Semigrupos Inversos y Acciones Parciales

Ana María González Barbosa

Universidad Industrial de Santader
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2016

Semigrupos Inversos y Acciones Parciales

Ana María González Barbosa

Propuesta de trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director

Héctor Edonis Pinedo Tapia
Doctor en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2016

AGRADECIMIENTOS

Doy gracias a Dios quien ha hecho posible este logro, por ser mi fortaleza en los momentos difíciles, por guiarme y por incrementar en mi vida la pasión por mi profesión y el deseo de querer llegar hasta el final.

La familia, como el núcleo principal en el que un ser humano se desarrolla, tiene como tarea la formación de cada una de las personas que la integran, pues es aquí donde se establecen valores y principios para adaptarnos exitosamente a la sociedad. Por esta razón, es maravilloso sentir el respaldo de una familia que inspira buenos valores, ética y me permite crecer como persona. Gracias a mis padres y a mis hermanos que estuvieron presentes en la evolución y posterior desarrollo de mi tesis, los quiero mucho.

Extiendo mi sentimiento de gratitud a mi director de tesis, Héctor Pinedo, quien con su paciencia, dedicación y dirección acompañó mi proceso y me animó todo el tiempo para cumplir la meta.

Índice general

RESUMEN

TÍTULO: SEMIGRUPOS INVERSOS Y ACCIONES PARCIALES.[1]

AUTOR: ANA MARÍA GONZÁLEZ BARBOSA [2]

PALABRAS CLAVE: SEMIGRUPOS INVERSOS; SEMIGRUPO DE EXEL; ACCIONES PARCIALES DE GRUPOS; ACCIONES DE SEMIGRUPOS INVERSOS.

DESCRIPCIÓN:

Dado un grupo G, el matemático brasilero Ruy Exel construyó en 1998 un semigrupo inverso denotado $S(G)$ con el cual existe una correspondencia biunívoca entre acciones parciales de G y las acciones de $S(G)$. Las acciones parciales,también conocidas como preacciones, aparecieron como herramientas para solucionar ciertos tipos de ecuaciones diferenciales, y pronto se introdujeron en diversas áreas de la matemática como la geometría diferencial, lógica y combinatoria.

Este trabajo consiste en estudiar algunos conceptos y definiciones sobre semigrupos inversos y las acciones parciales de grupos. En el primer capítulo se abordarán algunas definiciones de la teoría de semigrupos como las congruencias, presentaciones, semigrupos libres y semigrupos inversos; en estos últimos, se estudiarán El semigrupo simétrico $I(X)$ y La expansión de Birget-Rhodes, los cuales son base para el desarrollo de los siguientes capítulos.

En el segundo capítulo se definirá el semigrupo de Exel construido a partir de un grupo G, sus propiedades y se probará que este es un semigrupo inverso.

En el tercer capítulo se introduce las acciones de grupos y las acciones parciales de grupos en un conjunto X, además de algunos ejemplos; veremos su correspondencia con las acciones del semigrupo inverso $S(G)$ en este mismo conjunto X.

[1] Trabajo de grado

[2] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Dr. Héctor Edonis Pinedo Tapia

ABSTRACT

TITLE: INVERSE SEMIGROUPS AND PARTIAL ACTIONS.[3]

AUTHOR: ANA MARÍA GONZÁLEZ BARBOSA [4]

KEYWORDS: INVERSE SEMIGROUPS; EXEL'S SEMIGROUP; PARTIAL ACTIONS OF GROUPS; ACTIONS OF INVERSE SEMIGROUPS.

DESCRIPTION:

Given a group G; ; the brazilian mathematician Ruy Exel in 1998 built an inverse semigroup denoted $S(G)$ for which there is a one to one correspondence between partial actions of G and actions of $S(G)$. Partial actions, also know as preactions, appeared as tools to solve certain types of differential equations, and were soon introduced in various areas of mathematics such as differential geometry, logic and combinatorial.

This work is related to study some concepts and definitions about inverse semigroups and partial actions of groups. In the first chapter we study some definitions of the theory of semigroups and congruences, presentations, free semigroups and inverse semigroups; in the latter, we study the symmetrical semigroup $I(X)$ and the Birget-Rhodes expansion, the which are the basis for the development of the following chapters.

In the second chapter the Exel's semigroup built from a group G is defined, their properties are presented in order to prove that it is an inverse semigroup.

In the third chapter actions of groups and partial actions of groups on a set X are introduced, plus some examples; we study its correspondence with the actions of the inverse semigroup $S(G)$ in this same set X.

[3]Bachelor Thesis

[4]Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Dr. Héctor Edonis Pinedo Tapia

INTRODUCCIÓN

La teoría de grupos es una de las ramas más importantes del álgebra ya que sus aplicaciones pueden implementarse en distintos campos de la matemática. Sin embargo algunas nociones poseen ciertas propiedades de simetrias que la teoría de grupos no puede abarcar, tales simetrias son conocidas como simetrias parciales generalizadas y para su estudio son necesarios los semigrupos inversos.

Por otro lado, las acciones de grupos en estructuras algebraicas, pueden verse como una familia de biyecciones que preservan tales estructuras. En particular, son una herramienta poderosa que lleva a la obtención de los Teoremas de Sylow, que a su vez ayudan a la clasificacíon de diversas familias de grupos, especialmente los de orden pequeño.

En 1998, Ruy Exel introduce las acciones parciales de grupos; que surgen por el debilitamiento de la habitual definición de acción de grupo. Estos últimos aparecieron como herramientas para solucionar ciertos tipos de ecuaciones, y pronto se introdujeron en la geometría diferencial, lógica, física y combinatoria. Fue mostrado por Exel, que existe una correspondencia entre acciones parciales de grupos y las acciones de semigrupos inversos.

Capítulo 1

OBJETIVOS

1.1. OBJETIVO GENERAL

Dado un grupo G y un conjunto X, analizar la correspondencia que existe entre las acciones parciales de G en X y las acciones del semigrupo inverso $S(G)$ en el mismo conjunto X.

1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudiar acciones parciales de grupos e identificar las diferencias entre estas y las acciones clásicas.
- Profundizar en resultados estructurales sobre semigrupos inversos.
- Establecer detalladamente el isomorfismo dado por el Teorema 4.2.1.

Capítulo 2

SEMIGRUPOS

2.1. DEFINICIONES

Definición 2.1.1. *Un semigrupo es un par $(S, *)$ donde S es un conjunto no vacío y $*$ es una operacion binaria en S que satisface:*

a) $*$ *es **cerrada**, esto es, dados $a, b \in S$, $a * b \in S$.*

b) $*$ *es **asociativa**, esto es, dados $a, b, c \in S$, $(a * b) * c = a * (b * c)$.*

Nota: Sea $(S, *)$ un semigrupo.

- De ahora en adelante la operación $a * b$ se denotará por ab, para todo a, $b \in S$ y cuando no exista ambigüedad, el semigrupo $(S, *)$ será denotado simplemente por S.

- Se denomina **identidad** al elemento $1 \in S$ tal que $a1 = 1a = a$, para todo $a \in S$. Si S tiene el elemento identidad, el semigrupo se llamará monoide.

- Un elemento **idempotente** de S es un elemento e tal que $e^2 = e$. El conjunto de todos los idempotentes de un semigrupo S es denotado por $E(S)$ y si A es algún subconjunto de S, entonces definimos $E(A) = A \cap E(S)$.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1.1. *Sea X cualquier conjunto y denotemos por $\mathcal{P}_f(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos no vacíos de X. Tenemos que $\mathcal{P}_f(X)$ es un semigrupo bajo la operación de unión de conjuntos.*

Ejemplo 2.1.2. *Para cada conjunto X cualquiera, sea X^X el conjunto de todas las funciones de X en X. El conjunto X^X es un semigrupo bajo la composición de funciones.*

Ejemplo 2.1.3. *Todo grupo G es un semigrupo.*

Definición 2.1.2. *Sean $(S, *)$ y $(T, \bullet)$ semigrupos.*

a) Una función $h : S \to T$ es un homomorfismo si $h(x * y) = h(x) \bullet h(y)$, para todo $x, y \in S$.

b) Un homomorfismo $h : S \to T$ es llamado monomorfismo si es inyectivo, epimorfismo si es sobreyectivo e isomorfismo si es biyectivo.

c) Decimos que S y T son isomorfos, si existe un isomorfismo entre ellos y se denota $S \cong T$.

Definición 2.1.3. *Sea $T \subseteq S$ no vacío. Entonces, T es subsemigrupo de S si es cerrado bajo la multiplicación, esto es, T es un semigrupo bajo la multiplicación de S restricto a T.*

Definición 2.1.4. *Sea M un subconjunto no vacío de S. Definimos el conjunto*

$$\langle M \rangle = \{a_1 a_2 ... a_n : n \in \mathbb{N} \ , a_i \in M\}$$

de todos los productos finitos de elementos de M, el cual posee las siguientes propiedades:

i) $\langle M \rangle$ es un subsemigrupo de S llamado el subsemigrupo de S generado por M.

Sean $m_1 = a_{i_1} ... a_{i_n}$ y $m_2 = a_{j_1} ... a_{j_p}$ elementos de $\langle M \rangle$, entonces

$$m_1 m_2 = a_{i_1} ... a_{i_n} a_{j_1} ... a_{j_p},$$

por tanto $m_1 m_2 \in \langle M \rangle$, esto es, $\langle M \rangle$ es un subsemigrupo de S.

ii) $M \subseteq \langle M \rangle$.

Para T un subsemigrupo de S, decimos que $M \subseteq S$ no vacío, es generador de T si $\langle M \rangle = T$.

Proposición 2.1.1. *Sea M subconjunto de S, entonces $\langle M\rangle$ es la intersección de todos los subsemigrupos de S que contienen a M.*

Demostración. Sea S' un subsemigrupo de S tal que $M \subseteq S'$ y sea $x = m_1 m_2 ... m_n$ un elemento de $\langle M\rangle$, como $M \subseteq S'$ y S' es cerrado entonces $x \in S'$, para todo S' que contenga a M, luego $\langle M\rangle \subseteq \cap S'$. Ahora sea $x \in \cap S'$ entonces $x \in \langle M\rangle$ ya que $\langle M\rangle$ es un subsemigrupo de S que contiene a M. Se concluye que $\langle M\rangle$ es la intersección de todos los subsemigrupos de S que contienen a M.

□

Lema 2.1.1. *Suponga $h : S \to T$ un homomorfismo de semigrupos.*

a) Para cada subsemigrupo P de S, la imagen $h(P) = \{h(x) : x \in P\}$ es un semigrupo de T. De igual forma si Q es subsemigrupo de T, $h^{-1}(Q) = \{x \in S : h(x) \in Q\}$ es subsemigrupo de S.

b) Sea $M \subseteq S$, h envía el subsemigrupo de S generado por M en un subsemigrupo de T generado por $h(M)$.

c) Suponga M un conjunto generador de S. Entonces dos homomorfismos g y h de S a T coinciden si ellos coinciden en M, esto es, si $g(x) = h(x)$ para todo $x \in M$.

