caso 2

<i>Parámetros de validación</i>	
Diámetro del eje (mm)	62,8
(L/D)	10
Espesor de película nominal (μm)	55
Presión de la ranura (surco)(P_a)	1×10^5
Viscosidad del fluido ($P_a s$)	0,0035
Velocidad de la superficie (m/s)	19,7
Presión de cavitación (P_a)	1×10^5
Numero de ranuras y ubicación	2 (60°, 240°)
β (P_a)	1×10^8
ϵ	0,8

La figura 17.23b, muestra la distribución de presión actual y el resultado de los parametros contenidos en la película y la gráfica 17.23a, muestra los resultados actuales de la presión que son casi idéntico a los logrados por Elrod. Para evitar la posible inestabilidad numérica en las áreas cercanas a las ranuras (surcos) causados por el algoritmo, la presión real en la ranura es utilizado en el cálculo presente es de 99999,999 [P_a] en lugar de 1×10^5 [P_a] mostrado en la tabla 17.3.

Figura 17.23: Presión del cojinete y resultados de los cálculos de la película contenida, (A) Resultados de Elrod y (B) Resultado de la simulación actual



Fuente Ídem

17.3.4. Resultados

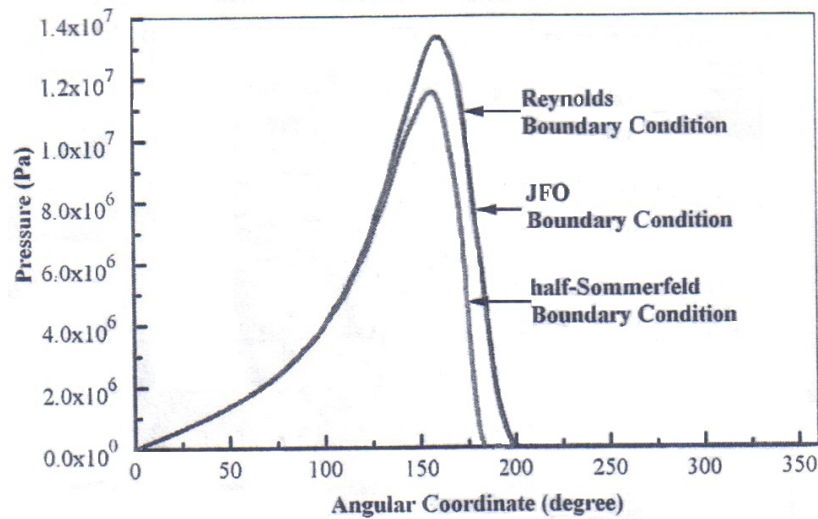
Hay diferentes condiciones de frontera en la cavitación, entre ellas, la condición media de Sommerfeld, la condición de Siwft-Steiber (Reynolds), y la condición de JFO que vienen siendo las más comunes. Antes, el caso de los agujeros se utilizó para la comparación entre las diferentes teorías, para el caso del cojinete. En el cuadro 17.4, se encuentran los parámetros de entrada básicos utilizados en la simulación con el fin de poder hacer las comparaciones pertinentes; estos parámetros están basados en el sistema cartesiano.

Cuadro 17.4: Parámetros de validación caso 2

<i>Parámetros de validación</i>	
Diámetro del eje (mm)	62,8
(L/D)	10
Espesor de película nominal (μm)	50
Presión de la ranura (surco) (P_a)	0
Viscosidad del fluido ($P_a s$)	0,0035
Velocidad de la superficie (m/s)	20
Presión de cavitación (P_a)	0
Numero de ranuras y ubicación	1(0°)
β (P_a)	$1,62 \times 10^9$
ε	0,8

Por lo tanto la figura 17.24 muestra la distribución de presión a lo largo de la circunferencia del cojinete cuando $z = L/2$.

Figura 17.24: Distribución de presión a lo largo de la línea de centro del cojinete ($z=L/2$) obtenidos utilizando diferentes condiciones de frontera en la cavitación



Fuente *Ídem*

Los resultados muestran que las distribuciones de presión obtenidos a partir de Reynolds y la condición de frontera de JFO están bastante cerca. La condición de frontera media de Sommerfeld, por otro lado, de repente interrumpe la presión a 180° de distancia desde la entrada, y el pico de presión no está cerca de los previstos por cualquiera de las dos condiciones de Reynolds o JFO.

Una vez más, con el fin de minimizar la influencia de la presión ambiente, la diferencia de presiones a la entrada y a la salida se supone es cero. El modelo de una sola celda se utilizó con las coordenadas polares para que el efecto de curvatura se tome en cuenta. El cuadro 17.5 muestra los parámetros de la configuración del agujero. Se tiene en cuenta una sola celda que lleva contenida un solo agujero, pero se supone que en esta celda se representan todas las celdas de todo el dominio.

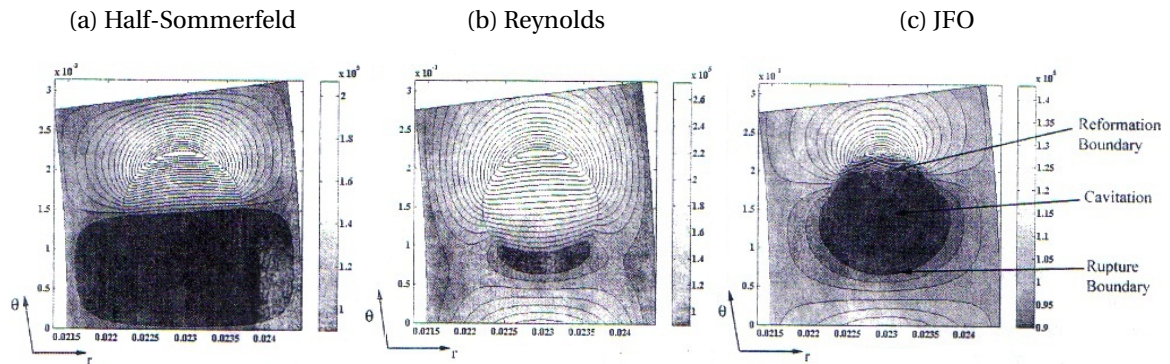
Cuadro 17.5: Parámetros de comparación para las simulaciones de las teorías

Diámetro del agujero (μm)	1500
Profundidad del agujero (μm)	10
Tamaño de la celda (μm)	3000
Presión de entrada (Pa)	1×10^6
Presión de salida (Pa)	1×10^6
Viscosidad del fluido ($Pa \cdot s$)	0,0035
Velocidad pared superior (rpm)	600
Forma inferior	Cap
Espesor de película (μm)	4
Presión de cavitación (Pa)	$0,9 \times 10^5$

Los resultados de las diferentes teorías de las fronteras de presión se muestran en la figura 17.25. En contraste con los resultados de las simulaciones de los cojinetes, estos resultados son muy diferentes. La figura 17.25a, muestra la predicción de la frontera de película en un agujero usando la condición de Sommerfeld, ahí se ve claramente que el fluido de medio agujero de la celda esta cavitada y que la frontera entre la región cavitada y la no cavitada se encuentra exactamente en el medio.

En comparación, la región de cavitación que se predijo con la condición de frontera de Reynolds, ver figura 17.25b, parece ser bastante pequeño. La cavitación y las frontera de la película completa se encuentran cerca del borde del agujero de arriba. La zona de cavitación, tal como se predijo en la teoría de la conservación de masa de JFO, se muestra en la figura 17.25c. Está revela que la zona de cavitación es grande que lo que predice la condición de frontera de Reynolds, pero es más pequeño que los resultados de la condición media de Sommerfeld. En la teoría de JFO en la presión de contorno, la cavitación ocupa la mayor parte de la zona de los agujeros y la reformación de la película ocurre en una posición cerca del borde posterior de la hendidura.

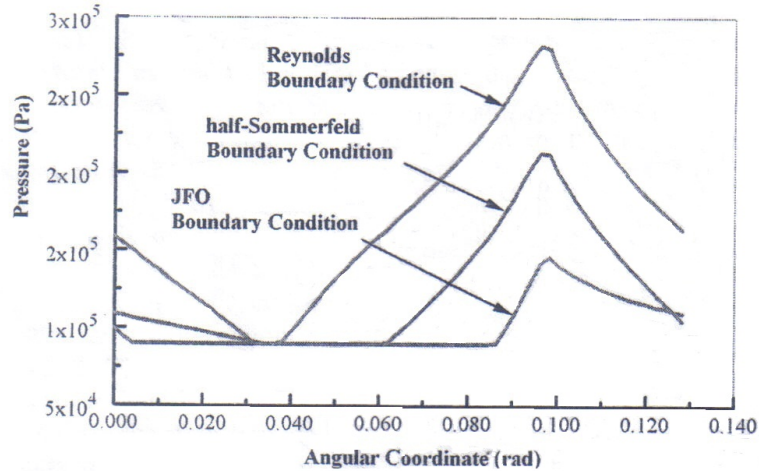
Figura 17.25: Contorno de presión de la celda de agujeros obtenidos a partir de diferentes teorías



Fuente *Ídem*

La distribución de presión a lo largo de la línea central $r = 0,023 [m]$ de los agujeros de las celdas en las tres teorías se representan en la figura 17.26. Sus diferencias son significativas. La condición de frontera de Reynolds da el pico más alto de la presión y la presión total, la condición de Sommerfeld predice la presión más baja, mientras que el resultado de la condición de presión de JFO no considera la ruptura de la cavitación o el mecanismo de reformación. La teoría de JFO tiene en cuenta tanto el mecanismo y la solución del algoritmo de la conservación de masa. Por lo tanto, la teoría física de JFO capta más de cerca, y por lo tanto es mas realista, ya que representa la capacidad de generación de la presión del agujero.

Figura 17.26: Distribución de presión a lo largo de la línea central de la celda de agujeros ($r=0.023\text{m}$)



Fuente *Ídem*

Se puede observar a partir de los resultados que tanto la condición de Reynolds y la condición de Sommerfeld sobrestiman la generación de presión en un agujero. La condición de frontera de Reynolds predice el área de menor cavitación y el rendimiento de la capacidad de generación de presión más alta que la teoría de JFO y la condición de Sommerfeld. Este interesante resultado es contrario a la situación en los cojinetes, donde la condición de frontera de Reynolds da un resultado más real que la condición de Sommerfeld.

Diversas teorías se aplican y se comparan con el fin de obtener la toma más apropiada de las condiciones de frontera que está detrás de este fenómeno físico. Se ha encontrado que la teoría de JFO, tradicionalmente utilizado en la simulación del cojinete, se puede utilizar en el estudio de la cavitación en agujeros, que se caracteriza por un perfil concavo-convexo del espesor de película. Los resultados muestran que la teoría de JFO con la correcta aplicación del algoritmo puede predecir la cavitación en agujeros dado que los parámetros de eficiencia son las reales que las condiciones de frontera de otros.

BIBLIOGRAFÍA

- [77] R.F. AUSAS. Simulación numérica en flujo de dos fases inmiscibles con aplicaciones en lubricación hidrodinámica. *Tesis de Doctorado, Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo*, page 218, 2010.
- [78] Roberto F. AUSAS, Mohammed JAI, and Gustavo C. BUSCAGLIA. The impact of the cavitation model in the analysis of microtextured lubricated journal bearings. *Journal of Tribology*, 129(4):868–875, 2007.
- [79] Roberto F. AUSAS, Mohammed JAI, and Gustavo C. BUSCAGLIA. A mass-conserving algorithm for dynamical lubrication problems with cavitation. *Journal of Tribology*, 131(3):031702, 2009.
- [80] G. BAYADA and M. CHAMBAT. Existence and uniqueness for a lubrication problem with nonregular conditions on the free boundary. *Boll. UMI*, 6(3B):543–557, 1984.
- [81] G. BAYADA and M. CHAMBAT. The transition between the stokes equations and the reynolds equation: a mathematical proof. *Applied Mathematics and Optimization*, 14(1):73–93, 1986.
- [82] H. G. ELROD. A cavitation algorithm. *Journal of Lubrication Technology*, 103(3):350–354, 1981.
- [83] HG ELROD and M.L. ADAMS. A computer program for cavitation and starvation problems. In *Proceedings of the 1st Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, pages 37–41, 1974.
- [84] B. JAKOBSSON and L. FLOBERG. The finite journal bearing, considering vaporization', chalmers tek. *Hogsk. Handl*, pages 1957–69, 1957.
- [85] A.O. LEBECK. *Principles and design of mechanical face seals*. Wiley-Interscience, 1991.
- [86] K. O OLSSON. Cavitation in dynamically loaded bearings. *Trans. Chalmers Univ. Technol.*, No. 308(5):415 – 415, 1967.
- [87] M.C. POTTER and D.C. WIGGERT. *Mecánica de fluidos*. Cengage Learning Latin America, 2002.
- [88] Y. QIU, MM KHONSARI, et al. On the prediction of cavitation in dimples using a mass-conservative algorithm. *Journal of Tribology*, 131:041702, 2009.

- [89] VIJAYARAGHAVAN and Jr. T. G. KEITH. Development and evaluation of a cavitation algorithm. *Tribology Transactions*, 32(2):225–233, 1989.
- [90] VIJAYARAGHAVAN and Jr. T. G. KEITH. An efficient, robust, and time accurate numerical scheme applied to a cavitation algorithm. *Journal of Tribology*, 112(1):44–51, 1990.
- [91] VIJAYARAGHAVAN and Jr. T. G. KEITH. Grid transformation and adaption techniques applied in the analysis of cavitated journal bearings. *Journal of Tribology*, 112(1):52–59, 1990.

Capítulo 18

EFFECTO DE LA TEMPERATURA SOBRE LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

18.1. INTRODUCCIÓN

En operación, el cojinete es uno de los puntos críticos de las turbomáquinas. El comportamiento de estos elementos mecánicos que se encuentran en muchos equipos industriales, depende de la rigidez y del amortiguamiento de la película fluida en movimiento que separa el eje del cojinete, propiedades dinámicas condicionadas por la viscosidad del fluido que, a su vez, dependen fuertemente de la temperatura [100].

La lubricación termohidrodinámica (LTH) es aquella que como lo indica su nombre, tiene en cuenta la influencia de la temperatura sobre el proceso de lubricación hidrodinámico, en especial, sobre las propiedades reológicas del lubricante afectando de forma directa su capacidad de crear película.[98]

La Reología es una disciplina científica que se dedica al estudio de la deformación y flujo de la materia o, más precisamente, de los fluidos, teniendo en cuenta la dependencia entre la variación del esfuerzo cortante y la variación de la deformación cortante, para profundizar más sobre esta, el lector puede seguir su estudio en otros documentos e investigaciones.[99]

En lubricación hidrodinámica se ha utilizado muy frecuentemente la teoría isoterma como simplificación de los problemas que conducen al cálculo de las presiones. Sin embargo, en regímenes severos de funcionamiento, soportando grandes cargas y velocidades de rotación, la temperatura del fluido puede variar notablemente como consecuencia de la disipación energética por efectos viscosos y, también, por el intercambio térmico con el exterior del dispositivo. Este hecho puede influir de manera importante en la predicción de varias características de funcionamiento del par como, por ejemplo, en la potencia consumida.

Dado que las propiedades del fluido son funciones de la temperatura (fundamentalmente la viscosidad), cuanto más severas sean las condiciones de operación de un cojinete, menos certera será la predicción de su funcionamiento utilizando la hipótesis de flujo isotérmico. Por ende, se necesita la solución en conjunto de los balances de cantidad de

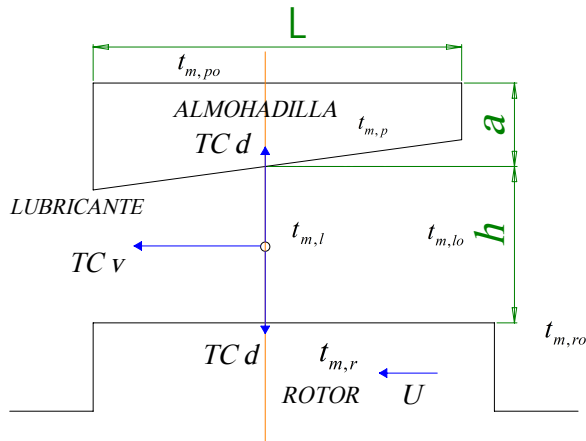
movimiento, masa y energía para poder obtener los perfiles de presión y temperatura.

Muchas investigaciones se han abordado para dar a conocer y resolver varios aspectos de los problemas que se presentan en la LTH, esta sección tiene la intención de dar a conocer algunos conceptos claves que permiten profundizar en su estudio, por tanto, inicialmente se abordan los diferentes caminos que puede llegar a tomar el flujo de calor dentro de un cojinete hidrodinámico, luego se establece algunos parámetros que serán de ayuda al momento de simplificar los problemas de la LTH referidos con los diferentes modos de transferencia de calor y finalmente se deducen las ecuaciones básicas que gobiernan la termohidrodinámica del cojinete mostrando algunas investigaciones en las que son aplicadas, como es el caso del estudio termohidrodinámico de *cojinetes de lámina (foil journal bearing)*, se estudia como ejemplo este tipo de cojinete, debido a que no se tienen muchos estudios de la temperatura en los cojinetes rígidos y las investigaciones realizadas para este tipo de cojinetes se basan en el complejo estudio que se le realizan a los cojinetes de lámina.

18.1.1. Flujo de calor en los cojinetes

Uno de los principales factores asociados con los problemas de la LTH son los múltiples caminos de la transferencia de calor y los diferentes modos o mecanismos en que este tipo de energía se transfiere, como se puede observar en la figura 18.1. Según los estudios de Dowson y Hudson (1964), en la figura se han despreciado dos de los caminos que toma el flujo de calor demostrando que la convección a través de la película es menos importante comparada con la convección a lo largo de esta. Similarmente, la conducción a través del rotor es despreciable, ya que las velocidades que dan origen a las películas hidrodinámicas son lo suficientemente grandes para hacer que la convección en el rotor sea el modo de transferencia de calor que domine. Carslaw y Jaeger (1959) realizan más estudios y experimentos relacionados con estos efectos.

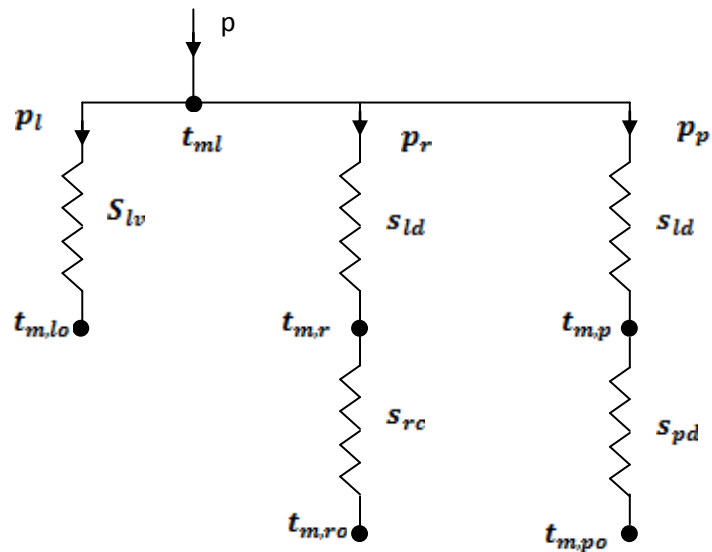
Figura 18.1: Modos de transferencia de calor



En un cojinete hidrodinámico la principal fuente de generación de calor es la viscosidad cortante generada en el lubricante, a partir de este efecto es cuando el uso de la reología se hace necesaria y juega un papel preponderante en el análisis de la lubricación termoelastohidrodinámica y elastohidrodinámica. Para conocer hacia donde se dirige el calor generado en el lubricante, se puede realizar un circuito térmico (figura 18.2) que permita visualizar mejor las tres principales fuentes de pérdida de calor y las respectivas resistencias que se oponen a su flujo, así pues, las resistencias térmicas (S) presentes para el sistema de cojinete hidrodinámico son:

- Resistencia debido a la transferencia de calor por convección en el lubricante, S_{lv}
- Resistencia debido a la transferencia de calor por conducción en el lubricante, S_{ld}
- Resistencia debido a la transferencia de calor por conducción en la almohadilla, S_{pd}
- Resistencia debido a la transferencia de calor por conducción y convección en el rotor, S_{rc}

Figura 18.2: Red de resistencias equivalentes para un cojinete



Y las respectivas ecuaciones de estas resistencias térmicas, dadas por Wilson (1998) serán:

$$S_{lv} = \frac{2}{\rho_l C_{pl} h u b} \quad (18.1)$$

$$S_{ld} = \frac{h}{2 L b K_{fl}} \quad (18.2)$$

$$S_{pd} = \frac{a}{L b K_{fp}} \quad (18.3)$$

$$S_{rc} = \frac{1}{b \sqrt{u L K_{fr} \rho_r C_{pr}}} \quad (18.4)$$

donde

- ρ_l Densidad del lubricante [kg/m^3]
- C_p Calor específico [$J/(kg.^{\circ}C)$]
- h Espesor de película [m]
- u Velocidad del rotor [m/s]
- b Ancho del cojinete [m]
- a Distancia mostrada en al figura 18.1
- L Longitud de la almohadilla, [m]
- K_f Conductividad térmica, [$W/m.^{\circ}C$]

Los subíndices l, r, y p se refieren al lubricante, rotor y almohadilla, respectivamente.

18.1.2. Parámetros de Carga Térmica y su Importancia Relativa

Para conocer la importancia relativa de los diferentes modos de transferencia de calor con el fin de determinar bajo que condiciones uno o más caminos del flujo de calor pueden ser despreciados en el análisis, se determina una medida no dimensional $N_{ij/mn}$, llamada relación de resistencias térmicas, que permite comparar la importancia de un modo de transferencia de calor ij con otro modo mn , donde la importancia de un mecanismo de transferencia de calor es inversamente proporcional a su resistencia:

$$N_{ij/mn} \propto \frac{S_{mn}}{S_{ij}}$$

Así pues, si se quiere conocer la importancia relativa de la transferencia de calor por convección (lv) comparada con la conducción (ld) a través de la película en el lubricante, se tiene:

$$N_{lv/ld} = \frac{u h^2 \rho_l C_{pl}}{L K_{fl}} = \frac{u L}{k_l} \left(\frac{h}{L}\right)^2$$

donde k_l es la difusividad térmica para el lubricante y el término al lado derecho de esta ecuación es el número de Peclet ampliado por la cantidad $(\frac{h}{L})^2$ que permite compensar la delgada geometría de la película. El resultado de esta ecuación es tabulado en la tabla 18.1 que a continuación se muestra junto con las demás relaciones que serán muy útiles para simplificar los problemas de la LTH en la mayoría de los casos.

Cuadro 18.1: Medidas de la relación N para determinar la importancia relativa de los modos de transferencia de calor

Sufijo del denominador (mn)	Sufijo del Numerador (ij)			
	lv	ld	pa	rc
lv	1	$\frac{L K_{fl}}{u h^2 \rho_l C_{pl}}$	$\frac{L K_{fp}}{u a h \rho_l C_{pt}}$	$\frac{L^{1/2} \sqrt{K_{fr} \rho_r C_{pr}}}{u^{1/2} h \rho_l C_{pl}}$
ld	$\frac{u h^2 \rho_l C_{pl}}{L K_{fl}}$	1	$\frac{h K_{fp}}{a K_{fl}}$	$\frac{u^{1/2} h \sqrt{K_{fr} \rho_r C_{pr}}}{L^{1/2} K_{fl}}$
pa	$\frac{u a h \rho_l C_{pl}}{L K_{fp}}$	$\frac{a K_{fl}}{h K_{fp}}$	1	$\frac{u^{1/2} a \sqrt{K_{fr} \rho_r C_{pr}}}{K_{fp}}$
rc	$\frac{u^{1/2} h \rho_l C_{pl}}{L^{1/2} \sqrt{K_{fr} \rho_r C_{pr}}}$	$\frac{L^{1/2} K_{fl}}{u^{1/2} h \sqrt{K_{fr} \rho_r C_{pr}}}$	$\frac{K_{fp}}{u^{1/2} a \sqrt{K_{fr} \rho_r C_{pr}}}$	1

La interpretación de esta relación que me permite despreciar o no un modo de transferencia de calor es sencilla, pues si se toma como ejemplo la relación hallada N_{lv/l_d} y se reemplazan los valores correspondientes se obtiene un resultado que si es un número grande, entonces esto quiere decir que el calor es retenido en el lubricante y removido a través de la convección. Así mismo, si el resultado es pequeño, entonces el modo que prepondera es la conducción y el calor será transferido a la superficies adyacentes. Sin embargo, si la relación N_{lv/l_d} ronda alrededor de la unidad, entonces se requiere una buena solución numérica para determinar la importancia relativa.

En la lubricación termohidrodinámica es importante entender el cambio en el lubricante según la capacidad de formación de película como un efecto asociado con el cambio de temperatura; este entendimiento se puede lograr mediante la definición de los *parámetros nodimensionales de carga* (l):

$$l_{ij} = \alpha H_p S_{ij}$$

donde α es el coeficiente de temperatura de la viscosidad a cierta temperatura definida como:

$$\alpha = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt_m}$$

y H_p es el poder isotérmico viscoso, dado como:

$$H_p = \frac{\mu_0 \bar{u}^2 L b}{h}$$

A partir de los parámetros α, H_p y S_{ij} Hamrock, B.J. and Schmid, S.R en su trabajo de 2004 definen los parámetros nodimensionales de carga (l_{ij}) así:

$$l_{lv} = \frac{\alpha \mu_0 \bar{u} L}{\rho_l C_{pl} h^2}$$

$$l_{ld} = \frac{\alpha \mu_0 \bar{u}^2}{K_{fl}}$$

$$l_{pd} = \frac{\alpha \mu_0 \bar{u}^2 a}{h K_{fp}}$$

$$l_{rc} = \frac{\alpha \mu_0 \bar{u}^{3/2} L^{1/2}}{h \sqrt{K_{fr} \rho_r C_{pr}}}$$

El parámetro l_{lv} es importante en el análisis de cojinetes, cuando la transferencia de calor por convección en el lubricante es más importante que la conducción. Algunos autores se refieren a este parámetro como el "first thermal parameter" el primer parámetro térmico o "la constante adiabática". El l_{ld} es importante cuando la conducción por el lubricante es más importante que la convección, este caso se da en muchos de los problemas que tienen que ver con la LEH o como en los problemas de la conformación de

metales, a este parámetro se le conoce como “el segundo parámetro térmico”. Los otros parámetros son menos reconocidos.

Por otro lado, si se quiere relacionar el espesor de película con la carga para problemas isotérmicos entonces se puede utilizar la siguiente expresión:

$$w = \frac{z\mu_0\bar{u}L^2b}{h^2}$$

donde z es una constante que depende de la geometría (se desprecia en las ecuaciones siguientes) y que no se debe confundir con la dimensión del plano cartesiano. La ecuación anterior se puede usar para eliminar la variable h de los parámetros de carga (l) y así obtener un nuevo parámetro que será establecido como M_{ij} , *parámetro de carga térmica* y según el modo de transferencia de calor y el medio donde se de, se tiene:

$$M_{lv} = \frac{\alpha w}{\rho_l C_p L b} = \frac{\alpha \bar{\rho}}{\rho_l C_p l}$$

$$M_{ld} = \frac{\alpha \mu_0 \bar{u}^2}{K_{fl}}$$

$$M_{pd} = \frac{\alpha \mu_0^{1/2} \bar{u}^{3/2} a w^{1/2}}{K_{fp} L b^{1/2}}$$

$$M_{rc} = \frac{\alpha \mu_0^{1/2} \bar{u} w^{1/2}}{\sqrt{K_{fr}(Lb)\rho_r C_{pr}}}$$

18.1.3. Regímenes de lubricación térmica

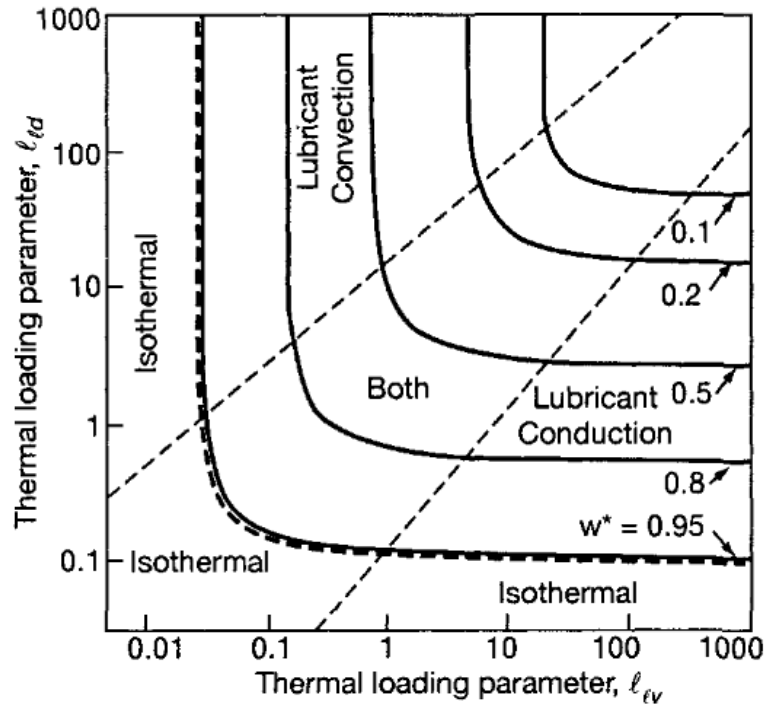
Hamrock, B.J. and Schmid, S.R en su trabajo de 2004 a partir del trabajo de Wilson (1998) muestran que la siguiente ecuación proporciona el efecto de temperatura sobre el espesor de película y carga:

$$\ln w^* = \frac{-2w^* L_{ld} L_{lv}}{L_{ld} + 4L_{lv}} \quad (18.5)$$

$$\ln H^* = -\frac{2(H^*)^2 M_{ld} M_{lv}}{z(H^*)^2 M_{ld} + 2M_{lv}} \quad (18.6)$$

La figura 18.3 muestra los resultados de la ecuación 18.5 como una función de los parámetros de carga l_{ld} y l_{lv} . La gráfica también ha sido subdividida por líneas a trazos para mostrar los diferentes regímenes de la LTH. La línea isotérmica ha sido dibujada donde la reducción en carga de soporte es inferior al 5% ($w^* > 0,95$). En valores pequeños de l_{ld} y l_{lv} , el problema es isotérmico. El incremento en cualquiera de los parámetros l_{ld} ó l_{lv} generalmente reduce la carga soportada.

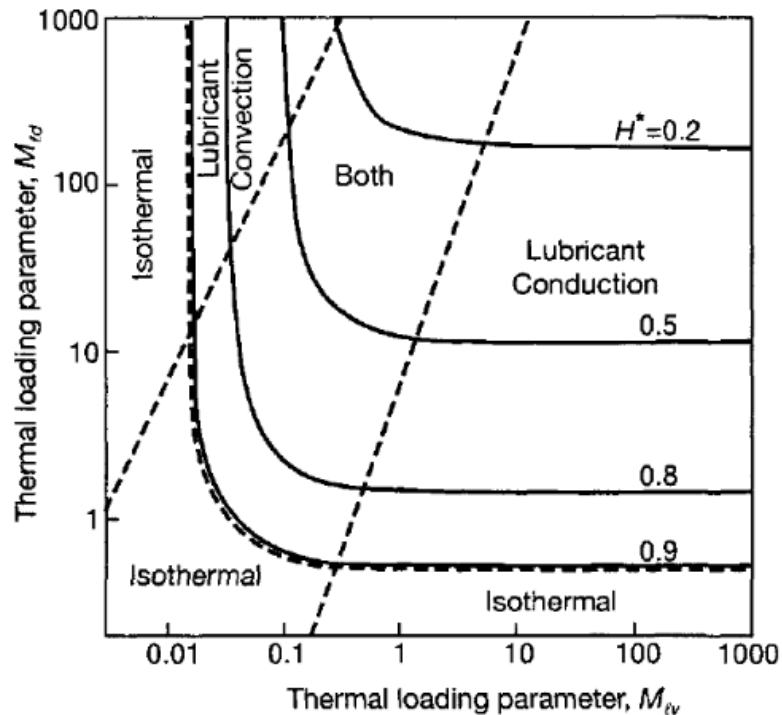
Figura 18.3: Regímenes de lubricación hidrodinámica usando carga no dimensional w^*



Fuente Fundamentals of fluid film lubrication, Hamrock, B.J. and Schmid, S.R. and Jacobson, B.O., CRC (2004)

La figura 18.4 muestra el efecto de los parámetros de carga térmica M_{ld} y M_{lv} sobre el espesor de película obtenido de la ecuación 18.6. Comparando las dos gráficas, se debe anotar que M_{lv} tiene un mayor efecto sobre el espesor de película que M_{ld} , mientras que l_{ld} y l_{lv} tienen más o menos el mismo efecto sobre el soporte de carga. La gráfica de los parámetros l tiene el contorno del espesor de película, más grande que la unidad mientras que la gráfica del parámetro de carga M es más pequeño que la unidad. Esto último representa una diferencia fundamental entre la LEH y los problemas de LTH, donde la LEH tiende a incrementar el espesor de película mientras que la LTH tiende a reducir este espesor.

Figura 18.4: Regímenes de lubricación hidrodinámica usando espesor no dimensional H^*



Fuente *Ídem*

18.2. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ENERGÍA

La deducción de la ecuación de energía la realiza Cengel [93] en su libro.

El balance de energía para cualquier sistema sometido a algún proceso es expresado como

$$E_{in} - E_{out} = \Delta E_{system}$$

el cambio de energía que contiene el sistema durante el proceso es igual a la diferencia entre la energía que entra y la energía que sale.

Durante un proceso de *flujo estacionario*, la energía total en el volumen de control permanece constante (por tanto $\Delta E_{system} = 0$), y la cantidad de energía que entra al volumen de control en todas sus formas debe ser igual a la cantidad de energía saliendo de este, por tanto

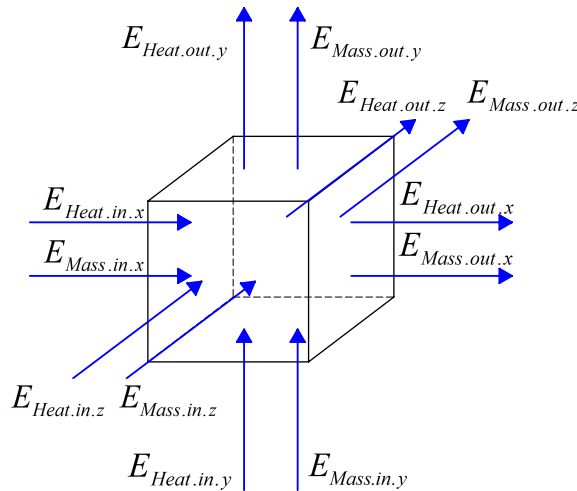
$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} = 0$$

Note que puede haber transferencia de energía por calor, trabajo y masa unitaria, el balance de energía para flujo estacionario en el volumen de control puede ser escrito explícitamente como

$$(\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{by\ heat} + (\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{by\ work} + (\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{by\ mass} = 0 \quad (18.7)$$

El flujo total de energía por unidad de masa es $e_{stream} = h + ke + pe$, donde h es la entalpía, $pe = gz$ es la energía potencial, y $ke = v^2/2 = (u^2 + v^2)/2$ es la energía cinética del fluido por unidad de masa. Las energías cinéticas y potenciales usualmente son muy pequeñas relativas a la entalpía, y por lo tanto es una práctica común despreciarlas. Si asumimos constantes en el fluido la densidad ρ , el calor específico C_p , la viscosidad μ y la conductividad térmica k . Entonces la energía por unidad de masa puede ser expresada como $e_{stream} = h = C_p T$.

Figura 18.5: Transferencia de energía por flujo de calor y masa



La energía es una cantidad escalar, y por lo tanto las interacciones de energía en todas las direcciones pueden ser combinadas en una ecuación. En la figura 18.5 note que el flujo másico que entra al volumen de control por la izquierda es $\rho u (dy \cdot dz)$, la razón de transferencia de energía por flujo másico en el volumen de control, en la dirección x es

$$\begin{aligned} (\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{by\ mass, x} &= (\dot{m}e_{stream})_x - \left[(\dot{m}e_{stream})_x + \frac{\partial (\dot{m}e_{stream})_x}{\partial x} dx \right] \\ &= - \frac{\partial [\rho u (dy \cdot dz) C_p T]}{\partial x} dx = -\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy dz \quad (18.8) \end{aligned}$$

Repetiendo este procedimiento para las direcciones y y z , se suman los resultados y el flujo neto de energía por masa para el volumen de control es determinado por

$$\begin{aligned}
(\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{by\ mass} &= -\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy dz \\
&\quad - \rho C_p \left(v \frac{\partial T}{\partial y} + T \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy dz - \rho C_p \left(w \frac{\partial T}{\partial z} + T \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz \\
&= -\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (18.9)
\end{aligned}$$

donde de la ecuación de continuidad $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$

La razón neta de calor por conducción para el elemento de volumen en la dirección x es

$$\begin{aligned}
(\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{by\ heat, x} &= \dot{Q}_x - \left(\dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx \right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x} \left(-k(dy \cdot dz) \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy dz \quad (18.10)
\end{aligned}$$

Repetiendo el anterior procedimiento para la dirección z y para la dirección y , se suman los resultados y el flujo neto de energía por calor para el volumen de control es determinado por

$$(\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{by\ heat} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy dz + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx dy dz + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dx dy dz \quad (18.11)$$

El otro mecanismo de transferencia de energía hacia y desde el fluido en el volumen de control es el trabajo realizado por el cuerpo y las fuerzas de superficie. El trabajo realizado por las fuerzas son determinados por la multiplicación de la fuerza con la velocidad en la dirección de la fuerza y el volumen del elemento de fluido, y este trabajo solo necesita ser considerado en presencia de significativos efectos gravitacionales, eléctricos o magnéticos. Las fuerzas de superficie consisten en las fuerzas debido a la presión del fluido y los esfuerzos cortantes por viscosidad. El trabajo realizado por la presión ya es contemplado en el análisis antes realizado si se usa la entalpía microscópica del líquido en lugar de la entalpía interna [93].

Entonces la ecuación de energía para flujo de fluido con propiedades constantes y despreciando los esfuerzos cortantes es obtenida sustituyendo las ecuaciones 18.9 y 18.11 en 18.7

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (18.12)$$

que establece que la energía que se disipa por convección por el fluido fuera del volumen de control es igual a la energía que se transfiere dentro del volumen de control por conducción de calor.

Cuando los esfuerzos cortantes por viscosidad no son despreciados, los efectos son considerados por la expresión de energía como

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mu \Phi \quad (18.13)$$

donde Φ es la *función de disipación de viscosidad* y es obtenida por un complejo análisis

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (18.14)$$

La disipación de viscosidad desempeña un papel dominante en flujos de alta velocidad, especialmente cuando la viscosidad del fluido es alta (como en el flujo de aceite de los cojinetes hidrodinámicos). Esto se manifiesta como un aumento significativo en la temperatura debido a la conversión de energía cinética del fluido a energía térmica [93].

Cuando el trabajo realizado por la presión no se contempla en la entalpía, la ecuación de energía es

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta T \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \mu \Phi \quad (18.15)$$

Donde $\beta = - (1/\rho) (\partial \rho / \partial T)$ [97]

La expresión 18.15 es la ecuación diferencial básica de energía, y específicamente para este trabajo, cuantifica los cambios de energía sufridos por un cojinete.

18.3. ESTUDIO DE APLICACIONES

Profundizar en la termohidrodinámica necesariamente requiere del estudio realizado en investigaciones internacionales, por la complejidad del temática. Adelante se analiza la metodología y herramientas matemáticas para comprender el fenómeno térmico en la lubricación hidrodinámica de cojinetes.

18.3.1. Estudio termohidrodinámico de un cojinete de láminas

Las aplicaciones de los cojinetes de láminas para aire han extendido su uso en un amplio rango de turbomaquinaria con altas velocidades y temperaturas. La temperatura del lubricante es un factor importante en el desempeño de los cojinetes de láminas, especialmente a altas velocidades de rotación y altas cargas o cuando la temperatura ambiente es elevada. El estudio térmico se efectúa en cojinetes que trabajan con aire debido a que a altas temperaturas el aceite disminuye su viscosidad, haciendo que el efecto hidrodinámico desaparezca, lo que no sucede con el aire, pues su volumen y viscosidad aumentan cuando incrementa la temperatura [97].

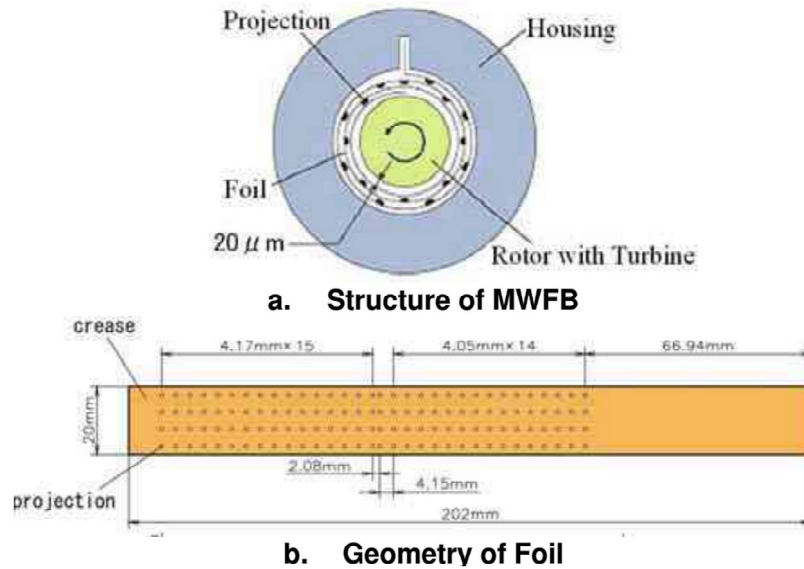
Introducción

Los cojinetes de láminas para aire pueden ser descritos sencillamente como un tipo de cojinete de película fluida compresible autoactuante que usan como lubricante el aire del ambiente. Desde que los cojinetes de láminas con múltiples perforaciones para aire fueron introducidos en la década de los sesenta, fueron ofreciéndose como una alternativa, en las máquinas rotativas libres de aceite, para remplazar los cojinetes tradicionales de aceite o de elementos rodantes. Debido al soporte estructural deformable por el uso de aire, los cojinetes de láminas para aire no tienen las mismas limitaciones de velocidad y temperatura que los cojinetes lubricados con aceite o los cojinetes de elementos rodantes. Investigaciones experimentales muestran que ellos ofrecen muchas ventajas, incluyendo altas velocidades de operación, tolerancia a las altas temperaturas y tolerancia a que se introduzcan materias foráneas. Recientes avances en el diseño de cojinetes que incluyen altas velocidades, alta capacidad de carga y recubrimientos para alta temperatura han resultado en la extensión del rango de aplicación de velocidad y temperatura de la maquinaria rotatoria. Dellacote desarrolló un banco de prueba para cojinetes de láminas en donde la temperatura en el cojinete podía alcanzar hasta 700°C . Heshmat y otros, posteriormente operaron un cojinete de láminas a temperatura más altas de 800°C con un recubrimiento para alta temperatura. Sin embargo, de acuerdo con los resultados de Heshmat, tanto la capacidad de carga como la rigidez y el mecanismo de amortiguación varían con la carga a soportar del cojinete, velocidad y temperatura de operación.

Estos investigadores tienen como objetivo describir un método analítico para predecir el perfil de temperaturas de la película de aire dentro del cojinete de láminas. El objetivo de la investigación son los cojinetes de láminas con múltiples perforaciones para aire, MWFB (por sus siglas en inglés), que consiste en un cilindro y una banda con tres láminas perforadas con pequeñas proyecciones hemisféricas distribuidas a través de la superficie en un intervalo adecuado, como muestra las figuras 18.6 y 18.7.

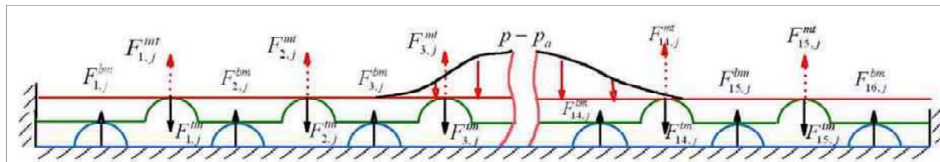
Se muestra una distribución de temperaturas en 3D para los MWFB, y se presenta una serie de resultados de cálculos térmicos en un rango de parámetros de operación.

Figura 18.6: Bosquejo de cojinete de láminas con múltiples perforaciones



Fuente Thermohydrodynamic study of multiwound foil bearing using lobatto point quadrature. K. Feng and S. Kaneko, Journal of Tribology, 131:021702, 2009.

Figura 18.7: Modelo geométrico de la lámina y análisis de fuerzas.



Fuente Thermohydrodynamic study of multiwound foil bearing using lobatto point quadrature. K. Feng and S. Kaneko, Journal of Tribology, 131:021702, 2009.

Análisis elástico hidrodinámico

El punto de cuadratura de Lobatto, es un tipo de cuadratura de Gauss; es aproximadamente dos veces más rápido que el algoritmo recular con un enmallado equidistante, y esto proporciona valores útiles para los límites de la integral. Para reducir el esfuerzo computacional, se utilizan polinomios de Legendre sobre los puntos de Lobatto para probar la velocidad, la viscosidad y la temperatura del fluido y son interrelacionadas por algoritmos y leyes físicas.

18.3.1.1. Expresión de velocidad de flujo

Las variables a través de la capa de aire puede ser expresada en términos de polinomios de Legendre en los polinomios de Legendre como sigue

$$\xi = \frac{1}{\mu} = \sum_{j=1}^n \frac{(\xi_F)_j}{\mu} P_j(\zeta), \quad T = \sum_{j=1}^n \underline{T}_j P_j(\zeta), \quad \rho = \sum_{j=1}^n \underline{\rho}_j P_j(\zeta)$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de Legendre y n es el numero de Lobatto a través de la película de aire. $(\xi_F)_j$, \underline{T}_j y $\underline{\rho}_j$ son los coeficientes correspondientes a las variables en términos de polinomios de Legendre, que son constantes. Las variables deben ser convertidas para $a \leq z \leq b$ dentro de el domino computacional rectangular $-1 \leq \zeta \leq 1$ para usar $\zeta = 2(z-a)/(b-a)-1$.

Ya que la razón de variación en la velocidad de flujo u en la dirección y es suficientemente pequeña comparada con la dirección z , la ecuación de momento del fluido es reducida

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (18.16)$$

La integración a través del espesor de la película se realiza en el dominio computacional de la expresión anterior. Las condiciones de frontera son dadas por $u|_{\zeta=-1} = u_U = \omega R$, $u|_{\zeta=1} = u_L = 0$, $v|_{\zeta=1} = v_U = 0$ y $v|_{\zeta=-1} = v_L = 0$. Entonces obtenemos la velocidad en direcciones x y y así

$$\begin{aligned} u &= A_u \int_{-1}^{\zeta} \xi_F d\zeta + B_u \int_{-1}^{\zeta} \zeta \cdot \xi_F d\zeta \\ v &= A_v \int_{-1}^{\zeta} \xi_F d\zeta + B_v \int_{-1}^{\zeta} \zeta \cdot \xi_F d\zeta \\ A_u &= \frac{\omega R - \frac{2}{3} B_u (\xi_F)_1}{2(\xi_F)_0}, \quad B_u = \frac{\partial p}{\partial \xi_x} \frac{h^2}{4} \\ A_v &= -\frac{B_v (\xi_F)_1}{3(\xi_F)_0}, \quad B_v = \frac{\partial p}{\partial \xi_y} \frac{h^2}{4} \end{aligned} \quad (18.17)$$

la ecuación de continuidad para flujo compresible es dada por

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \quad (18.18)$$

después de integrar a través del espesor de la película de fluido en el dominio computacional, tenemos

$$\rho w = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \xi_x} \rho y(\zeta + 1) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_x} \left[h \int_{-1}^{\zeta} \rho u d\zeta \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_y} \rho v(\zeta + 1) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_y} \left[h \int_{-1}^{\zeta} \rho v d\zeta \right]$$

18.3.1.2. Ecuación térmica de Reynolds

La ecuación de continuidad es integrada a través de la dirección del espesor de la película, en el estudio, el lubricante es tratado como un gas ideal de densidad $\rho = p/T \cdot R_{con}$ y la viscosidad depende de la temperatura. La ecuación térmica de Reynolds que describe la película de aire es obtenida a partir de la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\bar{p} \bar{h}^3}{T} \cdot F_1 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[\frac{\bar{p} \bar{h}^3}{T} \cdot F_1 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right] = \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\bar{p} \bar{h}}{T} \right) - \frac{\Lambda}{3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\bar{p} \bar{h}}{T} \cdot F_2 \right)$$

donde

$$\bar{h} = \frac{h}{C}, \bar{p} = \frac{p}{p_a}, \xi_x = \theta \cdot R, \bar{y} = \frac{\xi_y}{R}, \Lambda = \frac{6\omega R^2}{p_a C^2}, F_1 = \frac{(\xi_F)_0}{5} + \frac{2}{5} \frac{(\xi_F)_2}{3(\xi_F)_0}, F_2 = \frac{(\xi_F)_1}{(\xi_F)_0}$$

Análisis térmico

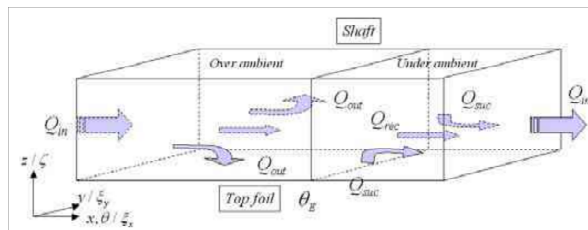
De acuerdo con la viscosidad del flujo de gas en la holgura, antes explicado, la ecuación de energía para la película de aire puede ser expresada como

$$\begin{aligned} \frac{u}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v}{R} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} - \frac{1}{\rho \bar{h}} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\bar{h} \int_{-1}^{\zeta} \rho u d\zeta \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[\bar{h} \int_{-1}^{\zeta} \rho v d\zeta \right] \right) = \\ \frac{k}{\rho C_p} \frac{4}{C^2 \bar{h}^2 \partial \zeta^2} + \frac{\beta T p_a}{\rho C_p} \left(\frac{u}{R} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \frac{v}{R} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\mu}{\rho C_p} \frac{4}{c^2 \bar{h}^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} \right)^2 \right] \quad (18.19) \end{aligned}$$

18.3.1.3. Condiciones de frontera

El flujo de fluido en los cojinetes de láminas, incluido el fluido interno y por fugas, es mostrado en la figura 18.8.

Figura 18.8: Flujos dentro del cojinete de láminas para aire



Fuente Thermohydrodynamic study of multiwound foil bearing using lobatto point quadrature. K. Feng and S. Kaneko, Journal of Tribology, 131:021702, 2009.

La temperatura de entrada se puede producir por la mezcla del aire fresco y del recirculado

$$T_{in} = \frac{T_{rec} Q_{rec} + T_{suc} Q_{suc}}{Q_{rec} + Q_{suc}} \quad (18.20)$$

donde Q_{suc} es el flujo succionado, que es obtenido por la integración de flujo lateral. Q_{rec} es el flujo de recirculación. La presión hidrodinámica se convierte en la presión del sub-ambiente, en la posición de ξ_x^{cr} , que es un valor de efectividad de ξ_x , a lo largo de la dirección y . La temperatura del flujo de succión T_{suc} es tratada como la temperatura del aire fresco T_o ,

$$Q_{suc} = -\frac{1}{12} \int_0^{\xi_x^{cr}} \frac{1}{\mu} h^3 \left. \frac{\partial p}{\partial \xi_y} \right|_{\xi_y=0} d\xi_y$$

$$Q_{rec} = \frac{w \cdot R}{2} \int_0^L h d\xi_y - \frac{1}{12} \int_0^L \frac{h^3}{\mu} \left. \frac{\partial p}{\partial \xi_x} \right|_{\xi_x=\xi_x^{cr}} d\xi_y \quad (18.21)$$

en la interface entre película y eje, el eje puede ser considerado como un componente isoterma, lo que significa que el flujo neto de calor entre la película y el eje es cero.

$$\int_0^{2\pi} k \cdot \frac{1}{\bar{h}} \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} d\xi_x = 0 \quad (18.22)$$

en la interface entre la película y la parte superior de la lámina, la siguiente ecuación es obtenida para la temperatura

$$\left(T - T_0 + \gamma \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) \Big|_{\zeta=-1} = 0 \quad (18.23)$$

donde

$$\gamma(\xi_x) = -2 \left(\frac{h+R}{h} \right) \left[\frac{k}{h_{conv}(R+h+t)} + \frac{k}{k_b} \ln \left(\frac{R+h+t}{R+h} \right) \right]$$

18.3.1.4. Propiedades del lubricante

La relación entre temperatura viscosidad del lubricante es escrita como

$$\mu = \mu_0 \frac{m}{n} \left(\frac{1,8 \times (T + 273,15)}{1,8 \times (T_0 + 273,15)} \right)^{3/2}$$

$$\mu_0 = 0,018369 \times 10^{-9} (N/mm^2) s$$

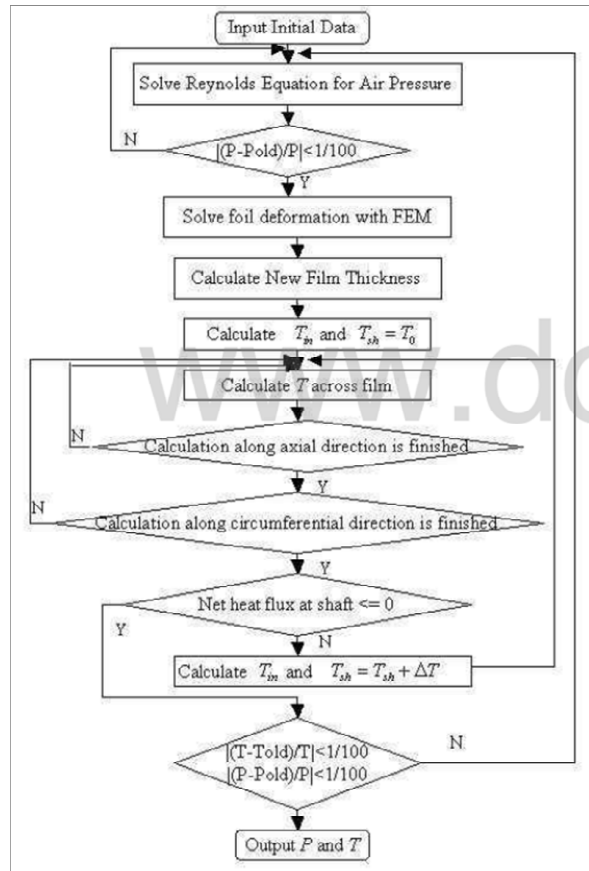
$$m = 0,555 [1,8 \times (T_0 + 273,15)] + K$$

$$n = 0,555 [1,8 \times (T + 273,15)] + K$$

$$K = 120$$

donde μ_0 es la viscosidad del aire del ambiente a temperatura $T_0 = 20^\circ C$.

Figura 18.9: Diagrama de flujo computacional



Fuente Thermohydrodynamic study of multiwound foil bearing using lobatto point quadrature. K. Feng and S. Kaneko, Journal of Tribology, 131:021702, 2009.

Resultados y discusión

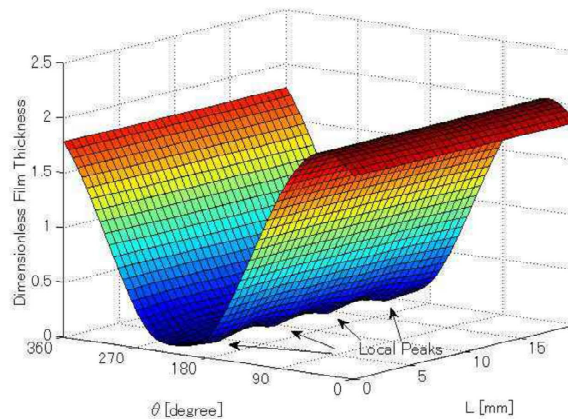
Los parámetros del lubricante y del cojinete son enumerados en el cuadro 18.2. La temperatura inicial T_0 es de 20°C . Los parámetros adimensionales de distribución de presión en la película de aire y el espesor de película, en los cálculos de la lubricación termohidrodinámica, con una velocidad de 40 krpm y un espesor mínimo de película de $1\ \mu\text{m}$ son presentados en las figuras 18.10 y 18.11. El valor máximo de presión alcanzada por el aire está en los alrededores de la región donde el espesor de película es mínimo en dirección circumferencial. en al figura 18.11 los máximos locales pueden ser claramente notados en la posición de proyección de la lámina superior, particularmente en la región de máxima presión, esto es debido a la deflexión local del soporte de lámina.

Cuadro 18.2: Datos de cojinete y lubricante

Radio del eje (R)	10 [mm]
Longitud del cojinete (L)	20 [mm]
Holgura radial nominal (C)	0,02 [mm]
Viscosidad absoluta (μ_0)	$1,73 \times 10^{11}$ [N × s/mm ²]
Presión ambiente (p_0)	$101,3 \times 10^{-3}$ [N/mm ²]
Contante del gas (R_{con})	$287,5 \times 10^3$ [N × mm/Kg × K]
Calor específico del aire (C_p)	$1,01 \times 10^6$ [N × mm/Kg × K]
Conductividad del aire (k)	$2,63 \times 10^{-2}$ [N/t × K]
Número de proyecciones en dirección axial	4
Número de proyecciones en dirección circunferencial	15 láminas superiores o 16 láminas medias
Módulo de Young (E)	$9,8 \times 10^4$ [N/mm ²]
Relación de Poisson (ν)	0,43
Espesor de la lámina (t)	0,1 [mm]
Conductividad de la lámina (k_B)	60 [N/t × K]

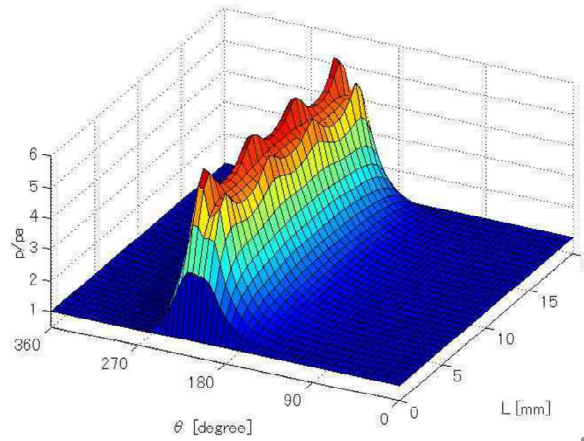
Fuente Thermohydrodynamic study of multiwound foil bearing using lobatto point quadrature. K. Feng and S. Kaneko, Journal of Tribology, 131:021702, 2009.

Figura 18.11: Espesor de película adimensional para un MWFB



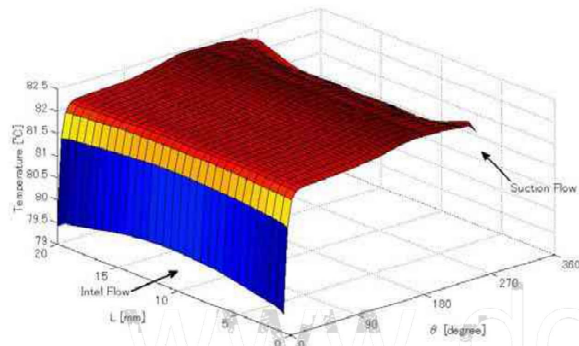
Fuente Thermohydrodynamic study of multiwound foil bearing using lobatto point quadrature. K. Feng and S. Kaneko, Journal of Tribology, 131:021702, 2009.

Figura 18.10: Presión adimensional de un MWFB



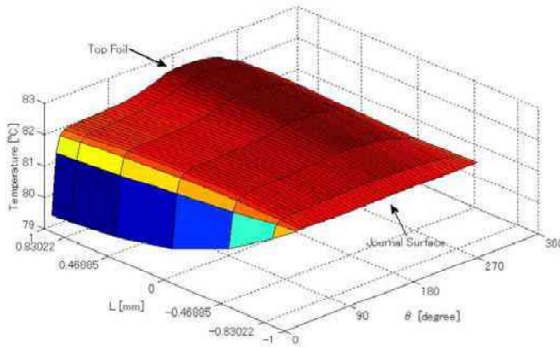
Fuente Thermohydrodynamic study of multiwound foil bearing using lobatto point quadrature. K. Feng and S. Kaneko, Journal of Tribology, 131:021702, 2009.

Figura 18.12: Perfil de temperaturas en el medio de la capa del aire $z = h/2$



Fuente Thermohydrodynamic study of multiwound foil bearing using lobatto point quadrature. K. Feng and S. Kaneko, Journal of Tribology, 131:021702, 2009.

Figura 18.13: Perfil de temperaturas en la sección media transversal $y = h/2$



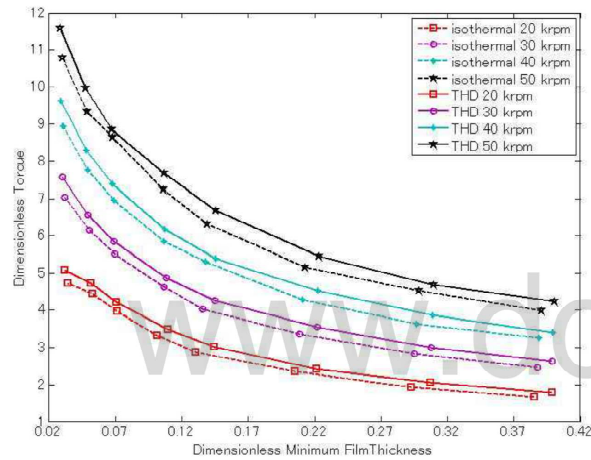
Fuente Thermohydrodynamic study of multiwound foil bearing using lobatto point quadrature. K. Feng and S. Kaneko, Journal of Tribology, 131:021702, 2009.

La deflexión de las láminas causa las formas protuberantes de la presión del aire. Por otra parte, en los MWFB, la deflexión de las láminas crean espacios para la excentricidad del eje, permiten un claro radial más grande que la nominal, que es una característica de los cojinetes de lámina.

El perfil de temperatura en 3D de la película de aire de los MWFB bajo condiciones de operación de $h_{min} = 1,0 \mu m$, $\omega = 40 \text{ krpm}$ es mostrado en las figuras 18.12 y 18.13, presentan el contorno de temperaturas en la capa intermedia de aire y en la sección media transversal respectivamente. en la figura 18.12 la temperatura de la película de aire incrementa a la entrada a lo largo de la circunferencia, y alcanza un valor máximo en la vecindad del mínimo espesor de película.

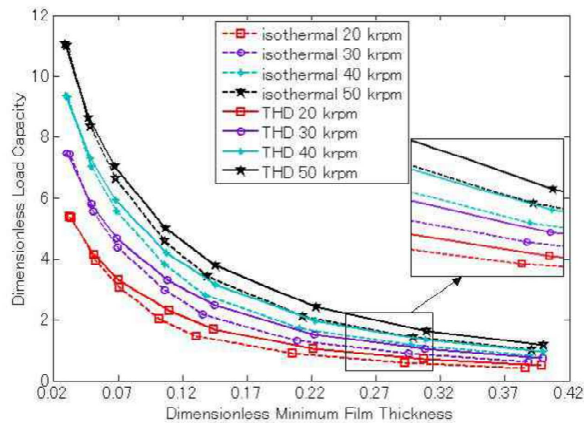
La capacidad de carga adimensional y el torque para cálculos THD e isotérmicos son mostrados en las figuras 18.14 y 18.15, como funciones del mínimo espesor de película. Es evidente que tanto la capacidad de carga como el torque, tienen un aumento con el incremento de la velocidad de rotación y decrecen cuando aumenta el mínimo espesor de película. Una comparación en la capacidad de carga y torque para los dos modelos muestra que en el modelo THD es más grande que en el modelo isotérmico a las mismas condiciones de operación. Esto se debe a que en el análisis THD se tiene en cuenta la expansión del aire y por el incremento de la viscosidad cuando la temperatura aumenta. En las figuras se puede ver que la temperatura es un factor realmente importante en el análisis de desempeño de los cojinetes.

Figura 18.15: Torque adimensional para cálculos THD e isotérmico ($\bar{T}_q = T_q/p_a CR^2$)



Fuente Thermohydrodynamic study of multiwound foil bearing using lobatto point quadrature. K. Feng and S. Kaneko, Journal of Tribology, 131:021702, 2009.

Figura 18.14: Capacidad adimensional de carga para cálculos THD e isotérmico ($\bar{W} = W/p_a R^2$)



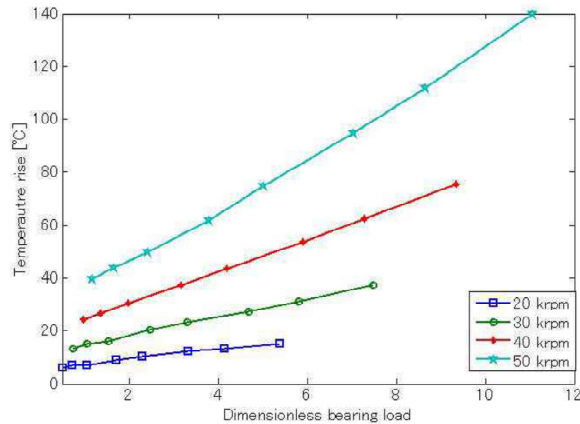
Fuente Thermohydrodynamic study of multiwound foil bearing using lobatto point quadrature. K. Feng and S. Kaneko, Journal of Tribology, 131:021702, 2009.

En la figura 18.16 se muestra el incremento máximo de temperatura en los cojinetes de láminas como función de la carga. Es evidente que el aumento de temperatura crece cuando aumenta la carga y con la velocidad de rotación, esto es causa de dos factores, la viscosidad y la velocidad del fluido.

Validación experimental

En el 2004, Radil y Zeszotek presentaron una investigación experimental de el perfil de temperatura compatible con un cojinete de láminas. Para validar el modelo en este

Figura 18.16: Máximo incremento en la temperatura para un MWFB Vs. Carga adimensional



Fuente Thermohydrodynamic study of multiwound foil bearing using lobatto point quadrature. K. Feng and S. Kaneko, Journal of Tribology, 131:021702, 2009.

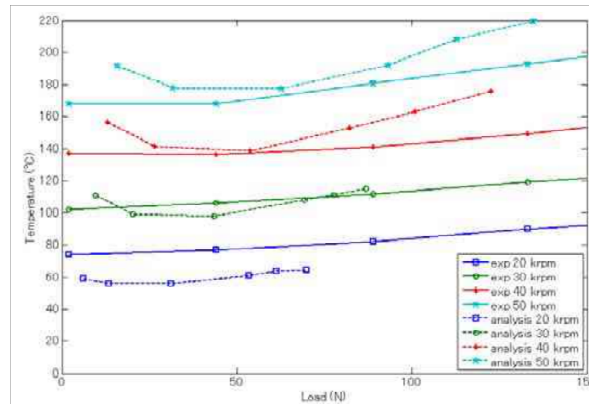
artículo, los resultados experimentales son mostrados y comparados con los predcidos numéricamente.

La figura 18.17 indica la comparación entre los resultados teóricos y experimentales para diferentes cargas y velocidades de rotación. se observa que los resultados numéricos tienen buena concordancia con los experimentales. La discrepancia entre ellos puede ser explicada por cuatro razones. Primero, los resultados teóricos se hallan con la máxima temperatura en el cojinete, mientras que los experimentales con la máxima temperatura en la lámina superior. Teóricamente el primer resultado debe ser un poco mayor que el segundo. Por otro lado, en este estudio el eje es tratado como un componente isotérmico, pero en realidad, hay disipación de calor a los alrededores a través del eje. Tercero, en el banco de pruebas tienen un bump type de tercera generación, mientras que el modelo de predicción usa un modelo de bump type de primera generación. Finalmente, la fricción no es tomada en cuenta en el modelo.

Conclusiones

1. Cuando se tienen condiciones de alta temperatura, generalmente producido por altas velocidades, se hace necesario el uso de cojinetes hidrodinámicos que funcionen con aire “foil bearings” como fluido de trabajo debido al comportamiento de la viscosidad en este fluido.
2. La mayor temperatura en la película de aire aparece adyacente a el mínimo espesor de película y cerca a la lámina superior que la superficie del eje a lo largo de la dirección axial.
3. La capacidad de carga y torque de los cojinetes de láminas se hace más grande si la temperatura se tiene en cuenta, y la diferencia es notable, lo que significa que los

Figura 18.17: Comparación de los resultados experimentales y analíticos



Fuente Thermohydrodynamic study of multiwound foil bearing using lobatto point quadrature. K. Feng and S. Kaneko, Journal of Tribology, 131:021702, 2009.

efectos de la temperatura no pueden ser ignorados en el análisis de los cojinetes de láminas.

4. El aumento en la temperatura de los cojinetes de láminas se incrementa con la carga al igual que con la velocidad de rotación.
5. El gradiente creciente de aumento de temperatura se hace más grande como una función de la carga del cojinete y de la velocidad de rotación

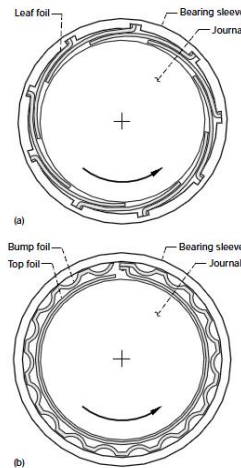
18.3.2. Análisis termohidrodinámico de un Foil Journal Bearing

Es un análisis termohidrodinámico basado en la investigación de Z.C Peng y M.M Khosari del departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Lousiana, cuyo objetivo es desarrollar un modelo termohidrodinámico para predecir el campo de temperatura en tres dimensiones de un *cojinete de lámina*, teniendo en cuenta la compresibilidad, la viscosidad y la temperatura del aire [101].

La importancia del estudio de esta investigación, radica en que no se tiene el material suficiente para analizar el comportamiento de la temperatura en un cojinete rígido y la mayoría de los modelos para los cojinetes rígidos se basan en los estudios térmicos realizados a los cojinetes de lámina, por lo tanto es importante dar a conocer las características, especificaciones, y el análisis matemático desarrollado para este tipo de cojinetes. A continuación se presentan los aspectos más sobresalientes de esta investigación que permitirán mostrar la aplicación de la teoría analítica explicada al comienzo de esta sección. Para mayor detalle de este estudio ver [101].

