

POSICIONAMIENTO ÓPTIMO DE UN SISTEMA LINEAL E INVARIANTE
EN EL TIEMPO, UTILIZANDO LAS TÉCNICAS DE INVERSIÓN DEL
MODELO Y EL CONTROL ÓPTIMO.

MAURICIO ERNESTO MORALES ARIZA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
MAESTRÍA EN INGENIERÍAS ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA
BUCARAMANGA
2006

POSICIONAMIENTO ÓPTIMO DE UN SISTEMA LINEAL E INVARIANTE
EN EL TIEMPO, UTILIZANDO LAS TÉCNICAS DE INVERSIÓN DEL
MODELO Y EL CONTROL ÓPTIMO.

MAURICIO ERNESTO MORALES ARIZA

Proyecto final para optar al título de
Magíster en Ingeniería área Electrónica

Director

HECTOR RAMIRO PEREZ RODRIGUEZ
PHD. Ingeniería Mecánica

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
MAESTRÍA EN INGENIERÍAS ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA
BUCARAMANGA
2006

A Dios por permitirme cumplir una meta más en mi vida. A mis padres y en general a toda mi familia con mucho cariño, ya que siempre me confortan, animan y ayudan.

AGRADECIMIENTOS

Expreso mis sinceros agradecimientos a las personas que han participado y aportado un granito de arena dentro de mi formación como Magíster en Ingeniería Electrónica.

A la Universidad Industrial de Santander y a su cuerpo docente durante mi formación académica.

A la Universidad Pontificia Bolivariana por darme la oportunidad de realizar el proyecto de investigación en convenio con la Universidad Industrial de Santander.

Al Dr. Héctor Ramiro Pérez Rodríguez, director del proyecto, agradezco su valiosa guía, colaboración y amistad, sin lo cual este proyecto no se hubiera podido realizar.

A Dios por permitirme saborear un triunfo más en mi vida.

TITULO. *POSICIONAMIENTO ÓPTIMO DE UN SISTEMA LINEAL E INVARIANTE EN EL TIEMPO, UTILIZANDO LAS TÉCNICAS DE INVERSION DEL MODELO Y EL CONTROL ÓPTIMO.

**** Mauricio E. Morales A.**

Palabras claves: Transición de la salida, Optimización, Inversión del modelo, Sistemas discretos lineales, punto de operación, preactuación, postactuación, seguimiento.

Este proyecto encuentra la solución para la transición óptima (entrada de mínima energía) de la salida o transición óptima del punto de operación para sistemas discretos LTI (Lineal de Tiempo Invariante). El objetivo es transferir la salida de un punto inicial de operación o valor inicial a un punto final de operación o valor final en un intervalo de tiempo.

Los métodos anteriores resuelven este problema aplicando la transición óptima (entrada de mínima energía) entre los estados de equilibrio inicial y final, sin embargo, éstos no son necesariamente los estados óptimos para iniciar y finalizar la transición de la salida. Esta metodología se denomina técnica estándar. La metodología de este proyecto encuentra los estados óptimos para inicio y fin de la transición de salida, se minimiza la energía para transferir la salida entre esos estados óptimos que no son necesariamente los estados de equilibrio, se aplica la técnica inversión del modelo tanto para llevar el sistema del estado de equilibrio inicial al estado óptimo de inicio de la transición de la salida (preactuación) como para llevar el sistema del estado óptimo final en que finaliza la transición de salida al estado de equilibrio final (postactuación). Durante la preactuación y postactuación la salida permanece constante en un valor inicial y en un valor final respectivamente.

La metodología desarrollada se implementó en Matlab y se aplicó a un modelo de disco duro ampliamente aceptado por la comunidad científica. Los resultados muestran que al comparar la técnica propuesta con la técnica estándar, hay una reducción alta en la energía y en el tiempo de transición cuando se realiza la transición de la cabeza lectora/escritora de una pista a otra.

*Proyecto de Investigación.

**Facultad de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones, Maestría en Ing. Electrónica, Héctor R. Pérez R.

**TITLE. OPTIMAL * POSITIONING OF A DISCRETE TIME LINEAR SYSTEM EMPLOYS
INVERSION BASED AND OPTIMAL CONTROL.**

****** Mauricio E. Morales A.

Keywords: output transition, optimization, inversion-based, linear discrete systems, operating point, preactuation, postactuation, tracking.

This Project addresses the optimal (minimum-input-energy) output transition or optimal operating point transition for LTI (**L**inear **T**ime **I**nvariant) discrete systems. The goal is to transfer the output from an initial operating point or initial value to a final operating point or final value in an interval time.

Previous methodologies solve this problem applying the optimal transition between initial and final equilibrium states (minimum-input-energy), however those are not necessarily the optimal states to start and end the output transition. This methodology is called standard technique. In the methodology of this project, the optimal states to start and end the transition are found, the input energy is minimized to transfer the output between those optimal states that are not necessarily the equilibrium states, inversion-based is applied to take the system both from the initial equilibrium point to the initial optimal state where the output transition starts (preactuation) and to take the states from the final optimal state where the output transition ends to the final equilibrium state (postactuation). During preactuation and postactuation the output is maintained constant to an initial value and to a final value respectively.

The developed methodology implemented in Matlab was applied to a hard disk model widely accepted for the scientific community. The results show a high energy and output transition time reduction when the read/write head is transfer from one track to another.

* Proyecto de Investigación.

** Facultad de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones, Maestría en Ing. Electrónica, Héctor R. Pérez R.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
1. INTRODUCCIÓN.	12
2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.	16
I. Condición de la transición de salida	17
II. Condición de los estados delimitantes.	17
3. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE TRANSICIÓN DE SALIDA, APLICANDO LA TÉCNICA DE TRANSICIÓN DE ESTADO ESTÁNDAR (SST).	18
4. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE TRANSICIÓN DE SALIDA ÓPTIMA (OOT).	20
4.1 Forma de seguimiento de salida.	20
4.1.1 Transformación de coordenada y entrada de control.	21
4.1.2 Forma de seguimiento de salida y dinámica interna.	22
4.2 Entrada de preactuación en el intervalo de pretransición ($k \leq k_i - r$).	26
4.3 Entrada de postactuación en el intervalo de post-transición ($k \geq k_f$).	31
4.4 Entrada de actuación en el intervalo de transición ($k_i - r < k < k_f$).	36
4.5 Transición de salida óptima OOT.	38
5. EJEMPLO DE UN SISTEMA FLEXIBLE: DISCO DURO.	42
5.1 Descripción del sistema.	42
5.2 Modelo de espacio-estado.	45
5.3 Comparación de los resultados al emplear los métodos SST y OOT en el posicionamiento de la cabeza lectora/escritora.	47
5.3.1 Solución al problema de transición de estado estándar SST.	48
5.3.2 Solución al problema de transición de salida óptima OOT.	52

5.3.3 Comparación de los resultados cuando se aplicó el método SST y el método OOT al modelo discreto del disco duro.	64
6. CONCLUSIONES.	68
7. BIBLIOGRAFÍA.	72

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Parámetros de la planta y tolerancias para el diseño del modelo del Disco Duro.	43
Tabla 2. Costo de la energía al variar el intervalo de transición cuando se aplica el método SST al Disco Duro.	51
Tabla 3. Costo de la energía al variar el intervalo de transición cuando se aplica el método OOT al Disco Duro.	63

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Problema de transición de salida en tiempo discreto.	12
Figura 2. Entrada de control y salida en el método SST.	49
Figura 3. Energía vrs. Duración del intervalo de transición en el Método SST.	51
Figura 4. Entrada de control y salida en el método OOT.	61
Figura 5. Energía vrs. Duración del intervalo de transición en el Método OOT.	63
Figura 6. Comparación de los resultados de los métodos SST y OOT.	64

LISTA DE SÍMBOLOS

c	Marginalmente estable.
d	Valor deseado o conocido.
G	Matriz de controlabilidad Gramian
HDA	Cabeza del disco duro.
J	Costo de energía.
k	Paso de tiempo, que es igual a el número del paso por el periodo de muestreo.
LTI	Lineal e invariante en el tiempo.
OOT	Transición de salida óptima.
r	Grado relativo.
s	Estable.
SST	Transición de estado estándar.
SISO	Una entrada y una salida.
VCM	Bobina móvil del motor.
u	Entrada de control.
x	Estado del sistema.
y	Salida del sistema.
$\bar{y}$	Salida del sistema antes del intervalo de transición.
$\underline{y}$	Salida del sistema después del intervalo de transición.
∞	Infinito.
y	Matriz de las condiciones límites de la transición de salida.
h	Estados internos.
e	Estados externos.
$\mathfrak{R}$	Vector compuesto por la salida deseada y sus r futuros valores.
$\bullet$	Coeficiente de amortiguamiento.
S	Sumatoria.
D	Diferencia.
$[]^T$	Matriz transpuesta.

1. INTRODUCCIÓN

Este proyecto propone encontrar una técnica de control que solucione el problema de transición de salida óptima (mínima energía) para sistemas discretos, lineales e invariantes en el tiempo LTI. Como ilustración, en la Figura 1. se presenta el problema de transición de salida, en el cual, el objetivo es encontrar la entrada óptima que minimiza la energía aplicada al sistema discreto LTI, para cambiar la salida o punto de operación desde un valor inicial $y(k_i) = \underline{y}$, hasta un valor final $y(k_f) = \bar{y}$, durante el intervalo de tiempo $[k_i, k_f]$ llamado intervalo de transición.

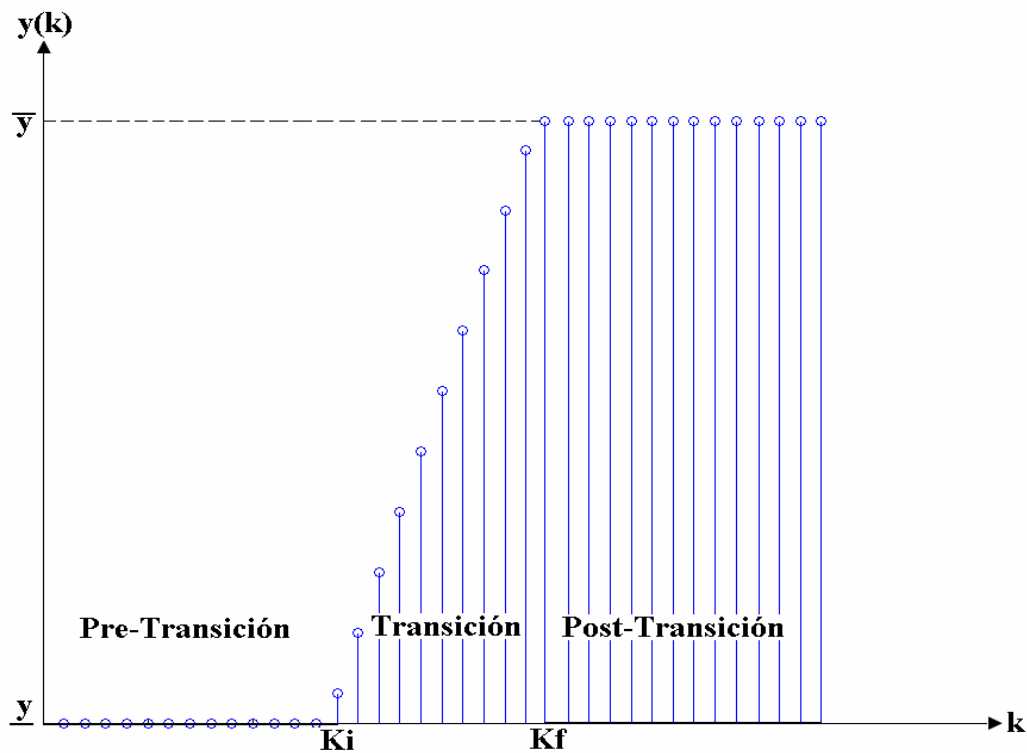


Figura 1. Problema de transición de salida en tiempo discreto.

Este problema es fundamental en el área de control y se presenta en un amplio rango de aplicaciones. Por ejemplo, en estructuras flexibles de escala alta como manipuladores [1, 2, 3], escala media como cabeza lectora/escritora de discos duros [4, 5] y escala pequeña como nano-posicionadores [6, 7]. Cuando

se realiza un cambio de posición o un cambio en la salida de una estructura flexible se presentan vibraciones, pero si se minimiza la energía aplicada al sistema estas se reducen, en especial cuando se completa el intervalo de transición. Por ejemplo, en un disco duro el objetivo es mover la cabeza lectora/escritora de una pista a otra pista y mantener constante la salida antes y después del intervalo de transición para que realice sus tareas de lectura/escritura. Leer y escribir son operaciones que el disco duro no puede realizar de manera óptima, cuando se presentan vibraciones residuales en la salida.

Una propuesta indirecta para resolver el problema de transición de salida, es emplear técnicas existentes que solucionen el problema estándar de transición de estado SST (criterio de mínima energía). El problema de transición de estado se ha estudiado muy bien, sin embargo el problema de transición de salida no se ha resuelto para sistemas discretos LTI. En la técnica SST se aplica el criterio de mínima energía para transferir el sistema del estado de equilibrio inicial $x(k_i) = \underline{x}$ al estado de equilibrio final $x(k_f) = \bar{x}$. En este caso, los estados de equilibrio inicial y final que delimitan el intervalo de transición, corresponden al valor de la salida inicial $\bar{y}$ y final $\underline{y}$ respectivamente. Una vez se escogen los estados delimitantes del intervalo de transición como los estados de equilibrio, se puede encontrar una solución al problema de transición de salida a partir de la solución del problema de transición de estado estándar SST, desde el estado inicial $x(k_i)$ hasta el estado final $x(k_f)$ [2, 8,11].

Sin embargo, el escoger los estados límites del intervalo de transición como los estados de equilibrio no es lo más adecuado para minimizar la energía, ya que estos estados no son necesariamente unos estados óptimos donde se podría iniciar y finalizar el intervalo de transición. Por otro lado, si se escogen unos estados arbitrarios diferentes a los estados de equilibrio, no se puede mantener la salida en un valor constante sin vibraciones residuales, a menos que se aplique una entrada que las contrarreste. Por lo tanto, el problema

estándar de transición de estado SST no es una solución óptima para resolver directamente el problema de transición de salida óptima. En contraste, en la metodología propuesta se resuelve el problema de transición de salida óptima OOT aplicando la técnica de inversión del modelo para encontrar la entrada de preactuación que mantiene el seguimiento de la salida antes de la iniciación del intervalo de transición ($k \leq k_i$) en el valor deseado ($\bar{y}$), y similarmente, la entrada de postactuación que mantiene el seguimiento de la salida después del intervalo de transición ($k \geq k_f$) en el valor deseado ($\underline{y}$). Luego, esta técnica de inversión se integra con el problema estándar de transición de estado SST desde el estado óptimo inicial en el paso de tiempo k_i hasta el estado óptimo final en el paso de tiempo k_f , para resolver el problema de transición de salida óptima OOT. Entonces, este método integra la técnica de inversión del modelo y el problema óptimo de transición de estado estándar SST, para resolver el problema de transición de salida óptima OOT en sistemas de tiempo discreto LTI (Estos resultados se complementan con los resultados obtenidos para sistemas de tiempo continuo [15]). Esta metodología emplea una entrada de preactuación y postactuación para reducir el costo de la transición sin cambiar el tiempo del intervalo de transición. Por ejemplo, si se considera el movimiento de la cabeza lectora/escritora de un disco duro de una pista a otra pista, la entrada de preactuación se puede emplear antes de la iniciación del intervalo de transición, para llevar el sistema al estado inicial óptimo sin cambiar la posición de salida (mantener la cabeza lectora/escritora sobre la pista inicial). Similarmente, la entrada de postactuación se puede emplear luego de completar el intervalo de transición, para llevar el sistema del estado final óptimo al estado de equilibrio final y mantener la salida en el valor deseado (mantener la cabeza lectora/escritora sobre la pista final). De este modo, la salida se controla durante el intervalo de pretransición y post-transición para que la cabeza lectora/escritora del disco duro pueda realizar las tareas de lectura/escritura. La metodología de solución propuesta se aplicó al modelo discreto de un disco duro y se presentan los resultados de simulación.

