ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LAS ACTIVIDADES PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN DE ÁREA DEL RECTÁNGULO EN EL GRADO SÉPTIMO CON LA MEDIACIÓN DEL PROGRAMA CABRI GEOMETRY

IVÁN DARÍO BALLESTEROS HERRERA

DAVID ANTONIO ROJAS GARCÉS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2011

ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LAS ACTIVIDADES PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN DE ÁREA DEL RECTÁNGULO EN EL GRADO SÉPTIMO CON LA MEDIACIÓN DEL PROGRAMA CABRI GEOMETRY

IVÁN DARÍO BALLESTEROS HERRERA

DAVID ANTONIO ROJAS GARCÉS

Trabajo de grado para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas

Director

MARTIN EDUARDO ACOSTA GEMPELER

Doctor en Didáctica de las Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2011

AGRADECIMIENTOS

Primero a Dios quien nos permitió tener esta oportunidad para superarnos y ser mejores personas cada día.

A nuestras familias quienes nos apoyaron incondicionalmente y quienes se esfuerzan cada día por darnos lo mejor de sus vidas.

Al profesor Martin Acosta por su valiosa colaboración y tiempo dedicado para la realización de este proyecto de grado.

Al grupo EDUMAT-UIS por permitirnos ser parte del sueño de transformar la educación matemática para el bienestar de las futuras generaciones.

“La buena didáctica es aquella que deja que el pensamiento del otro no se interrumpa y que le permite, sin notarlo, ir tomando buena dirección”

Enrique Tierno Galván

CONTENIDO

Lista de Tablas

Lista de Figuras

RESUMEN

TITULO[1]

ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LAS ACTIVIDADES PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN DE ÁREA DEL RECTÁNGULO EN EL GRADO SÉPTIMO CON LA MEDIACIÓN DEL PROGRAMA CABRI GEOMETRY

AUTORES

BALLESTEROS HERRERA, Iván Darío y ROJAS GARCES, David Antonio.[2]

PALABRAS CLAVES

1. Teoría de las situaciones didácticas. 2. Aprendizaje por adaptación. 3. Cabri Geometry. 4. Validación. 5. Área del rectángulo.

Este Trabajo de grado hace parte del **Proyecto Institucional de Uso de la Geometría Dinámica** dirigido por el grupo EDUMAT-UIS**,** proyecto que se está aplicando en dos colegios de Bucaramanga desde el año 2009. Esta investigación de tipo cualitativo se realizó en un grupo de séptimo grado de la Institución Educativa las Américas De Bucaramanga. En ella se describen y analizan cinco actividades referentes a la conceptualización de área del rectángulo, planeadas por el grupo EDUMAT-UIS, y su implementación, a cargo de la docente Luz Mirelida Gordillo Díaz.

Nuestro objetivo es evaluar dichas actividades y su implementación, para emitir un juicio sobre las ventajas del uso de Cabri Geometry como medio facilitador de un aprendizaje por adaptación. Para esto asistimos regularmente al aula de clase durante ocho meses continuos, en los cuales registramos todo lo ocurrido en la implementación de las actividades y mediante el análisis de los datos recogidos (filmaciones, apuntes en el cuaderno y observaciones), basado en los conceptos de la Teoría de las Situaciones Didácticas, se pudo concluir que a pesar de que exista una muy buena planeación y diseño de una actividad, puede que está produzca o no las condiciones necesarias para generar una situación a-didáctica.

[1] Proyecto de grado.
[2] Facultad de Ciencias. Escuela de matemáticas. Licenciatura en Matemáticas.
Director: ACOSTA GEMPELER, Martin Eduardo; Doctor en Didáctica de las Matemáticas.

SUMMARY

TITLE[3]

THE IMPLEMENTATION OF ACTIVITIES FOR THE AREA OF RECTANGLE CONCEPTUALIZATION IN THE SEVENTH GRADE PROGRAM MEDIATION WITH CABRI GEOMETRY.

AUTHORS

BALLESTEROS HERRERA, Iván Darío y ROJAS GARCES, David Antonio.[4]

KEY WORDS

1. Theory of didactic situations. 2. Learning by Adaptation. 3. Cabri Geometry. 4. Validation. 5. Rectangle area.

This Work of degree is part of the Institutional Project of Use of the Dynamic Geometry directed by the group EDUMAT-UIS, project that is being applied in two schools of Bucaramanga from year 2009. This qualitative research was developed in the Institución Educativa las Américas De Bucaramanga's seventh grade. Here, five activities concerning the conceptualization of the rectangle area are described and analyzed, which were planned by EDUMAT-UIS research group, and its implementation is carried out by teacher Luz Mirelida Gordillo Díaz.

Our aim is to assess this activities and its implementation, in order to state an opinion about using Cabri Geometry advantages as an adaptation learning facilitator medium. For this we attended the class classroom regularly during eight months continuous, in which we registered all the happened one in the implementation of the activities and by means of collected data analysis, such as films, notes and observations, based on Didactic Situations Theory concepts, it was concluded that although there is a very good planning and design of an activity is occurring or may not generate the necessary conditions for a-didactic situation.

[3] Degree Research

[4] Science Faculty. Mathematics School. Bachelor in Mathematics.
Director: ACOSTA GEMPELER, Martín Eduardo; Mathematics Didactics Doctor.

1. INTRODUCCIÓN

Origen del proyecto

Entre los años 2000 y 2004, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), realizó un proyecto llamado "Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia" que buscaba difundir el uso de las tecnologías informáticas (en especial de las calculadoras) para la enseñanza de las matemáticas. Dicho proyecto entregó calculadoras en cada colegio, realizó la capacitación de profesores para el uso de las mismas, y conformó equipos de trabajo con profesores de colegio y profesores de universidad, que debían producir actividades de clase utilizando la tecnología.

A pesar de los logros alcanzados por este proyecto, en el año 2008 muchos de los colegios que participaron en él ya no usaban la tecnología en sus clases. El grupo Edumat-UIS, preocupado ante esta situación, realizó un diagnóstico que condujo a plantear el "Proyecto Institucional de Uso de la Geometría Dinámica", que trata de remediar las falencias del proyecto del MEN y lograr, a mediano plazo, el uso de la tecnología por parte de todos los profesores de los colegios participantes. Como parte de dicho proyecto, los colegios se comprometen a incluir a todos los profesores de matemáticas en el proceso de formación, y a hacer obligatorio el uso de la tecnología en la clase de geometría, asignando para ello horarios e infraestructura adecuados. Por su parte, el grupo Edumat-UIS se compromete a realizar la formación de profesores en didáctica de las matemáticas apoyada en la tecnología, y a diseñar actividades de clase correspondientes al currículo de geometría de los diferentes grados.

Descripción del proyecto marco

En el año 2009, se da inicio al proyecto involucrando a dos colegios[5] del área metropolitana de Bucaramanga con el objetivo de lograr que todos los profesores de las instituciones participantes utilicen el software Cabri Geometry para la enseñanza de la Geometría en secundaria. Para esto se capacita a los profesores en el diseño, aplicación y manejo de actividades de clase que les permitan crear un ambiente óptimo donde el estudiante sea el principal protagonista de su proceso de construcción del conocimiento.

El marco teórico del proyecto es la Teoría de las Situaciones Didácticas, y por lo tanto se pretende diseñar situaciones a-didácticas en las que el software tenga un rol determinante, y permitan a los estudiantes construir su propio conocimiento. El proyecto se implementa de manera gradual, cada año se profundiza un grado específico hasta abarcar todos los grados en secundaria.

Con el fin de hacer un seguimiento al diseño y aplicación de las actividades, el grupo EDUMAT involucra estudiantes de último año de Licenciatura en Matemáticas.

En el año 2009, se trabajó con el grado sexto, alrededor de los conceptos de Simetría Axial, Traslación y Rotación. Los estudiantes Oscar Corzo, Paola Delgado, María Gómez y Adriana Ávila, realizaron trabajos de grado analizando las actividades diseñadas para el concepto de traslación.

Definición del presente proyecto de grado

En el año 2010, se trabajó en el grado séptimo, alrededor de los conceptos de rectángulo, cuadrado, paralelogramo, área y perímetro. Este trabajo de grado

---

[5] El Colegio las Américas y el Colegio Vicente Azuero

busca analizar las actividades diseñadas para los conceptos de rectángulo, cuadrado y área.

Como los trabajos de grado ya mencionados se han realizado sobre el mismo proyecto, los objetivos, el marco teórico y la metodología establecida en nuestro proyecto son los mismos, pero el tema y el grado al que se aplican son diferentes. En consecuencia, las actividades diseñadas también son diferentes. Como nuestro trabajo consiste en el análisis de dichas actividades, el contenido del mismo será diferente de los demás trabajos de grado ya realizados.

Dentro del marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas, el análisis de las actividades comprende dos niveles:

1. El análisis a priori, en el que se prevén todas las posibles interacciones entre el sujeto y el medio, examinando la posibilidad de aprendizaje como producto de dicha interacción hipotética.
2. El análisis a posteriori, que consiste en comparar los comportamientos efectivos de los estudiantes (basados en datos tomados de la experiencia) con lo que se había previsto en el análisis a priori, con el fin de concluir sobre la eficacia de las actividades y su posible mejoramiento para futuras experiencias.

Esperamos de esta manera poder emitir un juicio sobre las ventajas del uso de Cabri como medio facilitador de un aprendizaje por adaptación y dar repuesta a la pregunta generada en el grupo de si las actividades planeadas cumplen a cabalidad con los objetivos trazados y además, evaluar si a través de la aplicación de éstas se logró producir una situación a-didáctica.

Para el análisis a posteriori realizamos observaciones en la institución educativa las Américas, en el grupo 7-04 de la profesora Luz Mirelida Gordillo Díaz, quien fue la encargada de la aplicación de las actividades. Los datos para realizar el análisis de las actividades fueron recogidos filmando un grupo de dos estudiantes, seleccionado al azar, durante cada actividad, permitiendo observar de manera completa el proceso de aprendizaje de los estudiantes a través de la secuencia de las actividades.

2. FUNDAMENTACIÓN TEORICA

Las actividades serán analizadas desde el punto de vista de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau. A continuación resumimos los principales conceptos de esta teoría que se tendrán en cuenta para el desarrollo de nuestro análisis[6]:

2.1 TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS (TSD)

2.1.1. Aprendizaje por adaptación

Uno de los conceptos fundamentales de esta teoría es el de **Aprendizaje por adaptación** (Margolinas, 1989), que es el aprendizaje que se produce por interacción entre un sujeto y un medio. En la figura 1 presentamos un esquema que sintetiza los principales aspectos de esa interacción.

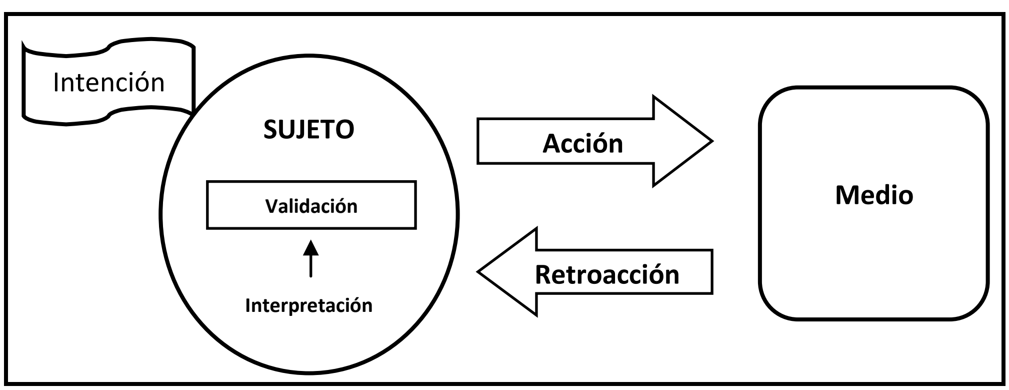


Figura 1. Aprendizaje por adaptación

[6] Esta es una reformulación del marco teórico expuesto en CORZO, Oscar; DELGADO, Paola. TRASLACION + TEORIA DE LAS SITUACIONES DIDACTICAS + CABRI GEOMETRY = UNA NUEVA HERRAMIENTA PARA LA CLASE DE GEOMETRIA. Trabajo de Grado 2010.

El *sujeto* tiene una intención (una necesidad, un objetivo) y para alcanzarla realiza una *acción* sobre el *medio.* El *medio* reacciona a esa acción (lo cual recibe el nombre de retroacción). El sujeto *interpreta* esta retroacción para poder *validar* o *invalidar* su *acción;* es decir, para decidir si alcanzó o no lo que se proponía. Si la *acción* que realizó el *sujeto* no alcanza lo que él quería, entonces la *validación* es negativa, y el *sujeto* modifica su *acción* para poder alcanzar lo que se propone. Si la *acción* sí alcanzó lo que el *sujeto* quería, la *validación* es positiva y el *sujeto* refuerza dicha *acción*.

Según la concepción de Brousseau, las retroacciones del medio son fundamentales para el aprendizaje, puesto que el sujeto produce conocimiento como resultado de la adaptación a un "**medio**" resistente con el que interactúa:

> "El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades, desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Ese saber fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por las respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje" (Brousseau, 1986)

Para Brousseau el medio es una entidad que el profesor puede moldear con el fin de obtener los objetivos de aprendizaje. Esta entidad debe tener las siguientes características:

1. Es exterior al alumno: el alumno debe reconocerle una existencia objetiva.
2. Es material: el alumno puede interactuar con él por medio de acciones.
3. No tiene ninguna intención: No debe ser percibido como una persona.
4. Reacciona: las acciones del alumno tienen efectos reconocibles.
5. Impone restricciones a la acción: No cualquier acción es posible.

El aprendizaje por adaptación no contempla la intervención de un profesor; sin embargo, en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau el rol del profesor es muy importante, puesto que es el encargado de crear la *intención* en el estudiante y preparar correctamente el *medio.* El profesor debe anticipar las posibles *acciones* del estudiante y las *retroacciones* del *medio* para garantizar que puedan ser interpretadas por el estudiante, con el fin de *validar* o invalidar sus acciones, y de esta manera se dé un aprendizaje por adaptación.

> "El elemento determinante del aprendizaje en las situaciones a-didácticas es la posibilidad de *validación*. En toda resolución de problemas debe darse la oportunidad de que los estudiantes reconozcan sus errores y cómo corregirlos; normalmente el profesor interviene directamente para señalar los errores y exponer la solución correcta (fase de evaluación según Margolinas). Pero existe la posibilidad de que el alumno decida sobre sus propias acciones, basado en sus conocimientos y en las retroacciones del medio. *Es una fase de validación, si el alumno decide él mismo sobre la validez de su trabajo*"[7].

2.1.2. Situación didáctica vs situación a-didáctica

Otro concepto fundamental de esta teoría es el de situación a-didáctica, que es aquella situación que produce un aprendizaje por adaptación. La situación a-didáctica sólo puede comprenderse con relación a la situación didáctica, que es una situación normal de clase.

Una situación es didáctica cuando un individuo (**profesor**) tiene la intención de enseñar a otro individuo (**alumno**) un **saber** matemático dado. Una situación es a-didáctica cuando se da interacción entre un sujeto y un medio para resolver un

[7] MARGOLINAS Claire (1993), La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas. Publicaciones UIS 2009.Pág. 32.

problema. Como el medio es impersonal, no tiene ninguna intención didáctica: no desea enseñarle nada al alumno. Por eso este tipo de situación recibe el nombre de a-didáctica.

Aunque podría pensarse que estas dos situaciones están totalmente en oposición, puesto que una necesita del profesor y la otra no, según la TSD se da una interacción de estas dos situaciones, en la que la situación a-didáctica puede ser parte de una situación didáctica. En la siguiente figura se ilustra esta interacción:

.