Foil Journal Bearing

Figura 18.18: Esquema de un *cojinete de lámina*



Fuente A thermohydrodynamic analysis of foil journal bearings, Peng, ZC and Khonsari, MM, Journal of tribology (2006)

Generalidades

- Son cojinetes especiales que a diferencia de los cojinetes rígidos tienen una estructura particular, “cojinetes de lámina”.
- Son un elemento revolucionario que permite el mejoramiento significativo en velocidad, eficiencia y confiabilidad.
- Son autoactuantes, de segura operación, sin requerimientos de presiones externas, con un peso más reducido que el cojinete rígido de aceite y costos de mantenimiento bajos.
- Proporcionan la rigidez y amortiguamiento deseado para el sistema deseado.
- Se acomoda a las fuerzas centrífugas y a la expansión térmica del eje, dando como resultados una mayor estabilidad en comparación con los cojinetes rígidos.

Especificaciones

- El cojinete está formado por dos elementos particulares, un *elemento superior de lámina (top foil)* y una *protuberancia de lámina (bump foil)*. Los elementos están fabricados en base de níquel (recubrimiento en capas) ver 18.18.
- La geometría no es óptima y ocasiona que se desgasten fácilmente en operación.

- Cuando se operan a altas temperaturas las láminas no so recubiertas, se utiliza lubricante para el eje.
- La mayor ventaja y que es inherente a este tipo de cojinetes, es que pueden operar en ambientes de temperatura alta, como por ejemplo: alrededores de cámara de combustión en turbinas. Operación hasta los $700^{\circ}C$, pero en constante presencia de alta temperatura no va a ser totalmente indestructible.
- Se puede presentar sobrecalentamiento debido al aumento no uniforme de la temperatura del aire, lo que ocasiona un cambio en su viscosidad y consecuentemente una inestabilidad térmica.

Método Analítico

El estudio se basa en la resolución simultánea de la ecuación de Reynolds y de la Ecuación de Energía que gobierna el flujo de aire:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6U \frac{d}{dx} (\rho h) \quad (18.24)$$

$$\rho C_p V \cdot \nabla T = \nabla (k \nabla T) + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \Phi \quad (18.25)$$

donde Φ es la disipación de la viscosidad. Las coordenadas utilizadas en el estudio son: abscisas x y ordenadas z

Las dos anteriores ecuaciones son relacionadas a través de la densidad, la temperatura y la viscosidad características del aire. La solución numérica a este sistema de ecuaciones diferenciales parciales es frecuentemente obtenida a través de un esquema iterativo. Típicamente el desarrollo que se hace es el siguiente: la ecuación de Reynolds se resuelve en primer lugar bajo la condición isotérmica, luego el campo de temperatura es hallado resolviendo la ecuación de energía usando los resultados de la ecuación de Reynolds, después los cambios de viscosidad y densidad ocasionados por la temperatura son tomados en cuenta y una nueva iteración se realiza para resolver la ecuación de Reynolds y la ecuación de la energía, esta iteración se realiza hasta que el cambio en las diferentes soluciones halladas en dos iteraciones sucesivas no cambien según un error específico. Este tipo de esquema de solución es usado frecuentemente para problemas que se refieren al análisis termohidrodinámico LTH.

Análisis Hidrodinámico

Se asume el aire como gas ideal y la forma dimensional de la ecuación isotérmica de Reynolds será:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{p} \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{p} \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) = \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{p} \bar{h})$$

Donde $\theta = \frac{x}{R}$; $\bar{y} = \frac{y}{L/2}$; $\bar{p} = \frac{p}{p_0}$; $\bar{h} = \frac{h}{c}$; $\Lambda = \frac{6\mu_0 w}{p_a} \left(\frac{R}{C}\right)^2$

La ecuación anterior es solucionada por diferencias finitas con iteraciones sobre el espesor de película que toma la siguientes forma:

$$\bar{h}^{n+1} = 1 + (\epsilon_0 + \Delta\epsilon^n) \cos(\theta - \Delta\phi^n) + \alpha(\bar{p}^n - 1)$$

Donde $\Delta\epsilon$ es el cambio de excentricidad debido a la deformación de *la lámina superior* y $\Delta\phi$ es el cambio de la orientación del ángulo y n es el número de iteraciones. El esquema numérico es descrito en detalle en la investigación en la que se basó esta sección. En la mayoría de los casos es necesario de un método de relajación para que la solución converga debido al comportamiento no lineal del problema. Típicamente, un pequeño factor de relajación debe ser implementado en las condiciones de simulación envolviendo grandes números de cojinetes y grandes radios de excentricidad. Por tanto, el número de iteraciones incrementa con el incremento del número de cojinete y del radio de excentricidad.

Análisis Térmico

18.3.2.1. Reducción de la Ecuación que Gobierna el sistema.

Esta reducción se basa en los estudio experimental de Salehi, donde la transferencia de calor a lo largo del cojinete(z) es dominante comparada a la condición de calor en las otras dimensiones, x e y, la ecuación que dominará el sistema es la ecuación de la energía , y se tendrán en cuenta los gradientes de velocidad $\partial u/\partial z$ y $\partial v/dz$, ya que los otros gradientes son muy pequeños y pueden ser despreciados. Por tanto la ecuación reducida de energía será:

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (18.26)$$

Salehi también establece la relación de viscosidad y temperatura del aire:

$$\mu = \alpha(T - T_{ref}) \quad (18.27)$$

donde $\alpha = 4 \times 10^{-8}$ y $T_{ref} = -45,75 [^{\circ}C]$, y combinando 18.26 y 18.27 en forma no dimensional se tiene:

$$\bar{p} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} + \bar{v} \left(\frac{D}{L} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\bar{h}} \bar{w} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{k_1}{k_2^2} \frac{1}{\bar{h}^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} + k_3 \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + k_3 \bar{v} \left(\frac{D}{L} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + k_1 \frac{\bar{T}}{\bar{h}^2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right] + k_1 \frac{1}{\bar{h}^2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right] \quad (18.28)$$

donde :

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_0}; \quad \bar{u} = \frac{u}{U}; \quad \bar{v} = \frac{v}{U}; \quad \bar{w} = \left(\frac{R}{C}\right) \frac{W}{U}; \quad \bar{h} = \frac{h}{C} \\ \theta &= \frac{x}{R}; \quad \bar{z} = \frac{z}{h}; \quad \bar{y} = \frac{y}{L/2}; \quad T = \frac{T-T_0}{T_0-T_{ref}}; \quad k_1 = \frac{\alpha\omega}{\rho_0 C_p} \left(\frac{R}{C}\right)^2 \\ k_2 &= R\omega\sqrt{\frac{a}{k}}; \quad k_3 = \frac{p_0}{\rho C_p(T_0-T_{ref})}\end{aligned}$$

18.3.2.2. Condiciones de Frontera

Las condiciones apropiadas de frontera para la ecuación 18.28 son:

- $\bar{T} = (0, \bar{y}, \bar{z}) \bar{T}_{in}$
- $\bar{T} = (\bar{x}, 0, \bar{z}) \bar{T}_{mid}$
- $\bar{T} = (\bar{x}, \bar{y}, 0) \bar{T}_{sh}$
- $\gamma \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \Big|_{(\bar{x}, \bar{y}, 1)} = -\bar{T} \Big|_{(\bar{x}, \bar{y}, 1)}$

donde $\gamma = \left[1 + \frac{1}{h} \left(\frac{R}{C}\right) \left[\frac{k}{h_{conv}(R+C\bar{h}+t_r)} + \frac{k}{k_T} \ln\left(1 + \frac{t_r}{R+C\bar{h}}\right) \right] \right]$.

El parámetro \bar{T}_{in} en las condiciones de frontera representa la temperatura en $\theta = 0$, es la temperatura en el interior, una temperatura promedio hallada entre la temperatura del aire fresco y la temperatura del aire que esta recirculando en el interior que va a ser mucha más grande, esta temperatura promedio se hallará a partir de un balance de energía especificado en el estudio.

Por otro lado, el parámetro \bar{T}_{mid} es la temperatura del plano medio del cojinete a lo largo del cojinete, así que en el plano medio, $\partial p / \partial y = 0$, $v = 0$. De lo anterior se tiene que la ecuación 18.28 se reduce a:

$$\begin{aligned}\bar{p} \left(\bar{u}_{mid} - \frac{\partial \bar{T}_{mid}}{\partial \theta} + \frac{1}{h} \bar{w}_{mid} \frac{\partial \bar{T}_{mid}}{\partial \bar{z}} \right) &= \frac{k_1}{k_2^2} \frac{1}{\bar{h}^2} \frac{\partial^2 \bar{T}_{mid}}{\partial \bar{z}^2} + k_3 \bar{u}_{mid} \frac{\partial \bar{p}_{mid}}{\partial \theta} + \\ & k_1 \frac{\bar{T}_{mid}}{\bar{h}^2} \left(\frac{\partial \bar{u}_{mid}}{\partial \bar{z}} \right)^2 + k_1 \frac{1}{\bar{h}^2} \left(\frac{\partial \bar{u}_{mid}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \quad (18.29)\end{aligned}$$

La \bar{u}_{mid} , \bar{w}_{mid} y \bar{p}_{mid} son componentes de la velocidad y la presión hidrodinámica en el plano medio del cojinete.

Por último el parámetro \bar{T}_{sh} es la temperatura en la superficie del eje, que está rotando generalmente a altas velocidades; es apropiado asumir que parte de esta temperatura sea añadida a la temperatura circunferencial; la magnitud de esta temperatura puede ser estimada por la temperatura principal del lado de flujo del aire.

La cuarta ecuación de las condiciones de frontera es derivada combinando la ecuación de energía de la película de aire, con la ecuación de conducción de calor para *la lámina superior* considerando sólo la conducción de calor radial a través del espesor de lámina, esta simplificación en la conducción de calor es justificada por el hecho que *la lámina superior* es tan delgada y la conducción de calor en ambas direcciones, circunferencial y axial, son relativamente pequeñas comparadas con la conducción radial.

18.3.2.3. Esquema Numérico

Para resolver la ecuación 18.28 el siguiente operador transformado, es usado para transformar el dominio físico dentro de un dominio rectangular computacional [95].

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \frac{\bar{z}}{\bar{h}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (18.30)$$

Usando el anterior operador, entonces la ecuación 18.28 quedará:

$$\begin{aligned} \bar{p} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \left(\frac{D}{L} \right) \frac{\partial \bar{T}}{d\bar{y}} + \frac{1}{\bar{h}} \left(\bar{w} - \bar{u} \bar{z} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \right) &= \frac{k_1}{k_2} \frac{1}{\bar{h}^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} + k_3 \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + k_3 \bar{v} \left(\frac{D}{L} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \\ &k_1 \frac{\bar{T}}{\bar{h}^2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right] + k_1 \frac{1}{\bar{h}^2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (18.31)$$

Y la ecuación 18.29 será:

$$\begin{aligned} \bar{p} \left(\bar{u}_{mid} - \frac{\partial T_{mid}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\bar{h}} \left(\bar{w}_{mid} - \bar{u}_{mid} \bar{z} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial T_{mid}}{\partial \bar{z}} \right) &= \frac{k_1}{k_2} \frac{1}{\bar{h}^2} \frac{\partial^2 \bar{T}_{mid}}{\partial \bar{z}^2} + k_3 u_{mid} \frac{\partial p_{mid}}{\partial \bar{x}} \\ &+ k_1 \frac{T_{mid}}{\bar{h}^2} \left(\frac{\partial \bar{u}_{mid}}{\partial \bar{z}} \right)^2 + k_1 \frac{1}{\bar{h}^2} \left(\frac{\partial u_{mid}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \end{aligned} \quad (18.32)$$

Para resolver la ecuación 18.31 para un campo de temperatura de tres dimensiones, una técnica numérica a lo largo del cojinete, dirección y axial, fue implementada usando la solución de la ecuación 18.32, obtenida también, usando una técnica a lo largo de la circunferencia del cojinete, dirección x . El detalle de la formulación numérica obtenida para las dos ecuaciones 18.31 y 18.32 son descritos en [101].

El procedimiento para la solución numérica es como se describe a continuación. Primero, la distribución de temperatura en dos dimensiones en el plano medio, T_{mid} , es hallada resolviendo la ecuación 18.32. Luego, estos valores de temperatura del plano medio son utilizados como condiciones de frontera para la ecuación 18.31 y dar solución en la dirección axial del plano medio desde ($\bar{y} = 0$) hasta que finaliza el cojinete ($\bar{y} = 1$). Después de obtener la primera iteración de un campo de temperatura en 3D \bar{T} , el programa procede a calcular la temperatura en el interior \bar{T}_{in} usando la ecuación :

$$\bar{T}_{in} = \frac{\bar{T}_{rec} \bar{Q}_{rec} + \bar{T}_{suc} \bar{Q}_{suc}}{\bar{Q}_{rec} + \bar{Q}_{suc}}$$

Donde \bar{Q}_{suc} es el flujo de succión, que sera igual a :

$$\bar{Q}_{suc} = Q_{suc} / Q_{ref}$$

y

$$Q_{ref} = (\rho_0 C^3 / \mu) (D/L)$$

Luego de calcular la \bar{T}_{in} se calcula la temperatura del eje \bar{T}_{sh} usando el valor principal de temperatura del lado del flujo. En la iteración sucesiva, los valores de las últimas temperaturas halladas ($\bar{T}_{in}, \bar{T}_{sh}$) son usados para resolver la ecuación 18.32 y hallar una nueva \bar{T}_{mid} y con la ecuación 18.31 hallar una nueva temperatura en 3D \bar{T} . La densidad del aire $\bar{\rho}$ fue calculada usando la ley de los gases ideales y puesta dentro de la iteración. La convergencia se obtiene cuando la diferencia relativa en las soluciones entre dos iteraciones sucesivas se encuentre por debajo de una tolerancia de error específico, típicamente 1×10^{-5} .

BIBLIOGRAFÍA

- [92] E.A. AVALLONE, T. BAUMEISTER, and A.M. SADEGH. *Marks' standard handbook for mechanical engineers*. McGraw-Hill New York etc., 2007.
- [93] Yunus A. CENGEL. *Heat Transfer: A Practical Approach*. McGraw-Hill Science, 2002.
- [94] V. DOBROVOLSKI, K. ZABLONSKI, S. MAK, and A. RADCHIK. *Elementos de máquinas*. 1991.
- [95] HA EZZAT and SM ROHDE. A study of the thermohydrodynamic performance of finite slider bearings. *ASME Journal of Lubrication Technology*, 95:298–307, 1973.
- [96] V. M. FAIRES. *Diseño de Elementos de Máquinas*. Editorial Uteha, 4 edition, 1998.
- [97] K. FENG and S. KAENKO. Thermohydrodynamic study of multiwound foil bearing using lobatto point quadrature. *Journal of Tribology*, 131:702, 2009.
- [98] B.J. HAMROCK, B. JACOBSON, and S.R. SCHMID. *Fundamentals of fluid film lubrication*. CRC, 2004.
- [99] C. MACOSKO. *Rheology: Principles and Measurements*. 1994.
- [100] JA MORENO, F. ALHAMA, and F.C.G. DE LEÓN. Campo de temperaturas en cojinetes deslizantes. *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica.*, 9(3):49–55, 2005.
- [101] ZC PENG and MM KHONSARI. A thermohydrodynamic analysis of foil journal bearings. *Journal of tribology*, 128:534, 2006.

Capítulo 19

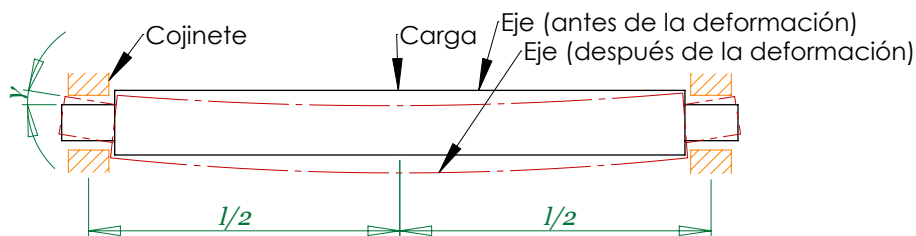
LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA EN PRESENCIA DE DESALINEAMIENTO ANGULAR

19.1. DESALINEAMIENTO DEL COJINETE CAUSADO POR LA DEFORMACIÓN DEL EJE.

Hasta ahora la lubricación en cojinetes ha sido analizada exhaustivamente para tener cálculos más precisos en los análisis, algunos de los factores influyentes son: el efecto de la superficie rugosa, el efecto térmico, lubricante No Newtoniano, en esta sección se verá a groso modo los factores que influyen en el desalineamiento del cojinete que **Jun Sun**, **Gui Changlin**, analizó en sus investigaciones [106], además se señalará el estudio realizado por el ingeniero **Raúl López**, acerca de la experimentación y análisis de la estabilidad dinámica de un sistema rotodinámico con y sin deslizamiento, pues su comparación permite un profundo conocimiento de este fenómeno, muy común en la industria.

El eje y el cojinete se calculan generalmente de forma individual, en la mayoría de los diseños mecánicos que tengan en cuenta estos componentes [105], para efectos de este estudio la interacción entre ellos es considerada como se muestra en la figura 19.1. La carga que se transmite del cojinete al eje, es asumida como una fuerza concentrada o como una fuerza distribuida en el cálculo del esfuerzo. Para el diseño del muñón, el eje axial de éste se asume paralelo a la línea de centro que pasa por el agujero del cojinete.

Figura 19.1: Plano de trabajo combinado del eje y del cojinete



Como se conoce, el eje comienza a deformarse cuando se aplica una fuerza, como muestra la línea punteada de la figura 19.1, lo que lleva al desalineamiento del muñón en el agujero del cojinete, por lo tanto el efecto de lubricación del cojinete puede resultar afectado. Por otro lado, la forma de aplicación de la carga sobre el eje por el cojinete, es determinada por efecto de la distribución de la película de presión, y de esta manera influye directamente la distribución y la intensidad del esfuerzo en el eje.

Por esta razón, para hacer el cálculo del eje y del cojinete más ajustado a las condiciones reales, el diseño razonable de cada componente puede ser adumado, y los efectos de interacción entre los comportamientos mecánicos del eje y del cojinete deben ser considerados. De esta manera, la influencia de la deformación del eje debe ser considerada en el análisis de la lubricación del cojinete, y la acción de la carga causada por la presión de la película en el cojinete se debe tener en cuenta en el cálculo del esfuerzo del eje. Otro aspecto importante a considerar, es la influencia en el grado de desalineamiento del cojinete sobre el rendimiento y la lubricación hidrodinámica del cojinete en estado estacionario cuando la deformación del eje es causado por la fuerza.

A continuación se muestra la formulación analítica del cojinete debido a la deformación del eje, y se establece el ángulo de desalineamiento, el espesor de película, la capacidad de carga, el caudal debido a las fugas, el momento de fricción y el momento por desalineamiento.

19.1.1. Formulación analítica

19.1.1.1. Ángulo de desalineamiento en el agujero del cojinete causado por la deformación del eje

La figura 19.1 muestra la combinación del trabajo del eje y del cojinete. La fuerza que actúa sobre el centro del eje causa la deformación de éste; por lo tanto los desalineamientos del muñón toman lugar en el agujero del cojinete. Sobre la base de los cálculos de la deformación, el ángulo de desalineamiento del muñón en el agujero del cojinete se puede dar por:

$$\gamma = \frac{Pl^2}{13EJ}$$

Donde γ es el ángulo de desalineamiento del muñón en el agujero del cojinete, P es la fuerza actuante sobre el centro del eje, l es la longitud del eje. E es el módulo de elasticidad del material para el cojinete y J es el momento de inercia de la sección transversal del eje.

19.1.1.2. Espesor de película

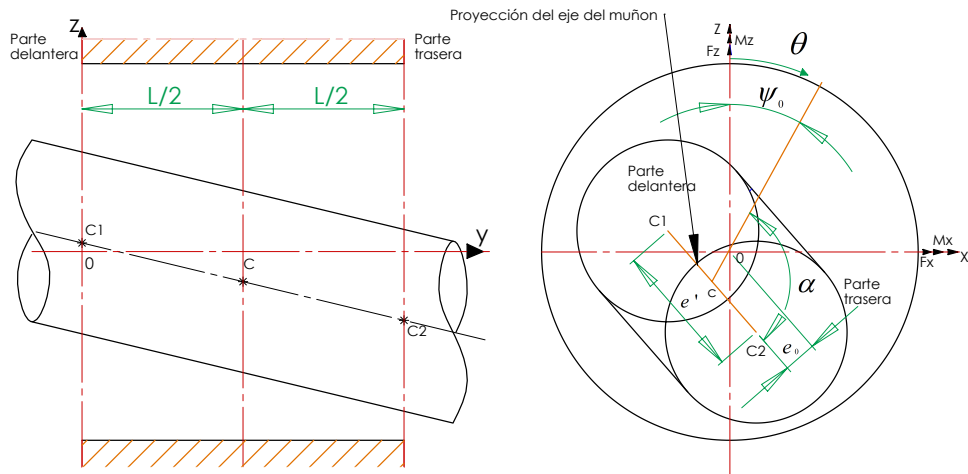
La figura 19.2, muestra un cojinete desalineado y un sistema de coordenadas analítico. C , C_1 y C_2 son las intersecciones del eje del cojinete con un plano medio, plano frontal y plano posterior.

El espesor de película de un cojinete alineado puede ser expresado por

$$h = c + e \cos(\theta - \psi) \quad (19.1)$$

Donde e y ψ representa el vector de excentricidad del muñón.

Figura 19.2: Cojinete desalineado



Para un cojinete desalineado, las distintas secciones transversales a través del eje del cojinete, tienen una ubicación diferente en el centro. Por lo tanto, si la ecuación 19.1 se utiliza para expresar el espesor de la película, e y ψ en la ecuación 19.1 son las funciones de la coordenada y .

Si $(x_1, 0, z_1)$ y (x_2, L, z_2) se supone que son las coordenadas de C_1 y C_2 en x y z del centro

del muñón en la sección transversal, tenemos la coordenada y que esta dada por:

$$x = \frac{y}{L}(x_2 - x_1) + x_1, \quad z = \frac{y}{L}(z_2 - z_1) + z_1$$

por lo tanto,

$$e = \sqrt{x^2 + z^2} \quad (19.2)$$

$$\psi = (1 - \text{sign } z) \times 90^\circ + \text{sign } z \times \text{sign } z \times \psi' - 180^\circ \quad (19.3)$$

Donde $\text{sign } x$ es el signo de la función, definido por:

$$\text{sign } x = x/|x|, \quad y \quad \psi' = \arctan |x/z|$$

Por lo tanto, si la ubicación del muñón en el cojinete se expresa por medio de las coordenadas $[(x_1, 0, z_1), (x_2, L, z_2)]$, de las intersecciones del eje del muñón con dos planos finales del cojinete, el espesor de película de un cojinete desalineado puede ser dado por la ecuación 19.1, en combinación con las ecuaciones 19.2 y 19.3. Otros autores también han mencionado el desalineamiento en sus estudios [102, 104, 105, 108] y de la misma manera han planteado un ecuación para calcular el espesor de película que se puede dar por:

$$h = c + e_0 \cos(\theta - \psi_0) + \tan \gamma \left(y - \frac{L}{2} \right) \cos(\theta - \alpha - \psi_0) \quad (19.4)$$

Donde e_0 , y ψ_0 , representan el vector de excentricidad del muñón en el plano medio axial del cojinete, α es el ángulo entre la proyección de la línea posterior central del cojinete y el vector de excentricidad e_0 . γ es el ángulo del desalineamiento del cojinete, que es el ángulo del eje del muñón y la línea que pasa por el eje del muñón y es paralela a la línea central del cojinete, y puede ser calculada por:

$$\gamma = \arctan \left(\frac{e'}{L} \right)$$

Donde e' es la magnitud de la proyección del eje de desalineamiento del muñón sobre el plano final del cojinete.

19.1.1.3. Ecuación de Reynolds

La ecuación de Reynolds para lubricación en cojinetes bajo estado estable de cargas está dada por [109]

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6\eta u R \frac{\partial h}{\partial \theta} + 6\nu R^2 \eta \frac{\partial h}{\partial y} \quad (19.5)$$

donde p es la presión de la película, R es el radio del cojinete, u y v son las componentes de la velocidad en dirección circunferencial y axial del cojinete

$$u = U \cos \gamma, \quad v = U \sin \gamma$$

donde U es la velocidad en la dirección circunferencial del cojinete y se puede describir de la siguiente manera.

$$U = R\omega_j$$

La ecuación 19.5 se soluciona por el método de diferencias finitas. La fórmula de la diferencial centrada es usada para los nodos de la región central, y las fórmulas de las diferencias progresivas y regresivas son usadas para los nodos sobre las fronteras. Por otra parte, la presión de película es asimétrica cerca del plano medio en la dirección axial en el desalineamiento del cojinete; la longitud completa del cojinete en la dirección axial a 360° y en la dirección circunferencial son seleccionadas para el cálculo. Se realiza una rejilla de intervalos que es dividida entre 120 nodos en la dirección circunferencial, y 45 nodos en la dirección axial.

La ecuación de presión en diferencias finitas se soluciona mediante el método iterativo con un factor de relajación de (1,7) para acelerar la convergencia. Las condiciones de presión en los límites son

$$p(\theta, 0) = p(\theta, L) = 0, \quad p(\theta_2, y) = 0, \quad \frac{\partial p(\theta_2, y)}{\partial \theta} = 0$$

donde θ_1 y θ_2 son los ángulos de los puntos de inicio y final respectivamente de la película hidrodinámica en el plano axial.

19.1.1.4. Capacidad de carga y posición angular

Como se muestra en la figura 19.2, los componentes de carga en coordenadas x y z , se calculan con las siguientes ecuaciones:

$$F_x = - \int_0^L \int_{\theta_1}^{\theta_2} p R \sin \theta d\theta dy \quad (19.6)$$

$$F_z = - \int_0^L \int_{\theta_1}^{\theta_2} p R \cos \theta d\theta dy \quad (19.7)$$

La fuerza F y la posición angular Φ se hallan de la siguiente manera:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2}$$

$$\Phi = (1 - \text{sign}F_z) \cdot 90^\circ + \text{sign}F_z \cdot \text{sign}F_x \cdot \Phi'$$

$$\text{Donde } \Phi' = \arctan \left| \frac{F_x}{F_z} \right|$$

19.1.1.5. Caudal por fugas en los extremos

El caudal del lubricante Q_1 , pasa por el plano frontal del cojinete, y el caudal de lubricante Q_2 pasa por la parte posterior del cojinete y se calculan de la siguiente manera:

$$Q_1 = - \int_0^{2\pi} \frac{h^3}{12\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} \cdot R d\theta \quad (19.8)$$

$$Q_2 = - \int_0^{2\pi} \frac{h^3}{12\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=L} \cdot R d\theta \quad (19.9)$$

el caudal total por fugas de lubricante es obtenido por la sumatoria de ambos caudales

$$Q = Q_1 + Q_2$$

19.1.1.6. Coeficiente de fricción

La fuerza de fricción en la superficie del cojinete puede ser calculada por:

$$F_j = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{h}{2} \frac{\partial p}{R \partial \theta} + \frac{U\eta}{h} \right) R d\theta dy \quad (19.10)$$

De la misma manera, el coeficiente de fricción en la superficie del cojinete esta dado por:

$$\mu_j = \frac{F_j}{F}$$

19.1.1.7. Momento por desalineamiento

Para el hallar del momento por desalineamiento, se calcula directamente de la distribución de presión en la película de aceite, esto se ve con más detenimiento de la figura 19.2. Donde las dos componentes en dirección x y z se definen como

$$M_x = \int_0^L \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \left(y - \frac{L}{2} \right) R \cos \theta d\theta dy \quad (19.11)$$

$$M_z = \int_0^L \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \left(y - \frac{L}{2} \right) R \sin \theta d\theta dy \quad (19.12)$$

El momento total y el ángulo de dirección pueden ser calculadas así:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_z^2}$$

$$\Phi_M = (1 - \text{sign}M_z) \cdot 90^\circ + \text{sign}M_z \cdot \text{sign}M_x \cdot \Phi'_M$$

Donde $\Phi' = \arctan \left| \frac{M_x}{M_z} \right|$

Las integrales en las ecuaciones 19.6, 19.7, 19.8, 19.9, 19.10, 19.11, 19.12, para calcular la capacidad de carga, el caudal por fugas, el coeficiente de fricción y el momento por desalineamiento son computados por las ecuaciones de Simpson¹, y las derivadas parciales son computadas por la ecuación de diferencias de cuatro puntos.

19.1.2. RESULTADOS

Con el fin de analizar la influencia de diferentes ángulos del desalineamiento en el muñón, la investigación se enfocó en la orientación del muñón desalineado y el radio de excentricidad del cojinete sobre el rendimiento de la lubricación del cojinete. Cuando el desalineamiento del muñón se lleva a cabo en el agujero del cojinete y es causado por las diferentes cargas que actúan sobre el eje, de acuerdo con la carga P , los siguientes parámetros fueron elegidos para el cálculo.

$$\psi_0 = \alpha = 0^\circ \text{ y } 90^\circ;$$

$$\varepsilon_0 = 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7 \text{ y } 0,8 \text{ cuando } \alpha = 0^\circ$$

$$\gamma = 0,004^\circ, 0,007^\circ \text{ y } 0,01^\circ \text{ cuando } \alpha = 90^\circ$$

$$\gamma = 0,01^\circ, 0,02^\circ \text{ y } 0,03^\circ$$

Los parámetros del cojinete y las propiedades del lubricante se muestran en el cuadro 19.1.

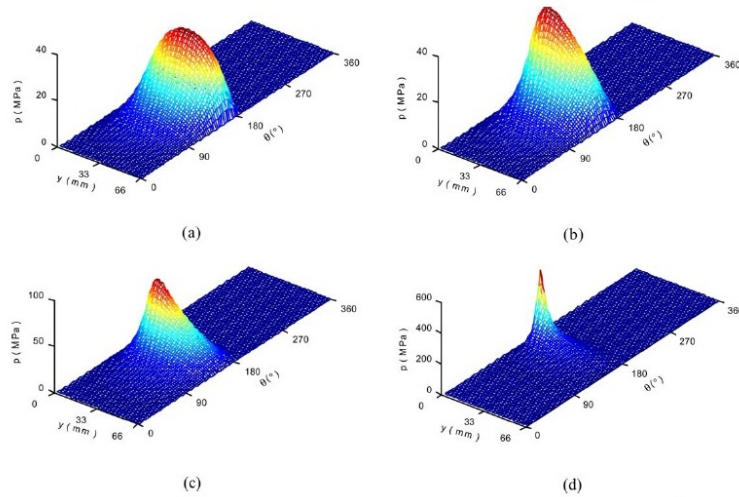
Cuadro 19.1: Parámetros del cojinete y propiedades del lubricante

<i>Parámetros del cojinete y propiedades del lubricante</i>	
Radio del muñón	$R = 30 [mm]$
Longitud del cojinete	$L = 66 [mm]$
Holgura radial	$c = 0,03 [mm]$
Velocidad rotacional	$n = 3000 [rev/min]$
Viscosidad del lubricante	$\eta = 9 [mPa \cdot s]$

¹La regla trapezoidal, aproxima el área bajo una curva sumando las áreas de trapecios de ancho uniforme, formados al conectar puntos sucesivos de la curva mediante rectas. La Regla de Simpson, proporciona una aproximación más precisa, ya que consiste en conectar grupos sucesivos de tres puntos sobre la curva mediante parábolas de segundo grado, y sumar las áreas bajo las parábolas para obtener el área aproximada bajo la curva.

Es este estudio realiza la comparación con el análisis de lubricación del cojinete alineado para ($\gamma = 0^\circ$). Las condiciones de comparación están, en que los valores de ε_0 y ψ_0 para los cojinetes desalineados son los mismos de ε y ψ del cojinete alineado. [106]

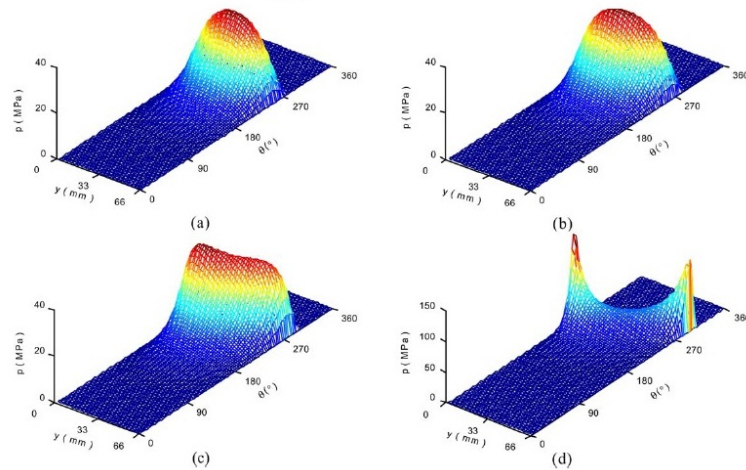
Figura 19.3: Distribución de presión p , de un cojinete desalineado



Fuente Hydrodynamic lubrication analysis of journal bearing considering misalignment caused by shaft deformation, Sun and G. Changlin 2004

La gráfica 19.3 es para ($R = 30 [mm]$, $L = 66 [mm]$, $c = 0,03 [mm]$, $n = 3000 [r/min]$, $\varepsilon = 0,8$, $\psi_0 = \alpha = 0^\circ$), a diferentes ángulos de desalineamiento $\gamma = 0^\circ$, $p_{max} = 33,06 [Mpa]$; (b) $\gamma = 0,004^\circ$, $p_{max} = 39,6 [Mpa]$; (c) $\gamma = 0,007^\circ$, $p_{max} = 63,58 [Mpa]$; (d) $\gamma = 0,01^\circ$, $p_{max} = 415,35 [Mpa]$

Figura 19.4: Distribución de presión p , de un cojinete desalineado a otros ángulos



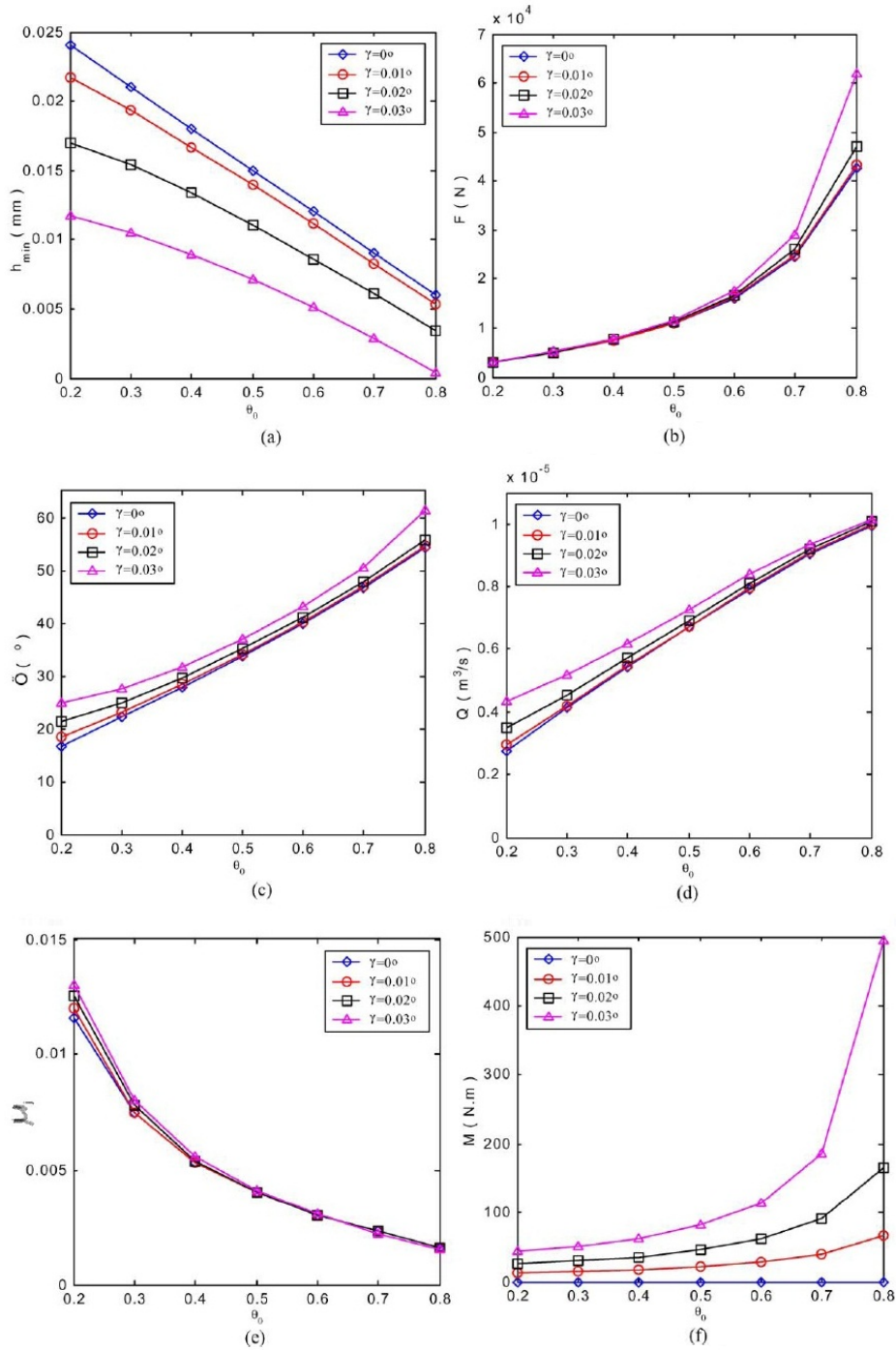
Fuente *Ídem*

La distribución de la película de presión de un cojinete desalineado a diferentes ángulos y la orientación del desalineamiento se muestran en las figuras 19.3 y 19.4. La distribución de presión de la película de un cojinete desalineado es completamente diferente a la de un cojinete alineado ($\gamma = 0^\circ$). Como se ven en las figuras, a mayor ángulo de desalineamiento, mayor es la diferencia de distribución de la presión de película de un cojinete desalineado a la de uno alineado. La presión de película más alta se da en el centro de la longitud del cojinete ($\gamma = 0^\circ$), pero los picos mas altos de presión de película con el plano final se da en un cojinete desalineado.

Entre más grande sea el ángulo de desalineamiento, más cerca del plano final se ubica el pico de presión mas alto. También hay que tener en cuenta que la distribución de presión es relacionada con la orientación del desalineamiento del muñón en el cojinete. El valor típico de presión mas importante aparece en $\alpha = 0^\circ$, pero hay dos valores de pico de presión en $\alpha = 90^\circ$.

El valor del punto mas alto de la película de presión de un cojinete desalineado aumenta 10 veces o mas que la del cojinete alineado, cuando el ángulo de desalineamiento se incrementa a un valor ($\gamma = 0,01^\circ$ en la figura 19.3 y $\gamma = 0,03^\circ$ en la figura 19.4) que esta cerca del máximo (a la cual el muñón y el cojinete entran en contacto metal-metal).

Figura 19.5: Parámetros afectados por el desalineamiento.



Fuente Ídem

El espesor de película mínima (h_{min}), capacidad de carga F , ángulo de posición Φ , caudal que se fuga por los extremos Q , coeficiente de fricción μ_j , momento de desali-

neamiento M de un cojinete desalineado a diferentes ángulos de γ , de desalineamiento contra la relación de excentricidad ε_0 se muestran en la figura 19.5.

Cuando es mayor ε_0 , los demás parámetros se ven afectados de la siguiente manera: menor es el h_{min} , menor el μ_j , mayor F , mayor Φ , mayor el Q , y mayor el M . Esto se debe a que la distribución del espesor de película en el cojinete desalineado va cambiando. El espesor de película del cojinete alineado, es el mismo en la dirección axial del cojinete para una determinada coordenada angular, pero el espesor de película de un cojinete desalineado es diferente en la dirección axial del cojinete. El espesor de película mínima del alojamiento desalineado se encuentra en el plano final del cojinete.

γ tiene poca influencia sobre F , Φ , Q y μ_j pero tiene alguna influencia sobre Φ , Q y μ_j cuando el valor de ε_0 es pequeño. γ tiene mas influencia en F y Φ , cuando el valor de ε_0 , es grande. γ tiene mucha influencia en M ; cuando el valor de ε_0 , es mayor y a medida que crece γ , aumenta M .

Hay cambios evidentes en la distribución de película, en la presión de película, en la distribución del espesor de película, y el espesor mínimo de película cuando el desalineamiento del agujero del cojinete es causado por la deformación del eje. Cuando el ángulo de desalineamiento aumenta, la localización del punto más alto de presión se encuentra hacia el plano final del cojinete. El espesor mínimo de película se encuentra en el plano final del cojinete en el cojinete desalineado, el espesor de película disminuye al aumentar el ángulo de desalineamiento. La alineación tiene poca influencia sobre la capacidad de la carga, el ángulo de la posición, la fuga por los laterales, y el coeficiente de fricción, y entre mayor sea el ángulo desalineamiento, es mas evidente el aumento del desalineamiento cuando el valor de la relación de excentricidad es grande. Por lo tanto, con el fin de hacer los calculos reales del eje y del cojinete, se puede adquirir un diseño razonable en el mecanismo, los cuales incluyen al eje y al cojinete, y tambien se deben considerar los efectos en la interacciones entre los diferentes comportamientos mecánicos.

19.2. ESTUDIO Y SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LOS SISTEMAS ROTOR-COJINETE CON Y SIN DESALINEAMIENTO

19.2.1. Estabilidad en los sistemas rotor-cojinete

La principal consideración en el diseño de maquinaria rotatoria a altas velocidades es el control y la atenuación de las vibraciones forzadas que son las principales causas de la inestabilidad.

El diagnóstico más común de las fuentes de inestabilidad, en un sistema rotor-chumacera, es el latiguelo de aceite (oil whip), causado principalmente por la película del lubricante

que se forma en los cojientes[103]. El problema de la inestabilidad es muy costoso, debido a que implica una mayor cantidad de proyectos de ingeniería y rediseño, los cuales son necesarios para resolver este problema.

La inestabilidad dinámica en turbomaquinaria se caracteriza por vibración de alta amplitud que incrementa bruscamente con el aumento de la velocidad de operación y generalmente ocurre a frecuencias distintas de la velocidad de rotación del eje, por lo regular se presenta por arriba de la velocidad crítica (en una velocidad supercrítica). La inestabilidad rotodinámica se puede asociar con la variación de presión de algún fluido dinámico alrededor de una parte circunferencial del rotor. Las fuerzas desestabilizadoras que generan este tipo de vibraciones son creadas y controladas por el propio movimiento del sistema, de manera que cuando el movimiento cesa las fuerzas estabilizadoras desaparecen.

En las turbomáquinas, la inestabilidad rotodinámica es usualmente producida por fuerzas que son tangenciales a la rotación del rotor, actuando en la dirección del movimiento instantáneo, estas fuerzas son comúnmente llamadas fuerzas desestabilizadoras. Cuando la magnitud de ésta fuerza desestabilizadora es proporcional a la velocidad instantánea de rotación, entonces es clasificada como una fuerza de amortiguamiento negativo. Pero cuando la magnitud de esta fuerza es proporcional al desplazamiento del rotor, entonces esta es clasificada como una fuerza acoplada de rigidez. La mayoría de fuerzas desestabilizadoras en las turbomáquinas son representadas por coeficientes acoplados.

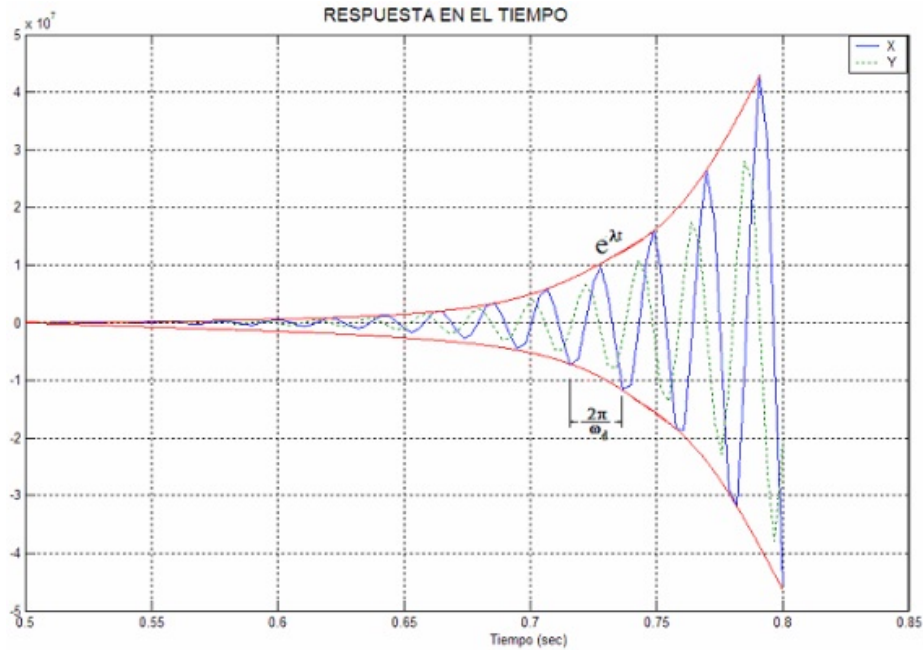
La palabra inestabilidad implica que el movimiento tiende a incrementar sin límite, y en ocasiones esto llega a ocurrir con consecuencias destructivas para la maquinaria. Cuando se detecta esta vibración se considera imposible incrementar la velocidad de la máquina.

Los problemas de rotodinámica se encuentran relacionados con máquina que presentan frecuencia síncronas, como es el caso del desbalance. Sin embargo la turbomaquinaria que no presenta frecuencias de vibración síncrona, es decir presenta frecuencias de vibración asíncronas, generalmente pueden ser divididas en tres clasificaciones:

1. Frecuencias de vibración supersíncronas, como las que ocurren por desalineamiento. (Generalmente la frecuencia es dos veces la velocidad del eje)
2. Frecuencias de vibración subsíncronas y supersíncronas debida a variaciones cíclicas de los parámetros, principalmente causados por rozamientos.
3. Frecuencia de vibración asíncronas (generalmente subsíncronas) en las que el rotor se vuelve inestable, típicamente se presenta cuando se ha alcanzado la velocidad umbral de inestabilidad. No es común.

Se debe aclarar que existen ocasiones en las que en el sistema se observan y toleran vibraciones asíncronas con amplitudes de vibración limitadas no destructivas. Pero estos casos deben ser observados constantemente ya que son pequeños avisos de inestabilidad que con cambios de las condiciones de operación se pueden convertir en vibraciones que pueden alcanzar un nivel destructivo.

Figura 19.6: Incremento de la amplitud en el tiempo, solución lineal en su condición inestable



Fuente Experimentación y análisis de estabilidad dinámica con y sin desalineamiento para el sistema rotor-chumacera, Raúl López, IMN, México D.F, 2006.

En términos matemáticos la inestabilidad dinámica es definida como la solución lineal de un sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento caracterizada por un valor propio complejo con parte real positiva **como se aprecia en la ecuación 2**. La parte real de un valor propio caracteriza el factor de crecimiento o decremento de la solución oscilatoria, mientras que la parte imaginaria caracteriza la frecuencia a la que ocurre dicha oscilación. En términos de la rotodinámica, la solución es una función, la cual describe la amplitud de vibración dependiente del tiempo. La figura a continuación muestra una solución inestable, en esta figura el movimiento asociado con la inestabilidad crece ilimitadamente al transcurrir el tiempo.

Para predecir si un sistema lineal es, o no es estable, existen varios criterios matemáticos pero en algunos casos como los sistemas de un grado de libertad, a partir de un simple rozamiento físico la estabilidad dinámica puede ser deducida y en los sistemas de dos o más grados de libertad una concepción física es útil pero generalmente no proporciona una interpretación completa del fenómeno.

Para dar solución a la ecuación homogénea de un sistema de masa resorte amortiguador,

$$M\ddot{z} + C\dot{z} + Kz = 0 \quad (19.13)$$

$$z(t) = Ae^{st} \quad (19.14)$$

donde A es una constante, z es la variable que tiene en cuenta los efectos de los desplazamientos angulares y laterales, aclarando que para nuestra investigación, según el sistema coordinado que se toma de manera general, se expresa como x que es lo mismo, pero respetando al autor de la tesis, en la recopilación de esta información se toma como z . Los valores de s que satisfacen la 19.13 del sistema masa-resorte-amortiguador, son los eigenvalores complejos conjugados. La parte real positiva del eigenvalor indicará que el movimiento del eje será inestable, con una amplitud que crecerá exponencialmente con el tiempo, mientras que A es determinado mediante una amplitud de perturbación inicial. Los eigenvalores derivados de la solución de la ecuación homogénea de un sistema rotordinámico, son las raíces del polinomio característico, y generalmente tiene la forma,

$$s = \lambda + i\omega_d, \text{ para } i^2 = -1 \quad (19.15)$$

Donde la parte real λ representa el exponente de amortiguamiento, y ω_d es la frecuencia natural amortiguada. Si $\lambda > 0$, el movimiento de perturbación crece exponencialmente con el tiempo y decimos que es inestable, de modo que $\lambda = 0$, define el umbral de estabilidad del sistema.

La parte imaginaria del eigenvalor complejo del sistema es la frecuencia natural amortiguada. La velocidad crítica puede ser obtenida cuando la frecuencia natural amortiguada ω_d , es igual a la velocidad de rotación del eje ω_{oper} .

El estudio realizado presenta la solución numérica de la ecuaciones de la sección anterior para los sistemas rotor-cojinete con y sin desalineamiento. Así pues, se debe destacar que la linealización realizada a las ecuaciones de movimiento, tienen un significado real, solo para movimientos pequeños alrededor del punto de equilibrio, la solución (inestable) que crecerá indefinidamente con el tiempo, pronto estará en un nuevo régimen el cual será gobernado por ecuaciones no lineales, de tal manera que la teoría de inestabilidad lineal puede predecir con alta precisión el comienzo, sin embargo esta no puede predecir la amplitud final del movimiento inestable ya que en este punto se convierte en un problema no-lineal.[107]

19.2.2. Solución y análisis numérico del Sistema Rotor-Cojinete sin desalineamiento

Para la solución planteada en este estudio, se expresan de forma matricial las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden para el sistema sin desalineamiento y se obtienen las matrices de rigidez $[K]$ de amortiguamiento $[C]$ y de inercia $[M]$ de dimensión 6×6 ,

$$[M]_{6 \times 6} \{\ddot{Z}\} + [C]_{6 \times 6} \{\dot{Z}\} + [K]_{6 \times 6} \{Z\} = 0 \quad (19.16)$$

La investigación de la Maestría estudiada para abordar este tema, propone transformar el sistema de 6 ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden a un sistema de 12 ecuaciones diferenciales de primer orden, que será:

$$[\bar{M}]_{12 \times 12} \{\dot{q}\} + [\bar{K}]_{12 \times 12} \{q\} = 0 \quad (19.17)$$

y la solución para esta, será:

$$\{q\} = [\Phi] e^{st} \quad (19.18)$$

y derivando se tiene,

$$\{\dot{q}\} = [s][\Phi] e^{st}, \quad (19.19)$$

donde $[s]$ representa la matriz diagonal de valores propios, y finalmente se sustituye la 19.18 y 19.19 en la ecuación 19.17 para formar:

$$[\bar{M}] ([s][\Phi] e^{st}) + [\bar{K}] ([\Phi] e^{st}) = 0 \quad (19.20)$$

o sea

$$e^{st} ([s][\bar{M}][\Phi] + [\bar{K}][\Phi]) = 0 \quad (19.21)$$

Ya que e^{st} nunca es cero cuando t tiene valor real, la única forma en que la función exponencial satisface la ecuación diferencial, es cuando se elige una $[s]$ como una raíz de la ecuación cuadrática, por tanto la solución que regirá la solución del sistema amortiguador-resorte-inercia será :

$$-[\bar{M}]^{-1}[\bar{K}][\Phi] = [\Phi][s] \quad (19.22)$$

Los valores de $[s]$ ocurren en pares de complejos conjugados y se conoce como el exponente de amortiguamiento, son los eigenvalores de $-\bar{M}^{-1}[\bar{K}]$, y los vectores, son los correspondientes eigenvectores $[\Phi]$, que será un vector de 12, representado con ello la forma modal. El sistema es estable solo si todos los eigenvalores tienen parte real negativa.

$$[s] = [\lambda + i\omega_d], \quad \text{para } i^2 = -1 \quad (19.23)$$

El criterio de estabilidad será el siguiente:

Si $\lambda < 0$, el movimiento es estable.

Si $\lambda > 0$, el movimiento es inestable.

Si $\lambda = 0$, define el umbral de estabilidad.

La solución del problema de eigenvalores se realiza de forma numérica mediante el programa MATLAB, el permitirá encontrar tanto $[s]$ como $[\Phi]$, para una frecuencia angular $\omega = cte$.

La investigación de la maestría realiza un análisis de la estabilidad y de la velocidad crítica del sistema rotor-cojinete sin tener en cuenta el desalineamiento, éste es analizado mediante el programa de MATLAB, que es detallado en los anexos. La solución se realiza en un intervalo de velocidad (ω), equivalente al arranque o al paro de una máquina, de

tal forma que realizando la simulación del sistema, se obtiene gráficas de estabilidad del sistema y diagramas de Campbell.

Mediante el programa específico para no desalineamiento se calcula la velocidad umbral y las velocidades críticas de configuraciones de bancos experimentales propuestos en la tesis de Maestría, a los que les será variado el peso que soporta el eje del sistema. El estudio presentará gráficas de este procedimiento y llegará a las siguientes conclusiones:

- La velocidad crítica de los sistemas rotor-cojinete, disminuye conforme aumenta el peso que soporta el eje rotor.
- El umbral de estabilidad dinámica disminuye en la medida que aumenta el peso, es decir, se adelanta.
- La rigidez se modifica, al variar la longitud del eje, entre los cojinetes del sistema. La velocidad umbral de estabilidad y la velocidad crítica de los sistemas estudiados, aumenta con el incremento de la rigidez del eje.
- El comportamiento de la velocidad umbral de estabilidad, tiende a no seguir creciendo con el aumento de la rigidez del eje.
- Se observa que la velocidad crítica, siempre aumenta, casi y en la misma proporción del aumento de rigidez del eje.

19.2.3. Solución y análisis numérico del Sistema Rotor-Cojinete con desalineamiento

Al igual que en el análisis sin desalineamiento, se expresan de forma matricial las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes constantes ($\omega_{oper} = cte$) contempladas en la sección anterior, correspondientes al sistema rotor-cojinete, y por tanto se obtienen las matrices de rigidez $[K]$, de amortiguamiento $[C]$, de efectos giroscópicos $[G]$ y de inercia $[M]$, de dimensión 12×12 .

Representado en forma matricial estas ecuaciones se tiene entonces:

$$[M]_{12 \times 12} \{\ddot{Z}\} + [C]_{12 \times 12} \{\dot{Z}\} + [K]_{12 \times 12} \{Z\} = 0 \quad (19.24)$$

Donde $\{Z\}$ es el vector de desplazamientos laterales y angulares. Luego se transforma el sistema de 12 ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden a un sistema de 24 de ecuaciones diferenciales de primer orden que será representado así:

$$[\bar{M}]_{24 \times 24} \{\dot{q}\} + [\bar{K}]_{24 \times 24} \{q\} = 0 \quad (19.25)$$

la solución propuesta para el anterior sistema será la ecuación 19.18

$$\{q\} = [\Phi] e^{st}$$

y siguiendo el procedimiento establecido para el sistema de ecuaciones sin desalineamiento, se obtiene:

$$-[\bar{M}]^{-1}[\bar{K}][\Phi] = [\Phi][s]$$

donde $[s]$ representa la matriz diagonal de valores propios y a diferencia del sistema de ecuaciones sin desalineamiento $[\Phi]$ es un vector de dimensión 24. que representa la forma modal y todos los eigenvalores, también deben tener su parte real negativa para que el sistema sea estable. $[s]$ se comportará será :

$$[s] = [\lambda + i\omega_d], \text{ para } i^2 = -1$$

donde el criterio de estabilidad, será igual al caso de no desalineamiento y por tanto será:

Si $\lambda < 0$, el movimiento es estable.

Si $\lambda > 0$, el movimiento es inestable.

Si $\lambda = 0$, define el umbral de estabilidad.

Se debe anotar que el desalineamiento asumido por el estudio, es un desalineamiento angular dinámico analizado a diferentes grados.

La solución al sistema de ecuaciones matriciales para el sistema con desalineamiento, se desarrolla con un programa en MATLAB, donde se obtienen gráficas que muestran la velocidad crítica, la velocidad umbral y los diagramas respectivos de Cambell. El estudio llega a las siguientes conclusiones:

- La velocidad crítica de los sistemas rotor-cojinete, disminuye conforme aumenta el peso que soporta el eje.
- El umbral de estabilidad dinámica disminuye a medida en que aumenta el peso que soporta el eje.
- La velocidad umbral de estabilidad y la velocidad crítica de los sistemas aumenta con el incremento de la rigidez del eje.
- El desalineamiento no tiene influencia en las velocidades críticas de un sistema rotor-cojinete, ya que cualquier variación del desalineamiento no aumenta ni disminuye la velocidad crítica del sistema.
- La velocidad umbral de estabilidad dinámica aumenta, es decir el umbral se pospone, en la medida en que incrementa el desalineamiento angular dinámico. Para realizar los análisis de velocidad, la carga debida la peso se mantiene. En un caso específico de una configuración, se observa que al incrementar 10 veces el desalineamiento, provoca que la velocidad umbral de estabilidad aumente alrededor de 4.8%, es decir, para un desalineamiento de 9,8 veces, equivale a que el umbral se posponga 224.8 $[rpm]$

19.2.4. Comparación numérica entre los sistemas rotor-cojinetes Con y Sin Desalineamiento

Ya obtenido el análisis de manera individual de los dos modelos matemáticos mediante gráficas de la velocidad umbral de estabilidad y de la velocidad crítica de los sistemas, para diferentes parámetros como la carga debida al peso y la rigidez del sistema, el estudio realiza una comparación de estos modelos.

La comparación en una primera instancia, llega a la conclusión de que el desalineamiento angular en los cojinetes de un sistema rotor-cojinete, no influye en la velocidades críticas del sistema, ya que los resultados de un modelo sensible al desalineamiento, muestran resultados idénticos al modelo que no considera el desalineamiento, por tanto la velocidad crítica no depende del desalineamiento. Se observa también, que la velocidad crítica disminuye al aumentar la carga debida al peso y aumenta cuando lo hace la rigidez.

Como segunda instancia los modelos matemáticos del sistema con y sin desalineamiento, presentan diferencias muy marcadas, en lo que respecta al umbral de estabilidad. La investigación realizada muestra que el comportamiento de la velocidad umbral de estabilidad vs. la carga debida al peso, es cualitativamente igual, ya que los dos disminuyen conforme aumenta el peso. Sin embargo, evaluando estos dos aspectos de manera cuantitativa los valores de la velocidad umbral son diferentes debido a que el sistema que considera el desalineamiento, predice que la velocidad umbral de estabilidad es mayor que el sistema que no considera el desalineamiento. Por tanto, el desalineamiento pospone la velocidad umbral de estabilidad dinámica, que experimentalmente tienen una diferencia de 505 rpm.

Por otro lado, el estudio muestra que al variar la rigidez del eje del sistema, la velocidad umbral de estabilidad varía para ambos sistemas de manera cercana y que en un eje flexible, existe mayor desalineamiento debido a que el eje presenta mayor deflexión ocasionando que la velocidad umbral de estabilidad se encuentre por arriba del sistema que no considera el desalineamiento.

BIBLIOGRAFÍA

- [102] SK GUHA. Analysis of steady-state characteristics of misaligned hydrodynamic journal bearings with isotropic roughness effect. *Tribology International*, 33(1):1–12, 2000.
- [103] LÓPEZ Ruíz R.A. GÓMEZ Mancilla J. Influencia del desalineamiento en maquinaria rotatoria soportada por chumaceras hidrodinámicas. *Revista, Escuela de ingeniería mecánica, Instituto Politecnico Nacional*, 2005.
- [104] J.Y.U.H. JANG and C.C. CHANG. Adiabatic solutions for a misaligned journal bearing with non-newtonian lubricants. *Tribology international*, 20(5):267–275, 1987.
- [105] J. JUN, Sun, G. CHANG-LIN, and LI ZHEN. A review of crankshaft strength analysis for internal combustion engine [j]. *Transactions of CSICE*, 20(2):170–184, 2002.
- [106] J. SUN and G. CHANG-LIN. Hydrodynamic lubrication analysis of journal bearing considering misalignment caused by shaft deformation. *Tribology international*, 37(10):841–848, 2004.
- [107] J.M. VANCE. *Rotordynamics of turbomachinery*. Wiley-Interscience, 1988.
- [108] D. VIJAYARAGHAVAN and TG KEITHJr. Effect of cavitation on the performance of a grooved misaligned journal bearing. *Wear*, 134(2):377–397, 1989.
- [109] SZ WEN and P. HUANG. Tribology theory. *Tsinghua University Book Concern, Beijing*, pages 398–470, 1991.

Capítulo 20

LUBRICACIÓN TURBULENTO

En la teoría de lubricación de Reynolds, el flujo es asumido como laminar. Sin embargo, debido a las altas velocidades en los cojinetes alcanzadas en los últimos años, el flujo frecuentemente se comporta como turbulento. En este caso, la resistencia cortante y la generación de calor en la película de fluido incrementa notablemente, y lo que es peor, el caudal de aceite disminuye. Estos son grandes problemas para los cojinetes. Sobre la turbulencia en cojinetes, desde el trabajo experimental de Wilcock's, muchos estudios se han realizado. La mayoría de análisis desarrollados en el pasado son basados en la hipótesis de longitud mixta de Prandtl y actualmente las investigaciones se basan en el análisis con el modelo de $\kappa - \varepsilon$.

A lo largo de esta sección se ahondará en el parámetro de la turbulencia y como afecta a el comportamiento no lineal del cojinete hidrodinámico y finalmente se señalará algunas características del flujo transitorio que da lugar entre el flujo laminar y el flujo turbulento, este flujo transitorio también es conocido como flujo con vórtice de Taylor.

La turbulencia es un gran problema en un fluido encerrado. Aunque un fluido de este tipo es similar en su forma a los cojinetes hidrodinámicos, éste difiere en el gradiente de presión axial y por lo tanto la velocidad axial del flujo es grande en un fluido encerrado [113]. En este tipo de fluido, tanto la velocidad de rotación y los gradientes de turbulencia son los causantes de la turbulencia.

En la fina película de fluido, se sabe que la transición de flujo laminar a turbulento tiene lugar cuando el número de Reynolds Re alcanza un valor aproximado de 1000, donde Re es definido por:

$$Re = \frac{Uc}{\nu} \approx 1000 \quad (20.1)$$

Si el cojinete es grande, 600 [mm] de diámetro y 0,6 [mm] de claro radial, considerando un generador a vapor, y la viscosidad cinética de el aceite usado es 25 [cSt], la velocidad de transición del eje para el cambio de flujo laminar a turbulento se calcula en 1326 [rpm]. Debido a que la velocidad de rotación es generalmente 3000 o 3600 [rpm], el flujo en la película de fluido llega a ser turbulento muy fácilmente. En estudios experimentales aparecen los flujos turbulentos antes de los vórtices de Taylor cuando se establece un número

de Reynolds que excede los 2000. Cuando los vórtices se desarrollan primero, la turbulencia empieza a aparecer con valores bajos de Reynolds. En la mayoría de los cojinetes hidrodinámicos la turbulencia se establece un poco después del desarrollo de vórtices; y debido a que la transferencia de momentum por turbulencia domina, las teorías de lubricación por turbulencia desprecian los efectos de los vórtices de Taylor.

De forma general, cuando se asume flujo laminar se trabaja con cojinetes cuyo claro radial es pequeño, del orden de 10^{-3} [in/in], y son lubricados con aceites de hidrocarburos cuya viscosidad cinemática es alta, del orden de 10^{-2} a 10^{-1} [in²/sec] [113]. Sin embargo la situación será muy diferente en el caso de alta velocidad de rotación, donde la lubricación se realiza con metales líquidos u otros lubricantes de baja viscosidad. Por tanto, la combinación de baja viscosidad cinemática y altas velocidades de operación dan como resultado un flujo no laminar en la película del cojinete. Lo anterior se ilustra en la tabla a continuación, que muestra la velocidad a la cual sucede la transición a flujo turbulento para una carga ligera en un cojinete plano de 4 in de diámetro. El inicio de la turbulencia ocurrirá cuando la película de fluido alcanza un número de Reynolds de 1500 [113].

Figura 20.1: Comparación del establecimiento de la turbulencia para varios lubricantes

LUBRICANTE	Viscosidad Cinemática $\left[\frac{\text{in}^2}{\text{seg}}\right]$	Velocidad para establecer el desarrollo turbulento [rpm]
Agua —80 [°F]	1.33×10^{-3}	2700
Aceite SAE 10—150 [°F]	2.16×10^{-2}	60200
Potasio —1200 [°F]	3.31×10^{-4}	920
Sodio —1200 [°F]	3.86×10^{-4}	1072
Aceite de Silicona —0.65 [cs]	1.01×10^{-3}	2820
Aire—80 [°F]	2.52×10^{-2}	70400
Mercurio—400 [°F]	1.2×10^{-4}	336

Fuente STEADY-STATE AND DYNAMIC PROPERTIES OF JOURNAL BEARINGS IN LAMINAR AND SUPERLAMINAR FLOW REGIMES, Prepared under Contract No. NASw-1021 by MECHANICAL TECHNOLOGY INCORPORATED Latham, N.Y. for NASA, F. K. Orcutt and C. W. N-g, 1967.

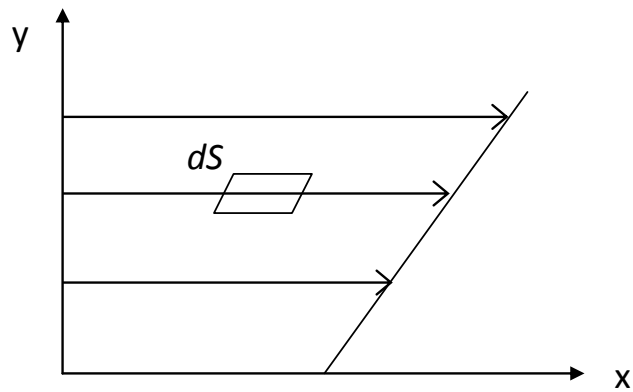
20.1. ECUACIÓN DE TIEMPO-PROMEDIO DE MOVIMIENTO Y EL ESFUERZO DE REYNOLDS

Para este estudio, se considera un flujo cortante turbulento, con un perfil como se muestra en la figura 20.2. Se asume un flujo promedio paralelo al eje x. En un flujo turbulento, los remolinos del fluido de varios tamaños van y vienen violentamente entre las capas de las diferentes velocidades y así producen un cambio en el momentum. La resistencia al corte es alcanzada como resultado de esto, algo similar a la resistencia viscosa de un gas que surge como resultado del cambio del momento por el movimiento molecular. En un fluido turbulento, sin embargo, el cambio de momentum por los remolinos

del fluido es muy grande, lo que ocasiona que la resistencia al corte sea muy grande. Este fenómeno se examina a continuación y puede ser detallado en las referencias.

Mientras que la resistencia al corte de un fluido turbulento es la suma de las resistencias por **el intercambio de momentum** y debido a **la viscosidad del fluido**, este último es usualmente pequeño y puede despreciarse en comparación con el primero. Sin embargo, en los alrededores de **una pared sólida**, el intercambio de momento es pequeño y la contribución de viscosidad empieza a ser significativa.

Figura 20.2: Esfuerzo de Reynolds



Fuente Hydrodynamic lubrication, Hori, Y., Springer Verlag (2006)

El esfuerzo cortante de turbulencia debido al intercambio por remolinos es obtenido como se describe a continuación y aunque el esfuerzo cortante de turbulencia es una cantidad no estable en la naturaleza, aquí sólo el **tiempo promedio** será considerado porque satisface la mayoría de las necesidades que se presentan en la práctica.

En el caso de flujo turbulento, los componentes de velocidad u y v y la presión p de un pequeño volumen de fluido pueden expresarse como la suma de sus tiempos promedios (parte estable) y fluctuaciones (parte inestable) como las siguientes:

$$u = \bar{u} + u' \quad v = \bar{v} + v' \quad p = \bar{p} + p' \quad (20.2)$$

donde las expresiones $\bar{()}$ muestran el promedio de tiempo o la parte estable, y $(')$ indican la parte no estable. Dado que el tiempo promedio de la parte no estable es cero, y el tiempo promedio del flujo se asume paralelo al eje axial x , las siguientes relaciones se obtendrán:

$$\bar{u}' + \bar{v}' + \bar{p}' = 0 \quad (20.3)$$

Ahora, se considera un área pequeña dS en el fluido. dS es perpendicular al eje y como se muestra en la figura 20.2. El volumen del fluido que pasa a través de dS en dirección positiva de y durante un intervalo de tiempo dt es $v \cdot dS \cdot dt$. La componente x del momentum en el volumen de fluido es $\rho \cdot u \cdot v \cdot dS \cdot dt$, así pues, el flujo del momentum por unidad

de área y de tiempo, es equivalente a $\rho u v$. Esto da el esfuerzo cortante turbulento, con el signo cambiado:

$$\tau = -\rho \overline{u'v'}$$

El signo negativo de la ecuación anterior viene del signo común utilizado para el el esfuerzo cortante y si se considera el tiempo promedio del esfuerzo cortante turbulento como τ_t , éste se puede escribir a partir de 20.2 y 20.3 como:

$$\tau_t = -\rho(\bar{u} + u')v' = -\rho \overline{u'v'} \quad (20.4)$$

Cuando se traza una línea horizontal sobre cada símbolo se esta indicando el tiempo promedio. Así que, el esfuerzo cortante turbulento es dado por la correlación de las partes no estables de la velocidad del fluido. Esta idea fue propuesta por Reynolds y por tanto la ecuación anterior es llamada ESFUERZO DE REYNOLDS.