Los resultados de simulación muestran una reducción significativa en la energía cuando se utiliza el método propuesto OOT y se compara con el método estándar SST. La reducción de la energía se refleja en una disminución considerable de la magnitud de la entrada. Esta disminución permite, si se desea, una reducción en el tiempo de la transición.

Para la realización de este proyecto, el autor se actualizó en el estudio de la transición de salida óptima en sistemas de tiempo continuo, que realizó su director en sus estudios de doctorado, y los extrapoló para resolver la transición de salida óptima OOT para sistemas discretos LTI. En el capítulo 2, se formula el problema a resolver. En el capítulo 3, se muestra como la técnica estándar SST resuelve el problema propuesto. En el capítulo 4, se presenta la solución, empleando la metodología desarrollada OOT. En el capítulo 5, se presenta la aplicación de la metodología OOT para el posicionamiento de la cabeza lectora/escritora de un disco duro, y los resultados obtenidos al aplicar SST y OOT, se implementan, se comparan y se discuten. Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

La dinámica de una estructura flexible se puede modelar por un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI). Anteriormente, estos modelos se emplearon para modelar la dinámica de sistemas flexibles como naves espaciales [1, 2, 3], servo sistemas como el disco duro [5, 6] y manipuladores flexibles [4, 7, 8, 9, 15, 16]. Específicamente, la dinámica de una estructura flexible se puede representar como un sistema discreto LTI en la siguiente forma de espacio-estado:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}, \forall k \in (-\infty, \infty) \quad (1)$$

Donde los estados del sistema en el tiempo k son $x(k) \in R^n$. Además, el sistema tiene una entrada $u(k)$ y una salida $y(k)$ (SISO), y es controlable. Ahora, considere el problema de cambiar la salida desde una posición inicial a una posición final en un intervalo de tiempo predefinido llamado intervalo de transición, y al mismo tiempo, mantener la salida en un valor constante antes y después de este intervalo. Entonces el problema de transición de salida se define como:

Definición 1.

El problema de transición de salida consiste en encontrar la entrada y las trayectorias de los estados $[u(\cdot), x_{ref}(\cdot)]$ que satisfagan las ecuaciones del sistema en la (Eq.1)

$$\begin{aligned} x_{ref}(k+1) &= Ax_{ref}(k) + Bu(k) \\ y_{ref}(k) &= Cx_{ref}(k) \end{aligned}, \forall k \in (-\infty, \infty) \quad (2)$$

Y además las siguientes dos condiciones:

I. Condición de la transición de salida: la salida se transfiere desde un valor inicial $\bar{y}$ a un valor final $\underline{y}$ durante un intervalo de tiempo $[k_i, k_f]$ llamado intervalo de transición, y se mantiene constante en un valor deseado antes y después de este intervalo. Formalmente:

$$\begin{aligned} y_{ref}(k) &= \underline{y} = C\underline{x} & , \forall k \leq k_i \\ y_{ref}(k) &= \bar{y} = C\bar{x} & , \forall k \geq k_f \end{aligned} \quad (3)$$

Donde: $\bar{x}$, $\underline{x}$ denotan los estados de equilibrio límites del intervalo de transición y k_i , k_f denotan los pasos de tiempo inicial y final del intervalo de transición.

II. Condición de los estados delimitantes: los estados de los puntos de equilibrio (configuración de cuerpo rígido) van hacia (más o menos) infinito. Formalmente:

$$x_{ref}(k) \rightarrow \underline{x} \text{ como } k \rightarrow -\infty \quad x_{ref}(k) \rightarrow \bar{x} \text{ como } k \rightarrow \infty \quad (4)$$

Definición 2. Problema de transición de salida óptima OOT (mínima energía de entrada).

El problema de transición de salida óptima consiste en encontrar la entrada y las trayectorias de los estados $[u(\cdot), x_{ref}(\cdot)]$ que resuelvan el problema de transición de salida (Definición 1) y que minimicen el siguiente costo funcional:

$$J_{OOT} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [u(k)]^2 \quad (5)$$

3. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE TRANSICIÓN DE SALIDA APLICANDO LA TÉCNICA DE TRANSICIÓN DE ESTADO ESTÁNDAR (SST).

Para un sistema controlable, existe una entrada que puede lograr la transición de estado desde un estado inicial $x(k_i)$ hasta un estado final $x(k_f)$. Además, la entrada que logra la transición de estado (desde el estado inicial $x(k_i)$ hasta el estado final $x(k_f)$) no es única [17]. Entonces, la solución al problema de transición de salida (Definición 1), se puede encontrar utilizando la solución del problema de transición de estado de mínima energía (Transición de Estado Estándar SST). Al emplear la metodología SST para dar solución al problema de la transición de salida, se debe cumplir con la Condición I (condición de la transición de salida (Eq.3)) y la Condición II (condición de los estados delimitantes (Eq.4)). Entonces, en la SST se escogen los estados delimitantes del intervalo de transición como los estados en los puntos de equilibrio, que corresponden a los valores de la salida inicial y final respectivamente.

$$\begin{aligned} x(k) &= \underline{x} \quad \forall \quad k \leq k_i \quad \text{Estado de equilibrio inicial} \\ x(k) &= \bar{x} \quad \forall \quad k \geq k_f \quad \text{Estado de equilibrio final} \end{aligned} \tag{6}$$

Ahora, la entrada de control de mínima energía que transfiere el sistema de la (Eq.1) desde el estado de equilibrio inicial $\underline{x}$ hasta el estado de equilibrio final $\bar{x}$ según la SST, se puede determinar empleando el control óptimo lineal cuadrático (LQ) y se define como (ver [17] Págs. 47-49 y [18]):

$$u_{sst}(k) = \begin{cases} B^T (A^T)^{k_f-k-1} G_{k_i, k_f}^{-1} \Delta_x, & k_i \leq k \leq k_f \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{7}$$

Donde el Gramian G_{k_i, k_f} se expresa como:

$$G_{k_i, k_f} = \sum_{k=k_i}^{k_f-1} A^{k_f-k-1} B B^T (A^T)^{k_f-k-1} \quad (8)$$

Y la diferencia final de estado Δ_x se define como:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \Delta_x[k_i, x(k_i), k_f, x(k_f)] = x(k_f) - A^{k_f-k_i} x(k_i) \\ \Delta_x[k_i, \underline{x}, k_f, \bar{x}] &= \bar{x} - A^{k_f-k_i} \underline{x} \end{aligned} \quad (9)$$

Además, el costo de la función (Eq.5) cuando se emplea la entrada u_{sst} (Eq.7) se determina como [17]:

$$J_{SST} = \Delta_x^T G_{k_i, k_f}^{-1} \Delta_x \quad (10)$$

Sin embargo, al escoger los estados límites de la transición de salida como los estados en los puntos de equilibrio, se mantienen constantes los estados durante la pretransición ($k \leq k_i$) y la post-transición ($k \geq k_f$), entonces, durante estos intervalos la entrada aplicada es cero. Por lo tanto, el costo de la función (Eq.4) se puede reducir a:

$$J_{SST} = \sum_{k=k_i}^{k_f-1} [u_{SST}(k)]^2 \quad (11)$$

La entrada de control que minimiza el costo funcional de la (Eq.11), sujeta a las condiciones de la (Eq.6), es (Eq.7).

4. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE TRANSICIÓN DE SALIDA ÓPTIMA OOT.

Se inicia identificando las posibles condiciones para los estados límites de la transición de salida $(x(k_i), x(k_f))$ que mantienen la salida a un valor constante antes y después del intervalo de transición (Eq.3). Esto se hace en dos pasos. Primero, el sistema original de la (Eq.1) se convierte a la forma de seguimiento de salida. Segundo, las entradas de control que se requieren antes de la iniciación del intervalo transición (entrada de preactuación) y después de la finalización del intervalo de transición (entrada de postactuación) se encuentran. Una vez se encuentran los posibles estados límites del intervalo de transición $(x(k_i), x(k_f))$ de acuerdo con la condición de la (Eq.3), entonces, se establecen las condiciones de los estados óptimos para resolver el problema de transición de salida óptima (mínima energía).

4.1 Forma de seguimiento de salida.

La forma de seguimiento de salida desacopla los estados del sistema en: (i) los estados que dependen de la salida llamados estados externos. (ii) los estados inobservables que se denominan estados internos y corresponden a los ceros del sistema. La forma de seguimiento de salida depende del orden de retraso del sistema denominado r [19], el cual se define matemáticamente como la diferencia entre el número de polos y el número de ceros del sistema.

Observación 1. Un orden de retraso r implica que: si a un sistema se le aplica una entrada en el paso de tiempo k , habrá un retraso de r pasos de tiempo para que el sistema responda a esa entrada. La entrada $u(k)$ solamente afectará la salida en el paso de tiempo $k+r$ y después (pero no la salida antes del paso de tiempo $k+r$). [19]

Suposición 1. El sistema de tiempo discreto (Eq.1) tiene un orden de retraso $r \geq 1$ [19].

4.1.1 Transformación de coordenada y entrada de control.

Partiendo de la (Eq.1) se definen unos nuevos estados z así [19]:

$$e_1(k) = y(k) = Cx(k)$$

$$e_2(k) = e_1(k+1) = y(k+1) = Cx(k+1) = C[Ax(k) + Bu(k)] = CAx(k) + CBu(k) = CAx(k); CB = 0$$

$$e_3(k) = e_2(k+1) = y(k+2) = CAx(k+1) = CA[Ax(k) + Bu(k)] = CA^2x(k) + CABu(k) = CA^2x(k); CAB = 0$$

$$e_r(k) = e_{r-1}(k+1) = y(k+r-1) = CA^{r-1}x(k) + CA^{r-2}Bu(k) = CA^{r-1}x(k); CA^{r-2}B = 0 \quad (12)$$

$$h_1 = h_1$$

$$h_2 = h_2$$

$$\mathbb{M}$$

$$h_m = h_m$$

Entonces, se puede generalizar la matriz de transformación que se debe aplicar al sistema de espacio-estado (Eq.1) para llevarlo a la forma de seguimiento. Esta matriz se define como:

$$T = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \mathbb{M} \\ CA^{r-1} \\ L \\ T_h \end{bmatrix}; \text{ donde } T_n \text{ se define linealmente independiente y } T \text{ invertible.} \quad (13)$$

Por lo tanto, si se aplica la matriz de la (Eq.13) al sistema de la (Eq.1), los estados $x(k)$ del sistema inverso se particionan en dos componentes: (i) los r primeros términos son la salida y sus $r-1$ valores futuros (denotados por $\bullet$). (ii) el resto de estados llamados estados internos del sistema (denotados por η).

$$z(k) = \begin{bmatrix} e(k) \\ L \\ h(k) \end{bmatrix} = Tx(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+r-1) \\ L \\ h(k) \end{bmatrix} \quad (14)$$

De la (Eq.12) y de la definición de orden de retraso (Observación 1), la ecuación de seguimiento de salida se puede escribir en términos de la entrada como [19]:

$$y(k+r) = CA^r x(k) + CA^{r-1}Bu(k) \quad (15)$$

Donde:

$$CA^{r-1} \neq 0$$

$x(k)$ son los estados del sistema. (Eq.1)

Y la única entrada inversa de control que se aplica al sistema de la (Eq.1) para obtener la salida deseada (seguimiento perfecto) se puede encontrar como:

$$u_{inv}(k) = \frac{1}{CA^{r-1}B} [y_d(k+r) - CA^r x(k)] \quad (16)$$

Donde:

$$y(k+r) = y_d(k+r) \text{ (salida deseada o conocida)}$$

4.1.2 Forma de seguimiento de salida y dinámica interna.

Si se escoge la matriz T como en la (Eq.13) y T_n como una matriz identidad entonces la matriz T se denominará T_z . Al aplicar la matriz T_z y la entrada de control inversa (Eq.16) a los estados del sistema de la (Eq.1), se puede obtener el sistema de espacio-estado de seguimiento de la siguiente manera:

$$z(k+1) = \begin{bmatrix} e(k+1) \\ h(k+1) \end{bmatrix} = TAT^{-1} \begin{bmatrix} e(k) \\ h(k) \end{bmatrix} + TB \left[\frac{1}{CA^{r-1}B} [y_d(k+r) - CA^r x(k)] \right] \quad (17)$$

$$y_z = Cx(k)$$

Pero, se deben expresar todos los estados de la (Eq.17) en función de los estados externos $e(k)$ y los estados internos $h(k)$. De la (Eq.14), los estados $x(k)$ en función de los estados externos $e(k)$ e internos $h(k)$ se expresan como:

$$x(k) = T^{-1} \begin{bmatrix} e(k) \\ h(k) \end{bmatrix} \quad (18)$$

Entonces, si se remplaza el valor de los estados $x(k)$ de la (Eq.18) dentro de la (Eq.17), se obtiene el sistema de espacio-estado de seguimiento en función de los estados $e(k)$ y $h(k)$ así:

$$\begin{aligned} z(k+1) &= \begin{bmatrix} e(k+1) \\ h(k+1) \end{bmatrix} = \left(TAT^{-1} - \frac{TBCA^rT^{-1}}{CA^{r-1}B} \right) \begin{bmatrix} e(k) \\ h(k) \end{bmatrix} + \frac{TB}{CA^{r-1}B} y_d(k+r) \\ y_z(k) &= CT^{-1} \begin{bmatrix} e(k) \\ h(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

De una manera más condensada, el sistema de la (Eq.19) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} z(k+1) &= \begin{bmatrix} e(k+1) \\ h(k+1) \end{bmatrix} = A_z \begin{bmatrix} e(k) \\ h(k) \end{bmatrix} + B_z y_d(k+r) \\ y_z(k) &= C_z \begin{bmatrix} e(k) \\ h(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

Donde:

$$A_z = TAT^{-1} - \frac{TBCA^rT^{-1}}{CA^{r-1}B}; \quad B_z = \frac{TB}{CA^{r-1}B}; \quad C_z = CT^{-1}$$

Ahora, para determinar cual es la dependencia que tienen las matrices A_z y B_z con los estados externos e internos, se realiza una sub-división de estas matrices de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} e(k+1) \\ h(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_e & 0 \\ A_{ne} & A_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(k) \\ h(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_e \\ B_h \end{bmatrix} y_d(k+r) \quad (21)$$

Donde la matriz A_h tiene dimensiones de $(n-r) \times (n-r)$ y r es el orden de retraso del sistema. A partir de la (Eq.12 y Eq.21), los estados externos e internos en forma de seguimiento se pueden expresar en forma desacoplada así:

$$e_i(k+1) = e_d(k+i) \quad 1 \leq i \leq r-1 \quad (22)$$

$$e_r(k+1) = CA^r \begin{bmatrix} e(k) \\ h(k) \end{bmatrix} + CA^{r-1} Bu(k) \quad (23)$$

$$h(k+1) = A_h h(k) + \begin{bmatrix} A_{ne} & B_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_d(k) & y_d(k+r) \end{bmatrix}^T$$

$$h(k+1) = A_h h(k) + B_h \Re(k) \quad (24)$$

Donde: $e_d(k)$ representa la salida del sistema (y) y sus $r-1$ valores futuros ($e_d(k) = [y(k) \ y(k+1) \ \dots \ y(k+r-1)]^T$) y la notación $_d$ representa el valor deseado o conocido. Adicionalmente, la secuencia $\Re(k) = [e_d(k) \ y_d(k+r)]^T$ representa la salida y sus r futuros valores. h representa los estados internos del sistema [15]. Si se asume que en la (Eq.24) los estados internos h tienen la forma:

$$h_{dc}(k+1) = \begin{bmatrix} h_s(k+1) \\ h_u(k+1) \\ h_c(k+1) \end{bmatrix} = Acan \begin{bmatrix} h_s(k) \\ h_u(k) \\ h_c(k) \end{bmatrix} + Bcan \Re(k) \quad (25)$$

Donde:

$$Acan = \begin{bmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & A_u & 0 \\ 0 & 0 & A_c \end{bmatrix}; \quad Bcan = \begin{bmatrix} B_s \\ B_u \\ B_c \end{bmatrix}$$

se debe escoger la matriz de transformación T_n (Eq.13) de tal forma que cuando se aplique a la (Eq.24), los estados internos se desacoplen en estados estables (h_s), estados inestables (h_u) y estados marginalmente estables (h_c). Esta matriz de transformación que permite desacoplar los estados internos se denominará T_{canon} . En los estados internos desacoplados (Eq.25), los eigenvalores de A_s son los ceros de fase mínima que están dentro del círculo unidad en el plano complejo, los eigenvalores de A_u son los ceros de fase no mínima ubicados fuera del círculo unidad y los eigenvalores de A_c son los ceros ubicados sobre el círculo unidad.