Demostración. a) Sean $x, y \in P$, como P es un subsemigrupo, $xy \in P$. Ahora, como $h(x)h(y) = h(xy)$ porque h es homomorfismo, entonces, $h(xy) \in h(P)$ para todo $h(x), h(y) \in h(P)$. Luego, $h(P)$ es subsemigrupo de T.
Sabemos que $h^{-1}(Q)$, sean $x, y \in h^{-1}(Q)$, entonces, $h(x), h(y) \in Q$, como Q es subsemigrupo $h(x)h(y) = h(xy) \in Q$, luego $xy \in h^{-1}(Q)$, por tanto $h^{-1}(Q)$ es subsemigrupo de S.

b) Sea $x = m_1 m_2 ... m_n \in \langle M\rangle$, $h(x) = h(m_1 m_2 .. m_n)$, como h es homomorfismo $h(x) = h(m_1 m_2 ... m_n) = h(m_1 m_2 .. m_{n-1})h(m_n) = h(m_1)h(m_2)...h(m_n)$ entonces $\langle h(M)\rangle$.

c) Sea $P = \{x \in S : h(x) = g(x)\}$ y $x, y \in P$, entonces, $h(xy) = h(x)h(y) = g(x)g(y) = g(xy)$, por lo tanto, $xy \in P$ y así P es un subsemigrupo de S e incluye a M, luego $S = \langle M\rangle \subseteq P$, y concluimos que $h = g$.

□

2.2. CONGRUENCIAS

En esta sección, definiremos el concepto de congruencias, algunas propiedades y su construcción a través de relaciones binarias.

Proposición 2.2.1. *Para una relación de equivalencia ζ en un semigrupo S, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) Existe una operación en S/ζ que le da estructura de semigrupo y tal que la proyección $S \to S/\zeta$ es un homomorfismo.

b) ζ admite multiplicación. Esto es, $a\,\zeta\,c,\ b\,\zeta\,d \ \Rightarrow\ ab\,\zeta\,cd$.

c) ζ admite multiplicación a la derecha. Esto es, $a\,\zeta\,b \ \Rightarrow ax\,\zeta\,bx$ y a la izquierda $a\,\zeta\,b \ \Rightarrow xa\,\zeta\,xb$.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Suponga $a\,\zeta\,c,\ b\,\zeta\,d$ esto es, $c \in C_a$ y $d \in C_b$, luego $cd \in C_aC_b = C_{ab}$, por lo tanto $ab\,\zeta\,cd$.

$b) \Rightarrow c)$ Suponga $a\,\zeta\,c$, como ζ es una relación de equivalencia entonces ζ es reflexiva, por tanto $x\,\zeta\,x$ para todo $x \in S$, luego por hipótesis $ax\,\zeta\,bx$. Análogamente $xa\,\zeta\,xb$.

$c) \Rightarrow a)$ Sea $\iota : S \to S/\zeta$ definida por $\iota(a) = C_a = \{x \in S \mid x\,\zeta\,a\}$. En $\iota : S \to S/\zeta$ definamos el producto así $C_aC_b = C_{ab}$. Veamos que este producto está bien definido. Para esto supongamos que $Ca = Ca'$ y $C_b = C'_b$ entonces $a\,\zeta\,a'$ y $b\,\zeta\,b'$, por hipótesis $ab\,\zeta\,a'b$ y $a'b\,\zeta\,a'b'$ por lo tanto $ab\,\zeta\,a'b'$ luego $C_{ab} = C_{a'b'}$.
Veamos que la ι en S/ζ le da una estructura de semigrupo. Por definición $C_aC_b = C_{ab}$ donde $ab \in S$ por tanto S/ζ es cerrado, además es asociativa, ya que $(C_aC_b)C_c = C_{ab}C_c = C_{abc} = C_aC_{bc} = C_a(C_bC_c)$. Es claro que ι es un homomorfismo.

□

Definición 2.2.1. *Una congruencia en un semigrupo S es una relación de equivalencia ζ en S que satisface las condiciones de la Proposición 2.2.1. El semigrupo resultante S/ζ es la* ***partición*** *de S por ζ. Una congruencia a izquierda es una relación de equivalencia que admite multiplicación por izquierda ($a\,\zeta\,b$ implica $xa\,\zeta\,xb$), y una congruencia a derecha es una relación de equivalencia ζ que admite multiplicación por derecha ($a\,\zeta\,b$ implica $ax\,\zeta\,bx$).*

Definición 2.2.2. *Sea $\varphi : S \to T$ una función entre semigrupos. Se define la relación de equivalencia* **kernel** *de φ, denotada $ker\ \varphi$, por $x\ ker\ \varphi\ y$ si y solo si $\varphi(x) = \varphi(y)$.*

Proposición 2.2.2. *Sea $\varphi : S \to T$ un homomorfismo de semigrupos. Entonces $ker\ \varphi$ es una congruencia en S.*

Demostración. Será suficiente probar la condición $b)$ de la Proposición 2.2.1. Suponga $a\ ker\varphi\ c$ y $b\ ker\varphi\ d$, esto es, $\varphi(a) = \varphi(c)$ y $\varphi(b) = \varphi(d)$.

$$
\begin{aligned}
a\ ker\ \varphi\ c &\Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(c) \\
&\Rightarrow \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(c)\varphi(b) \\
&\Rightarrow \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(c)\varphi(d) \\
&\Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(cd) \\
&\Leftrightarrow ab\ ker\ \varphi\ cd
\end{aligned}
$$

□

Proposición 2.2.3. *Sea $\varphi : S \to T$ un homomorfismo sobreyectivo, un homomorfismo $\psi : S \to U$ se factoriza a través de φ, esto es, $\psi = \varepsilon \circ \varphi$, para algún $\varepsilon : T \to U$, si y solo si, $ker\ \varphi \subseteq ker\ \psi$. En este caso ψ se factoriza únicamente a través de φ, es decir ε es único.*

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & T \arrow[d, "\varepsilon"] \\
 & U.
\end{tikzcd}
$$

Demostración. $\Rightarrow$) Si $\psi : S \to U$ se factoriza a través de φ ($\psi = \varepsilon \circ \varphi$ para algún ε), entonces $x\ ker\ \varphi\ y$ implica

$$
\begin{aligned}
&\varphi(x) = \varphi(y) \\
&\psi(x) = \varepsilon(\varphi(x)) = \varepsilon(\varphi(y)) = \psi(y),
\end{aligned}
$$

y $x\ ker\ \psi\ y$; entonces $ker\ \varphi \subseteq ker\ \psi$.

$\Leftarrow$) Suponga que $ker\ \varphi \subseteq ker\ \psi$. Buscamos un homomorfismo ε tal que $\varepsilon(\varphi(s)) = \psi(s)$ para todo $s \in S$.

Primero mostraremos que existe una función bien definida $\varepsilon : T \to U$ la cual asigna $\psi(s)$ a $\varphi(s)$ para cada $s \in S$.

Sea $t \in T$ como φ es sobreyectiva existe $s \in S$ tal que $\varphi(s) = t$, definamos $\varepsilon(t) = \varepsilon(\varphi(s)) = \psi(s)$.

Ahora veamos que ε está bien definida; supongamos, que existen $\psi(s')$ y $\psi(s'')$ tal que $\varepsilon(t) = \psi(s')$ y $\varepsilon(t) = \psi(s'')$ esto es, $t = \varphi(s') = \varphi(s'')$, entonces, $s' \, ker \, \varphi \, s''$, como $ker \, \varphi \subseteq ker \, \psi$, $s' \, ker \, \psi \, s''$, por tanto, $\psi(s') = \psi(s'')$. Entonces a lo sumo un elemento es asignado a t. Entonces la función $\varepsilon : T \to U$ está bien definida por $\varepsilon(\varphi(s)) = \psi(s)$, para todo $s \in S$.

Dado que φ y ψ son homomorfismos,

$$\varepsilon(\varphi(x)\varphi(y)) = \varepsilon(\varphi(xy)) = \psi(xy) = \psi(x)\psi(y) = \varepsilon(\varphi(x))\varepsilon(\varphi(y))$$

para todo $\varphi(x)$, $\varphi(y) \in T$, y ε es un homomorfismo. También $\psi = \varepsilon \circ \varphi$ por definición. Si $\varepsilon' : T \to U$ es otro homomorfismo tal que $\psi = \varepsilon' \circ \varphi$, entonces ε y ε' coinciden en la $imagen(\varphi) = T$, y $\varepsilon = \varepsilon'$.

□

Nota: La notación $(a, b) \in \zeta$ significará $a \, \zeta \, b$.

Proposición 2.2.4. *La intersección finita de congruencias es una congruencia y la unión de una cadena de congruencias es una congruencia.*

Demostración. Sean ζ y τ congruencias en S. Veamos que la condición $c)$ de la Proposición 2.2.1 se cumple.

- Suponga $\zeta \cap \tau \neq \varnothing$. Sea $(a, b) \in \zeta \cap \tau$, entonces $(a, b) \in \zeta$ y $(a, b) \in \tau$, como ζ y τ son congruencias $(ax, bx) \in \zeta$ y $(ax, bx) \in \tau$, luego $(ax, bx) \in \zeta \cap \tau$, análogamente $(xa, xb) \in \zeta \cap \tau$; por tanto $\zeta \cap \tau$ es una congruencia.
- Sea $(a, b) \in \zeta \cup \tau$. Entonces $(a, b) \in \zeta$ o $(a, b) \in \tau$, suponga sin pérdida de generalidad que $(a, b) \in \zeta$, entonces $(ax, bx) \in \zeta$ por ζ ser congruencia, por tanto $(ax, bx) \in \zeta \cup \tau$, análogamente $(xa, xb) \in \zeta \cup \tau$; esto es, $\zeta \cup \tau$ es una congruencia.

□

Se sigue de la Proposición 2.2.4 que las congruencias en un semigrupo S forman un latice completo. La congruencia más pequeña en S es la igualdad. La congruencia más grande en S es la relación de equivalencia $S \times S$ con S como única clase de equivalencia. El supremo de un conjunto Λ de congruencias es la intersección de todas las congruencias que contienen la unión de Λ. Más generalmente hay para cada relación binaria ξ en S la más pequeña congruencia ζ en S la cual contiene a ξ, ζ es la intersección de todas las congruencias que contienen a ξ y es la congruencia generada por ξ.

La congruencia generada por $\xi \subseteq S \times S$ se puede construir en dos pasos. Primero ξ es expandida a la relación simétrica β la cual admite la multiplicación. Entonces la siguiente construcción es aplicada a β.

Definición 2.2.3. *La clausura transitiva de una relación β en un conjunto S es la relación binaria reflexiva τ definida por:*
$a\ \tau\ b$ si y solo si existe una secuencia $x_1, ..., x_r \in S$ tal que

$$r > 0;\ a = x_1,\ b = x_r\ ;\ x_i\, \beta\, x_{i+1}\, \forall\, 1 \leq i \leq r$$

Proposición 2.2.5. *La congruencia generada por una relación binaria en un semigrupo S es la clausura transitiva de la relación binaria β definida por:*
$a\, \beta\, b$ si y solo si $a = uxv$ y $b = uyv$ para algunos $u,\ v \in S \cup \{1\}$; $x,\ y \in S$ tales que $x\, \xi\, y$ o $y\, \xi\, x$.

Demostración. En detalle, β contiene a ξ (sea $u = v = 1$ en la defininción), como β es simétrica ($a\, \beta\, b$ implica $b\, \beta\, a$) y admite multiplicación a izquierda ($a\, \beta\, b$ implica $sa\ \beta\ sb$) y a derecha ($a\ \beta\ b$ implica $as\ \beta\ bs$). Entonces τ es simétrica (invierta la secuencia $x_1, ..., x_r$ en la definición) y admite multiplicación a derecha e izquierda. También τ contiene a β (sea $r = 2$ en la definición) y es transitiva. Entonces τ es una congruencia que contiene a ξ.
Recíprocamente, sea ζ una congruencia que contiene a ξ. Si $x\, \xi\, y$ o $y\, \xi\, x$, entonces $x\, \zeta\, y$ y $y\, \zeta\, x$ y $uxv\, \zeta\, uyv$ para todo $u,\ v \in S \cup \{1\}$. Luego ζ contiene a β. Dado que ζ es reflexiva y transitiva se sigue que ζ contiene a τ. Entonces τ es la congruencia más pequeña que contiene a ξ.