Ahora considerando el signo de τ_t . En el caso de un flujo cortante donde $d\bar{u}/dy > 0$, es conocido que en práctica, si $v' > 0$ entonces $u' < 0$ y si $v' < 0$ entonces $u' > 0$. Por lo tanto, la probabilidad de que $u'v' < 0$ es muy alta, y $\overline{u'v'}$ se convierte en negativa. Así que, τ_t es positivo cuando $d\bar{u}/dy > 0$,

Si ahora se considera el tiempo promedio de la ecuación de Navier-Stokes esto lleva a una derivación general del esfuerzo de Reynolds. Como primer paso, se escribe la ecuación de Navier-Stokes en la dirección x y en la dirección y como se indica a continuación, donde τ_{ij} representa la componente del esfuerzo actuante sobre el plano i en dirección j :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (20.5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (20.6)$$

Como siguiente paso, se multiplica la ecuación de continuidad para un fluido incomprensible por ρ y u para obtener la siguiente ecuación:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

Usando esta relación, la ecuación 20.5 en la dirección x es reescrita como:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial(uu)}{\partial x} + v \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$$

Considerando el tiempo promedio de la anterior ecuación y usando las relaciones, $u = \bar{u} + u'$, $v = \bar{v} + v'$, $p = \bar{p} + p'$, $\overline{uu} = \overline{u\bar{u}} + \overline{u'u'}$ y $\overline{uv} = \overline{u\bar{v}} + \overline{u'v'}$ la ecuación quedará:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} - \rho \overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} - \rho \overline{u'v'})$$

Retornando al lado izquierdo de esta ecuación, volvemos a la ecuación 20.5 y con la ayuda de:

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = 0$$

que es obtenida de la ecuación de continuidad $\partial \bar{u} / \partial x + \partial \bar{v} / \partial y = 0$, se tiene como resultado la siguiente ecuación:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial (\bar{u})}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial (\bar{u})}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_{xx}^- - \rho \overline{u' u'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_{yx}^- - \rho \overline{u' v'} \right)$$

Este es el tiempo promedio de la ecuación de Navier-Stokes, la **ecuación de movimiento de tiempo promedio** de la parte estable de un flujo turbulento (flujo de tiempo promedio). Si ésta es comparada con la ecuación de Navier-Stokes (20.5), aparecerán dos nuevos términos al lado derecho de la ecuación $-\rho \overline{u' u'}$ y $-\rho \overline{u' v'}$. Estas expresiones son los esfuerzos de Reynolds. (Reynolds 1895).

Una ecuación similar puede ser obtenida también en la dirección y .

Las ecuaciones de tiempo promedio en las direcciones y y x se mencionan a continuación de manera conjunta, donde las "overbars" (las rayas encima) indican las partes estables que son omitidas por simplicidad.

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_{xx} - \rho \overline{u' u'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_{yx} - \rho \overline{u' v'} \right) \quad (20.7)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_{xy} - \rho \overline{v' u'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_{yy} - \rho \overline{v' v'} \right) \quad (20.8)$$

Por lo tanto, las **ecuaciones de movimiento de tiempo promedio** de un flujo turbulento incluyen los esfuerzos de Reynolds, es decir, los términos de correlación de las fluctuaciones en la velocidad mostrados al lado derecho de las ecuaciones, y, en el caso de las anteriores ecuaciones, son los cuatro términos mostrados a continuación, ya que de simetría, sin embargo, sólo tres de los términos son diferentes uno de otro.

$$(-\rho \overline{u' u'} - \rho \overline{u' v'} \quad -\rho \overline{v' u'} \quad -\rho \overline{v' v'})$$

De estos esfuerzos de Reynolds, el esfuerzo normal $-\rho \overline{u' u'}$ y $-\rho \overline{v' v'}$ son presiones aparentes, y su influencia es usualmente despreciable. De estos esfuerzos es de gran importancia el esfuerzo cortante $-\rho \overline{v' u'}$ que coincide con la ecuación 20.4.

20.2. REDUCCIÓN DE LA FRICCIÓN EN UN COJINETE TURBULENTO BAJO EL EFECTO DE TOM

El gran esfuerzo de corte y la alta generación de calor que se presenta en la película de fluido son los mayores problemas en un cojinete turbulento. En el flujo de tuberías, por

otro lado, la marcada reducción en la resistencia del flujo turbulento de agua mediante la adición de pequeñas cantidades de un polímero de cadenas largas y de alto peso molecular se conoce como el efecto Tom. Ya que es conocido que el efecto de Tom es más poderoso en tuberías de diámetro más pequeño, existe una reducción considerable en la fricción de un cojinete turbulento que puede ser esperada si este fenómeno es aplicado para la delgada película de un cojinete[111].

Se ha reportado que en experimentos usando una solución acuosa de hidroxietilcelulosa o poliacrilamida del orden de ppm entre dos cilindros concéntricos (claro de 1mm), la fricción turbulenta para el flujo de Couette fue reducida, y que, en el caso de dos cilindros concéntricos, se observó incluso una gran reducción en la fricción para grandes excentricidades. también se reportó que una reducción similar en fricción fue observada en agua usando una solución acuosa de óxido de polietileno en claros radiales muy pequeños, pero el efecto se perdió después de sólo 20 circulaciones de la solución.

Lo que se muestra en esta sección son los resultados experimentales del efecto de Tom bajo condiciones de cierre de un cojinete actual y se compara estos resultados con los hallados según el modelo de $k - \epsilon$. Este efecto de Tom tendrá que ver exclusivamente para fluidos en tubería y no para los efectos que se presente en los cojinetes hidrodinámicos, pero es una condición que para la fricción en conductos debe ser tenida en cuenta.

20.3. VÓRTICES DE TAYLOR

El fluido de la holgura entre dos cilindros concéntricos empieza a ser inestable cuando la velocidad de rotación del cilindro interior alcanza una velocidad crítica, mientras que el cilindro del exterior se encuentra en reposo, cuando se alcanza este punto crítico de velocidad, el fluido empieza a exhibir una serie de anillos de vórtices espaciados regularmente alrededor del cilindro interior. Estos son llamados Vórtices de Taylor y ha sido conocido como un fenómeno muy interesante a lo largo de los años. A continuación se muestran algunas características acerca de los vórtices de Taylor:

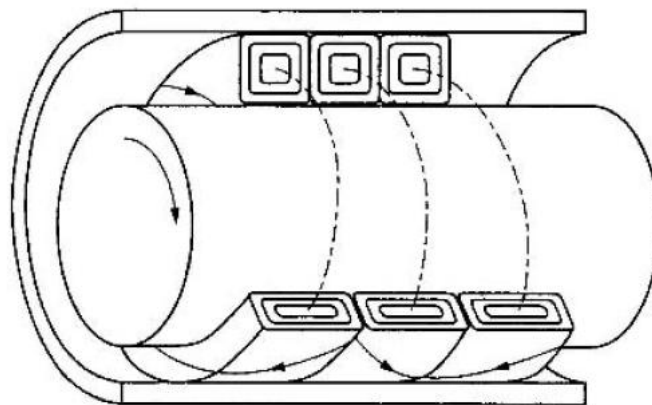
1. La velocidad crítica para que se originen los vórtices de Taylor, esta dada por: $U_i c / \nu > 4,13\sqrt{Ri/c}$. Donde Ri es el radio del cilindro interior, U_i es la velocidad del interior del cilindro, c es el claro entre los dos cilindros, y ν es el coeficiente de viscosidad cinética.
2. El campo ocupado por los vórtices de Taylor en la dirección axial (ancho de vórtice) es aproximadamente igual al claro de los dos cilindros. Incrementos adicionales en la velocidad del cilindro interno, contribuyen a completar la turbulencia del fluido.

En otras palabras, los vórtices de Taylor aparecen en la región de transición entre el flujo laminar y el turbulento. Los vórtices de Taylor pueden desarrollarse también en los cojinetes de película de aceite, pero su situación es diferente de la usual ya que en los cojinetes hidrodinámicos no existe la concetricidad. Aunque muchos experimentos y estudios

teóricos se han realizado sobre los vórtices para un fluido estable entre dos cilindros concéntricos, no mucho se ha hecho para un fluido entre dos cilindros excéntricos. Algunos artículos relevantes son listados en las referencias.

En este apartado, los resultados de la visualización experimental de los vórtices de Taylor entre dos cilindros concéntricos será descrito. Las especificaciones del aparato experimental son: diámetro de cilindro interno (journal) 152 [mm], diámetro interior del cilindro transparente (bearing) 152 [mm], longitud de la sección del cilindro interno 152 [mm], y el coeficiente de viscosidad cinética del fluido (base de aceite) $9,4 \times 10^{-6} \frac{m^2}{seg}$ ($a 30 [^{\circ}C]$). Copos de aluminio son suspendidos en el fluido para poder visualizar el fenómeno.

Figura 20.3: Vórtices de Taylor entre dos cilindros excéntricos



Fuente *Ídem*

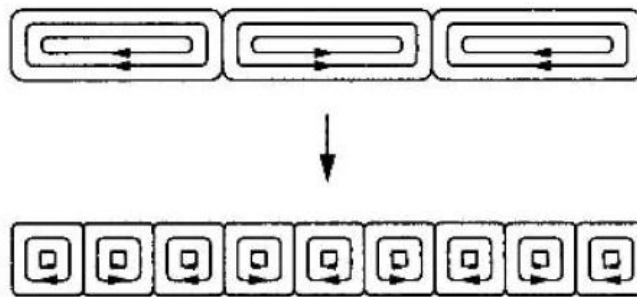
Las siguientes características fueron observadas con el incremento en la velocidad rotacional del cilindro interno:

1. En una determinada velocidad crítica de rotación, el flujo fue laminar hasta que empezó a ser inestable en los alrededores de la máxima holgura y los vórtices de Taylor se desarrollaron allí. El campo de los vórtices será igual a la holgura radial en esa posición (la holgura máxima en este caso). Los vórtices de Taylor no existirán todavía en el dominio de la holgura pequeña.
2. Con incrementos adicionales en la velocidad de rotación del cilindro interior, el dominio de diferenciales inestables hacia áreas de la holgura más pequeña se presentan y los vórtices de Taylor se extenderán al interior de ésta holgura formando por completo los anillos de los vórtices de Taylor alrededor del cilindro interior. La inspección de un vórtice desde una posición de holgura máxima hacia una posición de holgura mínima revela que el vórtice se aplana y se ensancha gradualmente en su campo. La figura 20.3, muestra la situación. El vórtice se aplana y ensancha en la posición de mínima holgura.

- Sin embargo, no es muy natural que, cuando la excentricidad del radio es grande, los vórtices de Taylor sean muy planos y anchos en el área de mínima holgura, porque el campo de desarrollo de estos vórtices tienden a estar más cerca a ser equivalente a la holgura de los dos cilindros (la holgura mínima en este caso). Por lo tanto, un vórtice que se ha convertido en un vórtice muy plano de varias ramas es más estable, son vórtices más delgados, y el campo de desarrollo es cercano a ser equivalente a la holgura (estabilidad local). Esta situación se muestra en la figura 20.4 .

Si se asume que el fluido genera dos vórtices contiguos moviéndose en la misma dirección en la frontera, esto lleva a la conclusión que una rama del vórtice en el interior genera por lo menos tres vórtices, y en general un número impar de vórtices, como se muestra en la figura a continuación.

Figura 20.4: Ramas de los vórtices de Taylor



Fuente *Ídem*

- Cuando se ramifican los vórtices de Taylor, estos se originan con espacios mínimos entre ellos y se ramifican en varios vórtices, lo que indica que el fluido está pasando por la zona de holgura mínima. Los vórtices que se ramifican se volverán a fusionar a medida que avanzan a lo largo del cilindro hasta que finalmente retornen a su estado original cuando llegan a la zona de máxima holgura. La ramificación y fusión puede ocurrir de forma irregular, ocasionando vórtices con algo de disturbios. Basados en las observaciones anteriores, se puede concluir que el flujo en medio de dos cilindros excéntricos bajo una lubricación hidrodinámica puede presentar vórtices de Taylor cuando se cumplen las consideraciones necesarias, como la de elevada velocidad en el rotor.

20.4. MODELOS DE FLUJO TURBULENTO

El tiempo promedio de flujo turbulento puede ser obtenido de la solución simultánea de las ecuaciones 20.7 y 20.8, sin embargo, si la fluctuación de la velocidad es desconocida, el esfuerzo de Reynolds $\tau_t = -\rho \overline{u'v'}$ no puede ser calculado. Por lo tanto, es necesario algunas cosas adicionales para resolver las ecuaciones 20.7 y 20.8.

Si las ecuaciones 20.5 y 20.6 (ecuaciones de Navier-Stokes) son usadas junto con las ecuaciones 20.7 y 20.8, la fórmula para el esfuerzo de Reynolds puede ser derivada. Sin embargo, nuevas incógnitas tal como correlaciones de tercer orden de fluctuación y otras correlaciones, incluyendo la fluctuación de la presión, aparecen en la fórmula, y si operaciones similares son repetidas para obtener ello, nuevas incógnitas aparecerán cada vez, y el sistema de ecuaciones nunca finalizará. Por lo tanto para resolver las ecuaciones 20.7 y 20.8, ciertas suposiciones deben ser hechas para reducir el número de incógnitas de modo que el sistema de ecuaciones cierre. Las suposiciones hechas para este propósito en la estructura de la turbulencia, forman el modelo de turbulencia.

Típicamente el modelo de turbulencia incluye: (1) el modelo de longitud mixta (mixing length) y (2) el modelo de $k - \varepsilon$ (k = ecuación de energía turbulento, ε = flujo perdido turbulento). Cuando el gradiente de presión no es muy grande (es decir, en el caso de los cojinetes que la relación de excentricidad es pequeña), el modelo de longitud mixta será suficiente; cuando el gradiente de presión es muy grande y se plantea flujo inverso en la película de fluido (es decir, en el caso de los cojinetes la relación de excentricidad es grande), ya que el gradiente de presión afecta la estructura de turbulencia, es necesario usar un modelo más fundamental como lo es el modelo de $k - \varepsilon$

20.5. MODELO DE LONGITUD MIXTA (MIXING LENGTH MODEL)

Se asume que un remolino que está realizando violentos movimientos irregulares en un flujo turbulento viaja cierta distancia y se mezcla con el líquido al final del recorrido, lo que resulta en un cambio de momentum. La distancia promedio de movimiento se conoce como la *longitud mixta* y se representa por l . $|u'|$ es la magnitud de las fluctuaciones de la velocidad en la dirección x y son del orden de $l|du/dy|$. $|v'|$ es la magnitud de las fluctuaciones de la velocidad en la dirección y , y puede ser del mismo orden de magnitud que $|u'|$. Esto es debido a que u' y v' son producidos por el movimiento del mismo remolino, esto es

$$|u'| \approx |v'| \approx l \left| \frac{du}{dy} \right|$$

cuando $du/dy > 0$, donde $\overline{u'v'}$ es negativo, mediante el uso de la ecuación anterior se obtiene:

$$\overline{u'v'} \approx -|u'| |v'| \approx -l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

Por lo tanto, el esfuerzo de Reynolds (esfuerzo de corte del flujo turbulento) $\tau_t = -\rho \overline{u'v'}$ puede ser escrito como sigue

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (20.9)$$

O, si consideramos el signo

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy} \quad (20.10)$$

La aproximación descrita arriba es llamada **modelo de longitud mixta de Prandtl** (Prandtl 1925)

Si τ_t se expresada después de los esfuerzos viscosos, en la forma de:

$$(\text{coeficiente}) \times (\text{gradiente de velocidad media de flujo turbulento})$$

la ecuación 20.10 quedará:

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{du}{dy}$$

Aunque μ_t es llamado **coeficiente de viscosidad turbulento**, es claramente una cantidad que depende de la estructura interna de la turbulencia, y no es constante.

La longitud de mezcla l es una cantidad desconocida que depende de la distancia al muro, el gradiente de velocidad, etc. y es dado por una fórmula empírica. En medio de varias fórmulas propuestas, la más simple es asumir que la longitud de mezcla l es proporcional a la distancia de la pared, esto es

$$l = K_k y \quad (20.11)$$

donde y es la distancia al muro y K_k es la constante de proporcionalidad llamada constante de Kármán.

La distribución de velocidad en la capa límite de flujo turbulento en este caso es calculado de la siguiente forma. El esfuerzo superficial de cortante τ_w se asume como constante en los alrededores del muro, es decir, $\tau_t = \tau_w = \text{constante}$. Entonces la ecuación 20.9 puede ser escrita como

$$\frac{\tau_w}{\rho} = (K_k y)^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

adicionalmente se puede reescribir como

$$\frac{du}{dy} = \frac{u^*}{K_k y} \quad (20.12)$$

donde $u^* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ es una cantidad con dimensiones de velocidad y es llamada **velocidad de fricción**. Integrando la ecuación 20.12 obtenemos la distribución de presión

$$u = \frac{u^*}{K_k} \ln y + C$$

que es llamada la **ley logarítmica** de la distribución de velocidad.

La siguiente fórmula es una modificación de la ecuación 20.11, que tiene en cuenta la anisotropía¹ de los remolinos inmediatamente después de la frontera.

$$l = K_k y \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right) \right]$$

esta es llamada la fórmula de van Driest

20.5.1. Teoría de la lubricación turbulenta usando el modelo de longitud mixta

La lubricación hidrodinámica en un cojinete y un fluido sellado es considerado usando un modelo modificado de longitud mixta.

Modelo modificado de longitud de mezcla

La película de fluido en un cojinete o la película de fluido encerrado es tan delgada que la influencia de la subcapa de viscosidad en la vecindad inmediata del muro no puede ser ignorada en el caso de flujo turbulento. Para hacer frente a las turbulencias de forma sistemática, a partir de una zona de turbulencias a la subcapa viscosa de n modelo de longitud de mezcla, se introduce un modelo de longitud de mezcla modificado.

Si el esfuerzo cortante es considerado como la suma del esfuerzo cortante viscoso y el esfuerzo cortante turbulento de la ecuación 20.10, el esfuerzo total τ se puede escribir como

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

Si la ecuación se convierte en adimensional usando la velocidad de fricción $u^* = \sqrt{\tau_w/\rho}$

$$\tau^+ = \frac{\partial u^+}{\partial y^+} + l^{+2} \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2 \quad (20.13)$$

es obtenida, donde

$$\tau^+ = \frac{\tau}{\tau_w}, \quad u^+ = \frac{u}{u^*}, \quad l^+ = \frac{u^* l}{\nu}, \quad y^+ = \frac{u^* y}{\nu}$$

Para describir la longitud de mezcla, se usa la fórmula de Van Driest. Esta se puede escribir de forma adimensional de la siguiente manera

$$l^+ = K_k y^+ \left[1 - \exp\left(-y^+/A^+\right) \right] \quad (20.14)$$

donde $K_k = 0,4$ y $A^+ = Au^*/\nu = 26$

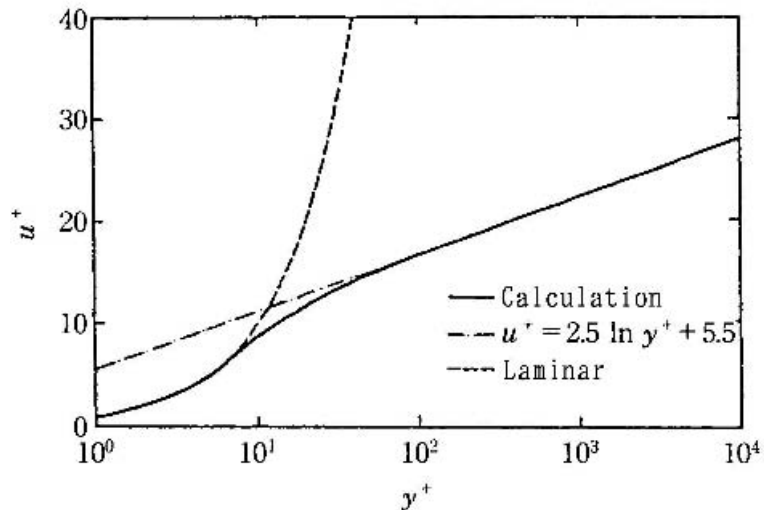
¹f. Fís. Cualidad de un medio, generalmente cristalino, en el que alguna propiedad física depende de la dirección de un agente.

para expresar la ecuación 20.13 aproximadamente en la forma de la ecuación 20.9 por conveniencia para la facilidad de cálculo, se propone una longitud de mezcla modificada

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4l^{+2}}} \quad (20.15)$$

Ahora se consideran las ecuaciones 20.14 y 20.15 en la vecindad contigua a la superficie del muro, de la ecuación 20.14 se obtiene que $l^+ \approx 0$ ya que y^+ es suficientemente pequeña. Por tanto, de la ecuación 20.15 obtenemos $(\partial u^+ / \partial y^+) = 1$ y por lo tanto $u^+ = y^+$. Esto expresa la distribución de velocidad en esta subcapa. En una región suficientemente lejana a el muro, $\exp(-y^+/A^+) \approx 0$ porque y^+ es muy grande, por lo tanto de la ecuación 20.14 obtenemos que $l^+ = K_k y^+$ y debido a que y^+ es grande, de la ecuación 20.15 tenemos $(\partial u^+ / \partial y^+) \approx 1/(K_k y^+)$. Integrando estas ecuaciones con respecto a y^+ se produce $u^+ = (1/K_k) \ln y^+ + \text{constante}$. Esto da la distribución de velocidad en la región logarítmica. De la discusión anterior resulta que la distribución de la velocidad obtenida que a partir ecuación 20.15 está bien expresada, no sólo en la subcapa viscosa, sino también en la región logarítmica.

Figura 20.5: Distribución de velocidad cerca de la superficie del muro



Fuente *Ídem*

entonces, introduciendo la longitud mixta modificada

$$l_m^+ = \frac{1 + \sqrt{1 + 4l^{+2}}}{2}$$

y examinando

$$\tau^+ = l_m^{+2} \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2 \quad (20.16)$$

se demuestra que es la misma ecuación 20.10, y se debe aplicar en la región de $\tau^+ \approx 1$. La figura 20.5 muestra la distribución de velocidad carga de la superficie del muro calculada usando la ecuación 20.16 con $\tau^+ = 1$. En la figura, los resultados calculados están de acuerdo a la fórmula empírica $u^+ = y^+$ en la subcapa de la viscosidad, y la fórmula empírica logarítmica $u^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5$. Esto muestra que es válida la longitud mixta modificada l_m^+ .

Hasta ahora sólo es considerado el flujo en una sola dirección, se supone que la misma longitud mixta modificada es aplicable también para el flujo en dos dimensiones.

Diversas fórmulas se proponen para la longitud mixta modificada, por ejemplo, se propone de la forma $l_m = ay$, con el coeficiente de modificación de Aoki y Harada.

$$a(y^+) = \frac{1}{y^+} + \frac{Ay^+}{1 + By^+} \quad (20.17)$$

Comparando con la distribución de velocidad conocida se determinan las constantes de la fórmula: $A = 0,016$ y $B = 0,04$

Distribución de velocidad con turbulencia entre dos superficies

La diferencia entre una película turbulenta en relación a una película encerrada, es que la turbulencia se lleva a cabo en un espacio semi-infinito y la otra se lleva a cabo entre dos superficies. Un flujo turbulento entre dos superficies con una distancia pequeña es considerada como se muestra en la figura 20.6. Para un sistema de coordenadas, los ejes x y z se toman en una de las superficies y el y se toma en la dirección del espesor.

Por simplicidad, dividimos la holgura en dos dominios, dominio 1 ($0 < y < y_m$) y el dominio 2 ($y_m < y < h$). Se pueden asumir que el flujo en el dominio 1 es influenciado únicamente por la superficie 1 y el flujo 2 influenciado sólo por la superficie 2. En otras palabras, se asume que la velocidad flujo en la dirección mixta puede ser calculada independientemente en las superficies 1 y 2. Estas dos cantidades deben ser continuas en el borde $y = y_m$ de los dos dominios. Cuando las fuerzas y la inercia pueden ser ignoradas el balance de un elemento incompresible de fluido puede ser escrito como:

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tau_z}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z}$$

Integrando esta ecuación con respecto a las coordenadas y_1 y y_2 , que son el espesor de película de las superficies de muro 1 y 2 respectivamente, produce:

$$\tau_x = \tau_{x1} + \frac{\partial p}{\partial x} y_1 = \tau_{x2} - \frac{\partial p}{\partial x} y_2 \quad (20.18)$$

$$\tau_z = \tau_{z1} + \frac{\partial p}{\partial z} y_1 = \tau_{z2} - \frac{\partial p}{\partial z} y_2 \quad (20.19)$$

donde τ_{x1} , τ_{x2} y τ_{z1} , τ_{z2} son los esfuerzos cortantes en las superficies 1 y 2 en las direcciones x y z , respectivamente. Usando la relación $y_1 + y_2 = h$, se obtiene

$$\tau_{x1} - \tau_{x2} = -\frac{\partial p}{\partial x} h \quad (20.20)$$

$$\tau_{z1} - \tau_{z2} = -\frac{\partial p}{\partial z} h \quad (20.21)$$

Adicionalmente, el esfuerzo cortante turbulento es dado por la ecuación 20.16. Cuando esta ecuación es en una sola dirección, el esfuerzo cortante turbulento en dos dimensiones puede ser asumida como sigue:

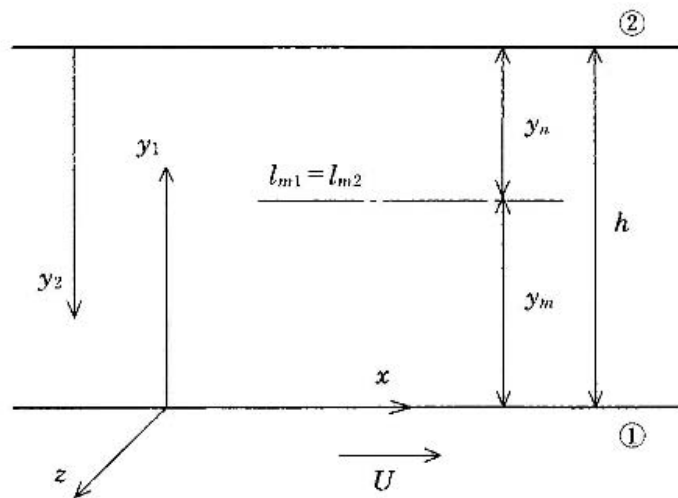
$$\tau_x = \rho l_m^2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

donde l_m es la longitud mixta modificada. Si las ecuaciones 20.20 y 20.21 se solucionan con respecto a $\partial u/\partial y$ y $\partial w/\partial y$, se obtienen la siguientes ecuaciones, con $|\tau| = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_z^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_x/\rho}{\sqrt{|\tau|/\rho} \cdot l_m} \quad (20.22)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_z/\rho}{\sqrt{|\tau|/\rho} \cdot l_m} \quad (20.23)$$

Figura 20.6: Flujo turbulento en la holgura



Fuente *Ídem*

en el caso de un cojinete hidrodinámico, usualmente se asume que $\tau_x \gg \tau_z$, y en este caso las ecuaciones 20.22 y 20.23 pueden ser simplificadas. Para una película encerrada, no siempre se puede asumir esto, y por tanto las ecuaciones no pueden ser simplificadas. Las condiciones de frontera para la velocidad de la superficie de la pared son:

$$\begin{aligned} u = U, w = 0 & \quad \text{en } y = 0 \\ u = w = 0 & \quad \text{en } y = h \end{aligned}$$

integrando las ecuaciones 20.22 y 20.23 bajo las condiciones de fronteras para las superficies 1 y 2 respectivamente, se obtienen las velocidades u_1, u_2 y w_1, w_2 . Estas velocidades deben ser continuas en las fronteras $y_1 = y_m$ o $y_2 = y_n (= h - y_m)$ en los dominios 1 y 2 en la película. Las longitudes mixtas l_{m1} y l_{m2} calculadas para los muros de superficies 1 y 2 también deben ser continuos en los mismos límites que es continuo el esfuerzo cortante

$$|u_1(y_m)| + |u_2(y_n)| = U \quad (20.24)$$

$$|w_1(y_m)| = |w_2(y_n)| \quad (20.25)$$

$$l_{m1}(y_m) = l_{m2}(y_n) \quad (20.26)$$

Si la función de l_m es dada explícitamente, las ecuaciones 20.18, 20.19, 20.24, 20.25 y 20.26 pueden ser consideradas como las ecuaciones simultáneas para $\tau_{x1}, \tau_{x2}, \tau_{z1}, \tau_{z2}$ y y_m con $\partial p/\partial x, \partial p/\partial z$ y U como parámetros. Si la solución es encontrada, la distribución de velocidad puede ser determinada por las ecuaciones 20.22 y 20.23.

Ecuación turbulenta de Reynolds

Como los coeficientes característicos del flujo de un fluido turbulento, coeficientes de turbulencia, G_x y G_y se definen como:

$$G_x = \frac{1}{B_x} \left(\frac{1}{h} \int_0^h \frac{u}{U} dy - \frac{1}{2} \right) \quad (20.27)$$

$$G_z = \frac{1}{B_z} \left(\frac{1}{h} \int_0^h \frac{w}{U} dy \right) \quad (20.28)$$

Donde B_x y B_z son los gradientes de presión adimensional definidos como:

$$B_x = -\frac{h^2}{\mu U} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad B_z = -\frac{h^2}{\mu U} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (20.29)$$

donde U es la superficie de velocidad. también u y w son las velocidades de flujo que pueden ser calculadas como se muestra anteriormente.

Si combinamos las definiciones de los coeficientes de turbulencia G_x y G_z y la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w dy = 0$$

Se obtiene la ecuación de Reynolds

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G_x \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(G_z \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{U}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (20.30)$$

usando $k_x = 1/G_x$ y $k_z = 1/G_z$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{k_x \mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{k_z \mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{U}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (20.31)$$

si el valor de k_x o k_z se hacen más grandes, indica mayor resistencia al flujo.

Coefficientes de turbulencia en película de fluidos sellados

Los coeficientes de turbulencia pueden ser obtenidos con las ecuaciones 20.27 y 20.28. Las figuras 20.7a,b muestran algunos ejemplos de los coeficientes de turbulencia pero en este caso para un flujo de fluido encerrado. En el eje horizontal el número de Reynolds $R_h = Uh/\nu$ basado en la velocidad circunferencial del muñón. B_x y B_z son los gradientes de presión.

Primero, la figura 20.7a muestra los resultados de los cálculos en el caso en que $B_x = B_z$. Como se aprecia, los coeficientes de turbulencia dependen en gran medida de los gradientes de presión; por ejemplo, cuando el gradiente de presión es muy grande, los coeficientes de turbulencia son pequeños. Esto significa que si el gradiente de presión se hace más grande, la turbulencia se hace violenta y la fluidez decrece. Por lo tanto, la razón de flujo no necesariamente se incrementa en proporción al gradiente de presión. El coeficiente de turbulencia también depende en gran medida de el número de Reynolds. Entre más grande sea R_h , más pequeño es el resultado del coeficiente de turbulencia, es decir, la razón de flujo decrece si el número de Reynolds se incrementa, al igual que el gradiente de presión. Por otra parte, G_x y G_z son diferentes para el mismo gradiente de presión. Adicionalmente, la fluidez en el eje x es diferente que en la dirección y .

la figura 20.7b muestra los resultados en el caso que $B_x \neq B_z$. Como en la figura 20.7a, entre más grande sea el gradiente de presión o el número de Reynolds, más pequeño se hace el coeficiente de turbulencia. La diferencia en los coeficientes de las curvas 1 y 3 corresponden a la diferencia de razones de flujo en el caso de la presión principal (1 en dirección circunferencial y 3 en dirección axial) y de los esfuerzos cortantes (dirección circunferencial) son paralelos y en el caso de que sean perpendiculares el uno al otro. Aunque lo mismo es válido para las curvas 2 y 4, la diferencia es muy pequeña en este caso. Esto puede ser a causa de que el flujo de presión es predominante y la influencia del flujo cortante es relativamente pequeña.

Los coeficientes de turbulencia en los cojinetes hidrodinámicos son mostrados en la figura 20.7b. Generalmente es aceptado que el gradiente de presión en un cojinete no es muy grande y que el promedio de los valores B_x y B_z son, en términos generales, menores a 10. Los coeficientes de turbulencia en este caso están actualmente en buen acuerdo con $B_x = B_z = 10$. Los coeficientes de turbulencia en este caso son expresados como sigue:

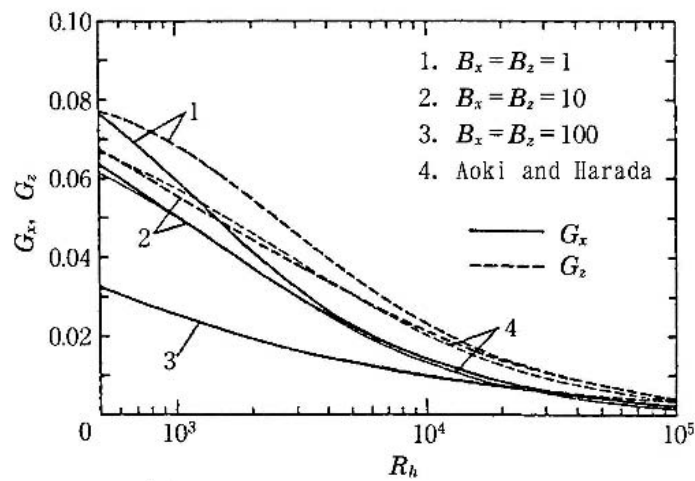
$$\frac{1}{G_x} = k_x = 12(1 + \alpha_x R_h^{n_x}), \quad \frac{1}{G_z} = k_z = 12(1 + \alpha_z R_h^{n_z}) \quad (20.32)$$

donde

$$\alpha_x = 0,00116, \alpha_z = 0,00120, n_x = 0,916, n_z = 0,854$$

Estas expresiones son obtenidas usando la ecuación 20.17 como un coeficiente de modificación para la longitud mezclada. Si R_h es suficientemente pequeño, a partir de lo anterior $G_x = G_z = 1/12$, y por lo tanto las ecuaciones 20.30 y 20.31 están en acuerdo con la ecuación de Reynolds en el caso de flujo laminar.

Figura 20.7: Resultados de los calculos de los Coeficientes de turbulencia para gradientes de presiones iguales en las direcciones x y z (a) y para gradientes de presión diferentes (b)



(a) Cases of Equal Pressure Gradients

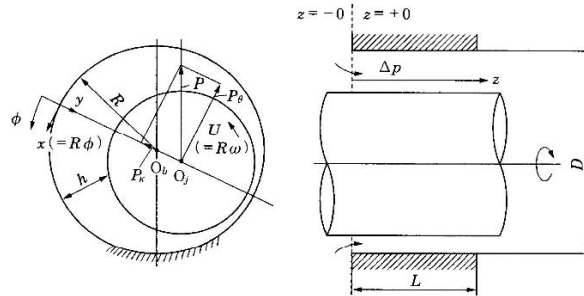
Fuente *Ídem*

20.5.2. Comparación de los análisis de uso de la longitud de mezcla contra un Modelo experimental

En esta sección, algunos resultados de los análisis de la película de fluidos encerrados y turbulento basada en el modelo de longitud mixta se compararán con los resultados experimentales.

Características de turbulencia estática en la película de fluido sellado.

Figura 20.8: Película de fluido sellada



Fuente *Ídem*

Son consideradas las características estáticas de un fluido sellado turbulento que se muestran en la figura. La ecuación de Reynolds para flujo turbulento (20.30, 20.31) se aplica a la película encerrada y es solucionada usando método de elementos finitos. En el caso de fluido encerrado, una gran diferencia de presiones existe entre los dos límites, y la presión perdida se convierte en gran presión en el límite donde el flujo entra en la holgura sellada. Esto se toma en consideración en las condiciones de frontera. La pérdida de presión es expresada de la siguiente manera, cuando se supone que la velocidad del flujo w_m es en dirección axial :

$$\Delta p = C_L \frac{\rho w_m^2}{2}$$

donde C_L es el coeficiente de pérdida de presión, que de acuerdo a los experimentos, es dado por:

$$C_L = -R_0/2900 + 2,57, \quad R_0 = w_m h / \nu$$

Con la condición que $C_L = constante$ cuando $R_0 < 1000$.

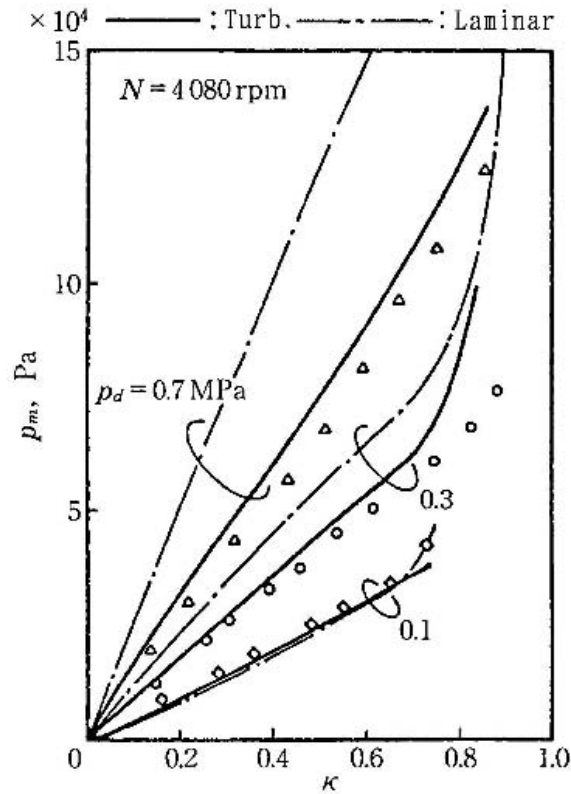
R_0 es el número local de Reynolds en la dirección axial.

Cuando el muñón y el sello son excéntricos, el promedio de velocidad de flujo w_m cambia con la posición en el sello circunferencial, y por lo tanto la presión perdida cambia con dicha posición circunferencial. Para resolver la ecuación 20.30 para la distribución de presión, la presión perdida en el sello circunferencial debe ser conocida así como las condiciones de frontera. y la distribución de presión debe ser conocida de antemano para conocer la presión perdida debido a que es una función que es una función de la velocidad. Por lo tanto, se necesita un cálculo iterativo.

Si la distribución de presión puede ser encontrada de esta manera, la capacidad de carga, la localización del centro del muñón, y así sucesivamente se puede obtener para una película de fluido encerrada en condiciones de turbulencia. El método de calculo es el mismo para un cojinete. Para el caso de película sellada, la diferencia de presión p_d que actúa afecta estas características.

La figura 20.9 muestra las relaciones entre la presión encerrada (capacidad de carga por unidad de área) p_m y el radio de excentricidad κ para una velocidad de rotación $N = 4080$, con una diferencia de presión p_d entre dos extremos del sello como parámetros. Los valores experimentales se acercan a los valores teóricos en el caso de flujo turbulento.

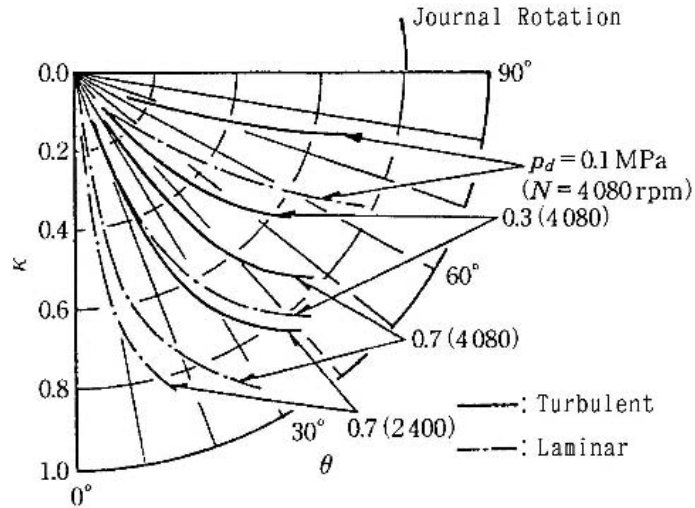
Figura 20.9: Capacidad de carga y razón de excentricidad en una película de fluido sellado.



Fuente *Ídem*

De la figura 20.9, la línea punteada, flujo laminar; línea sólida, flujo turbulento (valores teóricos). Los símbolos muestran los valores experimentales: Diamantes, diferencia de presión $p_d = 0,1 MPa$; círculos, $p_d = 0,3 MPa$; triángulos, $p_d = 0,7 MPa$. Se puede ver además, que la presión de sello p_m incrementa cuando incrementa el radio de excentricidad, que es natural. Por otro lado, es muy interesante notar que la presión p_m incrementa con el incremento de la diferencia de presiones p_d . Cuando un muñón está en una posición excentrica en un sello, la velocidad de flujo y por lo tanto la presión perdida es más grande en la posición circunferencial cuando la holgura es mayor, mientras que la presión perdida es más pequeña, en contraste, en la posición cuando la holgura de sello es pequeña. La diferencia de presiones perdidas producen un efecto estático en la película de fluido, y esta es sumada a la fuerza producida por el aceite debido a la rotación del eje. Cuanto más grande sea la diferencia de presiones p_d en los límites del sello, mayor será el efecto estático y teniendo en cuenta la capacidad de carga (por unidad de área) p_m será.

Figura 20.10: Localización del centro del cojinete en una película de fluido sellada



Fuente *Ídem*

La figura 20.10 muestra la localización del centro del muñón con respecto a la diferencia de presión p_d y la velocidad de rotación N . En este caso, la localización del centro del muñón está muy cerca de la línea vertical para una gran p_d , o para un N muy pequeño. Esto se produce porque el efecto cojinete estática debido a la diferencia de presión p_d contribuye principalmente al componente p_k de la fuerza de la película de aceite, pero no contribuye a la componente p_θ . En consecuencia, cuanto mayor sea la diferencia de presión, menor es el ángulo de actitud. Cuando la velocidad de rotación es muy bajo, el efecto estático en el cojinete se vuelve relativamente grande, por lo tanto, el ángulo de actitud se vuelve pequeño.

20.6. MODELO $k - \varepsilon$

La longitud mixta l en el *modelo de longitud mixta* es dado por una fórmula empírica, las constantes son de las que cambian con el gradiente de presión. Las constantes usualmente se determinan experimentalmente bajo gradientes de presión relativamente bajos, por lo tanto su uso es cuestionable en el caso de gradientes de presión elevados (cuando la relación de excentricidad es grande en un cojinete). Un modelo de turbulencia más razonable es el **modelo $k - \varepsilon$** , donde k es la *energía turbulenta* y ε es la *pérdida turbulenta*. Aunque en este caso también se requieren constantes experimentales, son constantes casi universales que apenas cambian con el gradiente de presión; el modelo $k - \varepsilon$ es excelente al respecto.

El modelo $k - \varepsilon$ comprende los modelos con alto número de Reynolds (modelos estándar) y los modelos con bajo número de Reynolds. En el caso de una película de lubricante, especialmente en la vecindad de la superficie del muro, el modelo con bajo número de Reynolds es adecuado, porque en este caso el número de Reynolds turbulento

$R_t = k^2/(\epsilon\nu)$ es relativamente bajo. El modelo $k - \epsilon$ para bajo número de Reynolds, que se aplica sobre la superficie del muro, fue propuesto por Jones y Lauder [112] como sigue:

Si la energía turbulenta k y la pérdida turbulenta ϵ son definidas como

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}, \quad \epsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \quad (20.33)$$

entonces la ecuación de transporte de k y la de ϵ se escriben a continuación usando el número turbulento de Reynolds $R_t = k^2/(\epsilon\nu)$:

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \epsilon - 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial y} \right)^2 \quad (20.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] + C_{\epsilon 1} \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\epsilon}{k} \\ - C_{\epsilon 2} [1 - 0,3 \exp(-R_t^2)] \frac{\epsilon^2}{k} + 2\nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (20.35)$$

donde σ_k , σ_ϵ , $C_{\epsilon 1}$, $C_{\epsilon 2}$ y C_μ son constantes experimentales, que son casi universales con poca dependencia al gradiente de presión, como se estableció anteriormente. Este es el elemento de mayor ventaja en el modelo $k - \epsilon$.

Además, el coeficiente de viscosidad turbulenta ν_t se da usando k y ϵ :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (20.36)$$

En el análisis del modelo $k - \epsilon$, generalmente se habla de que la ecuación tiempo promedio de momentum (que involucra los esfuerzos de Reynolds), la ecuación de transporte de energía turbulenta k , y la de pérdida turbulenta ϵ se resuelven simultáneamente. Entonces, usando ν_t , el esfuerzo de Reynolds está dado como:

$$-\overline{\rho u'v'} = \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial y} \quad (20.37)$$

El sistema de ecuaciones es ahora cerrado.

20.6.1. Teoría de la lubricación turbulenta usando el modelo $k - \epsilon$

En el caso de un cojinete en que la relación de excentricidad del muñón es grande, el gradiente de presión en la película de aceite es grande. La longitud mixta usada en el *modelo de longitud mixta* usualmente se determina experimentalmente para pequeños gradientes de presión, y los cambios para dichos gradientes. Por tanto, es más razonable el uso del modelo $k - \epsilon$, que está menos afectado por el gradiente de presión, para el análisis de un cojinete turbulento con una relación de excentricidad grande.

Adelante se describirá un análisis basado en el modelo $k - \epsilon$.

20.6.2. Aplicación del modelo $k - \varepsilon$ a una película de aceite

En la película de aceite de un cojinete, especialmente en la vecindad de la superficie del muro, el número turbulento de Reynolds R_t es relativamente bajo. El modelo $k - \varepsilon$ con bajo número de Reynolds, que es el adecuado en este caso, fue introducido de Jones y Launder [112] en la sección 20.6. Las ecuaciones de transporte (ecuaciones. 20.34 y 20.35) para k y ε dadas por ellos fueron mejoradas por Hassid y Poreh [110], como lo menciona Hori en su libro [111]. Acá se usará este modelo.

Primero, la energía turbulenta k y la pérdida turbulenta ε se definen como:

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (20.38)$$

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i \partial u'_i}{\partial x_j \partial x_j}} = \nu \left(\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2} + \dots + \overline{\left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2} \right) \quad (20.39)$$

Las ecuaciones siguientes en dos dimensiones, que son extensiones de las ecuaciones unidimensionales de Hassid y Poreh, será usadas como ecuaciones de transporte para k y ε :

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] - \overline{u'v'} \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{v'w'} \frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon - \frac{2\nu k}{b^2} \quad (20.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] - C_{\varepsilon 1} \left(\overline{u'v'} \frac{\partial u}{\partial y} + \overline{v'w'} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\varepsilon}{k} \\ - C_{\varepsilon 2} [1 - 0,3 \exp(-R_t^2)] \frac{\varepsilon^2}{k} + 2\nu \left(\frac{\partial \varepsilon^{1/2}}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (20.41)$$

donde

$$\begin{aligned} b &= \min(y, h - y) \\ \sigma_k &= 1 \quad \sigma_\varepsilon = 1,3 \quad C_{\varepsilon 1} = 1,45 \quad C_{\varepsilon 2} = 2,0 \\ R_t &= k^2 / (\varepsilon \nu) \end{aligned}$$

En las ecuaciones (20.40) y (20.41), ε denota la parte isotrópica de la pérdida turbulenta y $2\nu k/b^2$ es la parte anisotrópica. La idea de separar la pérdida turbulenta de esta manera fue propuesta por **Jones y Launder**, y con esto se hace posible considerar la siguiente condición de frontera simple para ε :

$$\varepsilon = 0 \quad \text{en la superficie del muro} \quad (20.42)$$

Además, la condición de frontera para k puede ser:

$$k = 0 \quad \text{en la superficie del muro} \quad (20.43)$$

De acuerdo con **Hassid y Poreh**, el coeficiente de viscosidad dinámica turbulento ν_t , es dado a continuación usando los mencionados k y ε :

$$\nu_t = C_m \frac{k^2}{\varepsilon} [1 - \exp(-A_d R_t)] \quad (20.44)$$

Sin embargo, se usará la siguiente ecuación, que contiene un factor de corrección C_d , basado en la experimentación sobre flujo de Couette:

$$\nu_t = C_m \frac{k^2}{\varepsilon} [1 - C_d \exp(-A_d R_t)] \quad (20.45)$$

donde

$$C_m = 0,09 \quad A_d = 1,5 \times 10^{-3} \quad C_d = 0,95$$

Aunque se espera que exista un fuerte flujo de Couette en la dirección circunferencial y un flujo débil debido a la presión en la dirección axial, se asume que la ecuación (20.45) se puede usar tanto para la dirección circunferencial como para la dirección axial, basado en el hecho de que el factor de corrección $C_d = 0,95$ se aproxima a 1.

20.6.3. Ecuación turbulenta de Reynolds

La ecuación de tiempo promedio de movimiento de un fluido incompresible que contiene el esfuerzo de Reynolds en un caso de dos dimensiones se presenta en las ecuaciones 20.7 y 20.8. En general, esta puede ser escrita en una expresión tensor como se muestra:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right) \quad (20.46)$$

(i,j = 1,2,3; la suma se extiende sobre todos los valores de j)

Las ecuaciones en coordenadas rectangulares (x, y, z) se pueden obtener por la sustitución de variables tales como $x = x_1, y = x_2, z = x_3, u = u_1, v = u_2, y w = u_3$, donde x, y y z son las coordenadas en la dirección circunferencial, a través de la película de fluido y en la dirección axial; u y u' (y similares) expresan la parte estática (tiempo promedio) de la velocidad del flujo y las fluctuaciones de este, respectivamente.

Considerando un espesor de película suficiente, se pueden hacer las siguientes consideraciones:

1. El lado izquierdo (término de inercia) de la ecuación (20.46) es despreciable.
2. En la ecuación (20.46) la derivada del esfuerzo de Reynolds con respecto a x y z se pueden despreciar comparadas con el valor respecto a y .

3. La componente normal del esfuerzo de Reynolds (componentes $i = j$) puede ser despreciadas.
4. $-\rho \overline{u'v'}$ y $\rho \overline{v'w'}$ pueden ser expresadas como a continuación con un coeficiente de viscosidad turbulenta ν_t , que es común a las direcciones x y z :

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial y} \quad (20.47)$$

$$-\rho \overline{v'w'} = \rho \nu_t \frac{\partial w}{\partial y} \quad (20.48)$$

Bajo estas suposiciones, se deriva una ecuación de lubricación turbulenta a partir de la ecuación (20.46). Primero, sin tener en cuenta el lado izquierdo de la ecuación (20.46) de la suposición 1, y sustituyendo las ecuaciones (20.47) y (20.48) de la suposición 4 en esta se lleva a la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (20.49)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \nu_t) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (20.50)$$

donde $\partial p / \partial y = 0$ se omite. Integrando las ecuaciones (20.49) y (20.50) ambas con respecto a y bajo las condiciones de frontera

$$u = U_1 \quad w = 0 \quad \text{para } y = 0 \quad (20.51)$$

$$u = w = 0 \quad \text{para } y = h \quad (20.52)$$

para obtener u y w , respectivamente. Sustituyendo estas en la ecuación de continuidad

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dy = 0 \quad (20.53)$$

se tiene la siguiente ecuación turbulenta de Reynolds, con $G_x = G_z = G$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial p}{\partial z} \right) = U_1 \frac{\partial F}{\partial x} \quad (20.54)$$

donde

$$G = \frac{\int_0^h \int_0^y \frac{y dy dy}{v + \nu_t} \int_0^h \frac{y dy}{v + \nu_t}}{\int_0^h \frac{dy}{v + \nu_t}} - \int_0^h \int_0^y \frac{y dy dy}{\rho (v + \nu_t)} \quad (20.55)$$

$$F = h - \frac{\int_0^h \int_0^y \frac{dy dy}{v+v_t}}{\int_0^h \frac{dy}{v+v_t}} \quad (20.56)$$

Si se usa la ecuación (20.45), las cinco ecuaciones, (20.40), (20.41), (20.49), (20.50) y (20.54) forman un sistema de ecuaciones cerradas con respecto a cinco incógnitas k , ε , u , w , y p . Incógnitas tales como la fluctuación en la velocidad no se incluyen en las ecuaciones. Por lo tanto, para resolver estas ecuaciones simultáneamente, se deben obtener las cinco incógnitas mencionadas. Aquí se asume que el lado izquierdo de las ecuaciones (20.40) y (20.41) (variaciones en el tiempo de k y ε a lo largo de la línea corriente) pueden ser ignoradas, considerando el estado estacionario:

$$\frac{Dk}{Dt} = 0, \quad \frac{D\varepsilon}{Dt} = 0 \quad (20.57)$$

Así el problema de la lubricación turbulenta puede ser resuelto.

20.6.4. Comparación de análisis usando el modelo $k-\varepsilon$ con experimentos

En los cálculos teóricos, las ecuaciones (20.40), (20.41) y (20.54) son resueltas simultáneamente bajo las condiciones de frontera dadas en las ecuaciones (20.51), (20.52), (20.42), (20.43) y las siguientes condiciones de frontera relacionadas con la presión:

$$p = 0 \quad \text{para } \theta = 0, \pi \text{ y termina el cojinete} \quad (20.58)$$

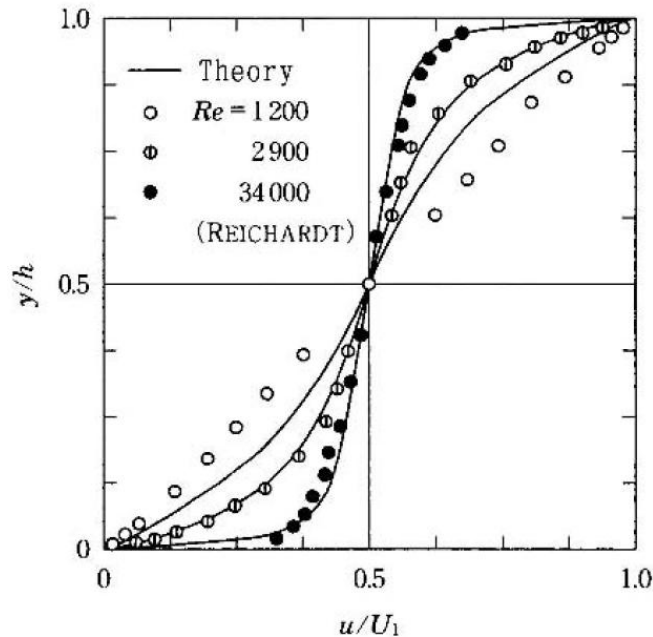
Adelante se presentará el procedimiento numérico. Se asume que se dispone de los perfiles de k y ε , se calcula G y F de las ecuaciones (20.55) y (20.56) y entonces se obtiene la distribución de presión para aplicar el método de los elementos finitos a la ecuación de lubricación (ecuación. 20.54). Luego, se calcula la distribución de la velocidad de flujo u y w de la distribución de presión usando las ecuaciones (20.49) y (20.50) las condiciones de frontera (20.51) y (20.52), entonces se obtienen k y ε de las distribuciones de velocidad (ecuaciones 20.40 y 20.41). Usando estos resultados, se calcula G y F nuevamente, para así obtener una vez más la distribución de presión siguiendo el mismo camino desde el principio del procedimiento. Este cálculo será repetido hasta que la distribución de presión calculada converja a un error muy pequeño.

Como un ejemplo, considere un muñón con un diámetro de 150 [mm] girando en un cojinete con un diámetro interior de 152 [mm] y una longitud de 150 [mm] sobre un rango de velocidades de 100-5000 [rpm]. Se asigna un coeficiente de viscosidad dinámica del aceite lubricante de $9,4 \times 10^{-6}$ [m²/s] (30 [°C]).

Se presentarán las comparaciones entre los resultados teóricos y experimentales, ambos bajo las condiciones mencionadas, a menos que se establezca lo contrario. El aceite lubricante es proporcionado a razón de 12 [l/min] en el experimento.

En la figura 20.11 se muestran los resultados teóricos y experimentales de la distribución promedio de la velocidad u para el flujo de Couette; al principio se usa el experimento de Reichardt.

Figura 20.11: Distribución de velocidad promedio para flujo de Couette



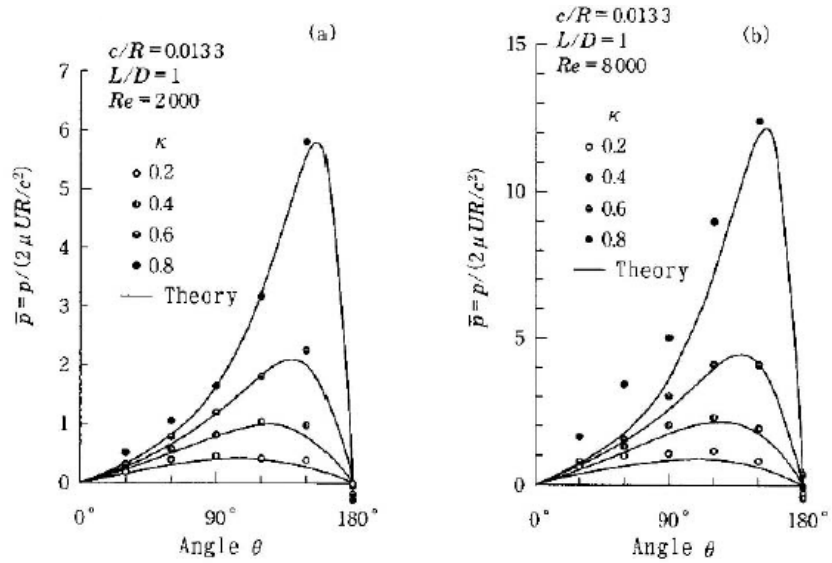
Fuente Hydrodynamic lubrication, Hori, Y., Springer Verlag, 2006.

Esta visto en la figura 20.11 que aunque los resultados teórico y experimental son diferentes para un número de Reynolds de $Re = 1200$, ellos coinciden para $Re = 2900$ y $Re = 34000$. Esto demuestra que el modelo $k - \varepsilon$ es más eficiente para el análisis de flujo turbulento muy por encima de la zona laminar y la región de transición.

En la figura 20.12 (a), (b) se muestran los resultados teóricos y experimentales para la distribución de presión adimensional en un cojinete de longitud finita. Estas figuras son, la distribución de presión no dimensional \bar{p} en la dirección circunferencial del centro del cojinete para $Re = 2000$ y $Re = 8000$, respectivamente, el parámetro inicial es la relación de excentricidad. Los valores teóricos y experimentales son en general bastante aproximados. Sin embargo, para $Re = 8000$ y una excentricidad de 0.8, la presión experimental es más alta que la presión teórica en el rango de $0^\circ - 90^\circ$. Esto puede ser atribuido a la influencia de la inercia del fluido.

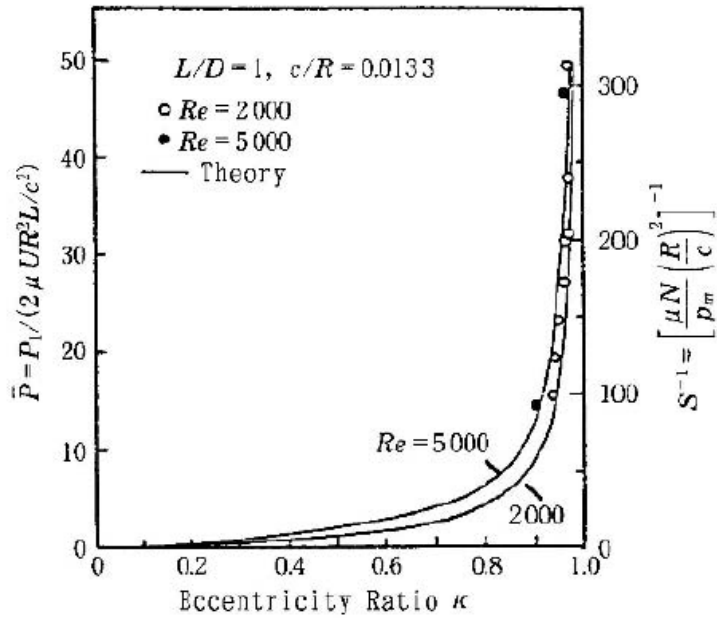
En la figura 20.13 la capacidad de carga adimensional $\bar{P} = P/(2\mu UR^2 L/c^2)$ (la escala de la izquierda) es graficada contra la relación de excentricidad κ para $Re = 2000$ y 5000.

Figura 20.12: Valores teóricos (*símbolos*) y experimentales (*líneas*) de la distribución de presión adimensional en un cojinete de longitud finita



Fuente *Ídem*

Figura 20.13: Capacidad de carga adimensional y recíproco del número de Sommerfeld versus la relación de excentricidad.

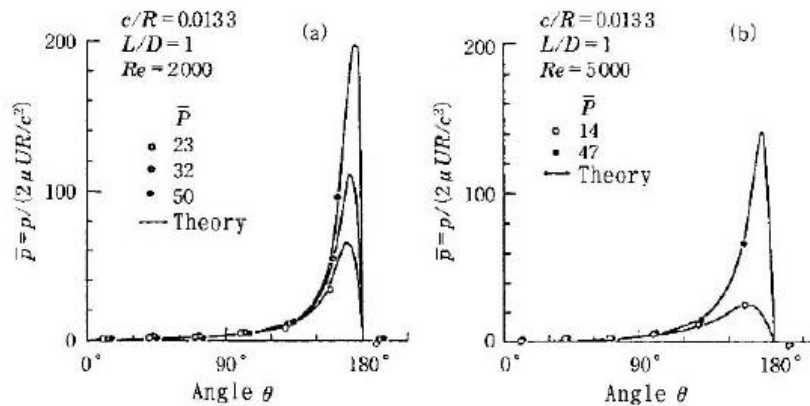


Fuente *Ídem*

El recíproco del número de Sommerfeld S^{-1} también se muestra en la figura (la escala a la derecha). La relación $S^{-1} = 2\pi\bar{P}$ se mantiene entre los dos ejes. Los resultados teóricos y experimentales de la capacidad de carga o del número de Sommerfeld son bastante aproximados inclusive para una excentricidad de 0,95. Esto muestra que la teoría de la lubricación basada en el modelo $k - \varepsilon$ puede ser aplicado en cojinetes con alta relación de excentricidad.

En la figura 20.14 a,b muestra la distribución de presión adimensional para los casos mostrados en la figura 20.13. El parámetro para las curvas es la capacidad de carga adimensional \bar{P} de la figura 20.13. Los valores teóricos y experimentales para la distribución de presión son muy próximos incluso en el caso de altas excentricidades sobre 0,9. Esta también muestra que la teoría de la lubricación basada en el modelo $k - \varepsilon$ puede ser aplicado en cojinetes con alta relación de excentricidad. Esto es válido porque el modelo $k - \varepsilon$ es válido para grandes presiones.

Figura 20.14: Distribución de presión adimensional en un cojinete de longitud finita para los casos analizados en la figura 20.13



Fuente *Ídem*

BIBLIOGRAFÍA

- [110] S. HASSID and M. POREH. A turbulent energy dissipation model for flows with drag reduction. *Journal of Fluids Engineering*, 100:107, 1978.
- [111] Y. HORI. *Hydrodynamic lubrication*. Springer Verlag, 2006.
- [112] WP JONES and BE LAUNDER. The calculation of low-reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 16(6):1119–1130, 1973.
- [113] F. K. ORCUTT and C. W. N-g. Steady-state and dynamic properties of journal bearings in laminar and superlaminar flow regimes. *Prepared under Contract No. NASw-1021 by MECHANICAL TECHNOLOGY INCORPORATED Latham, N.Y. for NASA, JUNE 1967.*

Capítulo 21

MODELOS PARA SISTEMA ROTOR COJINETE

Los sistemas de rotor están sujetos a muchos tipos de fuerzas. Fuerzas que pueden actuar en dirección radial y axial, y torques que actúan en direcciones angulares. Estas fuerzas pueden ser *estáticas* o invariables en el tiempo y dirección, o pueden ser *dinámicas* que varíen con el tiempo y la dirección.

Las fuerzas estáticas que actúan en el sistema rotor producen deflexiones en los elementos del sistema. Las fuerzas dinámicas que actúa en el sistema producen vibración. Las vibraciones pueden aparecer en forma de oscilación radial, axial y torsional. Usualmente se controla la vibración radial en las máquinas porque es el problema más común y más fácil de medir. La vibración axial es menos frecuente pero puede producir problemas en las máquinas. La vibración torsional es muy difícil de medir y en ocasiones no se tiene en cuenta [115]. El desbalanceo es el ejemplo más común de fuerza dinámica (la dirección de la fuerza gira rápidamente).

¿Cómo actúa la fuerza dinámica en el sistema rotor para producir la vibración? Cualquiera sea la forma, el sistema rotor actúa como un mecanismo de conversión de energía que transforma una fuerza aplicada en una vibración observada. El sistema rotor cojinete puede ser vista como una “*caja negra*” muy complicada que toma una fuerza dinámica como una entrada y produce una vibración como salida. Si se puede entender la naturaleza de ésta caja negra, estaría disponible el entendimiento de como la fuerza produce la vibración.

Se puede intentar adivinar el contenido de la caja negra “agitándola”, usando una técnica llamada *perturbación* y observando el comportamiento del sistema. Cuando se aplica al sistema rotor cojinete se utiliza como perturbación una fuerza conocida y se mide la respuesta vibratoria para la fuerza. También se puede estimar el contenido de la caja negra al desarrollar un **modelo matemático** del sistema rotor. Un buen modelo permitirá relacionar la vibración observada con la fuerza que actúa en el sistema.

Un buen modelo también permitirá *predecir* cómo un cambio en la fuerza, afectará la respuesta vibratoria. Un modelo proporcionará los cimientos para una técnica sistemática eficiente y efectiva.

En este capítulo se mencionarán algunos modelos relacionados con los parámetros hidrodinámicos (la excentricidad, las fuerzas de inercia, la deformación del eje, entre otros) y cómo la variación de cada uno de ellos afecta el comportamiento del sistema.

INTRODUCCIÓN AL MODELADO

Todos los modelos son simplificaciones diseñadas para representar características particulares de un sistema, las cuales cumplirán su función hasta los límites de su aplicabilidad. Generalmente el modelo del sistema rotor es una representación matemática que simula ciertas características del sistema real. Los límites del modelo son establecidos en las *suposiciones* usadas para derivar el modelo. Las suposiciones casi siempre envuelven simplificaciones que hace la solución del modelo más fácil. Si se aplica un modelo más allá de las suposiciones se incurrirá en un error (en muchas ocasiones este error no se puede medir).

En los modelos para sistema rotor cojinete generalmente se presentan las siguientes definiciones básicas:

- El *sistema rotor* incluye todas las partes mecánicas envueltas en la vibración. Estos incluyen el eje con cualquier disco atado a ellos, los cojinetes que soportan el eje, las estructuras que soportan los cojinetes, el cuerpo de la máquina, los cimientos del sistema, máquinas acopladas y la tubería asociada al sistema. El sistema rotor también incluye todos los equipos de planta que están involucrados en el desempeño de la máquina.
- El *rotor* es el ensamble del eje en rotación que es soportado en los apoyos. El rotor puede estar rígidamente acoplado a otros rotores en otras máquinas, formando una cadena extendida del rotor.
- El *estator* es la parte estacionaria de la máquina que contiene el rotor. El rotor gira dentro y es soportado por apoyos en el estator. El propósito de los apoyos es eliminar la fricción mientras previene un contacto indeseado entre el rotor y el estator.
- Las fuerzas que actúan en la máquina se pueden dividir en fuerzas externas e internas. Las *fuerzas internas* son las que aparecen de la interacción de la máquina consigo misma. Las fuerzas de soporte en los cojinetes, las fuerzas resultantes de la deflexión del eje y las fuerzas debidas a la interacción del rotor con el fluido circundante son algunos ejemplos de fuerzas internas. Las *fuerzas externas* son fuerzas que generan algún tipo de perturbación, o disturbio del sistema, tal como una fuerza de impacto debido al contacto entre el rotor y el estator, cargas radiales estáticas, o fuerzas de perturbación deliberadamente inducidas.
- El término *sincrónico* se refiere a cualquier cosa que está rotando a la misma frecuencia del rotor. El desbalanceo es un ejemplo de una fuerza de rotación sincrónica (1X).

- El término *no - sincrónico* se refiere a cualquier frecuencia diferente a la sincrónica. La frecuencia *no - sincrónica* puede ser *supersincrónica* (más alta que la velocidad de giro) o *subsincrónica* (a una velocidad más baja que la de giro).
- Un *parámetro* del sistema rotor, es una propiedad del sistema que afecta su respuesta. Masa, rigidez y amortiguamiento son ejemplos de parámetros del sistema rotor.
- El término *isotrópico* describe las propiedades de un sistema que son radialmente simétricas. El término isotrópico es distinto del término *simétrico*, que implica una simetría geométrica (forma).
- La *anisotropía* es la propiedad que tiene diferentes valores en diferentes direcciones radiales. La rigidez de la película de fluido es isotrópica cuando el muñón opera a bajas relaciones de excentricidad y anisotrópica a altas relaciones de excentricidad [115], donde la rigidez en la dirección radial es típicamente mucho mayor que en la rigidez en la dirección tangencial.

Un modelo de un sistema físico usualmente sigue un proceso estructurado:

1. Establecer las suposiciones que se usarán.
2. Definir el sistema de coordenadas.
3. Describir las fuerzas que actúan en el sistema.
4. Desarrollar un diagrama de cuerpo libre.
5. Derivar la ecuación de movimiento.
6. Resolver la ecuación de movimiento.
7. Comparar el comportamiento predicho con el observado en la máquina.
8. Ajustar el modelo si la descripción no es la adecuada.

21.1. ANÁLISIS PARA COJINETES PRESURIZADOS

Los cojinetes presurizados son una alternativa de solución a la inestabilidad dinámica del sistema rotor cojinete debido al comportamiento no lineal de la película de aceite. Para profundizar un poco en el tema, se presenta un aparte del trabajo realizado por Vargas [128] para cojinete corto.

21.1.1. Teoría de cojinetes presurizadas con puertos puntuales: caso del cojinete corto

Justificación

Los equipos rotodinámicos que se encuentran soportados sobre cojinetes hidrodinámicos están expuestos a sufrir vibraciones, las cuales son capaces de causar daños mecánicos severos.

Cuando un cojinete se presuriza externamente es posible modificar las propiedades dinámicas de la película de aceite, haciendo que las inestabilidades y amplitudes vibracionales puedan disminuirse en forma marcada. La identificación de los coeficientes rotodinámicos de la película de lubricante en los cojinetes que se presurizan y un modelo rotor cojinete que se asemeje bastante bien a sistemas reales, es un problema fundamental en el análisis de la estabilidad y para asegurar el buen funcionamiento dinámico de la maquinaria rotatoria.

Actualmente las compañías que se dedican al estudio experimental de rotores, se interesan en el diagnóstico de equipos que presentan cambios en las propiedades dinámicas de la película de lubricante, estos cambios son producidos por la presurización externa. El incremento de la rigidez en los cojinetes puede producir cambios en las frecuencias de resonancia y de esta manera el diagnóstico realizado será diferente.