Por otro lado, la entrada de control inversa (Eq.16) se puede expresar en términos de los estados externos desacoplados, estados internos (estables, inestables y marginalmente estables) desacoplados y la secuencia de salida conocida como $\Re(k)$, empleando la matriz de transformación de desacople T_{dc} de la siguiente forma:

$$\text{Ya que : } x = T_z^{-1} \begin{bmatrix} e \\ h \end{bmatrix} \text{ según (Eq.17) y } h_{dc} = \begin{bmatrix} h_s \\ h_u \\ h_c \end{bmatrix} = T_{\text{canon}} * h \Rightarrow h = T_{\text{canon}}^{-1} h_{dc} ,$$

$$\text{entonces, } T_{dc} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_{\text{canon}} \end{bmatrix} T_z \quad (26)$$

Donde los estados externos e internos desacoplados se definen como:

$$z_{dc} = \begin{bmatrix} e \\ h_s \\ h_u \\ h_c \end{bmatrix} = T_{dc} x \Rightarrow x = T_{dc}^{-1} \begin{bmatrix} e \\ h_s \\ h_u \\ h_c \end{bmatrix} \quad (27)$$

Por lo tanto, la entrada inversa de control (Eq.16) se puede expresar como:

$$u_{inv}(k) = \frac{1}{CA^{r-1}B} y_d(k+r) - \frac{CA^r T_{dc}^{-1}}{CA^{r-1}B} \begin{bmatrix} e(k) \\ h_s(k) \\ h_u(k) \\ h_c(k) \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$u_{inv}(k) = \frac{1}{CA^{r-1}B} y_d(k+r) + U_e e_d(k) + U_s h_s(k) + U_u h_u(k) + U_c h_c \quad (28)$$

$$u_{inv}(k) = U_s h_s(k) + U_u h_u(k) + U_c h_c + \left[U_e \quad \frac{1}{CA^{r-1}B} \right] \begin{bmatrix} e_d(k) \\ y_d(k+r) \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$u_{inv}(k) = U_s h_s(k) + U_u h_u(k) + U_c h_c + U_y \Re(k) \quad (30)$$

Donde:

$$U_y = \begin{bmatrix} U_e & \frac{1}{CA^{r-1}B} \end{bmatrix}$$

Observación 2. Los cambios en los estados internos $h(k)$ no afectan la salida.

Observación 3. La entrada aplicada después del paso de tiempo $k_i - r + 1$ no afecta la salida hasta el inicio de la transición de salida en el paso de tiempo k_i (Suposición 2 y Observación 1). Adicionalmente la entrada inversa de control (Eq.16) que mantiene la salida en un valor constante ($y = \underline{y}$) solamente se requiere antes del paso de tiempo $k_i - r + 1$ durante la preactuación.

4.2 Entrada de preactuación en el intervalo de pretransición ($k \leq k_i - r$).

Durante el intervalo de pretransición la salida se debe mantener en un valor constante ($\underline{y}$). La única entrada que puede mantener constante la trayectoria de salida ($y(k) = \underline{y}$) es la entrada de inversión (Eq.16). El siguiente lema muestra que la entrada de preactuación para el problema de transición de salida se expresa únicamente en términos de la componente inestable $h_u(k_i - r + 1)$ de la dinámica interna, hasta el paso de tiempo $k_i - r + 1$.

Adicionalmente, al emplear la entrada de preactuación, el costo es cuadrático en el estado interno inestable $h_u(k_i - r + 1)$.

Lema 1. La entrada de preactuación que satisface las condiciones de seguimiento de la salida (Eq.3 y Eq.4 en la Definición 1) se expresa únicamente en términos de la componente inestable $h_u(k_i - r + 1)$ de la dinámica interna y se define como ($\forall k \in (-\infty, k_i - r]$):

$$u_{pre}(k) = U_u A_u^{-(k_i - k - r + 1)} [h_u(k_i - r + 1) - \underline{h}_u] \quad (31)$$

Donde $\underline{h} = T_{dc} \underline{x}$. Adicionalmente, el costo asociado con la entrada de preactuación es:

$$J_{pre} = [h_u(k_i - r + 1) - \underline{h}_u]^T W_{pre} [h_u(k_i - r + 1) - \underline{h}_u] \quad (32)$$

Donde:

$$W_{pre} = \sum_{k=0}^{\infty} (A_u^T)^{-(k+1)} U_u^T U_u A_u^{-k+1} \quad (33)$$

Es una matriz simétrica que puede ser computada resolviendo la ecuación algebraica discreta de Lyapunov así:

$$(A_u^{-1})^T W_{pre} A_u^{-1} - W_{pre} + (A_u^{-1})^T U_u^T U_u A_u^{-1} = 0 \quad (34)$$

Prueba: se asume que el sistema original (Eq.1) ya se ha transformado a la forma de seguimiento de salida (Eq.22, Eq.23 y Eq.24), empleando la matriz de transformación T_z y la entrada inversa de control (Eq.16).

En el intervalo de pretransición ($k \leq k_i - r$) la salida es constante $y(k) = \underline{y}$ (ver Eq.3), entonces, el vector $\mathfrak{R}(k)$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathfrak{R}(k) = \underline{\mathfrak{R}} = [\underline{e}_d(k) \quad \underline{y}(k+r)]^T \quad \forall k \in (-\infty, k_i - r] \quad (35)$$

Ahora, si se considera que las coordenadas de seguimiento de salida (e,h) corresponden al estado de equilibrio inicial $\underline{x}$, se hace necesario mover el origen del sistema al estado inicial delimitante del intervalo de transición. Esto se puede realizar en tres pasos: (i) se aplica la matriz de transformación T_{dc} (Eq.26) al estado de equilibrio inicial $\underline{x}$ de la siguiente manera:

$$T_{dc} \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{e} \\ \underline{h}_{-s} \\ \underline{h}_{-u} \\ \underline{h}_{-c} \end{bmatrix} \quad (36)$$

(ii) se evalúa la dinámica interna de la (Eq.25) en el estado de equilibrio $\underline{x}$ así:

$$\begin{bmatrix} \underline{h}_{-s}(k+1) \\ \underline{h}_{-u}(k+1) \\ \underline{h}_{-c}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & A_u & 0 \\ 0 & 0 & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{h}_{-s}(k) \\ \underline{h}_{-u}(k) \\ \underline{h}_{-c}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_s \\ B_u \\ B_c \end{bmatrix} \underline{\mathfrak{R}}(k) \quad (37)$$

(iii) se realiza el cambio de coordenadas a $\hat{h}(k) = h(k) - \underline{h}$, sustrayendo la dinámica interna de la (Eq.37) de la dinámica interna de la (Eq.25), además empleando la igualdad de la (Eq.35). Entonces, en las nuevas coordenadas la dinámica interna se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_s(k+1) \\ \hat{h}_u(k+1) \\ \hat{h}_c(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & A_u & 0 \\ 0 & 0 & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h}_s(k) \\ \hat{h}_u(k) \\ \hat{h}_c(k) \end{bmatrix} \quad (38)$$

De acuerdo con la (Eq.38), para el estado inicial del intervalo de transición $x(k_i - r + 1)$, se puede encontrar una solución de la dinámica interna en un paso de tiempo k así:

$$\begin{aligned}
\hat{h}_s(k) &= A_s^{-(k_i-k-r+1)} \hat{h}_s(k_i - r + 1) \\
\hat{h}_u(k) &= A_u^{-(k_i-k-r+1)} \hat{h}_u(k_i - r + 1) \quad , \forall k \in (-a, k_i - r] \\
\hat{h}_c(k) &= A_c^{-(k_i-k-r+1)} \hat{h}_c(k_i - r + 1)
\end{aligned} \tag{39}$$

Recuerde que en la condición de los estados delimitantes (Eq.4), se requiere que si el tiempo tiende a $-\infty$ entonces $(k \rightarrow -\infty)$ y el estado se debe aproximar al estado de equilibrio inicial $x(k) \rightarrow \underline{x}$ ($\hat{h}(k) \rightarrow 0$). Si se utiliza esta condición, tomando el límite a ambos lados de la ecuación (Eq.39) e igualando a cero se tiene que:

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{k \rightarrow -\infty} \hat{h}_s(k) = \lim_{k \rightarrow -\infty} A_s^{-(k_i-k-r+1)} \hat{h}_s(k_i - r + 1) \\
0 &= \lim_{k \rightarrow -\infty} \hat{h}_u(k) = \lim_{k \rightarrow -\infty} A_u^{-(k_i-k-r+1)} \hat{h}_u(k_i - r + 1) \\
0 &= \lim_{k \rightarrow -\infty} \hat{h}_c(k) = \lim_{k \rightarrow -\infty} A_c^{-(k_i-k-r+1)} \hat{h}_c(k_i - r + 1)
\end{aligned} \tag{40}$$

Donde las matrices A_s y A_c no convergen dentro del círculo de radio unidad cuando se elevan con una cantidad negativa. Sin embargo, la condición de los estados delimitantes (Eq.4) se satisface si y solamente sí:

$$\begin{aligned}
\hat{h}_s(k_i - r + 1) &= 0 \\
\hat{h}_c(k_i - r + 1) &= 0
\end{aligned} \tag{41}$$

Los resultados de la (Eq.41) también implican que:

$$\begin{aligned}
\hat{h}_s(k) &= 0 \quad \text{ó} \quad \hat{h}_s(k) = \underline{h}_s \\
\hat{h}_c(k) &= 0 \quad \text{ó} \quad \hat{h}_c(k) = \underline{h}_c \quad \forall k \in (-\infty, k_i - r]
\end{aligned} \tag{42}$$

Por lo tanto, los estados internos inestables son los únicos estados que convergen al inicio de la transición de salida $x(k_i - r + 1)$.

Entrada de preactuación y su costo. En el punto de equilibrio $\underline{x}$, $\underline{y} = C\underline{x}$. Entonces, la entrada de control inversa (Eq.16) evaluada en este punto se puede reescribir como:

$$\underline{u}_{inv}(k) \Big|_{\underline{x}(k)=\underline{x}} = \underline{u}_{inv} = \frac{1}{CA^{r-1}B} [\underline{y} - CA^r \underline{x}] = 0 \quad (43)$$

Y la entrada de control inversa expresada en términos de los estados internos según la (Eq.30) se expresa como:

$$\underline{u}_{inv} = 0 = U_s \underline{h}_s + U_u \underline{h}_u + U_c \underline{h}_c + U_y \underline{\mathfrak{R}} \quad (44)$$

Similarmemente, la entrada de control inversa se puede expresar en términos de las nuevas coordenadas $\hat{\mathbf{h}}(k)$ restando la (Eq.44) de la (Eq.30) así:

$$\underline{u}_{inv}(k) = U_s [\underline{h}_s(k) - \underline{h}_s] + U_u [\underline{h}_u(k) - \underline{h}_u] + U_c [\underline{h}_c(k) - \underline{h}_c] \quad (45)$$

$$\underline{u}_{inv}(k) = U_s \hat{\mathbf{h}}_s(k) + U_u \hat{\mathbf{h}}_u(k) + U_c \hat{\mathbf{h}}_c(k) \quad (46)$$

$$\underline{u}_{inv}(k) = U_u \hat{\mathbf{h}}_u(k), \quad \forall k \in (-\infty, k_i - r] \quad (47)$$

Se concluye que la entrada de preactuación que satisface la condición de transición de salida (Eq.3) y la condición de los estados delimitantes (Eq.4), solamente depende de los estados internos inestables $\underline{h}_u$ y se define como:

$$\underline{u}_{pre}(k) = U_u A_u^{-(k_i - k - r + 1)} [\underline{h}_u(k_i - r + 1) - \underline{h}_u] \quad (48)$$

A partir de la (Eq.48) se puede encontrar el costo de la entrada de preactuación como:

$$J_{pre} = \sum_{k=-\infty}^{k_i - r} [\underline{u}_{pre}(k)]^2 \quad (49)$$

$$J_{pre} = \infty \sum_{k=-\infty}^{k_i - r} \left\{ U_u A_u^{-(k_i - k - r + 1)} [\underline{h}_u(k_i - k - r + 1) - \underline{h}_u] \right\}^T \left\{ U_u A_u^{-(k_i - k - r + 1)} [\underline{h}_u(k_i - r + 1) - \underline{h}_u] \right\}$$

$$J_{pre} = [\mathbf{h}_u(k_i - r + 1) - \mathbf{h}_{\underline{u}}]^T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{k_i-r} (\mathbf{A}_u^T)^{-(k_i-k-r+1)} \mathbf{U}_u^T \mathbf{U}_u \mathbf{A}_u^{-(k_i-k-r+1)} \right\} [\mathbf{h}_u(k_i - r + 1) - \mathbf{h}_{\underline{u}}]$$

Pero, definiendo el índice $\bar{k}$ como $\bar{k} = k_i - k - r$, se puede escribir el costo de la entrada de preactuación como:

$$J_{pre} = [\mathbf{h}_u(k_i - r + 1) - \mathbf{h}_{\underline{u}}]^T \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{A}_u^T)^{-(\bar{k}+1)} \mathbf{U}_u^T \mathbf{U}_u \mathbf{A}_u^{-(\bar{k}+1)} \right] [\mathbf{h}_u(k_i - r + 1) - \mathbf{h}_{\underline{u}}]$$

$$J_{pre} = [\mathbf{h}_u(k_i - r + 1) - \mathbf{h}_{\underline{u}}]^T \mathbf{W}_{pre} [\mathbf{h}_u(k_i - r + 1) - \mathbf{h}_{\underline{u}}] \quad (50)$$

Donde la matriz $\mathbf{W}_{pre}$ se obtiene como una solución de la ecuación algebraica discreta de Lyapunov (Eq.34), ver [22].

4.3 Entrada de postactuación en el intervalo de post-transición ($k \geq k_f$).

La entrada de postactuación se obtiene aplicando el mismo procedimiento utilizado en la sub-sección anterior para encontrar la entrada de preactuación. El siguiente lema muestra que la entrada de postactuación para el problema de transición de salida se puede expresar únicamente en términos de la componente estable $\mathbf{h}_s(k_f)$ de la dinámica interna, en el paso de tiempo k_f . Adicionalmente, al emplear la entrada de postactuación, el costo es cuadrático en el estado interno estable $\mathbf{h}_s(k_f)$.

Lema 2. La entrada de postactuación que satisface las condiciones de seguimiento de la salida (Eq.3 y Eq.4 en la Definición 1) se expresa únicamente en términos de la componente estable $\mathbf{h}_s(k_f)$ de la dinámica interna y se define como ($\forall k \in [k_f, \infty)$):

$$\mathbf{u}_{post}(k) = \mathbf{U}_s \mathbf{A}_s^{k-k_f} [\mathbf{h}_s(k_f) - \bar{\mathbf{h}}_s] \quad (51)$$

Donde $\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{T}_{dc} \bar{\mathbf{x}}$. Adicionalmente, el costo asociado con la entrada de

postactuación es:

$$J_{post} = [h_s(k_f) - \bar{h}_s]^T W_{post} [h_s(k_f) - \bar{h}_s] \quad (52)$$

Donde:

$$W_{post} = \sum_{k=0}^{\infty} (A_s^T)^k U_s^T U_s A_s^k \quad (53)$$

Es una matriz simétrica que puede ser computada resolviendo la ecuación algebraica discreta de Lyapunov,

$$A_s^T W_{post} A_s - W_{post} + U_s^T U_s = 0 \quad (54)$$

Prueba: se asume que el sistema original (Eq.1) ya se ha transformado a la forma de seguimiento de salida (Eq.22, Eq.23 y Eq.24), empleando la matriz de transformación T_z y la entrada inversa de control (Eq.16).