□

Podemos observar que la clausura transitiva τ de β es la relación reflexiva y transitiva más pequeña que contiene β, siendo β la relación simétrica más pequeña que contiene a una relación binaria ξ y admite la multiplicación; estas propiedades son todas heredadas por τ.

Corolario 2.2.1. *El supremo de un conjunto de congruencias es la clausura transitiva de su unión.*

Los siguientes resultados no contribuyen directamente al objetivo de este trabajo, pero arrojan resultados de interés en la teoría de congruencias.

Proposición 2.2.6. *Para cada relación de equivalencia γ en un semigrupo S existe la congruencia más grande ζ contenida en γ, es decir*

$$a\,\zeta\, b \textit{ si y solo si } uav\,\gamma\, ubv \textit{ para todo } u, v \in S\cup\{1\}$$

Demostración. Defina ζ por $a\,\zeta\, b$ si y solo si $uav\,\gamma\, ubv$ para todo $u, v \in S\cup\{1\}$. Claramente ζ es una relación de equivalencia y $\zeta \subseteq \gamma$ (sea $u = v = 1$ en la definición). Si $a\,\zeta\, b$ y $s \in S$, entonces para todo $u, v \in S\cup\{1\}$, $usav\,\gamma\, usbv$, por lo tanto $sa\,\zeta\, sb$. (De igual manera $as\,\zeta\, bs$). Entonces ζ es una congruencia contenida en γ. Si ξ es cualquier congruencia contenida en γ, entonces $a\,\xi\, b$ implica $uav\,\xi\, ubv$ para todo $u, v \in S\cup\{1\}$, $uav\,\gamma\, ubv$ para todo u, $v \in S\cup\{1\}$ y $a\,\zeta\, b$.

□

Corolario 2.2.2. *Para cada subconjunto H de un semigrupo de S existe la congruencia más grande ζ en S tal que H es una unión de $\zeta -$ clase; esto es,*

$$a\,\zeta\, b \textit{ si y solo si } uav \in H \Leftrightarrow ubv \in H, \textit{ para todo } u,\ v \in S\cup\{1\}$$

Demostración. H es una unión de $\zeta - clases$ si y solo si ζ está contenida en la relación de equivalencia γ que tiene como clases H y $S\setminus H$ (ambas no vacías).

□

2.3. SEMIGRUPOS LIBRES

Definición 2.3.1. *Sea L un conjunto arbitrario no vacío. Se define como L^* el conjunto de todas las concatenaciones de elementos de L de longitud finita mayor a 0. Esto es,*

$$L^* = \{w = l_1 l_2 ... l_n : l_i \in L, i \in I, n \in \mathbb{N}\}.$$

L^* es un semigrupo bajo la operación $wv = a_1a_2...a_nb_1b_2...b_m$, donde $w = a_1a_2...a_n$ y $v = b_1b_2...b_m$, y es llamado el semigrupo libre sobre L.

Nota:

- *$L \subseteq L^*$*
- *L^* es conmutativo, si y solo si, L tiene un solo elemento, ya que $aba \neq aab$, para $a \neq b$. En este caso $L^* \cong (\mathbb{N}, +)$.*

Teorema 2.3.1. *Suponga L^* el semigrupo libre sobre L, S un semigrupo y $f : L \to S$ una función arbitraria. Entonces existe un único homomorfismo de semigrupos $f^* : L^* \to S$ que extiende a f.*

Demostración. Suponga S un semigrupo. Cada elemento $w = l_1l_2...l_n$ en L^* es un encadenamiento de elementos $l_1, l_2, ..., l_n$. Ahora, sea la función $f^* : L \to S$ dada por $f^*(l_1l_2...l_n) = f(l_1)f(l_2)...f(l_n)$. Sean $w = a_1a_2...a_n$ y $v = b_1b_2...b_m$ elementos de L^*, luego

$$f^*(wv) = f^*(a_1...a_nb_1...b_m) = f(a_1)...f(a_n)f(b_1)...f(b_m) = f^*(w)f^*(v)$$

Por tanto f^* es un homomorfismo de L^* en S que extiende a f.

□

Corolario 2.3.1. *Cada semigrupo es la imagen homomorfa de uno libre.*

Demostración. Sea S un semigrupo, fijemos un conjunto L tal que $| S | \leq | L |$ y una función $f : L \to S$. La extensión homomorfa $f^* : L^* \to S$ de f, dada en el teorema anterior es un homomorfismo sobreyectivo de L^* a S.

□

2.4. PRESENTACIONES

Los semigrupos libres proporcionan una manera de construir semigrupos a través de “generadores y relaciones”.

Sea L un conjunto. Dados $u, v \in L^*$ al par ordenado (u, v) lo llamamos una **relación** en L. Una relación (u, v) es normalmente denotada como una igualdad $u = v$ (no confundir con igualdad en los elementos de L^*).

Dada una función f de L en un semigrupo S decimos que la relación $u = v$ se **mantiene** en S vía f si $f^*(u) = f^*(v)$, donde $f^* : L^* \to S$ es el homomorfismo que extiende f.

Si $L \subseteq S$ y $f : L \to S$ es la función inclusión, entonces f^* toma un producto de elementos de L en L^* al producto de los mismos elementos de L como calculado en S, entonces una relación $u = v$ se mantiene en S si y solo si el correspondiente producto de elementos de L es igual cuando se calcula en S.

Sea L un conjunto y $R \subseteq L^* \times L^*$ un conjunto de relaciones entre los elementos de L (entonces R es una relación binaria en L^*). Por $\langle L, R\rangle$ denotamos el cociente L^*/ζ de L^* por la congruencia ζ en L^* generada por R. El conjunto $\langle L, R\rangle$ viene equipado con la función $\iota : L \to \langle L, R\rangle$ la cual envía $x \in L$ a la $\zeta - clase$ $\iota(x) = C_x \in L^*/\zeta = \langle L, R\rangle$. El homomorfismo de L^* a $\langle L, R\rangle$ el cual extiende ι es precisamente la proyección $L^* \to L^*/\zeta$.

Proposición 2.4.1. *$\langle L, R\rangle$ es generado por $\iota(L)$, y cada relación $u = v$ en R se mantiene en $\langle L, R\rangle$ (vía ι).*

Demostración. Dado que $\langle L, R\rangle = L^*/\zeta$ la primera parte de la proposición es clara; por otro lado, por la Proposición 2.2.1 item a) ι es un homomorfismo y por tanto para todo $u = v$ se tiene que $\iota(u) = \iota(v)$.

□

Debido a la Proposición 2.4.1, $\langle L, R\rangle$ es llamado **semigrupo generado** por L sujeto a R, los elementos de R son los que definen relaciones de $\langle L, R\rangle$. L no puede verse como un subconjunto de $\langle L, R\rangle$ ya que ι no es necesariamente inyectiva.

Proposición 2.4.2. *Con L, R y ζ como anteriormente descritos; sea S un semigrupo y $f : L \to S$ una función tal que cada relación $u = v$ en R se mantiene en S (vía f). Existe un homomorfismo único $\psi : \langle L, R\rangle \to S$ tal que $f = \psi \circ \iota$; si S es generado por $f(L)$ entonces ψ es sobreyectiva.*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & \langle L, R\rangle \arrow[d, "\psi"] \\ & S. \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $f^* : L^* \to S$ el homomorfismo que extiende f. Por hipótesis $f^*(u) = f^*(v)$ para cada relación $u = v$ en R. Entonces el *ker* f^* contiene a R y por lo tanto contiene la congruencia ζ generada por R. Por la proposición 2.2.3, f^* factoriza únicamente a través de la proyección $\pi : L^* \to \langle L, R\rangle$: existe un homomorfismo $\psi : \langle L, R\rangle \to S$ tal que $f^* = \psi \circ \pi$. Restricto a L entonces $f = \psi \circ \iota$.

Sea $f^{**} : \langle L, R\rangle \to S$ otro homomorfismo tal que $f = \psi \circ \iota$. Entonces $T = \{a \in \langle L, R\rangle \mid f^{**}(a) = f^*(a)\}$ contiene a $\iota(L)$. Como f^* y f^{**} son homomorfismos, T es un subsemigrupo de $\langle L, R\rangle$ y se sigue que $T = \langle L, R\rangle$ y $f^{**} = f^*$.

□

Una **presentación** de un semigrupo S consiste de un conjunto L, un conjunto R de relaciones de elementos de L y un isomorfismo $S \cong \langle L, R\rangle$. Cada semigrupo tiene una presentación, en el cual L puede ser cualquier subconjunto de S el cual genera S, y R puede ser cualquier relación binaria la cual genera la congruencia inducida por $L \to S$.

2.5. SEMIGRUPOS INVERSOS

Definición 2.5.1. *Un semigrupo S se dice que es **regular** si para cada elemento $x \in S$ existe un elemento $y \in S$ que satisface $y = yxy$ y $x = xyx$.*

Definición 2.5.2. *Un semigrupo S se dice que es un **semigrupo inverso** siempre que exista, para cada $x \in S$ un único elemento x^* en S, tal que*

- $xx^*x = x$.
- $x^*xx^* = x^*$.

Teorema 2.5.1. *Sea S un semigrupo regular. Entonces los elementos idempotentes de S conmutan si y solo si cada elemento de S tiene un único inverso.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea S un semigrupo regular en el cual los idempotentes conmutan y sean u y v los inversos de x. Entonces

$$u = uxu = u(xvx)u = (ux)(vx)u,$$

donde ux y vx son idempotentes ($(ux)(ux) = (uxu)x = ux$). Entonces como los idempotentes conmutan tenemos

$$u = (vx)(ux)u = (vx)u = (vxv)xu = v(xv)(xu),$$

de nuevo, xv y xu son idempotentes y

$$u = v(xu)(xv) = v(xux)v = vxv = v,$$

luego $u = v$.

$\Leftarrow$) Empecemos por probar que en un semigrupo regular el producto de dos idempotentes e y f tiene un inverso idempotente. Sea $x = (ef)'$ cualquier inverso de ef. Considere el elemento fxe. Este es idempotente porque

$$(fxe)^2 = f(xefx)e = fxe,$$

y este es un inverso de ef porque

$$(fxe)ef(fxe) = (fxe)^2 = fx, e$$

y

$$ef(fxe)ef = (ef)x(ef) = ef.$$

Ahora sea S un semigrupo en el cual cada elemento tiene un inverso único. Mostraremos que $ef = fe$. Por el resultado anterior, $f(ef)'e$ es un idempotente el cual es inverso de ef. Entonces $(ef)' = f(ef)'e$, por la unicidad de los inversos, y así $(ef)'$ es un idempotente. Cada idempotente es su propio inverso, pero por otro lado, el inverso de $(ef)'$ es ef. Entonces $ef = (ef)'$ por unicidad de los inversos. Luego ef es un elemento idempotente.

De manera similar es fácil ver que fe es también un idempotente. Pero

$$ef(fe)ef = (ef)(ef) = ef,$$

y

$$fe(ef)fe = fe,$$

entonces fe y ef son inversos de ef. Luego $ef = fe$.

□

Lema 2.5.1. *Sea S un semigrupo y $a, b \in S$ entonces $(ab)^* = b^*a^*$.*

Demostración. Se sabe que

$$(ab)^*ab(ab)^* = (ab)^*,$$

y

$$ab(ab)^*ab = ab.$$

Ahora

$$(b^*a^*)ab(b^*a^*) = b^*(a^*a)(bb^*)a^* = b^*(bb^*)(a^*a)a = (b^*bb^*)(a^*aa^*) = b^*a^*,$$

y

$$ab(b^*a^*)ab = a(bb^*)(a^*a)b = a(a^*a)(bb^*)b = (aa^*a)(bb^*b) = ab.$$

Por la unicidad de los inversos se concluye que $(ab)^* = b^*a^*$.