Estudios analíticos / numéricos

Con el desarrollo de la rotodinámica se consiguió el objetivo principal al estudiar las turbomáquinas, reducir las amplitudes de vibración que eran de magnitudes insostenibles. Cuando se demostró que las velocidades de resonancia dependen entre otros factores, del valor de las rigideces que tienen los soportes en un equipo rotatorio, se pensó en modificar artificialmente estos valores para conseguir posponer las velocidades inesperadas. Una de las formas en que se pueden cambiar los valores de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento es la presurización externa en cojinetes hidrodinámicos.

Estudios experimentales

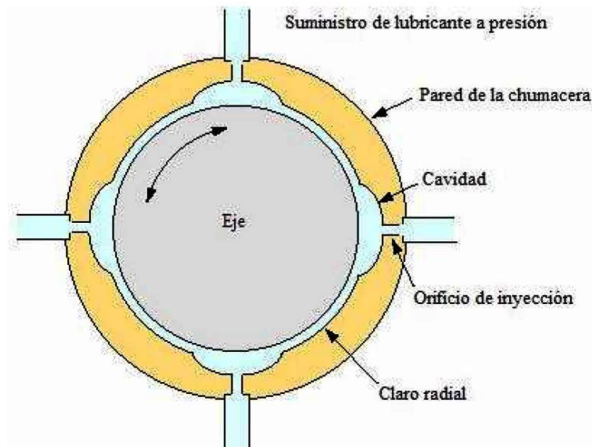
Actualmente existen compañías dedicadas a la fabricación e investigación experimental del equipo rotatorio, una de ellas es BENTLY-NEVADA en EUA, la cual ha hecho experimentos con rotores de laboratorio que consisten en presurizar externamente un cojinete colocando los puertos BENTLY usados para desarrollar los experimentos.

El objetivo inicial de Donald Bently [115] al usar este arreglo es tratar de que la presurización externa haga que el muñón se mantenga lo más cerca del centro geométrico del cojinete, y de esta manera el eje no tenga oscilaciones importantes.

Entre las conclusiones más destacadas que aparece en el trabajo de Bently, se pueden citar:

1. Al presurizar externamente, las rigideces de los cojinetes se incrementan notablemente.

Figura 21.1: Configuración de un cojinete presurizado usado por BENTLY



Fuente Teoría de chumaceras presurizadas con puertos puntuales: caso de la chumacera corta, VARGAS, 2007

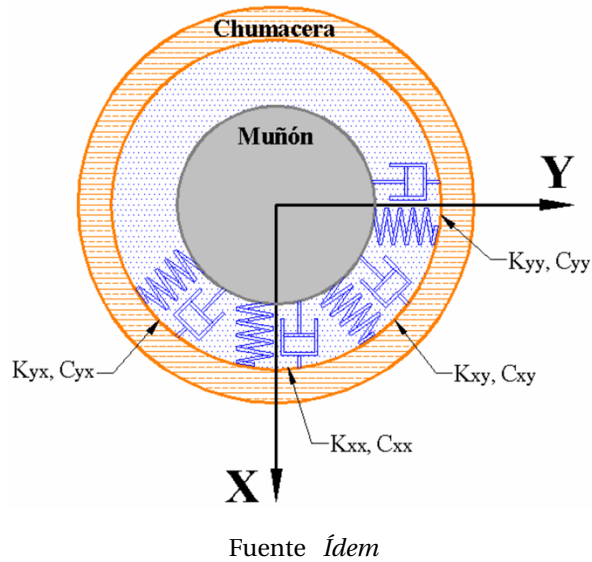
2. La presurización puede producir inestabilidad.
3. Bajo ciertas condiciones la presurización externa puede modificar las velocidades de resonancia.
4. Si se ajustan los puertos de inyección, se pueden modificar la excentricidad de equilibrio.
5. La variación de la presión puede permitir establecer un control adecuado de las rigideces en los cojinetes, el control se puede hacer en uno o más puertos de inyección.

La explicación de Bently se puede ver en la figura 21.3, en la cual se muestra la amplitud y el ángulo de fase como función de la velocidad de operación, K_B y K_S representan la rigidez de los dos cojinetes y el eje respectivamente. En esta figura aparecen tres casos de análisis, en los cuales se ha presurizado externamente a los cojinetes de tal manera que su rigidez respecto a la del eje se encuentra en la siguiente proporción

- $K_B = (1/2) K_S$
- $K_B = K_S$
- $K_B = 2K_S$

Como puede verse, la amplitud de vibración se ha modificado pues de aproximadamente $30 [\mu m]$ a casi $4000 [rpm]$ (con una rigidez de los cojinetes cuyo valor es el de la mitad del eje), se ha incrementado hasta casi $50 [\mu m]$ a casi $5500 [rpm]$ (cuando la rigidez toma valores del doble del eje). Por lo tanto no solo cambia la amplitud de vibración al modificar la rigidez de los soportes, sino que también el ángulo de equilibrio y la frecuencia de resonancia la cual se pospone a medida que la rigidez se incrementa.

Figura 21.2: Propiedades dinámicas de rigidez y amortiguamiento (coeficientes rotodinámicos) de la película del lubricante en un cojinete hidrodinámico



Determinación analítica de los coeficientes dinámicos en un cojinete

Introducción

El comportamiento de un rotor está fuertemente influenciado por las características de sus soportes. Las fuerzas que se generan sobre el muñón por la película de lubricante del cojinete hidrodinámico, son funciones no lineales de la posición y velocidad del centro del eje. Por tanto para llevar a cabo el cálculo de las velocidades críticas, las amplitudes de vibración del rotor, así como, examinar su estabilidad contra vibraciones auto-excitadas, es fundamental conocer que la película de aceite en el cojinete añade a los desplazamientos y velocidades del muñón.

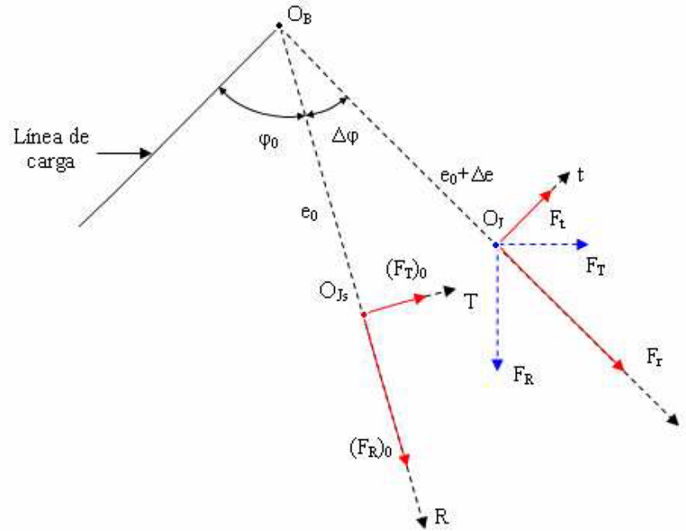
Si los desplazamientos y velocidades del muñón son pequeños, entonces las fuerzas en el lubricante se pueden linealizar alrededor de su posición de equilibrio estático, pero aún así con esta aproximación, la película del lubricante no se puede simular por un simple sistema elástico disipativo. Existen términos acoplados de rigidez y amortiguamiento que se necesitan para describir la relación entre el incremento de las fuerzas de la película de aceite y los desplazamientos y velocidades que las causan. En la figura 21.2 se muestra una vista transversal del cojinete, en la cual aparecen rigideces y amortiguamientos que simulan la conducta dinámica del fluido lubricante.

En forma matemática es posible escribir el incremento de las fuerzas de la película de aceite como:

$$\begin{pmatrix} dF_x \\ dF_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (21.1)$$

Las ecuaciones de movimiento de un sistema rotor cojinete contienen coeficientes que

Figura 21.3: Descomposición de fuerzas de la película de lubricante en el cojinete



Fuente *Ídem*

corresponden a los de la película del lubricante de los cojinetes (de rigidez y amortiguamiento), éstos parámetros cambian con la velocidad de rotación y por consecuencia también con la adición de presión externa. Es por eso que el comportamiento dinámico siempre es influenciado por los valores que puedan tomar estos coeficientes. Se encuentra en la literatura que a medida que la velocidad de operación aumenta, uno de los coeficientes de rigidez puede tomar valores negativos y dependiendo de su magnitud el sistema puede llegar a la inestabilidad; en rotodinámica a los coeficientes de rigidez y amortiguamiento se les conoce como *coeficientes rotodinámicos*.

Definición clásica de los coeficientes rotodinámicos

Sea O_B el centro del cojinete, O_{J_s} representa la posición de equilibrio de la rotación del eje, la excentricidad dimensional es e_0 (o bien ε_0 en forma adimensional) y el ángulo de equilibrio φ_0 . Las componentes de la fuerza del lubricante a lo largo del sistema de coordenadas radial y tangencial (R, T) son $(F_R)_0$ y $(F_T)_0$.

Si hay una pequeña fuerza de desbalance en el muñón, éste orbitará alrededor de la posición de equilibrio estática (e_0, φ_0) . En un instante particular ocupará la posición O_J (un punto genérico sobre la órbita). En O_J la excentricidad es $e = e_0 + \Delta e$, el ángulo de equilibrio es $\varphi = \varphi_0 + \Delta \varphi$ y las velocidades del centro del muñón son: \dot{e} y $e\dot{\varphi}$. La fuerza instantánea de la película del lubricante tiene ahora las componentes F_r y F_t relativas a los ejes coordenados (r, t) . Estas fuerzas instantáneas en O_J pueden ser obtenidas respecto del sistema de coordenadas (R, T) mediante la aplicación de la matriz de rotación correspondiente, como se vé en la figura 21.3:

$$\begin{pmatrix} F_R \\ F_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\varphi & -\sin \Delta\varphi \\ \sin \Delta\varphi & \cos \Delta\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_r \\ F_t \end{pmatrix}$$

para pequeños desplazamientos angulares, es posible asumir: $\cos \Delta\varphi \approx 1$ y $\sin \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$

$$\begin{pmatrix} F_R \\ F_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\varphi \\ \Delta\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_r \\ F_t \end{pmatrix}$$

o bien:

$$\begin{aligned} F_R &= F_r - \Delta\varphi F_t \\ F_T &= \Delta\varphi F_r + F_t \end{aligned} \quad (21.2)$$

Pero el interés está en evaluar las componentes de las fuerzas cuando pasa el muñón de la posición O_{J_s} a la O_J , entonces el incremento de tales fuerzas viene dada por:

$$\begin{aligned} \Delta F_R &= F_r - (F_R)_0 \\ \Delta F_T &= F_r + (F_T)_0 \end{aligned}$$

Estos incrementos pueden encontrarse sustituyendo en la ecuación anterior.

$$\begin{aligned} \Delta F_R &= F_r - \Delta\varphi F_t \\ \Delta F_T &= \Delta\varphi F_r + F_t + (F_T)_0 \end{aligned}$$

Si se expanden las funciones escalares F_r y F_t en series de Taylor alrededor de la posición de equilibrio y se sustituye, se obtiene la siguiente ecuación de forma matricial

$$\begin{pmatrix} dF_R \\ dF_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_R}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial F_R}{\partial \varphi} - F_T \\ \frac{\partial F_T}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial F_T}{\partial \varphi} + F_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon \\ d\varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_R}{\partial \dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_R}{\partial \dot{\varphi}} \\ \frac{\partial F_T}{\partial \dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_T}{\partial \dot{\varphi}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\dot{\varepsilon} \\ d\dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (21.3)$$

Comparando las ecuaciones 21.1 y 21.3, se puede decir que se han obtenido las expresiones para los coeficientes rotodinámicos (dimensionales) de rigidez y amortiguamiento (en forma genérica) en las direcciones radial y transversal

$$\begin{pmatrix} k_{RR} & k_{RT} \\ k_{TR} & k_{TT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_R}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial F_R}{\partial \varphi} - F_T \\ \frac{\partial F_T}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial F_T}{\partial \varphi} + F_R \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_{RR} & c_{RT} \\ c_T & c_{TT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_R}{\partial \dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_R}{\partial \dot{\varphi}} \\ \frac{\partial F_T}{\partial \dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_T}{\partial \dot{\varphi}} \end{pmatrix}$$

Para desarrollar las matrices, es necesario resolver la ecuación de Reynolds en estado no estacionario, en la tesis de "TEORÍA DE CHUMACERAS PRESURIZADAS CON PUERTOS PUNTUALES: CASO DE LA CHUMACERA CORTA" [128] puede encontrar la resolución completa de esta ecuación.

Coefficientes rotodinámicos de un cojinete corto no presurizado

Una vez desarrollada la teoría clásica de los coeficientes rotodinámicos, es posible determinarlos para cualquier cojinete hidrodinámico en el cual se conozca el campo de presión en la película de lubricante.

Solucionando la ecuación de Reynolds para un cojinete corto se obtienen los coeficientes de los cuadros 21.1 y 21.2.

Cuadro 21.1: Coeficientes de rigidez y amortiguamiento de un cojinete corto en el sistemas de coordenadas R-T.

$\bar{K}_{RR} = -\frac{8\pi(1+\varepsilon^2)\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$\bar{C}_{RR} = \frac{-2\pi^2(1+2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$
$\bar{K}_{RT} = \frac{-\pi^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$\bar{C}_{RT} = \frac{8\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2$
$\bar{K}_{TR} = \frac{\pi^2(1+2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$\bar{C}_{TR} = \frac{8\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2$
$\bar{K}_{TT} = \frac{-4\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$\bar{C}_{TT} = \frac{-2\pi^2}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$

Fuente *Ídem*

Cuadro 21.2: Coeficientes de rigidez y amortiguamiento de un cojinete corto en el sistemas de coordenadas $x-y$.

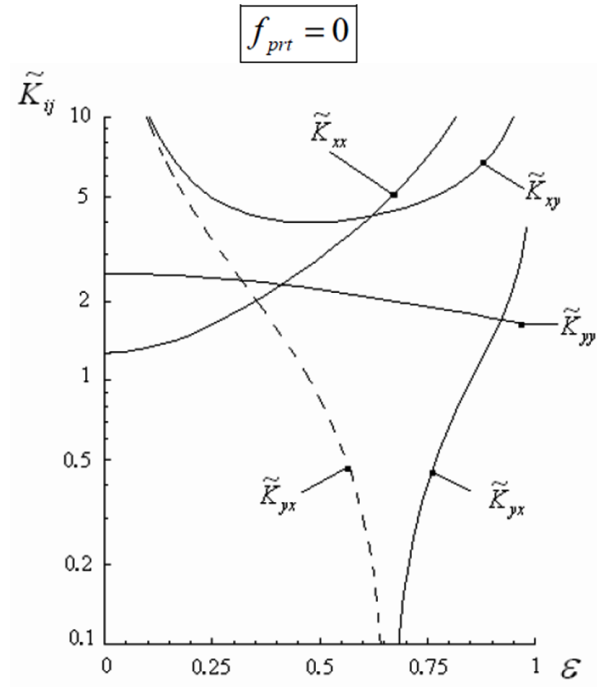
$\tilde{k}_{xx} = \frac{4[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{(1 - \varepsilon^2)[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{xx} = \frac{2\pi[\pi^2 + 2(24 - \pi^2)\varepsilon^2 + \pi^2\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{xy} = \frac{\pi[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{xy} = \frac{8[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{yx} = \frac{\pi[-\pi^2 + 2\pi^2\varepsilon^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{yx} = \frac{8[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{yy} = \frac{4[2\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$	$\tilde{c}_{yy} = \frac{2\pi(1 - \varepsilon^2)^{1/2}[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{\varepsilon[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$

Fuente *Ídem*

Comportamiento gráfico de los coeficientes rotodinámicos. $(L/D) = 1/4$

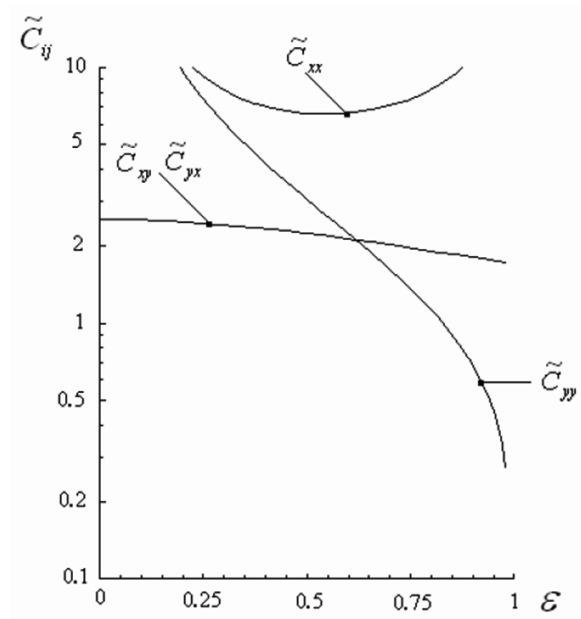
El comportamiento gráfico de los coeficientes rotodinámicos de un cojinete corto no presurizado externamente, es bien conocido y analizado en los libros clásicos [127, 121].

Figura 21.4: Coeficientes rotodinámicos de **rigidez** para un cojinete corto no presurizado



Fuente *Ídem*

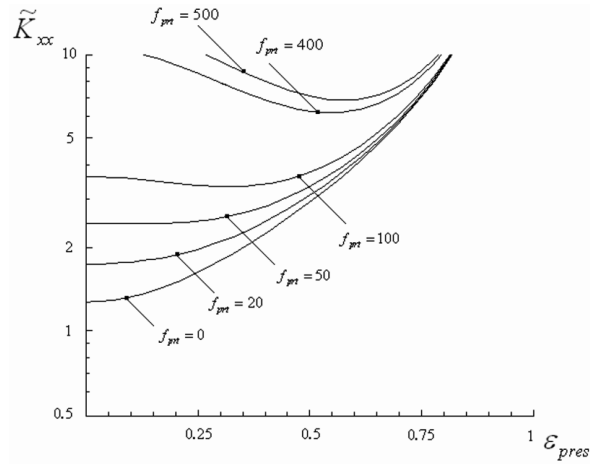
Figura 21.5: Coeficientes rotodinámicos de **amortiguamiento** para un cojinete corto no presurizado



Fuente *Ídem*

Comparación de coeficientes rotodinámicos a diferentes valores de fuerza de presurización externa

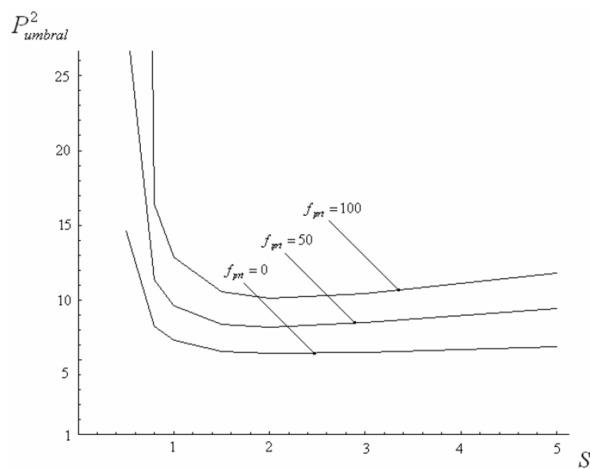
Figura 21.6: Comparación de los coeficientes de rigidez (en la dirección vertical) de un cojinete corto para diferentes valores de presurización en su parte superior ($L/D = 1/4$)



Fuente Ídem

Velocidad umbral de estabilidad

Figura 21.7: Velocidad umbral de estabilidad contra el número de Sommerfeld para un rotor rígido soportado por cojinetes cortos con inyección superior de lubricante para diferentes valores de fuerza de presurización. $L/D = 1/4$



Fuente Ídem

21.2. EFECTO DE LA HOLGURA EN LOS COEFICIENTES ROTODINÁMICOS

El cambio de la holgura entre el muñón y el cojinete es un fenómeno que trae consigo variaciones altamente no lineales en el comportamiento del sistema rotor cojinete. Como ya se ha estudiado, el cambio en la holgura influye directamente en la capacidad de carga del cojinete; para este nuevo enfoque también genera cambios en los coeficientes rotodinámicos en el tiempo y el espacio. Para comprender esta conducta se estudiaron dos publicaciones que basan su modelo mediante suposiciones relativas a la variación de la holgura y el efecto sobre los coeficientes rotodinámicos.

21.2.1. Un modelo no lineal para la predicción de los coeficiente dinámicos en un cojinete hidrodinámico

Esta publicación investiga la variación no lineal de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento en la órbita del muñón con respecto de una posición de equilibrio. *La órbita se obtiene de la solución combinada de las ecuaciones de movimiento y la ecuación de Reynolds.* Los gradientes de presión dinámicos en la órbita son descritos por una *perturbación de primer orden para el gradiente de presión estática y para los gradientes de presión de orden superior por perturbaciones de velocidad y desplazamiento.* La variación de los coeficientes dinámicos no lineales se analizan (en este caso) para tres números de Sommerfeld en un cojinete de doble ranura bajo la acción de una carga sincrónica externa a lo largo de la órbita y una carga perpendicular a la carga radial del muñón [120].

Los coeficientes de rigidez y amortiguamiento se evalúan a lo largo de la órbita del muñón en términos del primer orden y los coeficientes dinámicos de órdenes superiores alrededor de una posición de equilibrio. La perturbación de primer orden de la presión dinámica en la ecuación de Reynolds no estable, da un término de presión inestable y cuatro gradientes de presión no estables. Este trabajo toma parte importante del enfoque de perturbaciones infinitesimales de Lund (1978,1987) [124, 123].

Teoría

Los coeficientes de rigidez y amortiguamiento se obtienen de la expansión de series de Taylor para las fuerzas en la película de fluido en el cojinete en términos de perturbación de desplazamiento y velocidad. En general, las comparaciones se obtienen para (i) coeficientes obtenidos de perturbaciones de amplitud finita, (ii) coeficientes que incluyen perturbaciones de primer orden y superiores, y (iii) coeficientes según el enfoque de perturbación infinitesimal. Sin embargo, para cojinetes que actúan bajo carga dinámica externa, someten al muñón a un movimiento orbital alrededor que una posición equilibrio. En estas condiciones es importante determinar el rango, a lo largo de la órbita, en el cual es válida la linealización de los coeficientes dinámicos.

Ecuaciones de gobierno

La ecuación de lubricación de Reynolds para *flujo isoviscoso bidimensional, laminar e incompresible* bajo condiciones dinámicas de carga en un cojinete de ranuras bi - axial toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \Omega \frac{\partial h}{\partial t} \quad (21.4)$$

Bajo condiciones dinámicas, el movimiento transitorio del muñón se define mediante la posición y velocidad de su centro geométrico, tal como lo expresa el espesor de película de fluido:

$$h = 1 + X \cos \theta + Y \sin \theta \quad (21.5)$$

Las fuerzas de reacción en la película de fluido a lo largo de la trayectoria del muñón son funciones de los desplazamientos y velocidades del centro del muñón. La perturbación de primer orden de presión y el espesor de película alrededor de la posición no estable del muñón bajo condiciones dinámicas es:

$$p = p + P_x \Delta X + P_y \Delta Y + P_{\dot{x}} \Delta \dot{X} + P_{\dot{y}} \Delta \dot{Y} \quad (21.6)$$

$$h = h + \Delta X \cos \theta + \Delta Y \sin \theta \quad (21.7)$$

Sustituyendo la ecuación de perturbación de presión de primer orden (21.6) y la película de aceite (ecuación. 21.7), en la ecuación de Reynolds (21.4), se obtendrá una ecuación de presión inestable (21.8) y cuatro gradientes de presión inestable (Ecuaciones 21.9 - 21.12). Estas son:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \Omega \frac{\partial h}{\partial t} \quad (21.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial P_x}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial P_x}{\partial z} \right) = \\ \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^2}{4} \cos \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{4} \cos \theta \frac{\partial p}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (21.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial P_y}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial P_y}{\partial z} \right) = \\ \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^2}{4} \sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{4} \sin \theta \frac{\partial p}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (21.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial P_{\dot{x}}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial P_{\dot{x}}}{\partial z} \right) = \Omega \cos \theta \quad (21.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial P_{\dot{y}}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial P_{\dot{y}}}{\partial z} \right) = \Omega \sin \theta \quad (21.12)$$

Similar a las ecuaciones (21.6) y (21.7), la perturbación de primer orden de presión inestable, los gradientes de presión, y el espesor de película de fluido con respecto a la posición de equilibrio del muñón, resultando en:

$$p = p_o + P_{x_o} \Delta X + P_{y_o} \Delta Y + P_{\dot{x}_o} \Delta \dot{X} + P_{\dot{y}_o} \Delta \dot{Y} \quad (21.13)$$

$$P_j = P_{j_o} + P_{j_x} \Delta X + P_{j_y} \Delta Y + P_{j_{\dot{x}}} \Delta \dot{X} + P_{j_{\dot{y}}} \Delta \dot{Y} \quad (21.14)$$

para $j = x, y, \dot{x}, \dot{y}$, donde $P_{ij} = P_{ji}$

$$h = h_o + \Delta X \cos \theta + \Delta Y \sin \theta \quad (21.15)$$

Los cálculos de coeficientes de rigidez y amortiguamiento en los cojinetes en el análisis dinámico se desarrollan con respecto a la posición de estado estable.

Las ecuaciones de movimiento adimensionales para dos grados de libertad del sistema rotor considerando las fuerzas hidrodinámicas y las externas son:

$$M\Omega^2 \frac{d^2 X}{dT^2} = 1 - \frac{F_x}{W} + F_d \cos(\Omega T) \sin \alpha \quad (21.16)$$

$$M\Omega^2 \frac{d^2 Y}{dT^2} = -\frac{F_y}{W} + F_d \cos(\Omega T) \cos \alpha \quad (21.17)$$

Las fuerzas hidrodinámicas se obtienen de la *integración* del perfil de presión. Cuando se considera una pequeña amplitud de movimiento del muñón respecto de la posición de equilibrio, estas fuerzas son proporcionales a los desplazamientos y velocidades del muñón, donde las constantes de proporcionalidad son referidas con coeficientes de rigidez y amortiguamiento, respectivamente.

Los coeficientes de rigidez no lineales K_{xx} y K_{yy} son evaluados por la integración del término P_x , gradiente de presión no lineal (ecuación 21.14) obtenido usando la perturbación de primer orden de la ecuación de Reynolds inestable alrededor de una posición inestable así como también alrededor de una posición de equilibrio:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{xx} \\ K_{yx} \end{array} \right\} = \int \int P_x \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta \\ \sin \theta \end{array} \right\} d\theta \quad (21.18)$$

donde $P_x = P_{xo} + P_{xx}\Delta X + P_{xy}\Delta Y + P_{x\dot{x}}\Delta\dot{X} + P_{x\dot{y}}\Delta\dot{Y}$, y la integración se lleva a cabo para cada término de gradiente de presión P_{xo} , P_{xx} , P_{xy} , $P_{x\dot{x}}$ y $P_{x\dot{y}}$ respectivamente.

Los coeficientes de rigidez no lineales se escriben como:

$$-\begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{xxo} \\ K_{yxo} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} K_{xxx} \\ K_{yxx} \end{Bmatrix} \Delta X + \begin{Bmatrix} K_{xxy} \\ K_{yyx} \end{Bmatrix} \Delta Y + \begin{Bmatrix} C_{xxx} \\ C_{yxx} \end{Bmatrix} \Delta\dot{X} + \begin{Bmatrix} C_{xxy} \\ C_{yyx} \end{Bmatrix} \Delta\dot{Y} \quad (21.19)$$

Procedimiento de solución

En este trabajo se consideraron 73 nodos en la dirección circunferencial y siete nodos en la dirección axial. El procedimiento para predecir los coeficientes dinámicos de primer orden y de orden superior alrededor de una posición de equilibrio se resumen en:

1. La relación de excentricidad y la de esbeltez son variables dadas.
2. La ecuación de Reynolds bidimensional se resuelve usando el método de diferencias finitas con una relajación sucesiva para obtener una presión en estado estable, ángulo de actitud y número de Sommerfeld.
3. Se lleva a cabo la perturbación de la presión no estable y de los cuatro gradientes de presión no estables con respecto de la posición de equilibrio.
4. Se usa el método de perturbación infinitesimal y las condiciones de frontera dadas por Lund (1978 [124]); se determinan los coeficientes de amortiguamiento y rigidez de primer orden y de órdenes superiores.

El procedimiento para predecir el coeficiente dinámico no lineal a lo largo de la posición de la órbita del muñón se puede indicar como:

- Dado el número de Sommerfeld, se calculan el ángulo de actitud y la relación de excentricidad.
- Se evalúan los pasos (2) y (3) del procedimiento mencionado, para calcular los coeficientes dinámicos alrededor de una posición de equilibrio en estado estable.
- Incorporando las fuerzas de reacción en las ecuaciones de movimiento del muñón, se determina la nueva posición central del muñón y su velocidad.
- Las perturbaciones de desplazamientos y velocidades se calculan con referencia a la posición de equilibrio para cada posición del muñón a lo largo la trayectoria del centro del muñón.
- Los coeficientes no lineales de rigidez y amortiguamiento se calculan a lo largo de la trayectoria del centro del muñón usando amplitudes de perturbación, coeficientes de primer orden y órdenes superiores.

Resultados y discusión

En esta publicación se presentan resultados obtenidos para los coeficientes de orden superior con varias relaciones de excentricidad y relaciones L/D de 0,5 a 1,5. La configuración geométrica es la misma estudiada por Lund y Thomsen [124]. Las condiciones de operación y parámetros del cojinete se dan en el cuadro 21.3 .

Cuadro 21.3: Condiciones tomadas de Lund y Thomsen [124]

<i>Características del cojinete y condiciones de operación</i>	
Tipo de cojinete	Ranura bi-axial
Arco de almohadilla	160°
Ángulo de ranura	20°
Precarga	0,0
Factor de compensación	0,5
L/D	0,5, 1,0 y 1,5
Relaciones de excentricidad	0,114 a 0,809

En la figura 21.8 se muestran los coeficientes de orden superior adimensionales para la perturbación en x (*Izquierda*, a lo largo de la dirección radial de la carga) e y (*Derecha*, a lo largo de la dirección perpendicular de la carga) para relaciones L/D de 0,5, 1,0 y 1,5. Estos coeficientes se incluyen en la expansión de la serie de Taylor de primer orden de los coeficientes no lineales de rigidez K_{xx} y K_{yx} (para la dirección x), además K_{xy} y K_{yy} (para la dirección y).

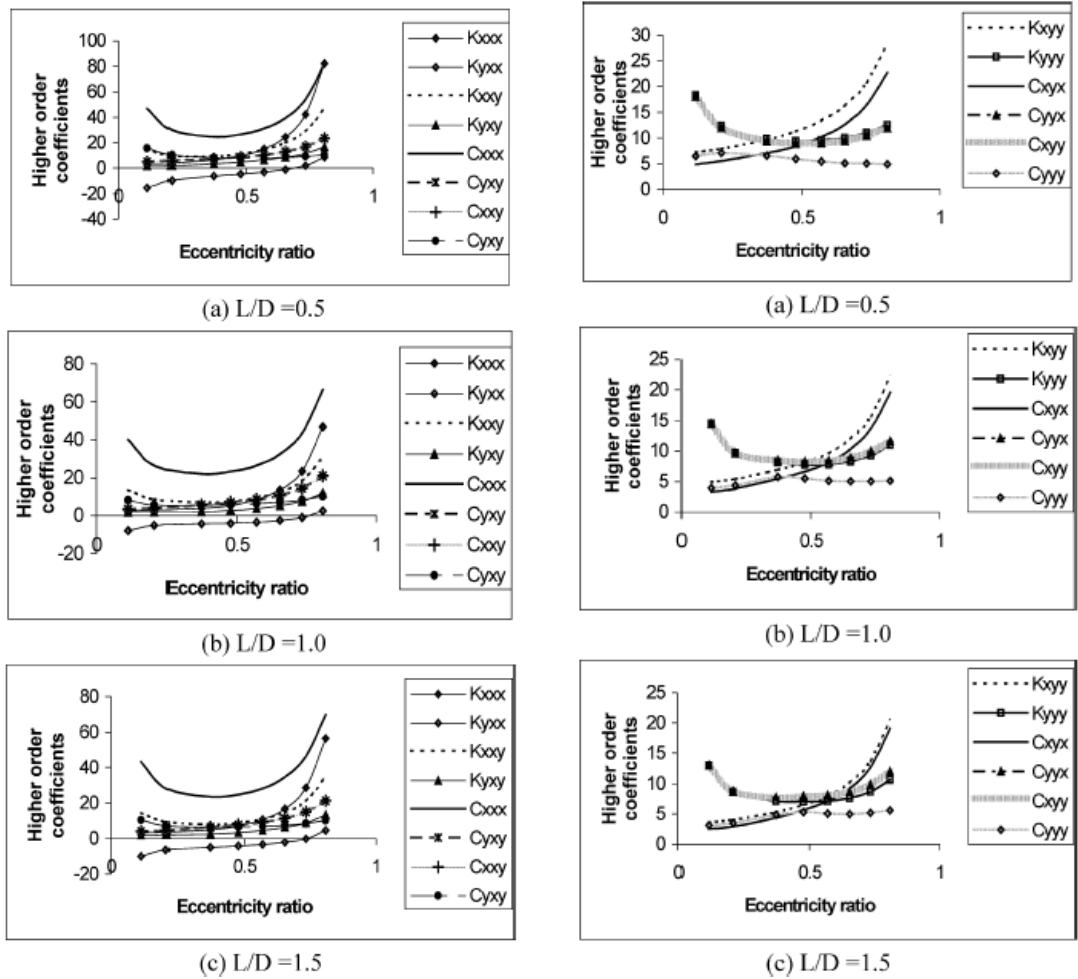
La variación de los coeficientes de rigidez y de amortiguamiento a lo largo de la órbita del muñón se consideran para las condiciones de operación dadas en el cuadro 21.4.

Las figuras 21.8 y 21.9 muestran los resultados obtenidos. (Son tomadas del trabajo de Jerzy *et. al.* [120]) . Como se ve en la figura 21.9 (izquierda) para **un número de Sommerfeld alto** ($S=1,1252$), la **variación de cuatro coeficientes de rigidez a $\alpha = 90^\circ$ y 0° es más alta comparados con los valores más bajos de número de Sommerfeld** ($S=1,2813$ y $0,1643$) esto es, relaciones de excentricidad más altas.

Se obtiene también, que en la respuesta transitoria de la trayectoria del muñón para todos los números de Sommerfeld, la **variación** de los coeficientes dinámicos (ambos, rigidez y amortiguamiento) es **más alta** para $\alpha = 0^\circ$ que los comparados para $\alpha = 90^\circ$.

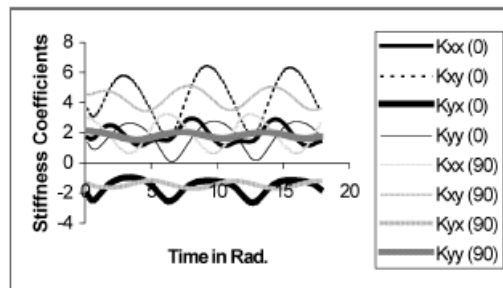
La no linealidad de la película de fluido es más grande a mayores relaciones de excentricidad que a menores relaciones de excentricidad (Concordancia entre los trabajos de Bently y Rao). Sin embargo, el **cambio en la no linealidad** con amplitudes de perturbación es más alta a menores relaciones de excentricidad (o números de Sommerfeld más altos) comparado con mayores relaciones de excentricidad (o números de Sommerfeld más bajos).

Figura 21.8: Variación de los coeficientes de orden superior con la relación de excentricidad a diferentes relaciones L/D .

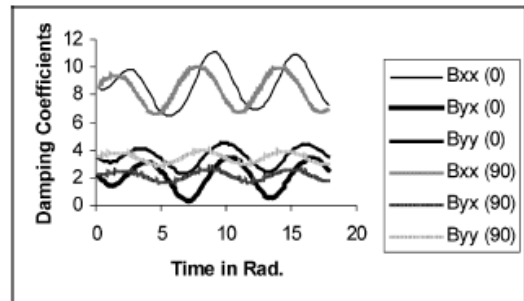


Fuente A Nonlinear Model for Prediction of Dynamic Coefficients in a Hydrodynamic Journal Bearing, Jerzy. T, 2002.

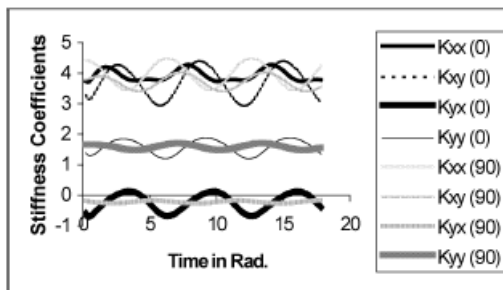
Figura 21.9: Representación de coeficientes dinámicos para tres números de Sommerfeld bajo carga dinámica ($F_d = 0,6$)



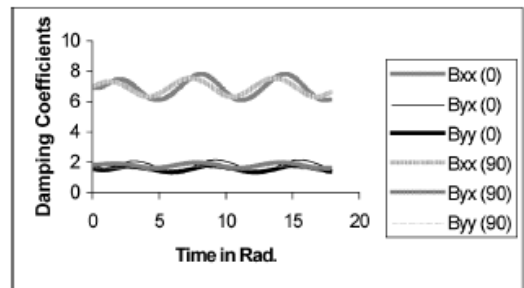
(a) $S=1.1252$ and $M=0.578$



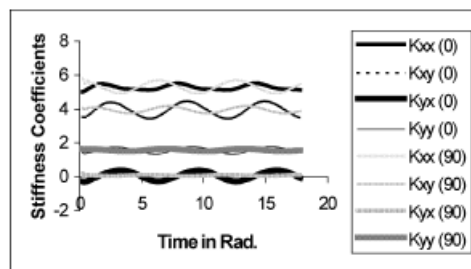
(a) $S=1.1252$ and $M=0.578$



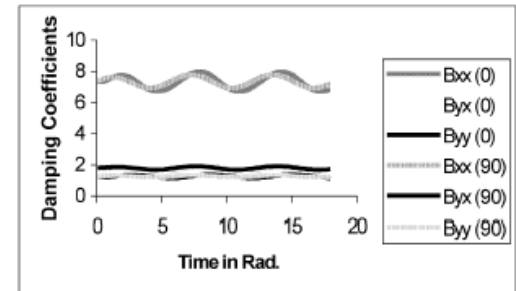
(b) $S=0.2813$ and $M=0.145$



(b) $S=0.2813$ and $M=0.145$



(c) $S=0.1643$ and $M=0.085$



(c) $S=0.1643$ and $M=0.085$

Fuente *Ídem*

Cuadro 21.4: Condiciones tomadas de Muller-Karger y Granados, 1997

<i>Características del cojinete y condiciones de operación</i>	
Número de Sommerfeld	0,2813, 0,1643 y 1,1252
Tipo de cojinete	Ranura bi-axial
Arco de almohadilla	150°
Ángulo de ranura	30°
Precarga	0,0
Factor de compensación	0,5
<i>L/D</i>	0,5
Orientación de la fuerza dinámica	0° y 90°
Amplitud de la fuerza	0,60
Frecuencia de excitación	Sincrónica

21.2.2. Predicción no lineal de los coeficientes rotodinámicos para un cojinete hidrodinámico

En el análisis de los cojinetes hidrodinámicos, los coeficientes de rigidez y amortiguamiento son extensamente utilizados para la evaluación de características de estabilidad y de respuesta dinámica. Bajo condiciones de operación dadas, estos coeficientes varían a lo largo de la posición de la respuesta orbital, y no es válido para grandes amplitudes en el movimiento del cojinete (40% del la holgura del cojinete). La evolución en el tiempo del movimiento de un cojinete para grandes amplitudes de vibración se predicen en este artículo usando un análisis no lineal (tiempo-transitorio). Esta publicación discute la idoneidad de los análisis basados en los coeficientes lineales y muestra la significativa variación de los coeficientes bajo condiciones de carga dinámica [126]. Se presenta un método para predecir los coeficientes dinámicos usando un análisis de regresión múltiple y los resultados son validados por comparación con la solución no lineal de la ecuación de Reynolds. Los coeficientes dinámicos son evaluados basándose en la posición de la órbita del muñón en estado transitorio, usando expansión de tercer orden de la serie de Taylor en la reacción del cojinete. También, los coeficientes son predichos para una órbita del muñón, con una dependencia no lineal del tamaño y la forma de la órbita. La órbita del centro del muñón se obtiene usando una técnica de simulación transitoria, donde incluye la solución simultanea de la ecuación de Reynolds y las ecuaciones de movimiento del rotor. Los coeficientes dinámicos son analizados para un cojinete de dos ranuras axiales para investigar el límite aceptable de los coeficientes lineales en el cojinete. La variación porcentual de la relación de los coeficientes hidrodinámicos indica que las no linealidades en los cojinetes son predominantes a bajas relaciones de excentricidad [126].

Introducción

Un análisis rotodinámico preciso del sistema rotor con cojinetes hidrodinámicos requiere entradas precisas de coeficientes de rigidez y amortiguamiento. Los coeficientes

dinámicos linealizados son evaluados para movimientos en pequeñas amplitudes infinitesimales del muñón sobre la posición de equilibrio. Sin embargo, bajo la influencia de una excitación dinámica externa, la órbita del rotor sobre la posición de equilibrio y los coeficientes dinámicos linealizados no representan el comportamiento debido a las grandes amplitudes de movimiento del muñón. Es conocido que las fuerzas en la película de fluido en el cojinete son una función no lineal del desplazamiento y la velocidad de perturbación del centro del muñón con respecto a su posición de equilibrio. Es importante predecir el movimiento no lineal del muñón bajo las condiciones dinámicas para evaluar la desviación de los coeficientes linealizados con respecto a la órbita del muñón. Los coeficientes no lineales de rigidez y amortiguamiento como una función de la amplitud de perturbación también puede ser estudiados para evaluar la dinámica a lo largo de la posición transitoria del muñón. Por otra parte, la comparación entre las trayectorias del muñón, determinadas usando los coeficientes dinámicos de orden superior, los cuales son obtenidos de la solución de las ecuaciones no lineales de movimiento (solucionando la ecuación de Reynolds en cada paso de tiempo), sólo se pueden validar los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de mayor orden para la órbita del muñón en consideración [126].

Los coeficientes dinámicos son evaluados en la posición de equilibrio utilizando el método de perturbación de Lund's, o la aproximación de perturbación finita. Qiu y Tieu demostraron que para amplitudes de perturbación arriba de 2% de desplazamiento y velocidad, los coeficientes dinámicos predichos usando ambos métodos, perturbación infinitesimal y finita, son lo mismos, mientras que para perturbaciones de amplitudes de 5% los resultados obtenidos difieren en 2.5%. La película de aceite no lineal en un cojinete fue estudiada por Diana, causando coeficientes de rigidez y amortiguamiento como función de las amplitudes de movimiento del muñón [126].

Choy, determinaron los coeficientes de rigidez no lineales de tercer, quinto y séptimo orden en varias localizaciones del punto de equilibrio. Las no linealidades en los cojinetes fueron examinadas basados en la derivación entre la rigidez exacta y linealizada. La rigidez linealizada fue evaluada en el punto de equilibrio mientras que la exacta fue obtenida por el enfoque de perturbación finita. Esto muestra que los desplazamientos lejos de la posición de equilibrio producen fuerzas no lineales en la película de aceite y pueden ser modeladas muy de cerca por los coeficientes de rigidez y amortiguación de orden superior.

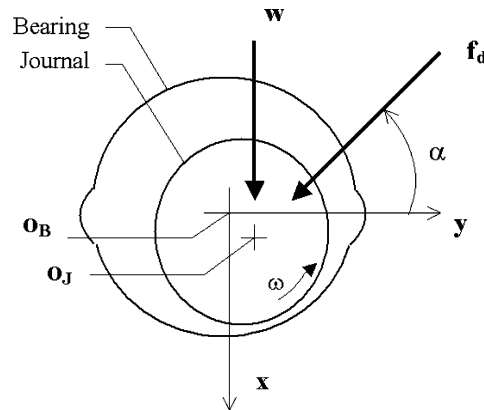
Procedimiento de solución

Un método de diferencias finitas con posterior relajación es empleado para evaluar los coeficientes linealizados de rigidez y amortiguamiento usando el método de perturbación infinitesimal. Para el análisis es considerado la mitad del cojinete, la rejilla computacional consta de 73 nodos en la dirección circunferencial y 7 nodos en la dirección axial [126].

El procedimiento para predecir los coeficientes dinámicos no lineales para la órbita del muñón a lo largo de la posición de dicha órbita pueden ser esquematizado como sigue:

1. Para el número de Sommerfeld dado son evaluados la relación de excentricidad, el ángulo de actitud y los coeficientes dinámicos.

Figura 21.10: Geometría y configuración de cojinete de doble ranura axial



Fuente Nonlinear prediction of rotordynamic coefficients for hydrodynamic journal bearing, J.T. Sawicki y T. Rao, 2001

2. Usando la ecuación de Reynolds en estado inestable, integrandola se solucionan para las presiones sobre la superficie del cojinete, teniendo en cuenta las condiciones apropiadas de frontera se obtienen las fuerzas inestables de la película de fluido.
3. Incorporar las fuerzas de reacción en las ecuaciones de movimiento del muñón, para determinar las nuevas posición y velocidad del centro del muñón. Se usa el método mejorado de Euler para integrar numéricamente estas ecuaciones.
4. Los pasos (2) y (3) se repiten hasta completar la trayectoria.
5. Las perturbaciones de desplazamiento y velocidad para cada posición a lo largo de la trayectoria del centro del muñón se calcula con respecto a la posición de equilibrio.
6. Para obtener la diferencia relativa entre los coeficientes de cada órbita a lo largo de la posición de la órbita con respecto a la posición de equilibrio, se aplica el método de los mínimos cuadrados, usando además, la aproximación por descomposición en valores singulares.

Resultados y Discusión

Los parámetros y las condiciones de operación para los cojinetes de doble ranura axial analizados por Muller-Karger y Granados, son usados en el presente estudio. El cuadro 21.5 muestra los parámetros de operación. Para validar el presente estudio, el movimiento transitorio del muñón se calculó usando los coeficientes dinámicos de orden superior determinados con análisis de múltiple regresión, y es comparado con la máxima solución no lineal de Reynolds integrada en cada etapa. Con el fin de establecer el rango de aplicación de los coeficientes lineales, los resultados son generados para un cojinete de doble ranura axial, con la magnitud y la orientación de la carga dinámica externa dada.

Cuadro 21.5: Parámetros del cojinete y condiciones de operación.

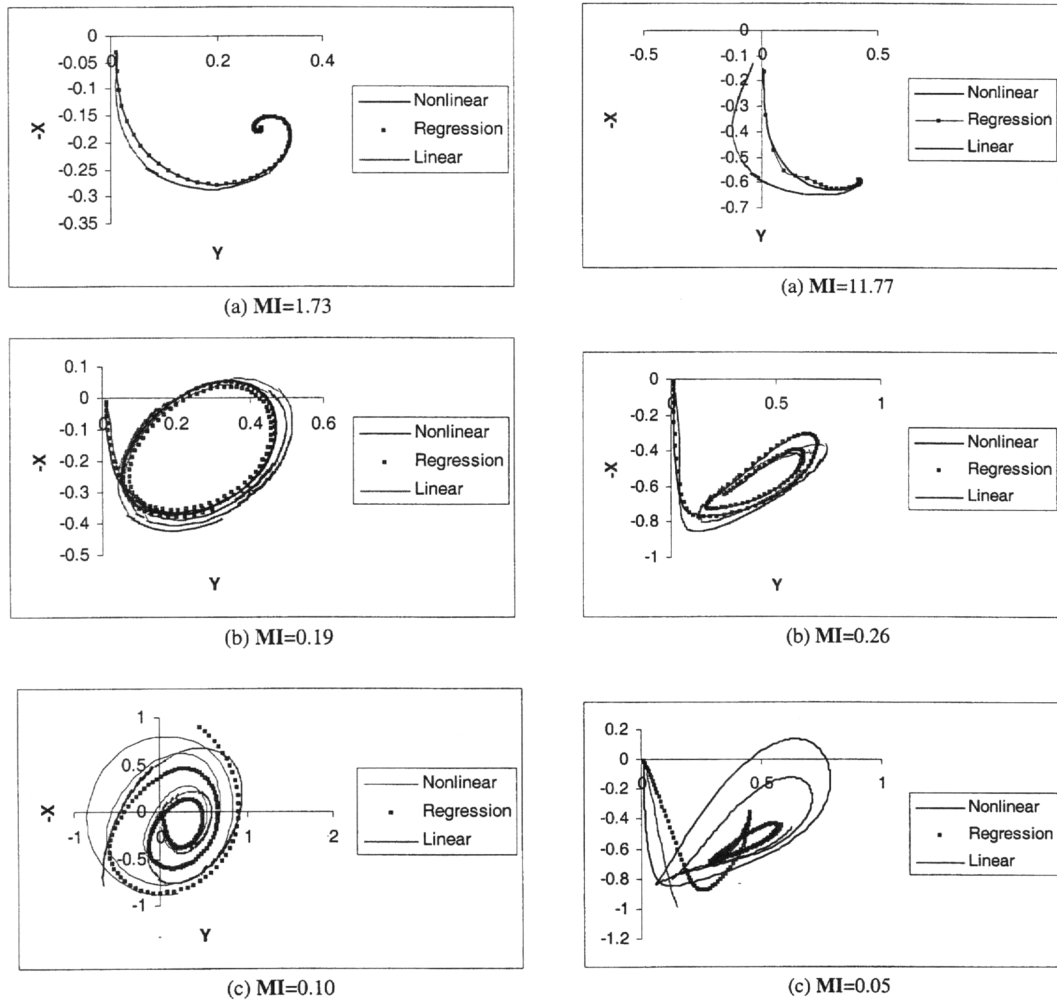
<i>Características del cojinete y parámetros de operación</i>	
Número de Sommerfeld	0,2813, 0,1643 y 1,1252
Tipo de cojinete	Dos ranuras axiales
Arco de la almohadilla	150°
Ángulo de la almohadilla	30°
Precarga	0,0
Factor de compensación	0,5
L/D	0,5
Orientación de la fuerza dinámica	0° y 90°
Amplitud de la fuerza	0,60
Frecuencia de excitación	Sincrónico

Los resultados son presentados en términos de la diferencia relativa de la variación de los coeficientes dinámicos obtenidos (i) a lo largo de la órbita del muñón (ii) para una órbita, con respecto al estudio infinitesimal de la evaluación de los coeficientes [126].

En las figuras 21.11 se presenta la comparación entre las forma de la órbita entre los enfoques no lineal, regresión y lineal, en un ambiente de perturbación para condiciones del centro del cojinete estable e inestable. En la figura 21.11a-21.11c (*izquierda*) se muestra la respuesta del muñón para $S = 1,1252$ y el valor del parámetro de masa inverso ($MI = 1,73, 0,19$ y $0,1$) a diferentes velocidades de operación. Bajo ambas condiciones, estable y no estable, los resultados del análisis de regresión tienen mucha concordancia con la solución no lineal, particularmente en comparación con el modelo de coeficientes de rigidez y amortiguamiento linealizados. En la figura 21.11c las trayectorias obtenidas para los tres enfoques representan un caso inestable. Solo el análisis no lineal predice un movimiento de ciclo límite mientras que para lo otros dos métodos, lineal y regresión el movimiento del muñón se aproxima al huelgo del cojinete. Las figuras 21.11a-21.11c (*derecha*) muestran la respuesta orbital para $S = 0,1643$ y $MI = 11,77, 0,26$ y $0,05$, a diferentes velocidades de rotación. La trayectoria lineal en comparación con la trayectoria obtenida por análisis de regresión, se desvía considerablemente de la trayectoria no lineal, para condición estable y crítica. Sin embargo, bajo condiciones no estables, el análisis de regresión predice movimiento de ciclos límites, la amplitud de vibración empieza a bajar en comparación con el análisis no lineal. Por otra parte, una vez el cojinete esta inestable para las condiciones de operación dadas, la trayectoria después de esto no tiene importancia.

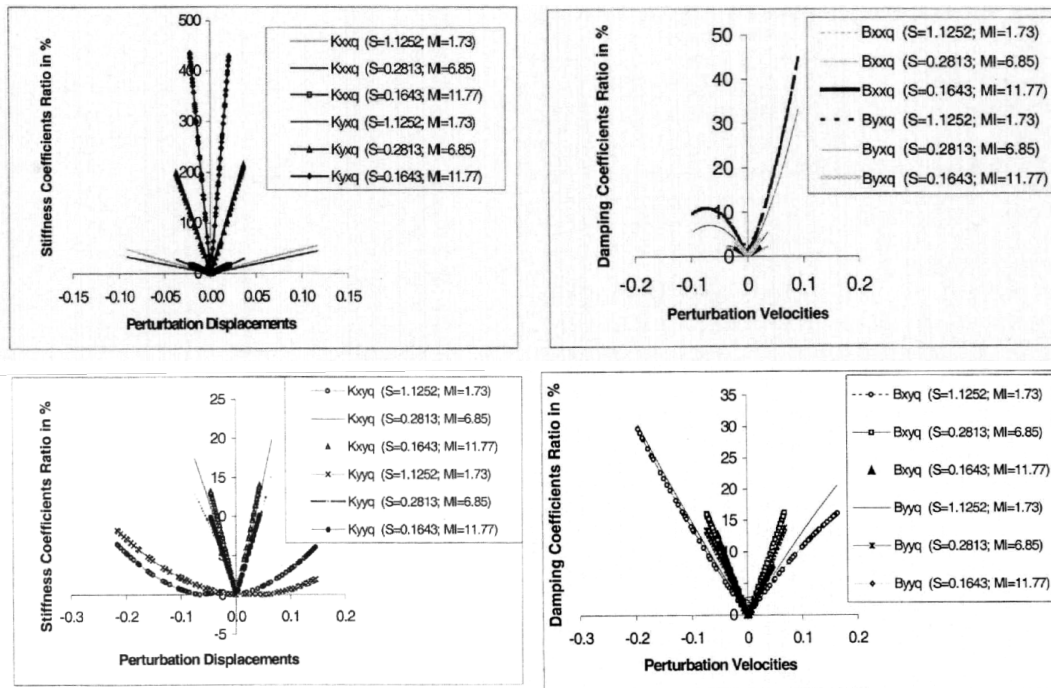
En general, se emplea el análisis de regresión múltiple lineal para el cálculo de los coeficientes dinámicos. Las no linealidades son función de la amplitud de las perturbaciones y por lo tanto los coeficientes son determinados basados en la posición del muñón usando los términos de orden superior en la expansión de fuerzas del cojinete. Como las no linealidades dependen del tamaño y forma de la órbita, también los coeficientes no lineales se obtienen para la órbita del muñón. Para determinar los límites aceptables para el uso de los coeficientes linealizados, se analiza la variación porcentual de los resultados de los

Figura 21.11: (Izquierda). Respuesta transitoria del muñón para $S = 1,1252$. (Derecha). Respuesta transitoria del muñón para $S = 0,1643$



Fuente *Ídem*

Figura 21.12: Variación del coeficiente de **rigidez** (izquierda) y **amortiguamiento** (derecha) a lo largo de la trayectoria del cojinete para $\alpha = 0^\circ\text{C}$ y $F_d = 0,6$.



Fuente *Ídem*

coeficientes dinámicos no lineales con referencia a los coeficientes linealizados. Algunas conclusiones obtenidas en este estudio son:

1. Los movimientos de **ciclos límites** del muñón a grandes relaciones de excentricidad, predichos usando los coeficientes no lineales (obtenidos por análisis de regresión), exaltan la importancia de las no linealidades en la película de fluido a bajas relaciones de excentricidad
2. La desviación porcentual de los coeficientes de rigidez es baja a pequeñas relaciones de excentricidad, y la variación aumenta al incrementar dicha relación, mientras que para los coeficientes de amortiguamiento es grande a pequeñas relaciones de excentricidad
3. Las no linealidades son grandes para órbitas alargadas y en comparación con órbitas más redondeadas.

21.3. EFECTO DE LA TURBULENCIA EN LOS COEFICIENTES ROTODINÁMICOS

La turbulencia es un fenómeno que ocurre inevitablemente en la lubricación hidrodinámica de cojinetes (ver sección 20) debido a las condiciones límite de operación. La turbulencia puede generar tendencias impredecibles y caóticas en el comportamiento del sistema rotor - cojinete, como lo es la inestabilidad. Una forma de describir el efecto de la turbulencia en el sistema rotor, es a través del modelado mediante los coeficientes rotodinámicos. El libro de *Agnieszka, 2005* [114] es una fuente muy valiosa de información para la determinación de coeficientes rotodinámicos, especialmente en el capítulo 4 donde se tratan a fondo temas como la variación en las propiedades del flujo en los cojinetes. Como complemento, la temática se estudiará a partir de dos publicaciones internacionales donde se relaciona la turbulencia y las propiedades dinámicas de la película de fluido.

21.3.1. Análisis dinámico no lineal del contacto superficial de un rotor soportado por un cojinete turbulento con una suspensión no lineal

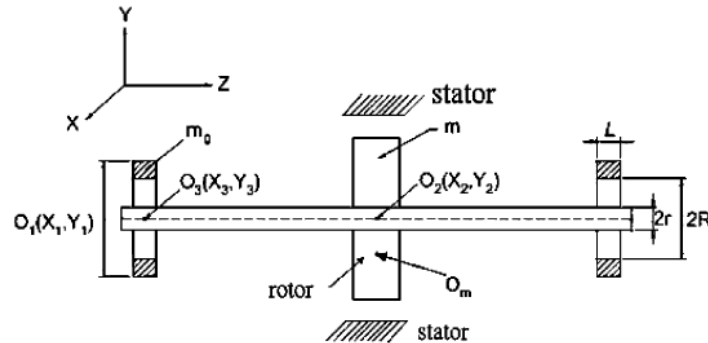
Este estudio presenta un análisis dinámico del impacto por rozamiento de un rotor soportado en dos cojinetes de modelo turbulento con una suspensión no lineal. El análisis del sistema rotor-cojinete se investiga bajo las suposiciones de flujo turbulento del lubricante en la aproximación de un cojinete corto. Los desplazamientos en las direcciones horizontal y vertical se consideran para varias relaciones de velocidad adimensional y parámetros de desequilibrio dimensional. Este estudio provee un mayor entendimiento de las características y del comportamiento del sistema rotor-cojinete.

En un sistema rotor-cojinete, la presión hidrodinámica se genera enteramente por el movimiento del muñón y depende de la viscosidad del fluido. Sin embargo, la presión hidrodinámica alrededor del cojinete no es lineal por lo tanto la película de fluido del sistema rotor-cojinete tiene una fuerte no linealidad. Este causa sustanciales vibraciones entre el rotor y su cojinete. Brown, como lo menciona *Chang (2009) et al.* [117] desarrolló un modelo simple de un rígido, hidrodinámicamente soportado en un cojinete usando la teoría de cojinete corto. Este presentó que el cojinete se comportaba **caóticamente** cuando la fuerza por la rotación de masa desequilibrada (desbalanceo) excede la carga gravitacional. Si un sistema cae en el caos, su comportamiento será difícil de predecir y controlar. Por tanto, identificar el movimiento caótico y tomando los pasos adecuados para evitar las condiciones que lo inducen son muy importantes.

Para obtener una solución que se aproxime lo suficientemente al comportamiento dinámico real del sistema rotor-cojinete, es necesario considerar el rotor flexible soportado por cojinetes turbulentos y suspensión no lineal (Ver gráfica 21.13). Las trayectorias dinámicas del rotor y el centro del cojinete, espectros de potencia, mapas de Poincaré¹,

¹En un sistema tridimensional, los *diagramas de Poincaré* (DP) se forman por los puntos que se generan al interceptar cada una de las órbitas del atractor a una superficie plana perpendicular a las trayectorias en

Figura 21.13: Modelo de un rotor flexible soportado dos cojinetes turbulentos.



Fuente Non-linear dynamic analysis of rub-impact rotor supported by turbulent journal bearings with non-linear suspension, Chang-Jian *et al.*, 2008

diagramas de bifurcación y exponentes máximos de Lyapunov se aplican para analizar el sistema rotor-cojinete.

Modelado matemático

En este estudio, se usa la ecuación de Reynolds turbulenta y la suposición de cojinete corto. La ecuación dinámica de Reynolds turbulenta en la teoría de lubricación hidrodinámica puede ser escrita como (tomada de Lahmar, 2000 [122]):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3 G_\theta}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3 G_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{U}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (21.20)$$

donde $1/G_\theta = 12 + 0,0260 (Re^*)^{0,8265}$, $1/G_z = 12 + 0,0198 (Re^*)^{0,741}$, que son los coeficientes de turbulencia y Re^* es el número de Reynolds local. La fuerza resultante de la superficie lubricada alrededor del centro del muñón en la dirección radial y tangencial se determinan por la integración de la ecuación 21.21 sobre el área de la camisa del cojinete. (Véase la deducción completa en el trabajo de Chan [117])

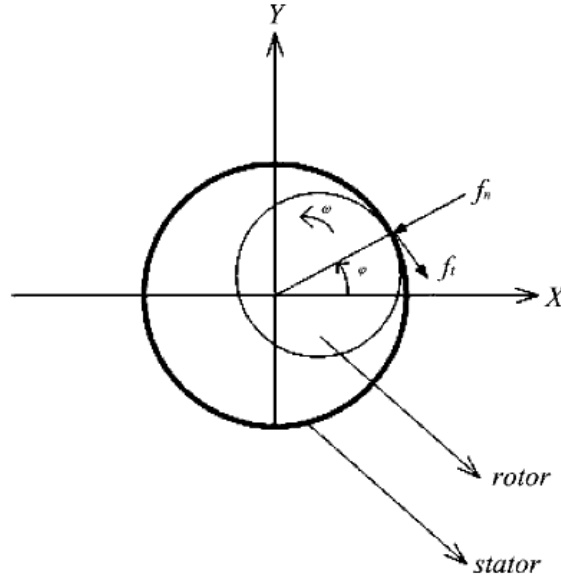
$$p = \frac{-0,5\mu\omega c \varepsilon \sin\theta + \mu c (\dot{\varepsilon} \cos\theta + \varepsilon \dot{\varphi} \cos\theta)}{h^3 G_z} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{L^2}{8} \right) \quad (21.21)$$

$$f_r = \int_0^\pi \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p R \cos\theta dz d\theta \quad (21.22)$$

$$f_t = \int_0^\pi \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p R \sin\theta dz d\theta \quad (21.23)$$

el mapa de fases (MF).

Figura 21.14: Las fuerzas de rozamiento e impacto.



Fuente *Ídem*

$$f_e = -f_r, \quad f_\varphi = -f_t$$

Por lo tanto,

$$f_e = \frac{\mu RL^3}{24c^2 G_z} \int_0^\pi \frac{[\varepsilon(-\omega + 2\dot{\varphi}) \sin\theta + 2\dot{\varepsilon} \cos\theta] \cos\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^3} d\theta \quad (21.24)$$

$$f_\varphi = \frac{\mu RL^3}{24c^2 G_z} \int_0^\pi \frac{[\varepsilon(-\omega + 2\dot{\varphi}) \sin\theta + 2\dot{\varepsilon} \cos\theta] \sin\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^3} d\theta \quad (21.25)$$

De la figura 21.14, la fuerza de impacto radial f_n y la fuerza de rozamiento tangencial f_t pueden ser expresadas como:

$$f_n = (e - \delta) k_c \quad (21.26)$$

$$f_t = (f + bv) f_n, \quad \text{si } e \geq \delta \quad (21.27)$$

La figura 21.13 muestra un rotor flexible soportado horizontalmente por dos cojinetes turbulentos idénticos y alineados con muelles no lineales. O_m es el centro de gravedad del rotor, O_1 es el centro geométrico del cojinete, O_2 es el centro geométrico del rotor, O_3 es el centro geométrico del muñón. Del equilibrio de fuerzas, las fuerzas aplicadas al centro muñón en O_3 son:

$$F_x = f_e \cos \varphi + f_\varphi \sin \varphi = k_s(X_2 - X_3)/2 \quad (21.28)$$

$$F_y = f_e \sin \varphi - f_\varphi \cos \varphi = k_s(Y_2 - Y_3)/2 \quad (21.29)$$

donde f_e y f_φ son las fuerzas viscosas resultantes en la dirección radial y tangencial.

El autor define entonces las ecuaciones de movimiento del centro del rotor O_2 y del centro del cojinete O_1 en coordenadas cartesianas.

$$m\ddot{X}_2 + c_2\dot{X}_2 + k_s(X_2 - X_3) = m\rho\omega^2 \cos \phi \quad (21.30)$$

$$m\ddot{Y}_2 + c_2\dot{Y}_2 + k_s(Y_2 - Y_3) = m\rho\omega^2 \sin \phi - mg \quad (21.31)$$

$$m_0\ddot{X}_1 + c_1\dot{X}_1 + k_1X_1 + k_2X_1^3 = F_x \quad (21.32)$$

$$m_0\ddot{Y}_1 + c_1\dot{Y}_1 + k_1Y_1 + k_2Y_1^3 = -m_0g + F_y \quad (21.33)$$

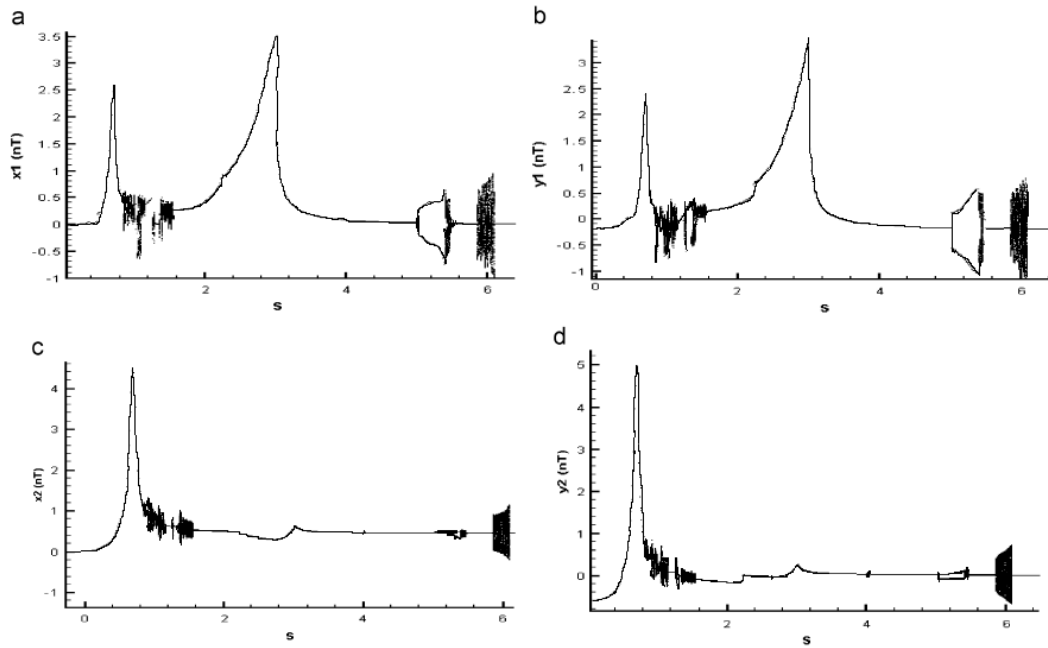
donde g es la aceleración de la gravedad, F_x y F_y son las componentes de las fuerzas de la película de fluido apretado. Al relacionar las ecuaciones (21.24-21.33) el autor desarrolla un sistema de ecuaciones dinámicas no lineales. Estas ecuaciones diferenciales pueden ser resueltas por métodos numéricos (Se encuentra en detalle en el trabajo del autor).

El tiempo de paso para la integración numérica se especifica como $\pi/300$ y el error de tolerancia es menor que 0,0001. Note que los datos para series de tiempo de las primeras 800 revoluciones del rotor se excluyen deliberadamente de la investigación del comportamiento dinámico para asegurar que los datos usados correspondan al estado estable.

Análisis de los resultados

El trabajo realizado por los autores será resumido, presentando algunos casos específicos de la solución. Las figuras 21.15 (a-d) son diagramas de bifurcación del centro del cojinete y el centro del rotor en las direcciones horizontal y vertical con la velocidad de rotación como parámetro de control. La simulación de los resultados muestran que la amplitud de la vibración del centro del cojinete y del rotor son grandes a bajas relaciones de velocidad y las respuestas dinámicas son sincrónicas con periodo uno. Esto demuestra que la mayoría de las turbo-maquinarias o sistemas rotor cojinete suelen mantener la vibración regular o vibración periódica a baja velocidad o velocidad inicial de trabajo. La amplitud llega a ser gradualmente más grande a medida de que la velocidad incrementa. La respuesta periódica ocurre a $s = 0,78$ con una gran amplitud. La amplitud es 2,5c para la órbita del cojinete y 4,0c para la órbita del rotor. Pero la trayectoria del centro del cojinete y del centro del rotor se hace irregular y no periódica para relaciones de velocidad $s = 0,84 - 1,54$, donde se presenta el llamado movimiento caótico. La relación de velocidad de rotación se usa comúnmente como parámetro para observar las características bifurcación en la respuesta dinámica (también se utiliza como factor de control de turbo-maquinaria y sistemas rotor cojinete).

Figura 21.15: Diagramas de bifurcación del centro del cojinete y el centro del rotor en las direcciones horizontal y vertical.