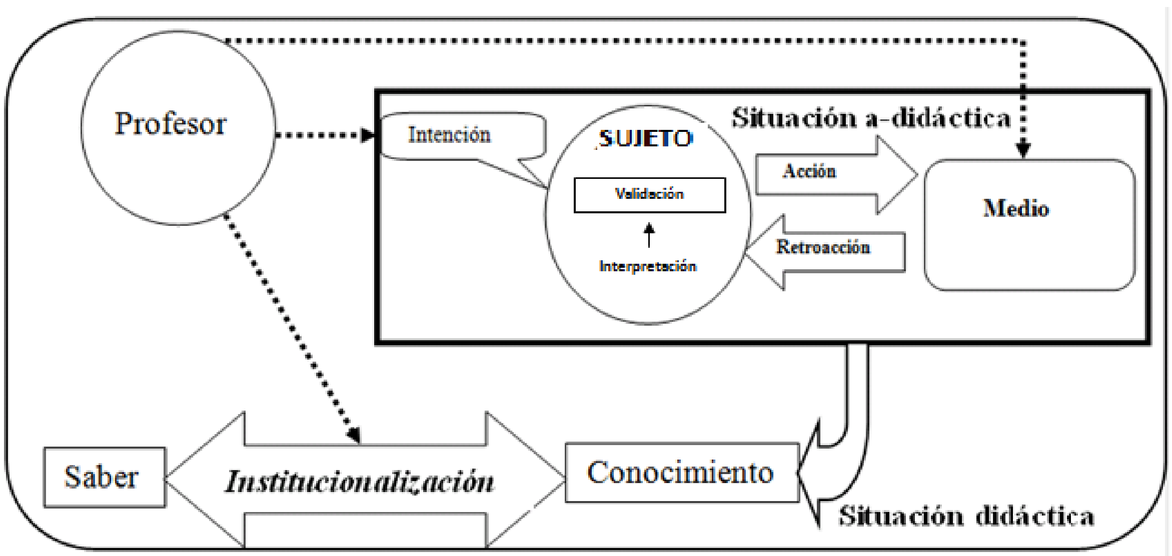


Figura 2. Relación entre Situación didáctica y situación a-didáctica

En esta figura tenemos la situación global, que es la *situación didáctica*, pues comprende las relaciones entre el profesor, el alumno y el saber. El profesor desea enseñar el saber al alumno, no comunicándoselo directamente, sino planteándole una *situación a-didáctica* (en el interior de la situación didáctica), planeada para producir un aprendizaje por adaptación. Con este fin, el profesor prepara cuidadosamente un *medio* con el cual el alumno podrá interactuar, y un *problema* que produzca en el alumno una *intención*, y desencadene unas *acciones* sobre el medio. El producto de esa situación a-didáctica es un *conocimiento:* una estrategia que permite solucionar el problema. Según la TSD, el *conocimiento* es diferente del *saber*. El conocimiento es personal y contextualizado, mientras que el saber es impersonal y descontextualizado. Por lo tanto, una vez finalizada la situación a-didáctica, el profesor debe explicitar las relaciones entre el conocimiento construido por el alumno gracias a la situación a-didáctica y el saber que desea enseñar. A este proceso se le llama *institucionalización.*

Tenemos entonces al interior de la situación didáctica una situación a-didáctica que el profesor utiliza para que los alumnos construyan un conocimiento, al cual podrá referirse para exponer el saber. La función principal del profesor es la de preparar la situación a-didáctica: seleccionar cuidadosamente el *medio* y el *problema* que planteará a los alumnos. Mientras se lleva a cabo la situación a-didáctica, el profesor se abstiene de comunicar el saber a los alumnos, pues de esa manera impediría que se realice un aprendizaje por adaptación. Esto no quiere decir que el profesor no deba intervenir durante la situación a-didáctica, sino que su intervención debe limitarse a animar al alumno a resolver el problema, hacerle tomar conciencia de las acciones que puede realizar y de las retroacciones del medio, pidiéndole que sea él mismo quien decida si resolvió o no el problema (validación). Este proceso recibe el nombre de *devolución.* Una vez terminada la situación a-didáctica, el profesor retoma su responsabilidad de enseñar, explicitando las relaciones entre el conocimiento construido en la situación a-didáctica y el saber que desea comunicar.

En el análisis que desarrollamos en nuestro trabajo, trataremos de identificar el funcionamiento a-didáctico de las actividades propuestas, resaltando la interacción del alumno con el medio: las acciones del alumno, las retroacciones del medio y las posibilidades de validación.

2.1.3 CABRI GEOMETRY COMO MEDIO

En el Proyecto Institucional de Uso de la Geometría Dinámica se utiliza el software Cabri como medio con el cual el alumno interactúa para lograr un aprendizaje por adaptación. Dicho software recibe el nombre de geometría dinámica porque permite realizar construcciones geométricas por medio de la manipulación directa (sin intermedio de un lenguaje de computador) de objetos en la pantalla, y también permite la manipulación de objetos ya construidos, redibujándolos en tiempo real.

En Cabri se pueden realizar dos *tipos de acción* que tienen dos *tipos de retroacción* correspondientes:

- *Tipo de acción Construir*: haciendo uso de los menús de herramientas podemos pedir a Cabri que dibuje en la pantalla diferentes objetos geométricos (rectas, segmentos, círculos, polígonos, etc.) con relaciones entre ellos (pertenencia, perpendicularidad, paralelismo, etc.). La *retroacción* correspondiente a *construir* es un *dibujo estático* en la pantalla, que corresponde a lo que se le pidió que construyera. Por ejemplo, si se selecciona la herramienta 'Segmento' y se hacen dos clic en la pantalla, aparece un segmento de recta limitado por dos puntos.

- *Tipo de acción Arrastrar:* La herramienta *Mano*[8] permite agarrar los objetos ya construidos y desplazarlos en la pantalla, garantizando que las relaciones geométricas construidas se mantienen durante el movimiento.

[8] Como explicamos en la introducción, para la aplicación de las actividades se utilizó la versión de Cabri de las calculadoras TI-92 y Voyage, versión en la que aparece la herramienta Mano como una tecla independiente. En la versión de Cabri para el computador, el arrastre se realiza con la herramienta Apuntador, o de manera implícita con cualquiera de las herramientas de construcción.

Las *retroacciones* correspondientes a la acción de *arrastrar* son *fenómenos dinámicos* en la pantalla: algunos objetos se mueven, y ese movimiento tiene patrones determinados.

En Cabri, el comportamiento de los objetos es geométrico; es decir, "se conservan intactas las relaciones geométricas que hayan sido declaradas en la construcción, así como las propiedades geométricas implícitas",[9] tanto al construir como al arrastrar. Esta característica supone una gran ventaja, pues las retroacciones del medio corresponden al saber geométrico, y por lo tanto los conocimientos que construyen los alumnos en interacción con Cabri tendrán una correspondencia directa con el saber que se quiere enseñar.

2.2. CONCEPTOS TRABAJADOS

2.2.1. SIMETRÍA AXIAL[10]

2.2.1.1. Definición matemática

La simetría axial, en geometría, es una transformación respecto de una recta eje de simetría, en la cual cada punto de una figura se asocia a otro punto llamado imagen, que cumple con las siguientes condiciones:

a) La distancia de un punto y su imagen al eje de simetría es la misma.

b) El segmento que une un punto con su imagen es perpendicular al eje de simetría.

[9] Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Pág. 19
[10] Tomado de http://es.wikipedia.org/wiki/Transformaci%C3%B3n_isom%C3%A9trica#Simetr.C3.ADa_axial (consultada 20 de febrero 2011)

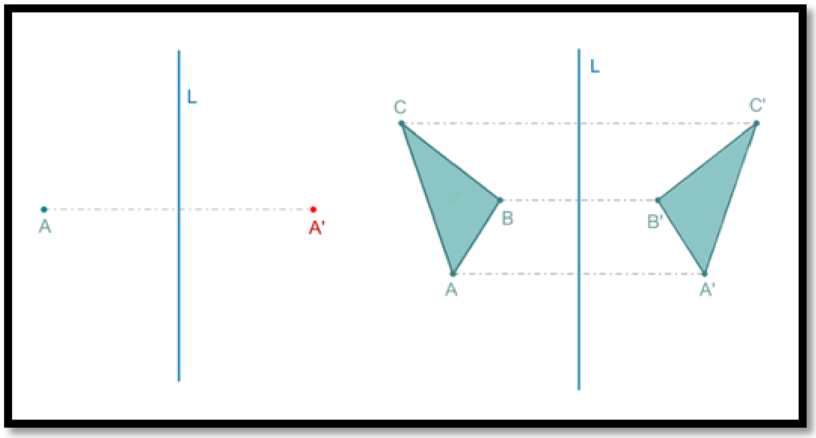


Figura 3. Simetría axial del punto A y Simetría axial de un triangulo

En la simetría axial se conservan las distancias y la amplitud de los ángulos pero no su sentido. El eje de simetría es la mediatriz de los segmentos que unen puntos correspondientes.

La simetría axial puede asociarse al fenómeno físico de reflexión por un espejo plano y puede considerarse como una modelación geométrica de dicho fenómeno. Toda figura y su simétrica tienen igual tamaño y forma (figuras simétricas son congruentes).

Eje de simetría de una figura: Se dice que una figura *tiene un eje de simetría* si es posible trazar una recta tal que la imagen de la figura con respecto a ese eje es ella misma.

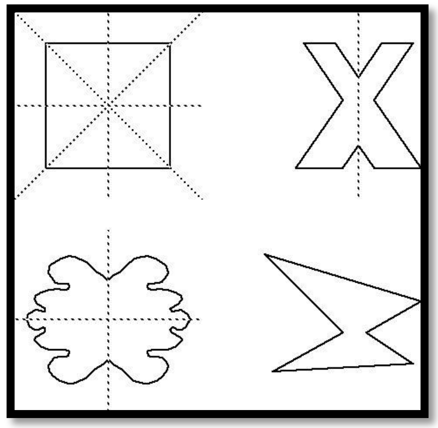


Figura 4. Ejes de simetría de algunas figuras

Para poder determinar intuitivamente el eje de simetría se puede tomar una hoja y dibujar una figura geométrica, luego se empieza a doblar de manera que coincidan los trazos de ambas caras. El pliegue indicará entonces el eje.

2.2.1.2. Características didácticas

Hablamos de eje de simetría ya que se utilizará este concepto en la primera actividad para que los estudiantes empiecen a clasificar cuadriláteros con ejes de simetría, con el fin de que lleguen a identificar dentro de los posibles cuadriláteros el rectángulo y el cuadrado. Es una forma de conectar el trabajo del año anterior, cuando se trabajó el concepto de simetría axial, con el trabajo de este año, que trata de los cuadriláteros.

2.2.2. ÁREA

2.2.2.1. Definición matemática

Área es la extensión o superficie comprendida dentro de una figura de dos dimensiones, que se expresará en unidades de medida llamadas superficiales**.**

La idea de que el área es la medida que proporciona el tamaño de la región encerrada en una figura geométrica proviene de la antigüedad. En el Antiguo Egipto, tras la crecida anual de río Nilo inundando los campos, surgió la necesidad de calcular el área de cada parcela agrícola para restablecer sus límites; para solventar eso, los egipcios inventaron la geometría, según Heródoto.
De manera axiomática podemos definir el área[11] de la siguiente manera:

Regiones poligonales

Definición 1:

Una *región triangular* es la reunión de un triangulo y su interior.

Definición 2:

Una *región poligonal* es una figura plana que se forma al reunir un número finito de regiones triangulares, tales que si dos cualesquiera de ellas se intersecan, su intersección es o bien un punto o un segmento.

Postulado del área:

A toda región poligonal le corresponde un *número positivo único*.
Entonces de acuerdo al postulado del área podemos concluir que el *área* es un *número positivo único* que se le asigna a una *región poligonal*.

2.2.2.2. Características didácticas[12]

El tratamiento habitual que recibe el área en la enseñanza, se suele limitar en el nivel de primaria y secundaria al estudio de las fórmulas para el cálculo de áreas. Se ha constatado que para una mayoría de alumnos de primaria el área se reduce

[11] MOISE, Edwin. DOWNS, Floyd. Geometria Moderna. Addison-Wesley Iberoamericana, Massachusetts, EE.UU. Primera edición en español, 1966, por la editorial Addison-Wesley. Pag 293

[12] Tomado de la página web “El Area, recursos didácticos para su enseñanza en primaria, de Rosa Corberán.

http://www.kekiero.es/area/area/e3.html (consultada 25 de febrero 2011) a la expresión "longitud x anchura" y a una fórmula para determinar el área del círculo.

Este tipo de enseñanza conduce a los alumnos a desarrollar una pobre concepción numérica del área, asociando ésta a una fórmula de cálculo. Esta extrema pobreza de su instrucción contrasta con su rico contexto en la naturaleza, la cultura y la sociedad.

Algunos investigadores advierten que limitar la enseñanza del área a las fórmulas para su cálculo, se convierte para los alumnos en un obstáculo para comprender el área como número de unidades que recubren la superficie y para desarrollar el área como una propiedad que se conserva por recorte y pegado.

Son frecuentes los errores cometidos por los alumnos al utilizar las fórmulas. Se observa dificultad e incluso incapacidad de utilizarlas para calcular áreas de superficies poligonales sencillas o para aplicarlas con éxito a la resolución de problemas relativamente sencillos y que pueden requerir algo más que una sustitución de un número dentro de una fórmula. Un ejemplo muy frecuente en los alumnos sucede cuando se les pide el área de un triángulo del que se conocen las dimensiones de los tres lados; al no recordar cómo es la fórmula, multiplican las tres dimensiones.

Así pues, a la hora de abordar la enseñanza de las fórmulas para el cálculo de áreas es necesario tener en cuenta la complejidad de éstas. La fórmula de área establece la relación entre magnitudes de distinta naturaleza, una bidimensional (el área) y otras unidimensionales (longitudes), y esta idea es conceptualmente compleja y difícil de comprender para una mayoría de alumnos.

Desde una perspectiva didáctica es necesario tener en cuenta las siguientes orientaciones:

- La enseñanza del área no debe limitarse a la enseñanza de las fórmulas para su cálculo.
- No introducir el uso de las fórmulas antes de que los alumnos estén familiarizados con el área como cantidad bidimensional, como magnitud autónoma y como número de unidades que recubren una superficie.
- Estudiar en contextos geométricos el área de superficies planas, analizando los elementos de los que depende el área.
- Estudiar el carácter bidimensional de las fórmulas del área.

2.2.3. RECTÁNGULO Y CUADRADO

2.2.3.1. Definiciones matemáticas

Rectángulo[13]

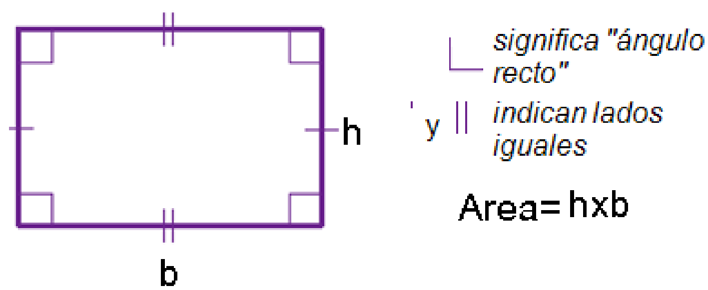


Figura 5. Área del Rectángulo

Un **rectángulo** es una figura de cuatro lados cuyos ángulos son todos rectos (90°). Además los **lados opuestos** son paralelos y de la misma longitud.

[13] http://es.wikipedia.org/wiki/Rect%C3%A1ngulo

Cuadrado[14]

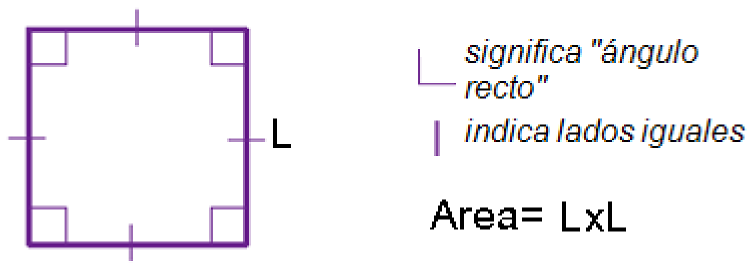


Figura 6. Área del Cuadrado

Un cuadrado es una figura de cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos (90°) Además los lados opuestos son paralelos. Un cuadrado también es un **rectángulo** (ángulos de 90°) y un **rombo** (lados iguales).