En el intervalo de post-transición ($k \geq k_f$) la salida es constante $y(k) = \bar{y}$ (ver Eq.3), entonces, el vector $\mathfrak{R}(k)$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathfrak{R}(k) = \bar{\mathfrak{R}} = [\bar{e}_d(k) \quad \bar{y}(k+r)]^T \quad \forall k \in [k_f, \infty) \quad (55)$$

Ahora, si se considera que las coordenadas de seguimiento de salida (e,h) corresponden al estado de equilibrio final $\bar{x}$, se hace necesario mover el origen del sistema al estado final delimitante del intervalo de transición. Esto se puede realizar en tres pasos: (i) se aplica la matriz de transformación T_{dc} (Eq.26) al estado de equilibrio final $\bar{x}$ de la siguiente manera:

$$T_{dc} \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{e} \\ \bar{h}_s \\ \bar{h}_u \\ \bar{h}_c \end{bmatrix} \quad (56)$$

(ii) se evalúa la dinámica interna de la (Eq.25) en el estado de equilibrio $\bar{x}$ así:

$$\begin{bmatrix} \bar{h}_s(k+1) \\ \bar{h}_u(k+1) \\ \bar{h}_c(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & A_u & 0 \\ 0 & 0 & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h}_s(k) \\ \bar{h}_u(k) \\ \bar{h}_c(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_s \\ B_u \\ B_c \end{bmatrix} \bar{\mathcal{R}}(k) \quad (57)$$

(iii) se realiza el cambio de coordenadas a $\hat{h}(k) = h(k) - \bar{h}$, sustrayendo la dinámica interna de la (Eq.57) de la dinámica interna de la (Eq.25), y empleando la igualdad de la (Eq.55). Entonces, en las nuevas coordenadas la dinámica interna se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_s(k+1) \\ \hat{h}_u(k+1) \\ \hat{h}_c(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & A_u & 0 \\ 0 & 0 & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h}_s(k) \\ \hat{h}_u(k) \\ \hat{h}_c(k) \end{bmatrix} \quad (58)$$

De acuerdo con la (Eq.58), para el estado final del intervalo de transición $x(k_f)$, se puede encontrar una solución de la dinámica interna en un paso de tiempo k así:

$$\begin{aligned} \hat{h}_s(k) &= A_s^{k-k_f} \hat{h}_s(k_f) \\ \hat{h}_u(k) &= A_u^{k-k_f} \hat{h}_u(k_f) \quad , \forall k \in [k_f, \infty) \\ \hat{h}_c(k) &= A_c^{k-k_f} \hat{h}_c(k_f) \end{aligned} \quad (59)$$

Recuerde que en la condición de los estados delimitantes (Eq.4), se requiere que si el tiempo tiende a ∞ entonces $(k \rightarrow \infty)$ y el estado se debe aproximar al estado de equilibrio final $x(k) \rightarrow \bar{x}$ ($\hat{h}(k) \rightarrow 0$). Si se utiliza esta condición, tomando el límite a ambos lados de la ecuación (Eq.59) e igualando a cero se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{h}_s(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} A_s^{k-k_f} \hat{h}_s(k_f) \\ 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{h}_u(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} A_u^{k-k_f} \hat{h}_u(k_f) \\ 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{h}_c(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} A_c^{k-k_f} \hat{h}_c(k_f) \end{aligned} \quad (60)$$

Donde las matrices A_u y A_c no convergen dentro del círculo de radio unidad cuando se elevan con una cantidad positiva. Sin embargo, la condición de los estados delimitantes (Eq.4) se satisface si y solamente si:

$$\begin{aligned}\hat{h}_u(k_f) &= 0 \\ \hat{h}_c(k_f) &= 0\end{aligned}\tag{61}$$

Los resultados de la (Eq.61) también implica que:

$$\begin{aligned}\hat{h}_u(k) &= 0 \\ \hat{h}_c(k) &= 0\end{aligned}\quad \text{ó} \quad \begin{aligned}h_u(k) &= \bar{h}_u \\ h_c(k) &= \bar{h}_c\end{aligned}, \forall k \in [k_f, \infty)\tag{62}$$

Por lo tanto, los estados internos estables son los únicos estados que convergen al final de la transición de salida $x(k_f)$.

Entrada de postactuación y su costo. En el punto de equilibrio $\bar{x}$, $\bar{y} = C\bar{x}$. Entonces, la entrada de control inversa (Eq.16) evaluada en este punto se puede escribir como:

$$u_{inv}(k) \Big|_{x(k)=\bar{x}} = \bar{u}_{inv} = \frac{1}{CA^{r-1}B} [\bar{y} - CA^r \bar{x}] = 0\tag{63}$$

Y la entrada de control inversa expresada en términos de los estados internos según la (Eq.30) se expresa como:

$$\bar{u}_{inv} = 0 = U_s \bar{h}_s + U_u \bar{h}_u + U_c \bar{h}_c + U_y \bar{\mathfrak{R}}\tag{64}$$

Similarmente, la entrada de control inversa se puede expresar en términos de las nuevas coordenadas $\hat{h}(k)$ restando la (Eq.64) de la (Eq.30) así:

$$u_{inv}(k) = U_s [h_s(k) - \bar{h}_s] + U_u [h_u(k) - \bar{h}_u] + U_c [h_c(k) - \bar{h}_c]\tag{65}$$

$$u_{inv}(k) = U_s \hat{h}_s(k) + U_u \hat{h}_u(k) + U_c \hat{h}_c(k)\tag{66}$$

$$u_{inv}(k) = U_s \hat{h}_s(k), \quad , \forall k \in [k_f, \infty)\tag{67}$$

Se concluye que la entrada de postactuación que satisface la condición de transición de salida (Eq.3) y la condición de los estados delimitantes (Eq.4), solamente depende de los estados internos estables $\underline{h}_s$ y se define como:

$$u_{post}(k) = U_s A_s^{k-k_f} [\underline{h}_s(k_f) - \underline{h}_s] \quad (68)$$

A partir de la (Eq.68) se puede encontrar el costo de la entrada de preactuación como:

$$\begin{aligned} J_{post} &= \sum_{k=k_f}^{\infty} [u_{post}(k)]^2 \quad (69) \\ J_{post} &= \sum_{k=k_f}^{\infty} \left\{ U_s A_s^{k-k_f} [\underline{h}_s(k_f) - \underline{h}_s] \right\}^T \left\{ U_s A_s^{k-k_f} [\underline{h}_s(k_f) - \underline{h}_s] \right\} \\ J_{post} &= [\underline{h}_s(k_f) - \underline{h}_s]^T \left\{ \sum_{k=k_f}^{\infty} (A_s^T)^{k-k_f} U_s^T U_s A_s^{k-k_f} \right\} [\underline{h}_s(k_f) - \underline{h}_s] \end{aligned}$$

Pero, definiendo a k_f como el primer paso de tiempo, se puede escribir el costo de la entrada de postactuación como:

$$\begin{aligned} J_{post} &= [\underline{h}_s(k_f) - \underline{h}_s]^T \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (A_s^T)^k U_s^T U_s A_s^k \right\} [\underline{h}_s(k_f) - \underline{h}_s] \\ J_{post} &= [\underline{h}_s(k_f) - \underline{h}_s]^T W_{post} [\underline{h}_s(k_f) - \underline{h}_s] \quad (70) \end{aligned}$$

Donde la matriz W_{post} se obtiene como una solución de la ecuación algebraica discreta de Lyapunov (Eq.54), ver [22].

Observación 4. El lema 2 y el lema 3 implican que el estado al inicio del intervalo de transición $x(k_i - r + 1)$ se escoge como la componente inestable de la dinámica interna $\underline{h}_u(k_i - r + 1)$. Similarmente, el estado al final del intervalo de transición $x(k_f)$ se escoge como la componente estable de la dinámica interna $\underline{h}_s(k_f)$. Adicionalmente, la escogencia particular de este sub-espacio no forzado

$\{h_u(k_i-r+1), h_s(k_f)\}$ define completamente las condiciones de los estados $\{x(k_i-r+1), x(k_f)\}$ al inicio y fin del intervalo de transición.

Definición 3. Las condiciones límites del intervalo de transición, y , se definen como el conjunto de estados límites que pueden ser variados mientras satisfagan las condiciones de la transición de salida (Ver observación 4) y se define como:

$$y = [h_s^T(k_f) \quad h_u(k_i-r+1)^T]^T \quad (71)$$

Observación 5. En la solución de la transición de estado estándar (Eq.7), las condiciones límites de la transición de salida se restringen a ser los estados de equilibrio, pero esta elección podría no ser la más óptima.

$$y = [h_s^T(k_f) \quad h_u(k_i-r+1)^T]^T = [\bar{h}_s^T \quad \bar{h}_u^T]^T$$

4.4 Entrada de actuación en el intervalo de transición ($k_i-r < k < k_f$).

Las condiciones límites de la transición de salida y , especifican la entrada de preactuación y postactuación (y el costo asociado), sin embargo ellas no especifican la entrada durante el intervalo de transición. La entrada necesaria durante el intervalo de transición de salida se puede encontrar de manera óptima empleando la solución al problema de transición de estado estándar SST (ver lema 1). El estado inicial y final del intervalo de transición se escogen como:

$$x(k_i-r+1) = T_{dc}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{e}^T & \bar{h}_s^T & h_u(k_i-r+1)^T & \bar{h}_c^T \end{bmatrix}^T \quad (72)$$

$$x(k_f) = T_{dc}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{e}^T & h_s(k_f)^T & \bar{h}_u^T & \bar{h}_c^T \end{bmatrix}^T \quad (73)$$

La energía mínima de entrada asociada a la función $J_{SST}(k_i-r+1, k_f, \Psi)$ durante el intervalo de transición de salida, se puede escribir en términos de las condiciones límites y como (Usando Eq.10):

$$J_{tran} = J_{SST}(k_i - r + 1, k_f, y) = \Delta_y^T G_{ki, kf}^{-1} \Delta_y \quad (74)$$

Donde:

$$G_{ki, kf} = \sum_{k=ki-r+1}^{kf-1} A^{kf-k-1} B B^T (A^T)^{kf-k-1}$$

Y la diferencia final de estado Δ_y se puede definir en términos de las condiciones límites y como:

$$\Delta_y = \Delta_x[k_i - r + 1, x(k_i - r + 1), k_f, x(k_f)]$$

$$\Delta_y = x(k_f) - A^{kf-ki+r-1} x(k_i - r + 1)$$

$$\Delta_y = \Phi \begin{bmatrix} \bar{e} \\ h_s(k_f) \\ \bar{n}_u \\ \bar{n}_c \end{bmatrix} - A^{kf-ki+r-1} \Phi \begin{bmatrix} \underline{e} \\ \underline{h}_s \\ h_u(k_i - r + 1) \\ \underline{h}_c \end{bmatrix}; \text{ Donde } F = T_{dc}^{-1}$$

$$\Delta_\Psi = [\Phi \bullet \quad \Phi n_s \quad \Phi n_u \quad \Phi n_c] \begin{bmatrix} \bar{e} \\ h_s(k_f) \\ \bar{n}_u \\ \bar{n}_c \end{bmatrix} - [G \bullet \mid G n_s \mid G n_u \mid G n_c] \begin{bmatrix} \underline{e} \\ \underline{h}_s \\ h_u(k_i - r + 1) \\ \underline{h}_c \end{bmatrix}$$

$$\Delta_y = H_1 f + H_2 y \quad (75)$$

Donde:

$$H_1 = [\Phi \bullet \mid \Phi n_u \mid \Phi n_c \mid -G \bullet \mid -G n_s \mid -G n_c]$$

$$H_2 = [\Phi n_s \mid -G n_u]$$

$$\hat{f} = [\bar{e}^T \quad \bar{n}_u^T \quad \bar{n}_c^T \quad \underline{e}^T \quad \underline{h}_s^T \quad \underline{h}_c^T]^T$$

$$[G \bullet \mid G n_s \mid G n_u \mid G n_c] = A^{kf-ki-r+1} T^{-1}$$

4.5 Transición de salida óptima OOT.

La energía de entrada necesaria para la transición de salida con unas condiciones límites específicas C (definición 3), se puede obtener sustituyendo el costo de la pretransición (Eq.32), el costo de la post-transición (Eq.52) y el costo de la transición (Eq.74), en el costo de la entrada (Eq.5) para lograr:

$$J_{OOT}(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [u(k)]^2 = J_{pre} + J_{tran} + J_{post} \quad (76)$$

Donde:

$$\begin{aligned} J_{pre} &= [h_u - h_{\underline{u}}]^T W_{pre} [h_u - h_{\underline{u}}] \\ J_{pre} &= (h_u^T - h_{\underline{u}}^T) W_{pre} (h_u - h_{\underline{u}}) \\ J_{pre} &= (h_u^T W_{pre} - h_{\underline{u}}^T W_{pre}) (h_u - h_{\underline{u}}) \\ J_{pre} &= h_u^T W_{pre} h_u - h_u^T W_{pre} h_{\underline{u}} - h_{\underline{u}}^T W_{pre} h_u + h_{\underline{u}}^T W_{pre} h_{\underline{u}} \\ J_{pre} &= h_u^T W_{pre} h_u - h_u^T W_{pre} h_{\underline{u}} - h_{\underline{u}}^T W_{pre} h_u + h_{\underline{u}}^T W_{pre} h_{\underline{u}} \\ J_{pre} &= h_u^T W_{pre} h_u - 2h_u^T W_{pre} h_{\underline{u}} + h_{\underline{u}}^T W_{pre} h_{\underline{u}} \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} J_{post} &= [h_s - h_{\underline{s}}]^T W_{post} [h_s - h_{\underline{s}}] \\ J_{post} &= (h_s^T - h_{\underline{s}}^T) W_{post} (h_s - h_{\underline{s}}) \\ J_{post} &= (h_s^T W_{post} - h_{\underline{s}}^T W_{post}) (h_s - h_{\underline{s}}) \\ J_{post} &= h_s^T W_{post} h_s - h_s^T W_{post} h_{\underline{s}} - h_{\underline{s}}^T W_{post} h_s + h_{\underline{s}}^T W_{post} h_{\underline{s}} \\ J_{post} &= h_s^T W_{post} h_s - h_s^T W_{post} h_{\underline{s}} - h_{\underline{s}}^T W_{post} h_s + h_{\underline{s}}^T W_{post} h_{\underline{s}} \\ J_{post} &= h_s^T W_{post} h_s - 2h_s^T W_{post} h_{\underline{s}} + h_{\underline{s}}^T W_{post} h_{\underline{s}} \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} J_{tran} &= (H_1 f + H_2 y)^T G_{ki,kf}^{-1} (H_1 f + H_2 y) \\ J_{tran} &= (f^T H_1^T + y^T H_2^T) G_{ki,kf}^{-1} (H_1 f + H_2 y) \\ J_{tran} &= (f^T H_1^T G_{ki,kf}^{-1} + y^T H_2^T G_{ki,kf}^{-1}) (H_1 f + H_2 y) \\ J_{tran} &= f^T H_1^T G_{ki,kf}^{-1} H_1 f + f^T H_1^T G_{ki,kf}^{-1} H_2 y + y^T H_2^T G_{ki,kf}^{-1} H_1 f + y^T H_2^T G_{ki,kf}^{-1} H_2 y \end{aligned}$$

$$J_{tran} = y^T H_2^T G_{ki,kf}^{-1} H_2 y + 2y^T H_2^T G_{ki,kf}^{-1} H_1 f + f^T H_1^T G_{ki,kf}^{-1} H_1 f \quad (79)$$