Fuente *Ídem*

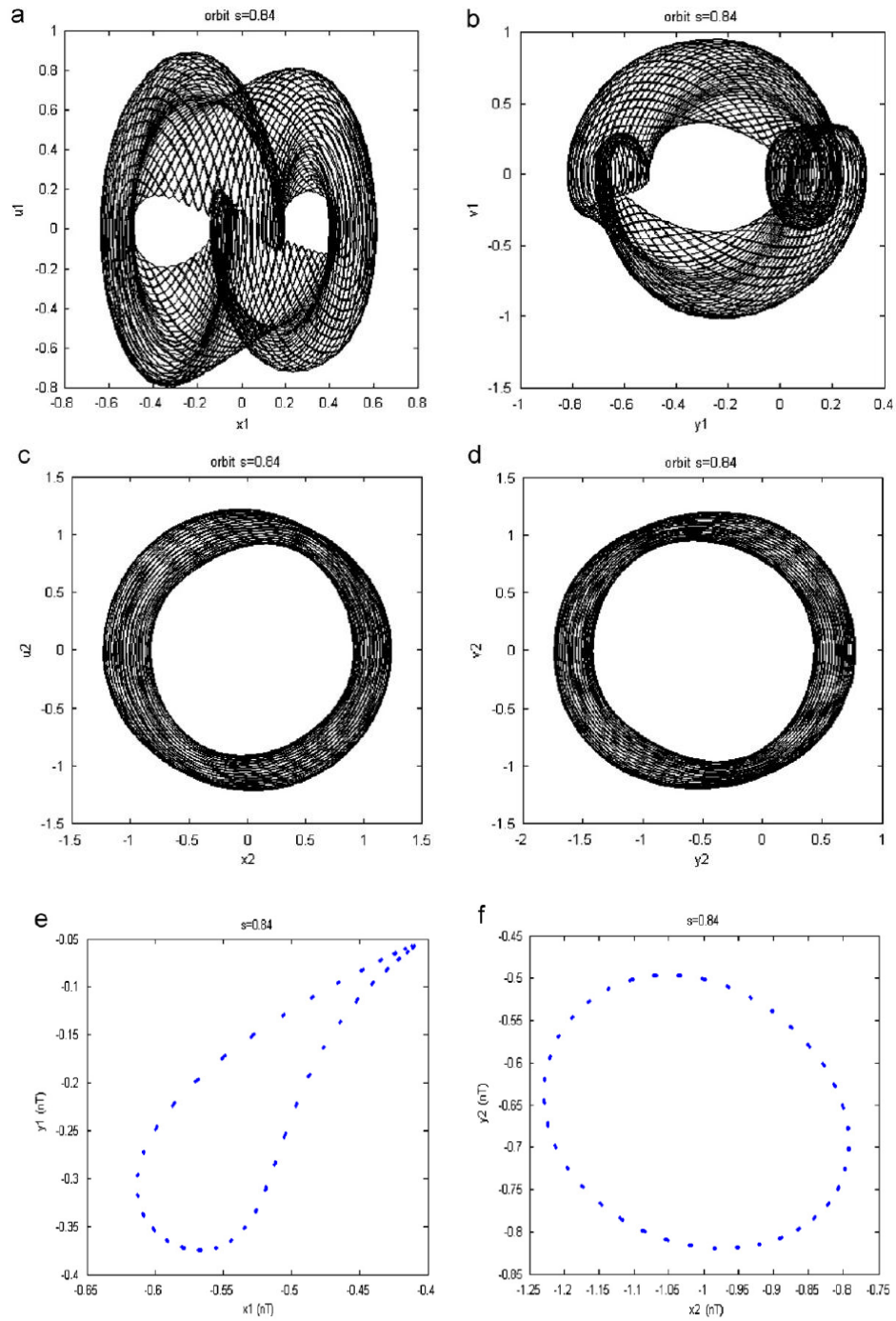
El autor, representa la trayectoria, el espectro de potencia y los mapas de Poincaré de ocho puntos significativos respecto de la velocidad de giro ($s = 0,84 - 1,54 - 5,3 - 5,3 - 5,6 - 5,47 - 5,85 - 6,08$). Para evaluar los resultados se mostrarán los resultados cuando $s = 0,84$ y $s = 5,3$.

De las figuras 21.16 a 21.19, se muestra el comportamiento para el centro del rotor y del cojinete de las velocidades mencionadas. Las figuras (a, b, c y e), muestran la trayectoria del cojinete y rotor con respecto a las velocidades de sus centros. Más adelante, (e y f) son mapas de Poincaré y de la (g) a la (j) espectros del sistema. Los resultados de los diagramas muestran que la órbita dinámica del centro del cojinete y del rotor no son periódicas y se llaman cuasi-periódicas para el movimiento a $s = 0,84$. A $s = 5,3$ el movimiento del sistema llega a ser $2T$ -periódico. Dos puntos discretos aparecen en el mapa de Poincaré (figura 21.18) y los diagramas de espectro también demuestran que la respuesta dinámica es del movimiento $2T$ -periódico (figura 21.19).

Este artículo, presenta un análisis dinámico no lineal de un sistema rotor cojinete bajo una suspensión no lineal comprendida por dos cojinetes modelados con flujo turbulento. En él, se fusionan en comportamiento dinámico del sistema rotor con la fuerza generada por la película de fluido encerrado en un flujo turbulento. Esta vinculación resulta en un sistema de ecuaciones diferenciales que se resuelve por métodos numéricos; se valida con la experimentación hecha por otros autores y se presenta un sistema gráfico detallado del comportamiento dinámico. El valor agregado del aporte está en disponer un modelo y

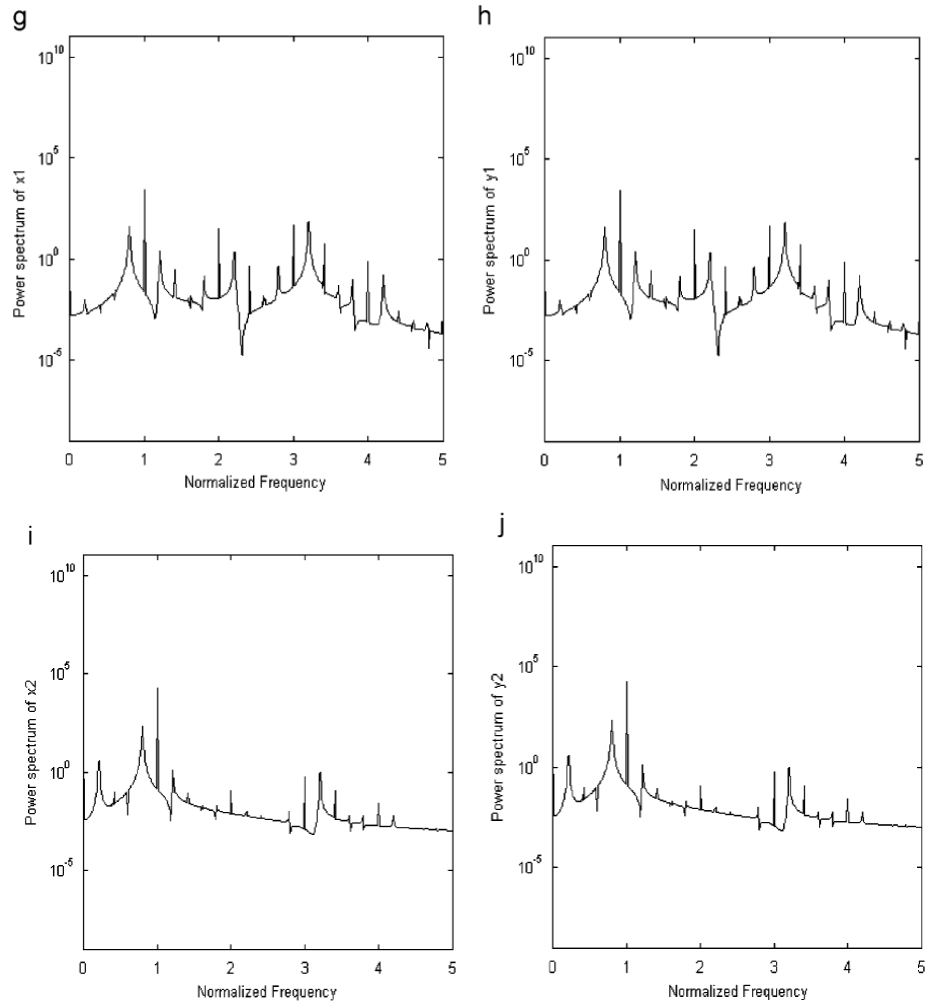
representación experimental mucho más adecuado de la lubricación hidrodinámica.

Figura 21.16: Trayectoria y mapa de Poincaré para el centro del cojinete y centro del rotor $s = 0,84$.



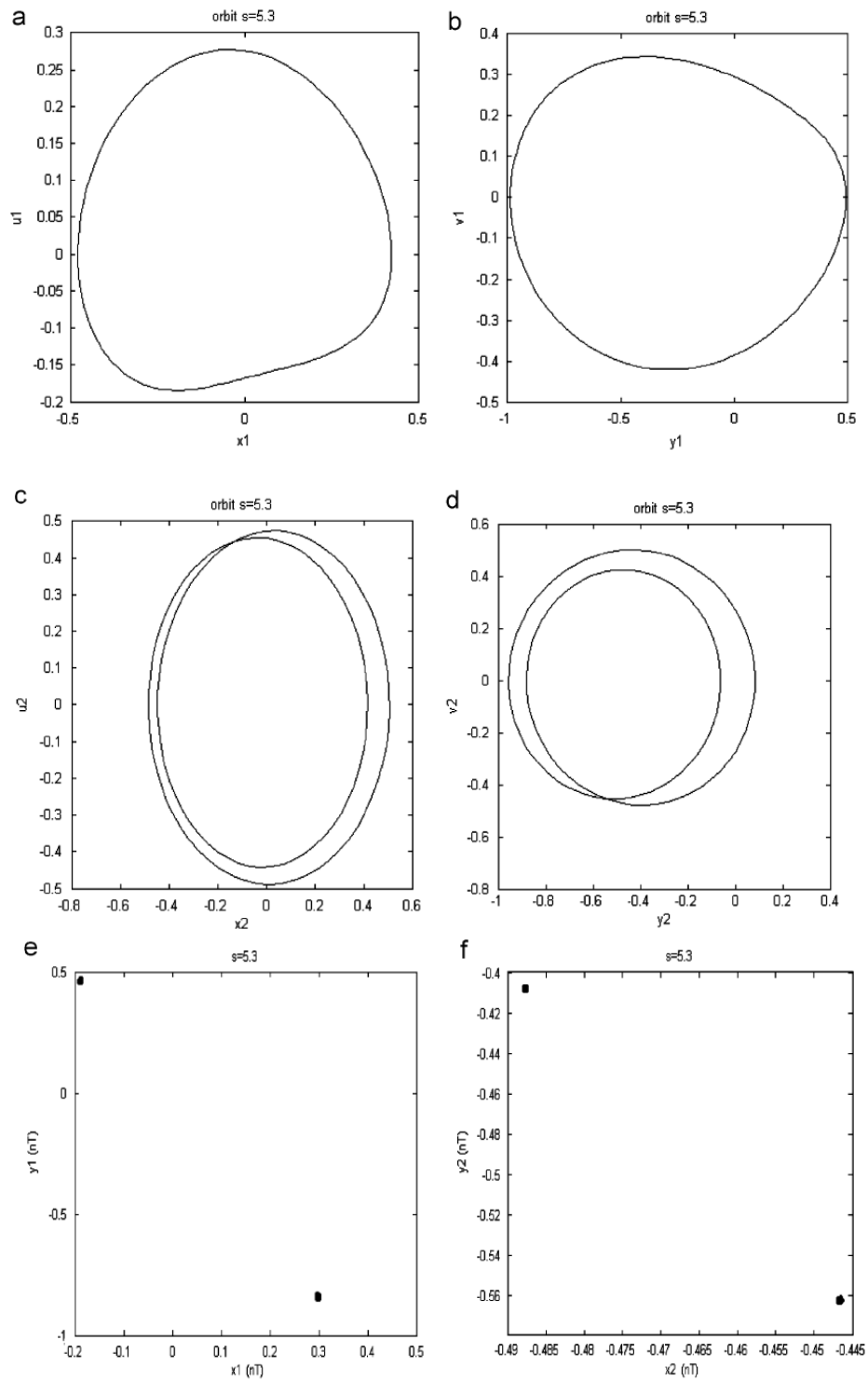
Fuente *Ídem*

Figura 21.17: Espectro de potencia para el centro del cojinete y centro del rotor $s = 0,84$.



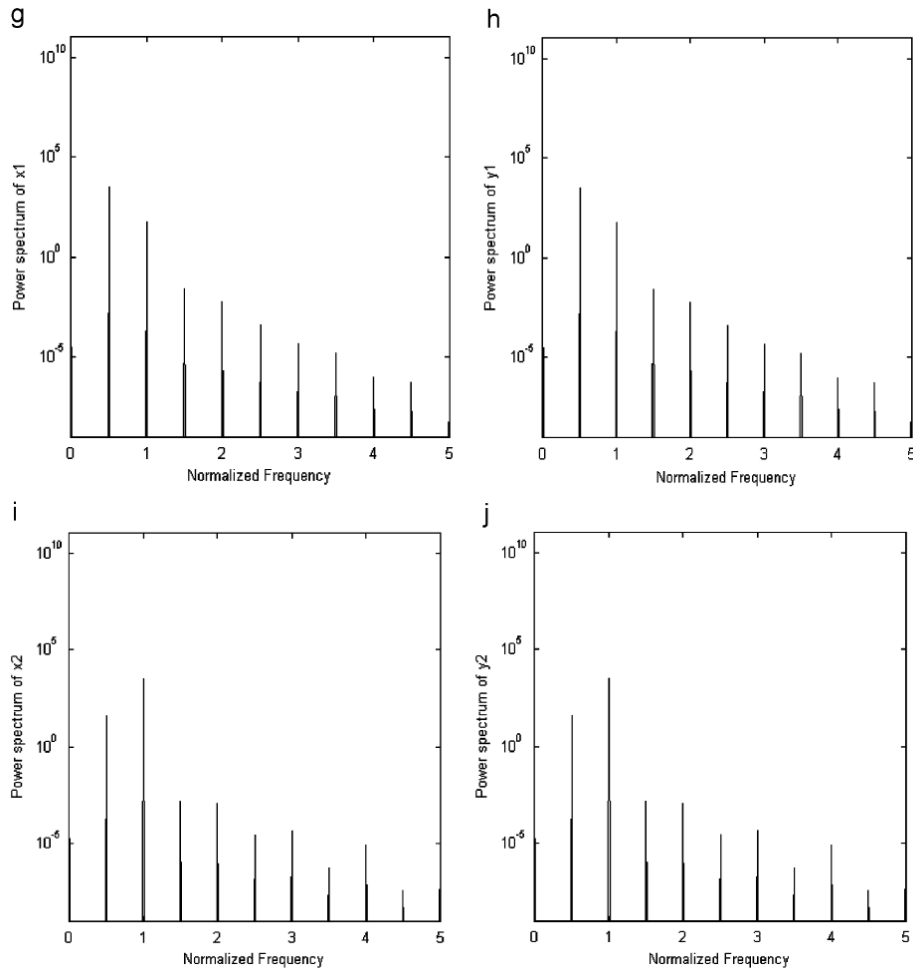
Fuente *Ídem*

Figura 21.18: Trayectoria y mapa de Poincaré para el centro del cojinete y centro del rotor $s = 5,3$.



Fuente *Ídem*

Figura 21.19: Espectro de potencia para el centro del cojinete y centro del rotor $s = 5,3$.



Fuente *Ídem*

21.3.2. Análisis rotodinámico de sistemas con un modelo no lineal de cojinete de almohadilla incluyendo los efectos de la turbulencia

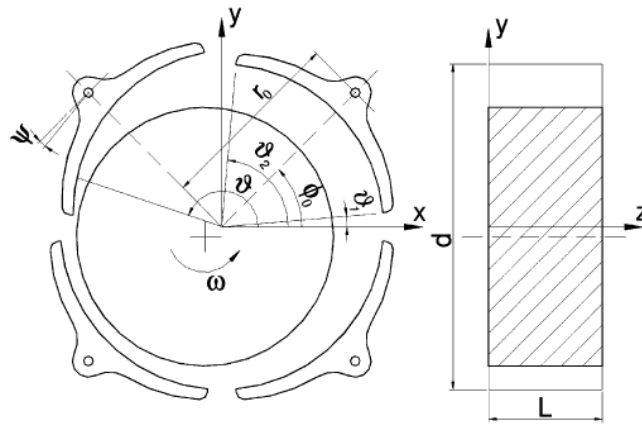
En este estudio se desarrolla un modelo analítico para un cojinete de almohadilla inclinada bajo la suposición de cojinete corto incluyendo los efectos de la turbulencia. Con el objeto de determinar la influencia de la turbulencia en el comportamiento dinámico del rotor se compara con uno sin dicho efecto a través de una simulación de un rotor Jeffcott soportado por una pareja de cojinetes. Los parámetros que presentan mayor influencia son: precarga de la almohadilla, número de segmentos, holgura radial, posición de la almohadilla y ángulo de posición de la almohadilla. El modelo de cojinete con el efecto de flujo turbulento ha generado fuerzas hidrodinámicas más grandes que el modelo sin este efecto, lo que indica la importancia de considerar tal fenómeno durante el análisis de

cojinetes hidrodinámicos de altas velocidades [125]. El autor resalta trabajos importantes como el de Capone *et al.* [116] quien ha presentado un método analítico para incluir el efecto de la turbulencia en un cojinete cilíndrico corto; este modelo se ha desarrollado para estudiar la inestabilidad de la película de fluido de un rotor rígido en soportes rígidos, y se concluyó que la estabilidad del rotor fue sobrestimada cuando el efecto del flujo turbulento fue despreciado. Por su parte Hashimoto *et al.* [119] ha analizado las características dinámicas de un cojinete cilíndrico turbulento con el uso de la teoría de cojinete corto y las condiciones de frontera de Gumbel, y demostraron que los efectos turbulentos llegan a ser más significativos a mayores incrementos de velocidad del rotor.

Modelado matemático

El primer paso del modelado en cojinetes hidrodinámicos es el desarrollo de una ecuación para el espesor de la película de aceite h , que considere la excentricidad, precarga de la almohadilla y posición del pivote de la almohadilla. La figura 21.20 muestra los parámetros geométricos de un cojinete de almohadilla utilizados. El modelo desarrollado considera que el eje está alineado con el muñón, por lo tanto, el espesor de la película \bar{h} es independiente de la coordenada axial \bar{z} , y puede ser descrita según la ecuación 21.34

Figura 21.20: Parámetros geométricos del cojinete de almohadillas inclinadas.



Fuente Rotordynamic analysis of systems with a non-linear model of tilting pad bearings including turbulence effects, Okabe, E.P *et al.*, 2009

$$\bar{h} = c_r - \bar{x} \cdot \cos \vartheta - \bar{y} \cdot \sin \vartheta - \psi \cdot \bar{r}_0 \cdot \sin(\vartheta - \phi_0) - m \cdot c_r \cdot \cos(\vartheta - \phi_0) \quad (21.34)$$

donde c_r es el claro radial, \bar{x} es el desplazamiento horizontal, \bar{y} es el desplazamiento vertical, ϑ es el ángulo del sistema de coordenadas del cojinete, ψ es el ángulo de rotación de la almohadilla, \bar{r}_0 es la distancia del pivote al centro del cojinete, ϕ_0 es el ángulo del pivote, y m es la almohadilla precargada. Escribiendo la ecuación 21.34 en forma adimensional en relación con el claro radial

$$h = \frac{\bar{h}}{c_r} = 1 - x \cdot \cos \vartheta - y \cdot \sin \vartheta - \psi \cdot r_0 \cdot \sin(\vartheta - \phi_0) - m \cdot \cos(\vartheta - \phi_0) \quad (21.35)$$

Definiendo las nuevas variables x_p, y_p

$$x_p = x - \psi y_0 + m \cdot \cos \phi_0 \quad (21.36)$$

$$y_p = y - \psi x_0 + m \cdot \sin \phi_0 \quad (21.37)$$

El espesor de película adimensional se puede expresar como

$$h = 1 - x_p \cdot \cos \vartheta - y_p \cdot \sin \vartheta \quad (21.38)$$

El modelo también considera la temperatura constante, y para contar el efecto del flujo turbulento, se incluyen los coeficientes de turbulencia G_z y G_ϑ en la ecuación de Reynolds. Después de estas consideraciones, la ecuación de Reynolds llega a ser [125]

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\bar{h}^3}{\mu G_\vartheta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\bar{h}^3}{\mu G_z} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = 6 \left(\omega \frac{\partial \bar{h}}{\partial \vartheta} + 2 \frac{d\bar{h}}{dt} \right) \quad (21.39)$$

Usando un enfoque adimensional, se adoptarán las siguientes relaciones

$$p = \frac{\bar{p}}{p_0}, \quad p_0 = 6\mu\omega \left(\frac{r}{c_r} \right)^2, \quad k = \frac{r}{L}, \quad z = \frac{\bar{z}}{L}, \quad \tau = \omega t \quad (21.40)$$

donde τ es la variable de tiempo modificado. Aplicando las variables adimensionales (Ecuación 21.40), y despreciando el término de la variación de la presión circunferencial la ecuación de Reynolds (21.39), se convierte en

$$k^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{G_z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial h}{\partial \vartheta} + 2 \frac{dh}{d\tau} \quad (21.41)$$

Derivando el espesor de película adimensional (ecuación 21.35) con respecto a la variable τ se obtiene

$$\frac{dh}{d\tau} = -\dot{x} \cdot \cos \vartheta - \dot{y} \cdot \sin \vartheta - \dot{\psi} \cdot r_0 \cdot \sin(\vartheta - \phi_0) \quad (21.42)$$

Derivando la ecuación 21.35 con respecto a la variable ϑ se obtiene

$$\frac{\partial h}{\partial \vartheta} = x \cdot \sin \vartheta - y \cdot \cos \vartheta - \psi \cdot r_0 \cdot \cos(\vartheta - \phi_0) \quad (21.43)$$

Sustituyendo las ecuaciones 21.42 y 21.43 en la ecuación 21.41 se obtiene una expresión explícita para la derivada de segundo orden de la presión con respecto de z . Entonces, al integrar analíticamente dicha ecuación se tiene

$$\bar{p}(\vartheta, z) = \frac{1}{2} G_z \left(\frac{L}{d} \right)^2 \frac{v_x \sin \vartheta - v_y \cos \vartheta}{(1 - x_p \cos \vartheta - y_p \sin \vartheta)^3} (4z^2 - 1) \quad (21.44)$$

donde

$$v_x = (x - \psi y_0) - 2(\dot{y} + \dot{\psi} x_0) + m \cdot \cos \phi_0 \quad (21.45)$$

$$v_y = (y - \psi x_0) - 2(\dot{x} + \dot{\psi} y_0) + m \cdot \sin \phi_0 \quad (21.46)$$

Adoptando el modelo turbulento de Capone [116] el coeficiente de turbulencia axial G_z se puede escribir como

$$G_z = 1 + \gamma s h Re^{0,96} \quad (21.47)$$

donde

$$s = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2 Re_t - Re_1}{\pi Re_t + Re_1} \frac{Re/Re^*}{1 - Re/Re^*} \right) \quad (21.48)$$

$$Re_t = 41,2 \left[\frac{R/C}{(1 - \varepsilon)^3 + \frac{4}{3} (L/D)^2 \dot{\varepsilon}^2 (1 - \varepsilon)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (21.49)$$

$$Re_1 = 41,2 \left[\frac{R/C}{(1 + \varepsilon)^3 + \frac{4}{3} (L/D)^2 \dot{\varepsilon}^2 (1 + \varepsilon)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (21.50)$$

$$Re^* = \frac{Re_t + Re_1}{2} \quad (21.51)$$

$$\varepsilon = \left(x_p^2 + y_p^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{x_p \dot{x}_p + y_p \dot{y}_p}{\varepsilon} \quad (21.52)$$

además γ es una constante de turbulencia ($3,67 \times 10^{-4}$), Re_1 es el número de Reynolds cuando la película está completamente en régimen laminar, Re_t es el número de Reynolds para el lubricante en el régimen turbulento, ε es la relación de excentricidad, y $\dot{\varepsilon}$ es la derivada de la relación de excentricidad con respecto del tiempo.

Las fuerzas hidrodinámicas F_X y F_Y generada para cada almohadilla calculado a través de la integración de $\bar{p}(\vartheta, z)$ con respecto a ϑ con los límites de ϑ_1 a ϑ_2 , y z con los límites de $-\frac{L}{2}$ a $+\frac{L}{2}$:

$$\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \bar{p} \begin{Bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{Bmatrix} dzr d\vartheta \quad (21.53)$$

Las fuerzas adimensionales se pueden calcular a través de la siguiente ecuación:

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \left(\mu \omega \left(\frac{r}{c_r} \right)^2 \left(\frac{L}{d} \right)^2 r \cdot L \right)^{-1} \begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} \quad (21.54)$$

Integrando con respecto a z , aplicando las fuerzas hidrodinámicas adimensionales (ecuación 21.54) y reemplazando en la ecuación 21.44 se obtiene:

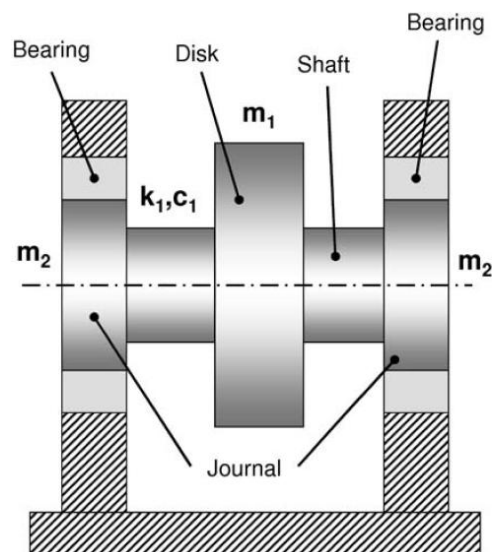
$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = 2 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} G_z \frac{v_x \sin \vartheta - v_y \cos \vartheta}{(1 - x_p \cos \vartheta - y_p \sin \vartheta)^3} \begin{Bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{Bmatrix} d\vartheta \quad (21.55)$$

La ecuación encontrada requiere un tratamiento matemático complejo (ver Capone [116]) y valiéndose de un procedimiento computacional se resuelve la integración del sistema.

Simulación

Se lleva a cabo una simulación de un rotor horizontal soportado por un par de cojinetes de almohadillas inclinadas idénticas, para determinar su influencia en el comportamiento dinámico del rotor. Se emplea un rotor, como el mostrado en la figura 21.21; un

Figura 21.21: Esquema de rotor Jeffcot/Laval soportado por dos cojinetes.



Fuente *Ídem*

rotor simétrico flexible con un disco central, donde es posible cambiar la masa de desba-

lanceo, así se puede lograr cualquier valor de excentricidad del rotor. Las ecuaciones 21.56 a 21.59 gobiernan el movimiento para el rotor y el cojinete

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 (x_1 - x_2) = m_e \cdot e \cdot \omega^2 \cos \omega t \quad (21.56)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_1 (y_1 - y_2) = m_e \cdot e \cdot \omega^2 \sin \omega t - m_1 \cdot g \quad (21.57)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_1 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1 (x_2 - x_1) = 2F_X \quad (21.58)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + c_1 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_1 (y_2 - y_1) = 2F_Y - m_2 \cdot g \quad (21.59)$$

donde m_1 es la masa del disco; c_1 y k_1 son los coeficientes de amortiguamiento y rigidez del eje; m_e es la masa de desbalanceo, e es la excentricidad de la masa de desbalanceo, ω es la velocidad de rotación del eje, t es la variable de tiempo, g es la aceleración de la gravedad, m_2 es la masa del muñón; F_X y F_Y son las componentes de la fuerza hidrodinámica; x_1 y y_1 son los desplazamientos horizontal y vertical del disco; x_2 y y_2 son los desplazamientos horizontal y vertical del muñón.

La ecuación de movimiento para cada almohadilla solo tiene un grado de libertad, y se puede expresar como:

$$I_{zz} \cdot \ddot{\psi}_i = T_i \quad (21.60)$$

donde I_{zz} es el momento de inercia de la almohadilla, $\ddot{\psi}_i$ es la aceleración de la i -ésima almohadilla y T_i es el torque aplicado a la i -ésima almohadilla.

Para resolver el problema se desarrolla un programa en Fortran, donde las ecuaciones dinámicas del rotor se integran con el algoritmo de cojinete, y las ecuaciones diferenciales ordinarias se resuelven por un evaluador del programa. Las propiedades del eje se listan en el cuadro 21.6. La rigidez del eje fue determinada por un juego de frecuencias naturales por encima de las 10000 [rpm]. La excentricidad se calculó para simular el desbalance habitual de un turbogenerador, con una excentricidad total de $(1,7 [\mu m] = \frac{m_e \cdot e}{m_1 + m_2})$.

Cuadro 21.6: Propiedades del eje

Parámetros	Valor
Masa del disco (m_1)	10,0 [kg]
Suma de las masas del muñón (m_2)	5,0 [kg]
Rigidez del eje	$2,0 \times 10^7$ [N/m]
Amortiguamiento del eje	1000 [N·s/m]
Masa de desbalanceo	0,005 [kg]
Excentricidad de la masa de desbalanceo	5,0 [mm]

Se selecciona **agua como lubricante** pues se emplea generalmente en los bancos de pruebas de turbulencia en hidrodinámica ([125] y sus autores referidos) e hidrostática de

cojinetes. El cuadro 21.7 presenta las propiedades del agua y el valor de los parámetros iniciales del cojinete.

Cuadro 21.7: Valores iniciales de las propiedades del cojinete.

<i>Parámetros</i>	<i>Valor</i>
Holgura radial	100 [μm]
Diámetro del muñón	50 [mm]
Longitud del muñón	25 [mm]
Viscosidad del lubricante	$8,95 \times 10^{-4}$ [$Pa \cdot s$]
Densidad del lubricante	100 [kg/m^3]
Número de almohadillas	4
Cantidad de espacio entre almohadillas	40°
Posición de las almohadillas	“entre almohadillas”
Precarga de la almohadilla	0,0
Espesor de la almohadilla	5,0 [mm]
Momento de inercia de la almohadilla	$5,31 \times 10^6$ [$kg \cdot m^2$]
Distancia del pivote	5,0 [mm]
Ángulo del pivote	0°

El momento de inercia de la almohadilla I_{zz} fue calculado con respecto a su posición de pivote considerando que la almohadilla fue hecha de acero con una longitud de 25 [mm], un radio de 50 [mm] y espesor de 5 [mm].

Resultados

Se han seleccionado tres velocidades del rotor: la primera a 7000 [rpm], que está por debajo de la primera resonancia del eje; 12000 [rpm] cerca de la resonancia del eje; y 17000 [rpm] que está por encima de la resonancia. Sus respectivos números de Reynolds promedio (2047, 3510 y 4978) indican un régimen de turbulencia.

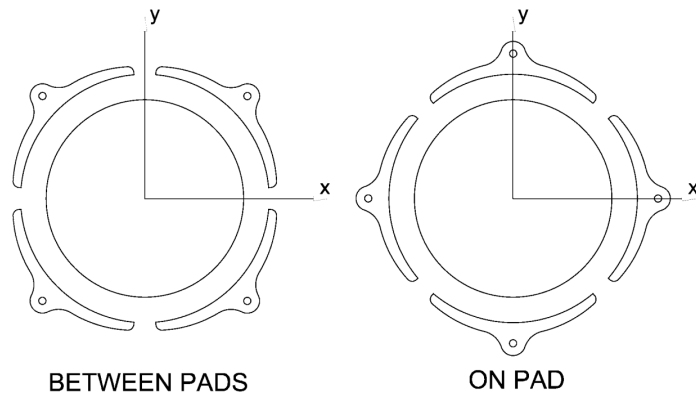
Para verificar la influencia de la turbulencia, se tienen en cuenta siete parámetros presentados en el cuadro 21.8. En la figura 21.22 se muestra la configuración de las almohadillas, que cambia completamente la distribución de carga en ellas.

En la figura 21.23 (a) se presenta el desplazamiento horizontal del muñón, cuando éste acelera de 7000 [rpm] a 20000 [rpm] en 10 [s]. El comportamiento es muy similar en ambos casos (con y sin turbulencia) mucho más evidente en la figura 21.23 (b). Sin embargo, el efecto de la turbulencia tiende a llevar el muñón al centro del cojinete.

Cuadro 21.8: Juego de parámetros usado en la simulación

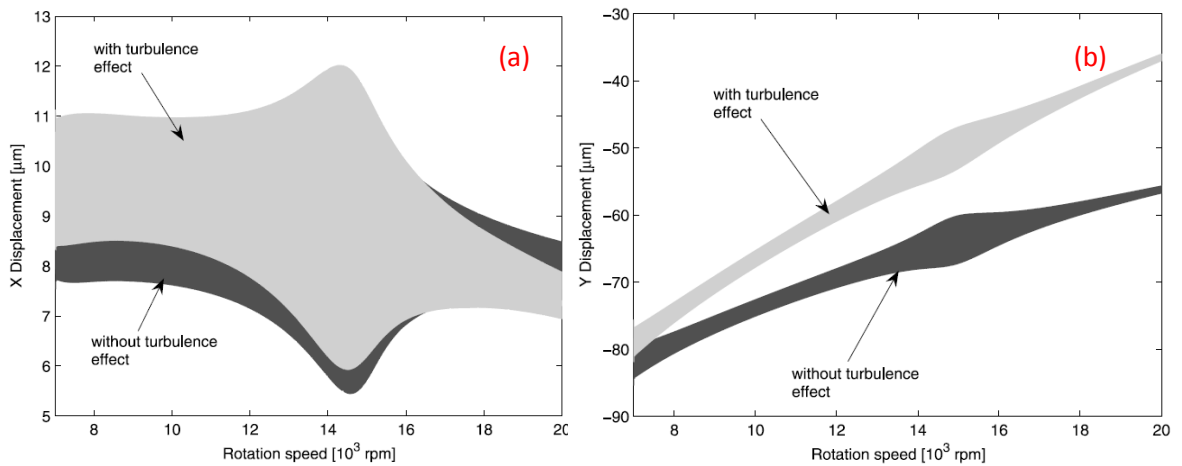
<i>Parámetro</i>	<i>Valor</i>
Espesor de la almohadilla	2,0, 4,0, 6,0, 8,0, 10,0 [mm]
Distancia del pivote (r_0)	0,0, 2,5, 5,0, 7,5, 10,0 [mm]
Holgura radial (c_r)	60, 70, 80, 90, 100 [μm]
Número de almohadillas	4, 6, 8, 10, 12
Precarga de la almohadilla (m)	0,0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4
Ángulo del pivote (ϕ_0)	-5° , 0° , $+5^\circ$, $+10^\circ$, $+15^\circ$
Posición de la almohadilla	“Entre almohadillas” y “en la almohadilla”

Figura 21.22: Configuraciones “entre almohadillas” y “en la almohadilla”



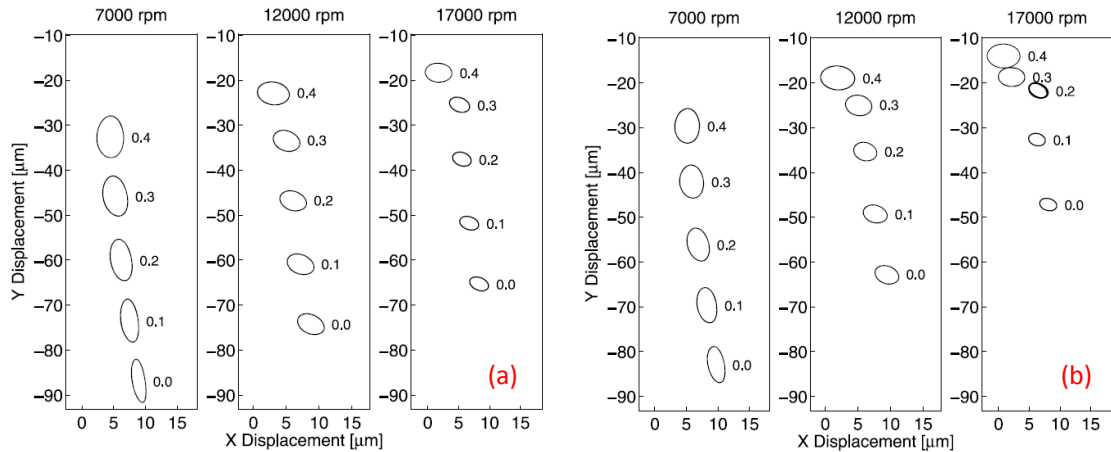
Fuente *Ídem*

Figura 21.23: Desplazamiento horizontal (a) y vertical (b) durante la aceleración del rotor.



Fuente *Ídem*

Figura 21.24: Efecto de almohadilla precargada en la órbita del eje, modelo sin efecto de turbulencia (a) y modelo con efecto de turbulencia (b).



Fuente *Ídem*

Las figuras 21.24 (a) y (b) muestran el efecto en la variación de la precarga desde 0 a 0,4. Como se nota el centro del rotor se desplaza hacia el centro del cojinete a medida que la precarga y la velocidad aumentan, mientras que el tamaño de la órbita disminuye. El adelgazamiento de la órbita a 7000 $[rpm]$, indica que la reducción en la rigidez horizontal es más significativa en el modelo sin turbulencia que su contraparte turbulenta.

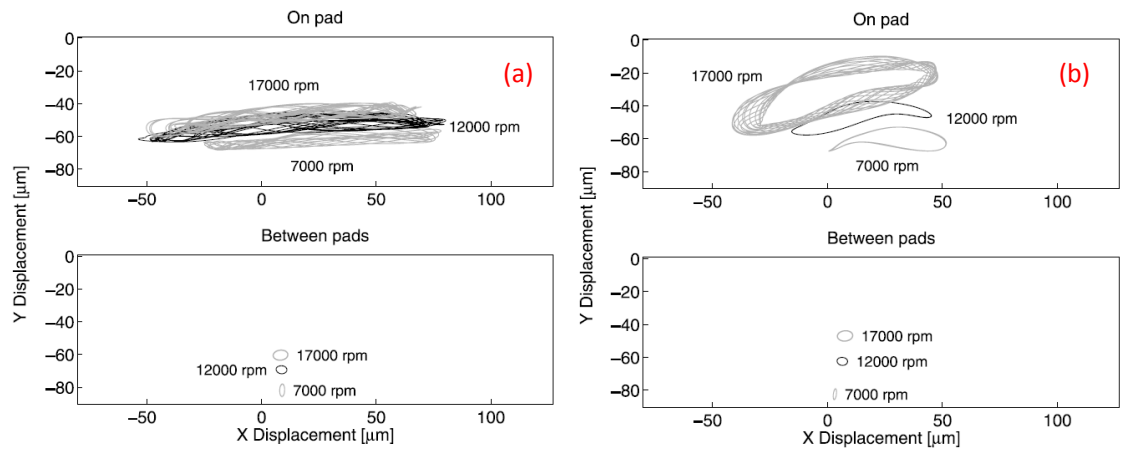
En el caso del efecto del número de almohadillas respecto del incremento de la velocidad, el análisis sin turbulencia presenta órbitas cerradas que se ubican hacia el centro del cojinete a medida que aumenta el número de almohadillas. Por el contrario, al tener en cuenta la turbulencia a altas velocidades (12000 – 17000 $[rpm]$) el sistema se vuelve inestable con el aumento del número de almohadillas.

La figuras 21.25 (a) y (b) ilustran el efecto de las diferentes configuraciones para la posición de las almohadillas (figura 21.22); en ambas figuras, la configuración “en la almohadilla” presenta un movimiento horizontal inestable indicando una baja rigidez horizontal. Sin embargo, la posición estaba más cerca al centro del cojinete que la configuración “entre almohadillas”, e indica que la configuración “en la almohadilla” ha generado una fuerza vertical mayor que mantiene el eje más alejado de la parte inferior del cojinete. En general, la configuración “entre almohadillas” garantiza la estabilidad del eje.

El trabajo presenta las siguientes conclusiones referentes a la aplicación del modelo turbulento de lubricación hidrodinámica al sistema rotor cojinete:

- El momento de inercia de la almohadilla y la distancia del pivote no tienen influencia significativa en el comportamiento del rotor.
- Un incremento en la precarga de la almohadilla produce un agudo incremento de la posición del rotor en el cojinete asociado a la disminución de la rigidez. El modelo

Figura 21.25: Efecto de la posición de la almohadilla (“en almohadilla” y “entre almohadillas”) en la órbita del eje, modelo sin turbulencia (a) y modelo con turbulencia (b).



Fuente *Ídem*

turbulento ha mostrado un desplazamiento horizontal particular hacia el centro del cojinete.

- Incrementando el número de almohadillas levanta el eje y lo mueve lejos del centro del cojinete, mientras su rigidez permanece casi constante. El flujo turbulento presenta problemas de inestabilidad con diez y doce almohadillas.
- La posición de la almohadilla (“en la almohadilla” y “entre almohadillas”) es el parámetro que más cambió el comportamiento del rotor, la posición “en la almohadilla” presentó un movimiento inestable del muñón, mientras “entre almohadillas” lo mantuvo estable.

21.4. EFECTO DE LA TEMPERATURA EN LOS COEFICIENTES ROTODINÁMICOS

Como se estudió en el capítulo 18 la temperatura es un elemento importante del comportamiento de la lubricación hidrodinámica. Para vincular dicho efecto con un sistema rotor cojinete se estudian diferentes publicaciones referentes al tema.

21.4.1. Influencia de la temperatura de entrada del aceite en el umbral de estabilidad en un sistema rotor cojinete

El fenómeno de latigazo de aceite (oil whip) fue descubierto por Newkirk y Taylor en 1925. Manifestaban en su trabajo la forma subsincrónica de vibración a una frecuencia

Figura 21.26: Modelo de rotor ligero y cargado centralmente soportado por dos cojinetes hidrodinámicos de aceite.



Fuente Influence of inlet oil temperature on the instability threshold of rotor-bearing systems, WANG, JK and KHONSARI, MM, 2006

aproximadamente igual a la primera frecuencia natural no amortiguada del sistema rotor cojinete.

Desde que el descubrimiento fue reportado, muchos archivos de investigación fueron dedicados al entendimiento de las características dinámicas de los cojinetes, ambos teórica y experimentalmente. Se han hecho avances hacia el entendimiento de la naturaleza de la inestabilidad también para cerrar la brecha entre los contradictorios resultados experimentales y teóricos. Sin embargo, todavía existen algunas disparidades - en la literatura para esto la explicación clara no esta disponible [129].

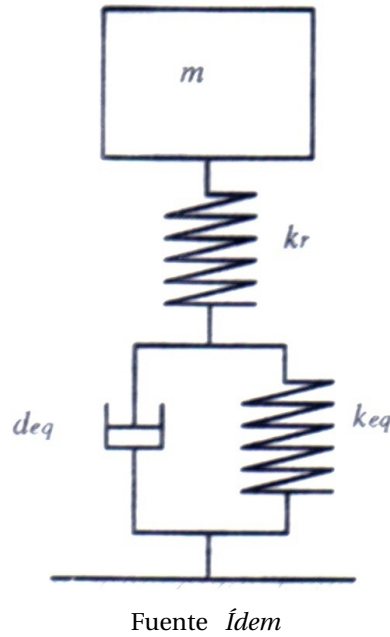
Maky y Ezzar fueron probablemente los primeros en notar la importancia de los efectos térmicos en la inestabilidad del cojinete y la asociación con las disparidades en la literatura. Ellos señalan que la influencia de la temperatura de entrada del aceite al cojinete como lo reportan Mewkirk y Lewis es opuesta a la reportada por Pinkus. Específicamente, los primeros concluyeron que el umbral velocidad de inestabilidad aumenta cuando la temperatura de ingreso de aceite aumenta. Por otro lado, Pinkus reporta los resultados de varios experimentos donde hay varios cojinetes con efecto latigazo a alta temperatura de ingreso de aceite y sin este efecto cuando la temperatura del aceite es baja. Él también señala “el aumento en la temperatura de aceite tiende, en general, a reducir la velocidad a la cual el efecto de latigazo inicia”. Por lo tanto, los resultados de Pinkus implican que a bajas temperaturas de entrada del aceite tiende a estabilizar los efectos en el sistema rotor cojinete. una conclusión opuesta a la de Newkirk y Lewis. No se ha dado ninguna explicación para este fenómeno peculiar.

Modelamiento y análisis

Los resultados experimentales presentados antes, son apropiados para proveer un análisis retrospectivo. La figura 21.26 muestra un modelo en plano para un rotor flexible ligero con una carga centrada soportado en dos cojinetes hidrodinámicos de aceite. k_{eq} es la rigidez equivalente del cojinete, d_{eq} es el amortiguamiento equivalente, y k_r es la rigidez efectiva de medio rotor. La masa de este rotor es representada por $2m$.

La figura 21.27 es el modelo simplificado del modelo rotor cojinete. La frecuencia natural no amortiguada del sistema es

Figura 21.27: Modelo simplificado de un sistema rotor cojinete.



$$\omega_{nd} = \sqrt{k_s/m}$$

donde k_s es el valor efectivo de la rigidez en el sistema rotor cojinete, $k_s = k_r k_{eq} / (k_r + k_{eq})$.

Si $k_{eq} \gg k_r$, la frecuencia natural no amortiguada del sistema es aproximadamente igual a $\omega_{nd} = \sqrt{k_r/m}$. Esto implica que el sistema rotor cojinete puede ser aproximado como un sistema de soporte rígido del rotor flexible. Si $k_r \gg k_{eq}$, la frecuencia natural no amortiguada del sistema es aproximadamente igual a $\omega_{nd} = \sqrt{k_{eq}/m}$, que significa que el sistema rotor cojinetes puede ser considerado como un rotor rígido soportado por cojinetes de película fluida.

La simplificación del modelo del sistema rotor cojinete mostrado en la figura 21.27, es usado en el siguiente análisis. Las ecuaciones paramétricas del sistema rotor cojinete es

$$k_s = m\omega_s^2$$

donde ω_s es el umbral de rotación de la frecuencia natural subsincrónica de vibración. Esto implica el inicio del efecto de latigazo se da cuando la frecuencia natural ω_s es igual a la a la frecuencia natural del sistema ω_{nd} . Definiendo ω_{st} como el umbral de velocidad y Ω ($\Omega = \omega_s/\omega_{st}$) denota la relación umbral de rotación. Entonces

$$\omega_{st} = \frac{\omega_s}{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\left(\frac{1}{\frac{1}{k_r} + \frac{1}{k_{eq}}}\right) \frac{1}{m}} = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\left(\frac{1}{1 + \frac{k_r}{k_{eq}}}\right) \frac{k_r}{m}}$$

por lo tanto,

$$\omega_{st} = \frac{\omega_n}{\Omega} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{k_r}{k_{eq}}}} \quad (21.61)$$

donde $\omega_n = \sqrt{k_r/m}$ es la primera velocidad natural crítica de un rotor simple flexible apoyado.

la relación entre los la rigidez del cojinete k_{eq} y los cuatro coeficientes k_{IJ} ($I, J = x, y$) y los cuatro coeficientes de amortiguamiento d_{IJ} ($I, J = x, y$) están descritos en la literatura (ver bibliografía [130]). Los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de la película de aceite pueden ser obtenidos resolviendo la ecuación dinámica de Reynolds bajo condiciones de perturbación en su posición de equilibrio con la temperatura de aceite constante.

Se definen los parámetros adimensionales.

$$\begin{aligned} \bar{K}_{IJ} &= k_{IJ}/(W/C) \\ \bar{D}_{IJ} &= d_{IJ}/(W/C\omega) \\ \bar{K}_{eq} &= k_{eq}/(W/C) \\ \bar{K}_r &= k_r/(W/C) \end{aligned}$$

conde C es el claro radial y W es la carga por cojinete.

las relaciones entre las rigideces equivalentes normalizadas \bar{K}_{eq} y los coeficientes normalizados de rigidez y amortiguamiento es:

$$\bar{K}_{eq} = \frac{\bar{K}_{xy}\bar{D}_{yx} + \bar{K}_{yx}\bar{D}_{xy} - \bar{K}_{yy}\bar{D}_{xx} - \bar{K}_{xx}\bar{D}_{yy}}{\bar{D}_{xx} - \bar{D}_{yy}} \quad (21.62)$$

Se puede ver en la siguiente relación la importancia entre la relación de la frecuencia de los remolinos y los coeficientes de rigidez y amortiguamiento.

$$\Omega = \sqrt{\frac{(\bar{K}_{eq} - \bar{K}_{xx})(\bar{K}_{eq} - \bar{K}_{yy}) - \bar{K}_{xy}\bar{K}_{yx}}{(\bar{D}_{xx}\bar{D}_{yy} - \bar{D}_{xy}\bar{D}_{yx})}}$$

Por lo tanto, la ecuación 21.61, puede ser normalizada

$$\frac{\omega_{st}}{\omega_n} = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\left(\frac{1}{1 + \frac{\bar{K}_r}{\bar{K}_{eq}}}\right)} = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\left(\frac{\bar{K}_{eq}}{\bar{K}_{eq} + \bar{K}_r}\right)}$$

Resultados teóricos

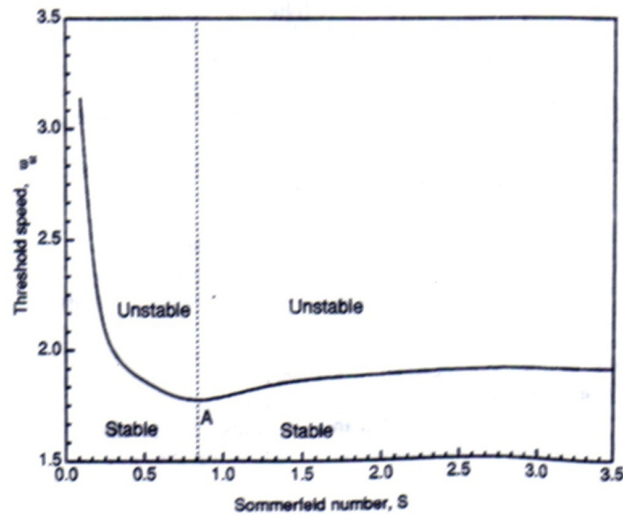
Las especificaciones del sistema rotor cojinete que se ha analizado se muestran en el cuadro 21.9. La figura 21.28 muestra la relación entre el número de Sommerfeld (S) y la velocidad umbral adimensional $\bar{\omega}_{st}$ para un sistema rotor cojinete.

Cuadro 21.9: Especificaciones del sistema rotor cojinete

<i>Parámetros iniciales y condiciones de operación</i>	
Diámetro del muñón (D)	0,0254 [m]
Diámetro interior del eje hueco	0,0152 [m]
Longitud del cojinete (L)	0,0127 [m]
Espacio entre los dos cojinetes (l)	0,5271 [m]
Masa del rotor (2m)	5,4523 [kg]
Claro radial (C)	$50,8 \times 10^6$ [m]
Aceite	ISO 32
Presión a la entrada (P_{in})	31 [kPa]
Rango de temperatura de entrada de aceite (T_{in})	20 – 100 [°C]

La figura 21.28 muestra que cuando S decremanta continuamente, la velocidad umbral primero disminuye lentamente, después alcanza un valle en un punto de S aproximadamente igual a 0,8, seguido a esto comienza a incrementar rápidamente. El autor se refiere a esta tendencia como el fenómeno de “inmersión”. La figura indica que si el punto inicial de operación esta ubicado al lado izquierdo de la línea punteada la velocidad umbral incrementará con el decremento de S. Sin embargo, si el punto inicial de operación está ubicado a la derecha de la línea puntada, la velocidad umbral aumentará con el aumento de S.

Figura 21.28: Estabilidad de un sistema rotor cojinete ($L/D = 0,5$)



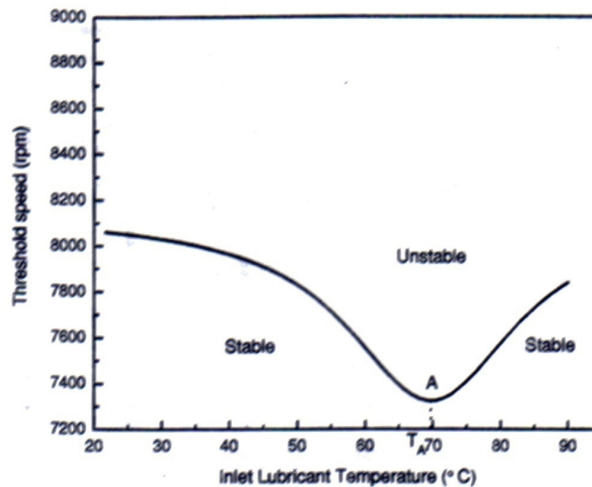
Fuente *Ídem*

El número de Sommerfeld en un sistema rotor cojinete, puede ser controlado por la variación de la temperatura de entrada, mientras se mantienen los demás parámetros constantes. Por lo tanto, la gráfica se vuelve más reveladora si se examina el comportamiento

como función de la temperatura de entrada del aceite. Esto es mostrado en la figura 21.29.

La figura 21.29 revela que el comportamiento del sistema para el punto de inestabilidad, es sustancialmente diferente en cada lado de la temperatura correspondiente al punto A. Para una temperatura inicial T_i inferior a $T_A = 69$ [°C], en el rango de 0 – 69 [°C], al incrementarse la temperatura de ingreso de aceite resulta en un decremento de la velocidad umbral de inestabilidad; para una temperatura inicial T_i más grande que $T_A \approx 69$ [°C], incrementando la temperatura mejora el umbral de inestabilidad.

Figura 21.29: Efecto de la temperatura de ingreso de aceite en la velocidad umbral de estabilidad



Fuente *Ídem*

La discusión anterior revela una base teórica para la estabilidad que cambiando la temperatura de ingreso del aceite se puede influenciar la estabilidad del sistema rotor-cojinete.

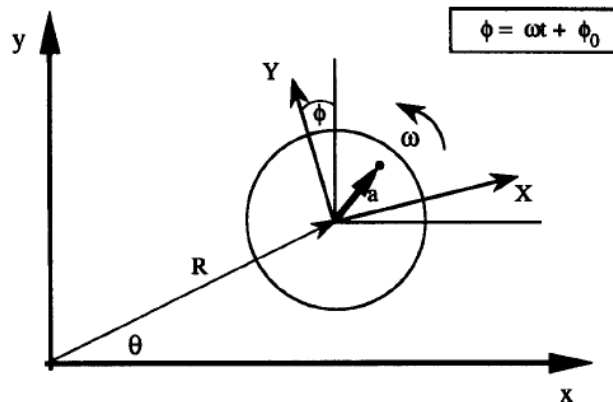
21.5. EFECTO DE LA SIMETRÍA EN LOS COEFICIENTES ROTODINÁMICOS

Durante la investigación del comportamiento dinámico de un sistema roto-dinámico y el análisis de propiedades como la masa, el amortiguamiento y la rigidez, se encuentra un caso particular en donde se aborda estos aspectos, pero a partir de la condición de “soltura” del cojinete, que es ocasionada por la no simetría de la holgura radial del elemento mecánico. El análisis dinámico y los aspectos generales más importante de esta característica especial se muestran a continuación, y se basan en el estudio del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Concordia en Montreal, Quebec, Canada a cargo de R. Ganesan [118].

21.5.1. Respuesta dinámica y estabilidad de un sistema roto-dinámico con claro radial no simétrico

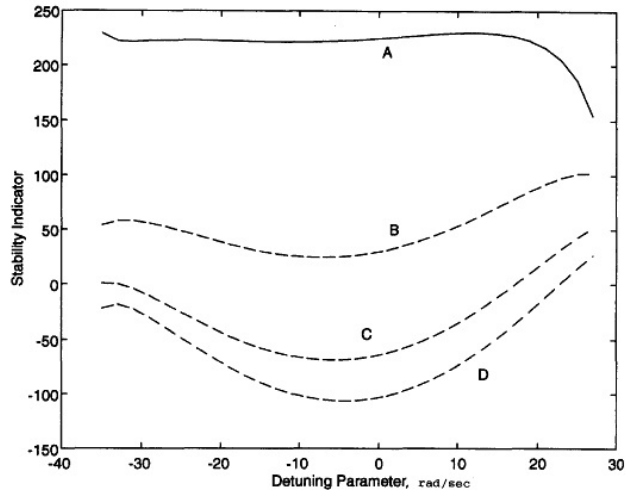
El estudio se basa en el modelo de rotor de Jeffcott, donde se realiza el análisis de las oscilaciones del estado-estable del rotor, se analiza la condición “soltura” (normal-loose) del rotor que se adiciona a las ecuaciones dinámicas que rigen el sistema a través del modelo discontinuo de la rigidez radial y finalmente se obtienen diferentes expresiones que gobiernan las ecuaciones de la amplitud y fase del sistema. Esta investigación analítica y experimental, utiliza como herramienta numérica el método de las escalas múltiples para analizar diferentes características del sistema en diferentes instantes de tiempo de manera simultánea, como es el caso de la amplitud y la fase de las diferentes vibraciones que ocurren en el sistema.

Figura 21.30: Sistema de rotor Jeffcott



Fuente Dynamic response and satellite of a rotor-support, R. Ganesan, Concordia University, 1996.

Figura 21.31: Estabilidad del sistema



Fuente *Ídem*

El autor de la investigación realiza un exhaustivo trabajo matemático donde establece y desarrolla las ecuaciones dinámicas del sistema con diferentes condiciones para poder establecer la respuesta de amplitud y frecuencia que domine el modelo. La investigación muestra ciertos análisis matemáticos que serán los que rigen el procesamiento computacional y permitir con ello la producción de gráficas y análisis de datos que respaldarán los resultados que se alcancen.

Formulación del problema

Basados en el modelo estándar de Jeffcott se tienen las ecuaciones de movimiento del sistema

$$m\ddot{R}_x + c\dot{R}_x + kR_x = ma\omega^2 \cos\phi \quad (21.63)$$

$$m\ddot{R}_y + c\dot{R}_y + kR_y = ma\omega^2 \sin\phi - W \quad (21.64)$$

Donde R_x y R_y son las componentes del vector desplazamiento del rotor R , m es la masa del rotor, c es el coeficiente de amortiguamiento lineal, k es la rigidez radial del rotor-cojinete, a es la magnitud del vector de desequilibrio, ω es la velocidad angular del rotor, W es el peso total del rotor, ϕ es la rotación del disco rotor con respecto al sistema inercial xyz , por tanto $\phi = \phi_0 + \omega t$ con ϕ_0 empieza la rotación en el instante de tiempo cero.

Como se anotó anteriormente, para incluir la condición de “soltura” en el sistema, esta se representa a través del MODELO DE RIGIDEZ RADIAL DISCONTINUO. Este modelo es ampliamente estudiado y validado por D. W. Childs, ASME J. Eng. Power. Estudia los efectos de las holguras no simétricas a través de la forma bi-lineal de la rigidez combinada entre el eje-cojinete. Así que de la ecuación 21.63 y 21.64, R_x y R_y se obtiene

$$R_x = A \cos(\phi + \psi) \quad (21.65)$$

$$R_y = A \sin(\phi + \psi) - (W/k) \quad (21.66)$$

donde A es la amplitud del movimiento sincrónico del rotor dada por

$$\frac{a\omega^2}{[(\lambda_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_0^2 \lambda_0^2 \omega^2]^{1/2}}; \lambda_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \zeta_0 = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (21.67)$$

y ψ es la fase dada por:

$$\tan \psi = \frac{-2\zeta_0 \lambda_0 \omega}{\lambda_0^2 - \omega^2} \quad (21.68)$$

Finalmente, realizando los cambios correspondientes e incorporando la condición de “soltura”, hacen que la ecuación 21.63 y 21.64 se transformen en:

$$\ddot{R}_x + 2\zeta_0 \lambda_0 \dot{R}_x + \lambda_0^2 [1 - \varepsilon U(R_y)] R_x = a\omega^2 \cos \phi \quad (21.69)$$

$$\ddot{R}_y + 2\zeta_0 \lambda_0 \dot{R}_y + \lambda_0^2 [1 - \varepsilon U(R_y)] R_y = a\omega^2 \sin \phi - g \quad (21.70)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y $U(R_y)$ es una función singular, donde si es igual a 0 es porque $R_y \leq 0$ y si es igual a 1 $R_y > 0$.

ε , es un parámetro de perturbación que representa la pérdida parcial en la rigidez radial del sistema rotor-cojinete y permite caracterizar el movimiento no lineal. El valor de este parámetro se encuentra en el rango de 0 y 1. Así si $\varepsilon = 0$ representa la condición nominal y si $\varepsilon = 1$ representa la condición cuando existe una pérdida completa de la rigidez radial. Este parámetro se relaciona con el movimiento sincrónico del sistema rotor y el estudio de este es ampliado en D. W. Childs, ASME J. Eng. Power 104, 533-541 (1982).

A partir de estas expresiones planteadas, se realiza prueba la respuesta no estacionaria y estacionaria del modelo cerca a la resonancia.

Respuesta estacionaria cerca a la resonancia

De forma general se tienen en cuenta las vibraciones no estacionarias y aplicando el método de las múltiples escalas, se considera el sistema empezando a acelerar a través de la condición de la resonancia y para ello se introducen las escalas de tiempo “lento” y “rápido”.

$$\ddot{R}_x + \lambda_0^2 R_x = \varepsilon \lambda_0^2 U(R_y) R_x + \varepsilon a^* \omega^2(\varepsilon t) \cos(\phi_0 + \phi_1(t)) - 2\varepsilon \zeta_0^* \lambda_0 \dot{R}_x \quad (21.71)$$

$$\ddot{R}_y + \lambda_0^2 R_y = \varepsilon \lambda_0^2 U(R_y) R_y + \varepsilon a^* \omega^2(\varepsilon t) \sin(\phi_0 + \phi_1(t)) - 2\varepsilon \zeta_0^* \lambda_0 \dot{R}_y - \varepsilon g^* \quad (21.72)$$

En el estudio, se desprecian por conveniencia los términos con (*) ya que se encuentran asociados con el factor de amortiguamiento.

Las escalas de tiempo “lento” y “rápido” son introducidas en las ecuaciones anteriores de acuerdo a :

$$T_n = \varepsilon^n t, \text{ donde } n = 0, 1, 2, \dots \quad (21.73)$$

La anterior expresión permitirá escribir $\phi_1(t)$ como $d\phi_1/dt = \lambda_0 + \varepsilon v'(T_1) = \lambda_0 + \varepsilon \sigma(T_1)$ donde T_1 es la variable y $\sigma(T_1)$ es el parámetro de desajuste que caracteriza la cercanía del sistema cerca a la resonancia.

Luego de emplear algunas técnicas matemáticas, como las transformaciones (D) y expansiones (variar los parámetros de las ecuaciones en diferentes escalas de tiempo del más lento al más rápido), se tiene:

$$D_0^2 R_{y0} + \lambda_0^2 R_{y0} = 0 \quad (21.74)$$

$$D_0^2 R_{y1} + \lambda_0^2 R_{y1} = -2D_0 D_1 R_{y0} + \lambda_0^2 U(R_{y0}) R_{y0} - 2\zeta_0 \lambda_0 D_0 R_{y0} - g^* + a^* \omega^2(T_1) \sin(\phi_0 + \phi_1(T_0, T_1)) \quad (21.75)$$

Para la ecuación 21.74 se usa:

$$R_{y0} = A_2(T_1) \exp(i\lambda_0 T_0) + \bar{A}_2(T_1) \exp(-i\lambda_0 T_0) \quad (21.76)$$

Donde $A_2(T_1)$ es una amplitud desconocida arbitraria pero pequeña, que es determinada por una “**condición de solubilidad**” (ecuación 21.75). Pero se obtiene una nueva condición de solubilidad sustituyendo la ecuación 21.76 en la 21.75, que condensada será:

$$\{2i\lambda_0(A_2'(T_1) + \zeta_0 \lambda_0 A_2'(T_1)) + \frac{1}{2} i a^* \omega^2(T_1) \exp(i\nu + i\phi_0)\} = \lambda_0^2 [U_1(R_y) A_2(T_1) + U_2(R_y) \bar{A}_2(T_1)]$$

y a partir de las expresiones halladas y de continuar con el análisis matemático, transformando sistemas no autónomos a autónomos, se obtienen la respuesta de amplitud y de fase como función del parámetro de desajuste, del factor de amortiguamiento, del vector de desbalance, de la frecuencia natural del rotor y de la velocidad rotacional del rotor :

$$\bar{a}'_2 = -\zeta_0 \lambda_0 a_2 - \frac{a^* \omega^2(T_1)}{2\lambda_0} \cos \gamma(T_1) + \frac{a_2 \lambda_0}{4\pi} \sin 2\zeta \cdot \sin 2(\gamma(T_1) - \phi_0) \quad (21.77)$$

$$\gamma' = \sigma + \frac{a^* \omega^2(T_1)}{2\lambda_0 \bar{a}_2} \sin \gamma(T_1) + \frac{\lambda_0 \zeta}{2\pi} + \frac{\lambda_0}{4\pi} \sin 2\zeta \cdot \cos 2(\gamma(T_1) - \phi_0) \quad (21.78)$$

Donde la ecuación 21.77 y la 21.78 son la respuesta de la amplitud y la fase respectivamente.

Respuesta estacionaria

Para las vibraciones estacionarias cercanas a la resonancia, se tienen las mismas expresiones anteriores, pero para este caso se tiene:

$\tilde{a}'_2 = \gamma' = 0$ y para hallar el vector de la posición se tiene $R_y = \tilde{a}_2(T_1) \cos(\lambda_0 T_0 + \phi_0 + \beta) = O(\epsilon)$

Estabilidad del Sistema

Con todos los factores y parámetros físicos que afectan el sistema, a lo largo de este estudio también se tratará de determinar el comportamiento de la estabilidad del comportamiento dinámico y analíticamente se obtiene la siguiente expresión

$$\left[\frac{a^* \omega^2}{2\lambda_0 \tilde{a}_{20}} \right]^2 \sin^2 \gamma_0 + \frac{a^* \omega^2}{4\pi \tilde{a}_{20}} \sin \gamma_0 \cdot \sin 2\zeta \cdot \cos 2(\gamma_0 - \phi_0) - \frac{\lambda_0^2}{8\pi^2} \sin^2 2\zeta \cdot 2 \sin^2(\gamma_0 - \phi_0) - \frac{\zeta_0 a^* \omega^2}{2\tilde{a}_{20}} \cos \gamma_0 + \frac{\zeta_0 \lambda_0^2}{2\pi} \sin 2\zeta \cdot \sin 2(\gamma_0 - \phi_0) < 0 \quad (21.79)$$

la anterior ecuación se refiere al indicador de estabilidad del sistema. Si se obtiene su eigenvalor, que será una raíz real positiva, se tiene un movimiento inestable. Pero si los puntos en el espacio paramétrico no satisfacen esta ecuación, quiere decir que existirán movimientos oscilatorios con amplitudes limitadas que establecen un solución estable del sistema.

Conclusiones

- Las características del movimiento en estado estable de un sistema rotodinámico son significativamente alteradas cuando la condición de “soltura” de la rigidez del rotor surge.
- El comportamiento vibratorio no lineal del rotor cerca a la velocidad crítica es significativamente diferente del comportamiento vibratorio que corresponde a la velocidad rotacional que se establece lejos de la velocidad crítica.
- La respuesta de las amplitudes cerca a la primera resonancia, disminuyen debido a los efectos de la condición de “soltura”.
- En ausencia de la condición de “soltura” de la rigidez del rotor, el rotor del sistema empieza a comportarse como un sistema dinámico lineal. Cuando los efectos de la holgura no simétrica se presentan, el movimiento vibratorio empieza a comportarse de forma no lineal y debido a esta peculiar no linealidad los efectos que surgen son complicados.

- Se puede ver que la condición de la “soltura”, en combinación con el amortiguamiento, la masa desbalanceada, la rigidez radial y la masa del rotor, conllevan a vibraciones inestables cerca a la primera resonancia. La suma, ya sea del amortiguamiento o de la rigidez radial no siempre estabiliza los movimientos cerca a la resonancia cuando las holguras no simétricas se presentan, y por tanto la condición de “soltura” empieza a ser potencialmente peligrosa.

BIBLIOGRAFÍA

- [114] Muszynska AGNIESZKA. *Rotordynamics*. CRC Press, 2005.
- [115] D.E. BENTLY, C.T. HATCH, and B. GRISSOM. *Fundamentals of rotating machinery diagnostics*. Bently Pressurized Bearing Press, 2002.
- [116] G. CAPONE, M. RUSSO, and R. RUSSO. Dynamic characteristics and stability of a journal bearing in a non-laminar lubrication regime. *Tribology International*, 20(5):255 – 260, 1987.
- [117] C.W. CHANG-JIAN and C.K. CHEN. Non-linear dynamic analysis of rub-impact rotor supported by turbulent journal bearings with non-linear suspension. *International Journal of Mechanical Sciences*, 50(6):1090–1113, 2008.
- [118] R. GANESAN. Dynamic response and stability of a rotor-support system with non-symmetric bearing clearances. *Mechanism and machine theory*, 31(6):781–798, 1996.
- [119] H. HASHIMOTO, S. WADA, and J. ITO. An application of short bearing theory to dynamic characteristic problems of turbulent journal bearings. *Journal of tribology*, 109:307, 1987.
- [120] T. JERZY et al. A nonlinear model for prediction of dynamic coefficients in a hydrodynamic journal bearing. *International Journal of Rotating Machinery*, 10(6):507–513, 2002.
- [121] M.M. KHONSARI and E.R. BOOSER. *Applied tribology: bearing design and lubrication*, volume 14. John Wiley & Sons Inc, 2008.
- [122] M. LAHMAR, A. HADDAD, and D. NICOLAS. An optimised short bearing theory for nonlinear dynamic analysis of turbulent journal bearings. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 19(1):151–177, 2000.
- [123] JW LUND. Review of the concept of dynamic coefficients for fluid film journal bearings. *Journal of tribology*, 109:37, 1987.
- [124] JW LUND and KK THOMASEN. A calculation method and data for the dynamic coefficients of oil-lubricated journal bearings. *Topics in Fluid Film Bearing and Rotor Bearing System Design and Optimization*, ASME, pages 1–28, 1978.

- [125] E.P. OKABE and K.L. CALVACA. Rotordynamic analysis of systems with a non-linear model of tilting pad bearings including turbulence effects. *Nonlinear Dynamics*, 57(4):481–495, 2009.
- [126] J.T. SAWICKI and T. RAO. Nonlinear prediction of rotordynamic coefficients for a hydrodynamic journal bearing©. *Tribology transactions*, 44(3):367–374, 2001.
- [127] A.Z. SZERI. *Fluid film lubrication*. Cambridge Univ Pr, 2010.
- [128] I.R. VARGAS. Teoría de chumaceras presurizadas con puertos puntuales: Caso de la chumacera corta. Master's thesis, INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, 2007.
- [129] JK WANG and MM KHONSARI. Influence of inlet oil temperature on the instability threshold of rotor-bearing systems. *Journal of tribology*, 128:319, 2006.
- [130] L. YU and H. YIU. Rotor-bearing system dynamics.