2.2.3.2. Características didácticas

En los primeros años de primaria el trabajo con figuras geométricas es esencialmente un trabajo de asociación de formas con nombres y reconocimiento de dichas formas en el entorno de los alumnos. Los alumnos aprenden a reconocer el rectángulo y el cuadrado como formas globales bidimensionales (gestalt), y a distinguirlas entre sí (un cuadrado no es rectángulo, pues sus lados no son desiguales). Por el contrario, en los últimos grados de primaria y los primeros de la secundaria, el estudio de las figuras geométricas recibe un carácter más formal y teórico: las figuras no se conciben como formas bidimensionales globales, sino como composición o ensamblaje de elementos unidimensionales (segmentos, lados) que tienen relaciones geométricas entre ellos (adyacentes, opuestos, paralelos, perpendiculares…). La atención se desplaza de la forma global a los elementos que componen dicha forma y las relaciones entre ellos. El

[14] http://es.wikipedia.org/wiki/Cuadrado

conocimiento construido en los primeros años se convierte en un obstáculo para el estudio teórico de las figuras, impidiendo el reconocimiento de los elementos unidimensionales y de sus relaciones. Los alumnos tenderán entonces a utilizar su conocimiento perceptivo del rectángulo y el cuadrado, sin tener en cuenta las relaciones de perpendicularidad de sus lados.

El uso del arrastre en Cabri permite invalidar las construcciones basadas únicamente en el reconocimiento perceptivo de las formas globales, pues las relaciones entre los elementos unidimensionales se pierden al arrastrar. Las relaciones que se mantienen durante el arrastre son únicamente las que se construyen de manera explícita. Por eso para que un rectángulo "resista el arrastre" es necesario que para su construcción se utilicen las herramientas 'recta perpendicular' y 'recta paralela'. El uso de dichas herramientas implica que el alumno reconozca la necesidad de garantizar esas relaciones entre los elementos constitutivos de las figuras.

2.3. EJEMPLO DE SITUACIÓN A-DIDÁCTICA

A continuación utilizaremos una de las actividades planeadas para ilustrar cómo utilizamos el marco teórico. Esta actividad consiste en construir un rectángulo de manera que al arrastrar los elementos de la construcción, siga siendo rectángulo.

El objetivo de esta actividad es invalidar las estrategias únicamente perceptivas para el reconocimiento y la construcción de un rectángulo. Como lo dijimos en el numeral (2.2.3.2.), los alumnos tenderán a tratar el rectángulo como una forma global bidimensional, olvidando los elementos unidimensionales que lo conforman y las relaciones entre ellos. Por el contrario, el saber matemático asociado al rectángulo consiste en reconocer esos elementos y esas relaciones. Podemos entonces a priori identificar el saber matemático en juego, y dos tipos de conocimiento de los alumnos: un conocimiento inicial (antes de realizar la actividad) y un conocimiento final (producto de la actividad):

El saber: Un **rectángulo** es una figura de cuatro lados cuyos ángulos son todos rectos (90°).

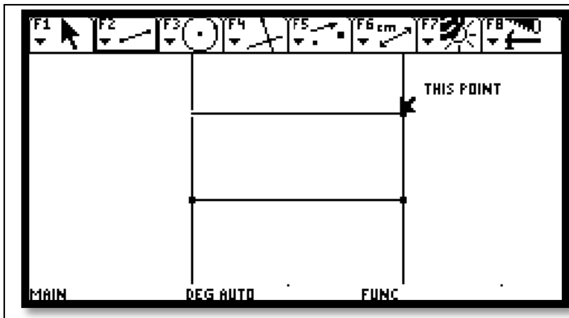
Conocimiento inicial: el rectángulo es una forma global bidimensional equivalente a la siguiente imagen prototípica:

Figura 7. Imagen de rectángulo

El conocimiento final: Un rectángulo está bien construido cuando al arrastrar sus vértices o sus lados sigue conservando la forma de rectángulo.

Como **medio** se utilizarán todas las herramientas de construcción de Cabri, con las cuales tendrán que construir un rectángulo de manera que al arrastrar sus lados o sus vértices siga siendo un rectángulo.

Para que se pueda dar interacción entre el sujeto y el medio debe existir una intención; en una situación a-didáctica la intención es producida por el problema que plantea el profesor: en este caso, construir un rectángulo. Para ejecutar esta intención el sujeto utiliza su conocimiento inicial y por lo tanto realiza unas acciones sobre el medio intentando reproducir una imagen mental de rectángulo (por ejemplo, selecciona la herramienta segmento y traza cuatro segmentos consecutivos con forma de rectángulo). La primera retroacción que genera el medio es estática, esa retroacción muestra una figura que tiene forma de rectángulo en la pantalla. El alumno interpreta que esta construcción es un rectángulo y valida su construcción. En este momento interviene la segunda condición del problema que decía que el rectángulo debería resistir el arrastre (por ejemplo, el profesor recuerda esa condición y solicita que arrastre los vértices). Entonces el alumno realiza la acción de arrastrar los vértices.



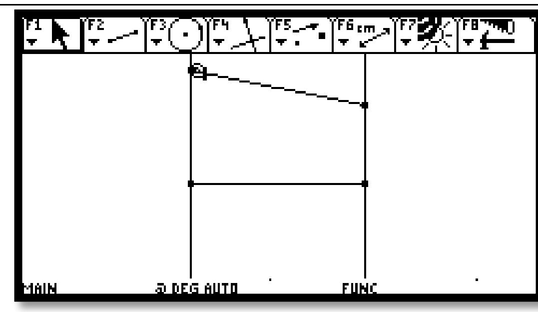


Tabla 1: Invalidación de estrategia perceptiva

La retroacción del medio consiste en el desplazamiento de los puntos y de los segmentos. El alumno interpreta ese nuevo dibujo como un no-rectángulo, y por lo tanto invalida su estrategia de construcción. Al invalidar su construcción el alumno debería abandonar dicha estrategia y buscar una nueva. El alumno podrá intentar tantas veces como quiera, pero siempre que utilice el conocimiento inicial, es decir la asociación del rectángulo con una forma global, el arrastre invalidará su construcción. Estas sucesivas invalidaciones lo llevarán a plantearse la pregunta de cómo lograr que el rectángulo construido no pierda su forma al arrastrar. Esta pregunta servirá de base al profesor para presentar el saber: lo importante en el rectángulo es la relación de perpendicularidad entre los lados consecutivos, y para lograr que esa perpendicularidad se mantenga durante el arrastre es necesario utilizar la herramienta ‘recta perpendicular’.

Interacción del alumno con el medio				
Etapa de construcción		**Etapa de validación de la construcción**		
Acción (Alumno)	Retroacción (Medio)	Acción (Alumno)	Retroacción (Medio)	Indicio de aprendizaje
Construye con la herramienta “polígono” o “segmento” un rectángulo.	Muestra un rectángulo perceptivamente bien hecho.	Arrastra todos los lados y vértices del rectángulo.	Deja de ser rectángulo cuando se arrastra alguno de sus componentes.	Modifica la acción
Construye el rectángulo utilizando la herramienta “recta perpendicular” en alguno de sus lados y ajusta a ojo los otros para obtener su forma.	Muestra un rectángulo perceptivamente bien hecho.	Arrastra todos los lados y los vértices del rectángulo construido.	Alguno de sus componentes conservan las propiedades y otros no.	Modifica la acción
Construye un rectángulo utilizando las herramientas “recta perpendicular” y/o “recta paralela” de cabri.	Muestra un rectángulo perceptivamente bien hecho.	Arrastra todos los lados y los vértices del rectángulo construido.	El rectángulo resiste el arrastre de todos sus componentes.	Refuerza la acción (Estrategia ganadora)

Tabla 2: Resumen proceso de aprendizaje por adaptación- ejemplo

3. METODOLOGÍA

Este trabajo de grado hace parte del “Proyecto Institucional de Uso de la Geometría Dinámica” del grupo EDUMAT-UIS. Nuestro trabajo dentro del grupo consiste en hacer un **análisis a priori** de las actividades propuestas, teniendo en cuenta la orientación realizada en el curso de capacitación y las guías que se entregan a los profesores, donde se hacen hipótesis sobre las acciones de los estudiantes y las retroacciones del medio. Y un **análisis a posteriori,** confrontando las hipótesis con lo que realmente sucedió cuando los estudiantes se enfrentan a las actividades, para lo cual se realizaron registros en video de las actividades realizadas en el salón de clases.

Las actividades fueron aplicadas por la profesora Luz Mirelida Gordillo Díaz en la Institución Educativa las Américas, en séptimo grado, durante el año 2010. Es un grupo regular de colegio que el año anterior trabajó las actividades diseñadas en Cabri para el grado sexto. La profesora cuenta con un salón especial para utilizar calculadoras TI-92 y Voyage con el software Cabri; hay una calculadora por cada dos estudiantes. En este salón los alumnos se organizan en mesas (4 por mesa) y es posible proyectar la pantalla de una calculadora a todo el salón.

Para recolectar las evidencias visuales de la aplicación de las actividades, durante cada clase filmamos a una pareja de estudiantes. Nuestra intención era observar el comportamiento del grupo observado durante toda la actividad. Además filmábamos también las intervenciones de la profesora hacia el grupo y la puesta en común. Cada clase tomábamos un grupo diferente al azar y repetíamos el proceso para cada una de las actividades.

4. ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES

4.1. ACTIVIDAD DE CUADRILÁTEROS CON EJES DE SIMETRÍA

OBJETIVO (INTENCIÓN DEL PROFESOR): Identificar y clasificar cuadriláteros que tienen un eje de simetría.

Esta actividad se utilizará para la introducción al rectángulo y el cuadrado, los cuales se trabajarán en detalle en las próximas actividades.

MEDIO: Se les entrega a los estudiantes una figura de Cabri que tiene un cuadrilátero cualquiera, el cual se creará con la herramienta "polígono", y una recta.

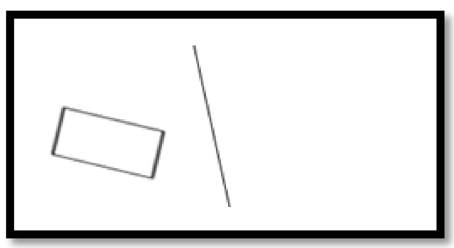


Figura 8. Actividad de cuadriláteros con ejes de simetría

Antes de la tarea, se pedirá a los alumnos que utilicen la herramienta 'simetría axial' para que construyan el reflejo del cuadrilátero con respecto a la recta y lo hagan punteado; el profesor podrá recordar las "propiedades de la simetría axial"[15] garantizadas por el uso de la herramienta.

[15] Las propiedades de la simetría axial son: las rectas que unen cada punto con su reflejo son perpendiculares al eje, cada punto y su reflejo tienen la misma distancia al eje.

PRIMERA TAREA: Modificar el cuadrilátero arrastrándolo de sus lados o de sus vértices, de manera que coincida con su reflejo, es decir, que se vea un sólo cuadrilátero.

4.1.1. ANÁLISIS A PRIORI

Los estudiantes utilizarán el arrastre para 'ajustar' o 'cuadrar' el dibujo de manera que perceptivamente el cuadrilátero y su reflejo coincidan totalmente. Al tener esa imagen, los alumnos la mostrarán al profesor y se les pedirá que la dibujen en su cuaderno y en el tablero.

Se espera que los grupos presenten diferentes cuadriláteros solución. Si no es así, se pedirá a los que terminaron que busquen otros posibles cuadriláteros solución.

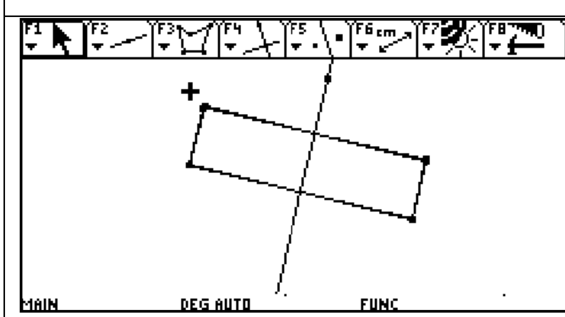
Interacción del alumno con el medio		
Acción(Alumno)	**Retroacción(Medio)**	**Indicio de aprendizaje**
Ajusta el dibujo hasta que se vea un triángulo.	Muestra la imagen del triángulo.	Modifica la acción
Ajusta el dibujo hasta que un lado del cuadrilátero y su reflejo sean paralelos y superpuestos al eje de simetría.	Muestra la imagen del cuadrilátero unido con su reflejo por uno de los lados.	Modifica la acción

Ajusta el dibujo hasta que coincidan el cuadrilátero y su reflejo totalmente.	Muestra la imagen del cuadrilátero y su reflejo como una sola.	Refuerza la acción (Estrategia ganadora)

Tabla 3. Resumen proceso de Aprendizaje por Adaptación

Cuando los alumnos hayan obtenido más de cuatro cuadriláteros solución distintos, se organizará una puesta en común para mostrarlos, con el fin de que todos los alumnos obtengan las diferentes soluciones.

En la puesta en común, los diferentes grupos de estudiantes pasarán a mostrar a sus compañeros los cuadriláteros solución obtenidos, explicarán cómo los obtuvieron y por qué cumplen todas las condiciones. Se espera que los estudiantes den los nombres a los diferentes cuadriláteros solución. Por ejemplo: rectángulo, cuadrado, rombo, cometa, etc. Se espera que los estudiantes interioricen el concepto de eje de simetría y que estén en capacidad de describirlo con sus propias palabras. También que el alumno esté en la capacidad de agrupar los cuadriláteros solución de acuerdo a sus características con respecto al eje de simetría.

<table>
<tr><th colspan="2">Posibles Cuadriláteros Solución</th></tr>
<tr><td>
</td>
<td>Rectángulo

Paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí.
Sus lados paralelos son iguales, dos a dos.
Sus dos diagonales son iguales, y se cortan en partes iguales
</td></tr>
</table>

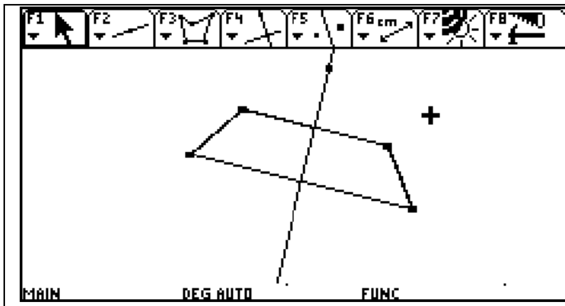
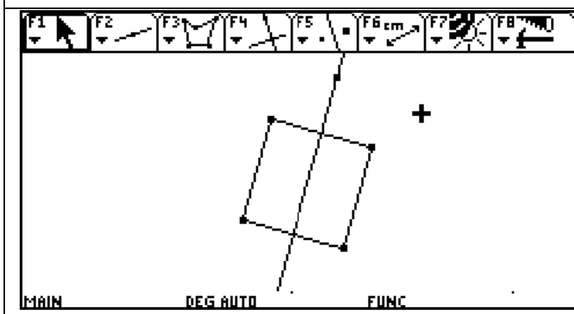
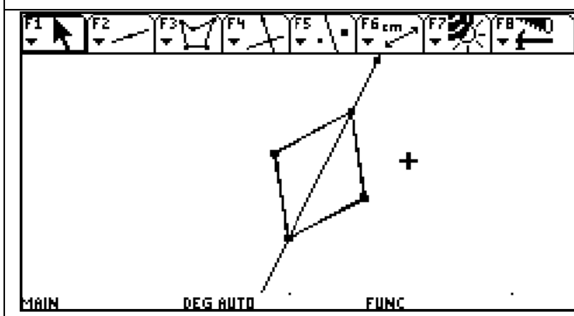
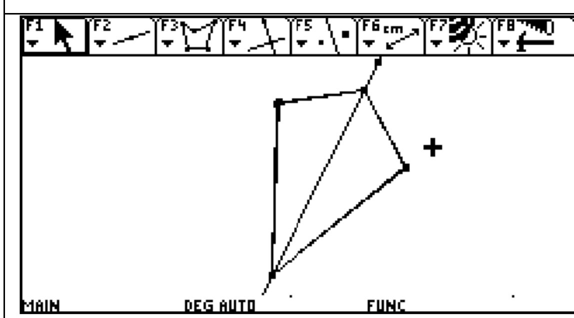
	**Trapecio** • Cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y otros dos no paralelos. • Los lados paralelos se llaman bases del trapecio y la distancia entre ellos se llama altura.
	**Cuadrado** • Un cuadrado es un rectángulo que tiene sus cuatro lados iguales. • Sus cuatro lados forman ángulos rectos entre sí.
	**Rombo** • Cuadrilátero paralelogramo cuyos cuatro lados son de igual longitud. • Sus diagonales son perpendiculares entre sí y cada una divide a la otra en partes iguales.
	**Cometa** • Cuadrilátero de lados iguales dos a dos. • Diagonales perpendiculares entre sí.