Entonces, si se sustituyen los resultados de las ecuaciones (Eq.77, Eq.78 y Eq.79) en la (Eq.76), el costo de la transición se puede expresar como:

$$\begin{aligned} J_{OOT}(y) &= y^T \begin{bmatrix} W_{post} & 0 \\ 0 & W_{pre} \end{bmatrix} y - 2y^T \begin{bmatrix} W_{post} \bar{h}_s \\ W_{pre} \underline{h}_{-u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{h}_s^T W_{post} \bar{h}_s \\ \underline{h}_{-u}^T W_{pre} \underline{h}_{-u} \end{bmatrix} + y^T H_2^T G_{ki,kf}^{-1} H_2 y \\ &\quad + 2y^T H_2^T G_{ki,kf}^{-1} H_1 f + f^T H_1^T G_{ki,kf}^{-1} H_1 f \\ J_{OOT}(y) &= y^T \left\{ \begin{bmatrix} W_{post} & 0 \\ 0 & W_{pre} \end{bmatrix} + H_2^T G_{ki,kf}^{-1} H_2 \right\} y - 2y^T \left\{ \begin{bmatrix} W_{post} \bar{h}_s \\ W_{pre} \underline{h}_{-u} \end{bmatrix} - H_2^T G_{ki,kf}^{-1} H_1 f \right\} \\ &\quad + \bar{h}_s^T W_{post} \bar{h}_s + \underline{h}_{-u}^T W_{pre} \underline{h}_{-u} + f^T H_1^T G_{ki,kf}^{-1} H_1 f \\ J_{OOT}(y) &= y^T b y - 2y^T b + c \end{aligned} \quad (80)$$

Donde:

$$\begin{aligned} b &= \begin{bmatrix} W_{post} & 0 \\ 0 & W_{pre} \end{bmatrix} + H_2^T G_{ki,kf}^{-1} H_2 \\ b &= \begin{bmatrix} W_{post} \bar{h}_s \\ W_{pre} \underline{h}_{-u} \end{bmatrix} - H_2^T G_{ki,kf}^{-1} H_1 f \\ c &= \bar{h}_s^T W_{post} \bar{h}_s + \underline{h}_{-u}^T W_{pre} \underline{h}_{-u} + f^T H_1^T G_{ki,kf}^{-1} H_1 f \end{aligned}$$

Note que la energía necesaria para la transición de salida (Eq.80) es cuadrática en términos de las condiciones límites y de la transición de salida. El valor óptimo para las condiciones límites y de la transición de salida se encuentra en el siguiente teorema, el cual resuelve el problema de transición de salida óptima (OOT).

Teorema 1. El problema de transición de salida óptima (Definición 2) siempre tiene una solución que se puede escribir como []:

I. Las condiciones límites óptimas y^* que minimizan el costo de la función (Eq.80) se dan por:

$$y^* = \begin{bmatrix} h_s^* \\ h_u^* \end{bmatrix} = \begin{cases} b^{-1}b & \text{si } b \text{ es invertible.} \\ b^\dagger b & \text{En otro caso.} \end{cases} \quad (81)$$

Donde $b^\dagger$ es la pseudo inversa generalizada de b [20].

II. La entrada de control para el problema de transición de salida óptima se expresa como:

$$u_{OOT}^*(k) = \begin{cases} u_{pre} & \text{si } k \leq k_i - r \\ u_{post} & \text{si } k \geq k_f \\ u_{tran} & \text{si } k_i - r < k < k_f \end{cases} \quad (82)$$

Donde:

$$u_{pre} = U_u A_u^{k-k_i+r-1} [h_u^* - \bar{h}_u]$$

$$u_{post} = U_s A_s^{k-k_f} [h_s^* - \bar{h}_s]$$

$$u_{tran} = B^T (A^T)^{k_f-k-1} G_{k_i, k_f}^{-1} [x^*(k_f) - A^{k_f-k_i-r+1} x^*(k_i - r + 1)]$$

Y los estados óptimos límites de la transición de salida son:

Estado inicial óptimo:

$$x^*(k_i - r + 1) = T_{dc}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{e} \\ \bar{h}_s^* \\ \bar{h}_u \\ \bar{h}_c \end{bmatrix} \quad (83)$$

Estado final óptimo:

$$x^*(k_f) = T_{dc}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{e} \\ \bar{h}_s^* \\ \bar{h}_u \\ \bar{h}_c \end{bmatrix} \quad (84)$$

III. El costo óptimo se determina al emplear la entrada óptima (Eq.82) que soluciona el problema de transición de salida óptima y se escribe como:

$$J_{OOT}^* = y^{*T} b y^* - 2y^{*T} b + c \quad (85)$$

Prueba: El valor óptimo para las condiciones límites y siguen las formas cuadráticas de minimización (ver teorema 1 en [15] y teorema 4.2.1 en [20]). La entrada óptima para la transición de salida sigue los lemas 1,2 y 3. El costo de la transición de salida (Eq.80) es cuadrático en términos de las condiciones límites y y el costo óptimo asociado a la (Eq.80) se obtiene al sustituir las condiciones límites óptimas y^* (Eq.81) en el costo de la transición de salida (Eq.80).

Observación 6. El costo óptimo para el problema de transición de salida (Eq.85) es siempre menor que el costo óptimo para el problema estándar de transición de estado (Eq.10). Esto se verificará en los resultados de simulación, que se obtendrán al aplicar las metodologías SST Y OOT en el posicionamiento de la cabeza lectora/escritora de un disco duro.

5. EJEMPLO DE UN SISTEMA FLEXIBLE: DISCO DURO.

Anteriormente el modelo linealizado de un disco duro (ampliamente aceptado por la comunidad científica) se ha empleado como ejemplo para representar sistemas con estructuras flexibles [4]. Por este motivo, para validar los resultados se realizó un programa Matlab que simula el posicionamiento de la cabeza lectora/escritora de un disco duro de una pista (valor inicial $\underline{y}=0$) a otra pista (valor final $\bar{y}=1$) durante un periodo de tiempo preestablecido (5ms), usando la mínima cantidad de energía de control. Para realizar dicho posicionamiento, se aplicó la metodología estándar de transición de estado SST (ver capítulo 3) y la metodología óptima de transición de salida OOT (ver capítulo 4) al modelo discreto del disco duro. Los cálculos se muestran paso a paso de acuerdo con cada una de las metodologías y las entradas, salidas y costo de energía se comparan.

5.1 Descripción del Sistema.

La metodología desarrollada se aplica al modelo presentado por Franklin y Powell en el capítulo 14 de la referencia [21]. El modelo representa el actuador y la estructura en la que se monta la cabeza lectora del disco duro, (en la literatura en inglés la cabeza y su estructura en que se monta se conoce con la sigla HDA Head Disk Assembly). El modelo tiene en cuenta la flexibilidad del actuador y su estructura. Teóricamente toda estructura tiene infinitos modos flexibles o frecuencias de resonancia. Hay resonancia en las frecuencias donde existe un par de polos complejos conjugados con coeficiente de amortiguamiento $\bullet$ menor a 0.707 ($\bullet < 0.707$) (Vea respuesta en frecuencia o diagramas de Bode en cualquier libro de control). Sin embargo, sólo se tienen en cuenta pocos modos flexibles porque la mayoría de las frecuencias de resonancia ocurren a alta frecuencia y a medida que se aumenta la frecuencia, la magnitud de la respuesta disminuye. Esto se debe a que los sistemas reales son estrictamente propios, es decir, tienen mayor número de polos que de

ceros. Para el modelado de sistemas mecánicos, cada modo flexible es un sistema de segundo orden en donde un amortiguador y un resorte en paralelo están entre dos masas o entre una masa y un punto rígido. El modelo del actuador y el HDA que se utiliza para posicionar el punto final de una cabeza lectora/escritora de un disco duro tiene en cuenta un modo rígido y cuatro modos flexibles, a las frecuencias de 70Hz, 2200Hz, 4000Hz y 9000Hz (vea [21] página 660). La frecuencia de resonancia $\omega_1 = (70 \text{ Hz}) \cdot 2\pi$ es debido a la interacción entre el HDA y los aisladores de vibraciones que se montan entre la estructura magnética y la base que soporta el eje donde se montan los platos del disco (el eje se conoce con el nombre de Spindle). La estructura magnética forma parte del actuador que por lo general es lineal y se conoce con el nombre de VCM (Voice Coil Motor). La frecuencia $\omega_2 = (2200 \text{ Hz}) \cdot 2\pi$ tiene en cuenta la flexibilidad debido a la suspensión de la cabeza lectora/escritora. La cabeza no toca los platos del disco duro sino que los recorre estando suspendida a una distancia muy pequeña de ellos. La frecuencia $\omega_3 = (4000 \text{ Hz}) \cdot 2\pi$ tiene en cuenta la flexibilidad del brazo que transporta la acción del actuador y $\omega_4 = (9000 \text{ Hz}) \cdot 2\pi$ tiene en cuenta la estructura en que se monta la bobina del VCM. Los parámetros de la planta de este sistema son dados por [21]:

Parámetro	Descripción	Valor	Unidad	Tolerancia
m	Masa del actuador.	0.2	kgramos	$\pm 3\%$
K_t	Constante de fuerza.	20	N-amp ⁻¹	$\pm 10\%$
K_y	Ganancia de posición.	10000	voltios-M ⁻¹	$\pm 5\%$
k_{fric}	Coeficiente de fricción.	2.51	N-seg-M ⁻¹	$\pm 7.5\%$
ω_1	Resonancia del aislamiento VCM.	$2\pi 70$	rad-seg ⁻¹	$\pm 5\%$
ω_2	Resonancia de la Suspensión de la cabeza.	$2\pi 2200$	rad-seg ⁻¹	$\pm 10\%$
ω_3	Resonancia del brazo actuador.	$2\pi 4000$	rad-seg ⁻¹	$\pm 5\%$

ω_4	Resonancia de la estructura de la bobina.	$2\pi 9000$	$\text{rad}\cdot\text{seg}^{-1}$	$\pm 5\%$
b_1	Primer acoplador de resonancia	$-5.75\text{e}-2$	-	$\pm 7\%$
b_2	Primer acoplador de resonancia	$1.15\text{e}-5$	seg^{-1}	$\pm 7\%$
b_3	Segundo acoplador de resonancia	$2.3\text{e}-2$	-	$\pm 10\%$
b_4	Segundo acoplador de resonancia	0	seg^{-1}	$\pm 7\%$
b_5	Tercer acoplador de resonancia	0.8185	-	$\pm 5\%$
b_6	Tercer acoplador de resonancia	0	seg^{-1}	$\pm 10\%$
b_7	Cuarto acoplador de resonancia	0.1642	-	$\pm 5\%$
b_8	Cuarto acoplador de resonancia	$2,73\text{e}-2$	seg^{-1}	$\pm 10\%$
ζ_1	Primera resonancia de amortiguamiento.	0.05	-	$\pm 10\%$
ζ_2	Segunda resonancia de amortiguamiento.	$5\text{e}-3$	-	$\pm 40\%$
ζ_3	Tercera resonancia de amortiguamiento.	0.05	-	$\pm 40\%$
ζ_4	Cuarta resonancia de amortiguamiento.	$5\text{e}-3$	-	$\pm 50\%$

Tabla 1. Parámetros de la planta y tolerancias para el diseño del modelo del Disco Duro.

5.2 Modelo en espacio-estado.

El modelo lineal del sistema en ecuaciones de espacio-estado se definió de la siguiente manera:

Ecuaciones de espacio-estado en tiempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y &= Hx(t)\end{aligned}\tag{86}$$

Donde:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & k_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{fric}/m & k_v b_1 & k_v b_2 & k_v b_3 & k_v b_4 & k_v b_5 & k_v b_6 & k_v b_7 & k_v b_8 \\ 0 & 0 & 0 & w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -w_1 & -2V_1 w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -w_2 & -2V_2 w_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -w_3 & -2V_3 w_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_4 \\ & & & & & & & & -w_4 & -2V_4 w_4 \end{bmatrix}$$

$$G = [0 \ 0 \ 0 \ w_1 \ 0 \ w_2 \ 0 \ w_3 \ 0 \ w_4]^T$$

$$H = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Y $k_v = k_t / m$ es un factor de normalización tal que la máxima aceleración de la planta es $k_v i_c$.

Ecuaciones de espacio-estado en tiempo discreto: El modelo de tiempo discreto equivalente usando un retenedor de orden cero, con un periodo de muestreo de 66μs se expresa como:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y &= Cx(k)\end{aligned}\tag{87}$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.6597 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0014 & 0.0008 & 0.001 & 0.0002 \\ 0 & 0.9992 & 0 & 0 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0033 & 0.0034 & -0.0002 & 0.0005 \\ 0 & 0 & 0.9996 & 0.029 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0290 & 0.9967 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6131 & 0.7873 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7873 & 0.6052 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0330 & 0.9182 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9182 & -0.1249 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8180 & -0.5465 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5465 & -0.8125 \end{bmatrix}$$

$$B = [0.0007 \quad 0.0034 \quad 0.0004 \quad 0.0290 \quad 0.3869 \quad 0.7873 \quad 1.033 \quad 0.9182 \quad 1.818 \quad -0.5465]^T$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

A partir del modelo de espacio-estado en tiempo discreto (Eq.87) se obtuvo la planta del sistema, en donde los ceros discretos, polos discretos y ganancia discreta se obtienen como:

$$Ceros = \begin{bmatrix} -4.9385 \\ -1.0435 \\ -0.7033 + 0.6552i \\ -0.7033 - 0.6552i \\ 0.6028 + 0.7916i \\ 0.6028 - 0.7916i \\ -0.1595 \\ 0.9981 + 0.0289i \\ 0.9981 - 0.0289i \end{bmatrix}\tag{88}$$

$$Polos = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.9992 \\ 0.9981 + 0.0289i \\ 0.9981 - 0.0289i \\ 0.6091 + 0.7873i \\ 0.6091 - 0.7873i \\ -0.079 + 0.917i \\ -0.079 - 0.917i \\ 0.8153 + 0.5465i \\ 0.8153 + 0.5465i \end{bmatrix} \quad (89)$$

$$Ganancia = 6.632e - 4$$

A partir de (Eq.88 y Eq.89) se deduce que el sistema en tiempo discreto del disco duro es de grado relativo uno ($r=1$) y además es de fase no mínima.

5.3 Comparación de los resultados al emplear los métodos SST y OOT en el posicionamiento de la cabeza lectora/escritora.

El objetivo es realizar el posicionamiento de la cabeza lectora/escritora de un disco duro desde una pista inicial (valor inicial $\underline{y}=0$) a una pista final (valor final $\bar{y}=1$) durante un periodo de tiempo preestablecido (5ms), usando la mínima cantidad de energía de control.

Parámetros de Control.

Los parámetros de control que se deben tener en cuenta para la simulación de la solución de los problemas SST y OOT se dan a continuación:

- Estado de equilibrio inicial: $\underline{x} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. En este punto todos los estados son cero.

- Estado de equilibrio final: $\bar{x} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. En este punto el único estado que cambia es el primer estado ya que representa la posición de la cabeza lectora/escritora.
- El tiempo de los intervalos de pretransición, transición y post-transición se definen de 5ms cada uno.
- El paso de tiempo inicial del intervalo de transición es de $k_i=77$ (para $t_i=5\text{ms}$) y el paso de tiempo final del intervalo de transición es de $k_f=152$ (para $t_f=10\text{ms}$).