□

Proposición 2.5.1. *Sea S un semigrupo inverso.*

a) Para cada elemento idempotente e y un elemento s, existe un elemento idempotente f tal que $es = sf$.

b) Para cada elemento idempotente e y un elemento s, existe un elemento idempotente f tal que $se = fs$.

Demostración. a) Sea $f = s^*es = s^*ess^*es = s^*e^2(ss^*s) = s^*es$ un elemento idempotente, entonces

$$sf = s(s^*es) = (ss^*)es = e(ss^*s) = es.$$

b) Sea $f = ses^* = ses^*ses^* = se^2s^*ss^* = ses^*$ un elemento idempotente, entonces

$$fs = ses^*s = es^*s = es.$$

□

Definición 2.5.3. *Sea S un semigrupo inverso, definamos el orden parcial por $a \leq b$ si y solo si $a = be$, para algún elemento idempotente e, el cual será llamado* ***orden parcial natural****. Una función $\theta : S \to T$ entre semigrupos inversos es llamada* ***premorfismo*** *si satisface:*

a) $\theta(s^{-1}) = \theta(s)^*$, para todo $s \in S$.

b) $\theta(s)\theta(t) \leq \theta(st)$.

Si S y T son monoides entonces el premorfismo se llamará unitario si *c)* $\theta(1) = 1$.

Proposición 2.5.2. *Sea S un semigrupo inverso. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i) $s \leq t$.

ii) $s = ft$ *para algún idempotente* f.

iii) $s^* \leq t^*$.

iv) $s = ss^*t$.

v) $s = ts^*s$

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Sea $s = te$, entonces $s = ft$ para algún idempotente f por la Proposición 2.5.1.

$ii) \Rightarrow iii)$ Sea $s = ft$ para algún idempotente f. Entonces $s^* = (ft)^* = t^*f$, luego por definición $s^* \leq t^*$.

$iii) \Rightarrow iv)$ Sea $s^* \leq t^*$ entonces $s^* = t^*e$ para algún idempotente e. Luego tomando inversos $(s^*)^* = (t^*e)^*$ obtenemos $s = et$. Pero $es = eet = et = s$ y así $ess^* = ss^*$. Entonces $s = ss^*s = ss^*et = ess^*t = ss^*t$.

$iv) \Rightarrow v)$ Sea $s = ss^*t$, entonces $s = te$ para algún idempotente e por la Proposición 2.5.1. Pero $se = e$ y $se = ss^*$. Por lo tanto $s = ts^*s$.

$v) \Rightarrow i)$ Inmediata por la definición de orden parcial natural.

□

Proposición 2.5.3. *La relación $\leq$ es un orden parcial en un semigrupo S.*

Demostración. Sean a, b, $c \in S$ y, e, f elementos idempotentes de S.

- Reflexividad: $a \leq a$ ya que $a = a(a^*a)$.
  Note que el elemento a^*a es un elemento idempotente pues $(a^*a)(a^*a) = (a^*aa^*)a = a^*a$.

- Transitividad: Suponga $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a = be$ y $b = cf$; luego $a = be = c(fe)$, donde $(fe)(fe) = feef = f(ee)f = fef = ffe = (ff)e = fe$, por tanto $a \leq c$.
- Antisimetría: Suponga que $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = ba^*a$ y $b = ab^*b$, esto es

$$a = ba^*a = b^*ba^*a = aa^*ab^*b = ab^*b = b.$$

$\square$

Proposición 2.5.4. *Sea G un grupo, S un monoide inverso. Entonces la función $\theta : G \to S$ es un premorfismo unitario si y solo si se cumple que:*

1) $\theta(1) = 1$

2) $\theta(s)\theta(t)\theta(t^{-1}) = \theta(st)\theta(t^{-1})$*, para todo* $s, t \in G$.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $\theta : G \to S$ un premorfismo unitario. Solo necesitamos probar la condición 2. Por el ítem b) de la Definición 2.5.3 se tiene

$$\begin{aligned} \theta(s)\theta(t) &\leq \theta(st) \\ \theta(s)\theta(t)\theta(t^{-1}) &\leq \theta(st)\theta(t^{-1}) \\ \theta(st)\theta(t^{-1}) &\leq \theta(stt^{-1}) = \theta(s) \end{aligned}$$

Ahora $\theta(st)\theta(t^{-1}) \leq \theta(s)$ implica que $\theta(st)\theta(t^{-1}) = e\theta(s)$ por la Proposición 2.5.1, para algún idempotente $e \in S$. Note que

$$\begin{aligned} \theta(st)\theta(t^{-1}) =& (\theta(st)\theta(t^{-1}))(\theta(st)\theta(t^{-1}))^*\theta(s) \\ =& \theta(st)\theta(t^{-1})\theta(t^{-1})^*\theta(st)^*\theta(s) \\ =& \theta(st)\theta(t^{-1})\theta(t)\theta(st)^*\theta(s) \\ =& \theta(st)\theta(t^{-1})\theta((st)^{-1})\theta(s) \\ =& \theta(st)\theta(t^{-1})\theta(t)\theta(t^{-1}s^{-1})\theta(s) \\ =& \theta(st)\theta(t^{-1})\theta(t)\theta(t^{-1})\theta(s^{-1})\theta(s) \\ =& \theta(st)\theta(t^{-1})\theta(s^{-1})\theta(s) \end{aligned}$$

Luego

$$\theta(st)\theta(t^{-1}) = \theta(st)\theta(t^{-1})\theta(s)^*\theta(s).$$

De

$$\theta(s)\theta(t)\theta(t^{-1}) \leq \theta(st)\theta(t^{-1})$$

obtenemos

$$\theta(s)\theta(t)\theta(t^{-1}) = \theta(st)\theta(t^{-1})(\theta(s)\theta(t)\theta(t^{-1}))^*\theta(s)\theta(t)\theta(t^{-1})$$

ya que $(\theta(s)\theta(t)\theta(t^{-1}))^*\theta(s)\theta(t)\theta(t^{-1})$ es idempotente.

Ahora aplicando el item a) en $\theta(t^{-1})^*$ y $\theta(t^{-1})$, y la conmutatividad de los idempotentes

$$\begin{aligned}
\theta(s)\theta(t)\theta(t^{-1}) &= \theta(st)\theta(t^{-1})(\theta(s)\theta(t)\theta(t^{-1}))^*\theta(s)\theta(t)\theta(t^{-1}) \\
&= \theta(st)\theta(t^{-1})\theta(t^{-1})^*\theta(t)^*\theta(s)^*\theta(s)\theta(t)\theta(t^{-1}) \\
&= \theta(st)\theta(t^{-1})\theta(t)\theta(t)^*\theta(s)^*\theta(s)\theta(t)\theta(t)^* \\
&= \theta(st)\theta(t^{-1})\theta(t)\theta(t)^*\theta(t)\theta(t)^*\theta(s)^*\theta(s) \\
&= \theta(st)\theta(t^{-1})\theta(t)\theta(t)^*\theta(s)^*\theta(s) \\
&= \theta(st)\theta(t^{-1})\theta(t)\theta(t^{-1})\theta(s)^*\theta(s) \\
&= \theta(st)\theta(t^{-1})\theta(s)^*\theta(s),
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\theta(s)\theta(t)\theta(t^{-1}) = \theta(st)\theta(t^{-1}).$$

$\Leftarrow$) Si θ es una función que satisface las condiciones 1 y 2, debemos probar las condiciones a y b de la defición 2.5.3.

Para el item a), reemplazando en la condición 2, s por t, entonces obetenemos

$$\theta(t^{-1})\theta(t)\theta(t^{-1}) = \theta(1)\theta(t^{-1}) = \theta(t^{-1})$$

De nuevo en 2 reemplazando s por t y t por t^{-1}, entonces se tiene

$$\theta(t)\theta(t^{-1})\theta(t) = \theta(1)\theta(t) = \theta(t)$$

Entonces $\theta(t^{-1})$ es el inverso de $\theta(t)$ en el semigrupo inverso S. Así $\theta(t)^* = \theta(t^{-1})$.

Para el item b), por 2) tenemos que $\theta(s)\theta(t)\theta(t^{-1}) = \theta(st)\theta(t^{-1})$. Multiplicando la igualdad por $\theta(t)$ y usando a), obtenemos

$$\theta(s)\theta(t) = \theta(st)(\theta(t)^{-1}\theta(t)) \leq \theta(st),$$

pues $\theta(t)^{-1}\theta(t)$ es un idempotente. $\square$

Lema 2.5.2. *Sea G un grupo, S un monoide inverso y $\theta : G \to S$ un premorfismo unitario, entonces para todo $s, t \in G$ se tiene que:*

a) $\theta(s)\theta(t)\theta(t^{-1}) = \theta(st)\theta(t^{-1})$

b) $\theta(s^{-1})\theta(s)\theta(t) = \theta(s^{-1})\theta(st)$

Demostración. El item a) se demostró en la proposición anterior; el item b) se obtiene de manera análoga.

□

Veamos algunos ejemplos de semigrupos inversos.

El semigrupo simétrico I(X)

Sea X y Y conjuntos cualesquiera. Una función parcial $f : X \to Y$ es una función de un subconjunto de X a un subconjunto de Y. El subconjunto de X que consiste de todos los elementos de $x \in X$ para los cuales $f(x)$ está definido es llamado el dominio de f, el cual se denotará $domf$. La imagen de f es el subconjunto $imf = f(domf)$ de Y.

Dos clases especiales de funciones parciales son particularmente importantes. Para cualesquiera dos conjuntos X y Y existe una única función parcial vacía de X a Y la cual se denotará por 0_{XY}. El término función vacía se referirá a cualquier función parcial de este tipo. Para cualquier subconjunto $A \subseteq X$ la función identidad en A, denotada 1_A, es una función parcial de X en sí mismo. Tales funciones parciales son llamadas identidades parciales. La función identidad 1_X en X y la función identidad $1_\emptyset$ de un subconjunto vacío de X, el cual es solo la función vacía de X en sí mismo, son especialmente significantes. Cuando el conjunto subyacente X es claro, denotaremos estas funciones por 1 y 0 respectivamente.

Sea g una función parcial de X a Y y f una función parcial de Y a Z. La composición es una función parcial $f \circ g$ (que se escribirá fg) de X a Z, donde el dominio de fg es dado por

$$dom(fg) = g^{-1}(domf \cap img)$$

y si $x \in dom(fg)$ entonces $(fg)(x) = f(g(x))$. La imagen de fg es $f(domf \cap img)$. El caso donde $domf$ e img tienen intersección vacía no causa problemas: fg es solo la función vacía.

Será de nuestro interés aquellas funciones parciales que inducen las biyecciones entre sus dominios y las imágenes, a estas funciones parciales las llamaremos **biyecciones parciales**. Todas las identidades parciales y funciones vacías son biyecciones parciales. Si f es una biyección parcial de X a Y entonces se denotará por f^{-1} la biyección parcial de Y a X la cual es la inversa de f. Así el $domf^{-1}$ es imf y la imf^{-1} es $domf$. La composición de biyecciones parciales es una biyección parcial.