Tabla 4. Posibles cuadriláteros solución

Se espera profundizar un poco más en la identificación del rectángulo y del cuadrado para conocer algunas de sus principales características y poder preparar a los estudiantes con conceptos básicos que necesitarían en las actividades siguientes.

Por último, se institucionalizará el concepto de 'figura con un eje de simetría'[16], y el concepto de cuadrilátero como polígono de cuatro lados.

SEGUNDA TAREA: Teniendo una recta como eje de simetría, construir un cuadrilátero de manera que coincida con su reflejo respecto a la recta, incluso si se arrastra la recta o el cuadrilátero.

Se espera que los alumnos utilicen la validación por arrastre, una vez que tengan alguna propuesta de solución. Para esto deberán arrastrar el eje, tomándolo por el punto o la recta, y el polígono, tomándolo por un lado o cualquiera de sus vértices; si la figura y su reflejo dejan de coincidir, la construcción es incorrecta; si coinciden siempre, la construcción es correcta.

Los estudiantes seguramente llevarán la figura al profesor para preguntar si es correcta o no. El profesor les preguntará: "¿ya hiciste la prueba del arrastre?" Y les pedirá que arrastren el eje y el polígono. Sólo aceptará como válida una construcción que resista todas las posibilidades de arrastre. Es necesario que una de las soluciones propuestas sea un rectángulo. Si ninguna de las soluciones propuestas es un rectángulo, el profesor pedirá que busquen otras soluciones, o propondrá la solución del rectángulo.

Para la puesta en común pasarán los diferentes grupos, dejando para el final al que trabaje con el rectángulo. Se pedirá que muestren la figura y que construyan el reflejo utilizando 'simetría axial' para ver si coincide con la figura, y que apliquen la prueba del arrastre. Si la figura resiste la prueba del arrastre, se pedirá a los alumnos que expliquen el proceso de construcción y por último, se explicitarán las características de la figura, por ejemplo, que hay dos puntos sobre el eje de

[16] Una figura tiene un eje de simetría, si al reflejarla con respecto a ese eje coincide completamente con su reflejo.

simetría de manera que coinciden con sus reflejos y los otros dos puntos son simétricos con respecto al eje.

Cuando se exponga el rectángulo, el profesor explicitará que dos lados deben ser perpendiculares al eje y los otros dos paralelos al eje.

4.1.2. ANÁLISIS A-POSTERIORI

PRIMERA TAREA

Así como se había planeado en el análisis a priori, la profesora comienza su clase dando una introducción sobre el uso de la herramienta “simetría axial” para que los alumnos recordaran cómo utilizar dicha herramienta y para que estuvieran en la capacidad de construir el reflejo de un cuadrilátero con respecto a una recta dada; ésta es la construcción dada a los estudiantes y un diálogo de clase para ilustrar la finalidad de la introducción de la profesora:

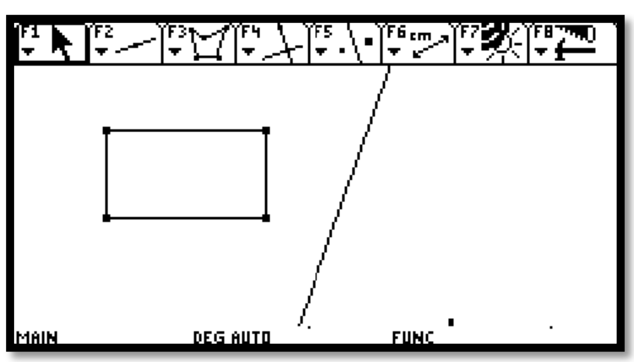


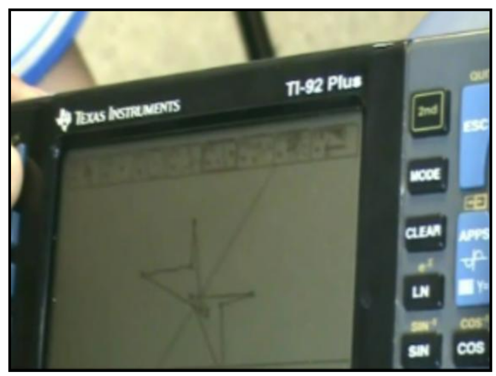
Figura 9. Construcción dada a los estudiantes

Diálogo:

P: *Entran a F5, y le dan en reflexión, ahora se paran en el polígono "enter" y después se paran en el eje y aquí les va a salir el simétrico ¡listo! a ver; quiero verlos a todos ahí. No son capaces, es simple; entran a F5, reflexión, clic en el polígono y en la recta ¡Fácil. a ver!*

Después de que todos los estudiantes realizaron el simétrico, la profesora dio la siguiente instrucción:

Segunda tarea: *Vamos a mover el polígono, y pueden pasar del eje si quieren, hasta que el uno coincida con el otro ¡listo!*

Ocurrencias de la clase	***Evidencias***
Los estudiantes una vez que tienen el cuadrilátero con su simétrico, empiezan arrastrando uno de sus vértices. ***E:*** *profesora se estira y no coinciden.* ***P:*** *Usted tiene que mover todo hasta que se acomoden y quede uno encima del otro.*	
E1: *ahí sí, parece una mariposa, vamos a mirar si así da algo. No profesora venga agarremos otro punto que este está difícil*	

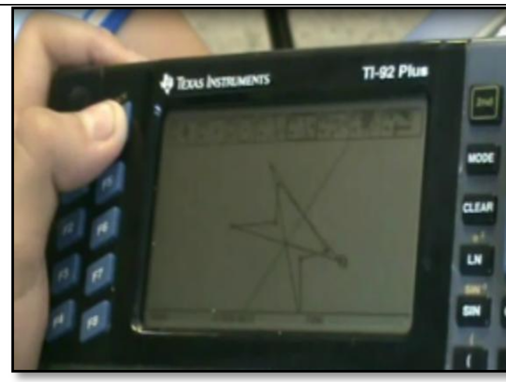
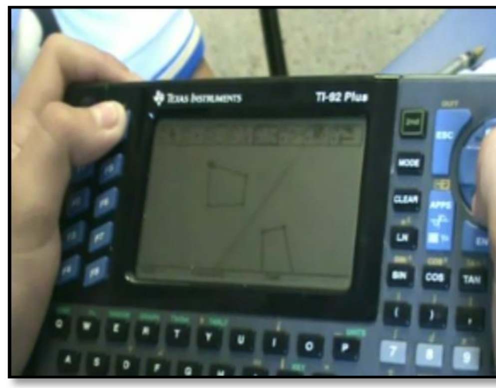
***E:** ¡uy!, ¡uy! Quieto ahí, ahí.* (En el momento cuando casi hacen coincidir un vértice con su respectivo reflejo). ***P:** párese acá un vértice y empiece a acomodar hasta que quede uno encima del otro.* ***E1:** ¡ah ya!*	
Por último, deciden arrastrar el punto hasta que forman la figura inicial.	

Tabla 5. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

En este primer ensayo, por ajustar la figura para que el cuadrilátero y su reflejo coincidan totalmente, los estudiantes sólo arrastran uno de sus vértices y no tienen en cuenta los demás.

Después de muchos intentos el estudiante dos parece encontrar una estrategia para poder mover el cuadrilátero hasta hacerlo coincidir con su reflejo y dice:

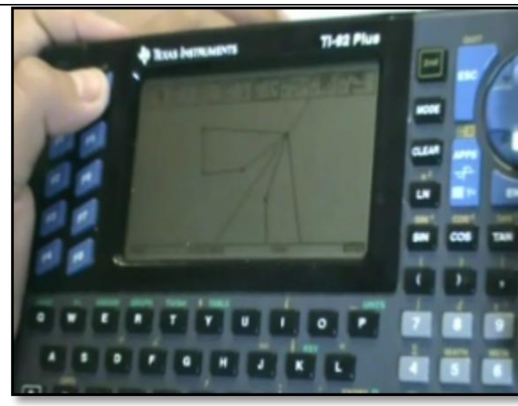
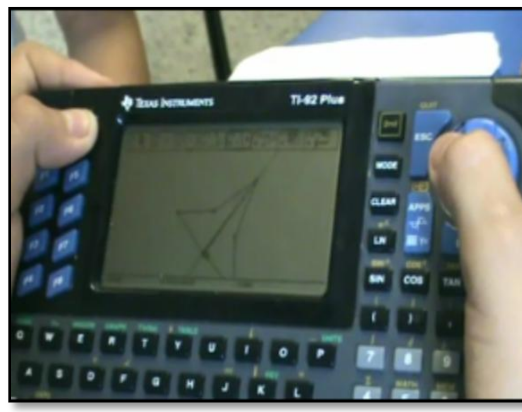
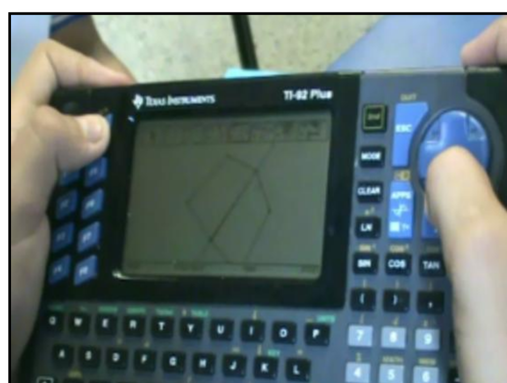
E2: *Venga, venga por qué no los unimos y sacamos otro cuadro y los vamos uniendo por punticas así.* El E1 atento a la instrucción de su compañero logra hacer coincidir uno de los vértices con su respectivo reflejo del cuadrilátero sobre el eje de simetría.	
E1: *ya entendí, ahora juntamos esta otra punta así.* ***E2:*** *Ah sí pilla que es que es un duro este chino.* Aquí el estudiante toma otro de sus vértices y empieza a arrastrarlo hasta hacerlo coincidir con su reflejo, y le dice a la profesora: ***E1:*** *Profesora yo hice un avión, es que yo soy un maestro papá.* ***P:*** *ahí van más o menos.*	
E1: *bueno ahora vamos a mover el otro* ***P:*** *¿hasta que se vea solamente…?* ***E2:*** *un solo cuadrilátero* ***E1:*** *Para mí que ya se volvió cuadrilátero*	

Tabla 6. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

Aquí observamos el error más frecuente que cometieron los estudiantes: unían dos vértices haciendo coincidir un lado del cuadrilátero con su reflejo en el eje de simetría, y los otros dos vértices restantes los acomodaban para que se viera la forma de un cuadrilátero diciendo que estaba bien terminado. Pero en realidad lo que estaban haciendo era unir el cuadrilátero con su reflejo por un lado que quedaba superpuesto con el eje de simetría, y luego mover el otro vértice para que se viera un cuadrilátero, haciendo creer que el cuadrilátero y su reflejo se veían como uno solo.

Debido a que en el video no tenemos evidencia de la forma como el estudiante intentó validar esta construcción, sí pudimos observar que fue bastante difícil y demorado el proceso, pues los estudiantes se limitaban a mover solo los vértices del cuadrilátero que estaban por fuera del eje de simetría, concluyendo que la construcción era incorrecta, debido a que ese arrastre hacía parecer la figura como un polígono de más de cuatro lados. La dificultad se seguía presentando cuando lograban construir un cuadrilátero, pues no podían observar que esta figura se formaba por la unión de uno de los lados de la figura y su reflejo sobre el eje de simetría, y sólo hasta el momento en que la profesora recordó que para validar correctamente debían mover todos los componentes de la figura, los estudiantes arrastraron un lado del cuadrilátero y observaron que algo extraño ocurría.

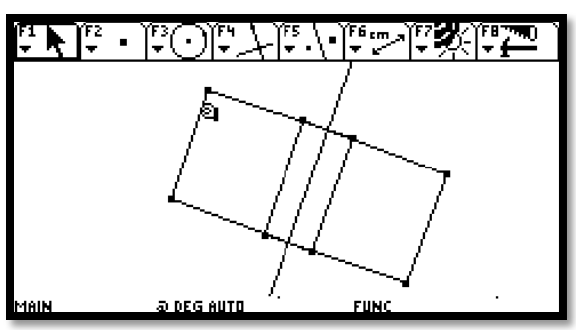
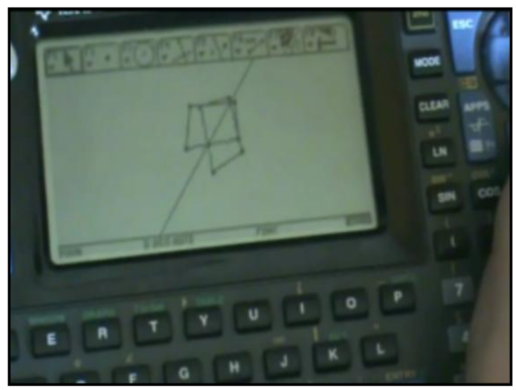


Figura 10. Representación gráfica del trabajo de los estudiantes

La figura y su reflejo se separaban como si el uno se montara encima del otro, decidiendo invalidar su construcción. Creemos que hasta este momento los estudiantes comprendían que la figura y su reflejo sólo coincidían por uno de sus lados. Pensamos que este error pudo haber ayudado a los estudiantes a acercarse a la estrategia ganadora, pues pudieron observar que las dos figuras sí se podían superponer y que sólo deberían buscar alguna estrategia para hacer coincidir sus cuatro vértices.

Esto lo podemos observar en el trabajo realizado por otro grupo de estudiantes, veamos lo ocurrido en el aula de clase:

En este grupo, los estudiantes empiezan arrastrando todo el polígono, tratando que uno de sus vértices coincida con su reflejo sobre el eje de simetría.	
Una vez que logran superponer, más o menos, uno de los vértices con su reflejo, inician el arrastre de otro vértice para hacerlos coincidir.	

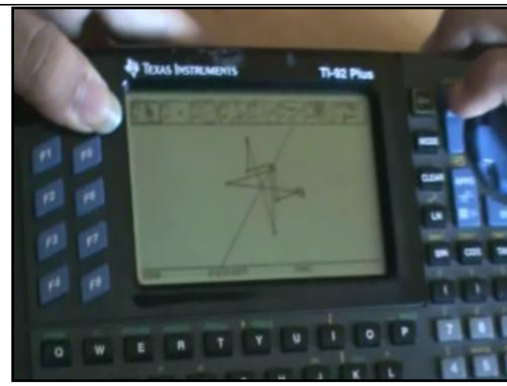
Aunque realiza el arrastre de los otros vértices, los estudiantes se confunden y no pueden superponer el cuadrilátero con su reflejo, ni siquiera son capaces de dejar la forma de cuadrilátero.	

Tabla 7. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

Este grupo empieza superponiendo un vértice con su reflejo sobre el eje de simetría, y al querer hacer coincidir el resto de vértices veían cómo la figura se deformaba hasta tal punto que causaba entre ellos confusión y por más que insistían nunca eran capaces de hacer coincidir el cuadrilátero y su reflejo totalmente.

Aunque los estudiantes no fueron capaces de desarrollar la tarea, como lo habíamos dicho anteriormente, gracias a su error ya tenían una idea de la estrategia a utilizar, por esto vuelven a iniciar la tarea, veamos:

Los estudiantes inician arrastrando uno de los vértices hasta que queda unido con su reflejo en el eje de simetría.	

Arrastra otro de sus vértices y lo deja casi superpuesto con su reflejo.	
Luego arrastran el cuadrilátero hasta que el vértice que se encontraba a mayor distancia del eje de simetría se encuentra con su reflejo.	
Los estudiantes arrastraron otro de los vértices, uniéndolo con su reflejo en el eje de simetría.	

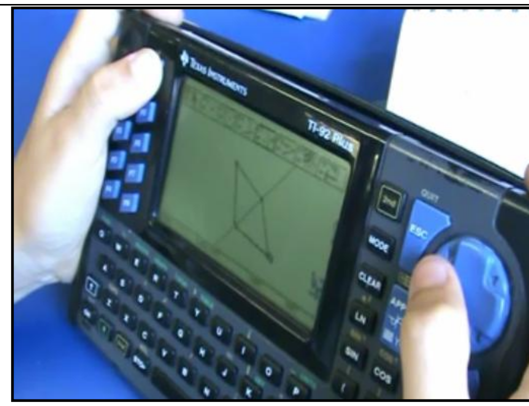
Por último, arrastran el otro vértice hasta que el cuadrilátero y su reflejo se ven como uno solo.	