5.3.1 Solución al problema de transición de estado estándar (SST).

La entrada de control para el método estándar de transición de estado se define como:

$$u_{sst}(k) = \begin{cases} B^T (A^T)^{k_f-k-1} G_{k_i, k_f}^{-1} [\bar{x} - \underline{x}], & k_i \leq k \leq k_f \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (88)$$

Donde:

$$B^T = [0.0007 \ 0.0034 \ 0.0004 \ 0.0290 \ 0.3869 \ 0.7873 \ 1.0330 \ 0.9182 \ 1.8180 \ -0.5465]$$

$$(A^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6597 & 0.9992 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.996 & -0.029 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.029 & 0.9967 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0.6131 & -0.7873 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0.7873 & 0.6052 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0014 & 0.0033 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.033 & -0.9182 & 0 & 0 \\ 0.0008 & 0.0034 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9182 & -0.1249 & 0 & 0 \\ 0.0001 & -0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.818 & 0.5465 \\ 0.0002 & 0.0005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5465 & -0.8125 \end{bmatrix}$$

$$G_{ki,kf} = \begin{bmatrix} 2.5612 & 0.0763 & 0.2820 & 0.0214 & -0.1776 & -0.1476 & -0.0084 & -0.0021 & 0.0723 & -0.0245 \\ 0.0763 & 0.0032 & 0.0094 & 0.0049 & 0.0049 & -0.0068 & 0.0034 & -0.0212 & 0.0026 & -0.0136 \\ 0.2820 & 0.0094 & 0.0335 & 0.0079 & -0.0115 & -0.0108 & 0 & -0.0004 & 0.005 & -0.0015 \\ 0.0214 & 0.0049 & 0.0079 & 0.0225 & 0.038 & 0.007 & 0.029 & 0.0001 & 0.0253 & 0.0012 \\ -0.1776 & 0.0049 & -0.0115 & 0.0380 & 212 & 0.1169 & 0.1001 & -0.5463 & -0.0945 & 0.2033 \\ -0.1476 & -0.0068 & -0.0108 & 0.007 & 0.1169 & 209566 & 1.2197 & 0.058 & 1.1389 & -0.0296 \\ -0.0084 & 0.0034 & 0 & 0.029 & 0.1001 & 1.2197 & 6.5662 & 0.217 & 0.1589 & 0.7983 \\ -0.0021 & -0.0212 & -0.0004 & 0.0001 & -0.5463 & 0.058 & 0.217 & 6.53 & 2.4263 & -0.1694 \\ 0.0723 & 0.0026 & 0.005 & 0.0253 & -0.0945 & 1.1389 & 0.1589 & 2.4263 & 46193 & -1.7887 \\ -0.0245 & -0.0136 & -0.0015 & 0.0012 & 0.2033 & -0.0296 & 0.7983 & -0.1694 & -1.7887 & 459564 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad \underline{x} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Como ilustración en la Figura 2. se presenta la entrada de control estándar (que transfiere la cabeza del disco duro desde el estado de equilibrio inicial hasta el estado de equilibrio final en un periodo de tiempo de 5ms) y su salida.

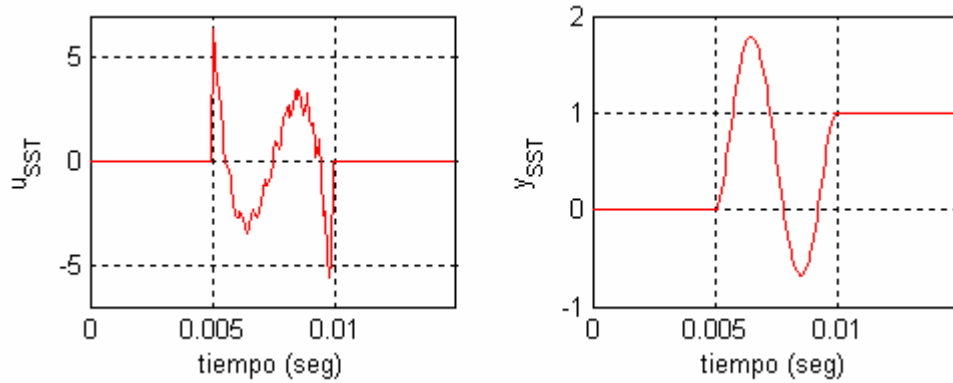


Figura 2. Entrada de control y salida en el método SST. La entrada de control del método SST se aplicó al sistema exactamente en el intervalo de transición (5ms), es decir esta entrada es cero fuera de este intervalo. La salida presenta vibraciones durante el intervalo de transición, por lo tanto, el cambio de posición de la cabeza lectora /escritora del disco duro se realiza de una manera brusca.

El costo asociado a la transición de estado según la (Eq.10) y la sub-sección

(3.1) se expresa como:

$$J_{SST} = [\bar{x} - A^{kf-ki} \underline{x}]^T G_{ki,kf}^{-1} [\bar{x} - A^{kf-ki} \underline{x}] \quad (89)$$

$$J_{SST} = 520.25$$

Donde:

$$\underline{x} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad \underline{x} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.6597 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0014 & 0.0008 & 0.001 & 0.0002 \\ 0 & 0.9992 & 0 & 0 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0033 & 0.0034 & -0.0002 & 0.0005 \\ 0 & 0 & 0.9996 & 0.029 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0290 & 0.9967 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6131 & 0.7873 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7873 & 0.6052 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0330 & 0.9182 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9182 & -0.1249 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8180 & -0.5465 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5465 & -0.8125 \end{bmatrix}$$

$$G_{ki,kf} = \begin{bmatrix} 2.5612 & 0.0763 & 0.2820 & 0.0214 & -0.1776 & -0.1476 & -0.0084 & -0.0021 & 0.0723 & -0.0245 \\ 0.0763 & 0.0032 & 0.0094 & 0.0049 & 0.0049 & -0.0068 & 0.0034 & -0.0212 & 0.0026 & -0.0136 \\ 0.2820 & 0.0094 & 0.0335 & 0.0079 & -0.0115 & -0.0108 & 0 & -0.0004 & 0.005 & -0.0015 \\ 0.0214 & 0.0049 & 0.0079 & 0.0225 & 0.038 & 0.007 & 0.029 & 0.0001 & 0.0253 & 0.0012 \\ -0.1776 & 0.0049 & -0.0115 & 0.0380 & 212 & 0.1169 & 0.1001 & -0.5463 & -0.0945 & 0.2033 \\ -0.1476 & -0.0068 & -0.0108 & 0.007 & 0.1169 & 209566 & 1.2197 & 0.058 & 1.1389 & -0.0296 \\ -0.0084 & 0.0034 & 0 & 0.029 & 0.1001 & 1.2197 & 6.5662 & 0.217 & 0.1589 & 0.7983 \\ -0.0021 & -0.0212 & -0.0004 & 0.0001 & -0.5463 & 0.058 & 0.217 & 6.53 & 2.4263 & -0.1694 \\ 0.0723 & 0.0026 & 0.005 & 0.0253 & -0.0945 & 1.1389 & 0.1589 & 2.4263 & 46193 & -1.7887 \\ -0.0245 & -0.0136 & -0.0015 & 0.0012 & 0.2033 & -0.0296 & 0.7983 & -0.1694 & -1.7887 & 459564 \end{bmatrix}$$

Para comprender que sucede con el costo de energía al variar el intervalo de transición, en la Tabla 2. se tabulan diferentes tiempos para el intervalo de transición y su energía correspondiente.

	MÉTODO ESTÁNDAR SST						
TIEMPO	2ms	3ms	4ms	5ms	6ms	7ms	8ms
ENERGÍA	470556	23533	2585	520.25	137.7	43.99	16.15

Tabla 2. Costo de la energía al variar el intervalo de transición cuando se aplica el método SST al Disco Duro.

A partir de la Tabla 2. se puede obtener la Figura 3. que resulta de graficar la energía vrs. duración del intervalo de transición.

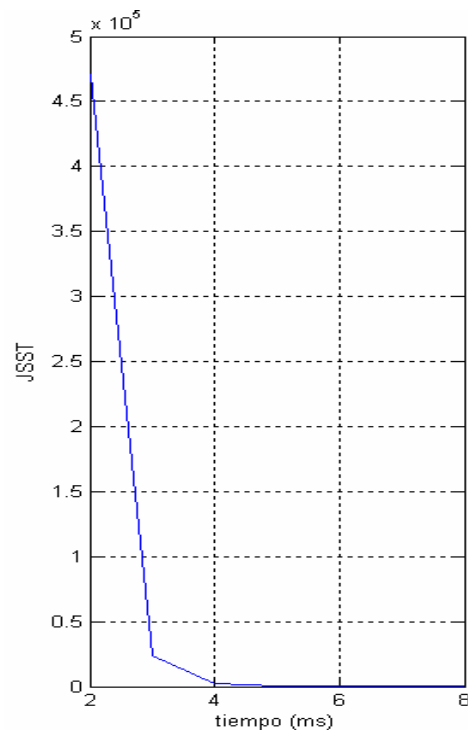


Figura 3. Energía Vrs. Duración del intervalo de transición en el método SST. Esta figura muestra que la energía de entrada se incrementa cuando el intervalo de tiempo de transición disminuye, en otras palabras la energía y la duración del intervalo de transición son inversamente proporcionales entre sí. Esto es muy importante para nuestra aplicación, ya que el tiempo en que se posiciona la cabeza del disco duro de una pista a otra pista es muy corto.

5.3.2 Solución al problema de transición de salida óptima OOT.

Forma de seguimiento de salida y dinámica interna. Se inicia llevando el sistema de la (Eq.1) a la forma de seguimiento de salida (Eq.20) en donde se desacoplan los estados externos e internos. La matriz de transformación T se escoge como se encuentra en la (Eq.13) y T_n se escoge como una matriz diagonal para garantizar independencia lineal. Entonces, esta matriz llamada T_z se expresa como:

$$T_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.66 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0014 & 0.0008 & 0.0001 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y el sistema en forma de seguimiento se expresa como:

$$\begin{aligned} z(k+1) &= \begin{bmatrix} e(k+1) \\ h(k+1) \end{bmatrix} = A_z \begin{bmatrix} e(k) \\ h(k) \end{bmatrix} + B_z y_d(k+r) \\ y_z(k) &= C_z \begin{bmatrix} e(k) \\ h(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (90)$$

Donde:

$$A_z = TAT^{-1} - \frac{TBCA^r T^{-1}}{CA^{r-1}B}$$

$$B_z = \frac{TB}{CA^{r-1}B}$$

$$C_z = CT^{-1}$$

$$A_z = 1e3^* \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.001 & -0.0058 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0006 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0437 & 0 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5834 & 0 & 0 & 0.0006 & 0.0008 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1872 & 0 & 0 & -0.0008 & 0.0006 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5577 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0009 & 0 & 0 \\ 0 & -1.3844 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0009 & -0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & -2.7413 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0008 & -0.0005 \\ 0 & 0.8241 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0005 & -0.0008 \end{bmatrix}$$

$$B_z = 1e3^* \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.0078 \\ 0.0006 \\ 0.0437 \\ 0.5834 \\ 1.1872 \\ 1.5577 \\ 1.3844 \\ 2.7413 \\ -0.8241 \end{bmatrix}$$

$$C_z = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Luego, se encuentra el sistema de espacio-estado de los estados internos desacoplados de acuerdo con la (Eq.24) a partir de las dimensiones de las matrices $A_n [(n-r) \times (n-r)]$, $B_n [(n-r) \times 1]$ y $C_n [1 \times (n-r)]$ y de la (Eq.90) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h(k+1) &= A_n h(k) + B_n \mathfrak{R}(k) \\ y_n &= C_n h(k) \end{aligned} \tag{91}$$

Donde:

$$A_n = 1e3 \begin{bmatrix} -0.0058 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0006 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0437 & 0 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5834 & 0 & 0 & 0.0006 & 0.0008 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.1872 & 0 & 0 & -0.0008 & 0.0006 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.5577 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0009 & 0 & 0 \\ -1.3844 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0009 & -0.0001 & 0 & 0 \\ -2.7413 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0008 & -0.0005 \\ 0.8241 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0005 & -0.0008 \end{bmatrix}$$

$$B_n = 1e3 \begin{bmatrix} -0.001 & 0.0078 \\ 0 & 0.0006 \\ 0 & 0.0437 \\ 0 & 0.5834 \\ 0 & 1.1872 \\ 0 & 1.5577 \\ 0 & 1.3844 \\ 0 & 2.7413 \\ 0 & -0.8241 \end{bmatrix}$$

$$C_n = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Pero, el sistema de estados internos (Eq.91) también se puede desacoplar en estados internos estables y estados internos inestables (no hay estados internos marginalmente estables) aplicando la matriz de transformación T_n . Esta matriz T_n que desacopla los estados internos en estados estables, inestables y marginalmente estables se denomina T_{canon} . Al aplicar la matriz T_{canon} al sistema de la (Eq.91) se pueden obtener los eigenvalores de la matriz A_n en su diagonal principal y en forma ordenada (ver Eq.25). La matriz T_{canon} se escoge como:

$$T_{\text{canon}} = 1e3^* \begin{bmatrix} 0.8641 & 0 & 0 & -0.0001 & 0 & -0.0024 & -0.0004 & -0.0002 & 0 \\ 0.0202 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0025 & -0.0001 & 0.0011 & 0 \\ 1.6341 & 0 & 0 & -0.0001 & 0 & -0.0023 & -0.0035 & -0.0002 & -0.0009 \\ -0.2321 & 0 & 0 & 0 & 0.0014 & 0.0003 & -0.0005 & 0 & 0 \\ 0.0156 & 0 & 0 & -0.0014 & 0 & 0.0004 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0094 & -0.0001 & -0.0014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0433 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0.0005 & 0 & 0 \\ -1.7084 & 0 & 0 & 0.001 & 0 & 0.0023 & 0.0026 & 0.0002 & -0.0005 \end{bmatrix}$$

Entonces, si se aplica la matriz T_{canon} al sistema de la (Eq.91) se obtiene:

$$h(k+1) = \begin{bmatrix} h_s(k+1) \\ h_u(k+1) \\ h_c(k+1) \end{bmatrix} = A_{\text{can}} \begin{bmatrix} h_s(k) \\ h_u(k) \\ h_c(k) \end{bmatrix} + B_{\text{can}} \mathfrak{X}(k) \quad (92)$$

$$y_{ns,nu,nc} = C_{\text{can}} \begin{bmatrix} h_s(k) \\ h_u(k) \\ h_c(k) \end{bmatrix}$$

Donde:

$$A_{\text{can}} = \begin{bmatrix} -0.1595 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7033 & 0.6552 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6552 & -0.7033 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6028 & 0.7916 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.7916 & 0.6028 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9981 & 0.0289 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0289 & -0.1595 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.9385 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0435 \end{bmatrix}$$

$$B_{can} = 1e3 * \begin{bmatrix} -0.8633 & 1.8652 \\ -0.0202 & -1.016 \\ -1.6327 & 4.4293 \\ 0.2319 & -0.3364 \\ -0.0156 & -0.1620 \\ 0 & -0.0003 \\ -0.0094 & 0.0094 \\ 1.0424 & -7.2379 \\ 1.707 & -5.1982 \end{bmatrix}$$

$$C_{can} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Ahora, para expresar la entrada inversa de control (Eq.27) en función de los estados externos desacoplados, estados internos (estables, inestables, marginalmente estables) desacoplados y la secuencia de salida conocida como $\mathfrak{R}(k)$ (Eq.30), primero se debe encontrar la matriz de transformación de desacople T_{dc} según (Eq.26):

$$T_{dc} = 1e3 * \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8641 & 0.57 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0012 & 0.0003 & -0.0001 & 0.0002 \\ 0.0202 & 0.0134 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0024 & -0.0001 & 0.0011 & 0 \\ 1.6341 & 1.078 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0021 & -0.0001 & -0.0005 \\ -0.2321 & -0.1531 & 0 & 0 & 0 & 0.0014 & -0.0001 & -0.0007 & 0 & 0 \\ 0.0156 & 0.0103 & 0 & 0 & -0.0014 & 0 & 0.0004 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0094 & 0.0062 & -0.0001 & -0.0014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0433 & -0.6883 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0014 & -0.0003 & -0.0001 & -0.0003 \\ -1.7084 & -1.1271 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0002 & 0.0011 & 0.0001 & -0.0009 \end{bmatrix}$$