Capítulo 22

MÉTODOS NUMÉRICOS

Para afrontar la no linealidad que se presenta en la LHD, se hace indispensable y necesario utilizar los métodos numéricos como una herramienta que permita llegar a una solución aproximada del modelo matemático planteado. En el presente capítulo se realizará una revisión general de los métodos más utilizados y de las técnicas desarrolladas para analizar y dar solución a los modelos que representan los parámetros que afectan la LHD, mostrando algunas investigaciones en donde se aplican. Antes de afrontar cualquier esquema concreto de un método numérico, a continuación se señalan las propiedades fundamentales que son básicas para que las soluciones calculadas numéricamente realmente aproximen las soluciones de la ecuación continua [132].

La primera propiedad a tener en cuenta es la *Consistencia*, que supone que la ecuación discretizada de un modelo, realmente aproxima a una ecuación diferencial de partida. Esta propiedad se enfoca al método de las diferencias finitas y no hace referencia a las soluciones, sino a la relación entre las ecuaciones diferencial y en diferencias finitas.

La siguiente propiedad es la *Exactitud*, que está siempre presente debido a que al tratar de aproximar un proceso infinito, como calcular la derivada o la integral, mediante otro proceso finito siempre se van a presentar errores de aproximación o errores de truncamiento que siempre serán locales y se dan en cada iteración realizada. Para esta propiedad es importante tener en cuenta los diferentes tipos de errores, el absoluto, el relativo y la propagación de estos durante el desarrollo del método numérico.

Una tercera propiedad básica a tener en cuenta, es la *Convergencia*, que permite observar la diferencia que existe entre la solución aproximada del modelo matemático y la solución exacta o solución conocida experimentalmente. El estudio general de la convergencia es un problema complejo que requiere un tratamiento fuera del alcance de esta investigación.

Finalmente, la *Estabilidad* es otra de las propiedades básicas para realizar el planteamiento de un método numérico. Ésta se puede analizar dentro del propio sistema, cuando enfrenta cambios externos o variaciones de su parámetros, también cuando se quiere conocer la estabilidad de las soluciones de las ecuaciones que rigen este sistema ante cambios en las condiciones iniciales, condiciones de contorno o ante errores en los datos.

Cuando se contempla el análisis de la estabilidad, también se pueden observar los

cambios en el comportamiento cualitativo de las soluciones (estabilidad orbital). Para el caso específico de la LHD los esquemas numéricos a considerar son la representación de una ecuación diferencial parcial, así que interesa la estabilidad de las soluciones de la ecuación discreta frente a errores de aproximación.

22.1. GENERALIDADES DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Los métodos numéricos constituyen técnicas mediante las cuales es posible formular y solucionar problemas basados en modelos matemáticos que expresan las características esenciales de un sistema físico o de un proceso. Los métodos numéricos surgieron debido a la necesidad de solucionar aquellos problemas en los que no existe un modelo lineal, una geometría simple y una compleja dimensión de un sistema determinado; en realidad existen para resolver la mayoría de los problemas reales pues estos son en general, sistemas no lineales, e implican formas y procesos complejos. Reiterando lo anterior, dar solución exacta a problemas no lineales través de procesos analíticos y métodos exactos; y tratar de analizarlos a través de técnicas gráficas no resultan en procedimientos precisos e implementarlos se vuelve tedioso y difíciles, así que con ayuda de las computadoras y de los avances tecnológicos, los métodos numéricos se convierten en la camino más adecuado para afrontar este tipo de modelos no lineales.

La función fundamental de los métodos numéricos es convertir las matemáticas superiores en operaciones aritméticas básicas y de esta manera poder profundizar en los temas que de otro modo resultarían oscuros. Para cualquier estudiante o profesional interesado en abordar esta área, los métodos numéricos serán un medio para comprender mejor las matemáticas y un vehículo eficiente para aprender a utilizar y diseñar software avanzados a partir de equipos computarizados de alto rendimiento [143]

Los métodos numéricos frecuentemente son utilizados para los siguientes esquemas:

1. Raíces de una ecuación: Problemas que se relacionan con el valor de una variable o de un parámetro que satisface una ecuación no lineal. Son muy importantes para despejar de una manera analítica los parámetros de las ecuaciones de diseño en el cojinete hidrodinámico.
2. Sistemas de ecuaciones algebraicas lineales: A diferencia del método de los eigenvalores, que sólo busca satisfacer una sola ecuación, este método busca un conjunto de valores que satisfaga simultáneamente un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales.
3. Optimización: Aborda los problemas donde se busca determinar el valor o los valores de una variable independiente que corresponden al “mejor” o al valor óptimo de una función. En este método se considera la identificación de máximos y mínimos para una sola variable sin restricciones, como para varias variables sin restricciones.
4. Integración: Método importante para realizar análisis de sistemas con geometrías complejas y cantidades totales basadas en conjuntos de medidas discretas; las fór-

mulas de integración numérica desempeñan un papel importante en la solución de ecuaciones diferenciales.

5. Ajustes de curvas: Método para ajustar las curvas de un conjunto de datos representados por puntos, por lo general se puede abordar este método en dos categorías: regresión e interpolación. Donde la primera es empleada cuando hay un significativo grado de error asociado con los datos y se trata de representar una tendencia general de estos. La interpolación se utiliza cuando el objetivo es determinar valores intermedios entre datos que estén, relativamente, libres de error.
6. Ecuaciones diferenciales ordinarias: Éstas tienen una enorme importancia en la práctica de la ingeniería, lo cual se debe a que muchas leyes físicas están expresadas en términos de la razón de cambio de una cantidad, más que en términos de la cantidad misma. Cuando se quiere analizar este tipo de esquemas numéricos, se abordan los problemas con valor inicial y problemas con valores en la frontera.
7. Ecuaciones diferenciales parciales: Son las que permiten caracterizar sistemas, en los que el comportamiento de una cantidad física se expresa en términos de su razón de cambio con respecto a dos o más variables independientes. Para resolver este tipo de ecuaciones de forma numérica, se pueden abordar dos tipos de métodos, el de las diferencias finitas, que aproximan la solución usando puntos discretos y el método de los elementos finitos, que utilizan piezas discretas para una aproximación de la solución.

En el estudio abordado en la recopilación de este seminario, se profundiza en los esquemas numéricos de las raíces de una ecuación, en las ecuaciones diferencias parciales y se mencionarán algunos métodos de ajustes para una mejor aproximación de la solución, todo lo anterior enfocado, como ya se ha aclarado, a los parámetros que hacen de la LHD un problema no lineal. Por tanto, se presentarán los aspectos teóricos y numéricos más importantes de esquemas analíticos como la serie de Taylor, el método de Newton-Raphson, el método de Galerkin, el análisis de sistemas rotodinámicos mediante redes neuronales, diferencias finitas, elementos finitos, aproximación numérica usando el método de las escalas múltiples, método del gradiente conjugado y otro método muy importante como lo es el de los volúmenes finitos. Aun así, el tema es bastante amplio y un análisis detallado del mismo está fuera del alcance de este trabajo de grado.

22.2. TEORÍA Y SERIE DE TAYLOR

El teorema de Taylor y su fórmula, la serie de Taylor, es de gran valor en el estudio de los métodos numéricos. Taylor proporciona un medio para predecir el valor de una función en un punto, en términos del valor de la función y su derivadas en otro punto. Es una formulación matemática ampliamente utilizada para expresar funciones de una manera aproximada y establece que cualquier función suave puede aproximarse por un polinomio.

La serie o fórmula de Taylor se expresa así:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n \quad (22.1)$$

Este es el valor de la función f y sus primeras $n+1$ derivadas continuas en un intervalo que contiene a y x , donde a puede ser igual a x_i y $x = x_{i+1}$.

El primer término de la serie, es llamado la *aproximación de orden cero*, indicando que el valor de f en el nuevo punto es el mismo que su valor en el punto anterior. Este resultado tiene un significado intuitivo, pues, si x y a están muy próximas entre sí, entonces es muy probable que el nuevo valor sea similar al anterior.

Cuando la función analizada, cambia en el intervalo, entonces se requieren los términos adicionales de la serie de Taylor, así que, la *aproximación de primer orden* aparece y es:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

donde el término adicional consiste en una pendiente $f'(a)$ multiplicada por la distancia entre a y x . Lo que convierte a esta expresión en la representación de una línea recta con opción de predecir su incremento o decremento entre a y x . El siguiente término que se debe agregar, debido a que la aproximación de primer orden sólo predice el cambio en una línea recta, es la *aproximación de segundo orden*, cuya expresión permite obtener algo de la curvatura de una función:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

y de forma similar se siguen agregando términos para desarrollar la expansión completa de la serie de Taylor 22.1. Y el término residual R_n que considera todos los términos desde $n+1$ hasta infinito, se podrá expresar como:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (22.2)$$

Donde ξ es un valor que se encuentra en algún punto entre a y x . Este término residual permite la estimación exacta del error en la expansión y la serie de Taylor de n -ésimo orden será exacta para un polinomio de n -ésimo orden y por tanto no existirá un error residual R_n .

Para otras funciones continuas y diferenciales, como las exponenciales y las senoidales, no se obtiene una estimación exacta con un número finito de términos. Cada uno de los términos adicionales contribuye, aunque sea con poco, al mejoramiento de la aproximación.

El valor práctico de las expansiones de la serie de Taylor estriba, en la mayoría de los casos, en el uso de pocos términos que darán una aproximación lo suficientemente cercana a la solución verdadera para propósitos prácticos. Para saber cuántos términos se requieren en la expansión y así obtener un valor aproximado razonable, es necesario basarse en el término residual de la expansión (ecuación 22.2), que presenta dos grandes inconvenientes [132]. Primero ξ no se conoce con exactitud, sino sólo se sabe que es un valor entre a y x . Segundo, para operar la ecuación 22.2 se requiere determinar la $(n + 1)$ ésima derivada de $f(x)$.

El término residual también, es muy utilizado para la evaluación de errores de truncamiento, lo que quiere decir que es posible decidir qué tan lejos de x se desea evaluar y controlar el número de términos que se quiere tener en la expansión. La ecuación 22.2 es expresada usualmente como:

$$R_n = O(h^{n+1})$$

donde $h = x - a$ y $O = cte$, y la nomenclatura $O(h^{n+1})$ significa que el error de truncamiento es de orden h^{n+1} . Quiere decir, que el error es proporcional al incremento h elevado a la $(n + 1)$ ésima potencia. Aunque esta aproximación no implica nada en relación con la magnitud de las derivadas que multiplican h^{n+1} , es extremadamente útil para evaluar el error comparativo de los métodos numéricos que se basan en expansiones de la serie de Taylor. En general, se considera que el error de truncamiento disminuye agregando términos a la serie de Taylor. En muchos casos, si h es pequeño, entonces el término de primer orden y otros términos de orden inferior causan un porcentaje desproporcionadamente alto de error.

En conclusión, Taylor es un método estándar que brinda un resultado preciso y la exactitud de la aproximación realizada por otros métodos se decide después de ser comparada con éste. Sin embargo, debido a las dificultades prácticas que el método presenta, éste tiene las siguientes limitaciones [140]: 1) Para incluir términos de orden superior, son necesarias derivadas de orden superior de $f(x, y)$ con respecto a x , pero se dificulta resolver sus expresiones en términos de derivadas parciales. 2) Para un tamaño de paso pequeño con un menor número de términos, el resultado puede variar mucho con respecto al valor correcto. 3) Para un tamaño de paso grande el error es grande y el método no converge a una solución.

22.3. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Este método hace parte del esquema numérico de las raíces de ecuaciones o también conocidos como los ceros de una ecuación. Para resolver las raíces de una ecuación, según su grado de complejidad, se puede recurrir a métodos directos, como se puede hacer con un despeje simple de la variable u operando la fórmula de la ecuación cuadrática. Sin embargo, existen muchas funciones donde las raíces no se pueden determinar fácilmente y se hace necesario utilizar una técnica con solución aproximada. Debido a esto, este tipo de soluciones para el esquema de los eigenvalores se pueden calificar en dos tipos de

métodos, *los cerrados y los abiertos*.

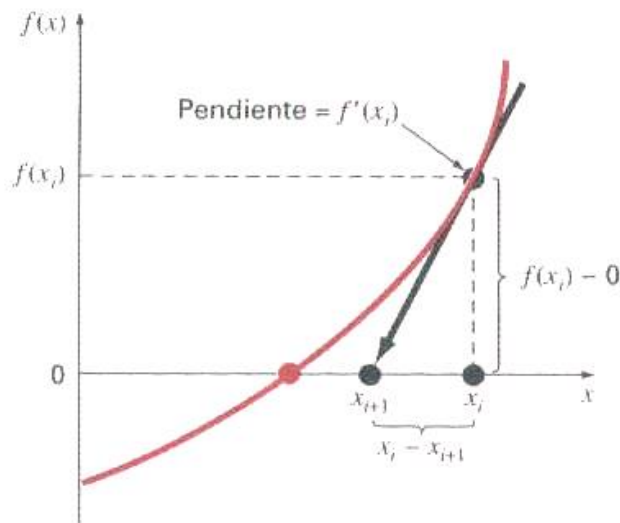
Los métodos cerrados son aquellos que aprovechan el hecho de que una función cambia de signo en los alrededores de una raíz, son también conocidos como *métodos de intervalos* y necesitan de dos valores iniciales para obtener la raíz; estos valores deben encerrar o estar ambos lados de la raíz. Para este tipo de métodos, podemos mencionar los métodos gráficos, el método de bisección y el método de la falsa posición que se basa en una visualización gráfica de la función.

La aplicación repetida de los métodos cerrados siempre genera aproximaciones más cercanas a la raíz. Se dice que tales métodos son convergentes porque se acercan progresivamente a la raíz a medida que se avanza en el cálculo [132].

Por otro lado, los métodos abiertos se basan en fórmulas que requieren únicamente de un solo valor de inicio x o que empiecen con un par de ellos, pero que no necesariamente encierran la raíz. Estos métodos, en contraste con los cerrados, algunas veces divergen o se alejan de la raíz verdadera a medida que se avanza en el cálculo. Sin embargo, cuando los métodos abiertos convergen, en general lo hacen mucho más rápido que los métodos cerrados.

Entre los métodos abiertos, podemos encontrar el método de iteración de punto fijo, el método de la secante y el método de Newton-Raphson, donde la fórmula de este último es la más utilizada para localizar raíces y es el método en que se profundizará en esta sección debido a su común uso entre los investigadores de la LHD en cojinetes.

Figura 22.1: Newton-Raphson



Fuente Métodos numéricos para la Física y la Ingeniería. Vázquez, L. y Jiménez, S. y Aguirre, C. y Pascual, P.J., McGraw-Hill (2009)

El método de Newton-Raphson se deduce a partir de la siguiente interpretación geométrica: Si el valor inicial para una raíz es x_i , entonces se puede trazar una tangente desde

el punto $[x_i, f(x_i)]$ de la curva, y por lo común, el punto donde esta tangente cruza al eje x representa una aproximación mejorada de la raíz [132], ver figura 22.1.

De la figura se tiene que la primera derivada en x es equivalente a la pendiente:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

y despejando x_{i+1} se tiene:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (22.3)$$

que se conoce como *la fórmula de Newton-Raphson*

22.3.1. Criterio de terminación y estimación de errores

Como en los otros métodos para localizar raíces, la ecuación 22.3 se utiliza como un criterio de terminación. Pero también se puede contemplar el desarrollo del método con base en la serie de Taylor (truncando la serie de Taylor después de la primera derivada 22.1, se puede obtener la fórmula de Newton-Raphson) que proporciona una comprensión teórica respecto a la velocidad de convergencia, que se expresa como $E_{i+1} = O(E_i^2)$, donde el error debe ser proporcional al cuadrado del error anterior, es decir, el número de cifras significativas de precisión aproximadamente se duplica en cada iteración.

Para un mejor entendimiento del método de Newton-Raphson y de la estimación de su error, a continuación se plasma un ejemplo sencillo de los autores de referencia.

Calcular la raíz de $f(x) = e^{-x} - 1$ a partir del método, empleando como valor inicial $x_0 = 0$

Solución:

La primera derivada de la función es:

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$

que se sustituye, junto con la función original en la fórmula de Newton-Raphson para obtener:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x} - 1}{-e^{-x} - 1}$$

Empezando con el valor inicial dado, se aplica la ecuación obtenida de manera iterativa para obtener los resultados.

Como lo muestra la tabla de resultados, el método converge rápidamente a la raíz verdadera. Observe que el error relativo porcentual verdadero en cada iteración disminuye mucho más rápido que lo que puede hacer un método cerrado.

Cuadro 22.1: Tabla de iteraciones

i	x_i	$\epsilon_t(\%)$
0	0	100
1	0,500000000	11,8
2	0,566311003	0,147
3	0,567143165	0,0000220
4	0,567143290	$<10^{-8}$

Para realizar el análisis de error en el método de Newton Rapshon, es necesario conocer, como se anotó anteriormente, que el error de este método es proporcional al cuadrado del error anterior, es decir, este método es convergente en forma cuadrática :

$$E_{t,i+1} = \frac{-f''(x_r)}{2f'(x_r)} E_{t,i}^2$$

Evaluando esta fórmula, se tiene:

Que a partir de la primera derivada de la función original con $x_r = 0,56714329$, $f'(0,56713329) = -1,56714329$. La segunda derivada es:

$$f''(x) = e^{-x}$$

que evaluada dará $f''(0,56714329) = 0,56714329$; reemplazando estos resultados en la ecuación de error, se tiene:

$$E_{t,i+1} = \frac{-0,56714329}{2(-1,56714329)} E_{t,i}^2 = 0,18095 E_{t,i}^2$$

El error inicial del ejemplo con el método es $E_{t,0} = 0,56714329$, el cual se sustituye en la ecuación de error que predice,

$$E_{t,1} = 0,18095(0,56714329)^2 = 0,0582$$

que es cercano al error verdadero de 0,06714329. En la siguiente iteración,

$$E_{t,2} = 0,18095(0,06714329)^2 = 0,0008158$$

que también se compara de manera favorable con el error verdadero 0,0008323. Para la tercera iteración,

$$E_{t,3} = 0,18095(0,0008323)^2 = 0,000000125$$

finalmente para la cuarta iteración:

$$E_{t,4} = 0,18095(0,000000125)^2 = 2,83 \times 10^{-15}$$

Lo que indica que el error del método de Newton-Rapshon para este caso es, de hecho, proporcional (por un factor de 0,18095) al cuadrado del error en la iteración anterior.

22.3.2. Desventajas del Método de Newton-Raphson

Como se observa en la práctica, el método de Newton-Raphson por lo general es muy eficiente y utilizado, sin embargo existen situaciones donde se comporta de manera deficiente. Por tanto, se puede señalar:

1. Debido a la naturaleza de la función, la convergencia se puede tornar lenta y el proceso se puede hacer largo.
2. El método se hace ineficiente cuando se tiene un punto de inflexión en la vecindad de una raíz. El punto de inflexión genera $f''(x) = 0$
3. En ocasiones tiende a oscilar alrededor de un mínimo o máximo local, hasta el punto de presentarse pendientes cercanas a cero que aleja la solución del área de interés.
4. Cuando se presenta una pendiente cero $f'(x) = 0$, es un verdadero desastre para continuar aplicando el método pues, causa una división entre cero aplicando la fórmula.

Teniendo en cuenta lo anterior, ya que no existe un criterio general de convergencia para el método de Newton-Raphson, se puede concluir que una buena aplicación del método, depende de la naturaleza de la función y de la exactitud del valor inicial.

Como se indicó en la introducción a esta sección, los métodos numéricos se desarrollan a partir de una buena programación y para programar el método de Newton-Raphson es importante incluir una rutina de graficación, sustituir siempre el resultado en la función original para verificar su aproximación a cero, incluir siempre un límite máximo del número de iteraciones y tener presente que existe la posibilidad de que $f'(x) = 0$, en cualquier momento durante el cálculo.

22.4. DIFERENCIAS FINITAS

22.4.1. Generalidades

Para poder profundizar en el método de las diferencias finitas, es importante señalar que estas pertenecen al esquema numérico de las ecuaciones diferenciales, donde se puede encontrar tanto las ecuaciones diferenciales ordinarias como las ecuaciones diferenciales parciales. Con objeto de seguir el enfoque del seminario, a continuación se explicará de manera general las ecuaciones diferenciales y se procederá a dar explicación de las diferencias finitas, que es un método que se centra en el desarrollo de este tipo de ecuaciones.

Una ecuación diferencial parcial es una ecuación diferencial con más de una variable independiente. La variable dependiente es función de esas variables independientes y su comportamiento es gobernado por las derivadas presentes en la ecuación [140].

El orden de una ecuación diferencial parcial, PDE, es el de la derivada parcial de mayor orden que aparece en la ecuación. Se dice que una ecuación diferencial parcial es *lineal*, si

es lineal en la función desconocida y en todas sus derivadas, con coeficientes que dependen sólo de las variables independientes, así pues con la ecuación de Reynolds, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (22.4)$$

Que es una ecuación diferencial parcial de segundo orden y además, es una función no lineal debido a la naturaleza independiente de sus coeficientes, reiterando con esto que para su solución es necesario los métodos numéricos, como ya se ha explicado en secciones anteriores. Así como el caso de la LHD, muchos de los problemas físicos pueden ser transformados en las ecuaciones diferenciales y por lo general son convertidos a ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden. La forma general de una ecuación diferencial parcial de segundo orden es:

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D \frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial U}{\partial y} + FU = G$$

Donde A, B, C, D, E, F y G son funciones que dependen de x y y , Dependiendo de los valores de A, B , y C la ecuación es clasificada dentro de tres diferentes categorías. La siguiente ecuación es la que permite dar el criterio:

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

Por tanto, una ecuación diferencial parcial de segundo orden, podrá ser elíptica, parabólica o hiperbólica si $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ ó $\Delta > 0$ respectivamente. Esta clasificación puede ser expresada como:

$$\textit{Elíptica si } B^2 - 4AC < 0$$

$$\textit{Parabólica si } B^2 - 4AC = 0$$

$$\textit{Hiperbólico si } B^2 - 4AC > 0$$

Para la ecuación de Reynolds 22.4 se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \left(\frac{h^3}{\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \right) \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \left(\frac{h^3}{\mu} \right) = 6U \frac{\partial h}{\partial x}$$

donde $A = C$, $B = 0$, $D = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \right)$, $E = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \right)$, $F = 0$, por tanto:

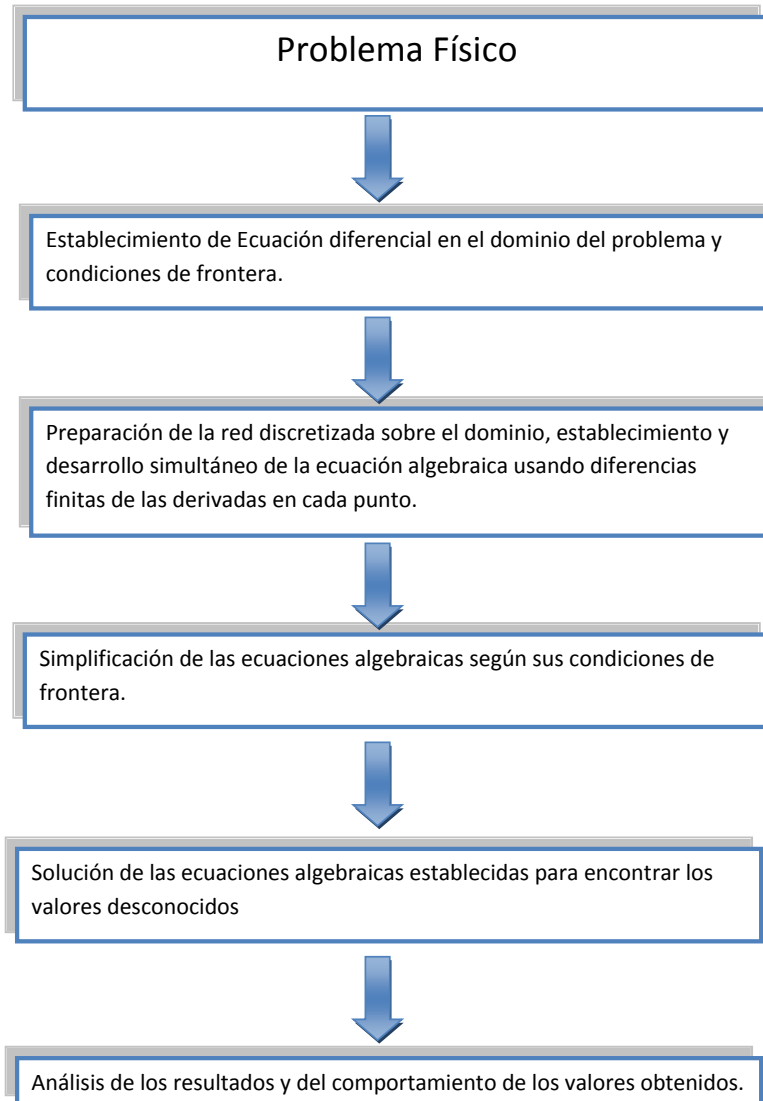
$$\Delta = 0^2 - 4 \left[\frac{h^3}{\mu} \right]^2$$

$$\Delta = - \left[2 \frac{h^3}{\mu} \right]^2$$

de la última expresión se puede concluir que será negativa y por tanto la ecuación de Reynolds es una *ecuación diferencial elíptica*.

22.4.2. Fundamentos de las Diferencias Finitas

Figura 22.2: Método de diferencias finitas



El método de diferencias finitas se basa en asignar puntos espaciados de manera apropiada sobre el dominio y aplicar las ecuaciones constitutivas correspondientes del fenómeno a cada punto. En estos puntos la ecuación diferencial es convertida en una ecuación algebraica que expresa cada derivada mediante una expresión de diferencia. Por tanto, la ecuación diferencial es transformada en ecuaciones diferenciales con X valores en la red de puntos que son desconocidos. Las condiciones en los puntos de frontera son expresadas también en la forma de ecuación algebraica. En conclusión, el método convierte la ecuación diferencial del problema en una ecuación algebraica. A continuación se muestra

el flujo general del método de las diferencias finitas para resolver un problema físico.

Se debe aclarar que el método de las diferencias finitas no da solución a problemas sobre su dominio continuo, sólo lo hace de manera discreta en los puntos establecidos, lo que indica que las variables dependientes existen sólo en puntos de discretos.

22.4.2.1. Derivación numérica

Antes de desarrollar las expresiones generales para derivadas con un número arbitrario de valores, es necesario observar en los casos más sencillos las ideas en las que se basa el método de las diferencias finitas.

Sea $f(x)$ una función derivable con respecto a su variable x . La idea fundamental al simular las derivadas es aproximar el límite:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (22.5)$$

que representa de alguna forma *un proceso infinito por una expresión finita*. La aproximación numérica de la ecuación 22.5 más sencilla corresponde a la “diferencia finita”:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (22.6)$$

donde h es ahora algún valor fijado y finito (en el sentido de que no es *infinitesimal*). Para $h > 0$, se dice que la aproximación es por la “derecha” o “progresiva”, mientras que para $h < 0$, se dice que por la “izquierda” o “regresiva”. Normalmente, se toma siempre h como un número positivo, y en tal caso, la aproximación regresiva se representa con la expresión:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (22.7)$$

La derivada $f'(x)$ corresponde a la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$, mientras que la diferencia finita 22.6 corresponde a la pendiente de la secante a dicha curva que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$. En el límite $h \rightarrow 0$, la secante se confunde con la tangente, y desde un punto de vista geométrico, por tanto, se está aproximando la tangente por una secante. Está claro que cualquier secante a la curva en la zona puede ser una aproximación y es preciso poder determinar cuáles son razonables y hasta qué punto estas aproximaciones son buenas.

Otra aproximación viene dada por la diferencia finita “centrada”: combinando las diferencias progresiva y regresiva, con el mismo valor h , se obtiene

$$f'(x) \approx \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x) - f(x-h)}{h}}{2} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (22.8)$$

que corresponde a la secante que pasa por los puntos $(x-h, f(x-h))$ y $(x+h, f(x+h))$.

Hay muchas formas analíticas de construir estas aproximaciones. Algunos autores utilizan polinomios de interpolación, pero como se anotó en la sección en la que se aborda

las series de Taylor, esta puede ser una herramienta sencilla y práctica que permite construir las expresiones y su fórmula de error. Para 22.5, suponiendo que f tenga una derivada segunda continua en $[x, x + h]$, tenemos:

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(z),$$

donde z es algún valor intermedio a x y a $x + h$, y deducimos que:

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(z).$$

Al aproximar la derivada por la diferencia finita despreciamos el último término, que constituye, por tanto, el error por truncamiento de la aproximación: $-\frac{h}{2} f''(z)$. No se conoce el valor de z , sólo hasta que se realice el cálculo del error.

La expresión para diferencia regresiva se obtiene, sencillamente, sustituyendo h por $-h$:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - h)}{h} + \frac{h}{2} f''(z).$$

Donde el error de truncación es, por tanto, $\frac{h}{2} f''(z)$, donde el valor desconocido z no es el mismo que para el error anterior, perteneciendo en este caso a $[x - h, x]$.

En cuanto a la diferencia centrada, partimos, por ejemplo, de

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(z_1),$$

$$f(x - h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(z_2),$$

con $z_1 \in [x, x + h]$ y $z_2 \in [x - h, x]$. Restando ambas expresiones, obtenemos:

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{3!} f'''(z_1) + \frac{h^2}{3!} f'''(z_2) \right)$$

Los anteriores fundamentos analíticos muestran las diferentes formas básicas como se puede utilizar las diferencias finitas, pero según el modelo físico y posterior análisis numérico, estas formas se pueden aplicar en algún nivel del modelo matemático o en cualquier nivel del análisis numérico, según sea el caso, así que el profesional que esté analizando un modelo físico determinado, podrá utilizar tanto las diferencias finitas progresivas, como las diferencias finitas centradas cuando lo crea conveniente.

22.5. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

El análisis de elementos finitos (FEA, Finite Element Analysis) es el proceso de discretizar un continuo complejo en un número finito de regiones llamadas elementos que son conectadas por nodos o mallas. La solución se obtiene en los nodos discretos, que se aproxima a la solución para el continuo en los puntos de espacio y tiempo. En lugar de intentar

obtener la solución para el continuo completo, que tiene un número infinito de puntos, por lo tanto infinitos grados de libertad, usando el FEA la solución se obtiene para un número finito de puntos o nodos. La solución nodal se aproxima a la solución del continuo entero.

Procedimiento FEA

El procedimiento FEA puede ser generalmente dividido en 3 pasos como los mostrados en la figura 22.3. La etapa de preproceso envuelve la preparación de los datos para el análisis, y el posproceso implica mostrar la salida de datos de interés desde el análisis en un formato adecuado. En la figura 22.4 se presentan algunos de los pasos en la etapa de análisis. Para un estudio profundo se recomiendan las fuentes bibliográficas de los autores Shivaswamy [141] y Zienkiewicz [145].

Figura 22.3: Etapas en el FEA



Figura 22.4: Algunos pasos en la etapa de análisis



22.5.1. Método de Galerkin

El problema de la lubricación hidrodinámica de cojinetes se formula principalmente por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, que requiere de la solución numérica, debido a las múltiples interacciones entre las variables que lo componen. Una herramienta ampliamente utilizada para resolver ecuaciones diferenciales parciales es el **método de Galerkin** (Corvalán *et al.* [135]) perteneciente a la esquema de “*formulación débil*” en el análisis FEA. En esta sección se sustentará el método de Galerkin dentro de la formulación débil y se presentarán los elementos importantes de su aplicación a la LHD, basados en el trabajo de Di Paolo.

Formulación débil

Muchos problemas en física y en la ingeniería son gobernadas por ecuaciones diferenciales parciales (PDE). Algunas de las PDEs más comunes son las ecuaciones de Laplace, Poisson y Helmholtz. Dadas en coordenadas cartesianas 2D toman la forma de las ecuaciones 22.9 (a), (b) y (c) respectivamente.

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \\ \nabla^2\phi + q &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + q = 0 \\ \nabla^2\phi + \lambda\phi &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \lambda\phi = 0\end{aligned}\tag{22.9}$$

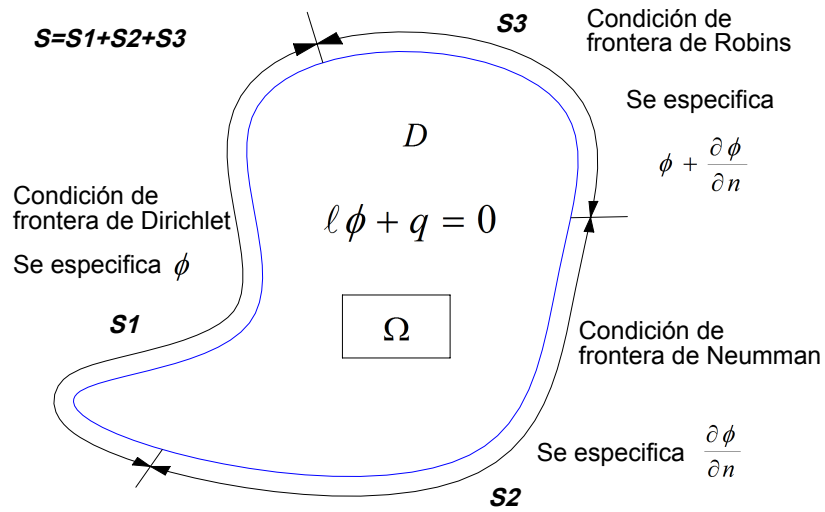
La variable ϕ en las ecuaciones 22.9 puede ser tratada como un escalar, ya que implica solamente su magnitud. Debido a esta propiedad, sistemas gobernados por las ecuaciones 22.9 son algunas veces llamados *problemas de campo*. El análisis de transferencia de calor es gobernado por la ecuación de Laplace, siendo ϕ la temperatura. El problema de flujo de fluido no viscoso incompresible también se modela según la ecuación de Laplace. La deformación torsional en el plano xy de una barra prismática es gobernada por la ecuación de Poisson, donde ϕ la función de esfuerzo de Prandtl, y q es el doble del producto entre módulo de corte G y la razón de torsión. El esfuerzo de corte τ_{xz} y τ_{yz} son las derivadas parciales de ϕ con respecto a x e y respectivamente. La vibración de una membrana extendida sobre un dominio 2D es gobernada por la ecuación de Helmholtz. La ecuación de Helmholtz se conoce también como problema de eigenvalores.

Las condiciones de frontera tienen que ser definidas a fin de resolver la PDE y pueden ser divididas generalmente en tres categorías. Estas incluyen las condiciones de frontera de Dirichlet, Neumann y Robins. Si el valor de ϕ se especifica a lo largo del segmento S_1 de la frontera, entonces se llama de Dirichlet o condición de frontera *esencial*. Algunas veces, la derivada de ϕ normal a la frontera es definida sobre un segmento S_2 de su totalidad. Esta se conoce como Neumann, o *no esencial*, o *condición de frontera natural*. En algunos casos, la combinación de las condiciones de Dirichlet y Neumann pueden ser prescritas sobre un segmento S_3 de la frontera, llamada de *Robins*, o *condición de frontera mixta*. Las condiciones de frontera de Neumann y Dirichlet pueden ser vistas como un caso especial de la condición de frontera de Robins. Las diferentes condiciones de frontera se presentan en la figura 22.5.

Considere una PDE junto con la condición de frontera presentada en una forma general como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\phi + q &= 0 \\ \mathbf{m}\phi &= 0\end{aligned}\tag{22.10}$$

Figura 22.5: Condiciones de frontera típicas



Aquí \mathcal{L} es un operador diferencial lineal de orden n . La condición de frontera es representada en una forma general usando un operador diferencial lineal \mathbf{m} . Permita que $\bar{\phi}$ sea la solución aproximada de la ecuación 22.10. Siempre que $\bar{\phi}$ sea una solución aproximada, $(\mathcal{L}\bar{\phi} + q)$ no será igual a cero resultando un residuo. El propósito es encontrar una solución aproximada $\bar{\phi}$ tal que el residuo sea cero, o cercano a cero, promediado sobre todo el dominio \mathcal{D} . El residuo puede ser multiplicado con una función arbitraria de ponderación w resultando en un residuo ponderado, como sigue:

$$\int_{\mathcal{D}} w (\mathcal{L}\bar{\phi} + q) d\mathcal{D} = 0 \quad (22.11)$$

La selección de la función de ponderación w y sus derivadas deberían ser continuas en el espacio x , y , y z . La forma de la ecuación de residuos ponderados ahora puede ser integrada, resultando en una reducción en el orden del operador diferencial \mathcal{L} , o la PDE gobernante. Por ejemplo, si \mathcal{L} es de orden 2 como en las ecuaciones 22.9 (a), (b) y (c), al integrar su forma residual ponderada una vez, utilizando integración por partes, el orden del operador lineal se hace 1. En otras palabras, el requerimiento de continuidad de la PDE es debilitado y esta se conoce como la forma débil. El operador diferencial lineal de orden reducido en la forma débil es:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} w (\mathcal{L}\bar{\phi} + q) d\mathcal{D} &= \int_{\mathcal{D}} \mathbf{G}w\mathbf{G}\bar{\phi} d\mathcal{D} + \left(\int_{\mathcal{D}} wq d\mathcal{D} + \text{contribución de la CF } S_2 \text{ y } S_3 \right) = 0 \\ &= \int_{\mathcal{D}} \mathbf{G}w\mathbf{G}\bar{\phi} d\mathcal{D} + H(w) = G(w, \bar{\phi}) + H(w) = 0 \end{aligned} \quad (22.12)$$

La forma débil de la PDE en la ecuación 22.12 puede ser manipulada por un operador variacional δ con la sustitución $w = \delta\bar{\phi}$. Al introducir el operador variacional, la ecuación 22.12 llega a ser:

$$G(\delta\bar{\phi}, \bar{\phi}) + H(\delta\bar{\phi}) = 0 \quad (22.13)$$

La aplicación del operador variacional es similar a el operador diferencial (y sus propiedades). Después de simplificar, la ecuación 22.13 se transforma en la ecuación 22.14, una clase conocida como *forma funcional*. Un funcional representa una función que involucra la integral de una variable y sus derivadas. El funcional en el análisis de esfuerzos representa la energía potencial total, y la operación variacional en este, resulta en el principio de energía de potencia mínima. La forma débil y la forma funcional son equivalentes. Cuando se desarrolla la operación variacional, se obtiene la solución aproximada de la PDE, que será la misma que la obtenida de la formulación débil.

$$\delta(I(\bar{\phi})) = 0 \text{ con } I(\bar{\phi}) = \frac{1}{2}G(\bar{\phi}, \bar{\phi}) + H(\bar{\phi}) \quad (22.14)$$

En el FEA, el dominio del problema es discretizado en pequeñas regiones llamadas elementos. La solución de la PDE de gobierno se obtiene para los nodos de los elementos. Por lo tanto, la integral de la forma de promedios residuales sobre el dominio puede ser aproximada a la suma de la integral sobre todos las regiones elementos.

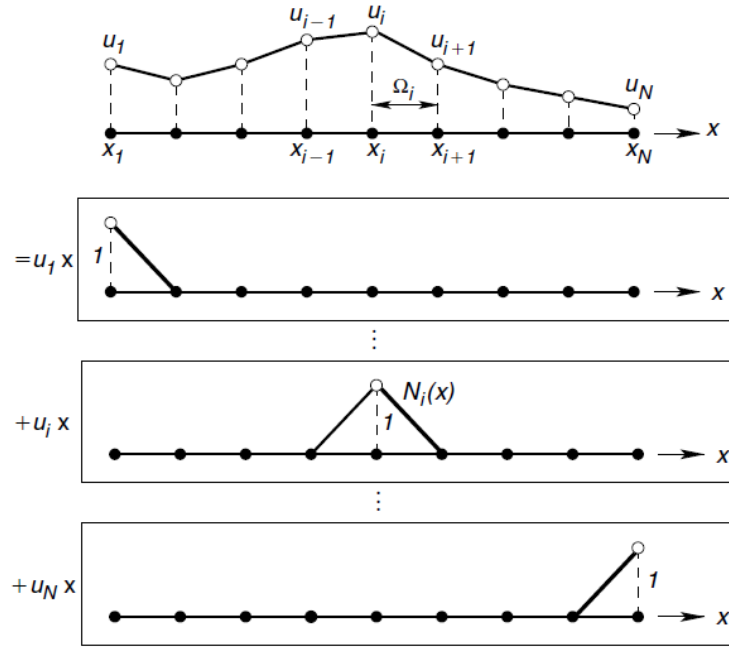
Cuando la integración se lleva a cabo por partes para cada elemento NE y la suma de ellos, los términos que contienen las condiciones de frontera natural en el dominio \mathcal{D} dentro de la frontera extraña S desaparecerán.

$$\int_{\mathcal{D}} w(\mathcal{L}\bar{\phi} + q) d\mathcal{D} \approx \sum_{i=1}^{NE} \int_{\Omega_i} w(\mathcal{L}\bar{\phi}_{E_i} + q) d\Omega \quad (22.15)$$

El valor nodal es continuo a través de la frontera del elemento. La solución aproximada de la PDE de gobierno sobre un elemento ϕ_E puede ser expresado en términos de los valores nodales φ_N , y algunas **funciones de forma o interpolación** N (también conocidas como bases de expansión, según Yip [144]). De ahora en adelante, se usarán las bases de expansión con *soporte compacto* que son polinomios continuos por tramos dentro de cada elemento como se muestra en la figura 22.6. La función de forma global $N_i(x)$ puede ser dividida dentro de un elemento en dos contribuciones locales como se presenta en la figura 22.7.

Continuando con la solución aproximada sobre un elemento $\bar{\phi}_E$ téngase presente que, los valores nodales son desconocidos en cualquier lugar excepto a lo largo de la frontera S_1 donde son prescritos. Así la solución aproximada sobre Ω_E es:

Figura 22.6: Una aproximación lineal por tramos de una función $u^\delta(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) N_i(x)$



Fuente Handbook of materials modeling: Models, Yip, S, 2005.

$$\bar{\phi}_E = \sum_{j=1}^{NNE} N_j \bar{\phi}_{N_j} \quad (22.16)$$

donde NNE es el número total de nodos por elemento. Sustituyendo la ecuación 22.16 en la ecuación 22.15 resulta en la ecuación 22.17

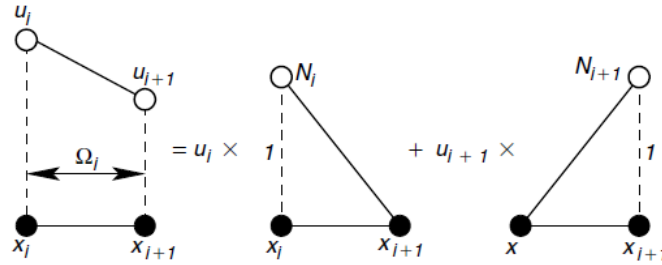
$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} w(\mathcal{L}\bar{\phi} + q) d\mathcal{D} &\approx \sum_{i=1}^{NE} \int_{\Omega_i} w \left(\mathcal{L} \sum_{j=1}^{NNE} N_j \bar{\phi}_{N_j} + q \right) d\Omega \\ &= \sum_{i=1}^{NE} \int_{\Omega_i} w(\mathcal{L}\mathbf{N}\bar{\phi}_N + q) d\Omega \end{aligned} \quad (22.17)$$

En el **método de Galerkin**, las funciones ponderadas son las mismas que las funciones de forma. Llevando a cabo esta operación en la ecuación 22.17 conduce a un número NNE de ecuaciones para los elementos representados en la ecuación 22.18.

$$\int_{\mathcal{D}} w(\mathcal{L}\bar{\phi} + q) d\mathcal{D} \approx \sum_{i=1}^{NE} \int_{\Omega_i} \mathbf{N}^T (\mathcal{L}\mathbf{N}\bar{\phi}_N + q) d\Omega \quad (22.18)$$

La integración sobre el dominio de los elementos Ω se desarrolla usando la integración

Figura 22.7: Bases de expansión para elementos finitos



Fuente *Ídem*

por partes. Cuando se realiza la integración, las funciones de forma serán diferenciadas, y el orden del operador diferencial por la solución aproximada será reducido. El orden de la ecuación de gobierno PDE se reduce debido a la integración. Las funciones de forma o de interpolación usadas, deben ser de un orden adecuado para conservar la continuidad sobre los elementos, al momento de la integración por partes de la ecuación 22.18. El problema de solucionar la PDE ahora es reducido a la evaluación de los valores nodales de φ sobre las regiones discretizadas, usando un adecuado juego de funciones de forma. Es importante notar que los valores nodales de φ (y sus derivadas) son continuas a través de la frontera del elemento.

La publicación de Corvalán *et al.* [135], como su nombre lo indica, es una comparación entre las formulaciones diferencial e integral para solucionar numéricamente la ecuación de lubricación de Reynolds mediante el método de Galerkin. El dominio se establece según la teoría de frontera de cavitación y se tienen en cuenta las condiciones de frontera de Sommerfeld.

22.5.1.1. Solución numérica de la ecuación de Reynolds formulación diferencial vs. formulación integral

En los sistemas elastohidrodinámicos (EHD) se producen dos fenómenos interactuantes, uno es el flujo de fluido de canal angosto y el segundo es la deformación de las paredes del canal producto de la presión hidrodinámica desarrollada por el mismo flujo. Obviamente, la deformación de las paredes altera la sección del canal y consecuentemente cambia la presión hidrodinámica que a su vez altera nuevamente el valor de las deformaciones y así sucesivamente; de esta forma es como se encuentran acopladas las ecuaciones que gobiernan ambos fenómenos, las cuales conforman un sistema altamente no lineal que debe ser resuelto por métodos numéricos.

El problema de contacto lineal ha sido resuelto por diversos métodos numéricos, aunque no todos lo suficientemente robustos para producir soluciones en un rango de operación del sistema.

Recientemente, Di Paolo (como lo menciona Corvalán *et al.* [135]) presentó una nueva

metodología de solución que produjo resultados correctos para todos los niveles de carga ya explorados y puso de manifiesto ciertos comportamientos del sistema que eran, hasta entonces ignorados. Esta **metodología** se basa en la solución simultánea de las ecuaciones que gobiernan al sistema y que determinan: las deformaciones de las fronteras sólidas, la presión hidrodinámica del fluido y el dominio donde las ecuaciones de flujo deben ser resueltas, el cual está definido por la posición donde el líquido comienza a cavitarse.

El objeto del trabajo analizado es utilizar el caso límite de carga nula (según la condición de Sommerfeld) para determinar, tanto en forma analítica como numérica, que la discretización de la versión diferencial de la ecuación de Reynolds conduce a soluciones que muestran anomalías similares a las detectadas en la solución de problemas elastohidrodinámicos, mientras que los resultados obtenidos por la discretización de la versión integral no muestran tales deficiencias.

El contacto lineal cargado y el caso de límite de carga

Las ecuaciones representativas del problema EHD de contacto lineal de acuerdo a precisas hipótesis simplicadoras. Para la solución del problema se parte de las siguientes premisas.

- Se tiene en cuenta el caso arquetípico de cojinete largo.
- El canal de flujo, que depende la presión hidrodinámica cuya integral en el dominio se debe igualar a la carga impuesta en el sistema, se calcula con ecuaciones correspondientes a las deformaciones elásticas de un sólido semi-infinito.
- A cargas apreciables, la *presión aguas arriba* donde el canal de flujo es mucho mayor que la zona de aproximación entre sólidos, **es nula**. Este límite se debe a la condición de frontera de cavitación; el dominio se extiende hasta donde existe capacidad de carga. En el caso límite de carga nula se eliminan las ecuaciones de deformación, la curva de presión en la zona de cavitación es negativa y exactamente antisimétrica respecto de la curva correspondiente a la zona convergente; $p(-L) = P(L) = 0$. Entonces el problema EHD se trabaja como LHD.

Se utiliza entonces la ecuación de Reynolds para flujo unidireccional de un fluido Newtoniano, incompresible y de viscosidad constante:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \right] = \frac{d}{dx} [Uh] \quad (22.19)$$

Los términos de esta ecuación se han explicado en secciones anteriores. Mediante sucesivas integraciones de (22.19) se llega a

$$\frac{dp}{dx} = 12\mu U \frac{(h-C)}{h^3} \quad (22.20)$$

$$p(x) = p(-L) + 12\mu U \int_{-L}^x \frac{(h-C)}{h^3} dx \quad (22.21)$$

En las ecuaciones (22.20), (22.21) $p(-L)$ y C son las constantes de integración, donde $p(-L)$ es la presión del fluido al ingreso del canal y C es la altura del canal donde el gradiente de presión se anula; esta altura del canal está directamente relacionada con el flujo por unidad de canal (Q) que circula por el sistema

$$Q = C \cdot U \quad (22.22)$$

En la publicación se discretizan ambas versiones de la ecuación de Reynolds mediante el método de elementos finitos con *funciones de forma lineales* y se analizan las ecuaciones algebraicas resultantes de emplear el *método de Galerkin*.

Discretización de la ecuación de Reynolds

En la dirección del flujo el dominio es discretizado por N nodos distribuidos, en principio, arbitrariamente. La coordenada (x) correspondiente al nodo (j) es representada por (s_j) y la distancia entre nodos consecutivos ($j, j+1$) será $D_j = s_{j+1} - s_j$.

Las funciones de forma lineales (ϕ_j) toman un valor unitario en el nodo correspondiente (j) y varían linealmente hasta anularse en los nodos anteriores y posterior al (j); es decir en ($j-1$) y ($j+1$). Fuera del dominio acotado por los nodos ($j-1$) y ($j+1$) la función (ϕ_j) es idénticamente nula. Expandiendo la presión hidrodinámica en términos de las funciones de forma se tiene que:

$$p(x) \cong \sum_j p_j \phi_j(x) \quad (22.23)$$

El término $(h-C)/h^3$ es también una función de la coordenada (x), en consecuencia:

$$(h-C)/h^3 \cong \sum_j d_j \phi_j(x), \quad d_j \equiv (h_j-C)/h_j^3 \quad (22.24)$$

donde p_j y d_j son los coeficientes de expansión de las ecuaciones 22.23 y 22.24, es decir, la solución buscada.

Formulación diferencial

Si la ecuación 22.20 se escribe en su forma residual y se integra en el dominio luego de haber sido ponderada con las funciones de forma se obtienen los residuos de Galerkin; como son:

$$R_i = \int_{\Omega} \phi_i \left[\frac{dp}{dx} - 12\mu \frac{(h-C)}{h^3} \right] dx \quad (22.25)$$

Reemplazando en (22.25) las expansiones (22.23) y (22.24) se llega a

$$R_i = \sum_j \left[p_j \int_{\Omega} \phi_i \phi_j' d\Omega - 12\mu U d_j \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega \right] \quad (22.26)$$

donde la integración en el dominio del producto de funciones de forma o del producto de una función de forma por la derivada de la otra son las componentes (i, j) de matrices tridiagonales denominadas **FF** y **FD** respectivamente. Luego

$$\begin{aligned} FF_{i,j} &= \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega \\ FD_{i,j} &= \int_{\Omega} \phi_i \phi_j' d\Omega \end{aligned} \quad (22.27)$$

Reemplazando las expresiones (22.27) en la ecuación 22.26, el residuo R_i resulta

$$R_i = \sum_j [p_j FD_{i,j} - 12\mu U d_j FF_{i,j}] \quad (22.28)$$

cuya expresión en forma matricial es

$$\mathbf{r} = \mathbf{0} = \mathbf{FD} \cdot \mathbf{p} - 12\mu U \mathbf{FF} \cdot \mathbf{d} \quad (22.29)$$

A partir de la forma matricial el autor realiza un procedimiento para ordenar el sistema de ecuaciones de acuerdo al número y distribución de los nodos en el dominio. Llevando a cabo dicho análisis se concluye que:

1. Si la distribución nodal no es simétrica, en general no se cumple que dos nodos equidistantes del centro presentan el mismo valor absoluto de presión.
2. Si la distribución nodal es simétrica y el *número de nodos es par*, la suma de las presiones de dos nodos equidistantes es cero. En consecuencia se preserva la antisimetría de la curva de presión y la solución podría ser correcta.
3. Si la distribución de presión nodal es simétrica y el *número de nodos es impar*, la antisimetría de la curva de presión se preserva solo para los nodos impares y la solución es incorrecta

Formulación integral

Con la forma integral de la ecuación de Reynolds (22.21) se obtienen los residuos de Galerkin en forma análoga al procedimiento seguido con la ecuación diferencial, es decir

$$R_i = \int_{\Omega} \left[p(x) - p(-L) - 12\mu U \int_{-L}^x \frac{(h-C)}{h^3} dx \right] \phi_i d\Omega \quad (22.30)$$

Introduciendo luego las expansiones (22.23) y (22.24) se obtiene

$$R_i = \int_{\Omega} \left[\sum_j p_j \phi_j - 12\mu U \sum_j d_j \int_{-L}^x \phi_i dx \right] \phi_i d\Omega \quad (22.31)$$

La integral indefinida de las funciones de forma produce una función de (x) y como tal puede ser expandida en términos de las funciones de forma utilizando sus valores nodales, esto es

$$\int_{-L}^x \phi_j(x) dx \simeq \sum_k G_{j,k} \phi_k(x) \quad (22.32)$$

donde $G_{j,k}$ es el valor de la integral de $\phi_j(x)$ cuando es evaluada entre s_1 ($x = -L$) y el nodo k , ($x = x_k$).

$$G_{j,k} = \int_{s_1}^{s_k} \phi_j(x) dx \quad (22.33)$$

Reemplazando la expresión (22.32) en (22.31) se llega a

$$R_i = \sum_j \left[p_j FF_{i,j} - 12\mu U d_j \sum_k G_{j,k} FF_{k,i} \right] \quad (22.34)$$

El sistema de ecuaciones (22.34) expresado en forma matricial resulta en

$$\mathbf{r} = 0 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{FF} - 12\mu U \mathbf{d} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{FF} \quad (22.35)$$

el cual provee las $N - 1$ ecuaciones necesarias para determinar las presiones de los nodos $2, 3, \dots, N$. El sistema de ecuaciones surge de la forma matricial limitado por las condiciones de frontera.

A continuación se presentan las conclusiones de la aplicación del método y las respectivas discretizaciones del dominio de flujo. Llámese formulación diferencial A a la que calcula el caudal circulante según una expansión para la variable (C) , mientras que la formulación diferencial B es la que incluye el caudal circulante como variable del sistema.

1. Para un canal de forma arbitraria y con una discretización arbitraria se concluye que:
 - a) La presión impuesta a la salida del canal de flujo no puede ser satisfecha por las ecuaciones discretizadas correspondientes a la versión diferencial de la ecuación de Reynolds. Es decir, la presión en el último nodo P_N involucra un error que, aunque de magnitud desconocida, asegura que la solución a ser obtenida no puede ser correcta.

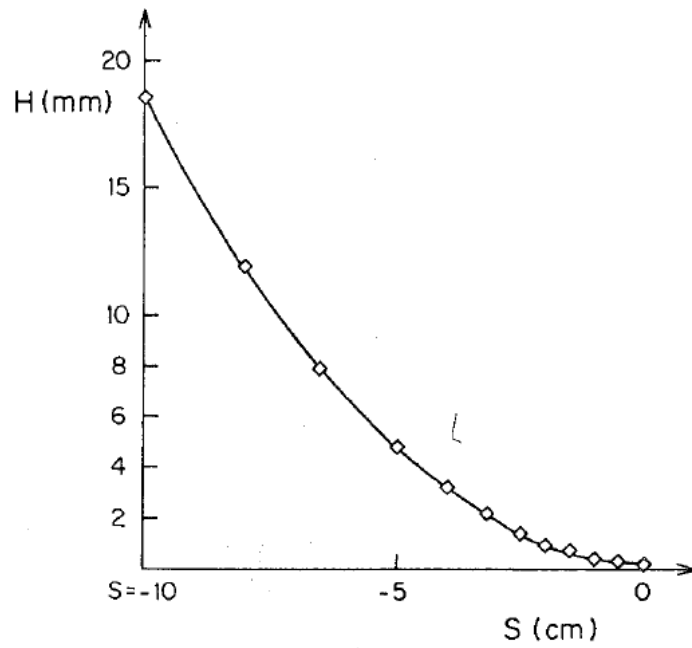
- b) Las ecuaciones discretizadas utilizando la versión integrada de la ecuación de Reynolds satisfacen la condición de presión impuesta a la salida del canal; en consecuencia la solución cumple la condición necesaria para ser correcta.
2. Para un canal que es simétrico con respecto al eje vertical y utilizando una distribución nodal simétrica se concluye que:
- a) Si se usa la formulación diferencial calculando el caudal (C) a partir de la integración de la ecuación de Reynolds entre ambos extremos del canal (versión diferencial A), las ecuaciones discretizadas sólo cumplen con la presión impuesta a la descarga del canal si el número de nodos es par. Bajo dichas condiciones la solución obtenida puede llegar a ser correcta, mientras que si el número de nodos es impar, invariablemente contendrá errores.
- b) Si se usa la formulación diferencial imponiendo la condición en el nodo correspondiente a la salida del canal del flujo ($p_N = 0$) y se calcula (C) utilizando el residuo ponderado correspondiente (versión diferencial B), se obtiene que para dos nodos cualesquiera equidistantes del eje de simetría la suma de sus presiones es cero sólo si la distribución nodal es par. Es decir, en este caso la solución cumple la condición necesaria de antisimetría y puede llegar a ser correcta. En caso de que el número de nodos sea impar, la antisimetría de la solución se preserva solo para los nodos impares y consecuentemente la solución no tiene posibilidad de ser correcta.
- c) Si se usa la forma integral de la ecuación de Reynolds, la condición necesaria de antisimetría en presión se preserva independientemente de que el número de sea par o impar.

Resultados numéricos

Los resultados numéricos que se presentan corresponden al canal convergente la figura (22.8) el canal es simétrico respecto a $s = 0$ y solo se muestra la región convergente. La longitud total del canal es de 20 [cm] y en la zona de ingreso y egreso de flujo ($s = -10$ y $s = 10$) la altura del canal es 1,8517 [cm], mientras que en la zona de máxima aproximación de los sólidos, la distancia de separación es que 0,02 [cm]. Los resultados que se presentan corresponden a un valor del producto de la viscosidad por la velocidad de 0,597 [Pa.m]. En la figura (22.9) (a) se observa que las predicciones de la formulación diferencial A se acercan a la condición de antisimetría en los nodos impares y la discrepancia es mayor en los nodos pares. En la figura (22.9) (b) se resumen los resultados de la formulación diferencial B. Se aprecia que para 21 nodos el desempeño del modelo no mejora.

Para el caso de distribución nodal simétrica con número de nodos par (40) los resultados se presentan en las figuras (22.10) (a), (b). En la figura (22.10) (a) se confirma que la formulación integral tiene menos errores a altas presiones que a bajas presiones. Esto se confirma en la figura (22.10) (b) donde los errores porcentuales de la formulación integral son siempre positivos (esto es en $s \rightarrow \pm 1$) a bajas presiones. También se evidencia que en

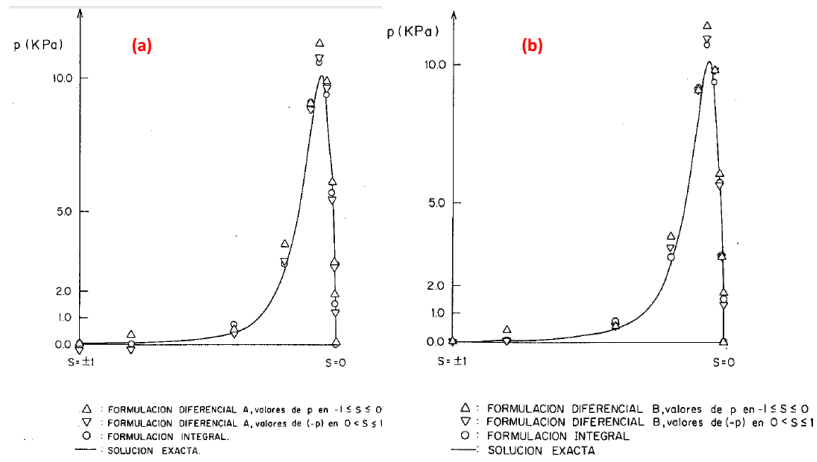
Figura 22.8: Canal convergente-divergente, simétrico respecto a su centro ($s = 0$).



Fuente Solución numérica de la ecuación de Reynolds. Formulación diferencial vs. formulación integral, Corvalán, C.M. *et al*, 1995.

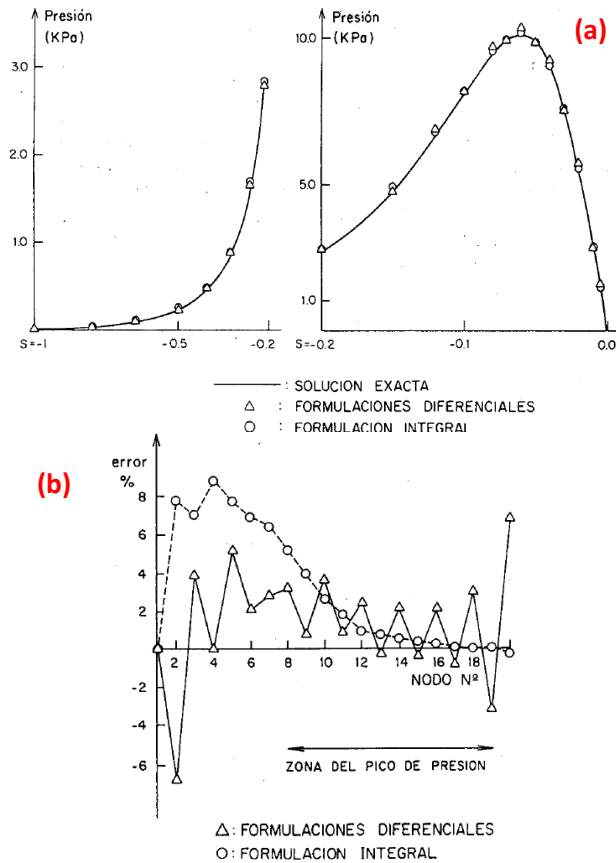
la zona de picos de presión los errores de la formulación integral son considerablemente menores.

Figura 22.9: Resultados correspondientes a las formulaciones A y B para una distribución nodal simétrica. (a) Formulaci3n diferencial A. (b) Formulaci3n diferencial B.



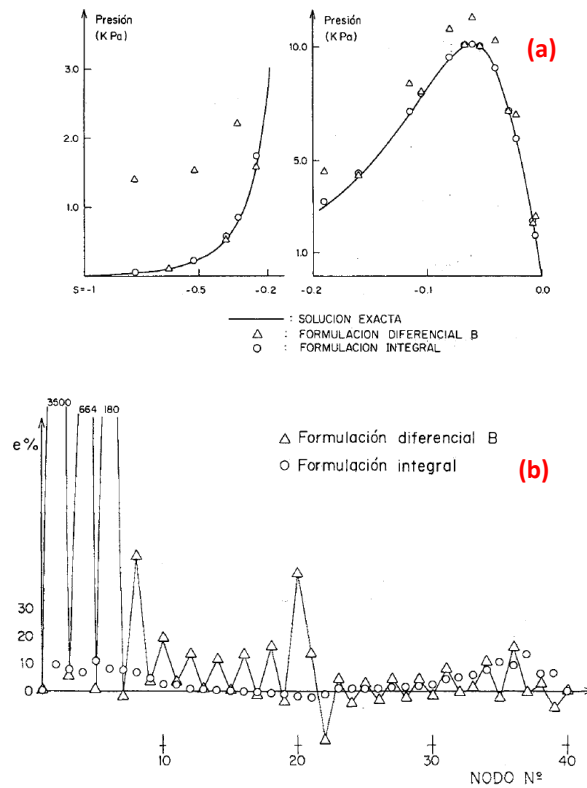
Fuente *Ídem*.

Figura 22.10: (a) Predicciones obtenidas para una distribuci3n nodal simétrica par de 40 nodos. (b) Error porcentual en los nodos para las predicciones presentadas en la figura (22.10) (a)



Fuente *Ídem*

Figura 22.11: (a) Predicciones obtenidas para una distribución nodal NO simétrica par de 40 nodos. (b) Error porcentual en los nodos para las predicciones presentadas en la figura (22.11)(a)



Fuente *Ídem*

También se utiliza una distribución *no simétrica* de 40 nodos derivada de la distribución de la figura (22.10). Para ello se separa levemente la posición de la mayoría de los nodos excepto por cuatro pares de nodos que se mantienen en su posición simétrica respecto del centro del dominio. Es significativo el hecho de que al alterar levemente la simetría nodal se pase de una solución aceptable a otra totalmente inaceptable. (Comparar las figuras (22.10) y (22.11)).

22.6. REDES NEURONALES ARTIFICIALES

El cerebro humano es el sistema de cálculo más complejo que conoce el hombre. El ordenador y el hombre realizan bien diferentes clases de tareas; así la operación de reconocer el rostro de una persona resulta una tarea relativamente sencilla para el hombre y difícil para el ordenador, mientras que la contabilidad de una empresa es tarea costosa para un experto contable y una sencilla rutina para un ordenador básico.

La capacidad del cerebro humano de pensar, recordar y resolver problemas ha inspirado a muchos científicos intentar o procurar modelar en el ordenador el funcionamiento del cerebro humano. Los profesionales de diferentes campos como la ingeniería, filosofía,

fisiología y psicología han unido sus esfuerzos debido al potencial que ofrece esta tecnología y están encontrando diferentes aplicaciones en sus respectivas profesiones.

Un grupo de investigadores ha perseguido la creación de un modelo en el ordenador que *iguale o adopte las distintas funciones básicas del cerebro*. El resultado ha sido una nueva tecnología llamada **Computación Neuronal o también Redes Neuronales Artificiales [139]**.

22.6.1. Características de las redes neuronales artificiales

Las Redes Neuronales Artificiales, **ANN (Artificial Neural Networks)** están inspiradas en las redes neuronales biológicas del cerebro humano. Están constituidas por elementos que se comportan de forma similar a la neurona biológica en sus funciones más comunes.

Las ANN al margen de "parecerse" al cerebro presentan una serie de características propias del cerebro. Por ejemplo las ANN aprenden de la experiencia, generalizan de ejemplos previos a ejemplos nuevos y abstraen las características principales de una serie de datos.

- **Aprender:** adquirir el conocimiento de una cosa por medio del estudio, ejercicio o experiencia. Las ANN pueden cambiar su comportamiento en función del entorno. Se les muestra un conjunto de entradas y ellas mismas se ajustan para producir unas salidas consistentes.
- **Generalizar:** extender o ampliar una cosa. Las ANN generalizan automáticamente debido a su propia estructura y naturaleza. Estas redes pueden ofrecer, dentro de un margen, respuestas correctas a entradas que presentan pequeñas variaciones debido a los efectos de ruido o distorsión.
- **Abstraer:** aislar mentalmente o considerar por separado las cualidades de un objeto. Algunas ANN son capaces de abstraer la esencia de un conjunto de entradas que aparentemente no presentan aspectos comunes o relativos.

En las Redes Neuronales Artificiales, ANN, la unidad análoga a la **neurona biológica** es el elemento procesador, **PE (process element)**. Un elemento procesador tiene varias entradas y las combina, normalmente con una suma básica. La suma de las entradas es modificada por una función de transferencia y el valor de la salida de esta función de transferencia se pasa directamente a la salida del elemento procesador. La salida del PE se puede conectar a las entradas de otras neuronas artificiales (PE) mediante conexiones ponderadas correspondientes a la eficacia de la sinapsis de las conexiones neuronales.

Una red neuronal consiste en un conjunto de *unidades elementales PE conectadas* de una forma concreta. El interés de las ANN no reside solamente en el modelo del elemento PE sino en las formas en que se conectan estos elementos procesadores. Generalmente los elementos PE están organizados en grupos llamados **niveles o capas**. **Una red típica consiste en una secuencia de capas con conexiones entre capas adyacentes consecutivas.**

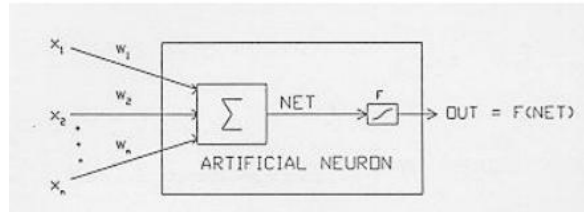
22.6.2. La neurona artificial

La neurona artificial fue diseñada para "emular" las características del funcionamiento básico de la neurona biológica. En esencia, se aplica un conjunto de entradas a la neurona, cada una de las cuales representa una salida de otra neurona. Cada entrada se multiplica por su "peso" o ponderación correspondiente análoga al grado de conexión de la sinapsis. Todas las entradas ponderadas se suman y se determina el nivel de excitación o activación de la neurona. Una representación vectorial del funcionamiento básico de una neurona artificial se indica según la ecuación 22.36

$$NET = \mathbf{X} * \mathbf{W} \quad (22.36)$$

siendo NET la salida, \mathbf{X} el vector de entrada y \mathbf{W} el vector de pesos. Normalmente la señal de salida NET suele ser procesada por una función de activación F para producir la señal de salida de la neurona OUT . La función F puede ser una **función lineal, o una función umbral o una función no lineal** que simula con mayor exactitud las características de transferencia no lineales de las neuronas biológicas. La Figura 22.12 representa una neurona artificial con una función de activación F .

Figura 22.12: Modelo de neurona artificial



Fuente REDES NEURONALES ARTIFICIALES Y SUS APLICACIONES, Xabier Basogain Olabe, 2004.

Las funciones F más utilizadas son la función Sigmoid y Tangente hiperbólica expresadas en el cuadro 22.2.

Cuadro 22.2: Funciones de activación más utilizadas

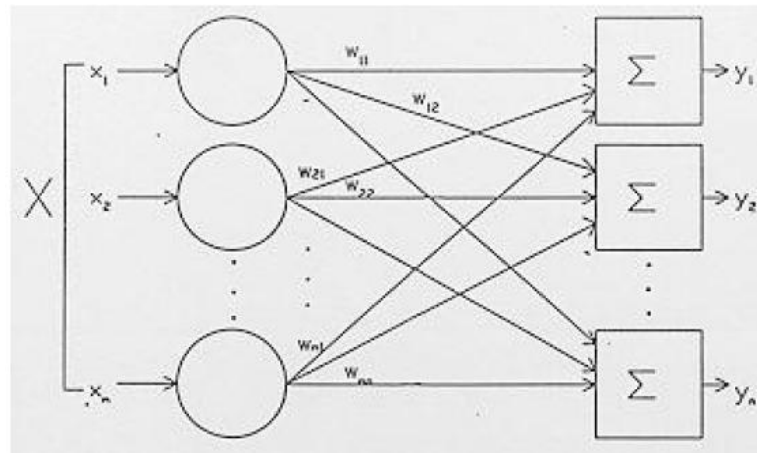
Sigmoid	$OUT = 1/(1+e^{-NET})$
Tangente hiperbólica	$OUT = \tanh(NET)$

Este tipo de modelo de neurona artificial ignora muchas de las características de las neuronas biológicas. Entre ellas destaca la omisión de retardos y de sincronismo en la generación de la salida. No obstante, a pesar de estas limitaciones las redes construidas con este tipo de neurona artificial presentan cualidades y atributos con cierta similitud a la de los sistemas biológicos.