Tabla 8. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

Aunque este grupo obtuvo la estrategia ganadora, en ningún momento los estudiantes estuvieron en la capacidad de validarla por sí mismos, mucho menos de explicar por qué había quedado bien construida; su única justificación era que "veían en la calculadora una sola figura"; queriendo con esto decir que el cuadrilátero y su reflejo estaban superpuestos totalmente, argumentación que no garantizaba la correcta construcción de la figura.

Consideramos que en la planeación de la actividad se cometió un error de ingeniería didáctica pues no se previó la posibilidad de validación por parte del alumno. Como la construcción era perceptiva, no podía utilizarse el arrastre para validar, ya que no tenía una propiedad implícita que hiciera que al momento de arrastrar, se conservara la forma de la figura.

En la actividad falló la previsión de cómo iban a hacer los alumnos para la validación, pues los alumnos ven una figura en la pantalla pero no saben si en realidad está bien o está mal. Una propuesta para ayudar a solucionar esta dificultad puede ser que en el momento en el cual el estudiante logra realizar el simétrico del cuadrilátero se le pida que al original se le dé un grosor mayor (utilizando la herramienta “Thick”) y su reflejo lo haga punteado (utilizando la herramienta “dotted”).

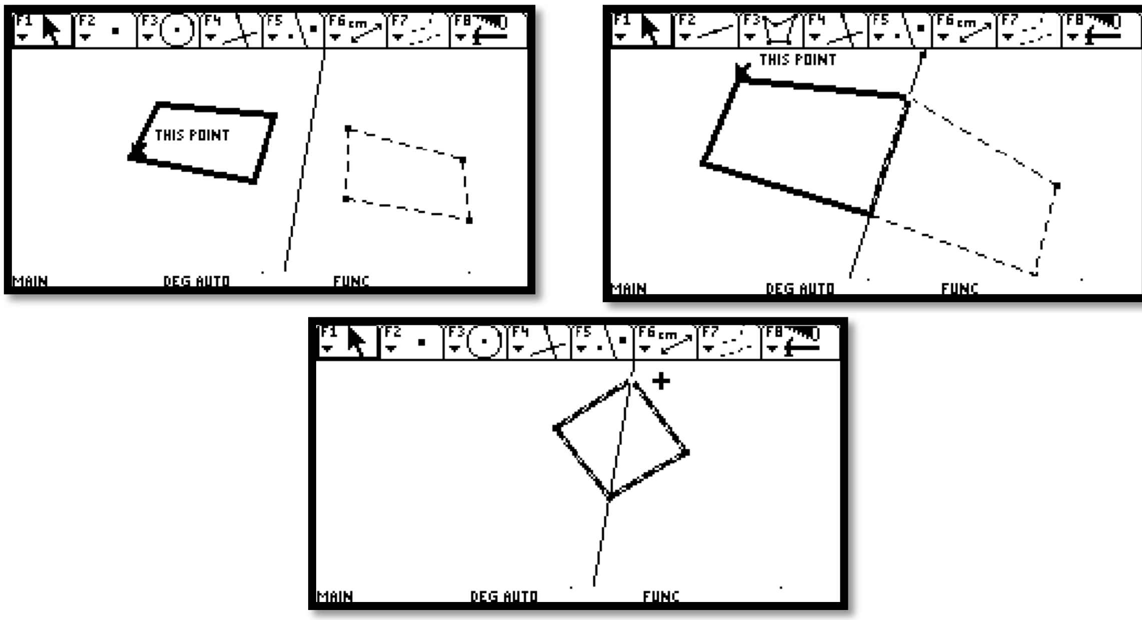


Figura 11. Primera propuesta de validación actividad de cuadriláteros con eje de simetría

Aquí podemos observar que cuando el cuadrilátero y su simétrico están superpuestos, se ve con claridad que el uno está encima del otro pues se produce en la imagen un efecto diferente que permite observar dentro del cuadrilátero grueso su simétrico punteado.

Otra propuesta para poder validar que el cuadrilátero y su reflejo coinciden totalmente sin necesidad de hacer cambios en la actividad original, es implementar en la etapa de validación por arrastre los siguientes dos pasos:

1. Mover el eje de simetría:

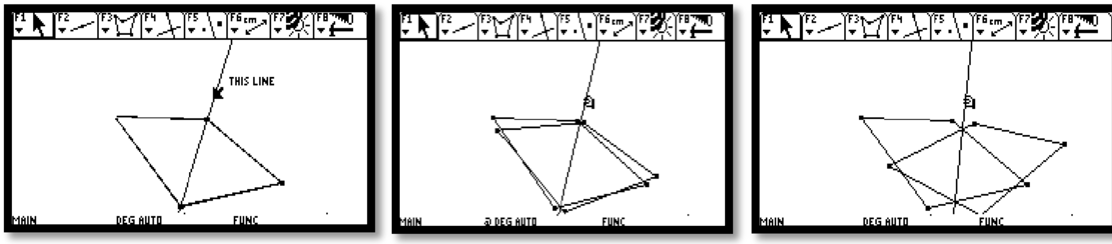


Figura 12. Segunda propuesta de validación actividad de cuadriláteros con eje de simetría

2. Mover un lado del cuadrilátero:

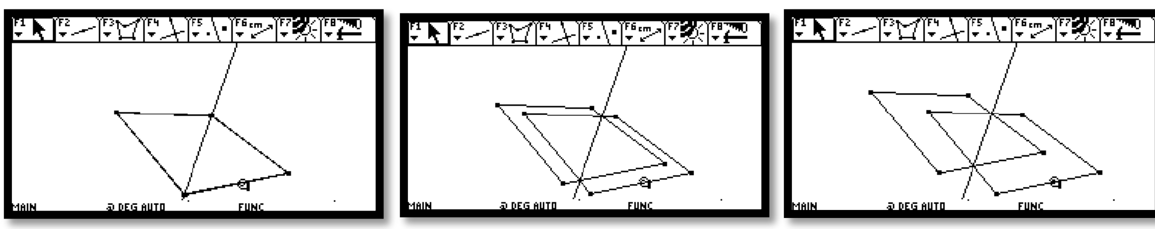


Figura 13. Segunda propuesta de validación actividad de cuadriláteros con eje de simetría

De esta manera podemos tener la certeza de que los estudiantes vean y entiendan con claridad la superposición del cuadrilátero con su reflejo.

PUESTA EN COMÚN

Como se había previsto en el análisis a priori, la profesora dio la instrucción a los estudiantes que cuando tuvieran una solución correcta, la dibujaran en el cuaderno, en el tablero y que después buscaran otra diferente hasta obtener todas las posibles soluciones, aunque en las evidencias que recogimos solo realizaron correctamente el rombo, podemos ver que ya se habían encontrado varios cuadriláteros solución.

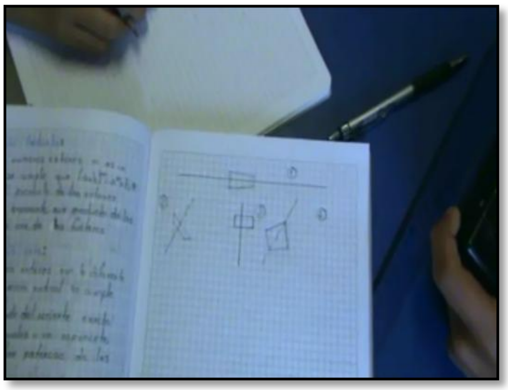
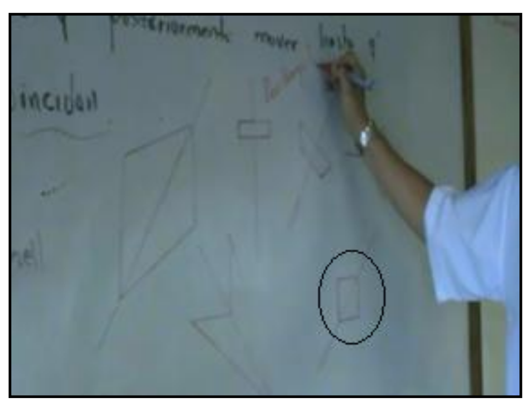
	

Tabla 9. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

La profesora inicia la puesta en común preguntando a los estudiantes cómo se llamaba cada una de las figuras solución que se encontraban en el tablero, veamos lo que ocurrió:

P: *¿Éste que es?* *Grupo: Un rectángulo* ***P:*** *un rectángulo verdad que sí.* ***P:*** *Este* (refiriéndose a la figura que está encerrada en el círculo) ***Grupo:*** *un cuadrado* ***P:*** *¿Quiénes hicieron el cuadrado?* ***Grupo:*** *¡yo, ¡yo¡ …* ***P:*** *ah entonces a todos les salió el cuadrado*	

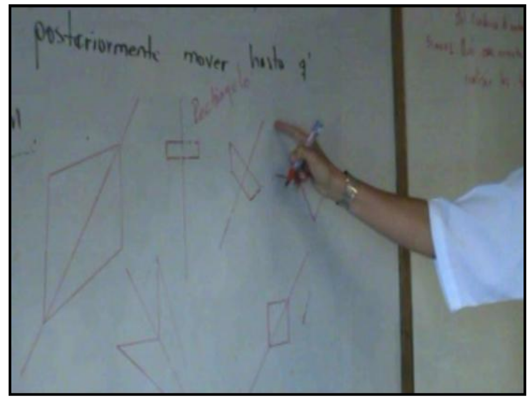
P: *¿éste? ¿Cómo se llama éste cuadrilátero?* ***Estudiante:*** *Parece un vaso, una batea profesora, parece una batea.* ***P:*** *una batea, yo no conocía un cuadrilátero que se llame batea. ¿Nunca vieron ustedes esta forma de cuadrilátero?* *Grupo: no* ***P:*** *como que no ¿Éste se llama qué?* ***Otro estudiante:*** *Un trapecio*	

Tabla 10. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

Como se había previsto, la profesora dio nombres a algunos de los cuadriláteros solución, y da la instrucción de que todos debían estar dibujados en el cuaderno.

Para poder finalizar con el objetivo trazado, la profesora pide a los estudiantes que encuentren las relaciones en común de las figuras que pudieron encontrar.

P: *estamos mirando un momentico allá en el tablero por favor. Dense cuenta que nos costó trabajo cuadrar algunas figuras. ¿Por qué no éramos capaces de cuadrar la figura?*

E: *porque estaba al contrario……. estaba al contrario del espejo*

P: *¿Qué tienen en común las figuras que pudimos hacer y que están dibujadas en su cuaderno?*

E1: *que en el espejo son la misma forma*

E2: *que coincidían profe*

P: *¿Qué coincidían en dónde?*

E1: *en los puntos*

E2: *en el eje de simetría*

P: *¿Qué pasó en el eje de simetría?*

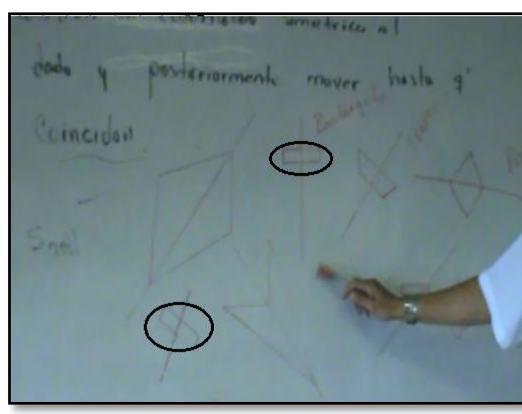
Grupo: *¿Cómo así profesora?*

P: *miremos todos los ejes de simetría que tienen allá* (refiriéndose a los rectángulos), *¿Dónde quedó el eje de simetría en esas figuras?*

E1: *en la mitad, en la mitad de la figura*

Grupo: *en la mitad*

Aquí observamos que empezaba a cumplirse lo previsto en el análisis a priori con respecto al objetivo general de la actividad que era Identificar y clasificar cuadriláteros que tienen un eje de simetría, pues los mismos estudiantes afirmaron que el eje de simetría en los rectángulos se encontraba en la mitad de la figura.

P: *ahora vamos a concentrarnos en este* (señalando el rectángulo de la parte superior) ***P:*** *¿este rectángulo era como este?* (señalando los dos rectángulos encerrados por las circunferencias) Grupo: no ***P:*** *¡ojo! ¿Para el rectángulo ese será el único eje de simetría o yo puedo dibujar el eje de simetría de otra forma en ese rectángulo?*	

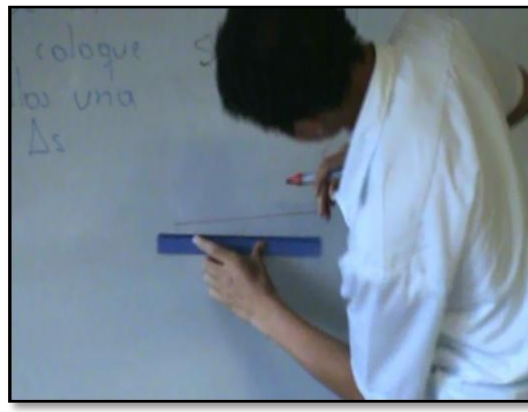
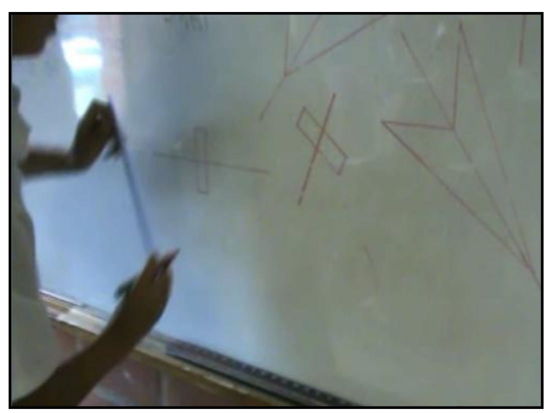
Otro estudiante(E2): sí de lado, vertical, horizontal, diagonal Se ve claramente que los estudiantes contestan la pregunta haciendo referencia a las actividades de “simetría axial”[17] y no como eje de simetría de una figura que era lo que quería la profesora. ***P:*** *ah muy bien* Otro estudiante pasa y lo dibuja ***P:*** *miremos cuántos ejes de simetría pueden tener* ***E2:*** *diagonal hacia la izquierda, diagonal hacia la derecha…* ***E3:*** *cuatro ejes* Aquí se estaba cometiendo un error ya que las diagonales del rectángulo solo son ejes de simetría en el cuadrado.	
P: *será que si yo le digo a ustedes construyan un rectángulo. ¿Ustedes me lo hacen?* ***Grupo:*** *no, no, si…* ***P:*** *¿no saben construir un rectángulo?* ***Grupo:*** *siiii* ***P:*** *aaaaaa*	

Tabla 11. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

[17] Las actividades de simetría axial fueron trabajadas el año anterior con estos mismos estudiantes.

La palabra eje de simetría tiene dos conceptos totalmente diferentes: uno, el que trabajaron los estudiantes el año pasado donde el eje de simetría es una recta que sirve para construir la simetría axial y el otro, es el de eje de simetría de una figura. Se puede observar que la profesora pensó que los alumnos estaban hablando de eje de simetría de una figura, pero cuando los estudiantes responden que el rectángulo tiene cuatro ejes de simetría (horizontal, vertical, diagonal a la izquierda, diagonal a la derecha), se ve claramente que se referían a las distintas posiciones que se puede poner el eje en la simetría axial.

Debido a la confusión que se presentaba en el concepto de cuadrado y rectángulo, la profesora hizo un paréntesis en la clase y abrió una discusión haciendo énfasis de la diferencia entre ellos.

Como se esperaba en el análisis a-priori esta actividad sirvió para introducir a los estudiantes al concepto de rectángulo y cuadrado, pero se pudo observar que la profesora se apresuró un poco en el desarrollo de la puesta en común, olvidando presentar a los estudiantes en detalle las familias de cuadriláteros según el eje de simetría.

Una figura es simétrica respecto a un eje cuando coincide exactamente con su reflejo; por lo tanto podemos distinguir dos grandes familias de cuadriláteros según el eje de simetría:

1. la familia de los cuadriláteros que tienen el eje de simetría perpendicular a dos de sus lados y divide la figura por la mitad.
2. la familia de cuadriláteros cuyo eje de simetría pasa por dos de los vértices del cuadrilátero.