Y la entrada de control inversa según (Eq.30) se encontró como:

$$u_{inv}(k) = U_s h_s(k) + U_u h_u(k) + U_y \mathfrak{R}(k) \quad (93)$$

Donde:

$$U_s = [-0.3527 \quad 0.0541 \quad 0.0996 \quad -0.0061 \quad 0.0107 \quad -0.004 \quad 0]$$

$$U_u = [1.7923 \quad -0.2935]$$

$$U_y = [0 \quad 1.5078e3]$$

Costo de la transición de salida óptima: se resuelven las ecuaciones discretas de Lyapunov (Eq.34) y (Eq.54). Entonces, las matrices de preactuación W_{pre} y la matriz de postactuación W_{post} están dadas por:

$$W_{pre} = \begin{bmatrix} 0.1373 & -0.1266 \\ -0.1266 & 0.9683 \end{bmatrix}$$

$$W_{post} = \begin{bmatrix} 0.1276 & -0.0258 & -0.0365 & 0.0015 & -0.0036 & 0.0012 & 0 \\ -0.0258 & 0.0854 & 0.0048 & 0.0002 & 0.0001 & 0 & 0 \\ -0.0365 & 0.0048 & 0.0835 & -0.0001 & 0.0009 & -0.0002 & 0 \\ 0.0015 & 0.002 & -0.0001 & 0.0076 & 0 & 0.0001 & 0 \\ -0.0036 & 0.0001 & 0.0009 & 0 & 0.0076 & 0 & 0 \\ 0.0012 & 0 & -0.0002 & 0.0001 & 0 & 0.0028 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0.0028 \end{bmatrix}$$

Luego, se encuentran los estados de equilibrio límites del intervalo de transición en forma desacoplada de la siguiente manera:

$$x(ki) = T_{dc} \underline{x}; \text{ donde } T_{dc} \text{ se define en (Eq.26)}$$

$$x(ki) = T_{dc} [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$x(ki) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (94)$$

$$x(kf) = T_{dc} \bar{x}$$

$$x(kf) = T_{dc} [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$x(kf) = 1e3 * [0.001 \ 0.8641 \ 0.0202 \ 1.6341 \ -0.2321 \ 0.0156 \ 0 \ 0.0094 \ -1.0433 \ -1.7084]^T \quad (95)$$

A partir de la (Eq.80) y del Teorema 1, los estados que se optimizan son los estados límites del intervalo de transición de salida y^* (ver Eq.81):

$$y^* = \begin{bmatrix} h_s^* \\ L \\ h_u^* \end{bmatrix} = b^{-1}b = 1e3 * \begin{bmatrix} 0.8646 \\ 0.0204 \\ 1.6341 \\ -0.2321 \\ 0.016 \\ -0.0001 \\ 0.0096 \\ L \\ -0.0005 \\ -0.00003864 \end{bmatrix} \quad (96)$$

Los estados de la (Eq.96), son los estados internos estables que se optimizan al finalizar el intervalo de transición y los estados internos inestables que se optimizan al iniciar el intervalo de transición. Entonces, si se introducen los estados de la (Eq.96) dentro de los estados de la (Eq.94 y Eq.95) se pueden obtener los estados óptimos al inicio y fin del intervalo de transición así:

$$x^*(ki) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -0.5 \ 0.03864]^T$$

$$x^*(kf) = 1e3 * [0.001 \ 0.8646 \ 0.0204 \ 1.6341 \ -0.2321 \ 0.016 \ -0.0001 \ 0.0096 \ -1.0433 \ -1.7084]^T$$

Con la (Eq.82, Eq.92 y Eq.93) se puede encontrar la entrada inversa de control para la transición de salida óptima así:

$$u_{OOT}^*(k) = \begin{cases} u_{pre} & \text{si } k \leq 76 \\ u_{post} & \text{si } k \geq 152 \\ u_{tran} & \text{si } 76 < k < 152 \end{cases} \quad (97)$$

Donde:

$$u_{pre} = U_u A_u^{k-ki+r-1} [\mathbf{h}_u^* - \mathbf{h}_{-u}]$$

$$u_{pre} = \begin{bmatrix} 1.7923 & -0.2935 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.9385^{k-77} & 0 \\ 0 & -1.0435^{k-77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 - 0 \\ 0.03864 - 0 \end{bmatrix}$$

$$u_{pre} = \begin{bmatrix} -8.85^{k-77} & 0.3^{k-77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.03864 \end{bmatrix}$$

$$u_{pre} = 4.425^{k-77} + 0.0116^{k-77}$$

$$u_{post} = U_s A_s^{k-kf} [\mathbf{h}_s^* - \mathbf{h}_s]$$

$$u_{post} = \begin{bmatrix} -0.3527 \\ 0.0541 \\ 0.0996 \\ -0.0061 \\ 0.0107 \\ -0.004 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -0.1595 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7033 & 0.6552 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6552 & -0.7033 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6028 & 0.7916 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.7916 & 0.6028 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9981 & 0.0289 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0289 & 0.9981 \end{bmatrix}^{k-152} \begin{bmatrix} 0.4988 \\ 0.1517 \\ 0.0638 \\ -0.0483 \\ 0.4536 \\ -0.1043 \\ 0.2021 \end{bmatrix}$$

$$u_{tran} = B^T (A^T)^{kf-k-1} G_{ki,kf}^{-1} [x^*(k_f) - A^{kf-ki-r+1} x^*(k_i - r + 1)]$$

$$u_{tran} = B^T (A^T)^{151-k} G_{ki,kf}^{-1} [x^*(k_f) - A^{75} x^*(k_i)]; \text{ ya que } r=1.$$

En la cual:

$$B^T = [0.0007 \quad 0.0034 \quad 0.0004 \quad 0.0290 \quad 0.3869 \quad 0.7873 \quad 1.0330 \quad 0.9182 \quad 1.8180 \quad -0.5465]$$

$$(A^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6597 & 0.9992 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.996 & -0.029 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.029 & 0.9967 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0.6131 & -0.7873 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0.7873 & 0.6052 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0014 & 0.0033 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.033 & -0.9182 & 0 & 0 \\ 0.0008 & 0.0034 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9182 & -0.1249 & 0 & 0 \\ 0.0001 & -0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.818 & 0.5465 \\ 0.0002 & 0.0005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5465 & -0.8125 \end{bmatrix}$$

$$x^*(ki) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -0.5 \quad 0.03864]^T$$

$$x^*(kf) = 1e3 * [0.001 \quad 0.8646 \quad 0.0204 \quad 1.6341 \quad -0.2321 \quad 0.016 \quad -0.0001 \quad 0.0096 \quad -1.0433 \quad -1.7084]^T$$

$$G_{ki,kf} = \begin{bmatrix} 2.5612 & 0.0763 & 0.2820 & 0.0214 & -0.1776 & -0.1476 & -0.0084 & -0.0021 & 0.0723 & -0.0245 \\ 0.0763 & 0.0032 & 0.0094 & 0.0049 & 0.0049 & -0.0068 & 0.0034 & -0.0212 & 0.0026 & -0.0136 \\ 0.2820 & 0.0094 & 0.0335 & 0.0079 & -0.0115 & -0.0108 & 0 & -0.0004 & 0.005 & -0.0015 \\ 0.0214 & 0.0049 & 0.0079 & 0.0225 & 0.038 & 0.007 & 0.029 & 0.0001 & 0.0253 & 0.0012 \\ -0.1776 & 0.0049 & -0.0115 & 0.0380 & 212 & 0.1169 & 0.1001 & -0.5463 & -0.0945 & 0.2033 \\ -0.1476 & -0.0068 & -0.0108 & 0.007 & 0.1169 & 209566 & 1.2197 & 0.058 & 1.1389 & -0.0296 \\ -0.0084 & 0.0034 & 0 & 0.029 & 0.1001 & 1.2197 & 6.5662 & 0.217 & 0.1589 & 0.7983 \\ -0.0021 & -0.0212 & -0.0004 & 0.0001 & -0.5463 & 0.058 & 0.217 & 6.53 & 2.4263 & -0.1694 \\ 0.0723 & 0.0026 & 0.005 & 0.0253 & -0.0945 & 1.1389 & 0.1589 & 2.4263 & 46193 & -1.7887 \\ -0.0245 & -0.0136 & -0.0015 & 0.0012 & 0.2033 & -0.0296 & 0.7983 & -0.1694 & -1.7887 & 459564 \end{bmatrix}$$

Como ilustración en la Figura 4. se presenta la entrada de control óptima (que transfiere la cabeza del disco duro desde el estado inicial óptimo hasta el estado final óptimo en un periodo de tiempo de 5ms) y su salida.

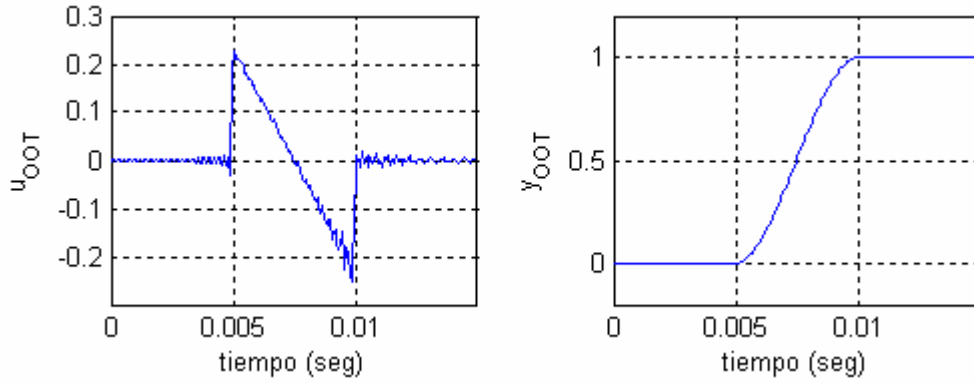


Figura 4. Entrada de control y salida en el método OOT. La entrada de control se aplicó al sistema antes del intervalo de transición (entrada de preactuación) para llevarlo del estado de equilibrio inicial al estado inicial óptimo, luego se aplicó durante el intervalo de transición (entrada de actuación) para llevarlo del estado inicial óptimo al estado final óptimo, y por último, se aplicó después del intervalo de transición (entrada de postactuación) para llevarlo del estado final óptimo al estado de equilibrio final. La salida es continua durante el intervalo de transición, por lo tanto, el cambio de posición de la cabeza lectora /escritora se realiza de una manera suave.

El costo asociado a la transición de salida óptima según la (Eq.85) se expresa como:

$$J_{OOT}^* = y^{*T} b y^* - 2y^{*T} b + c \quad (98)$$

Donde:

$$y^* = \begin{bmatrix} h_s^* \\ L \\ h_u^* \end{bmatrix} = b^{-1}b = 1e3^* \begin{bmatrix} 0.8646 \\ 0.0204 \\ 1.6341 \\ -0.2321 \\ 0.016 \\ -0.0001 \\ 0.0096 \\ L \\ -0.0005 \\ -0.00003864 \end{bmatrix}$$

$$b = 1e3 * \begin{bmatrix} 0.0002 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 & -0.0032 & 0.0117 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0002 & 0 & 0 \\ -0.0001 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0.0005 & -0.0019 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0006 & 0.0015 & 0 & 0 \\ -0.0032 & 0 & 0.0005 & 0.0001 & -0.0006 & 1.3574 & -3.5950 & 0.0052 & -0.0023 \\ 0.0117 & -0.0002 & -0.0019 & 0.002 & 0.0015 & -3.595 & 8.3398 & -0.0079 & 0.0036 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0052 & -0.0079 & 0.0002 & -0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0023 & 0.0036 & -0.0001 & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$b = 1e4 * \begin{bmatrix} 0.0226 \\ -0.0025 \\ 0.0096 \\ 0.0002 \\ 0.0016 \\ -3.6685 \\ 8.7418 \\ -0.0081 \\ 0.0043 \end{bmatrix}$$

$$c = [1.1931e6]$$

Entonces, el costo óptimo de energía fue de:

$$J_{OOT}^* = 1.4 \quad (99)$$

Para comprender que sucede con el costo de energía al variar el intervalo de transición, en la Tabla 3. se tabulan diferentes tiempos para el intervalo de transición y su energía correspondiente.

	METODO ÓPTIMO OOT						
TIEMPO	2ms	3ms	4ms	5ms	6ms	7ms	8ms
ENERGÍA	22.5	6.732	2.72	1.4	0.82	0.519	0.35

Tabla 3. Costo de la energía al variar el intervalo de transición cuando se aplica el método OOT al Disco Duro.

A partir de la Tabla 3. se puede obtener la Figura 5. que resulta de graficar la energía vrs. duración del intervalo de transición.

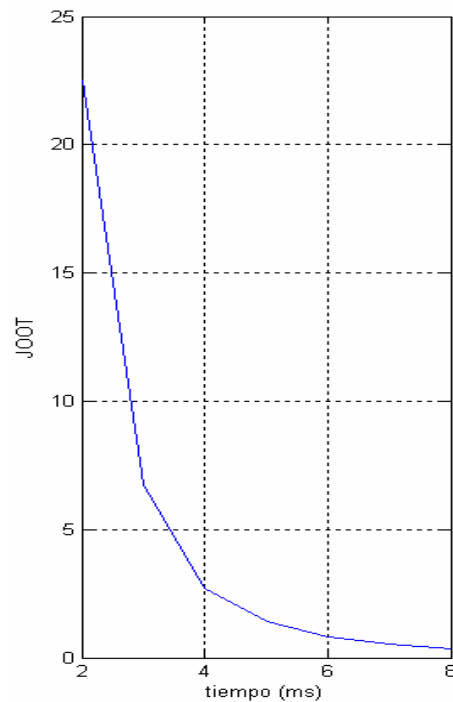


Figura 5. Energía Vrs. Duración del intervalo de tiempo de transición en el método OOT. Esta figura muestra que la energía de entrada se incrementa cuando el intervalo de tiempo de transición disminuye, en otras palabras la energía y la duración del intervalo de transición son inversamente proporcionales entre sí. Esto es muy importante para nuestra aplicación, ya que el tiempo en que se posiciona la cabeza lectora/escritora de pista en pista en el disco duro es muy corto.

5.3.3 Comparación de los resultados cuando se aplicó el método SST y el método OOT al modelo discreto del disco duro.

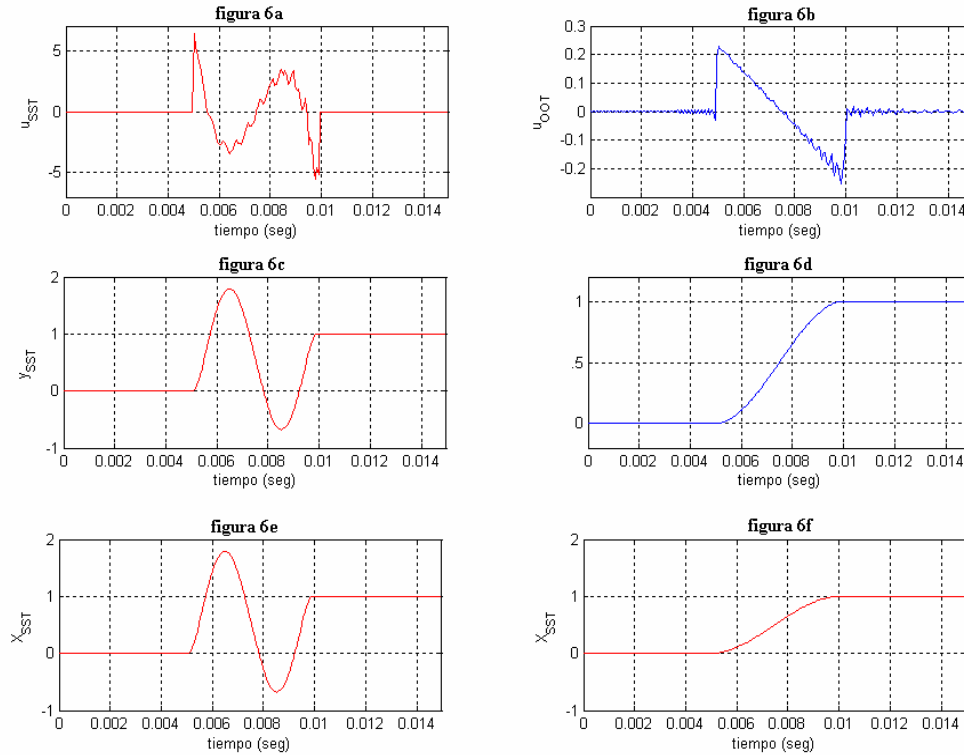


Figura 6. Comparación de los resultados de los métodos SST y OOT. En esta figura se comparan los resultados de la transición de la salida aplicando la metodología SST (Transición de estado estándar entre estados) y la metodología desarrollada en este proyecto OOT (Transición de salida óptima entre dos valores de la variable de salida). SST aplica el criterio de mínima energía para realizar la transición de la salida entre los estados de equilibrio inicial y final, que corresponden a las salidas inicial y final. OOT también realiza la transición aplicando el criterio de mínima energía pero entre los estados óptimos inicial y final y no entre los estados de equilibrio. La columna de la izquierda de la Figura 6. presenta los resultados aplicando la metodología SST y la columna de la derecha muestra los resultados aplicando la metodología OOT.