Proposición 2.5.5. *Sean X, Y, Z conjuntos y $f : X \to Y$ una biyección parcial. Entonces*

i) $f^{-1}f = 1_{domf}$ *es una identidad parcial de X, y* $ff^{-1} = 1_{imf}$ *una identidad parcial en Y.*

ii) Para una biección parcial $g : Y \to X$, las operaciones $f = fgf$ y $g = gfg$ se verifican si y solo si $g = f^{-1}$.

iii) $(f^{-1})^{-1} = f$.

iv) $1_A 1_B = 1_{A\cap B} = 1_B 1_A$ *para todas las identidades parciales 1_A y 1_B donde $A, B \subseteq X$.*

v) $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$ *para cualquier biyección parcial $g : Y \to Z$.*

Demostración. i) Observe que $x \in dom(f^{-1}f)$ cuando $x \in domf$, pues

$$(dom(f^{-1}f) = f^{-1}(domf \cap imf) = f^{-1}(imf) = domf).$$

Entonces el $domf$ y $f^{-1}f$ son el mismo. Pero $f^{-1}f$ es la función identidad en el dominio y asi $f^{-1}f = 1_{domf}$.

ii) Suponga que $f = fgf$ y $g = gfg$. Sea $y \in domg$ y sea $x = g(y)$. Entonces $x = gfg(y)$ tal que $x = g(f(x))$. Pero g es una biyección parcial y $y = f(x)$. Por lo tanto $x = f^{-1}(y)$ lo cual da $g \subseteq f^{-1}$. Ahora sea $y \in domf^{-1}$ y sea $x = f^{-1}(y)$ tal que $f(x) = y$. Entonces $(fgf)(x) = y$ tal que $f(g(y)) = y$. Pero f es una biyección parcial y $g(y) = x$, lo cual da $f^{-1} \subseteq g$. Así $f^{-1} = g$.

iii) Se sigue del item *ii*).

iv) Si $x \in dom(1_A 1_B)$, entonces $(1_A 1_B)(x) = 1_A(1_B(x)) = x$, por lo tanto $1_A 1_B$ es una identidad parcial, ya que $dom(1_A 1_B) = A \cap B$ se sigue que $1_A 1_B = 1_{A\cap B}$.

v) Tenemos que $gf(f^{-1}g^{-1})gf = g(ff^{-1})(gg^{-1})f = g(g^{-1}g)(ff^{-1})f = gf$ dado por $iv)$ que las identidades parciales conmutan. De manera similar $(f^{-1}g^{-1})gf(f^{-1}g^{-1}) = f^{-1}g^{-1}$. Entonces $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$ por $ii)$.

$\square$

El conjunto de todas las biyecciones parciales de X en si mismo, forma un monoide denotado $I(X)$, llamado el monoide inverso simétrico de X.

Proposición 2.5.6. *Sea $I(X)$ el monoide inverso simétrico de un conjunto X. Entonces los idempotentes de $I(X)$ son precisamente las identidades parciales de X. En particular, los idempotentes forman un subsemigrupo de idempotentes conmutativo.*

Demostración. Por el item $iv)$ de la proposición 2.5.5, cada elemento de la forma 1_A es un idempotente de $I(X)$. Suponga ahora que f es un idempotente. Entonces $f = fff$ y $f^{-1} = f$ por el item $ii)$ de la proposición 2.5.5. Luego $f = ff = f^{-1}f = 1_{domf}$ por item $i)$ de la proposición 2.5.5.

$\square$

De acuerdo con la definición 2.5.2, y las proposiciones 2.5.5 y 2.5.6, el monoide $I(X)$ es un semigrupo inverso.

Expansión de Birget-Rhodes de G ($\widetilde{G}^R$)

Sea G un grupo con identidad 1, denotamos por $\mathcal{P}_1(G)$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de G que contienen a 1. Sea

$$\widetilde{G}^R = \{(A, g) \in \mathcal{P}_1(G) \times G : g \in A\}$$

con multiplicación

$$(A, g)(B, h) = (A \cup gB, gh)$$

Entonces veamos que $\widetilde{G}^R$ es un monoide inverso. Para esto, probaremos que es un semigrupo regular y que sus idempotentes conmutan.

Para cada $(A, g) \in \widetilde{G}^R$ considere el elemento $(A^*, g^{-1}) \in \widetilde{G}^R$ donde

$$A^* = g^{-1}A = \{g^{-1}a \mid a \in A\}.$$

Así,

$$(A, g)(A^*, g^{-1})(A, g) = (A \cup gA^*, gg^{-1})(A, g) = (A, 1)(A, g) = (A, g)$$

y

$$(A^*, g^{-1})(A, g)(A^*, g^{-1}) = (A^* \cup g^{-1}A, g^{-1}g)(A^*, g^{-1}) = (A^*, 1)(A^*, g^{-1}) = (A^*, g^{-1})$$

Por tanto $\widetilde{G}^R$ es un semigrupo regular.

Los idempotentes de $\widetilde{G}^R$ son elementos de la forma $(A, 1)(A, 1) = (A \cup A, 1) = (A, 1)$; ya que 1 es el único idempotente de G. Entonces sean $(A, 1)$ y $(B, 1) \in \widetilde{G}^R$.

$$(A, 1)(B, 1) = (A \cup 1B, 1) = (A \cup B, 1) = (B \cup A, 1) = (B, 1)(A, 1).$$

Del Teorema 2.5.1 se concluye que $\widetilde{G}^R$ es un semigrupo inverso.

Capítulo 3

EL SEMIGRUPO DE EXEL

3.1. DEFINICIÓN

Ahora se describirá un monoide inverso construido a partir de un grupo G que fue construido por Ruy Exel como el monoide inverso universal por medio de generadores y relaciones.

Definición 3.1.1. *Sea G un grupo y considere $L = \{[g] \mid g \in G\}$. Sea L^* el semigrupo libre generado por L y sea $R \subseteq L^* \times L^*$ dado por*

$$R = \{([x^{-1}][x][y], [x^{-1}][xy]), ([x][y][y^{-1}], [xy][y^{-1}]), ([x][1], [x])/x, y \in G\}$$

Sea ζ la congruencia en L^* generada por R. Entonces

$$S(G) = L^*/\zeta = \langle L|R\rangle.$$

Otra manera de definir $S(G)$ es de la siguiente forma

Definición 3.1.2. *Sea G un grupo y considere $S(G)$ el semigrupo definido a través de generadores y relaciones, como sigue: para cada elemento $t \in G$ tomamos un generador $[t]$ y para cada par de elementos t, s en G. Consideramos las relaciones*

1. $[s^{-1}][s][t] = [s^{-1}][st]$;

2. $[s][t][t^{-1}] = [st][t^{-1}]$;

3. $[s][1] = [s]$;

4. $[1][s] = [s]$.

Entonces $S(G)$ es un monoide inverso. Este monoide es llamado semigrupo de Exel.

Nota:

- *Como consecuencia de* 1 *y* 3*, se tiene que* $[t][t^{-1}][t] = [t][t^{-1}t] = [t][1] = [t]$.
- *La condición* 4 *se puede eliminar ya que,* $[1][s] = [ss^{-1}][s] = [s][s^{-1}][s] = [s]$.

A continuación mostraremos algunos resultados que nos ayudarán a mostrar que $S(G)$ es un semigrupo inverso.

Proposición 3.1.1. *Dado un semigrupo S y una función $f : G \to S$ que satisface:*

- $f(s^{-1})f(s)f(t) = f(s^{-1})f(st)$,
- $f(s)f(t)f(t^{-1}) = f(st)f(t^{-1})$,
- $f(s)f(1) = f(s)$.

existe un homomorfismo único $f^* : S(G) \to S$ tal que $f^*([t]) = f(t)$.

Demostración. Se sigue de la Proposición 2.4.2. □

Proposición 3.1.2. *Existe un anti-automorfismo involutivo $* : S(G) \to S(G)$ tal que para cada $t \in G$, $[t]^* = [t^{-1}]$*

Demostración. Sea $S(G)^{op}$ el opuesto de $S(G)$, es decir $S(G)^{op}$ coincide con $S(G)$ como conjuntos, excepto la multiplicación que se define: sea $\alpha, \beta \in S(G)^{op}$

$$\alpha \bullet \beta = \beta\alpha,$$

donde $\beta\alpha$ corresponde a la multiplicación usual en $S(G)$. Defina $f : G \to S(G)$ por $f(t) = [t^{-1}]$, es fácil ver, usando la Definición 3.1.2, que para $s, t \in G$ se tiene

- $f(s^{-1}) \bullet f(s) \bullet f(t) = f(s^{-1}) \bullet f(st)$,
- $f(s) \bullet f(t) \bullet f(t^{-1}) = f(st) \bullet f(t^{-1})$,
- $f(s) \bullet f(1) = f(s)$.

Por la proposición 3.1.1 f se extiende a un homomorfismo $*: S(G) \to S(G)^{op}$ que cuando se ve en una función de $S(G)$ en sí mismo, en lugar de $S(G)^{op}$, es un automorfismo que satisface las propiedades deseadas.

$\square$

Proposición 3.1.3. *Para cada $t \in G$, sea $\varepsilon_t = [t][t^{-1}]$. Entonces para cada t y s en G.*

a) ε_t *es un idempotente auto adjunto, esto es* $\varepsilon_t^* = \varepsilon_t = \varepsilon_t^2$.

b) $[t]\varepsilon_s = \varepsilon_{ts}[t]$.

c) ε_t *y* ε_s *conmutan.*

Demostración.

a) $\varepsilon_t^* = [t^{-1}][t] = [t^{-1}][t][1] = [t^{-1}][t][t][t^{-1}] = [1][t][t^{-1}] = [t][t^{-1}] = \varepsilon_t$
$\varepsilon_t = [t][t^{-1}] = [1][t][t^{-1}] = [t][t^{-1}][t][t^{-1}] = \varepsilon_t^2$.

b) $[t]\varepsilon_s = [t][s][s^{-1}] = [ts][s^{-1}] = [ts][s^{-1}t^{-1}][ts][s^{-1}] = [ts][s^{-1}t^{-1}][t] = \varepsilon_{ts}[t]$.

c) $\varepsilon_t\varepsilon_s = [t][t^{-1}]\varepsilon_s = [t]\varepsilon_{t^{-1}s}[t^{-1}] = \varepsilon_s[t][t^{-1}] = \varepsilon_s\varepsilon_t$.

$\square$

Proposición 3.1.4. *Cada elemento α en $S(G)$ admite una descomposición*

$$\alpha = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s],$$

donde $n \geq 0$ y $r_1, r_2, ..., r_n, s$ son elementos de G. Adicionalmente se puede asumir que

- $r_i \neq r_j$ *para todo* $i \neq j$,
- $r_i \neq s$ *y* $r_i \neq 1$ *para todo* i.

Demostración. Sea S un subconjunto de $S(G)$ que consiste de los α que admiten la descomposición descrita. Dado que se permite que $n = 0$ vemos que cada $[s] \in S$. Es suficiente verificar que S es un subsemigrupo de $S(G)$ dado que los generadores $[s]$ forman un sistema de generadores de $S(G)$.
Sea $\alpha = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s]$. Es suficiente demostrar que $\alpha[t] \in S$, note que

$$[s][t] = [s][s^{-1}][s][t] = [s][s^{-1}][st] = \varepsilon_s[st]$$

luego $\alpha[t] = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s][t] = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}\varepsilon_s[st] \in S$. Ahora ya que los elementos idempotentes conmutan entre sí, es fácil ver como eliminar las repeticiones de los ε_r; si ε_1 aparece, se

elimina por ser identidad de $S(G)$.
Si algún $r_i = s$, entonces $\varepsilon_{r_i} = [s][s^{-1}]$, por conmutatividad de idempotentes

$$\alpha = \varepsilon_{r_1} ... \hat{\varepsilon_{r_i}} ... \varepsilon_{r_n}[s][s^{-1}][s] = \varepsilon_{r_1} ... \hat{\varepsilon_{r_i}} ... \varepsilon_{r_n}[s].$$

Así ε_{r_i} puede ser eliminado.