Para finalizar la puesta en común la profesora hace la siguiente pregunta;

Diálogo

P: *¿Quién me define qué es un rectángulo?, ¿alguien sabe?*

E: *es una figura geométrica*

P: *¿es una figura de cuántos lados?*

Grupo: *cuatro, cuatro*

P: *¿Todos de acuerdo?*

G: *siiiiiiiii*

P: *¿Qué más tiene, que más tiene ese rectángulo?*

E: *que tiene cuatro lados…….*

P: *que dos lados son más pequeños que los otros dos*

P: *que más tiene ese rectángulo*

E: *es la unión de dos cuadrados*

P: *es la unión de dos cuadrados… o sea….*

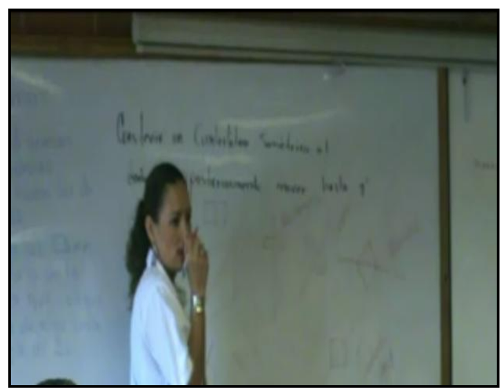
P: *este es un cuadrado, y si yo uno otro cuadrado ¿es un rectángulo?* ***E1:*** *si le borra la línea del medio* ***E2:*** *obvio no ve que quedan dos lados más largos y dos lados más cortos.*	
Uno de los estudiantes pasa y borra la línea del centro y efectivamente se dan cuenta que uniendo dos cuadrados se puede construir un rectángulo.	

Tabla 12. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

Aquí nos parece importante resaltar cómo los mismos estudiantes llegaron a la conclusión de que un rectángulo se puede formar de la unión de dos cuadrados, creemos que esto se debió a la observación de los estudiantes al transcurrir la actividad del eje de simetría y por lo tanto, de nuevo a la identificación y buen concepto del eje de simetría, con esto se quería decir que lo que había a un lado del eje de simetría era exactamente igual del otro lado.

CONCLUSIONES

Lo que pudimos observar en la implementación de la actividad de cuadriláteros con ejes de simetría, fue que fallaron algunos aspectos en la planeación de la actividad; sin embargo, esto no afectó la finalidad de acercar a los estudiantes a la conceptualización del rectángulo y del cuadrado. El objetivo trazado se cumplió a medias, pues los alumnos pudieron identificar y construir cuadriláteros que tienen un eje de simetría, pero no lograron hacer la clasificación de estos debido al afán de la profesora por llegar a la conceptualización del rectángulo. Algunos de los aspectos para resaltar en el desarrollo de la actividad son los siguientes:

1. Como se había previsto en el análisis a-priori, los estudiantes lograron construir perceptivamente casi todos los diferentes cuadriláteros solución en los cuales el cuadrilátero y su reflejo coinciden totalmente, los dibujaron en el tablero y los consignaron en sus cuadernos.

2. La profesora pasó de una actividad de construcción del concepto de eje de simetría, a una actividad de reconocimiento de ejes de simetría en una figura, lo cual es totalmente diferente. Además, la profesora estaba

hablando de eje de simetría de una figura, y los estudiantes lo estaban relacionando con el utilizado en las actividades de simetría axial.

3. Aunque los estudiantes construyeron, identificaron y dieron nombre a los diferentes cuadriláteros solución, no lograron clasificarlos en las dos clases de familias de cuadriláteros según su eje de simetría.

4. Esta actividad presenta un problema de planeación en la etapa de validación, ya que los alumnos no tienen la posibilidad de validar su propia construcción de otra manera que no sea perceptivamente; por tanto, la actividad deja de ser una situación a-didáctica, pues en realidad en ningún momento el medio valida o invalida la construcción: tiene que ser el profesor quien la valide o invalide. El estudiante no tiene cómo demostrar que su construcción cumple con todas las exigencias pedidas, pues cuando ellos pegan el cuadrilátero con su reflejo no pueden afirmar si la figura está bien o está mal. Esto se debe a que la construcción es netamente perceptiva y por tanto, cuando se realiza el arrastre tomando algún vértice del cuadrilátero, este pierde su forma inicial produciendo confusión en el estudiante. Por tal razón, presentamos algunas propuestas para mejorar el buen funcionamiento de la actividad, las cuales fueron enunciadas con anterioridad.

5. Se logró acercar a los estudiantes al concepto de rectángulo aunque faltó recalcar, por parte de la profesora, la importancia de la propiedad de tener sus cuatro ángulos rectos. En la puesta en común los estudiantes lograron definirlo como una figura geométrica de cuatro lados que tenía dos ejes de simetría paralelos respectivamente a dos de sus lados, que los lados de arriba y abajo eran iguales o con la misma medida, lo mismo que los de los

lados verticales que parecía como la unión de dos cuadrados borrándole la raya de en medio, etc.

6. Se ve claramente que esta actividad sin la segunda parte pierde el sentido, por lo tanto, se recomienda que si no se hacen las dos tareas, es mejor no hacer ninguna, ya que la primera es solo una introducción para la segunda. La primera tarea es una etapa de construcción perceptiva donde se identifican unas propiedades, y la segunda es una etapa posterior en la cual se utilizan esas propiedades para construir los cuadriláteros solución, y que así el mismo alumno pueda validar o invalidar su construcción.

SEGUNDA TAREA

Esta tarea no se realizó en la institución porque los profesores del Colegio Vicente Azuero, en las reuniones semanales del GRUPO NUEVAS TECNOLOGÍAS (EDUMAT-UIS) solicitaron omitirla, pues según ellos esta tarea tenía un nivel de exigencia muy alto y los resultados arrojados en la aplicación no habían sido favorables.

No obstante, en el análisis a posteriori de esta actividad, vemos que para que se cumpla el objetivo planeado es necesario realizar las dos tareas sin omitir ninguno de sus pasos; la aplicación de una sin la otra no tiene sentido, pues se pierde el rumbo hacia la obtención del objetivo trazado. Es en la segunda tarea donde los estudiantes comprenden la definición de eje de simetría de una figura y así estan en la capacidad de clasificar cuadriláteros que tienen un eje de simetría.

4.2. ACTIVIDAD DE CONSTRUCCIÓN DE UN RECTÁNGULO

OBJETIVO (INTENCIÓN DEL PROFESOR): Aprender a construir un rectángulo utilizando de manera explícita su propiedad de tener cuatro ángulos rectos. Además, practicar el uso de las herramientas 'recta perpendicular', 'recta paralela' y 'ocultar', así como aplicar la prueba del arrastre para validar una construcción, e invalidar así las estrategias únicamente perceptivas de construcción de un rectángulo.

MEDIO: Todas las herramientas de construcción de Cabri.

TAREA: Construir un rectángulo de manera que al arrastrar sus lados o sus vértices siga siendo un rectángulo.

4.2.1. ANÁLISIS A PRIORI

En esta actividad se espera que los estudiantes realicen tres tipos de construcciones:

Primero, construcciones puramente perceptivas, utilizando herramientas como 'segmento' o 'polígono', ajustando los vértices de manera que se vea un rectángulo. El alumno pretenderá dibujar la figura como si la construyera con lápiz y papel sin tener en cuenta sus propiedades. Estas construcciones podrán invalidarse fácilmente arrastrando los segmentos o los vértices. Los alumnos podrán recomenzar todas las veces que quieran esta estrategia perceptiva, siempre se verá invalidada al realizar el arrastre de sus vértices o lados. El profesor podrá intervenir para centrar la atención de los alumnos en los ángulos, para que tomen conciencia que al arrastrar uno o varios ángulos dejan de ser rectos. Una vez que el alumno se haya hecho la pregunta de cómo lograr que un ángulo sea recto incluso al arrastrar, el profesor puede mostrarle que puede utilizar la herramienta 'recta perpendicular'. También es posible que los alumnos busquen en los menús de Cabri y recuerden que la herramienta ‘recta perpendicular’ sirve para garantizar los ángulos rectos, pues ya la habían utilizado en las actividades de simetría axial.

Basándose en el error cometido en la primera construcción, el alumno llegará a la conclusión de que hace falta aplicar alguna propiedad que garantice los ángulos rectos entre los lados del rectángulo. Para esto podría utilizar una estrategia mixta, en la cual pretenderá garantizar la construcción de algunas de sus propiedades, (en especial con la herramienta “recta perpendicular”), y ajustes perceptivos para obtener la forma de rectángulo. Por ejemplo:

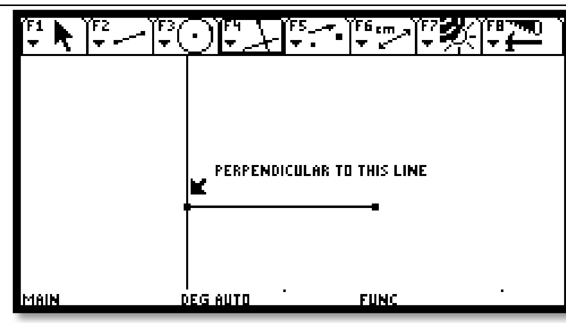
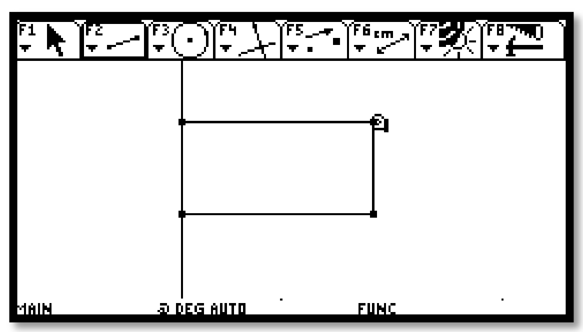
El estudiante primero realizará un segmento con la herramienta Cabri y otro lado será construido con la herramienta “recta perpendicular”.	
Con la herramienta “segmento” construirá los otros lados del rectángulo y los ajustara a ojo para que se vea un ángulo recto.	

Tabla 13. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

Estas construcciones resistirán el arrastre de algunos de sus componentes, pero perderán sus propiedades al arrastrar otros; por esto es importante que se le exija al estudiante el arrastre de todos los componentes de la figura: todos los puntos, rectas, segmentos, incluso los que estén ocultos.

Finalmente se espera que los estudiantes construyan su rectángulo sin utilizar el ajuste perceptivo, para lo cual utilizarán las herramientas que les da el programa cabri como 'recta perpendicular' y 'recta paralela'. Esta última construcción resistirá el arrastre de todos sus componentes, por tanto es la estrategia ganadora.

En la puesta en común se mostrará en primer lugar las construcciones puramente perceptivas, esperando que los estudiantes muestren paso a paso sus construcciones del rectángulo a ojo para que el grupo pueda identificar sus errores y poder dar alguna explicación de por qué la figura se desbarata. Estas estrategias perceptivas pueden ser invalidadas a través del arrastre, moviendo alguno de sus componentes. Se espera que los estudiantes puedan comprender que su equivocación es resultado de no tener en cuenta las propiedades.

Luego se mostrarán las estrategias mixtas, las cuales también se someterán al arrastre de todos los objetos que las componen (para lo cual es necesario mostrar todos los objetos ocultos con el fin de arrastrarlos), e invalidarán esta construcción; se espera que los estudiantes se den cuenta de que la utilización de las propiedades en algunos de sus componentes, dio como resultado que no se desbaratara la figura y que por lo tanto es de vital importancia para que el rectángulo quede bien hecho.

Finalmente se mostrarán las construcciones correctas, se realizará la prueba del arrastre a todos sus componentes, incluso los que están ocultos, y los estudiantes se darán cuenta que gracias a la utilización de las propiedades en todos, la construcción es correcta. Esta construcción se explicará paso a paso, se hará reproducir por los diferentes grupos y serán copiadas en sus cuadernos como una lista de pasos.

Interacción del alumno con el medio				
Etapa de construcción		**Etapa de validación de la construcción**		
Acción (Alumno)	Retroacción (Medio)	Acción (Alumno)	Retroacción (Medio)	Indicio de aprendizaje
Construye con la herramienta “polígono” o “segmento” un rectángulo.	Muestra un rectángulo perceptivamente bien hecho.	Arrastra todos los lados y vértices del rectángulo.	Deja de ser rectángulo cuando se arrastra alguno de sus componentes.	Modifica la acción
Construye el rectángulo utilizando la herramienta “recta perpendicular” en alguno de sus lados y ajusta a ojo los otros para obtener su forma.	Muestra un rectángulo perceptivamente bien hecho.	Arrastra todos los lados y los vértices del rectángulo construido.	Alguno de sus componentes conservan las propiedades y otros no.	Modifica la acción
Construye un rectángulo utilizando las herramientas “recta perpendicular” y/o “recta paralela” de cabri.	Muestra un rectángulo perceptivamente bien hecho.	Arrastra todos los lados y los vértices del rectángulo construido.	El rectángulo resiste el arrastre de todos sus componentes.	Refuerza la acción (Estrategia ganadora)

Tabla 14. Resumen proceso de Aprendizaje por Adaptación

4.2.2. ANALISIS A-POSTERIORI

En esta actividad la profesora empieza haciendo una introducción sobre el rectángulo, resaltando las propiedades fundamentales como la de tener cuatro vértices, cuatro lados, 2 lados iguales y paralelos y tener cuatro ángulos rectos.

La profesora da la siguiente instrucción:

“teniendo en cuenta lo que se dijo del rectángulo se va realizar la siguiente tarea: construir un rectángulo que resista el arrastre, es decir, que cuando yo coja un vértice y lo mueva, el rectángulo no se desbarate”

Clarifica que si un estudiante realiza la construcción del rectángulo, el otro compañero es el encargado de revisar si se le desbarata o no (validar con el arrastre). Veamos algunas imágenes del trabajo realizado en la clase:

El estudiante inicia la construcción del rectángulo creando dos segmentos, uno al lado de otro como si fueran paralelos, con la herramienta “segmento” de Cabri.	

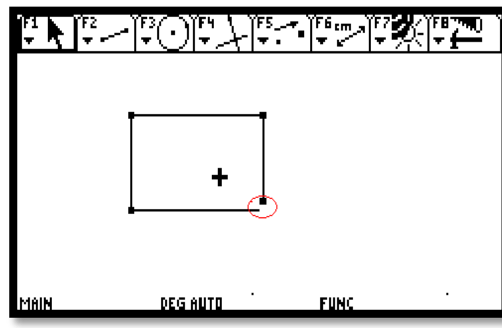
El estudiante dibuja el lado superior del rectángulo; al hacer el inferior, se da cuenta que los dos segmentos no coinciden, por lo tanto decide borrar y empezar de nuevo.	 