En la metodología OOT, la entrada se denomina U_{OOT} (Figura 6b) y en la metodología SST, la entrada se denomina U_{SST} (Figura 6a). Los valores picos de U_{OOT} son ligeramente mayores a 0.02 mientras que los valores picos obtenidos aplicando SST son mayores a 5, por lo tanto, los valores picos de U_{OOT} son 250 menores que los valores picos de U_{SST} . U_{OOT} es una curva mucho más suave que U_{SST} . U_{SST} oscila y eso se ve reflejado en la forma de la trayectoria de la salida Y_{SST} (Figura 6c). El consumo de energía es directamente proporcional a la integral del cuadrado de la entrada aplicada. Observando las graficas y las magnitudes de las entradas U_{OOT} y U_{SST} , se concluye que el consumo de energía aplicando OOT es mucho menor que el consumo utilizando SST. Específicamente al realizar los cálculos para un tiempo de transición de 5 milisegundos, el consumo de energía con OOT es 1.4 y con SST es 520.25, siendo el consumo con OOT 371 veces menor que el consumo al aplicar SST. Esta considerable reducción de energía es un aporte muy significativo de la metodología OOT desarrollada en éste proyecto para sistemas lineales discretos invariantes en el tiempo.

De otra parte, al observar las curvas de salida Y_{SST} para SST (Figura 6c) y Y_{OOT} para OOT (Figura 6d), se aprecia que la salida Y_{OOT} es mucho más suave que la salida Y_{SST} . En el intervalo de transición, Y_{OOT} no sobrepasa el valor final ($y=1$) ni tampoco es menor que el valor inicial ($y=0$), en cambio, Y_{SST} es oscilante debido a la energía que se transfiere al sistema para realizar la transición entre estados de equilibrio y no entre estados óptimos, como se hace en la metodología OOT. Un sobrepaso de un 80% (Ver en Figura 6c el sobrepaso aplicando SST durante la transición) durante la transición significa que para el caso del posicionamiento de la cabeza del disco duro se generen vibraciones que puedan llegar a ser inaceptables. Para resolver este problema, otros investigadores como A Piazi y A Visioli [14] idearon una trayectoria de salida suave durante la transición y le hicieron seguimiento perfecto con la metodología Inversión del modelo, pero ni la trayectoria de la salida ni la

trayectoria de los estados sigue ningún criterio de optimización, y por lo tanto no es óptima.

Debido a que los valores picos de U_{OOT} (Figura 6b) son alrededor de 0.2, el tiempo de transición se puede reducir considerablemente. En caso de tener una restricción en donde la variable de entrada no debe ser mayor a 5 voltios para evitar saturación, utilizando OOT se puede reducir el tiempo de transición de 5 milisegundos a 1.05 milisegundos y aplicando SST el tiempo de transición debe aumentarse desde 5 milisegundos hasta 5.3 milisegundos porque con el tiempo de transición de 5 milisegundos su valor pico sobrepasa los 5 voltios.

La variable de control o la entrada aplicada al sistema se emplea sólo durante la transición para SST. En la Figura 6a se observa que U_{SST} sólo varía durante el tiempo de transición. De la misma manera los estados sólo cambian durante la transición como se observa en la Figura 6e que muestra la trayectoria de uno de los estados cuando se aplica SST. El comportamiento aplicando la metodología OOT es muy diferente. Se observa que U_{OOT} (Figura 6b) cambia antes (preactuación), durante (transición) y después (postactuación) de la transición. En la preactuación los estados del sistema son llevados a los valores óptimos para dar inicio a la transición. En la Figura 6f se observa que el estado cambia durante la preactuación ($t < t_i$) debido a la entrada durante la preactuación (vea Figura 6b) que hace permanecer constante el valor de la salida Y_{OOT} (Figura 6d). De manera similar ocurre durante la postactuación. Con OOT el sistema obtiene su valor final de salida posicionando sus estados en sus valores óptimos finales y durante la postactuación los lleva a los estados de equilibrio aplicando la técnica Inversión del modelo, para garantizar que el valor de la salida final permanezca constante. Se observa que U_{OOT} sigue cambiando para $t > t_f$ (Figura 6b) y sin embargo Y_{OOT} permanece constante para $t > t_f$, porque la entrada aplicada U_{OOT} corresponde a la obtenida con la Inversión del Modelo que garantiza seguimiento perfecto de trayectorias.

El consumo de energía para OOT es calculado para todo el intervalo, es decir, tiene en cuenta la energía durante la preactuación, la transición y la postactuación. Aplicando SST la energía se consume sólo durante la transición.

6. CONCLUSIONES

El problema de transición de salida óptima para sistemas discretos LTI, fue propuesto y resuelto. Con la metodología propuesta denominada OOT la variable de control o entrada aplicada al sistema se compone de tres partes, la entrada de preactuación que se aplica en el intervalo de pretransición, la entrada de actuación que se aplica en el intervalo de transición y la entrada de postactuación que se aplica en el intervalo de post-transición. La entrada de preactuación se emplea para posicionar los estados del sistema desde el punto de equilibrio inicial hasta los estados óptimos en donde inicia la transición, la entrada de postactuación se emplea para llevar los estados del sistema desde los estados óptimos finales hasta los estados del punto de equilibrio final en donde termina la transición y la entrada de actuación para realizar la transición de la variable de salida aplicando el criterio de mínima energía entre los estados óptimos inicial y final, donde inicia y termina la transición. La metodología desarrollada se aplicó al modelo de un disco duro ampliamente aceptado por la comunidad científica y al comparar los resultados con la técnica estándar SST (SST realiza la transición de salida aplicando el criterio de mínima energía entre los estados de equilibrio inicial y final que corresponden a los valores de la salida inicial y final respectivamente) la metodología desarrollada OOT es considerablemente superior.

Específicamente para el ejemplo de la simulación del disco duro al realizar la transición de la salida en 5 milisegundos (cambiar de posición la cabeza lectora/escritora en un tiempo de transición de 5 milisegundos), el consumo de energía con OOT es $J_{OOT}^* = 1.4$ y con SST es $J_{SST}^* = 520.25$. Por lo tanto el consumo con OOT 371 veces menor que el consumo al aplicar SST, en otras palabras, la energía consumida aplicando la metodología OOT es ligeramente menor al 0.3% de la energía consumida aplicando SST. Esta reducción considerable de energía es un aporte muy significativo de la metodología OOT

desarrollada en éste proyecto para sistemas lineales discretos invariantes en el tiempo.

Por otro lado, en caso de tener restricciones de magnitud máxima para la variable de entrada, con el método OOT es posible reducir el tiempo de la transición de una manera significativa en comparación con el método SST. Particularmente, si en el disco duro se tuviera una restricción de magnitud de la variable de entrada de 5 voltios para evitar saturación, entonces aplicando SST el mínimo tiempo de intervalo de transición es de 5.3ms, mientras que aplicando OOT el mínimo tiempo de intervalo de transición es de 1.05ms. Entonces, se pueden obtener procesos de lectura y escritura de información más veloces cuando se emplea la técnica OOT.

Los estados de un sistema se pueden dividir en estados externos y en estados internos. Los estados externos son la salida y sus derivadas, y los estados internos son los ceros. En una transición de salida donde se conocen los valores de la salida inicial y final, y estos valores se deben mantener durante un tiempo establecido (porque no se puede estar cambiando la posición de la cabeza lectora/escritora mientras que estén realizando las tareas de lectura/escritura), los únicos estados viables de optimizar son los estados internos. La metodología propuesta demuestra que, al iniciar la transición se pueden optimizar los estados internos inestables y que al finalizar la transición los estados que se pueden optimizar son los estados internos estables. En ambos casos los demás estados deben permanecer en los estados de equilibrio inicial o final según la aplicación. Tomando como base los estados a optimizar, los internos inestables al inicio y los internos estables al final de la transición, se encontró una expresión analítica a minimizar, la cual es cuadrática y cuya solución son los estados óptimos iniciales y finales del intervalo de transición. Por esta razón, no hay necesidad de aplicar métodos de optimización, basta con encontrar y resolver la expresión cuadrática para obtener los estados óptimos inicial y final del intervalo de transición. Mientras que la cabeza lee o

escribe (la salida no cambia ó la posición de la cabeza lectora/escritora no cambia), durante la pretransición se aplica la entrada de preactuación para llevar los estados del sistema desde los estados del punto de equilibrio inicial a los estados óptimos iniciales, en donde ha de empezar la transición. Sin embargo, se debe cumplir que el valor de la salida no cambie mientras se varían los estados internos y esto se logra aplicando la técnica de Inversión del Modelo durante la pretransición. Esto sucede de forma similar durante la post-transición. Se aplica la metodología de inversión del modelo para determinar la entrada de postactuación que lleva el sistema desde los estados óptimos finales a los estados del punto de equilibrio final, donde termina el intervalo de transición. De este modo se garantiza que la salida sea constante antes y después del intervalo de transición.

La metodología Inversión del Modelo garantiza seguimiento perfecto de trayectorias. Al aplicar esta metodología mientras la cabeza del disco duro lee o escribe, se garantizan cero vibraciones en la posición de la cabeza lectora/escritora. Al reducir considerablemente la energía requerida por el sistema, la trayectoria de salida durante la transición es muy suave, y por lo tanto, la transición se realiza sin cambios bruscos reduciendo las vibraciones.

La metodología desarrollada se explica en el Capítulo 4 y se aplica paso a paso en el ejemplo citado del Capítulo 5. En resumen, la metodología consiste en transformar el sistema para representarlo en la forma de seguimiento de salida, que en otras palabras, es la representación del sistema en estados externos e internos. Luego, se construye la ecuación cuadrática que tiene como variable el vector a optimizar conformado por los estados internos inestables al inicio y estados internos estables al final de la transición. A continuación se resuelve la ecuación cuadrática siguiendo lo expuesto en las ecuaciones (Eq.74 y Eq.80) para obtener los estados óptimos. Posteriormente, se obtienen las entradas a aplicar durante la pretransición, transición y post-transición. Las entradas durante la pretransición y post-transición se obtienen

aplicando la metodología Inversión del Modelo y la entrada durante la transición se obtiene aplicando el criterio de mínima energía. Para aplicar la técnica Inversión del Modelo, se obtiene la entrada inversa que es función de los estados internos y de la trayectoria de salida a la que se le quiere hacer seguimiento.

La metodología encontrada se puede ampliar para aplicar otros criterios de optimización durante la transición. Con los resultados encontrados ya se sabe que los estados óptimos iniciales y finales son los internos inestables y los internos estables respectivamente. Éste es un resultado concreto de éste proyecto. De la misma manera se puede aplicar la metodología si se exige una trayectoria específica durante la transición.

La metodología Inversión del Modelo requiere que se utilice un modelo muy representativo de la planta y esto la hace dependiente del modelo. Para trabajos futuros, es importante buscar la forma de disminuir esa dependencia del modelo con otras técnicas como Control de Aprendizaje Iterativo (Iterative Learning Control) y Referencia del Modelo (Model Referente) entre otras.

7. BIBLIOGRAFIA

- [1] R.L. Farrenkopf. Optimal open-loop maneuver profiles for flexible spacecraft. J. of Guid., Control and Dynamics, 20(2), pags 291-297, 1979.
- [2] G. Singh, P.T kabamba y N.H. McClamroch. Planar, time-optimal, rest to rest slewing maneuvers of flexible spacecraft. J. of Guid, Control and Dynamics, 12(1), pags 71-81, 1989.
- [3]B. Wie, R. Sinha y Q. Liu. Robust time optimal control for uncertain structural. J. of Guid, Control and Dynamics, 16(5), 980-983, 1993.
- [4] D.K Miu. Minimum power and minimum position control and its applications in computer disk drives. IEEE. Trans. On magnetics, 27(6):4471-4475, November 1991.
- [5] Hai T. Ho. Fast servo control. J. of Guid, Control and Dynamics, 33(6), pags 4522-4527, 1997.
- [6] H. Bleuler, R. Clavel, J.M. Breguet and E. Pernette. Issues in precision motion control. J. of Guid, Robotics and Automotion, 1:959-964, April 2000.
- [7] D. Croft, G.Sheed, and S. Devasia. Creep, hysteresis and vibration compensation for piezoactuators. J. of Guid., Control and Dynamics, 123(1):35-43, March 2000.
- [8] T.A. Hindle and T. Singh. Robust minimum power/jerk control of maneuvering structures. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 24(4):816-826, 2001.
- [9] T. Singh. Fuel/time optimal control of the benchmark problem. J. of Guid., Control and Dynamics, 18(6):1225-1231, 1995.
- [10] P.H. Meckl and W.P. Seering. Minimizing residual vibration for point to point motion. Journal of vibration, 107(4):378-382, 1985.
- [11] A. De Luca and G. Di Giovanni. Rest to Rest motion of a one-link flexible arm. Conference on advanced intelligent mechatronics, 2:923-928. July 2001
- [12] A. Piazzzi and A. Visioli. Optimal inversion based control for the set-point regulation of the nonminimum-phase uncertain scalar systems. IEEE, J. of Guid., Automotion and Control, 46(10):1654-1659, 2001.

- [13] A.V. Down and M.D. Thanos. Vector motion processing. IEEE, Control system magazine, 20(5):8-19, October 2000.
- [14] A. Piazzzi and A. Visioli. Minimum time system inversion based motion planning for residual vibration reduction. IEEE, Transactions of Mechatronics, 5(1):12-22, 2000.
- [15] H. Perez and S. Devasia. Optimal output transition for linear systems. IEEE Conf. on Decis. And Control, 4:3164-3174, December 2001.
- [16] Q. Zou and S. Devasia. Preview-based stable-inversion for output tracking of linear systems. J. of Guid., Control and Dynamics Systems, 12(4):625-630, November 1999.
- [17] F. L. Lewis and V. L. Syrmos. Optimal Control. John Wiley & Sons., New York, 2nd edition, 1995, chapter 2.
- [18] N. Al-Masound, S-Y. Chu, and T. Singh. Discrete time point to point control of flexible structures. Amer. Control Conf., 4:2433-2437, June 2000.
- [19] Uffe Kotta. Inversion method in the discrete-time nonlinear control systems synthesis problems. Volum 205 of lecture notes in control. Springer-Verlag, London, 1995.
- [20] Chi-Tsong Chen, Linear system theory and design. Matrix Theory, chapter 3, third edition, 1999.
- [21] G.F. Franklin, J.D. Powell and M. Workman. Digital control of dynamics systems. Addison Wesley Longman, 3 edition, 1998.
- [22] Tippet, M. and Marchesin, D., "Bounds for Solutions of the Discrete Algebraic Lyapunov Equation", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, No. 1, January 1999, pp 214-218.