□

Definición 3.1.3. *Si α se escribe como $\alpha = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s]$ de manera que las condiciones de la Proposición 3.1.4 se verifican, se dice que α está en la forma estándar.*

Proposición 3.1.5. *Para cada α en $S(G)$ se tiene que:*

- $\alpha\alpha^*\alpha = \alpha$.
- $\alpha^*\alpha\alpha^* = \alpha^*$.

Demostración. Sea $\alpha = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s]$. Entonces

$$\alpha\alpha^*\alpha = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s][s^{-1}]\varepsilon_{r_n}...\varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s] = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s][s^{-1}][s] = \alpha$$

$$\alpha^*\alpha\alpha^* = [s^{-1}]\varepsilon_{r_n}...\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s][s^{-1}]\varepsilon_{r_n}...\varepsilon_{r_1}[s] = [s^{-1}][s][s^{-1}]\varepsilon_{r_n}...\varepsilon_{r_1} = \alpha^*$$

□

3.2. REPRESENTACIONES DE S(G)

Llamaremos **representación** a cualquier homomorfismo de $S(G)$ en un semigrupo. La representación más evidente de $S(G)$ es $\delta : S(G) \to G$ definida por $\delta([s]) = s$, donde $\delta(\alpha)$ es el grado de α. Claramente $\delta(\varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s]) = s$.

Veamos otra representación de $S(G)$. Sea $\mathcal{P}_1(G)$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de G que contienen el elemento neutro 1. Entonces G y $\{1\}$ son respectivamente el elemento más grande y el más pequeño de $\mathcal{P}_1(G)$ cuando G es finito.

Consideremos un homomorfismo de $S(G) \to \mathcal{F}(\mathcal{P}_1(G))$ que consta de todas las funciones de $\mathcal{P}_1(G)$ en sí mismo bajo la composición. Entonces para todo $t \in G$, sea ϕ_t la función

$$\phi_t : \mathcal{P}_1(G) \to \mathcal{P}_1(G)$$

dada por $\phi_t(E) = tE \cup \{1\}$ para cada $E \in \mathcal{P}_1(G)$.

Proposición 3.2.1. *La función* $t \in G \to \phi_t \in \mathcal{F}(\mathcal{P}_1(G))$ *satisface las propiedades dadas en la proposición 3.1.1; por lo tanto, existe una representación única* $\Lambda : S(G) \to \mathcal{F}(\mathcal{P}_1(G))$ *tal que* $\Lambda([t]) = \phi_t$.

Demostración. Para todo $t, s \in G$ y cada $E \in \mathcal{P}_1(G)$ tenemos

i) $\phi_{s^{-1}}\phi_s\phi_t(E) = \phi_{s^{-1}}\phi_s(tE\cup\{1\}) = \phi_{s^{-1}}(stE\cup\{1,s\}) = tE\cup\{s^{-1},1\} = \phi_{s^{-1}}(stE\cup \{1\}) = \phi_{s^{-1}}\phi_s t(E)$.

ii) $\phi_s\phi_t\phi_{t^{-1}}(E) = \phi_s\phi_t(t^{-1}E\cup\{1\}) = \phi_s(E\cup\{t,1\}) = sE\cup\{st,1\} = \phi_{st}(t-1)E\cup \{1\} = \phi_{st}\phi t^{-1}(E)$.

iii) $\phi_s\phi_1(E) = \phi_s(E\cup\{1\}) = \phi_s(E)$.

$\square$

Observemos que para cualquier $r \in G$ y $E \in \mathcal{P}_1(G)$, se tiene $\Lambda(\varepsilon_r)(E) = E\cup\{r\}$. En particular si $\alpha = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s]$, $\Lambda(\alpha)$ al aplicarlo al conjunto $\{1\}$ da $\{r_1, ..., r_n, s, 1\}$.

Basados en la existencia de estas dos representaciones podemos probar la unicidad de la descomposición.

Proposición 3.2.2. *Cada* α *en* $S(G)$ *admite una única descomposición estándar*

$$\alpha = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s]$$

.

Demostración. Como $\Lambda(\alpha)(\{1\}) = \{r_1, ..., r_n, s, 1\}$ y $\delta(\alpha) = s$. Si α tiene otra descomposición estándar,

$$\alpha = \varepsilon_{t_1}...\varepsilon_{t_m}[u]$$

entonces $\delta(\alpha) = s = u$ y

$$\Lambda(\alpha)(\{1\}) = \{r_1, ..., r_n, s, 1\} = \{t_1, ..., t_m, u, 1\},$$

por lo tanto

$$\{r_1, ..., r_n, s, 1\} \setminus \{s, 1\} = \{t_1, ..., t_m, u, 1\} \setminus \{u, 1\},$$

entonces

$$\{r_1, ..., r_n, s, 1\} = \{t_1, ..., t_m, u, 1\}$$

$\square$

Teorema 3.2.1. *Si G es un grupo finito de orden p, entonces $S(G)$ tiene $2^{(p-2)}(p+1)$ elementos.*

Demostración. Hay 2^{p-1} elementos en $S(G)$ de la forma $\varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[1]$ y para $p-1$ posibilidades de $s \neq 1$ hay 2^{p-2} elementos de la forma $\varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s]$. El número total de elementos es $2^{p-1} + (p-1)2^{p-2} = 2^{p-2}(p+1)$.

□

Teorema 3.2.2. *Para cada grupo G, $S(G)$ es un semigrupo inverso.*

Demostración. Asuma $\alpha \in S(G)$ admite, además de α^*, otro inverso, tal que es un elemento $\beta \in S(G)$ que cumple que $\alpha\beta\alpha = \alpha$ y $\beta\alpha\beta = \beta$. Escribiendo, en la forma estándar

$$\alpha = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s], \ \ \beta = [u^{-1}]\varepsilon_{t_m}...\varepsilon_{t_1}.$$

Por lo tanto $\beta^* = \varepsilon_{t_1}...\varepsilon_{t_m}[u]$ y tenemos que

$$s = \delta(\alpha) = \delta(\alpha\beta\alpha) = su^{-1}s,$$

de lo cual se sigue que $u = s$. Tenemos también

$$\alpha\beta\alpha = \varepsilon = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s][s^{-1}]\varepsilon_{t_1}...\varepsilon_{t_m}\varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s] = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{t_1}...\varepsilon_{t_m}[s] = \alpha$$

Por la unicidad de la descomposición estándar, se tiene que

$$\{r_1, ..., r_n\} \cup \{t_1, ..., t_m\} = \{r_1, ..., r_n\}$$

luego $\{t_1, ..., t_m\} \subseteq \{r_1, ..., r_n\}$.

Usando el mismo argumento, aplicado a la identidad $\beta\alpha\beta = \beta$ obtenemos

$$\{r_1, ..., r_n\} \subseteq \{t_1, ..., t_m\}.$$

De lo que se concluye que $\beta = \alpha^*$.

□

Considere la función $\imath : G \to \widetilde{G}^R$ dada por $\imath(g) = (\{1, g\}, g)$, entonces tenemos el siguiente lema:

Lema 3.2.1. *El semigrupo* $\widetilde{G}^R$ *es generado por los elementos* $\imath(g)$ *donde* $g \in G$. *En particular si* $(A, g) = (\{1, g_1, ..., g_n\}, g_n)$, *donde* $g = g_n$, *entonces*

$$(A, g) = \imath(g_1)\imath({g_1}^{-1}g_2)...\imath({g_{n-1}}^{-1}g_n).$$

Además, para todo $s, t \in G$.

i) $\imath(s^{-1})\imath(s)\imath(t) = \imath(s^{-1})\imath(st)$,

ii) $\imath(s)\imath(t)\imath(t^{-1}) = \imath(st)\imath(t^{-1})$,

iii) $\imath(s)\imath(1) = \imath(s)$,

iv) $\imath(1)\imath(s) = \imath(s)$.

Demostración. Sea $(A, g) = (\{1, g_1, ..., g_n\}, g_n)$. Entonces

$$(A, g) = (\{1, g_1, ..., g_{n-1}\}, g_{n-1})(\{1, {g_{n-1}}^{-1}g_n\}, {g_{n-1}}^{-1}g_n)$$

Repitiendo, obtenemos

$$(A, g) = (\{1, g_1\}, g_1)\prod_{k=2}^{n}(\{1, {g_{k-1}}^{-1}g_k\}, {g_{k-1}}^{-1}g_n) = \imath(g_1)\imath({g_1}^{-1}g_2)...\imath({g_{n-1}}^{-1}g_n)$$

Ahora,

i)

$$\begin{aligned}\iota(s^{-1})\iota(st) &= \iota(s^{-1})\iota(s)\iota(t)\\ &=(\{1, s^{-1}\}, s^{-1})(\{1, s\}, s)(\{1, t\}, t)\\ &=(\{1, s^{-1}\}, 1)(\{1, t\}, t\\ &=(\{1, s^{-1}, t\}, t)\\ &=\iota(s^{-1})\iota(st).\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\iota(st)\iota(t^{-1}) &= \iota(s)\iota(t)\iota(t^{-1})\\ &=(\{1, s\}, s)(\{1, t\}, t)(\{1, t^{-1}\}, t^{-1})\\ &=(\{1, s, st\}, st)(\{1, t^{-1}\}, t^{-1})\\ &=(\{1, s, st\}, s)\\ &=\iota(st)\iota(t^{-1}).\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\iota(s) &= \iota(s)\iota(1)\\ &= \iota(s)1\\ &= \iota(s).\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}\iota(s) &= \iota(1)\iota(s)\\ &= 1\iota(s)\\ &= \iota(s).\end{aligned}$$

□

El resultado anterior implica que el semigrupo $\widetilde{G}^R$ es una imagen homomorfa del semigrupo $S(G)$ de Exel, dado que cumple las condiciones de la Proposición 3.1.1 .

Teorema 3.2.3. *Sea G un grupo, y S un monoide inverso. Entonces para cada premorfismo unitario $\theta : G \to S$ existe un único homomorfismo $\theta^* : \widetilde{G}^R \to S$ tal que $\theta^* \imath = \theta$*

Demostración. Sea $(A, g) = (\{1, g_1, ..., g_n\}, g_n)$ un elemento de $\widetilde{G}^R$. Defina

$$\theta^*(A, g) = \theta(g_1)\theta(g_1)^* ... \theta(g_n)^*\theta(g).$$

Note que cada producto $\theta(g_j)\theta(g_j)^*$ es un elemento idempotente, la definición de θ^* es independiente del orden de elementos g_j, ya que los idempotentes en los semigrupos inversos conmutan. Entonces θ^* es una función bien definida de $\widetilde{G}^R$ a S. Observe que $\theta^*(\{1\}, 1) = \theta(1)$ y así θ^* envía la identidad de $\widetilde{G}^R$ a la identidad de S. Además

$$\theta(\imath(g)) = \theta^*(\{1, g\}, g) = \theta(g)\theta(g)^*\theta(g) = \theta(g)$$

Entonces $\theta^* \imath = \theta$.