Tabla 15. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

Después de borrar, los estudiantes empiezan a indagar sobre lo que se debe hacer para que la construcción sea correcta:

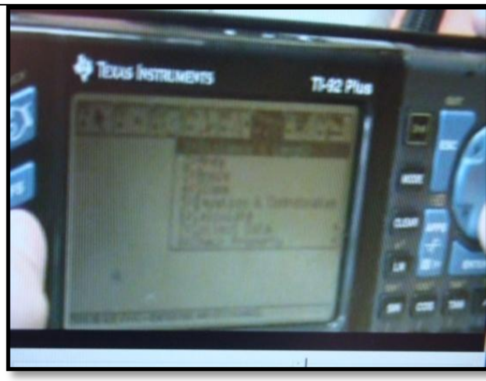
Diálogo

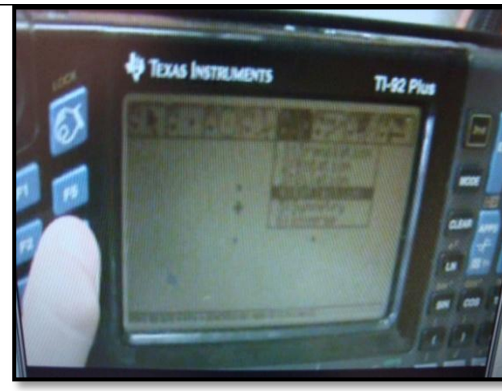
Estudiante 1: *tal vez toca doble*

Estudiante 2: *Doble para qué.*

E1: *profesora es que los lados se mueven, toca es uno saberse un truco para que no se mueva.*

Podemos observar que aunque los estudiantes no realizaron la prueba del arrastre como tal, sí tenían la idea de que la construcción no se debía desbaratar, ya que para ellos en este momento se debía utiliza un “truco” que hiciera que el rectángulo al moverse no se desbaratara. En búsqueda de encontrar el “truco” a utilizar, los estudiantes deciden mirar todas herramientas que el programa cabri les podría ofrecer:





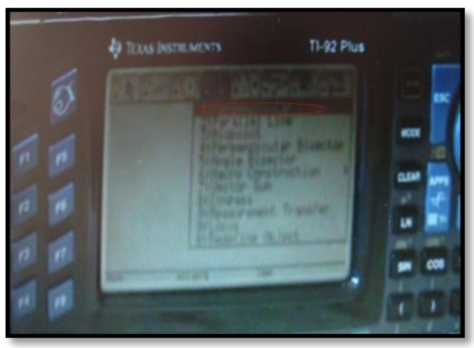


Tabla 16. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

Al momento de observar la herramienta “recta perpendicular” el estudiante dice:

E2: *¡ay! ya se con cual, recta perpendicular.*

Sin embargo, el estudiante no recuerda cómo utilizar la herramienta “recta perpendicular”. Veamos lo siguiente:

E2: *No sé cómo empezar, será ahí* (señalando la herramienta recta) *P: Dele ahí a ver qué pasa* ***E2:*** *pero es que sale una línea toda grandota* ***P:*** *pero eso no importa*	
E2: *ah! y después se van poniendo los puntos.* ***P:*** *Y ahora qué va hacer* ***E1:*** *lo mismo acá (refiriéndose al otro lado)* ***E2:*** *Perpendicular* El estudiante realiza la recta perpendicular con la herramienta.	
E2: *Ah! y ahora trazo otro punto y hago la misma recta perpendicular.* El estudiante, ya habiendo interiorizado la forma de trazar la recta perpendicular, realiza el otro lado del rectángulo y pone los puntos de intersección.	

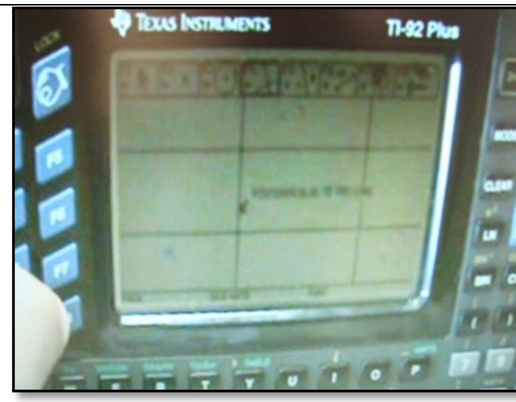
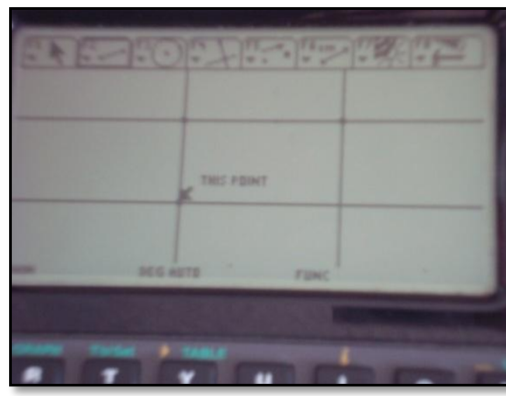
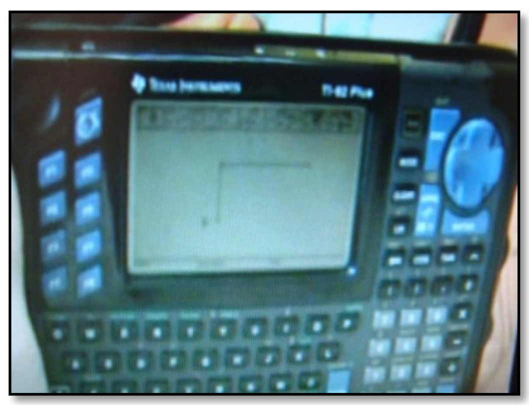
E2: *Y ahora toca borrar todo* (Queriendo decir cómo hacía para obtener sólo el rectángulo).	
Con la herramienta segmento, los estudiantes repisan el rectángulo, para que al momento de ocultar las líneas perpendiculares, se vea sólo lo que ellos querían mostrar.	
Al momento de ocultar las rectas perpendiculares, los estudiantes se dan cuenta que sólo habían repisado dos de los lados del rectángulo y lo completan para obtener su forma.	

Tabla 17. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

Una vez que tienen esta solución, los estudiantes llaman a la profesora para que lo revise y es ella quien hace la prueba del arrastre:

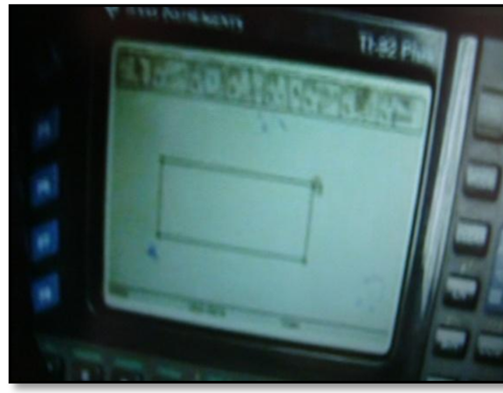
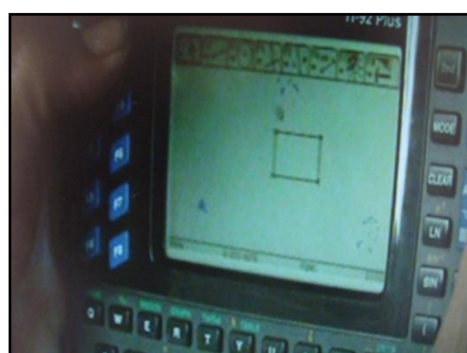
E2: *¡Ya profesora!* ***P:*** *¿seguro?* ***E2:*** *sí* ***P:*** *vamos a ver si tanta belleza es cierta* La profesora inicia arrastrando uno de los vértices y se mueve todo el rectángulo, conservando su forma.	
P: *ahora vamos al de acá, este no me lo deja coger.* (refiriéndose al lado de debajo de la esquina derecha) La profesora arrastra otro de los vértices hacia arriba y de nuevo se conserva el rectángulo.	
Arrastra el último vértice hacia un lado y sigue conservando la figura. ***P:*** *pues pareciera que si*	

Tabla 18. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

En este momento pareciera que el proceso de validación había terminado, pero aquí observamos un error de procedimiento de la profesora, pues aunque la construcción estaba bien hecha, para validarla completamente era necesario arrastrar todos los componentes de la construcción, incluso los que estaban ocultos; además fue la profesora la que hizo la validación, la cual le correspondía al estudiante.

Después de terminada la validación, la profesora pide al estudiante que explique con sus propias palabras el proceso de construcción:

Diálogo

Profesora: *¿cómo lo hicieron?*

E1: *Hicimos una línea y un punto primero, y luego colocamos perpendicular de la línea al punto, de ahí salió la primera, que fue me parece que la de acá (señalaban la pantalla), después hicimos otro punto, le dimos otra vez perpendicular a la línea, y salió la del otro lado, hicimos otro punto y le dimos perpendicular y salió la de acá y después ocultamos.*

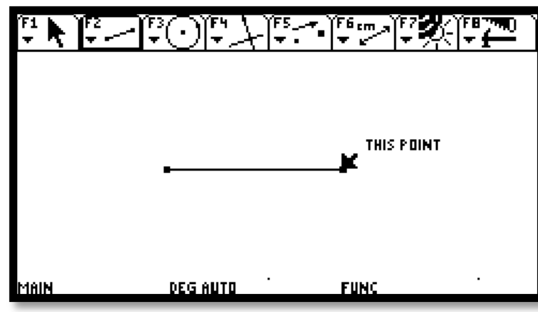
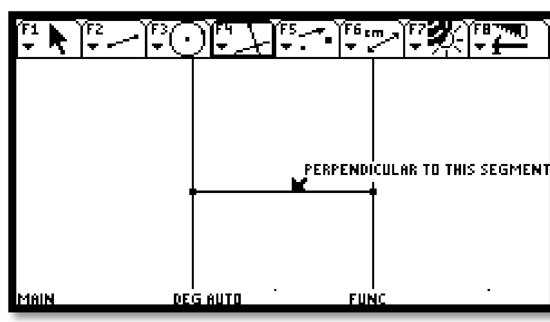
Profesora: *Muy bien.*

Para finalizar, la profesora dio la instrucción de realizarlo pero ahora con regla y compás en su cuaderno.

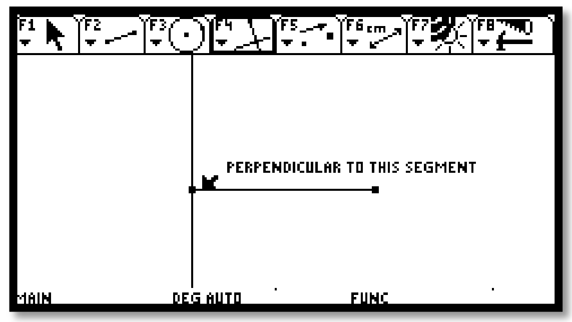
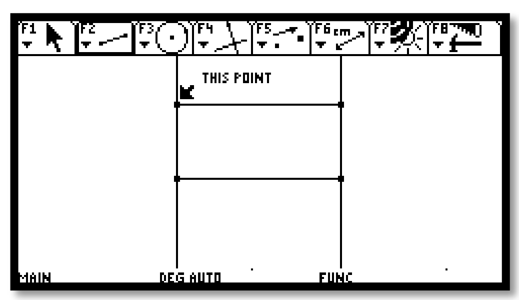
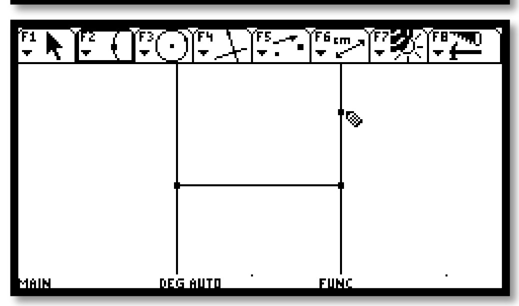
Hasta este punto podemos concluir que lo ocurrido a posteriori en el aula de clase en el proceso de validación fue lo que esperamos, pero algunas cosas no se dieron como estaban planeadas: el alumno hizo una construcción perceptiva, la invalidó, la cambió e hizo una construcción correcta aunque faltó la validación final por parte de él mismo, ya que ésta fue hecha por la profesora.

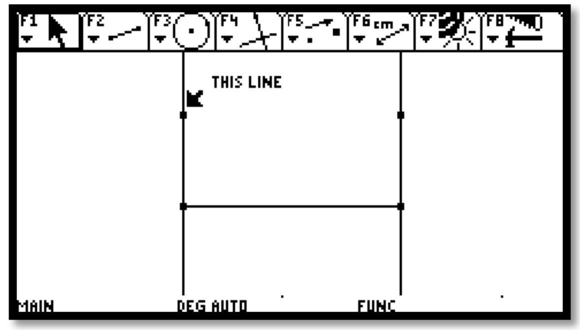
Puesta en común[18]

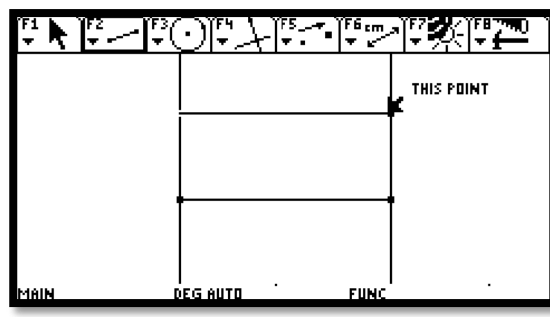
La profesora pasa a dos estudiantes para que describan cómo habían realizado la construcción:

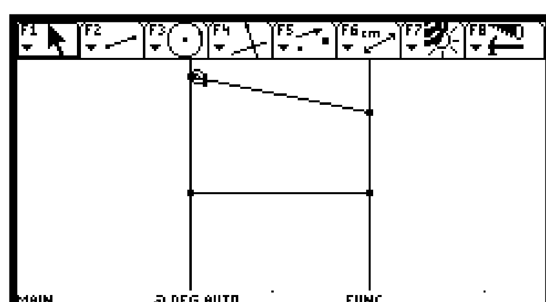
Profesora: *Marlon, empiece con la construcción y si sus compañeros tienen preguntas se las pueden realizar.* ***M:*** *Comenzamos construyendo un segmento.*	
P: *Y que más Marlon ahora qué hacemos* ***M:*** *luego trazamos las líneas perpendiculares* ***P:*** *¡A quién!* ***M:*** *al segmento* ***P:*** *que pase por dónde* ***M:*** *del punto al segmento, del punto A al punto B* (refiriéndose a los dos vértices del segmento) ***P:*** *¿Marlon por qué trazó rectas perpendiculares? ¿Y no líneas común y corriente?* ***M:*** *Para que cuando movamos el*	

[18] Debido a la baja resolución del video y la poca claridad de las fotografías, nos vimos en la necesidad de implementar la reconstrucción de las imágenes para mayor claridad de lo ocurrido en la puesta en común

rectángulo no se dañe la figura. ***P:*** *¿qué es lo que no se daña?* ***M:*** *la forma, o sea que uno lo estire y siga siendo la misma figura.* ***P:*** *¿y es necesario las rectas perpendiculares?* ***M:*** *Si* ***P:*** *¿por qué?* ***Otro compañero:*** *porque con rectas perpendiculares garantizamos que los ángulos sean de noventa grados* ***P:*** *Muy bien, porque con rectas perpendiculares qué garantizamos Marlon…… que los ángulos sean de noventa grados.*	
P: *¿Ahora qué hacemos?* ***M:*** *luego hacemos el otro punto* (refiriéndose al otro punto por el cual iba a trazar la otra recta perpendicular) ***P:*** *¿hace otro punto?* ***M:*** *y hacemos el otro segmento en la parte de arriba.*	 

<table>
<tr>
<td>
El estudiante, debido al murmullo de un compañero, borra el segmento que había realizado.
P: ¿Por qué lo borro?
Otro estudiante: porque le había quedado mal.
Pareciera que los estudiantes sabían que la construcción estaba mal antes de utilizar el arrastre para su validación. Esto confirma que algunos estudiantes ya habían interiorizado la estrategia ganadora y al ver una equivocación en la construcción, la invalidan automáticamente.
El estudiante vuelve a realizar el segmento.
P: ¿así le quedo bien?
M: creo que si
P: Bueno entonces haga la prueba del arrastre a ver.
</td>
<td>


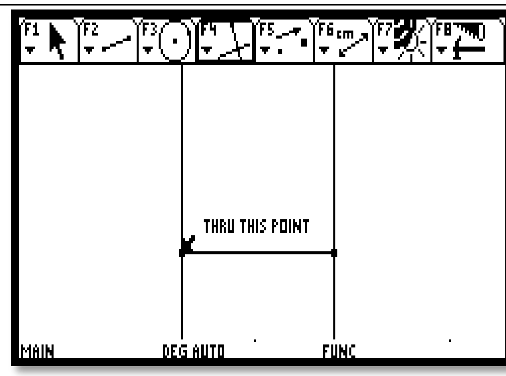
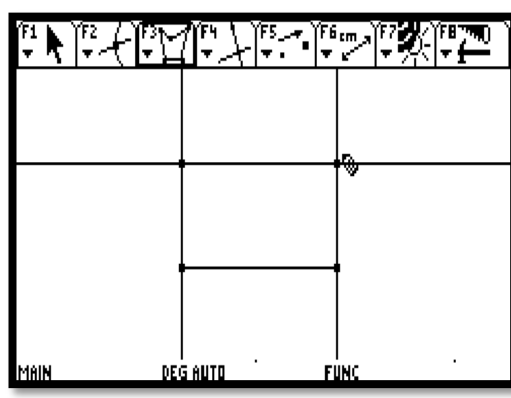


</td>
</tr>
<tr>
<td>
El estudiante arrastra el vértice del segmento que había acabado de construir dándose cuenta que se le desbarata el rectángulo, y él mismo invalida su construcción.
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