Redes neuronales artificiales de una capa y multicapa

La capacidad de cálculo y potencia de la computación neuronal proviene de las múltiples conexiones de las neuronas artificiales que constituyen las redes ANN. La red más simple es un grupo de neuronas ordenadas en una capa como se muestra en la figura 22.13. Los nodos circulares sólo son distribuidores de las entradas y no se consideran

Figura 22.13: ANN de una capa



Fuente *Ídem*

constituyentes de una capa.

Cada una de las entradas está conectada a través de su peso correspondiente a cada neurona artificial. En la práctica existen conexiones eliminadas e incluso conexiones entre las salidas y entradas de las neuronas de una capa. No obstante la figura muestra una conectividad total por razones de generalización.

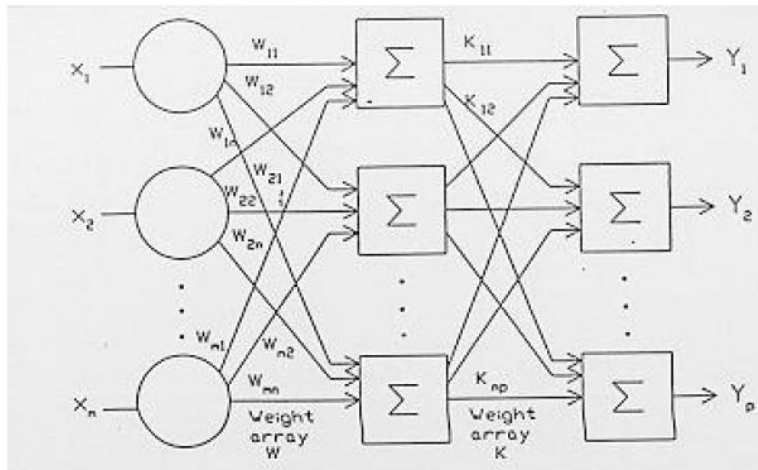
Normalmente las redes más complejas y más grandes ofrecen mejores prestaciones en el cálculo computacional que las redes simples. Las configuraciones de las redes construidas presentan aspectos muy diferentes pero tienen un aspecto común, el ordenamiento de las neuronas en capas o niveles imitando la estructura de capas que presenta el cerebro en algunas partes.

Las redes multicapa se forman con un grupo de capas simples en cascada. La salida de una capa es la entrada de la siguiente capa. Se ha demostrado que las redes multicapa presentan cualidades y aspectos por encima de las redes de una capa simple. La figura 22.13 muestra una red de dos capas.

Entrenamiento de las redes neuronales artificiales

Una de las principales características de las ANN es su capacidad de aprendizaje. El objetivo del entrenamiento de una ANN es conseguir que una aplicación determinada,

Figura 22.14: ANN de múltiples capas



Fuente *Ídem*

para un conjunto de entradas produzca el conjunto de salidas deseadas o mínimamente consistentes. El proceso de entrenamiento consiste en la aplicación secuencial de diferentes conjuntos o vectores de entrada para que se ajusten los pesos de las interconexiones según un procedimiento predeterminado. Durante la sesión de entrenamiento los pesos convergen gradualmente hacia los valores que hacen que cada entrada produzca el vector de salida deseado.

Los algoritmos de entrenamiento o los procedimientos de ajuste de los valores de las conexiones de las ANN se pueden clasificar en dos grupos: **Supervisado** y **No Supervisado**.

- **Entrenamiento supervisado.** Estos algoritmos requieren el emparejamiento de cada vector de entrada con su correspondiente vector de salida. El entrenamiento consiste en presentar un vector de entrada a la red, calcular la salida de la red, compararla con la salida deseada, y el error o diferencia resultante se utiliza para realimentar la red y cambiar los pesos de acuerdo con un algoritmo que tiende a minimizar el error
- **Entrenamiento no supervisado.** Los sistemas no supervisados son modelos de aprendizaje más lógicos en los sistemas biológicos. Desarrollados por Kohonen (1984) y otros investigadores, estos sistemas de aprendizaje no supervisado no requieren de un vector de salidas deseadas y por tanto no se realizan comparaciones entre las salidas reales y salidas esperadas. El conjunto de vectores de entrenamiento consiste únicamente en vectores de entrada. El algoritmo de entrenamiento modifica los pesos de la red de forma que produzca vectores de salida consistentes. El proceso de entrenamiento extrae las propiedades estadísticas del conjunto de vectores de entrenamiento y agrupa en clases los vectores similares.

Las redes neuronales se están aplicando fuertemente a la solución de problemas no lineales en derivadas parciales. Dentro de las publicaciones estudiadas, se encuentra la aplica-

ción de las ANNs como una metodología para la solución de las no linealidades en la LHD de cojinetes.

- “Effects of shaft surface texture on journal bearing pressure distribution”, Cem Sinanoglu *et al.* [142]. Este trabajo fue estudiado con profundidad en la sección 16, al momento de identificar de las no linealidades en la LHD generadas por la rugosidad de las superficies.

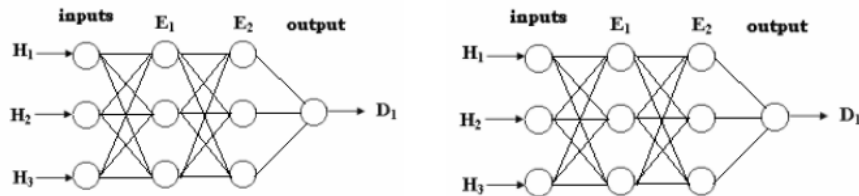
22.6.2.1. Determinación del coeficiente de fricción de un cojinete por método experimental y por medio de redes neuronales [138]

En este estudio, se determina el *coeficiente de fricción* utilizando un nuevo banco de evaluación de cojinetes y el método de redes neuronales artificiales. El material base de los cojinetes de prueba es el bronce. Los efectos del coeficiente de fricción son examinados para diferentes cargas y velocidades, en condiciones seca y lubricada.

Modelos con red neuronal

Se plantean dos redes neuronales cuya arquitectura abarca el problema con lubricante y sin él, como se ve en la figura 22.15. La ANN utiliza una arquitectura multicapa 3 : 4 : 3 :

Figura 22.15: Arquitectura de la ANN para el cojinete (a) seco y (b) lubricado.



Fuente Determination of friction coefficient at journal bearing by experimental and by means of artificial neural networks method, Ünül *et al.*, 2004.

4 : 1 para las condiciones secas y una arquitectura multicapa 3 : 4 : 4 : 1 para la condición lubricada.

Si o_j^m representa la salida de la j -ésima neurona en la m -ésima capa, y W_{ij}^m el peso de la conexión entre la i -ésima neurona de la $(m-1)$ -ésima capa con la j -ésima neurona en la m -ésima capa, entonces:

$$o_j^m = F \left[\sum_i (W_{ij}^m \cdot o_i^{m-1}) \right], \quad m \geq 2 \quad (22.37)$$

donde la función F puede ser cualquiera función diferenciable. En este estudio se define la función de transferencia de Sigmoid.

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (22.38)$$

Esta función limita la salida o_j^m entre 0 y 1. Para lograr la capacidad de asignación, la red se entrena mediante la presentación repedita de un juego de patrones representativos de entrada/salida, con una propagación regresiva del error y el ajuste de los pesos calculados para minimizar el error global e_p de la red, por ejemplo:

$$e_p = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_o} (t_{pj} - o_{pj}^m)^2 \quad (22.39)$$

Donde t_{pj} es la neurona objetivo de la salida j y o_{pj}^m es la salida calculada de la red neuronal correspondiente a esa neurona. El subíndice p indica que el error se considera para todos los patrones de entrada. La minimización del promedio del cuadrado del error se lleva a cabo sobre todos patrones de entrada. Como la salida o_{pj}^m es función de los pesos de conexión W^m y las salidas o_{pj}^{m-1} de las neuronas en la capa $m-1$, que son funciones de los pesos de conexión W^{m-1} , el error global e_p es una función de W^m y W^{m-1} . Aquí, W con un superíndice se refiere a la conexión de la matriz. Para lograr esto, W se evalúa en la derivada parcial, $\partial e / \partial W_{ij}$ y suministra una constante de proporcionalidad. (Ecuación 22.40)

$$\Delta W_{ij} = \varepsilon \delta_{pj} o_{pi} \quad (22.40)$$

Donde ε se refiere a la razón de aprendizaje, δ_{pj} se refiere a la señal de error de la neurona j en la capa m , y o_{pi} se refiere a la salida de la neurona i en la capa $m-1$. δ_{pj} se dá por las ecuaciones 22.41 y (22.42).

$$\delta_{pj} = (t_{pj} - o_{pj}) \cdot o_{pj} \cdot (1 - o_{pj}) \quad \text{para neuronas a la salida} \quad (22.41)$$

$$\delta_{pj} = o_{pj} (1 - o_{pj}) \cdot \sum_k \delta_{pk} w_{kj} \quad \text{para neuronas ocultas} \quad (22.42)$$

Acá, o_{pj} se refiere a la capa m , o_{pi} referido para la capa $m-1$, y δ_{pj} referido para la placa $m+1$. Los pesos se ajustan a la presencia de un impulso por la ecuación 22.43

$$\Delta W_{ij}(n+1) = \varepsilon (\delta_{pj} o_{pj}) + \mu \Delta W_{ij}(n) \quad (22.43)$$

Los detalles del manejo de las capas ocultas se encuentran en el trabajo completo del autor. Las variables de entrada son H_1, H_2, H_3 representan los valores de tiempo de la prueba [hora], carga aplicada [N] y el periodo [rpm]. La variable de salida es el coeficiente de fricción [D_1]. El número de iteraciones seleccionadas para movimiento seco es de 50000 y para condiciones LHD 100000.

El autor presentó mediante gráficas y tablas comparativas una notable concordancia entre las pruebas experimentales y los resultados obtenidos de la ANN, al variar los datos

de entrada de la red. Como era de esperarse el coeficiente de fricción es mucho más bajo (inclusive al comienzo del movimiento) para la condición de lubricación hidrodinámica que su contraparte seca.

22.7. VOLÚMENES FINITOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Hay tres etapas importantes en el modelado computacional de cualquier proceso físico: (i) definición del problema, (ii) modelado matemático, y (iii) simulación computacional.

La primera etapa natural es la definición e idealización del problema de interés, en términos de un conjunto de cantidades relevantes que se quiere medir. En la definición de esta idealización se espera obtener un problema bien planteado, es decir, que tiene solución única para un determinado conjunto de parámetros. Esto podría no siempre ser posible para garantizar la fidelidad de la idealización, ya que en algunas instancias, el proceso físico no está totalmente entendido. Un ejemplo es el entorno complejo dentro de un reactor nuclear donde las son difíciles de obtener las mediciones [144].

El segundo paso para el modelado del proceso es la representación de la idealización de la realidad física mediante un modelo matemático: las ecuaciones gobernantes del problema. Esto es posible para varios fenómenos físicos. Por ejemplo, en dinámica de fluidos, la ecuación de Navier-Stokes se considera una representación exacta del movimiento del fluido. Análogamente, las ecuaciones de la elasticidad en la mecánica estructural gobiernan la deformación de un objeto sólido, debido a fuerzas externas aplicadas. Estas son complejas ecuaciones generales que son muy difíciles de resolver tanto analítica como computacionalmente. Por lo tanto, se necesita introducir supuestos simplificadores para reducir el complejo modelo matemático y que sea factible de solución ya sea exacto o numérico [144].

Después de la selección de un modelo matemático apropiado, con condiciones de borde e iniciales adecuadas, se puede proceder a la solución. Se considerará la solución numérica de un problema matemático que es descrito por ecuaciones diferenciales parciales (PDEs). Los tres casos clásicos de la solución numérica de PDEs son el método de diferencias finitas (FDM), el método de elementos finitos (FEM) y el método de volúmenes finitos (FVM).

Los FDM es el más antiguo y es basado en la aplicación de una expansión de Taylor local para aproximar la ecuación diferencial. Los FDM usan una topología de red cuadrada de líneas para la construcción de la discretización de la PDE. Esto es un embotellamiento potencial del método cuando se manipulan geometrías complejas en múltiples dimensiones. Este problema motivó la utilización de una forma integral de las ecuaciones en derivadas parciales y, posteriormente, el desarrollo de los elementos finitos y técnicas de volúmenes finitos [144].

Para dar una breve introducción a las técnicas que se consideran, cada tipo de discretización se aplica a una PDE de una sola dimensión. Esto no nos permitirá ilustrar la

flexibilidad geométrica de la FEM y la FVM en toda su extensión, pero vamos a ser capaces de demostrar algunas de las similitudes entre los métodos y por lo tanto poner de relieve algunas de las ventajas y desventajas relativas de cada enfoque.[144]

22.7.1. Leyes de conservación: las formas diferencial e integral

Las ecuaciones de gobierno de la mecánica del continuo que representa el comportamiento cinético y mecánico de los cuerpos en general, se refieren comúnmente como las leyes de conservación. Estos se derivan mediante la invocación de la conservación de la masa y la energía y la ecuación de momento (la ley de Newton). Mientras que son igualmente aplicable a los sólidos y fluidos, su comportamiento se tiene en cuenta diferentes a través del uso de una ecuación constitutiva diferentes.

El principio general de la derivación de las leyes de conservación es que el tasa de cambio de $u(x, t)$ en un volumen V , más el flujo de la u a través de la frontera de A es igual a la tasa de producción de u denota por $S(u, x, t)$. Esto se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V u(x, t) dV + \int_A Af(u) \cdot n dA - \int_V S(u, x, t) dV = 0$$

que se conoce como la forma integral de la ley de conservación. Por un período fijo (independiente de t) y volumen, se puede aplicar el teorema de Gauss

$$\int_V \nabla \cdot f dV = \int_A f \cdot n dA$$

para obtener

$$\int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot f(u) - S \right) dV = 0$$

Para la expresión integral es cero para cualquier volumen V , el integrando debe ser cero. Esto se traduce en la forma fuerte o diferencial de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot f(u) - S = 0$$

Una forma integral alternativa puede ser obtenida por el método de residuos ponderados. Multiplicando la ecuación. (3) por una función de peso $w(x)$ e integrando sobre el volumen V se obtiene

$$\int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} w(x) + \nabla \cdot f(u) - S \right) w(x) dV = 0$$

Si la ecuación. (4) se satisface para cualquier función de peso $w(x)$, entonces la ecuación. (4) es equivalente a la forma diferencial (3). Los requisitos de suavidad en f puede ser relajada aplicando el teorema de Gauss a la ecuación. (4) para obtener

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} - S \right) w(x) - f(u) \cdot \nabla w(x) \right] dV + \int_A f \cdot n w(x) dA = 0$$

Esto se conoce como la forma débil de la ley de conservación

22.7.2. Método de volúmenes finitos

Como se demuestra en la historia de la ciencia, una manera exitosa para estudiar fenómenos naturales es describiendolos a través de modelos, con ciertas estructuras que recreen sólo algunas de las propiedades originales. A esto se le llaman modelos físicos, y muchos de ellos están descritos por ecuaciones diferenciales parciales con condiciones iniciales y/o problemas de valores en las fronteras. El siguiente paso es investigar el comportamiento cualitativo de los modelos matemáticos existentes y la unificación de las soluciones, suavidad, etc. Con frecuencia para una mejor comprensión de las propiedades de un determinado modelo, la información cuantitativa detallada de la solución es necesaria. Con el fin de obtener esta información, el problema continuo se aproxima con uno más simple, por lo general un modelo discreto; se estudian las propiedades de este modelo discreto y se soluciona. Por lo general, los cálculos se realizan en un equipo concreto, y por lo tanto se desarrolla el algoritmo computacional de acuerdo a la configuración de este equipo. Con el fin de sacar conclusiones del proceso de solución, por ejemplo, visualizar algunas de sus características. Los resultados se comparan con el fenómeno natural, y si no son satisfactorios, es proceso se modifica y repite.[134]

En esta cadena de objetos conectados entre sí se distingue el modelo físico, el modelo de continuidad matemática, el modelo matemático discreto, y el modelo computacional y el bloque de la interpretación.

El método de volúmenes finitos es uno de las técnicas de aproximación más populares para el cálculo y la computación de ecuaciones diferenciales parciales en la ingeniería y en procesos físicos. Su distintiva propiedad de conservación se deriva de la aproximación de las leyes de conservación integral, y es muy importante para la simulación precisa de complicados procesos físicos en redes relativamente grandes. Este método está siendo empleado en numerosas aplicaciones y por parte de una amplia comunidad científica multidisciplinar [131].

“El método de volúmenes finitos en una dimensión espacial se basa en dividir el dominio espacial en intervalos, los *volúmenes finitos*, también llamados celdas, y buscar en cada uno de ellos una aproximación integral de la variable conservativa, w . En cada paso de tiempo se actualizan estos valores utilizando aproximaciones del flujo a través de las fronteras de los volúmenes finitos.”[131]

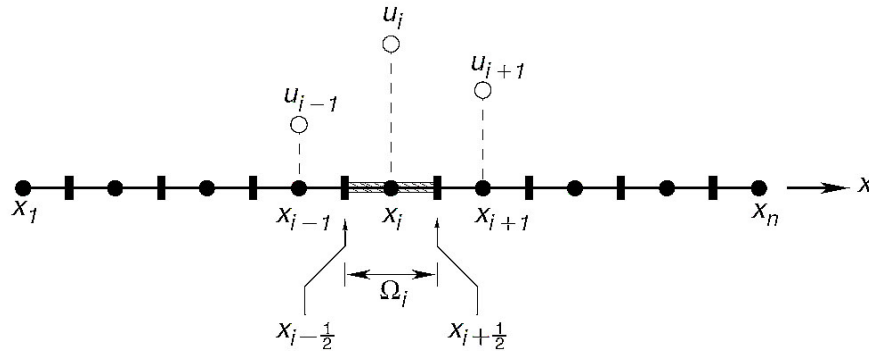
El dominio espacial $[a, b]$ se discretiza tomando una malla arbitraria $C_{\Delta x}$, donde $\{x_i : i = 1, \dots, M\}$ es el conjunto de los nodos de $C_{\Delta x}$, siendo Δx la norma de la malla $C_{\Delta x}$:

$$\Delta x = \sup_{x_i \in C_{\Delta x}} |x_i - x_{i-1}|$$

la celda o el volumen finito C_i se define como sigue:

$$C_i = \left(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right) = \left(x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{2}, x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)$$

Figura 22.16: Discretización del dominio



Fuente Handbook of materials modeling: Models, Yip, S, 2005.

por lo tanto su área - longitud en el caso 1D es $A_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}$

Por simplicidad en la mayoría de los casos se considera $A_i = \Delta x, i = 1, \dots, M$.

El valor buscado de w_i^n aproximará el valor medio de w sobre la celda C_i en el instante t_n :

$$w_i^n \approx \frac{1}{A_i} \int_{x_{i-(1/2)}}^{x_{i+(1/2)}} w(x, t^n) dx = \frac{1}{A_i} \int_{C_i} w(x, t^n) dx \quad (22.44)$$

Si w es una función regular, entonces la integral en 22.44 coincide con el valor de w en el nodo de la celda con el orden $O(\Delta x^2)$. Sin embargo, trabajando con los promedios de las celdas en lugar de los valores discretos w_i^n , es más fácil utilizar propiedades importantes de las leyes de conservación para la obtención de los métodos numéricos.

En particular, debemos garantizar que el método numérico sea *conservativo* en el sentido de que imite a la solución exacta.

Esto es debido a que $\sum_{i=1}^M w_i^n \Delta x$ aproxima la integral de w sobre el dominio espacial $[a, b]$, y si empleamos un método numérico en la *forma conservativa*, entonces la suma discreta anterior cambiará solamente debido a los valores en las fronteras $x = a$ y $x = b$. La masa total dentro del dominio computacional será preservada, o a lo sumo varía correctamente en la medida de que las condiciones de contorno estén adecuadamente impuestas.

La forma integral de una ecuación unidimensional de advección lineal es dada por la ecuación 22.45 con $f(u) = au$ y $S = 0$. Aquí la región de integración se considera un volumen de control Ω_i , asociado con el punto coordenado x_i , representado por $x_{i-(1/2)} \leq x \leq x_{i+(1/2)}$, de acuerdo a la notación de la figura 22.16, y la forma integral es escrita como la ecuación (22.46)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V u(x, t) dV + \int_A f(u) \cdot n dA - \int_V S(u, x, t) dV = 0 \quad (22.45)$$

$$\int_{x_{i-(1/2)}}^{x_{i+(1/2)}} u_t dx + \int_{x_{i-(1/2)}}^{x_{i+(1/2)}} f_x(u) dx = 0 \quad (22.46)$$

Esta expresión puede ser obtenida de la forma residual ponderada, si se selecciona el peso de $w(x)$ como $w(x) = 1$ para $x_{i-(1/2)} \leq x \leq x_{i+(1/2)}$ y $w(x) = 0$ en caso contrario. El último término de la ecuación 22.46, puede ser evaluada analíticamente para obtener

$$\int_{x_{i-(1/2)}}^{x_{i+(1/2)}} f_x(u) dx = f(U_{i+(1/2)}) - f(u_{i-(1/2)})$$

y si se aproxima la primera integral usando la regla del punto medio, se obtiene finalmente la expresión de forma semi-discreta

$$u_t|_i (x_{i+(1/2)} - x_{i-(1/2)}) + f(u_{i+(1/2)}) - f(u_{i-(1/2)}) = 0$$

Este enfoque produce un esquema conservativo si el flujo en las fronteras de una celda son iguales al flujo en la celda adyacente. Estos esquemas conservativos son populares para la discretización de ecuaciones hiperbólicas ya que, si convergen, se puede demostrar (teorema de Lax-Wendroff) para converger a una solución débil de la ley de conservación.

22.7.3. Comparación de FVM y FDM

Para completar la comparación entre las diferentes técnicas se debe considerar la discretización de las FVM para las ecuaciones elípticas $u_{xx} = s$. La forma integral de las FVM para esta ecuación sobre un volumen de control $\Omega_i = \{x_{i-(1/2)} \leq x \leq x_{i+(1/2)}\}$ es:

$$\int_{x_{i-(1/2)}}^{x_{i+(1/2)}} u_{xx} dx = \int_{x_{i-(1/2)}}^{x_{i+(1/2)}} s dx$$

Evaluando exactamente el lado izquierdo y aproximando al lado derecho por la regla del punto medio obtenemos:

$$u_x(x_{i+(1/2)}) - u_x(x_{i-(1/2)}) = (x_{i+(1/2)} - x_{i-(1/2)}) s_i$$

22.8. OTROS MÉTODOS DE SOLUCIÓN

El problema de la lubricación hidrodinámica en cojinetes está siendo abordado ampliamente por métodos poco convencionales para el tratamiento numérico de las ecuaciones diferenciales parciales, como pueden ser, el **método del gradiente conjugando** (formulado mediante planteamiento de *optimización*) y el **método de Montecarlo**, expresión general para referirse a la solución de problemas analíticos mediante *técnicas estocásticas*. Los pasos para la aplicación del método del gradiente conjugado están disponibles en el capítulo 12 del libro de Patial *et al.* [140], y en el apéndice A del mismo autor se encuentran los pasos para la aplicación del método de Montecarlo.

Como ejemplo de esta tendencia se menciona el trabajo de Chiang *et al.* [133] que evalúa el desempeño de las características de un sistema cojinete muñón de longitud finita, en presencia de los efectos combinados de un lubricante Newtoniano mezclado con aditivos y la rugosidad entre las superficies del cojinete y el muñón. Basado en la teoría de Stokes y el modelo estocástico de Christensen, se deduce la ecuación *estocástica generalizada de Reynolds*. La ecuación de distribución de presión en la película se resuelve numéricamente usando el método del gradiente conjugado de iteraciones. De acuerdo con los resultados, los efectos de flujo confinado pueden incrementar la película de fluido lubricante, mejorando la capacidad de carga y reduce el parámetro de fricción, especialmente a altas relaciones de excentricidad.

En estudios aún más recientes Liu [137] y Gertzos [136] aplican la dinámica computacional de fluidos (CFD) y el método de interacción de fluido estructura (FSI) para determinar el comportamiento del sistema rotor cojinete al considerar la deformación de las paredes del cojinete junto a un fluido magneto reológico.

BIBLIOGRAFÍA

- [131] M.E.V. CENDÓN. *Introducción al método de volúmenes finitos*, volume 10. Univ Santiago de Compostela, 2008.
- [132] S.C. CHAPRA, R.P. CANALE, J.L. CÁRDENAS, and F.V. BADILLO. *Métodos numéricos para ingenieros*. McGraw-Hill, 2003.
- [133] H.L. CHIANG, C.H. HSU, and J.R. LIN. Lubrication performance of finite journal bearings considering effects of couple stresses and surface roughness. *Tribology international*, 37(4):297–307, 2004.
- [134] P.G. CIARLET. *The finite element method for elliptic problems*, volume 4. North-Holland, 1978.
- [135] C.M. CORVALÁN, J. Di PAOLO, and F.A. SABATER. Solución numérica de la ecuación de reynolds. formulación diferencial vs. formulación integral. *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, 11(3), 1995.
- [136] KP GERTZOS, PG NIKOLAKOPOULOS, and CA PAPADOPOULOS. Cfd analysis of journal bearing hydrodynamic lubrication by bingham lubricant. *Tribology International*, 41(12):1190–1204, 2008.
- [137] H. LIU, H. XU, P.J. ELLISON, and Z. JIN. Application of computational fluid dynamics and fluid–structure interaction method to the lubrication study of a rotor–bearing system. *Tribology Letters*, 38(3):325–336, 2010.
- [138] B.S. ÜNLÜ, H.K. DURMUS, C. MERIC, and E. ATIK. Determination of friction coefficient at journal bearings by experimental and by means of artificial neural networks method. *Mathematical and Computational Applications*, 9(3):399–408, 2004.
- [139] X.B. OLABE. *REDES NEURONALES ARTIFICIALES Y SUS APLICACIONES*. 2004.
- [140] P.B. PATIAL and UP VERMA. *Numerical computational methods*. Alpha Science International, 2006.
- [141] S. SHIVAWASMY. *Finite element analysis and programming: An introduction*. Alpha Science International, 2007.
- [142] Cem SINANOGLU, Fehmi NAIR, and M. Baki KARAMLS. Effects of shaft surface texture on journal bearing pressure distribution. *Journal of Materials Processing Technology*, 168(2):344 – 353, 2005.

- [143] L. VÁZQUEZ, S. JIMÉNEZ, C. AGUIRRE, and P. PASCUAL. *Métodos Numéricos para la Física y la Ingeniería*. McGraw -Hill, 2009.
- [144] S. YIP. *Handbook of materials modeling: Models*. Springer, 2005.
- [145] OC ZIENKIEWICZ and RL TAYLOR. *El Método de Elementos Finitos. Vol. 1 y 2*. McGraw Hill-Cimne, 2004.

Capítulo 23

BANCOS EXPERIMENTALES

En la metodología de la investigación, la *experimentación* es una etapa de vital importancia, que se basa en la *provocación, repetición y estudio* de los fenómenos. En una buena cantidad de las publicaciones estudiadas, los autores se valen de un banco de pruebas para comprobar sus hipótesis y otro tanto lo hacen con respecto a trabajos reconocidos internacionalmente. Siendo así, una forma de validar los modelos cuyos parámetros modifican la ecuación de la lubricación hidrodinámica, es a través de la experimentación en bancos de prueba. De este modo, se espera que un banco sea práctico, versátil y que permita un amplio rango de condiciones operativas reales, para garantizar la efectividad de la medición.

El banco de pruebas para estudios de LHD en cojinetes esta conformado por diferentes sistemas básicos que varían dependiendo de cada aplicación específica. Por lo general, un banco de prueba consiste en una estructura, una unidad de cojinete y carga, unidad de lubricación, sistema de control y medición, etc [160]. Los principales componentes del banco de pruebas se instalan en la estructura, que puede ser relativamente rígida para evitar deformaciones y vibraciones.

1. **Unidad de cojinete:** Consiste en el cojinete, el alojamiento, el eje y los cojinetes de apoyo. El alojamiento se coloca en el cojinete de prueba que por lo general tiene un diseño simplificado cúbico o cilíndrico. También, puede tener rodamientos de precisión que soporten capacidad de carga radial y axial, en aplicaciones de baja y media velocidad.

En los trabajos de Maestría realizados por Machorro [148] y López [155] se tiene un ejemplo interesante de tipo de alojamiento; adquirieron de Bently Nevada una unidad Rotorkit R4, con cojinetes especiales hidrostáticos. El sistema de control administra la distribución de presión en el cojinete mediante un sistema PID.

2. **Unidad del sistema de carga:** Genera la carga del cojinete, hay bancos de prueba con sistema de carga estáticos y dinámicos. Hay cilindros hidráulicos y neumáticos que son ampliamente utilizados en sistemas de carga. En la figura 23.16 se muestra un esquema de banco experimental, en el que la carga se aplica al cojinete verticalmente hacia arriba por un amortiguador de aire instalado bajo el cojinete de prueba

arriba de los 30 [kN], y se mide por una celda carga. El sistema de procesamiento de señales consiste en varios tipos de amplificadores, una unidad de alimentación de potencia, un sistema de adquisición de datos, un tacómetro digital, un osciloscopio digital, un anillo colector, un analizador de señales, y un computador personal [162].

3. **Unidad del sistema de accionamiento:** Impulsa el eje y se compone de una unidad de potencia y una unidad de transmisión. Bently [115] recomienda la aplicación de acoples específicamente mecanizados dependiendo de las características del sistema.
4. **Unidad del sistema de lubricación:** Consiste en un tanque, bomba, calefacción o dispositivo de refrigeración, filtros y tuberías que se utilizan para la lubricación del cojinete. Si los cojinetes son lubricados por aire o gas se utilizará una unidad de compresión adecuada.
5. **Unidad del sistema de control:** Controla las principales operaciones de la estructura del banco de pruebas. Los sistemas automatizados de control se han visto favorecidos, especialmente con un banco experimental de grandes dimensiones utilizados para pruebas a largo plazo [151, 160]. El control manual es adecuado para bancos de pruebas pequeñas que se utilizan en pruebas a corto plazo. Los principales componentes del sistema de control pueden ser una computadora de control con una tarjeta de procesador de señales y una tarjeta de salida analógica, así como amplificadores analógicos (PID), filtros anti-submuestreo, servo-válvulas direccionales de dos etapas con amplificador analógico modular, transmisores de presión, un sensor de pulso, termocuplas y contador de pulsos electrónicos.
6. **Unidad del sistema de medición:** Consiste en la medición y el registro de los dispositivos. Dispositivos para medir las variables relacionadas con los contactos entre el cojinete, lubricante y el eje que están situados en el cojinete y en el alojamiento del cojinete. En la investigación de Ramman [151], para medir la capacidad de carga del cojinete, se utiliza un método indirecto a través que un circuito electrónico que depende de la fricción en la película de fluido (Torque). El hecho de conocer fricción implica el conocimiento de la capacidad de carga del sistema. Por su parte Valkonen [160] utiliza sensores de ópticos de presión junto a un juego de termocuplas distribuidas en el cojinete para estudiar ambos parámetros simultáneamente.

En general, para la experimentación es indispensable definir los fenómenos específicos que se quieren reproducir, enfocarse en ellos y generar un banco que los represente de la forma más simple y modular. En las secciones posteriores se detallan algunos bancos desarrollados para diferentes aplicaciones.

23.1. PELÍCULA DE PRESIÓN EN COJINETES HIDRODINÁMICOS

La lubricación reduce la fricción entre dos superficies (tales como la superficie de deslizamiento del cojinete y el eje), en movimiento relativo. Generalmente se clasifican lubricación limite, lubricación mixta y lubricación hidrodinámica (Ver capítulo 9 para detalles de los tipos de lubricación). Cuando un cojinete funciona bajo lubricación limite, las superficies de deslizamiento de los cojinetes y del eje están prácticamente en contacto directo y la fricción se encuentra en su nivel más alto. Para reducir los niveles de fricción se usa la lubricación mixta, donde las superficies de deslizamiento están parcialmente separadas por el lubricante, y de lubricación hidrodinámica donde las superficies de deslizamiento están completamente separados por el lubricante. El motivo o razón de este estudio es mostrar un banco de pruebas con la función de medir los siguientes parámetros: determinación de la pérdida de fricción en cojinetes lisos, determinación de la temperatura en la película de aceite, determinación del espesor de película, determinación de la presión de la película de aceite [160].

Métodos de medición y dispositivos

Diferentes dispositivos de medición se han utilizado en estudios experimentales para determinar los principales parámetros relacionados con la tribología en cojinetes hidrodinámicos.

Para medir la presión de película en el aceite, los sensores de presión consisten en tres capas de material con un espesor total de alrededor de $6 [\mu m]$, Someya [158]. La parte sensible a la presión del sensor se llama película sensible. Es en la capa media y la mayoría esta hecha de Manganina, una aleación de cobre, manganeso y níquel. Esta parte sensible a la presión se conecta como resistencia de cuarto, en un puente de Wheatstone. El funcionamiento del sensor de película delgada de presión se basa en el cambio de la resistencia en la parte sensible a la presión cuando esta cargado de presión. La capa más baja, llamada película aislante, separa eléctricamente la película sensible desde el cojinete.

La capa más superficial, llamada película de protección, protege la película al desgaste. Debido a que la superficie de la película de protección es normal, el sensor de película delgada se asemeja a la presión de una capa común en la superficie de deslizamiento en un cojinete plano.

Se utilizó un total de catorce indicadores de presión para determinar la distribución de la película del aceite. Sinanoglu [157], determinó la distribución de la película mediante el uso de dieciséis tubos manométricos. Se perforaron doce agujeros en la dirección circunferencial y cuatro orificios en la dirección axial del cojinete para poner los tubos manométricos. El primer sensor óptico de presión para medir la presión de película del aceite en los cojinetes lisos fue desarrollada por Ronkainen [154]. La determinación del espesor de película de aceite ha sido generalmente en base en las mediciones de la posi-

ción del eje. Se utilizaron cuatro sensores en cada cojinete. En su estudio del rendimiento de un cojinete hidrodinámico con ranuras axiales, mide la posición relativa de un eje con dos pares de sondas de proximidad. Se tuvo en cuenta las deformaciones térmicas que influyen en las mediciones de la posición del eje. Mediante la medición de la capacidad total de la película de aceite se determinó el espesor de película de aceite en la cojinete.

Los metodos para determinar la temperatura de la película de aceite han sido generalmente basados en la medición de la temperatura de funcionamiento del cojinete. Para medir la temperatura de la película de aceite, termopares forman una película fina sobre la superficie de deslizamiento de los cojinetes, Mihara [150] Someya y Mihara [158]. Un termopar típico de película delgada se compone de tres capas de diferentes materiales con un espesor total de alrededor de $6 \mu m$, La capa media es la parte mas sensible a la temperatura que lee el termopar y consta de dos partes, la primera parte esta hecha de cromo y la otra de constantan. La parte sensible a la temperatura esta conectado como la resistencia de cuatro en un puente de Wheatstone y el funcionamiento de los termopares de capa fina se basa en cambios en la resistencia en la parte sensible a la temperatura. La capa más baja se llama película aislante y aísla eléctricamente la película sensible desde el cojinete. La capa más superficial, conocida como película de protección, protege la película sensible al desgaste.

23.1.1. Banco de prueba

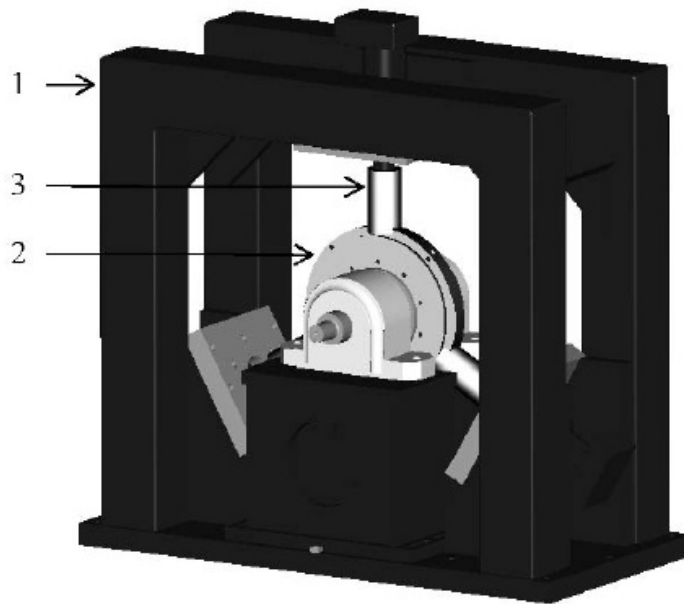
Diseño principal

El equipo de prueba fue desarrollado por un equipo de investigación. El autor estuvo a cargo del diseño principal, de la construcción y de la operación del banco de prueba. El diseño principal del banco de prueba del cojinete es simple, amplio y basado en el uso de componentes reemplazables.

Estructura

En la figura (23.1), se ve una vista del modelo en tres dimensiones del banco de pruebas para cojinetes, donde se especifica estructura (1), unidad de cojinete (2), cilindros de carga (3). El diseño principal del banco de pruebas del cojinete estuvo influenciado por una avanzada solución presentada por Berg [146].

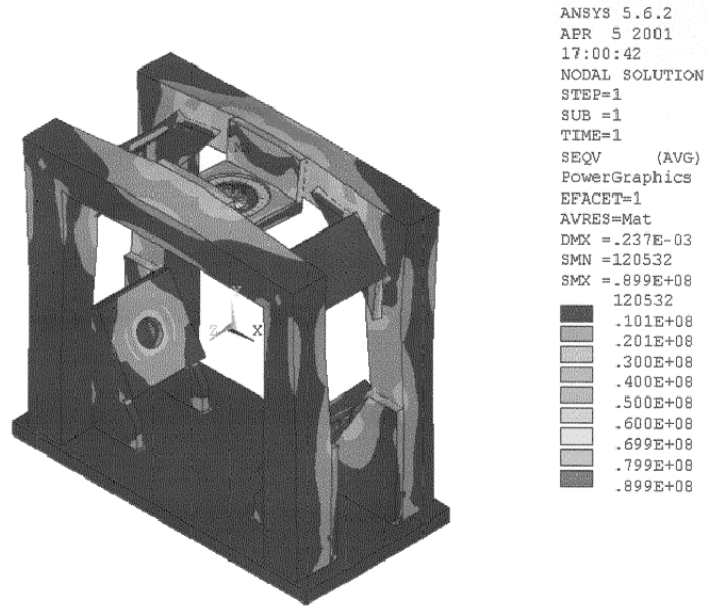
Figura 23.1: Banco de pruebas versátil.



Fuente Oil film pressure in hydrodynamic journal bearings, A. Valkonen.

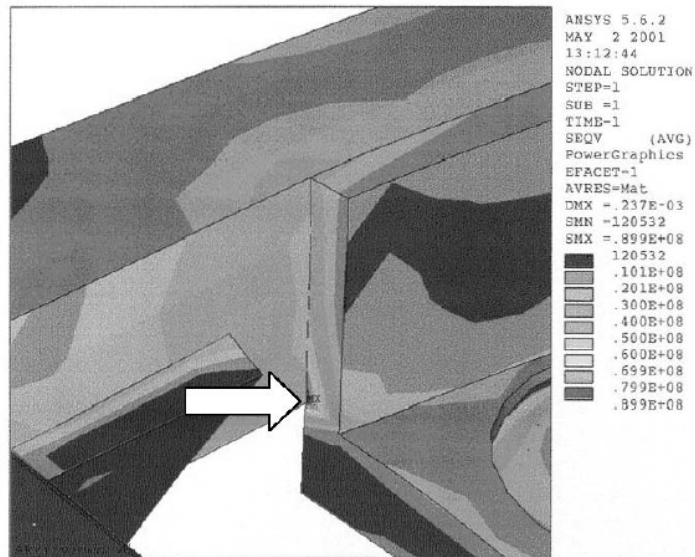
La estructura del banco de prueba del cojinete consiste en una base de placa gruesa y dos vigas firmes angulosas con espacios para cilindros de carga. El ancho, altura y longitud de la estructura eran de alrededor de $(1,2; 1,1$ y $0,6 [m])$ respectivamente. La estructura es lo suficientemente firme como para resistir al limite de las perturbaciones y los fenómenos de resonancia en su rango de operación nominal. La resistencia de la estructura fue estudiada matemáticamente en la Universidad Tecnológica de Lappeenranta, utilizando el método de elementos finitos (FEM). Según el estudio mencionado, se prevé que el esfuerzo máximo en la estructura fue de $90 [Mpa]$ a 120% de carga, con una carga máxima de $120 [kN]$, como se ve en la figura 23.2. El punto de máxima tensión fue en la unión entre la carcasa superior del cilindro y la viga como se ve en la figura 23.3, y que la frecuencia de oscilación natural más baja de la estructura fue de $91 [Hz]$, como se ve en la figura 23.4.

Figura 23.2: Esfuerzo máximo de la estructura



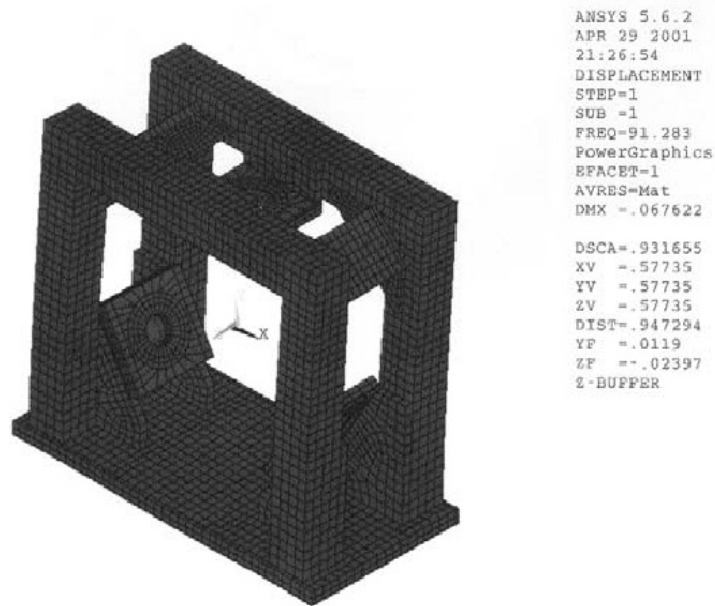
Fuente *Ídem*

Figura 23.3: Tensión en el punto de unión entre la carcasa superior del cilindro y la viga



Fuente *Ídem*

Figura 23.4: Vibración en la estructura del banco de pruebas

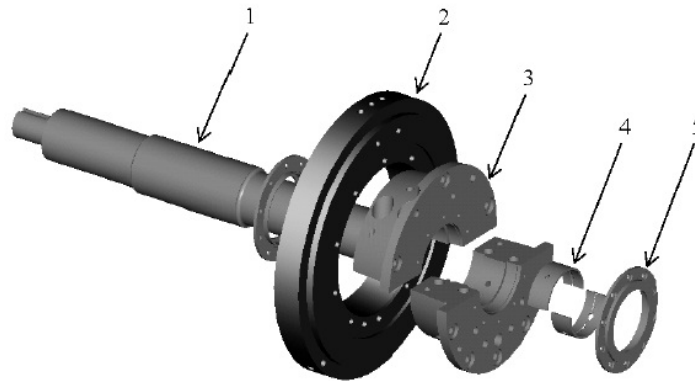


Fuente *Ídem*

Unidad del cojinete

La unidad de cojinete incluye el cojinete, un alojamiento con un sello circular de cobertura, un anillo de fuerza (que rodea el alojamiento) con dos resistencias de calentamiento, el eje, los cojinetes de apoyo (con alojamientos y partes móviles) y un brazo de alineación; en la figura 23.5, se vé claramente un esquema de la explosión de la unidad del cojinete, que incluye: el eje (1), anillo de fuerza (2), alojamiento (3), cojinete (4) y el sello circular de cobertura (5). La potencia nominal de las resistencias de calentamiento fue de 1 [kW]. Los soportes de los cojinetes fueron bolas esféricas que operan con un insignificante juego. La velocidad cinemática de rotación nominal, la velocidad rotacional térmica nominal y la capacidad de carga dinámica de los cojinetes de apoyo fueron de (4,000 [1/min], 3200 [1/min] y 455 [kN]), respectivamente. Tiene una guía de deslizamiento sobre la placa de base de la estructura para orientar las partes móviles de los cojinetes de apoyo. El brazo de alineación que conecta el anillo de fuerza a la estructura se utilizó para el posicionamiento. El brazo de alineación permite pequeños movimientos horizontales, verticales y de rotación entre el anillo de fuerza y la estructura.

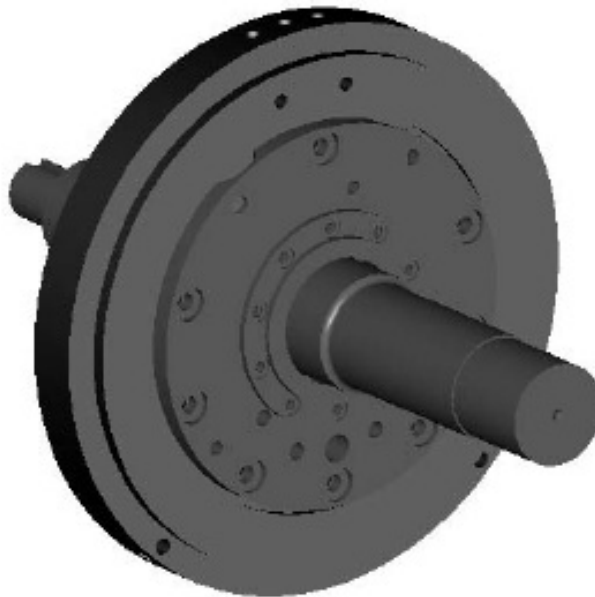
Figura 23.5: Una vista de explosión de la unidad del cojinete



Fuente *Ídem*

Debido a la forma espaciosa del diseño principal del banco de prueba, en este se han podido llevar a cabo y se seguirán llevando a cabo experimentos con cojinetes y ejes de diferentes tipos y tamaño, en la figura (23.6), se ve la unidad de cojinete ensamblado.

Figura 23.6: Unidad de cojinete ensamblado

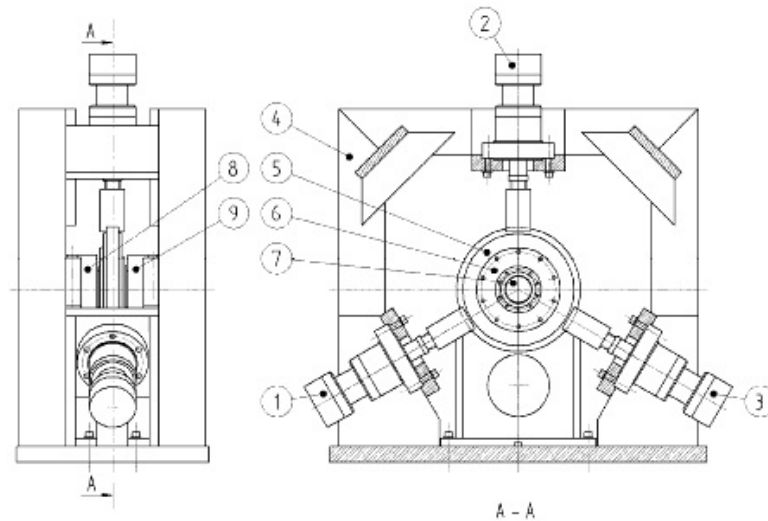


Fuente *Ídem*

Unidad del sistema de carga

El sistema de carga genera la carga en el cojinete. Los principales componentes del sistema de carga son tres servo-válvulas controladas por cilindros hidráulicos y una unidad de planta hidráulica. El diámetro del pistón del cilindro, la máxima longitud de movimiento y la máxima presión de fluido hidráulico fue de 80 [mm], 50 [mm], y 245 [bar] respectivamente. Los cilindros empujan el anillo de fuerza, el alojamiento y el cojinete contra el eje, lo que produce la carga en el cojinete. El sistema de carga es capaz de generar cargas de cojinete tanto estáticas como dinámicas, por ejemplo, ciclos de carga parecidas a las de un motor en marcha. Para cargas estáticas, el rango de carga en el banco de pruebas del cojinete fue de 0 a 100 kN. Para cargas dinámicas, el rango de carga era más estrecho. Fue posible variar la carga del cojinete tanto de forma continua como gradual. Con control de carga gradual, el paso de carga mínimo y el paso de carga máximo fue de $\pm 0,1$ [kN] y ± 100 [kN], respectivamente. Los tres cilindros hidráulicos (1,2,3) del sistema de carga se muestran en la figura 23.7. Los cilindros puestos en la estructura (4) empujan el anillo de fuerza (5), el alojamiento (6) y el cojinete soporte del eje (7) con los cojinetes de apoyo (8 y 9).

Figura 23.7: Tres cilindros hidráulicos del sistema de carga.



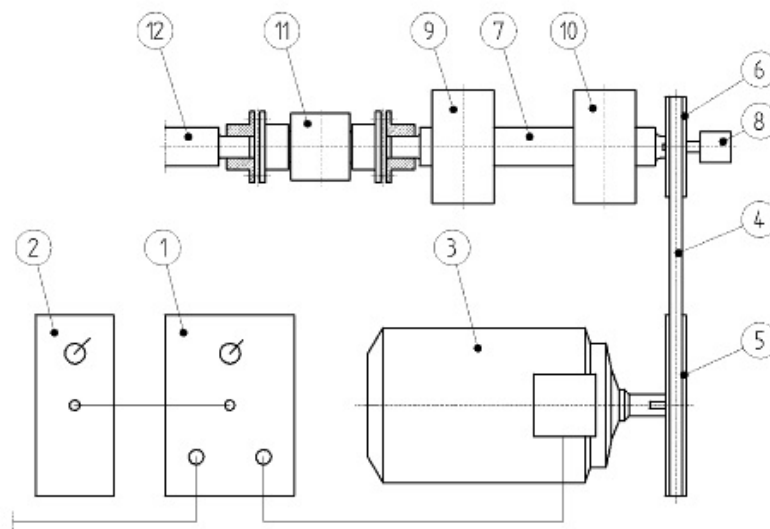
Fuente *Ídem*

Unidad del sistema de accionamiento

El sistema de accionamiento maneja al eje, como se vé en la figura 23.8. El sistema de accionamiento compuesto por el modulador de frecuencia (1), con una unidad de control (2), controla el motor trifásico (3). La correa Poly-V (4) conecta las poleas (5 y 6). El eje de transmisión (7) con un sensor de pulso (8) fue soportado por dos cojinetes de rodillos (9 y 10). El enganche (11), con un transmisor integrado de torque, conecta al eje de transmi-

sión al eje (12) La potencia nominal del motor trifásico fue de 11 [kW]. La velocidad de rotación de los ejes es variable y controlada por el modulador de frecuencia. El rango de velocidad de rotación es de 0 a 3000 [1/min]. La velocidad de deslizamiento se determina por la velocidad rotacional del eje y el diámetro del cojinete. En los experimentos típicos el diámetro de los cojinetes es de 85 [mm], el rango de velocidad de deslizamiento fue de 0 a 13,4 [m/s]). El nivel de velocidad de deslizamiento se controla en forma continua con una precisión de $\pm 0,1$ [m/s]. Se puede elegir libremente la dirección de deslizamiento (es decir, la dirección en la que gira el eje).

Figura 23.8: Sistema de accionamiento.

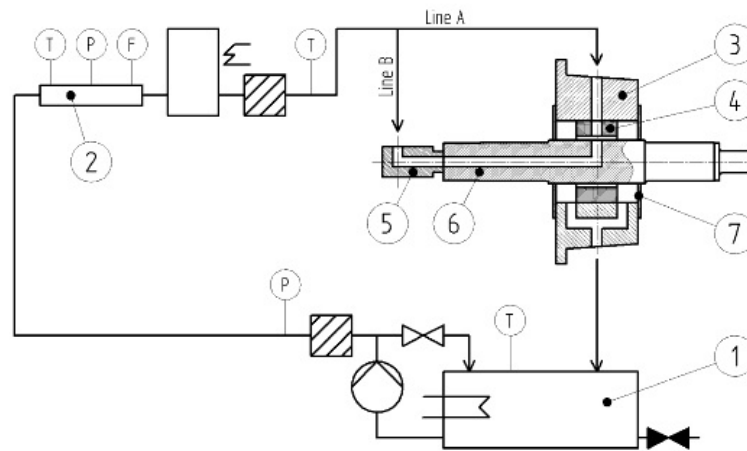


Fuente *Ídem*

Unidad del sistema de lubricación

El sistema de lubricación suministra el aceite de lubricación a cojinetes. Los principales componentes del sistema de lubricación son una bomba de aceite, tanque de aceite, filtros y aparatos de calefacción con termostatos. Habían dos posibles opciones para la alimentación del aceite en el cojinete: a través del alojamiento y los agujeros de aceite en el cojinete o por medio de la unión giratoria y el eje. El rango de presión de entrada es de 0 a 10 [bar]. La presión de entrada fue controlada por una válvula de accionamiento manual con una precisión de $\pm 0,2$ [bar]. El rango de temperatura de entrada es desde la temperatura ambiente hasta 100 [°C]. El nivel de temperatura de entrada fue controlado automáticamente con una precisión de ± 3 [°C]. La velocidad máxima de rotación, temperatura del aceite y presión de aceite de la unión giratoria fue de 3500 [1/min], 120 [°C] y 70 [bar], respectivamente. Una visión esquemática del sistema de lubricación se muestra en la figura 23.9 y consiste de aceite lubricante que se bombea desde el tanque de acei-

Figura 23.9: Esquema del sistema de lubricación.



Fuente *Ídem*

te (1) en la unidad de medidor de flujo (2). La línea A se utiliza para el suministro de aceite a través del alojamiento (3) y los agujeros de aceite en el cojinete (4). La línea B se utiliza para el suministro de aceite a través de la unión giratoria (5) y el eje (6) con agujeros radiales de alimentación del aceite. El alojamiento tenía un sello circular de cobertura (7).

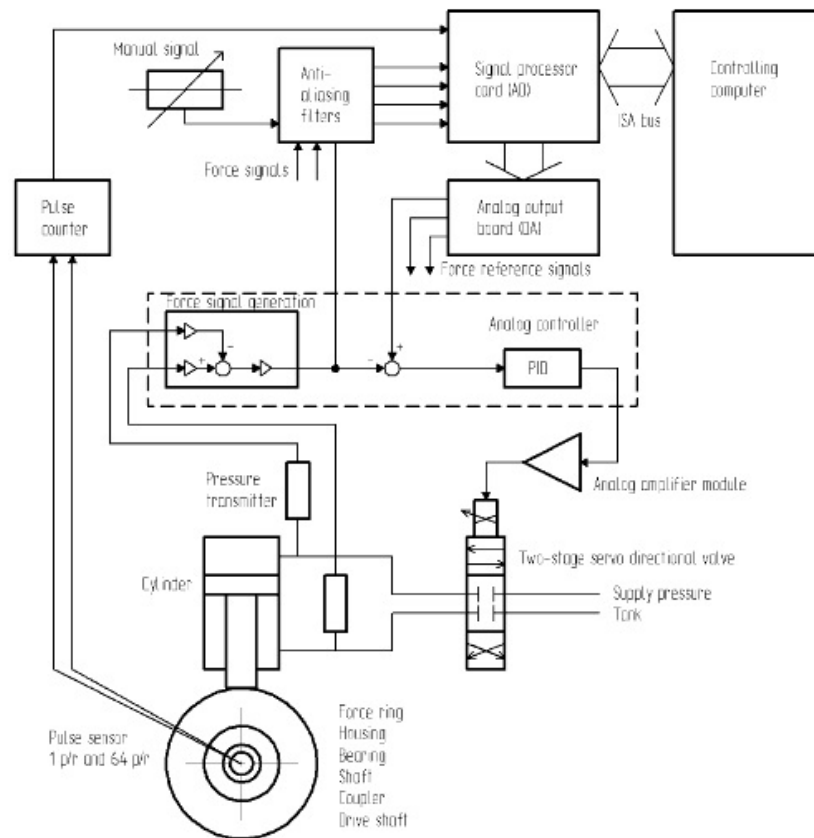
Unidad del sistema de control

El sistema de control regula la carga del cojinete generada por los cilindros hidráulicos del sistema de carga. Los principales componentes del sistema de control fueron una computadora de control con una tarjeta de procesador de señales y una tarjeta de salida analógica, así como unos amplificadores analógicos proporcional-integral-derivativo (PID), filtros anti-submuestreo, tres servo-válvulas direccionales de dos etapas con amplificador analógico modular, seis transmisores de presión, un sensor de pulso y contador de pulsos electrónicos. Una visión esquemática del sistema de control se muestra en la figura 23.10.

Los comandos para la tarjeta de procesamiento de señales fueron enviados por la computadora que controla usando un lenguaje de comandos y la interfaz de usuario. La mayoría de las tareas de la tarjeta de procesamiento de señales se codifican con un lenguaje de programación común y se compila para la tarjeta utilizando su software de soporte de comandos hechos a la medida. Estos comandos se han descargado a la tarjeta de procesamiento de señales a través de la interfaz. Algunos valores de los parámetros fueron incluidos en estos comandos personalizados y se establecieron (si eran necesarios) durante la operación a través de la interfaz. La tarjeta de procesamiento de señales se utiliza para la generación de señales de referencia para los amplificadores analógicos PID, los cuales controlan la fuerza de los cilindros. Las señales de fuerza para los amplificadores PID se

generaron con electrónica analógica a partir de mediciones de presión en el cilindro. Estas señales de fuerza también se leen (si era necesario) por la tarjeta de procesamiento de señales y se utiliza para el control digital de la fuerza (en vez del control analógico PID). El sensor de pulso y salidas del contador de pulsos fueron utilizados por el procesador de señales para producir las fuerzas del cilindro, el cual está sincronizado con la rotación del eje. El funcionamiento sincronizado de los cilindros ha permitido generar diversos patrones de carga, tales como estáticos, de onda sinusoidal, de impulso y de cargas de rotación.

Figura 23.10: Esquema del sistema de control



Fuente *Ídem*

Unidad del sistema de medición

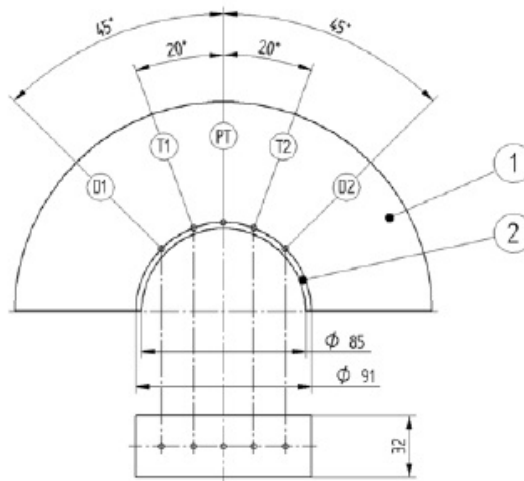
El sistema de medición capta y registra los datos. Un equipo de medición, los módulos de procesamiento de señales y varios instrumentos de medición fueron los componentes principales de este sistema. El equipo de medición ha sido equipado con una tarjeta de medición y su respectivo programa. Los dispositivos de medición utilizados en este estudio se muestran en la cuadro 23.1. Los principales dispositivos de medición de las condiciones de funcionamiento del cojinete se encuentran en el alojamiento. Diferentes combinaciones de dispositivos de medición se han utilizado con diferentes alojamientos.

Una visión esquemática de los dispositivos de medición en el primer alojamiento se presenta en la figura 23.11; los puntos de medición se encontraban en la línea central de la circunferencia del cojinete (2). La temperatura de funcionamiento del cojinete se midió mediante dos Termocupla (T_1 y T_2). El transmisor de presión y temperatura (PT) y los sensores de distancia (D_1 y D_2) no se necesitaron en esta prueba. Una visión esquemática de los dispositivos de medición en el segundo alojamiento se presenta en la figura 23.12; en éste los puntos de medición fueron compensados por 0,4,8 y 12 [mm] desde la línea central de la circunferencia del cojinete (2). La temperatura de funcionamiento del cojinete se midió mediante dos termocuplas (T_1). Se encontraban siete puntos de medición opcional para los sensores ópticos de presión (P_1 a P_7), para medir la presión de la película de aceite.

Cuadro 23.1: Dispositivos de medición

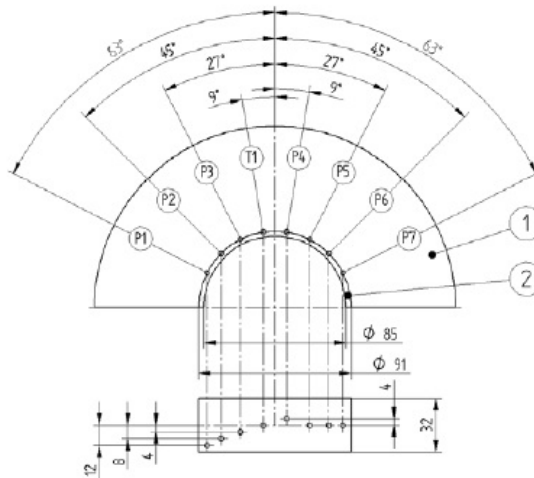
<i>Dispositivos y su cantidad</i>	<i>Variable medido por el dispositivo</i>
Transmisores de presión (6)	Presión hidráulica en los cilindros de presión
Sensores ópticos de presión (1 o 3)	Presión película de aceite
Sensor de pulso	Ángulo de rotación del eje
Torque y velocidad de rotación del transmisor	1. Torque total de los cojinetes, 2. velocidad de giro del eje
Transmisor de presión	Presión a la entrada
Volumen del medidor de flujo	caudal
Termocupla tipo K	Temperatura a la entrada (unidad de flujo)
Termocupla tipo K	Temperatura a la entrada
Termocupla tipo K	Temperatura a la salida
Termocupla tipo K	Temperatura del alojamiento
Termocupla tipo K (1o 2)	Tem. de funcionamiento del cojinete
Termocupla tipo K (2)	Tem. funcionamiento del soporte de cojinetes
Termocupla tipo K	Temperatura exterior del filtro de aceite
Termocupla tipo K	Temperatura del aceite en el tanque
Termocupla tipo K	Temperatura ambiente

Figura 23.11: Esquema de los dispositivos de medición en la manga superior (1) del primer alojamiento HS.



Fuente *Ídem*

Figura 23.12: Esquema de los dispositivos de medición en la manga superior (1) del segundo alojamiento HO.



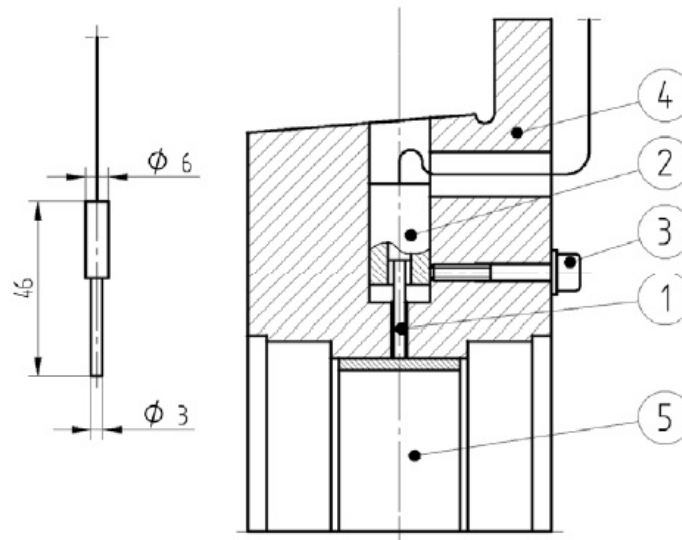
Fuente *Ídem*

Termocuplas de medición

La temperatura de funcionamiento del cojinete se midió por una o dos termocuplas en el alojamiento. Estas termocuplas se localizan en los bujes con muelles, como se ve en la figura 23.13. La termocupla (1), en el buje (2) con muelles. Un tornillo (3) bloquea el buje en el alojamiento (4). El punto de medición esta en la superficie superior del cojinete.

Los puntos de medición se encuentran en la superficie exterior del cojinete superior. Se asumió que, en condiciones típicas de operación, el punto de máxima temperatura del cojinete estaba cerca de los puntos de medición de temperatura.

Figura 23.13: Esquema de la termocupla



Fuente *Ídem*

Sensor óptico de presión

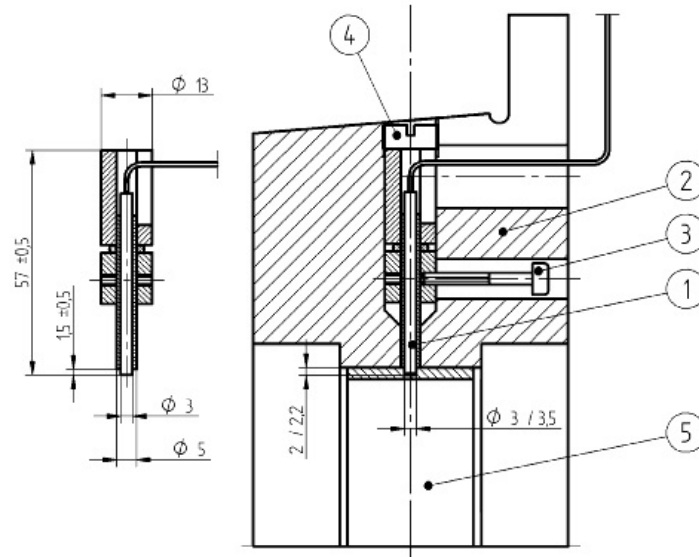
Los sensores ópticos de presión como se muestran en la figura 23.14, miden la presión de la película de aceite que se encuentra en el alojamiento HO. El sensor de presión (1) con la manga de protección en el alojamiento HO (2). Un tornillo (3) bloquea el tubo de soporte con la cabeza del sensor en la manga del protector inferior. Hay un anillo de goma entre las mangas de protección. Otro tornillo (4) bloqueando el sensor en la dirección axial. Una cavidad se hizo en el cojinete (5) para el sensor. Los puntos de medición se encuentran en la superficie exterior del cojinete superior. Para cada uno de los puntos de medición, se hizo en el cojinete una cavidad con una membrana de medición. Algunos dispositivos de medición y accesorios adicionales se utilizaron para los sensores ópticos de presión.

Transmisores de presión en los cilindros de carga

Un total de seis transmisores de presión piezo-resistivo (dos unidades por cilindro) se utilizaron para medir la presión del aceite que empuja los pistones en los cilindros, con el fin de determinar la carga del cojinete generada por los cilindros de carga hidráulica. Los transmisores de presión tenían sensores de celda con un medidor de tensión de película delgada sobre una membrana de acero. De acuerdo con las especificaciones, el transmisor

de presión tenía las siguientes características: un rango de medición de 0 a 250 [bar], su dispersión, el error en la linealidad y el error causado por la histéresis estaban por debajo de 0,3% de la escala, el error de repetibilidad fue inferior a 0,05% de la escala y el tiempo de respuesta fue inferior a 0,5 [ms]. El error relativo estimado de la carga del cojinete que se determinó a partir de datos de presión del cilindro fue de $\pm 2\%$ para cargas estáticas y $\pm 5\%$ para las cargas dinámicas.

Figura 23.14: Sensor óptico de presión



Fuente *Ídem*

El estudio de los cojinetes realizado mediante la utilización de bancos de prueba permite experimentalmente tomar los datos necesarios para optimizar el diseño de los mismos. Se pueden entender los puntos críticos en el diseño de los cojinetes optimizándolos respecto de los parámetros más importantes como lo son: **cavitación, desgaste, rugosidad, efectos térmicos, desalineamiento, etc.** Diseños que comprometen recubrimientos de materiales duros, de capas superficiales de dos componentes, de superficies con surcos y de superficies con hoyuelos, tanto para mangas, muñones y ejes muestran un mejor rendimiento respecto de dichos parámetros.

23.2. ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LAS CARACTERÍSTICAS DE OSCILACIÓN DE LA ALMOHADILLA EN COJINETES DE ALMOHADILLA INCLINADA

El propósito principal del trabajo es el estudio experimental de las características vibratorias en las almohadillas superiores sin carga de un cojinete de almohadillas oscilan-

tes. Con el fin de estudiar la oscilación de la almohadilla, se mide la vibración absoluta de la almohadilla, la vibración relativa entre el cojinete y el eje, y el espesor y presión circunferencial de la película de aceite a diferentes relaciones de flujo de aceite, velocidad del eje y carga en el cojinete [162] . Para analizar la distribución circunferencial del espesor de la película, se identificó que la forma de la película de las almohadillas superiores alterna continuamente entre la forma de cuña y la forma divergente en la dirección de la rotación del eje.

Esta publicación presenta detalles importantes sobre equipo de laboratorio y los sensores de movimiento, presión y temperatura utilizados.

Equipo experimental

La figura 23.15 presenta una fotografía del equipo de experimentación usado en el estudio. La figura 23.16 muestra un diagrama esquemático del equipo experimental que consiste de un cojinete de evaluación, un eje en rotación, un sistema de carga, un sistema de alimentación de aceite, y los sistemas de adquisición y procesamiento de señales.