Ahora probemos que θ^* es un homomorfismo. Sea $(A, g), (B, h) \in \widetilde{G}^R$, donde $A = \{1, g_1, ..., g_m\} g = g_m$ y $B = \{1, h_1, ..., h_n\} h = h_n$. Por definición

$$\theta^*(A, g) = \theta(g_1)\theta(g)^* ... \theta(g_m)\theta(g_m)^*\theta(g)$$

y

$$\theta^*(B,h)=\theta(h_1)\theta(h_1)^*...\theta(h_n)\theta(h_n)^*\theta(h)$$

Observe que

$$\theta(g)\theta(h_1)\theta(h_1)^*\theta(h_2)\theta(h_2)^*...\theta(h_n)\theta(h_n)^*$$

puede ser escrito como $\theta(g)$ veces el producto de la forma

$$\theta(h_p)\theta(h_p)^*\theta(g)\theta(g)^*$$

donde $1\leq p\leq n$. Ahora

$$\theta(g)\theta(h_1)\theta(h_1)^*\theta(g)^*\theta(g)$$

Por Lema 2.5.2 continuando de esta manera obtenemos que

$$\theta(g)\theta(h_1)\theta(h_1)^*...\theta(h_n)\theta(h_n)^*$$

es igual a

$$\theta(gh_1)\theta(gh_1)^*...\theta(gh_n)\theta(gh_n)^*\theta(g).$$

Ahora

$$\theta(g)\theta(h)=\theta(g)\theta(g)^*\theta(g)\theta(h)$$

el cual es igual a $\theta(g)\theta(g)^*\theta(gh)$ por Lema 2.5.2 se sigue que

$$\theta^*(A,g)\theta^*(B,h)=(\prod_{k=1}^{m}\theta(g_k)\theta(g_k)^*)(\prod_{i=1}^{n}\theta(gh_i)\theta(gh_i)^*)\theta(g)\theta(g)^*\theta(gh)$$

Pero $\theta(g)\theta(g)^*$ se produce como $\theta(g_m)\theta(g_m)^*$ consecuentemente

$$\theta^*(A,g)\theta^*(B,h)=(\prod_{k=1}^{m}\theta(g_k)\theta(g_k)^*)(\prod_{i=1}^{n}\theta(gh_i)\theta(gh_i)^*)\theta(gh)$$

Por otro lado

$$(A,g)(B,h)=(\{1,g_1,...,g_m,gh_1,...,gh_n\},gh)$$

Ahora es claro que

$$\theta^*(A,g)\theta^*(B,h)=\theta^*((A,g)(B,h)).$$

Finalmente probaremos la unicidad. Sea $\phi:\widetilde{G}^R\to S$ cualquier homomorfismo tal que $\phi\imath=\theta$. Sea $(A,g)=(\{1,g_1,...,g_n\},g_n)$. Por el Lema 2.5.2, tenemos que

$$(A,g)=\imath(g_1)\imath(g_1^{-1}g_2)...\imath(g_n^{-1}g_n)$$

Luego

$$\phi(A,g)=\theta(g_1)\theta(g_1^{-1}g_2)...\theta(g_n^{-1}g_n),$$

usando $\phi\imath=\theta$. Obtenemos una expresion alternativa para

$$\theta(g_1)\theta(g_1^{-1}g_2)...\theta(g_n^{-1}g_n).$$

Por Lema 3.2.1 tenemos que

$$\theta(g_1)\theta(g_1^{-1}g_2)=\theta(g_1)\theta(g_1)^{-1}\theta(g_2),$$

Continuando de esta manera, tenemos que

$$\phi(A,g)=\theta(g_1)\theta(g_1)^{*}...\theta(g_n)\theta(g_n)^{*}\theta(g_n),$$

lo cual es igual a $\theta^{*}(A,g)$

$\square$

Capítulo 4

ACCIONES GLOBALES Y ACCIONES PARCIALES DE GRUPOS

4.1. ACCIONES DE GRUPOS

Definición 4.1.1. *Una acción de grupo G en un conjunto X es una función $\phi : G \times X \to X$ que cumple:*

i) Para todo $x \in X$, $\phi(1, x) = x$.

ii) Para todo $x \in X$, $g, h \in G$ $\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x))$.

La función $\phi_g : X \to X$ definida por $\phi_g(x) = gx$ es llamada la trasformación de X efectuada por g.

Una manera equivalente de expresar que $\phi : G \times X \to X$ es una acción de grupo está indicada por $G \to Biy(X)$ tal que $g \to \phi_g$ es un homomorfismo.

Ejemplo 4.1.1. *Cada subgrupo G del grupo simetrico Sym_n actúa en $\{1, 2, 3, ..., n\}$ vía $\sigma \bullet n = \sigma(n)$ $(\sigma \in G)$.*

Ejemplo 4.1.2. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo K. Entonces el conjunto $GL(V) = \{A \in Hom(V, V) : det(A) \neq 0\}$ el cual consiste de*

todos los automorfismos de V, es un grupo llamado grupo lineal general de V.
Cada matriz de un grupo $G \subseteq GL(V)$ actúa sobre un espacio vectorial V vía $T \bullet v = Tv$, $(T \in G)$ esta es llamada la acción natural de G en V.

Ejemplo 4.1.3. *Sea $A \in GL(V)$ una matriz invertible. Entonces $(\mathbb{Z}, +)$ actúa sobre V vía $m \bullet v = A^m v$.*

Ejemplo 4.1.4. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n*n}$ una matriz dada. Entonces $(\mathbb{R}, +)$ actúa sobre $\mathbb{R}^n$ vía $t \bullet v = e^{tA} v$.*

Ejemplo 4.1.5. *Suponga G un grupo que actúa en X. Sea Y cualquier conjunto. Entonces G actúa sobre el conjunto $\mathcal{F}$ de todas las funciones $f : X \to Y$ vía $(g \bullet f)(x) = f(g^{-1}x)$.*

Sean $g, h \in G$; $f \in \mathcal{F}$.

- $\phi(1, f)(x) = f(1x) = f(x)$.
- $$\begin{aligned}\phi(g, \phi(h, f)) =& \phi(gh, f)\\ =& f((gh)^{-1}x)\\ =& \phi(g, f(h^{-1}(x))\\ =& \phi(g, \phi(h, f))\end{aligned}$$

4.2. ACCIONES PARCIALES DE GRUPOS

Definición 4.2.1. *Dado un grupo G con identidad 1 y un conjunto X, una acción parcial de G en X es un par*

$$\Theta = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\theta_t\}_{t \in G}),$$

donde para cada t en G, D_t es un subconjunto de X y $\theta_t : D_{t^{-1}} \to D_t$ es una función biyectiva, y además, para todo r y s en G tenemos

i) $D_1 = X$ y $\theta_1 = id_X$, la identidad en X.

ii) $\theta_r(D_{r^{-1}} \cap D_s) = D_r \cap D_{rs}$.

iii) $\theta_r(\theta_s(x)) = \theta_{rs}(x), x \in D_{s^{-1}} \cap D_{s^{-1}r^{-1}}$.

Ejemplo 4.2.1. *Si G actúa parcialmente en X entonces G actúa parcialmente en el anillo $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$.*
Sea $\alpha = \{X_g, \alpha_g\}_{g\in G}$ una acción parcial de G en X y considere la colección $\alpha' = \{S_g, X'_g\}_{g\in G}$, donde $S_g = \mathcal{P}(X_g), g \in G$ y $\alpha' : S_{g^{-1}} \to S_g$ está definida por $\alpha'_g(A) = \{\alpha_g(a)/a \in A\}$ para todo $g \in G$ y todo $A \in \mathcal{P}(X_g)$.

Es claro que α'_g, $g \in G$, es una función bien definida, y que es una biyección.
Ahora, debemos probar que α' define una acción parcial de G en el anillo $\mathcal{P}(X)$.

i) $S_1 = \mathcal{P}(X_1) = \mathcal{P}(X)$, $X_1 = X$; $\alpha'_g(A) = \{\alpha_g(a)/a \in A\}$

ii) *Si $A \in \alpha_n^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}}) \subseteq X_{(gh)^{-1}}$ para cada $a \in A$. Por tanto, $A \in \mathcal{P}(X_{(gh)^{-1}}) = S_{(gh)^{-1}}$ y se concluye que ${\alpha'_h}^{-1}(S_h \cap S_{g^{-1}}) \subseteq S_{(gh)^{-1}}$*

iii) *Para todo $A \in {\alpha'_h}^{-1}(S_h \cap S_{g^{-1}})$, tenemos que $(\alpha'_g \circ \alpha'_h)(A) = \{(\alpha_g \circ \alpha_h)(a)/a \in A\}$. Dado que $A \in S_{(gh)^{-1}}$, entonces $(\alpha'_g \circ \alpha'_h)(A) = \{\alpha_{gh}(a)/a \in A\} = \alpha'_{gh}(A)$. En conclusión $(\alpha'_g \circ \alpha'_h)(A) = \alpha'_{gh}(A)$ para todo $A \in {\alpha'_h}^{-1}(S_h \cap S_{g^{-1}})$.*

Finalmente, para todo, $A, B \in \mathcal{P}(X_{g^{-1}})$, tenemos que $\alpha'_g(A \triangle B) = \alpha'_g(A) \triangle \alpha'_g(B)$ y $\alpha'_g(A \cap B) = \alpha'_g(A) \cap \alpha'_g(B)$, porque cada α'_g con $g \in G$ es una biyección. Por lo tanto, actúa parcialmente en el anillo $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$.

Ejemplo 4.2.2. *Sea $\beta = \{B_g : Y \to Y \mid B_g(x) = gx\}_{g\in G}$ acción de G sobre Y y $X \subseteq Y$, entonces definiendo $D_g = X \cap B_g(x)$ y $\theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ por $\theta_g(x) = B_g(x)$; $\Theta = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\theta_t\}_{t\in G})$ es una acción parcial de G en X.*

i) $D_1 = X \cap B_1(x) = X$.
$\theta_1(x) = 1x = x$ *para todo* $x \in Y$, *por tanto* $\theta_1 = id_X$.

ii) $\theta_r(D_{r^{-1}} \cap D_s) = \theta_r(X \cap B_{r^{-1}} \cap X \cap B_s) = \theta_r(X \cap B_{r^{-1}} \cap B_s) = B_r(X \cap B_{r^{-1}} \cap B_s) = B_r \cap X \cap B_{rs} = X \cap B_r \cap X \cap B_{rs} = D_r \cap D_s$.

iii) $\theta_r\theta_s(x) = \theta_r(B_s(x)) = B_r(B_s(x)) = B_{rs}(x) = \theta_{rs}(x)$.

Ejemplo 4.2.3. *Sea $h : X \to X$ un homomorfismo, entonces tenemos una acción de $\mathbb{Z}$ en X. Defina $D_s = X$ si $s \in \mathbb{Z}$, $D_s = \emptyset$ si $s \notin \mathbb{Z}$; $\theta_s = h^s$ si $s \in \mathbb{Z}$ y $\theta_s = \emptyset$ si $s \notin \mathbb{Z}$. $\Theta = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\theta_t\}_{t\in G})$ es una acción parcial de $\mathbb{R}$ en X.*

i) $X_0 = X$ *y* $\theta_0 = h^0 = id_X$.

ii)
- *Caso 1:* $r \in \mathbb{Z}$ *y* $s \in \mathbb{Z}$.
  $\theta_r(D_{r^{-1}} \cap D_{rs}) = \theta_r(X \cap X) = \theta(X) = \theta_r(X) = h^r(X) = X = X \cap X = D_r \cap D_{rs}$.
- *Caso 2:* $r \in \mathbb{Z}$ *y* $s \notin \mathbb{Z}$.
  $\theta_r(D_r^{-1} \cap D_s) = \theta_r(X \cap \emptyset) = \theta(\emptyset) = h^r(\emptyset) = \emptyset = X \cap \emptyset = D_r \cap D_{rs}$.
- *Caso 3:* $r \notin \mathbb{Z}$ *y* $s \in \mathbb{Z}$.
  $\theta_r(D_{r^{-1}} \cap D_s) = \theta_r(\emptyset \cap X) = \theta(\emptyset) = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = D_r \cap D_{rs}$.
- *Caso 4:* $r \notin \mathbb{Z}$ *y* $s \notin \mathbb{Z}$.
  $\theta_r(D_{r^{-1}} \cap D_s) = \theta_r(\emptyset \cap \emptyset) = \theta_r(\emptyset) = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = D_r \cap D_{rs}$.

iii)
- *Caso 1:* $r \in \mathbb{Z}$ *y* $s \in \mathbb{Z}$; $x \in X$.
  $\theta_r(\theta_s(x)) = \theta_r(h^s(x)) = h^r(h^s(x)) = h^{r+s}(x) = \theta_{rs}(x)$.
- *Caso 2:* $r \in \mathbb{Z}$ *y* $s \notin \mathbb{Z}$. $x \in \emptyset$.
  $\theta_r(\theta_s(x)) = \emptyset = \theta_{rs}(x)$.
- *Caso 3:* $r \notin \mathbb{Z}$ *y* $s \in \mathbb{Z}$. $x \in \emptyset$.
  $\theta_r(\theta_s(x)) = \emptyset = \theta_{rs}(x)$.
- *Caso 4:* $r \notin \mathbb{Z}$ *y* $s \notin \mathbb{Z}$. $x \in \emptyset$. $\theta_r(\theta_s(x)) = \emptyset = \theta_{rs}(x)$.

Ejemplo 4.2.4. *Considere la acción parcial de θ en $\mathbb{Z}_2$ en el intervalo $X = [0,1]$ dado de $\theta_1 = id_X$, $\theta_{-1} = id_V$, donde $V = (a,1]$, $a > 0$.*

i) $\theta_1 = id_X$ *y* $D_1 = X$.

ii)
- *Caso 1:* $r = 1$ *y* $s = 1$.
  $\theta_r(D_{r^{-1}} \cap D_s) = \theta_r(X \cap X) = \theta_r(X) = id_X(X) = X = X \cap X = D_r \cap D_{rs}$.
- *Caso 2:* $r = 1$ *y* $s = -1$.
  $\theta_r(D_{r^{-1}} \cap D_s) = \theta_r(X \cap V) = \theta_r(V) = id_X(V) = V = X \cap V = D_r \cap D_{rs}$.
- *Caso 3:* $r = -1$ *y* $s = 1$.
  $\theta_r(D_{r^{-1}} \cap D_s) = \theta_r(V \cap X) = id_V(V) = V = V \cap V = D_r \cap D_{rs}$.

- *Caso 4:* $r = -1$ *y* $s = -1$.
  $\theta_r(D_{r^{-1}} \cap D_s) = \theta_r(V \cap V) = \theta(V) = id_V(V) = V = V \cap X = D_r \cap D_{rs}$.

iii)
- *Caso 1:* $r = 1$ *y* $s = 1$. $x \in X$
  $\theta_r(\theta_s(x)) = \theta_r(id_X(x)) = id_X(x) = \theta_{rs}(x)$.
- *Caso 2:* $r = 1$ *y* $s = -1$. $x \in V$.
  $\theta_r(\theta_s(x)) = id_X(x) = id_V(x) = \theta_r s(x)$.
- *Caso 3:* $r = -1$ *y* $s = 1$. $x \in V$.
  $\theta_r(\theta_s(x)) = \theta_r(id_X(x)) = id_V(x) = \theta_{rs}(x)$.
- *Caso 4:* $r = -1$ *y* $s = -1$. $x \in V$.
  $\theta_r(\theta_s(x)) = \theta_r(id_V(x)) = id_V(x) = id_X(x) = \theta_{rs}$.

Proposición 4.2.1. *Sea* $\Theta = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\theta_t\}_{t\in G})$ *una acción parcial de* G *en* X*. Entonces* $\theta_{g^{-1}} = (\theta_g)^{-1}$*, para todo* $g \in G$.

Demostración. Usando el item *iii)* de la Definición 4.2.1 obtenemos

- $\theta_g(\theta_{g^{-1}}(x)) = \theta_{gg^{-1}}(x) = \theta_1(x) = x$, $x \in D_g \cap D_1 = D_g$.
- $\theta_{g^{-1}}(\theta_g(x)) = \theta_{g^{-1}g}(x) = \theta_1(x) = x$, $x \in D_{g^{-1}} \cap D_1 = D_{g^{-1}}$.

□

Proposición 4.2.2. *Sea* G *un grupo y* X *un conjunto. Una función* $\theta : G \to I(X)$ *dada es una acción parcial de* G *en* X *si y solo si para todo* $s, t \in G$ *se tiene:*

a) $\theta_s\theta_t\theta_{t^{-1}} = \theta_{st}\theta_{t^{-1}}$

b) $\theta_1 = id_X$

En este caso θ *también satisface* $\theta_{s^{-1}}\theta_s\theta_t = \theta_{s^{-1}}\theta_{st}$

Demostración. $\Leftarrow$) Tome $s = t^{-1}$ en 1 tenemos

$$\theta_{t^{-1}}\theta_t\theta_{t^{-1}} = \theta_1\theta_{t^{-1}} = \theta_{t^{-1}}$$

Reemplazando $\theta_t\theta_{t^{-1}}\theta_t = \theta_t$. Luego por la unicidad de los inversos en los semigrupos inversos, se concluye que $\theta_t^* = \theta_{t^{-1}}$. Defina $D_t = ran(\theta_t)$ por lo que la conclusión anterior nos dice

$$dom(\theta_t) = ran(\theta_t^*) = ran(\theta_{t^{-1}}) = D_{t^{-1}}$$

Esto es, θ_t es una función de $D_{t^{-1}}$ a D_t, según sea necesario. Ahora para cualquier $s, t \in G$ tenemos

$$\theta_{t^{-1}}\theta_{s^{-1}} = \theta_{t^{-1}}\theta_{s^{-1}}\theta_s\theta_{s^{-1}} = \theta_{t^{-1}s^{-1}}\theta_s\theta_{s^{-1}}$$

En particular, los dominios de esas funciones deben coincidir. Por un lado tenemos

$$dom(\theta_{t^{-1}}\theta_{s^{-1}}) = \theta_s(D_{s^{-1}} \cap D_t)$$

Note que $\theta_s\theta_{s^{-1}}$ es la función identidad en D_s por otro lado

$$dom(\theta_{t^{-1}s^{-1}}\theta_s\theta_{s^{-1}}) = D_s \cap D_{st}$$

Ahora veamos que $\theta_r(\theta_s(x)) = \theta_{rs}$ con $x \in D_{s^{-1}} \cap D_{s^{-1}r^{-1}}$.

$$\theta_r\theta_s = \theta_r\theta_s\theta_{s^{-1}}\theta_s = \theta_{rs}$$

y

$$dom(\theta_r\theta_s) = \theta_{s^{-1}}(D_{r^{-1}} \cap D_s) = D_{s^{-1}} \cap D_{s^{-1}r^{-1}}.$$

Con respecto a la última parte de la afirmación note que, ya que $\theta_{t^{-1}}\theta_{s^{-1}}\theta_s = \theta_{t^{-1}s^{-1}}\theta_s$ y $\theta_t^* = \theta_{t^{-1}}$, tenemos que

$$\theta_{s^{-1}}\theta_s\theta_t = (\theta_{t^{-1}}\theta_{s^{-1}}\theta_s)^* = (\theta_{t^{-1}s^{-1}}\theta_s)^* = \theta_{s^{-1}}\theta_{st}.$$

$\Rightarrow$) La condición b) de la proposición se tiene de la definición de acción parcial; para el item a) será necesario ver que $dom(\theta_s\theta_t\theta_{t^{-1}}) = dom(\theta_{st}\theta_{t^{-1}})$ e $im(\theta_s\theta_t\theta_{t^{-1}}) = im(\theta_{st}\theta_{t^{-1}})$.

$$dom(\theta_{st}\theta_{t^{-1}}) = \theta_t(D_{(st)^{-1}} \cap D_{t^{-1}}) = \theta_t(D_{t^{-1}} \cap D_{t^{-1}s^{-1}}) = D_t \cap D_{s^{-1}}.$$

$$dom(\theta_s\theta_t\theta_{t^{-1}}) = \theta_t(\theta_{t^{-1}}(D_s^{-1} \cap D_t) \cap D_{t^{-1}}) = \theta_t(D_{t^{-1}} \cap D_{t^{-1}s^{-1}}) = D_t \cap D_{s^{-1}}.$$

$$im(\theta_{st}\theta_{t^{-1}}) = \theta_{st}(D_{t^{-1}s^{-1}} \cap D_{t^{-1}}) = D_{st} \cap D_s.$$

$$im(\theta_s\theta_t\theta_t^{-1}) = \theta_s(D_{s^{-1}} \cap \theta_t(D_{t^{-1}}\ D_{t^{-1}})) = \theta_s(D_{s^{-1}} \cap D_t) = D_s \cap D_{st}.$$

□

Definición 4.2.2. *Sea S un semigrupo inverso. Una acción de S es un conjunto X es un homomorfismo $\pi : S \to I(X)$.*

Teorema 4.2.1. *Para cada grupo G y cualquier conjunto X, existe una correspondencia entre*

i) Acciones parciales de G en X, y

ii) Acciones de $S(G)$ en X.

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Dada Θ un acción parcial de G en X tenemos por la proposición 4.2.2 que para todo $s, t \in G$ se tiene que $\theta_s\theta_t\theta_{t^{-1}} = \theta_{st}\theta_{t^{-1}}$, $\theta_1 = id_X$ y $\theta_{s^{-1}}\theta_s\theta_t = \theta_{s^{-1}}\theta_{st}$ entonces por la Proposición 3.1.1 existe un único homomorfismo $\theta^* : S(G) \to I(X)$, tal que $\theta^*(t) = \theta_t$.

$ii) \Rightarrow i)$ Ahora, sea $\pi : S(G) \to I(X)$ un homomorfismo, vamos a usar π para construir una acción parcial Θ de G en X. Para $g \in G$ sea $\theta_g = \pi[g]$, tenemos que

- $\theta_1 = \pi[1] = id_X$
- Sean $s, t \in G$ entonces $\theta_s\theta_t\theta_{t^{-1}} = \pi[s]\pi[t]\pi[t^{-1}] = \pi[st]\pi[t^{-1}] = \theta_{st}\theta_{t^{-1}}$.

Por tanto, por la Proposición 4.2.2 la familia $(\theta_g)_{g \in G}$ es una acción parcial de G en X.

□

BIBLIOGRAFÍA

ABADIE, F. *Enveloping actions and Takai duality for partial actions.* Journal of functional Analysis. 2003.

ÁVILA, J. y LAZZARIN, J. *Partial actions and power sets.* International Journal of mathematics and mathematical sciences. Volume 2013. 2013.

DOKUCHAEV, M.; FERRERO,M. y PAQUES, A. *Partial actions and Galois theory.* Journal of pure and applied algebra. 2007.

EXEL, R. *Partial actions of groups and actions of inverse semigroups.* American mathematical Society. Volume 126. 1998.

GRILLET, P.A. *Semigroups.An introduction to the structure theory.* Marcel Dekker,Inc. 1995.

KELLENDON, J. y LAWSON, M.V. *Partial actions of groups.* International Journal of Algebra and computation. Volume 14. 2004.

LAWSON, M.V. *Inverse semigroups.The theory of partial symmetries.* World scientific. 1998.

UNIVERSIDAD LIBRE DE BERLÍN. [Sitio web]. Facultad de Matemáticas e Informática. [Consulta: 6 de Abril de 2016]. Disponible en:
http://www.mi.fu-berlin.de/math/groups/ag-logik/Lehre/UST-chapter01.pdf