El cojinete de prueba, como el mostrado en la figura 23.17, es un cojinete tipo LOP de seis almohadillas oscilante, cuyas propiedades físicas y dimensiones se describen en en cuadro 23.2

Figura 23.15: Fotografía del equipo de experimentación

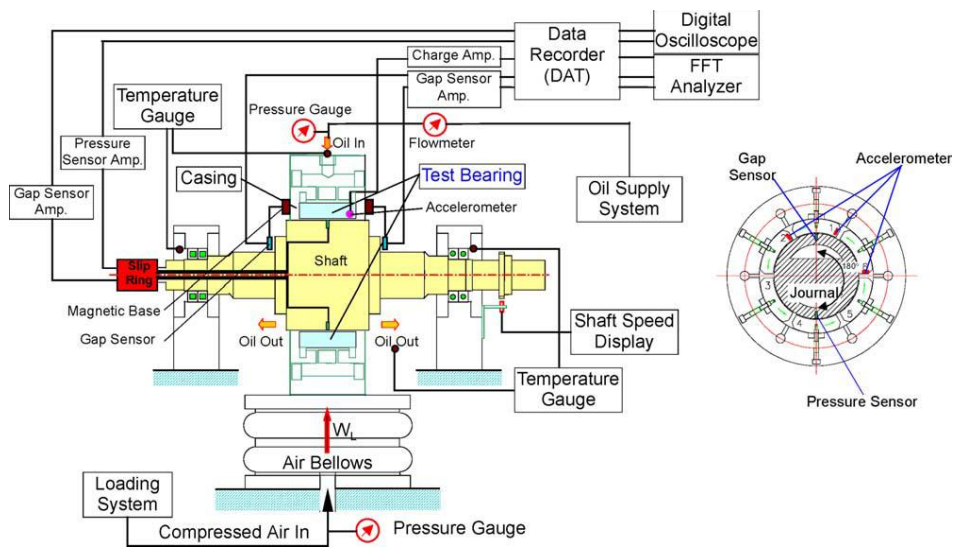


Fuente Experimental study on the characteristics of pad fluttering in a tilting pad journal bearing, Yang *et al.*, 2005.

Cuadro 23.2: Parámetros físicos del cojinete de prueba

<i>Parámetro</i>	<i>Valor</i>
Diámetro (D)	300,91 [mm]
Longitud (L)	149,80 [mm]
Holgura radial (CR)	0,450 [mm]
No. de almohadillas	6
Arco de la almohadilla (θ)	54°
Relación de precarga (m)	0
Posición del pivote	Centro
Almohadillas superiores	Nos. 1, 2, 6
Almohadillas inferiores	Nos. 3-5

Figura 23.16: Diagrama esquemático del equipo de experimentación

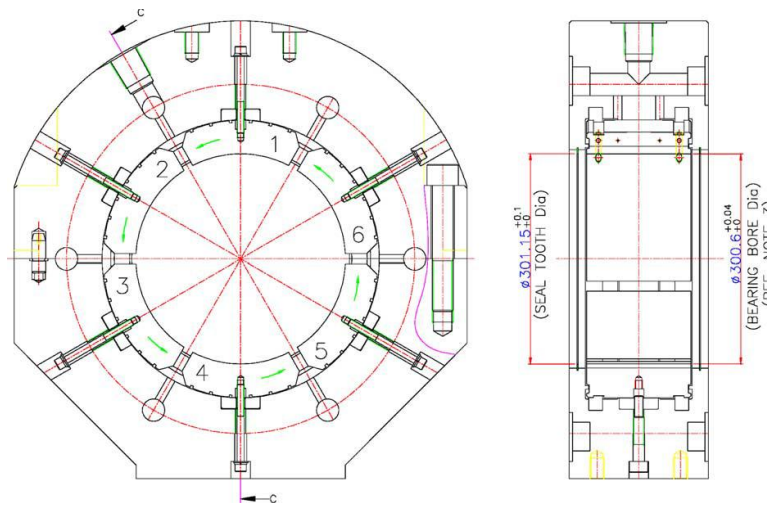


Fuente *Ídem*

La superficie del cojinete es babitada con un metal blanco a base de estaño de alrededor de 5 [mm] de espesor. El radio exterior de una almohadilla es ligeramente más pequeño que la superficie interior del cojinete con el fin de que cada almohadilla se pueda inclinar libremente en la dirección circunferencial. Así, siempre que la parte de atrás de la almohadilla sea axialmente curvada, el auto alineamiento se puede lograr automáticamente durante la operación.

Para medir la vibración relativa entre la camisa del cojinete y el eje, se instalan dos sensores con ángulo de fase de 90° de desplazamiento en la camisa el cojinete como se muestra en la figura 23.16. La velocidad crítica del sistema rotor cojinete, la excentricidad y las órbitas se miden con el desplazamiento relativo. Para medir la distribución continua de la

Figura 23.17: Esquema del cojinete de prueba.



Fuente *Ídem*

presión de película y el espesor de película, se montan un transductor de presión y un sensor de desplazamiento en el plano medio del cojinete.

Como se muestra en la figura 23.16, existe un ángulo de fase entre el transductor de presión y el sensor de desplazamiento. Las señales eléctricas de estos sensores se detectan a través de un anillo colector. Se instalan tres tipos de acelerómetros piezo - eléctricos en la arista de ataque de cada una de las tres almohadillas superiores (Nos. 1,2,6) para medir su vibración absoluta, como se muestra en la figura 23.18

El eje es conducido por un motor DC con una potencia máxima de 255 [kW], por medio de una correa. La velocidad el eje es controlada por arriba de 6600 [rpm] y se mide con un tacómetro.

La carga se aplica al cojinete verticalmente hacia arriba por un amortiguador de aire instalado bajo el cojinete de prueba, arriba de los 30 [kN], y se mide por una celda carga. El sistema de procesamiento de señales consiste en varios tipos de amplificadores, una unidad de alimentación de potencia, un sistema de adquisición de datos, un tacómetro digital, un osciloscopio digital, un anillo colector, un analizador de señales, y un computador personal. Se usa como lubricante, un aceite típico de turbinas, ISO VG32.

La figura 23.18 muestra una imagen del acelerómetro instalado en cada almohadilla superior. La altura del acelerómetro es ligeramente menor que la del agujero interior, con esto, cada almohadilla puede inclinarse libremente en la dirección circunferencial.

Método experimental

Las características de oscilación de las almohadillas superiores pueden ser evaluadas mediante un sistema de análisis de señales eléctricas, que proporcionan el espectro vibratorio de las almohadillas gracias a los acelerómetros instalados. Las frecuencias y amplitu-

Figura 23.18: Fotografía del acelerómetro instalado en las almohadillas superiores.



Fuente *Ídem*

des de oscilación de las almohadillas y su velocidad en la etapa incipiente se obtienen de acuerdo a diferentes condiciones experimentales. Las señales eléctricas obtenidas de los acelerómetros se transforman en componentes de velocidad para aplicar una función integral en la señal analizada debido a que el rango de frecuencias de interés es bajo (menor a 100 [Hz]).

La presión hidrodinámica que actúa en cada almohadilla y el espesor de la película entre el cojinete y la almohadilla puede ser medido con un osciloscopio digital sin retardo de tiempo entre las señales de tiempo del transductor de presión y el sensor de movimiento montado en el cojinete. La vibración relativa del sistema rotor cojinete se analiza por el espectro de señales eléctricas provenientes de los dos sensores de desplazamiento instalados en la camisa del cojinete. El cuadro 23.3 muestra las condiciones de evaluación del experimento.

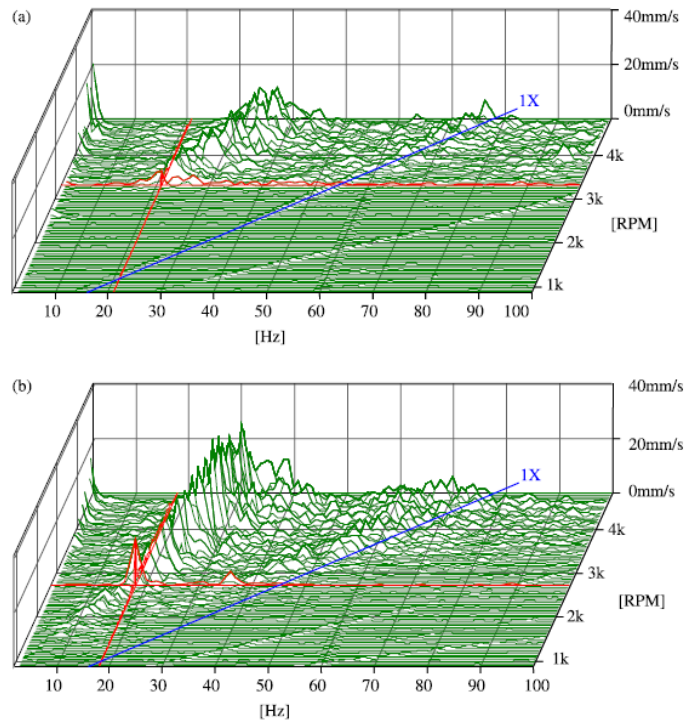
Cuadro 23.3: Condiciones de prueba para el cojinete.

Parámetro	Valores
Velocidad del eje (N)	900 – 4600 [rpm]
Carga del cojinete (W_L)	0,5, 10 15 [kN]
Razón de suministro de aceite (Q_S)	50 – 170 [l/min]
Temperatura de aceite de suministro (T_S)	$40 \pm 0,5$ [°C]

Resultados y discusión

Uno de los principales puntos de interés es la amplitud y frecuencia de oscilación de las tres almohadillas superiores (Nos. 1, 2, 6). Las figuras 23.19 (a) y (b) muestran la variación de la amplitud y frecuencia de tomada en el acelerómetro de la almohadilla No. 2, en un diagrama de cascada. En este caso, la frecuencia de oscilación de la almohadilla casi

Figura 23.19: (a) Variación de las características de oscilación de la almohadilla No. 2 con la velocidad del eje. ($Q_S = 70 [l/min]$, $W_L = 0 [kN]$). (b) Condiciones de (a), para $W_L = 10 [kN]$.



Fuente *Ídem*

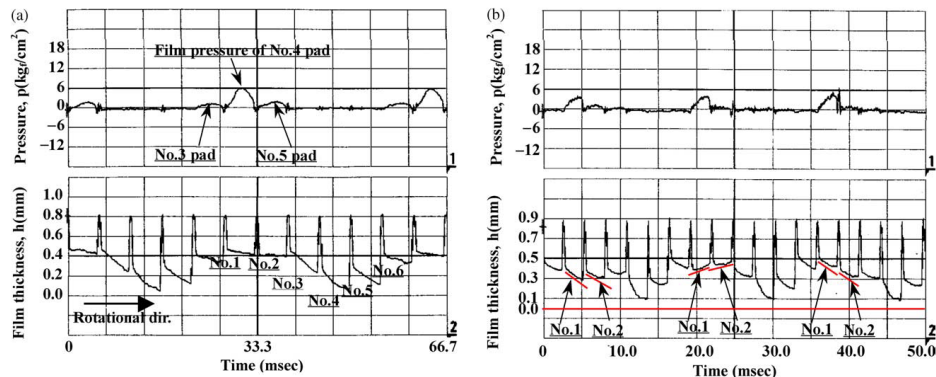
no cambia, mientras que la amplitud crece gradualmente con el incremento de la velocidad el eje. De estos datos experimentales, el mayor descubrimiento que las almohadillas superiores sin carga tienen una tendencia representativa de vibración subsincrónica auto excitada, *justo como la inestabilidad clásica del sistema rotor cojinete* definido como el fenómeno de **“oil whirl” u “oil whip”** del rotor con el incremento de la velocidad del eje.

Las figuras 23.20 (a) y (b) muestran las ondas de tiempo de las señales eléctricas tomadas del transductor de presión y del sensor de desplazamiento, respectivamente, instalados en la superficie del cojinete. Como se puede ver en la figura 23.20 (a) la presión de la película en la almohadilla No. 4 es distintivamente notable. En contraste en la figura 23.20 (b), donde la velocidad de giro se ha duplicado, se puede observar que las almohadillas superiores (Nos. 1 y 2) alternan continuamente entre la forma de cuña y la

forma divergente para a la dirección rotacional. Este fenómeno es conocido como oscilación (“revoloteo”) de la almohadilla.

Debido al montaje de los acelerómetros en la superficie del cojinete también se obtienen las señales para producir el espectro vibratorio del sistema rotor cojinete convencional, en dos condiciones de carga diferente. Por los resultados encontrados se plantea que, el incremento en la rigidez de la película de aceite con el aumento de la carga, mantendrá el rotor fuertemente soportado al cojinete, inclusive si la amplitud de oscilación de las almohadillas superiores incrementa.

Figura 23.20: (a) Distribución circunferencial de la presión de la película y espesor de la película en el plano medio ($Q_S = 70 [l/min]$, $W_L = 0 [kN]$, $N = 1800 [rpm]$). (b) Igual que (a) $N = 3600 [rpm]$.



Fuente *Ídem*

Del trabajo estudiado se concluye que:

- Las características de oscilación de las almohadillas superiores tienden a representar una vibración subsincrónica. La principal frecuencia de oscilación de la almohadilla está al $(0,5\times)$ del mismo modo en que la vibración por remolino de aceite se presenta en el problema clásico del sistema rotor cojinete.
- Al incrementar la velocidad del eje, la frecuencia de oscilación de la almohadilla casi no cambia, mientras que la amplitud de oscilación gradualmente incrementa.
- Al incrementar la razón de flujo de aceite de alimentación y disminuir la carga, la velocidad incipiente de oscilación de la almohadilla se presenta a altas velocidades del eje y la amplitud de oscilación claramente decrece.
- La oscilación de las almohadillas incrementa la vibración del sistema rotor cojinete. Por tanto, la estabilidad dinámica del sistema rotor cojinete se puede mejorar controlando las oscilaciones de las almohadillas.
- La configuración del banco y los elementos dispuestos para la medición garantizan la efectividad de la prueba y gracias a su versatilidad, permite extender el estudio a otros fenómenos presentes no solo en los cojinetes de almohadillas.

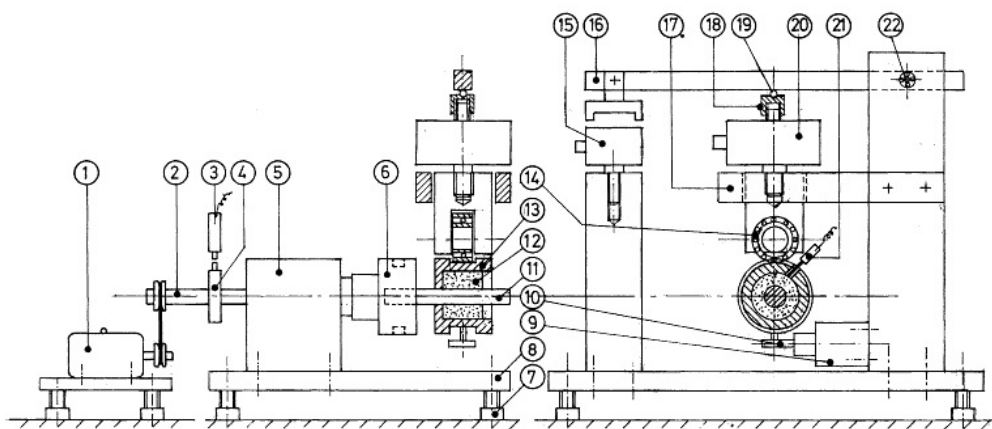
23.3. INVESTIGACIONES EXPERIMENTALES DE COJINETES POROSOS BAJO CARGAS VERTICALES FLUCTUANTES SINUSOIDALES

El propósito de este artículo, es mostrar los resultados experimentales de cojinetes porosos bajo cargas verticales fluctuantes sinusoidales. La fuerza de fricción se midió en diversas condiciones de carga fluctuante, en relación a la carga constante, etc. Las investigaciones pertinentes se llevaron a cabo en régimen de lubricación hidrodinámica, además las pruebas se hicieron en un banco previamente diseñado y fabricado por los autores. Se encontró que a cualquier régimen dado $[rpm]$, la fluctuación de la carga específica y la relación constante de carga específica (P_f/P_s) , aumenta el coeficiente medio de fricción $[\mu_m]$. También se encontró que el coeficiente de fricción no se ve afectado por la frecuencia de la carga, incluso cuando la frecuencia de la carga es la mitad de la frecuencia del muñón. Los cojinetes porosos impregnados de aceite son fabricados por las técnicas de metalurgia de polvo y se utilizan a menudo en lugares donde no es posible el acceso a la lubricación periódica [151].

23.3.1. Instrumentación y banco de prueba

Descripción

Figura 23.21: Diagrama esquemático de la instalación de prueba para la aplicación de cargas estáticas y dinámicas en el cojinete



Fuente Experimental investigations of porous bearings under vertical sinusoidally fluctuating loads, R. Raman and TS Chennabasavan, 1998

Un bosquejo del banco de prueba se muestra en la figura 23.21. Se compone de un motor de $1/4 [HP]$ - $1500 [rpm]$ de velocidad variable y corriente continua (1), conductor del

eje (2), cabezal del torno (5) a través de la correa en V. Tres mordazas de precisión (6), son montadas en el cabezal y en el cojinete de prueba (11) que esta mantiene en el portaherramienta. El cojinete poroso de prueba (12) esta montado en el alojamiento del cojinete (13), un electroimán (15), una palanca (16) hace girar en cojinete de bolas (22) para facilitar la aplicación de las cargas verticales fluctuantes sinusoidales en los cojinetes porosos de prueba generando la señal. La carga se trasmite verticalmente a través de la bola (19) fija en la parte superior de la parte roscada (18), a través del transductor de carga (20) y por el conjunto de cojinete de bolas (14). El soporte de carga es medido por el transductor (20), que se desliza en el soporte fijo (17). Cuando el muñón gira, el par de fricción en el cojinete trata de girar en su mismo alojamiento.

La fuerza de reacción debida a este par se mide por el transductor de fricción (9), que es operado por el pasador (10) fijo al alojamiento del cojinete. El conjunto del cabezal del torno esta montado sobre una placa base (8) con tornillos de nivelación (7). El motor y la placa base se montan en mesas separadas para evitar la transmisión de vibraciones debido al motor. Un disco (4) con la proyección del pasador está montado en el eje del cabezal. La velocidad del muñón es medido usando la proximidad del receptor (3) que se monta con una diferencia de 1 [mm], de la clavija que sobresale en el disco (4). La temperatura del casquillo del cojinete se mide con un instrumento THERMITZ, cuya sonda (21) se inserta en el orificio de la carcasa. La sonda solo toca la superficie exterior del cojinete poroso. El agujero en el alojamiento del cojinete se encuentra en la mitad de la longitud del cojinete y muy cerca de la línea de aplicación de la carga.

Materiales

El material del muñón de prueba es de acero templado (HV410). El muñón de prueba ha sido fabricado por rectificación cilíndrica. El material de los cojinetes de prueba son de bronce con una densidad de 6,4 – 6,8 [g/cm^3]. Los cojinetes fueron impregnados por aceite SERVOFILM 22. Los demás datos se ven en el cuadro 23.4.

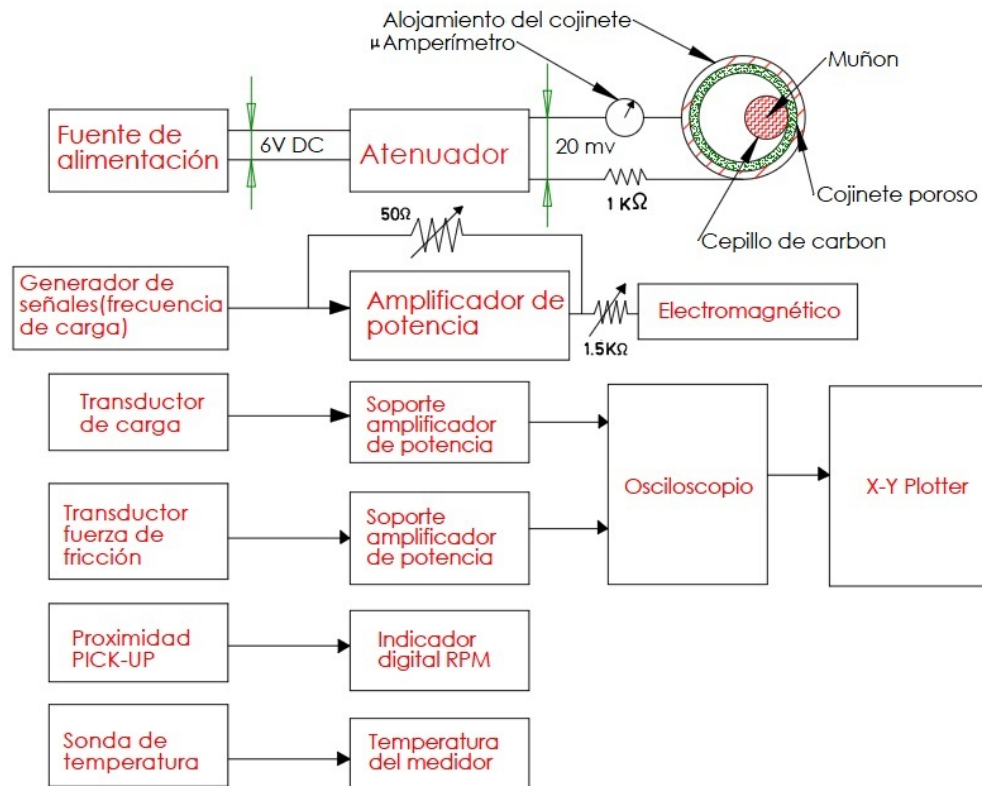
Sistema de instrumentación

Los parámetros medidos son: la corriente de flujo entre el muñón y el cojinete poroso, la frecuencia de la carga, la carga fluctuante sobre el cojinete, la fricción en el cojinete, la velocidad de rotación del muñón, y la temperatura del cojinete. Para determinar la condición de la lubricación en el cojinete se conecta un microamperímetro de resistencia 2,5 [Ω] en el circuito como se muestra en la figura 23.22. Se conecta en serie con un resistor de 1 [$k\Omega$] de 20 [mV] de suministro. Cuando el muñón toca el cojinete en la condición de frontera de la lubricación, el flujo de corriente a través del circuito es de 20 [μA]. En condiciones hidrodinámicas la lectura es cero ya que no existe contacto metálico entre el muñón y el cojinete.

Cuadro 23.4: Datos del muñón y del cojinete

Parámetros dimensionales	
Casquillo del cojinete ID	10,017 [mm]
Casquillo del cojinete OD	16 [mm]
Casquillo del cojinete-Longitud	20 [mm]
Permeabilidad	$0,0045 \times 10^{-6}$ [mm ²]
Diámetro del muñón	9,985 [mm]
Redondez del muñón	1,15 [μm]
Acabado superficial del muñón	0,36 [μm] Ra
Juego radial	16 [μm]
Relación de holgura diametral	3,2/1000
Lubricante	Servofilm22 (15 [cSt] a 40 [°C])

Figura 23.22: Diagrama de bloques de los sistemas de instrumentación



Fuente *Ídem*

La carga del cojinete se midió con una celda de carga (*HBM, model Q2*) en el rango de (0 – 20 [kgf]), con una precisión del 0,5%. La fuerza de fricción del cojinete se midió

con un transductor pequeño tipo viga de flexión (Adi Artech, India, Modelo 60610) en el rango de 0 – 300 [kgf] con un error en la linealidad de 60,025 %.

Procedimiento

La placa está ajustada a nivel horizontal con tornillos de nivelación y un nivel de esfuerzo. El muñón de prueba tuvo lugar en el portaherramienta de precisión con un error de 1 [μm] en el acabado y fue medido por un indicador. El cojinete de prueba se ajustó en el alojamiento con un ajuste de precisión un poco ligera con un accesorio previamente diseñado. El cojinete de prueba se sometió a un proceso de ajuste desde el principio de la prueba. Unas pocas gotas del mismo aceite que impregna el cojinete se coloca sobre la superficie que permite el lavado del muñón donde existen partículas de desgaste durante el rodaje. El proceso de rodaje se realizó bajo una carga de 50 [N], a una velocidad de 1200 [rpm], con un ciclo de arranque y una parada de 25 [min] y 5 [min] de la rotación del muñón respectivamente. El ciclo se repitió durante unas 10 [horas] hasta que la lectura del micro-amperímetro fue de cero, lo que garantiza el régimen de lubricación hidrodinámica en el cojinete. Este proceso de arranque y parada del rodaje, acelera el proceso y reduce el aumento de la temperatura en el cojinete. Las pruebas se realizaron sin ningún tipo de adición de aceite. El aceite almacenado en el cojinete poroso sólo se utilizó para la lubricación durante las pruebas con cargas fluctuantes.

23.4. PRUEBAS EXPERIMENTALES DE COJINETES CON DOS COMPONENTES EN LA CAPA SUPERFICIAL EN PRESENCIA DE CONTAMINANTES ABRASIVOS

Una de las causas en las fallas de cojinetes de deslizamiento es la contaminación, partículas sólidas de tamaño mayor que el espesor mínimo de la película de aceite [159]. El sistema de filtrado a menudo es incapaz de eliminar todos los contaminantes y, además, en muchos casos, sólo una parte del aceite pasa a través de él. En particular, este problema se refiere a los cojinetes de las máquinas, que funcionan en ambientes con polvo (por ejemplo en la industria minera). Debido a que la influencia de la contaminación del lubricante es de gran importancia para la vida útil de un cojinete, este problema comenzó a ser investigado hace más de 70 años [149] y un análisis más sistemático se inició en 1950 [156, 152]. Los problemas de hoy en día, en relación con el desgaste de los sistemas producto de las partículas duras presentes en el lubricante, también son investigados, tanto teórica como experimentalmente [147, 161]. Resultados de las investigaciones indican que, en el caso donde las partículas duras se producen en el lubricante, la relación entre la dureza del cojinete y la dureza del cojinete de manguito tiene un efecto muy considerable en la cantidad de desgaste tribológico. Por ejemplo, Ronen y Malkin [153], investigaron el desgaste tribológico de dos ejes de acoplamiento con cojinetes de manguito hechos a partir de tres materiales diferentes. De esa manera, seis tipos de acoplamiento se han

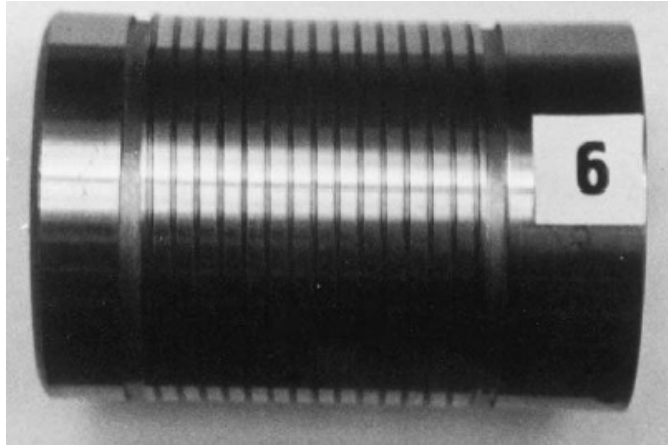
obtenido, en los cuales la relación entre la dureza del muñón y la dureza del cojinete de manguito variaron desde 0,7 hasta 15,3. Las pruebas se realizaron utilizando la lubricación con aceite contaminado por partículas duras de alúmina (óxido de aluminio) de diámetro medio de 40 [μm], mientras que la concentración del contaminante fue igual a 0,2 [g/l]. Se ha encontrado que el incremento en la proporción mencionada desde 0,7 a 5,0 da como resultado un aumento del desgaste del muñón de alrededor de cuatro veces y una disminución similar en el desgaste del cojinete de manguito. El objetivo de esta investigación es presentar el diseño de un muñón de capa superficial de dos componentes.

23.4.1. Diseño del cojinete

El diseño del cojinete ha sido basado en las siguientes condiciones:

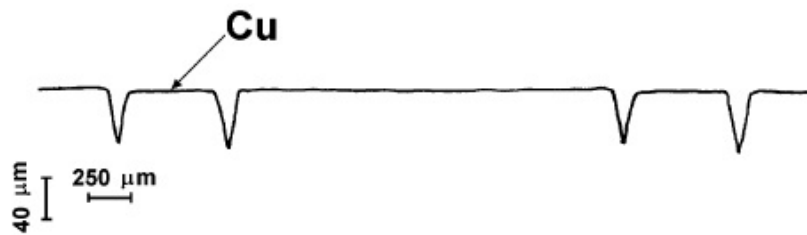
1. La reducción de la susceptibilidad del sistema de cojinetes a la acción de los contaminantes se puede lograr si las partículas contaminantes son eliminadas, al menos parcialmente de la zona de contacto antes de que dañen los elementos en el acople del cojinete.
2. Surcos helicoidales hechos en la superficie de cojinete debe permitir la eliminación de contaminantes de la zona de contacto de rozamiento. Además, si el material blando (dureza de la cual es similar a la dureza de la manga del cojinete) se coloca en las inmediaciones de los surcos este restringirá el movimiento de las partículas duras hacia la manga de cojinete, y puede promover su ubicación y movilidad en los microsurcos. El cojinete de prueba, que se muestra en la figura 23.23, ha sido diseñado teniendo en cuenta los requisitos antes mencionados. En el surco helicoidal, el cual se ha hecho sobre el muñón de acero, se coloca alambre de cobre (diámetro = 0,8 mm). En la zona de contacto del material, hay hoyos, los cuales se puede ver en el poligrama que se muestra en la figura 23.24. Este tipo de diseño de cojinetes debe proporcionar una menor sensibilidad a la contaminación respecto al diseño convencional de muñones lisos.

Figura 23.23: Cojinete con dos componentes en la capa superficial



Fuente *Ídem*

Figura 23.24: Poligrama de un cojinete con dos componentes en la capa superficial



Fuente *Ídem*

23.4.2. Metodología

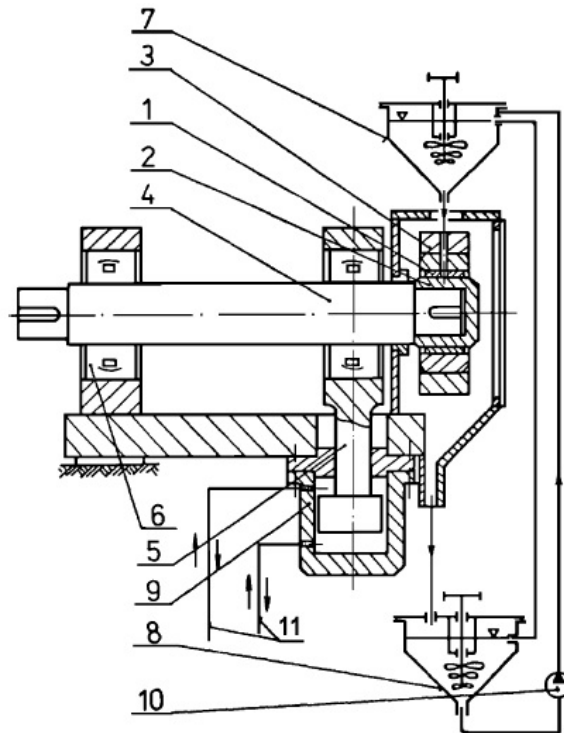
Banco de pruebas

Pruebas experimentales del modelo de cojinete de deslizamiento con muñón de capa superficial de dos componentes se llevaron a cabo en la plataforma de investigación ZAN [25,26], en el Departamento de Diseño de Máquinas y operación de la universidad tecnológica Gdansk. El esquema del banco de pruebas se muestra en la figura 23.25. La máquina de prueba ZAN ha sido diseñada especialmente para pruebas en cojinetes que se lubrican con aceite contaminado. El cojinete de prueba (1), se coloca en el complejo (o múltiple o conjunto) de dos partes (3), que es el apoyo final para el eje (4). La Manga reemplazable (2), se colocan sobre el pin del eje. El medio lubricante se suministra por gravedad desde la mezcladora superior (7) hacia abajo al cojinete y luego a la mezcladora inferior (8). Posteriormente, el aceite es forzado a volver a la mezcladora superior con una bomba rotodinámica (10). El eje (4) se apoya en el cojinete de prueba y en el cojinete exterior (6). La carga es aplicada por el actuador hidráulico (9), se transfiere al eje a través

de una auto alineación de los cojinetes de bolas, montado en el final de la barra de conexión (5). Durante las pruebas, el rodamiento de prueba se lubrica con aceite limpio o con aceite contaminado por partículas duras del tamaño seleccionado y una concentración exactamente especificada, de acuerdo al tipo de la prueba. El control de la presión de trabajo en las cámaras de accionamiento hidráulico provee cambios periódicos en la posición del muñón en relación con el cojinete. Como resultado de un exceso de presión en la cámara opuesta a la biela (5), el pasador del eje se eleva (cambio en el sentido del vector de fuerza que actúa sobre el cojinete, y un aumento en la holgura facilita la entrega de una nueva porción de contaminantes dentro de la zona de carga en la parte inferior del cojinete. Esto conduce a un incremento en la intensidad del desgaste y permite ensayos acelerados. En las pruebas con la máquina ZAN, el criterio básico para la evaluación de las propiedades del cojinete es el desgaste volumétrico del muñón y la manga.

El sujeto de la prueba fue un modelo de cojinetes de deslizamiento con muñón de capa superficial de dos componentes, hechos a partir de un acero 34CrNiMo6 tratado térmicamente (dureza $\mu HV_{0,1} = 2850 [MPa]$). El cobre ha sido utilizado como el componente de material blando (dureza $\mu HV_{0,1} = 780 [MPa]$). El cobre ocupa el 25 % de la superficie del muñón.

Figura 23.25: Diagrama



Fuente *Ídem*

La característica de desgaste de un cojinete convencional con muñón hecho de acero 34CrNiMo6 (dureza $\mu HV_{0,1} = 2850 [MPa]$) ha sido aceptada como un nivel de referen-

cia. El diámetro nominal del muñón que se usó en la prueba fue igual a 52.690 mm, y se acoplaron con mangas bimetálicas, de 30 mm de ancho, hechas del material MB 50 (dureza $HV_{0,1} = 600$ [MPa]) de la siguiente composición: 79% Al, 20% Sn, 1% de Cu. En todos los juegos de cojinetes de prueba, el valor inicial del rango de holgura radial relativo es desde 0,0017 hasta 0,0021.

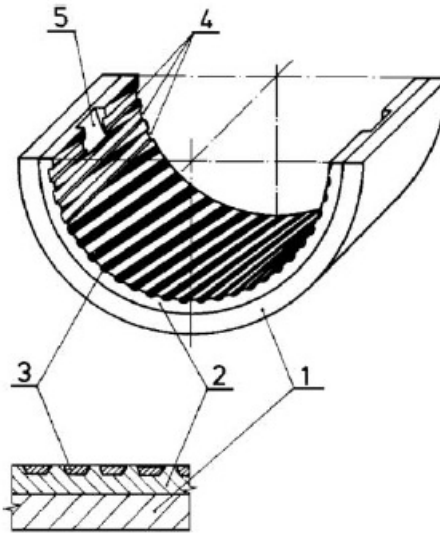
Condiciones de prueba

El programa de estudio incluye una prueba de desgaste cuando se lubrica con aceite limpio CD SAE 40 (viscosidad - 131,3 [mPa·s] a 313 [K]; 13,3 [mPa·s] de 373 [K], índice de viscosidad = 90, la temperatura de suministro es de 313 [K]), y una prueba de lubricación con aceite contaminado por polvo duro de óxido de aluminio. La concentración de contaminantes en el aceite fue de 0,5 g / l, y el diámetro medio de los granos de aluminio es igual a 21 [μm]. Tres cojinetes fueron probados para las posibles combinaciones de materiales y condiciones de fricción. La velocidad de deslizamiento del muñón fue de 1,65 [m/s], y la presión nominal de contacto fue de 1,57 [MPa]. Los parámetros de la prueba fueron seleccionados para el cálculo del mínimo espesor de la película de aceite, y el resultado durante la lubricación fue de 2 [μm]. Una proporción muy alta (10) de partículas de aluminio de un diámetro promedio similar al mínimo espesor de la película de aceite fue elegido para simular la extrema dificultad en las condiciones de operación del cojinete. Una Proporción similar de partículas contaminantes de diámetro promedio similar al espesor mínimo de la película de aceite fue elegido por Wikström et al. (25 a 1-4 [μm]) y por Ronen y Malkin (40 a 5 [μm]) [153]. El tiempo total de la prueba fue de 20 [horas]. El criterio de evaluación del cojinete de prueba fue el desgaste volumétrico del cojinete y la manga, sobre la base para la cual se calculó el desgaste total del cojinete. Para ambos tipos de cojinetes de prueba (cojinete convencional y el cojinete con el muñón modificado) la sensibilidad a la contaminación W también se ha determinado. (W es la relación de desgaste total bajo condiciones de lubricación con aceite contaminado respecto al desgaste total bajo condiciones de lubricación con aceite limpio).

23.4.3. Nueva hipótesis

Sikora propuso la hipótesis de que la eliminación de contaminantes de la zona de contacto de fricción será sucedida por la disminución de la tasa de desgaste también en el caso de mangas con surcos, como se muestra en la figura 23.26.

Figura 23.26: Principio de cojinete de manguito con surcos



Fuente *Ídem*

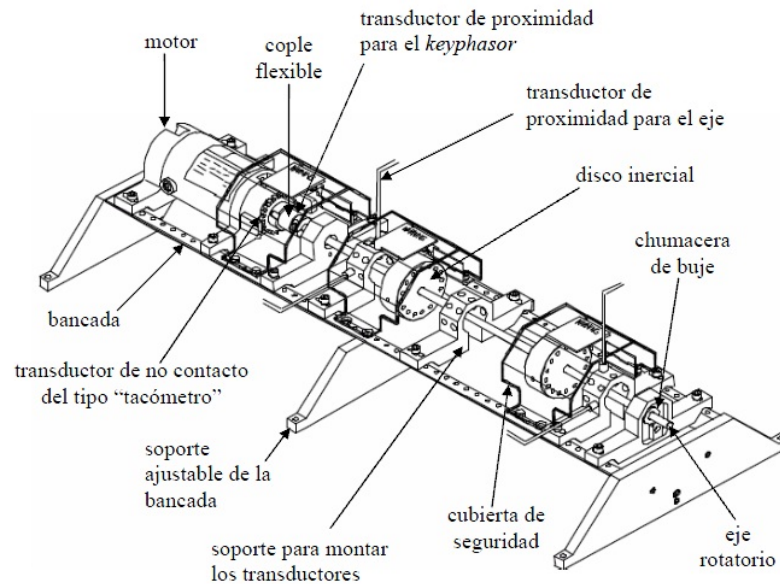
Los cojinetes con mangas de ese tipo fueron probados en el mismo banco de prueba como se describió anteriormente. El cojinete se hizo también de un acero 34CrNiMo6 tratado térmicamente, y el tiempo de duración de la prueba fue de 5 [h]. Sikora encontró que, en el caso donde el aceite está contaminado por partículas duras, la aplicación de una manga con surcos da como resultado una disminución en el desgaste total de los elementos del cojinete de un 35,5%, en comparación con el desgaste de los elementos del cojinete convencional. En condiciones análogas, la aplicación de un eje de capa superficial de dos componentes, provee una disminución en el desgaste de los elementos del cojinete en un 59,3%. Esto significa que en este caso la eliminación de contaminantes es más eficiente que en el caso de una manga con surcos. Lo anterior es probablemente resultado del hecho de que los surcos se hacen sobre la superficie móvil del muñón.

23.5. PLATAFORMA EXPERIMENTAL PARA DESLIZAMIENTO Y DETECTAR FISURAS EN EJES ROTATORIOS DE MAQUINARIA EN OPERACIÓN

En este aparte se mostrará la plataforma para la experimentación y análisis de la estabilidad dinámica en sistemas rotor-cojinete con y sin deslizamiento, además de la experimentación y validación de modelos dinámicos para detectar fisuras en ejes rotatorios de maquinaria en operación [148, 155].

23.5.1. Características del equipo:

Figura 23.27: Rotor kit modelo RK 4 de Bently Nevada



Fuente Experimentación y validación de modelos dinámicos para detectar fisuras en ejes rotatorios de maquinaria en operación. Tesis de maestría, Machorro José, 2005.

1. *PC. computadora personal.*
2. *Sistema de adquisición de datos (DAIU) y software ADRE para Windows.*
 - a. El sistema de adquisición de datos (DAIU) es una herramienta poderosa para el análisis de vibraciones. Este analizador de espectros digitaliza la señal de entrada, para posteriormente realizar operaciones numéricas. De esta manera, el analizador puede proporcionar la respuesta en el dominio de la frecuencia, obteniendo los siguientes beneficios:
 - Se pueden realizar mediciones precisas.
 - La respuesta transitoria puede ser capturada.
 - Con los datos en forma digital, se pueden almacenar para posteriormente manipularse y realizar operaciones.
 - b. Software ADRE para Windows. Este software permite obtener los siguientes gráficos:
 - Análisis de amplitud vs frecuencia (Espectro).
 - Análisis de amplitud vs frecuencia vs tiempo (Diagrama de Cascada).
 - Análisis de amplitud/fase vs velocidad angular (Diagrama de Bodé).

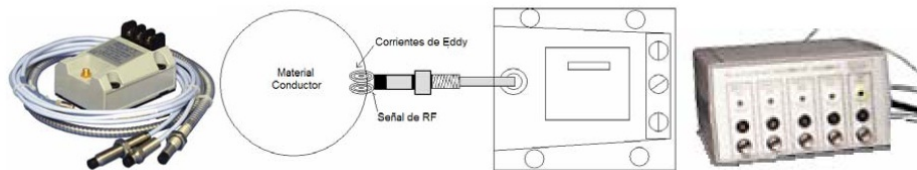
- Análisis de amplitud vs fase (Diagrama de Nyquist).
- Análisis de amplitud vs tiempo (Waveform, TimeBase).
- Análisis de los patrones de Lissajous (Órbita)
- Análisis de la línea de centros del eje (Center Line)
- Análisis de los vectores tabulados.

3. Proximitor (Caja de conexiones)

El proximitor es un dispositivo electrónico (ver figura (23.28)) que desempeña dos funciones básicas:

- Genera una señal de radiofrecuencia (RF) mediante un circuito oscilador.
- Prepara la señal de RF para extraer datos utilizables mediante un circuito demodulador.

Figura 23.28: Proximitor

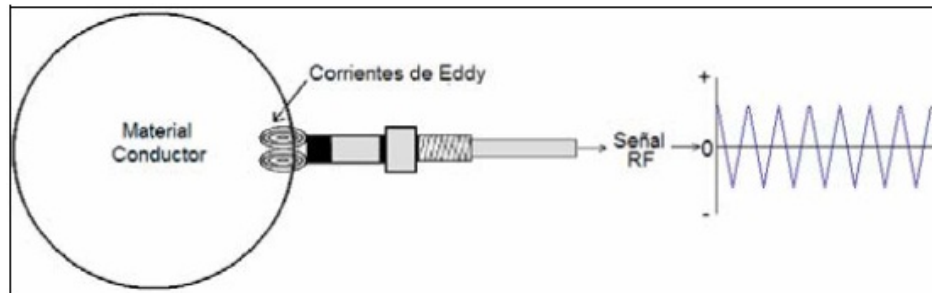


Fuente Experimentación y Análisis de Estabilidad Dinámica en Sistemas Rotor Chumacera Con y Sin deslizamiento. Tesis de Maestría, López Raúl, 2006.

Cuando hay algún material conductor en el campo de RF se generan corrientes de Eddy en la superficie del mismo. Cuando la sonda está lo suficientemente cerca como para provocar corrientes de Eddy en un material conductor, la señal de RF se ve afectada de dos maneras (ver figura (23.29)):

- La amplitud está al *mínimo* cuando la distancia entre la sonda y el material está al *mínimo*. Se produce un máximo de corrientes de Eddy.
- La amplitud está al *máximo* cuando la distancia entre la sonda y el material está al *máximo*. Se produce un mínimo de corrientes de Eddy.

Figura 23.29: Señal de RF



Fuente *Ídem*

El circuito responde según la rapidez de excitación. La salida del proximitor es un voltaje de corriente continua y se representa con una línea. Si el objeto oscila rápidamente la salida del Proximitor es un voltaje de corriente continua variable (CA) (como se muestra en la figura (23.30)).

Para el equipo del laboratorio de Vibraciones del Instituto de México, las distancias entre el elemento a sensor y el proximitor deben estar dentro de los siguientes intervalos:

- Sensor de retroalimentación para el control de velocidad del motor ($-7,5 a - 8,5 [V]$)
- Sensor para monitoreo de vibración ($-5,25 a - 6,25 [V]$)

4. Controlador de velocidad

El control de velocidad es un control retroalimentado, el cual usa pulsos provenientes de una sonda y un proximitor montados cerca de una rueda con 20 muescas instalada en la flecha del motor del rotor kit. El control de velocidad compara esta señal con la velocidad seleccionada en la pantalla, que se encuentra en el controlador de velocidad. La diferencia entre estas señales es usada para ajustar el voltaje y mantener la velocidad seleccionada.

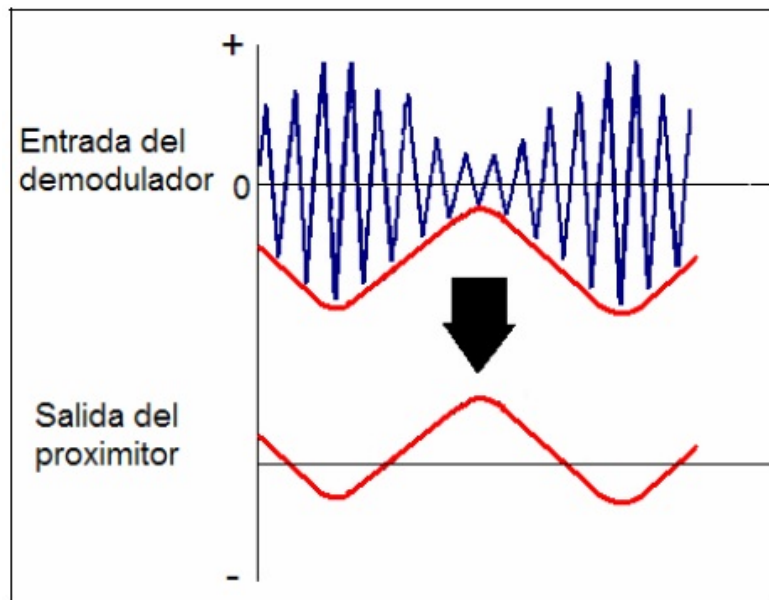
Cuadro 23.5: Entradas externas del control de velocidad

<i>Interruptor</i>	<i>Posición</i>
CCW/EXT/CW	EXT
RUN/STOP	RUN
MODE SWITCH	SLOW ROLL/RAMP/DOWN
MAX RPM SET	10000 [rpm]
RAMP RATE	MAXIMUM

Cuadro 23.6: Entradas externas del control de velocidad

<i>Vdc</i>	<i>Velocidad [rpm]</i>	<i>Dirección</i>
+5	10000	Contrario a las manecillas del reloj
0	0	
-5	10000	Manecillas del reloj

Figura 23.30: Entrada y salida de la RF del proximitor



Fuente *Ídem*

Las entradas externas al controlador de velocidad pueden ser usadas para controlar la velocidad del rotor kit y la dirección de la rotación. En las entradas externas se tienen los siguientes interruptores con diferentes posiciones.

El voltaje de la señal de control de la velocidad y de la dirección se muestra a continuación.

5. Motor

El motor trabajo desde 95 a 125 [Vac], una fase, o 190 a 250 [Vac], y de 50 a 60 [Hz], con 3,0 [A] como máximo, obteniendo una velocidad máxima de 10000 [rpm].

6. *Acople flexible*

El acople flexible cumple tres funciones importantes:

- Acoplamiento flexible del motor con la flecha-rotor.
- Mediante su rueda con muescas se monitorea la velocidad del sistema,
- Por medio de una muesca en el cople se monitorea la fase.

7. *Flecha*

La flecha tiene las siguientes características:

- Diámetro=10 [mm]
- Longitud= 56 [cm]
- Acero AISI 4140

8. *Disco Inercial*

Figura 23.31: Disco inercial



Fuente *Ídem*

El disco inercial, (disponible en la figura (23.31)) simula el rotor de una máquina real y además es utilizado para el balanceo. En este se pueden agregar las masas de balanceo para equilibrar la fuerza centrífuga causada por el desbalance de masa.

9. *Sensores de desplazamiento (proximitor)*

El sensor de desplazamiento es un traductor de vibración, es decir es un dispositivo que convierte la vibración en una señal proporcional. Usualmente la señal proporcionada

es del tipo eléctrico (voltaje). La salida del transductor es proporcional al desplazamiento del movimiento vibratorio. Los transductores de desplazamiento relativo están basados en la generación de corrientes de Eddy. Este tipo de sensores opera según el principio de corrientes parásitas y es un sistema donde el voltaje es proporcional a la abertura. Se utiliza para medir distancia y cambios de distancia para cualquier material conductivo.

- Sonda: Consta de una punta hecha de sulfuro de polietileno (PPS) con una envoltura de acero inoxidable. La punta consta de una bobina cuyas extremidades se terminan con un cable triaxial.
- Cable de extensión.
- Proximito

10. *Chumaceras planas*

CONCLUSIONES

- El estudio metodológico y profundo de la lubricación hidrodinámica en cojinetes, es notablemente creciente en los investigadores internacionales, quienes motivados por las innumerables aplicaciones han desarrollado diferentes modelos y bancos experimentales para representar el comportamiento real de un sistema rotor cojinete. Sobresalen las investigaciones en las universidades de primer nivel (según el QS World University Rankings) y en las naciones con economías emergentes, generando más de 40 publicaciones en promedio por año, en los últimos 10 años.
- Mediante el seminario de investigación se recopiló y sintetizó de manera coherente, la información existente acerca de la lubricación hidrodinámica en cojinetes; resaltando la profundidad en la temática sobre los parámetros que generan el comportamiento no lineal de la película de lubricante presurizada. Con base en lo anterior, los resultados obtenidos mediante la metodología de la investigación fueron descritos en un artículo tipo revista científica.
- Se establecieron las metodologías de análisis y solución del problema no lineal en la lubricación hidrodinámica en cojinetes, a partir de la identificación de cinco parámetros clave que afectan la ecuación de lubricación de Reynolds: rugosidad, cavitación, temperatura, desalineamiento angular del eje y turbulencia.
- Se identificó que los métodos numéricos son la herramienta matemática más ampliamente utilizada para la solución aproximada del sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, que gobiernan la lubricación hidrodinámica en cojinetes. Se destacan en particular el método de diferencias finitas (FDM), método de elementos finitos (FEM), método de volúmenes finitos (FVM) y redes neuronales (ANN) como mecanismos de debilitación de la ecuación original, y métodos de relajación para controlar el proceso iterativo.
- La experimentación es parte esencial en la validación de los modelos que afectan la ecuación de Reynolds. Por tanto, se estudiaron los principales sistemas que conforman los bancos de prueba de lubricación hidrodinámica en cojinetes resaltando: la unidad de cojinete, el sistema de carga, el sistema de accionamiento, el sistema de lubricación, el sistema de control y el sistema de medición.
- Se estudió la metodología que vincula la lubricación hidrodinámica en cojinetes y el sistema dinámico rotor cojinete. En ambos casos el problema se reduce a la relación

dinámica entre la fuerza debida a la presión de la película de fluido y la trayectoria, la velocidad y la aceleración relativa entre el muñón y el cojinete.

- Al estudiar los cojinetes de contacto plano radiales, se identifica los elementos principales que afectan su comportamiento, y se concluye que:
 - La fricción es una característica inherente a cualquier sistema apoto-rotor y es un parámetro que debería incluirse en los estudios analíticos y experimentales. En cuanto a la lubricación hidrodinámica se debería controlar el nivel de la fricción en la película de fluido para evitar sobrecalentamiento y fuerzas de torsión indeseadas.
 - El tipo de lubricación afecta directamente el coeficiente de fricción, por lo cual es importante definirlo teniendo en cuenta el tipo de maquinaria y las cargas a soportar, siendo la lubricación de película completa más estable, a diferencia de la lubricación de película mixta y de película mínima.
 - La viscosidad es un parámetro que varía con la temperatura, la presión, el magnetismo, el campo eléctrico e inclusive con el tipo de aditivo en su composición. Todos estos factores hacen que en un sistema rotor-cojinete la LHD sea altamente no lineal, debido a la íntima relación entre la formación de la película y la viscosidad.
 - Dependiendo de la aplicación se selecciona un aceite cuyas características garanticen el control de la temperatura, la limpieza, la untuosidad y la permanencia del flujo en la zona lubricada.
 - En general los dispositivos para la medición de la viscosidad relacionan una capacidad de carga (fuerza o torque) con un sistema de referencia a una temperatura estándar.
 - Los materiales para cojinetes deben soportar condiciones de operación como capacidad de carga variable, variación de temperatura y velocidad, oxidación y corrosión del lubricante y además ser económicamente factibles.
 - El metal blanco (aleaciones con base de estaño y plomo-Babbitts) ha sido considerado el mejor material para cojinetes, y la calidad de otros materiales puede ser determinada con respecto a las propiedades de éste.
 - Los materiales no metálicos generalmente se utilizan en prácticas donde se requiere auto-lubricación, bajo costo, resistencia química y se mantiene un ambiente a temperatura contralada; pero debido a su baja conductividad y bajo punto de fusión tienen como desventaja la restricción a aplicaciones de baja carga y baja velocidad.
- La lubricación hidrodinámica en cojinetes se modela mediante la ecuación de lubricación de Reynolds; una ecuación en derivadas parciales elíptica. Generalmente la lubricación está relacionada con el comportamiento de un sistema rotor cojinete.

Para entender el comportamiento no lineal de un sistema rotodinámico, es necesario conocer cómo es el comportamiento de manera lineal y qué condiciones se deben cumplir para que se establezca la no linealidad.

- La solución lineal del sistema hidrodinámico modelado según las suposiciones de Reynolds, corresponde a la aproximación de cojinete largo o cojinete corto, cuya herramienta principal es la relación geométrica L/D donde se obtiene un sistema de ecuaciones simplificadas, resueltas analítica o numéricamente. La obtención de la lubricación hidrodinámica implica el cumplimiento simultáneo de ciertas condiciones de velocidad, viscosidad, carga y parámetros geométricos.
- La distribución de presión con el modelo de cojinetes corto se ajusta bien a los resultados experimentales para relaciones longitud diámetro de $\frac{1}{4}$ hasta 2, el modelo de cojinete largo con relaciones mayores a 4 y existen otros métodos para hallar la distribución de presión en cojinetes con relaciones intermedias.
- El mejoramiento de las características del cojinete consiste en el incremento del espesor de la película de aceite, la disminución del torque de fricción, la presencia de aceite en las distintas regiones y el mantenimiento del flujo continuo en la película de fluido.
- Una buena manera de controlar el parámetro de la holgura en un cojinete, es cambiar los rangos de tolerancia de los fabricantes, ya que pocos $[\mu m]$ añadidos o sustraídos de los elementos del sistema, afectan potencialmente el espesor mínimo de lubricante y por consiguiente todo el régimen de LHD.
- El metroscope es la herramienta más precisa para obtener mediciones geométricas del sistema rotor cojinete superando al calibrador de vernier, el sigmascope y el calibrador de “agujero”. Los dispositivos de medición usados para bancos experimentales con LHD no están establecidos de forma estandar y por tanto, no se puede establecer un listado de éstos para ser usados en forma general, porque varían según el tipo de experimentación que se realice .
- Modificar la textura superficial del cojinete y/o del muñón es un mecanismo empleado por el diseñador para mejorar las características de la lubricación hidrodinámica.
- La lubricación hidrodinámica en presencia de rugosidad en las superficies sólidas, se estudia mediante la adaptación de la holgura en la ecuación de lubricación de Reynolds, como una función de la geometría del sistema. Es un modelo altamente no lineal resuelto alternativamente por el método de redes neuronales.
- Un estrategia para evaluar el comportamiento de la lubricación hidrodinámica en presencia de rugosidad es generar superficies micro texturadas, cuya forma puede ser diente de sierra, trapezoidal, rectangular y celdas de micro agujeros.

- Una aplicación importante de las superficies rugosas en la lubricación hidrodinámica es ampliar la zona lubricada minimizando la zona de cavitación. Esto se debe a la reducción de la velocidad del flujo en el extremo divergente de la zona lubricada.
- Para resolver la ecuación general de Reynolds incluyendo el parámetro de temperatura, es necesario incluir un modelo que relacione las ecuaciones de energía y de conservación de masa, y resolverlas simultáneamente a través de métodos numéricos que utilizan la aproximación sucesiva y la relajación para alcanzar resultados precisos.
- Cuando se tienen condiciones de alta temperatura, generalmente producido por altas velocidades, se usan los cojinetes hidrodinámicos que funcionen con aire (“foil bearings”) como lubricante, debido al comportamiento de la viscosidad en éste fluido.
- La temperatura de la película de aire incrementa a la entrada a lo largo de la circunferencia, y alcanza un valor máximo en la vecindad del espesor mínimo de película.
- La temperatura de los cojinetes de láminas incrementa con la carga al igual que con la velocidad de rotación.
- La capacidad de carga y torque de los cojinetes de láminas se hace más grande si la temperatura se tiene en cuenta, y la diferencia es notable, lo que significa que los efectos de la temperatura no pueden ser ignorados en el análisis de los cojinetes de láminas.
- El efecto de desalineamiento angular en eje-cojinete, induce momentos hidrodinámicos, debido a que el campo de presión de la película del lubricante se distorsiona.
- El comportamiento de los momentos hidrodinámicos adquiere un efecto auto alineador, ya que, conforme se incrementa la velocidad angular del sistema, el desalineamiento angular disminuye debido a dichos momentos. También los momentos hidrodinámicos de los cojinetes repercuten en la deflexión y en los ángulos de desalineamiento dinámico, por lo que un rotor de operación siempre tendrá un desalineamiento y una deflexión del eje menor que el desalineamiento y deflexión estática.
- Para los sistemas rotor-cojinete con y sin desalineamiento el comportamiento de la velocidad umbral de estabilidad, con respecto a la carga, es cualitativamente igual ya que los dos disminuyen conforme aumenta el peso. Por otra parte, cuantitativamente son diferentes ya que el sistema que considera el desalineamiento predice que la velocidad umbral de estabilidad es mayor que la predicción del sistema que no considera el desalineamiento.
- La lubricación hidrodinámica es altamente sensible a la presencia de la cavitación, pues afecta el desempeño adecuado del cojinete de deslizamiento, al disminuir la capacidad de carga y aumentar la turbulencia e inestabilidad del sistema.

- Elrod y Adams establecieron (1974) un modelo matemático más realista de la lubricación hidrodinámica que involucra el efecto de la cavitación en función de una frontera móvil. Divide el dominio de la lubricación en una zona cavitada (efectiva en la capacidad de carga) y una zona no cavitada (no activa).
- El modelo de Reynolds es muy atractivo pues se reduce a una desigualdad variacional que permite una solución numérica altamente convergente, sin embargo, en la zona de cavitación el modelo es NO conservativo. Por otro lado, el aporte de Elrod y Adams es estrictamente conservativo, evita falsas zonas de reformación y capacidades de carga aparente, a pesar de ser un sistema con dificultades en la convergencia.
- La cavitación en cojinetes de superficie microtexturada se presenta en cada celda, generando un micro sistema que puede ser estudiado independientemente. El modelo de Reynolds en cada celda omite las zonas de ruptura y reformación manifestándose erróneamente como mayor capacidad de carga.
- En algunos modelos para simplificar el comportamiento del sistema, se tiene en cuenta la frontera móvil de cavitación. Con esto se consigue limitar la zona de carga y a su vez, establecer las condiciones de frontera límite para aplicar los métodos numéricos en un dominio definido.
- Cuando se considera el desalineamiento angular del eje, el máximo valor de presión en el cojinete tiende a localizarse en las zonas de menor holgura. Este es un factor crítico en los cojinetes largos.
- La variación de la carga en la película de lubricante, debida a las deformaciones alternativas del eje, incrementa la probabilidad de falla por fatiga del sistema rotor cojinete.
- La turbulencia es un fenómeno que está ligado al comportamiento no lineal de la lubricación hidrodinámica en cojinetes, debido a los efectos de inercia del flujo y al elevado gradiente de presión; es por esto, que la lubricación turbulenta basa su análisis en la adaptación del modelo de Reynolds al sistema real mediante coeficientes turbulentos.
- El fluido adecuado para estudiar el comportamiento de la lubricación turbulenta en cojinetes generalmente es el agua, pues es un fluido Newtoniano cuyas propiedades se han estudiado profundamente y se tiene control sobre cualquier variación de las mismas.
- El flujo no laminar conocido como los vórtices de Taylor es un fenómeno que se desarrolla en un rango muy corto de velocidades ocasionando que su estudio sea complejo., por tanto las investigaciones experimentales bajo este flujo son mínimas y en la mayoría de estudios de lubricación hidrodinámica no laminar, se asume que los vórtices de Taylor se pueden despreciar.

- De acuerdo con las publicaciones estudiadas se concluye que a mayor turbulencia mayor capacidad de carga del cojinete y en contraparte, el aumento de la turbulencia aumenta la inestabilidad rotodinámica del sistema (latigazo y arremolinamiento del aceite).
- Existen dos modelos básicos para el estudio de la turbulencia, el modelo de longitud mixta y el modelo $k - \epsilon$. Cuando el gradiente de presión en el cojinete no es muy grande, se utiliza el primero, de lo contrario se usa el segundo para números de Reynolds superiores a 10.000. El modelo $k - \epsilon$ es muy eficiente para altos números de Reynolds, pues utiliza constantes experimentales que se mantienen invariables con el cambio de la presión; condición característica de sistemas con una excentricidad elevada.
- El aumento en la turbulencia incrementa el tiempo de estadía del fluido en el cojinete y hace disminuir el caudal de aceite que pasa por él; controlar la turbulencia implica tener dominio sobre la cavitación. El comportamiento rotodinámico que tiene en cuenta la movilidad del cojinete y el muñón, implica necesariamente que el modelado del flujo de lubricante sea turbulento, ocasionado por el movimiento relativo entre las superficies que encierran el flujo. Este sistema es altamente no lineal y caótico.
- La herramienta que relaciona el comportamiento hidrodinámico en los cojinetes con el sistema rotor cojinete es un modelo dinámico que vincula las fuerzas generadas por película gruesa, con la trayectoria, la velocidad y la aceleración del sistema, esto se da a partir de la definición de los coeficientes rotodinámicos.
- Los coeficientes rotodinámicos se obtienen de la solución simultánea de la ecuación de Reynolds (distribución de presión) y la solución del sistema de ecuaciones de fuerza el cual constituye la teoría básica de coeficientes rotodinámicos. El comportamiento dinámico siempre es influenciado por los valores que puedan tomar estos coeficientes.
- Se estudiaron diferentes herramientas gráficas para representar e interpretar la variación no lineal de los coeficientes rotodinámicos con la variación de los parámetros que afectan la lubricación hidrodinámica. Se destacan las trayectorias dinámicas del rotor y el centro del cojinete, espectros de potencia, mapas de Poincaré, diagramas de bifurcación y exponentes máximos de Lyapunov.
- Un elemento importante en el estudio de los ciclos límite, es el valor que adquiere alguno de los coeficientes de rigidez, pues si es un valor negativo y dependiendo de su magnitud puede llevar al sistema a la inestabilidad.
- Para realizar un análisis dinámico completo al conjunto rotor cojinete, es importante incluir la condición de “soltura” del eje, ya que esta influye en la estabilidad del sistema y genera cambios en los coeficientes dinámicos, que repercuten de forma negativa en la respuesta de su amplitud y fase, generando fallas inminentes.

- Una metodología para estudiar el comportamiento rotodinámico de un sistema rotor cojinete, teniendo en cuenta la holgura del sistema, es describiendo la órbita del muñón. La órbita se obtiene de la solución combinada de las ecuaciones de movimiento y la ecuación de Reynolds. Los gradientes de presión dinámicos en la órbita son descritos por una perturbación de primer orden para el gradiente de presión estática y para los gradientes de presión de orden superior por perturbaciones de velocidad y desplazamiento.
- La *no linealidad de la película de fluido* es más grande a mayores relaciones de excentricidad que a menores relaciones de excentricidad (Concordancia entre los trabajos de Bently y Rao). Sin embargo, el cambio en la no linealidad con amplitudes de perturbación, es más alta a menores relaciones de excentricidad (o números de Sommerfeld más altos) comparado con mayores relaciones de excentricidad.
- Basados en el análisis y resultados de trabajos internacionales acerca de la lubricación hidrodinámica en distintos tipos de cojinete, se concluye que el problema dinámico real simulado por ecuaciones diferenciales parciales necesariamente requiere de la aplicación de métodos numéricos.
- La solución numérica de cualquier problema continuo tiene cuatro propiedades claves que garantizan la eficiencia del método, como son, la *consistencia*, la *exactitud*, la *convergencia* y la *estabilidad*. Se identificaron estas propiedades en las investigaciones estudiadas, pero no todas cumplen cabalmente estas premisas y se requieren herramientas como el método de relajación para garantizar su efectividad.
- Dependiendo de la condiciones de frontera del problema, del dominio matemático y de los parámetros de entrada en la ecuación de Reynolds se recurre a la herramienta numérica adecuada. Se concluye que el método de diferencias finitas es el más aplicado para el problema del comportamiento no lineal en la LHD, debido a que su solución es considerablemente convergente.
- Dentro del método de elementos finitos, el más utilizado en esta área es el método de Galerkin perteneciente al esquema de formulación débil. Por parte de las redes neuronales artificiales, hay una tendencia importante hacia la adecuación del método multicapa no supervisado aplicado a la solución simultánea de las ecuaciones dinámicas del sistema rotor cojinete.
- Para validar los modelos planteados en la lubricación hidrodinámica los investigadores se valen de la experimentación, pero en algunas ocasiones las pruebas requieren muchos recursos o bancos especializados que los limitan; de este modo, otra forma de comprobar los resultados es compararlos con los presentados por investigaciones de reconocimiento internacional, soportando el modelo planteado.

RECOMENDACIONES

- Se recomienda a los futuros seminarios de investigación desarrollados en la Universidad Industrial de Santander, cuyo objeto sea el establecimiento del estado del arte en una temática o aclarar el punto de vista de un autor, soportar su investigación con publicaciones internacionales que presenten el panorama mundial y estado real de la recopilación realizada, ya que se convertirá en un soporte importante para estudios posteriores.
- El programa RotoDin, diseñado por el Doctor Heller Sanchez director del trabajo de grado, utiliza una metodología en la que el usuario ingresa las características de la fuerza en el cojinete; se pretende desarrollar un modelo que represente la dinámica del rotor cojinete identificando el comportamiento no lineal del fluido y con ello la fuerza que genera la película presurizada. Cuando esto ocurra, se habrá avanzado en la aproximación a un sistema real. Se recomienda entonces, profundizar en los parámetros y condiciones que originan la película de fluido, en los sistemas dinámicos rotor cojinete y la simulación numérica, en un proyecto de investigación que parta del estado del arte estructurado en este seminario de investigación.
- El contenido expuesto en el presente trabajo es una base teórica sólida para que se pueda realizar proyectos experimentales que aproximen a la realidad el comportamiento de la maquinaria rotatoria que opera bajo lubricación hidrodinámica.
- Obtener datos detallados de los bancos de experimentación, fue una tarea compleja a lo largo del seminario, porque la información local es limitada y las publicaciones encontradas en las bases de datos sólo exponen características generales del banco. Se recomienda profundizar en esta área haciendo énfasis en los dispositivos de medición dependiendo de la aplicación.
- Con base en los datos estadísticos expuestos en la introducción de este trabajo de grado, se recomienda fortalecer las relaciones internacionales con la Universidad A&M de Texas, quienes investigan experimentalmente la lubricación hidrodinámica en cojinetes para todo tipo de turbomaquinaria; lo anterior permitirá también, incentivar la movilidad estudiantil a Universidades de primer mundo.

BIBLIOGRAFÍA

- [146] M. BERG. *Untersuchungen zum Schmierstoffdurchsatz und zur Reibungsleistung dynamisch belasteter Radialgleitlager*. Univ. Kaiserslautern, 1996.
- [147] MM KHONSARI, MD PASCOVICI, and BV KUCISCHI. On the scuffing failure of hydrodynamic bearings in the presence of an abrasive contaminant. *Journal of tribology*, 121:90, 1999.
- [148] José Manuel MACHORRO LÓPEZ. Experimentación y validación de modelos dinámicos para detectarr fisuras en ejes rotatorios de maquinaria en operación. Master's thesis, Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de ingeniería Mecánica y Eléctrica, 2005.
- [149] SA McKEE. Effect of abrassive in lubricant. 1927.
- [150] Y. MIHARA, T. HAYASHI, M. NAKAMURA, and T. SOMEYA. Development of measuring method for oil film pressure of engine main bearing by thin film sensor. *JSAE Review*, 16(2):125–130, 1995.
- [151] R. RAMAN and TS CHENNABASAVAN. Experimental investigations of porous bearings under vertical sinusoidally fluctuating loads. *Tribology international*, 31(6): 325–330, 1998.
- [152] AE ROACH. Performance of oil-film bearings with abrasive-containing lubricant. *Trans. ASME*, 73:677–686, 1951.
- [153] A. RONEN and S. MALKIN. Wear mechanisms of statically loaded hydrodynamic bearings by contaminant abrasive particles. *Wear*, 68(3):371–389, 1981.
- [154] H. RONKAINEN, A. HOKKANEN, M. KAPULAINEN, A. LEHTO, J. MARTIKAINEN, I. STUNS, A. VALKONEN, S. VARJUS, and J. VIRTANEN. Optical sensor for oil film pressure measurement in journal bearings. In *Proceedings of NordTrib 2008, 13th Nordic Symposium of Tribology. Tampere, Finland. June 10-13, 2008*.
- [155] Raúl Antonio LÓPEZ RUIZ. Experimentación y análisis de estabilidad dinámica en sistemas rotor-cumacera con y sin desallineamiento. Master's thesis, Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, México D.F, 2006.

- [156] HG RYLANDER. Effects of solid inclusions in sleeve-bearing oil supply, mech. eng. *Wear*, 74(1):963–966, 1952.
- [157] C. SINANOGLU, F. NAIR, and M.B. KARAMLIS. Effects of shaft surface texture on journal bearing pressure distribution. *Journal of materials processing technology*, 168(2):344–353, 2005.
- [158] T. SOMEYA and Y. MIHARA. New thin-film sensors for engine bearings. In *CIMAC Congress (International Council on Combustion Engines)*, Kyoto, 2004.
- [159] J. SP and A. KUCABA-PITAL. Experimental testing of journal bearings with two-component surface layer in the presence of an oil abrasive contaminant. *Wear*, 249(12):1090–1095, 2001.
- [160] A. VALKONEN. Oil film pressure in hydrodynamic journal bearings.
- [161] V WIKSTRÖM, E HÖGLUND, and R LARSSON. Wear of bearing liners at low speed rotation of shafts with contaminated oil. *Wear*, 162-164, Part B(0):996 – 1001, 1993. ISSN 0043-1648. doi: 10.1016/0043-1648(93)90110-8.
- [162] S.H. YANG, C. KIM, and Y.B. LEE. Experimental study on the characteristics of pad fluttering in a tilting pad journal bearing. *Tribology international*, 39(7):686–694, 2006.