Tabla 19. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

La estrategia que utiliza el estudiante es la que nosotros llamamos “mixta”, ya que con la herramienta “recta perpendicular” realiza dos lados del rectángulo y otro de los lados lo construye a ojo utilizando la herramienta “segmento”. Aunque la profesora seleccionó el estudiante al azar, la primera estrategia que se mostró en la puesta en común sirvió para que los otros compañeros del salón se dieran cuenta de algunos de los errores cometidos al realizar la tarea propuesta. Por último la profesora pasa a otro compañero (E2), e inicia una nueva construcción, veamos:

E2: *Traza un segmento y una perpendicular por el punto A.* ***P:*** *¿perpendicular a qué?* ***E2:*** *al punto A vertical* ***P:*** *cómo así ¿una perpendicular es a un punto?* ***E2:*** *no al segmento.* Construye la otra recta perpendicular.	
E2: *trazamos un punto sobre objeto y después trazamos una perpendicular* ***P:*** *¿a quién?* ***E2:*** *a una de las líneas perpendicular sobre el punto.* ***P:*** *muy bien.* ***E2:*** *después colocamos el punto de intersección.* ***P:*** *retiña con “polígono”, para que cuando ocultemos nos quede sólo el rectángulo.*	

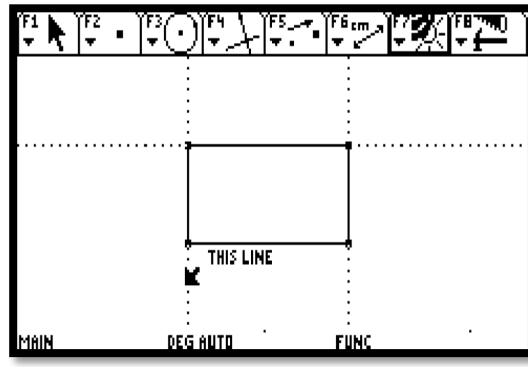
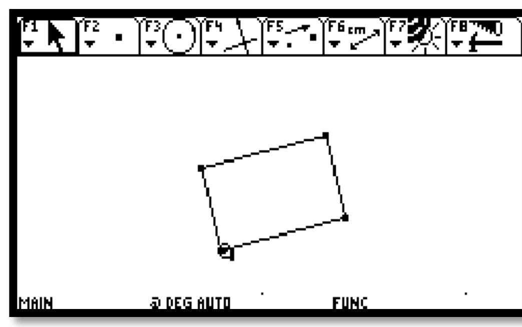
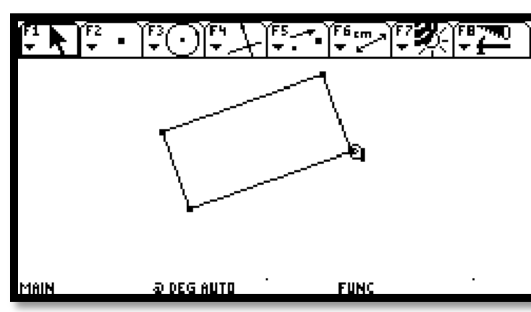
P: *Bueno ahora si ocultemos, ¿con qué es que se oculta?* ***Otro estudiante:*** *F7 , 1* ***P:*** *muy bien ¿entonces qué va a ocultar?, párese en las rectas.* El estudiante oculta todas las rectas para que sólo se vea la figura del rectángulo.	
P: *Ahora sí ¿Quién pasa a mover?* El mismo estudiante que realiza la construcción, empieza a mover uno de los vértices. ***P:*** *¿se deforma el rectángulo?* ***Salón:*** *no* ***P:*** *¿Qué se conserva?* ***E3:*** *que los ángulos sean de noventa grados.* ***P:*** *¿Qué más?, mueva otra cosita, todo lo que pueda mover muévalo.*	
El estudiante coge el vértice derecho de arriba, pero no se deja arrastrar y pasa al de abajo. ***P:*** *Muévalo hacia la izquierda, a la derecha, arriba, muy bien. ¿Será que ese rectángulo está bien hecho?* ***Salón:*** *si* ***P:*** *bien*	

Tabla 20. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

En la puesta en común vemos que aunque la profesora les pide a los alumnos que arrastren todos los puntos que se puedan arrastrar para validar, olvidó que también es necesario hacer la prueba del arrastre sobre las rectas, para lo cual era necesario volver a mostrarlas y arrastrarlas.

La profesora compara lo que había pasado con el primer estudiante, para esto pregunta qué fue lo que le faltó al estudiante:

Diálogo

P: *¿Qué fue lo que le faltó a Marlon?*

Un estudiante responde, pero en el video no se alcanza a escuchar, y la profesora lo repite para todos

P: *Muy bien, que cuando él trazó la parte superior lo hizo con segmento y ese segmento yo lo puedo mover. ¿Qué necesitaba trazar?*

Salón: *Una perpendicular*

P: *¿Perpendicular para qué?*

Salón: *para que no se desbaratara*

P: *para que arriba también los ángulos sean de noventa grados.*

CONCLUSIONES

Lo que se pudo observar en el proceso de construcción del rectángulo fue que muchos de los aspectos que esperábamos que ocurrieran se dieron, pero hubo algunas anomalías y hechos interesantes que no esperábamos que sucedieran:

1. El grupo observado utilizó en su primera construcción una estrategia perceptiva, de acuerdo con lo previsto en el análisis a priori; aunque a la hora de invalidar esta construcción no utilizaron el arrastre, sí anticiparon que la figura perdería la forma al arrastrar[19].

2. El primer caso de la puesta en común presentó una estrategia mixta como habíamos previsto en el análisis a priori, y esa estrategia quedó invalidada al arrastrar.

3. El grupo observado y el segundo caso de la puesta en común presentaron la estrategia ganadora prevista en el análisis a priori.

4. Cuando se presentó la estrategia mixta en la puesta en común, algunos alumnos identificaron el error antes de ver el arrastre, lo cual nos deja ver que ya han interiorizado la estrategia ganadora.

5. La intervención de la profesora en el grupo observado no estuvo acorde con lo previsto en el análisis a priori, pues no dejó que los alumnos validaran y no arrastró los objetos ocultos. En la puesta en común sí pide a los alumnos que arrastren para validar, pero nuevamente olvida mostrar las rectas ocultas para arrastrarlas también. Aunque las construcciones presentadas estaban correctas,

[19] Esto se observó cuando el estudiante dijo: *profesor es que los lados se mueven, toca es uno saberse un truco para que no se mueva.*

era posible que los alumnos hubieran realizado construcciones mixtas que no fueran invalidadas al arrastrar únicamente los objetos visibles.

Nos sorprendió que el progreso de los estudiantes de una estrategia a ojo a una mixta fue muy rápido, debido a que parecía que por el avance de las actividades anteriores, los estudiantes suponían que debían utilizar alguna herramienta especial de la calculadora que les garantizara la conservación de su forma a la hora de arrastrar, a esto le llamaron “un truco” o una propiedad.

Por último, podemos concluir que se logró el objetivo de construir el rectángulo teniendo en cuenta su propiedad de tener cuatro ángulos rectos, lo cual se garantizaba con el uso de la herramienta recta perpendicular.

4.3. ACTIVIDAD DE CONSTRUCIÓN DE UN CUADRADO

OBJETIVO (INTENCIÓN DEL PROFESOR): Aprender a construir un cuadrado utilizando de manera explícita sus propiedades: cuatro ángulos rectos y cuatro lados iguales. Igualmente, practicar el uso de la herramienta 'recta perpendicular', la herramienta 'círculo' y la herramienta 'ocultar', así como aplicar la prueba del arrastre para validar una construcción.

MEDIO: Todas las herramientas de construcción de Cabri.

TAREA: Construir un cuadrado de manera que al arrastrar sus lados o sus vértices siga siendo un cuadrado.

4.3.1. ANÁLISIS A PRIORI

Para esta tarea se espera, como en la actividad de construcción del rectángulo, que los alumnos hagan diferentes tipos de construcciones:

Primero, construcciones puramente perceptivas, utilizando las herramientas 'segmento' o 'polígono' y ajustando los vértices de manera que 'se vea' un cuadrado. El alumno dibujará un cuadrado sin tener en cuenta sus propiedades, por lo tanto estas construcciones podrán invalidarse fácilmente arrastrando alguno de sus segmentos o vértices.

En segundo lugar, y teniendo en cuenta el error cometido en la primera construcción, combinación del uso de herramientas para construir propiedades (en especial la herramienta 'recta perpendicular') y ajustes perceptivos para obtener la forma de cuadrado. Como ya se institucionalizó la construcción del rectángulo, es posible que construyan un rectángulo correctamente y ajusten sus vértices para que todos sus lados sean iguales. Estas construcciones resistirán el arrastre de algunos de sus componentes, pero perderán sus propiedades al arrastrar otros; por eso es importante que se exija al estudiante el arrastre de todos los componentes de la figura: todos los puntos, todas las rectas, todos los segmentos; incluso los que se encuentran ocultos.

Finalmente, el estudiante realizará construcciones que no utilizan el ajuste perceptivo, y que por lo tanto resisten el arrastre de todos sus componentes. El objetivo de la primera parte de la actividad es que los alumnos se planteen la siguiente pregunta: ¿Cómo hago yo para que los lados sean iguales? Una vez que los estudiantes hayan identificado esta pregunta la profesora puede intervenir para decirle cómo hacerlo. Allí, los estudiantes deberán utilizar las herramientas de Cabri, "recta perpendicular" y "recta paralela", para garantizar que los ángulos sean rectos, y la herramienta "círculo" para asegurar que la medida de todos los lados del cuadrado sea la misma.

En la puesta en común se mostrarán en primer lugar las construcciones puramente perceptivas, luego las construcciones mixtas, y finalmente las construcciones correctas. Cada construcción se someterá al arrastre de todos los objetos que la componen (para lo cual es necesario mostrar todos los objetos ocultos con el fin de arrastrarlos). Las construcciones correctas deberán ser explicadas paso a paso, reproducidas por los distintos grupos y copiadas en sus cuadernos como una lista de pasos.

El profesor discutirá con los alumnos sobre por qué el círculo garantiza la igualdad de dos lados del cuadrado. Planteará la pregunta y escuchará las respuestas de los alumnos. Recordará que todos los puntos del círculo se encuentran a la misma distancia del centro, y por lo tanto, al construir dos segmentos que son radios de un mismo círculo, los segmentos tienen la misma medida.

Se hará énfasis en las propiedades de igualdad de medida de los lados del cuadrado y de los ángulos rectos. A través del arrastre se mostrará al estudiante que a pesar de que la figura cambia su forma inicial, se siguen conservando dichas propiedades.

Interacción del alumno con el medio				
Etapa de construcción		Etapa de validación de la construcción		
Acción (Alumno)	**Retroacción (Medio)**	**Acción (Alumno)**	**Retroacción (Medio)**	**Indicio de aprendizaje**
Construye con la herramienta “polígono” o “segmento” un cuadrado.	Muestra un cuadrado que perceptivamente tiene todas las propiedades.	Arrastra todos los lados y vértices del cuadrado construido.	No es cuadrado cuando se arrastra alguno de sus componentes	Modifica la acción
Construye un rectángulo y cuadra sus vértices hasta formar un cuadrado.	Muestra un cuadrado que perceptivamente tiene todas las propiedades.	Arrastra todos los lados y los vértices del cuadrado construido.	La figura deja de tener los cuatro lados iguales.	Modifica la acción
Construye el cuadrado utilizando la herramienta “recta perpendicular” y “círculo” en alguno de sus lados y ajusta a ojo para obtener su forma.	Muestra un cuadrado que perceptivamente tiene todas las propiedades.	Arrastra todos los lados y los vértices del cuadrado construido.	Alguno de sus componentes conserva las propiedades y en otros no.	Modifica la acción
Construye un cuadrado utilizando las herramientas “recta perpendicular”, “círculo” y “recta paralela” de cabri, iniciando con un segmento el cual es uno de sus lados.	Muestra un cuadrado que perceptivamente tiene todas las propiedades.	Arrastra todos los lados y los vértices del cuadrado construido.	El cuadrado resiste el arrastre de todos sus componentes.	Refuerza la acción (Estrategia ganadora)
Construye un cuadrado con las herramientas “recta perpendicular”, “círculo” y “recta paralela” de cabri, iniciando con un segmento el cual es una diagonal del cuadrado.	Muestra un cuadrado que perceptivamente tiene todas las propiedades.	Arrastra todos los lados y los vértices del cuadrado construido.	El cuadrado resiste el arrastre de todos sus componentes.	Refuerza la acción (Estrategia ganadora)

Tabla 21. Resumen proceso de Aprendizaje por Adaptación

4.3.2. ANÁLISIS A-POSTERIORI

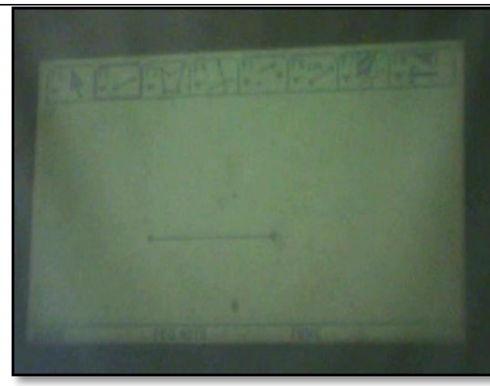
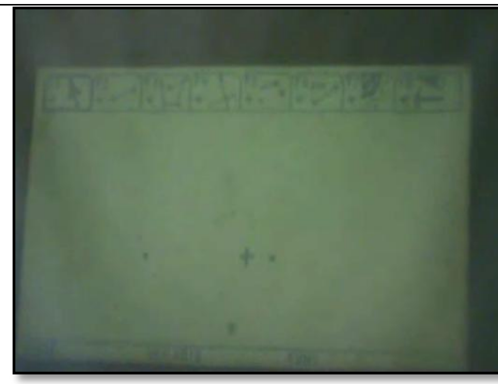
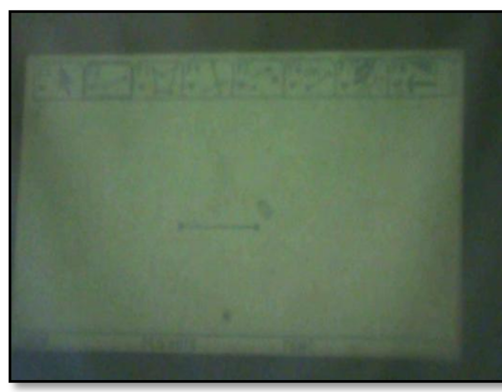
Debido a una falla de planeación nuestra el día que se aplicó esta actividad, el colegio no nos pudo facilitar la cámara para poder tomar evidencia en video, pues ésta se encontraba ocupada fuera de la institución. Así pues, tomamos nota de todo lo ocurrido en el aula de clase, mientras solucionábamos el inconveniente buscando otra cámara para poder tomar evidencia. Como no se podía detener el curso de la actividad, sólo pudimos tomar imágenes de la puesta en común. Algunas cosas importantes por destacar en las notas que recogimos fueron las siguientes:

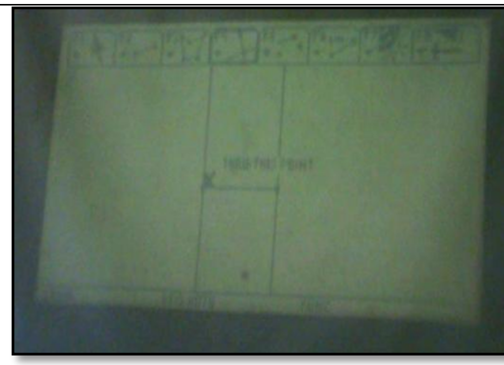
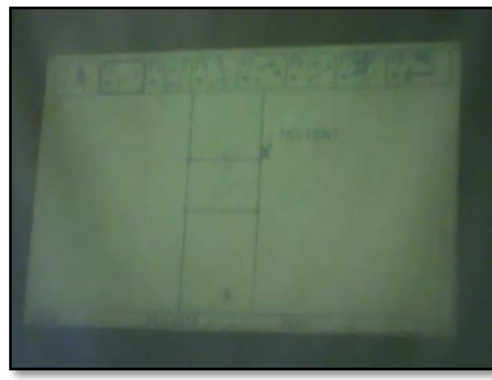
La primera construcción que realizaron los estudiantes fue la del rectángulo. Arrastraron los vértices hasta que todos los lados tuvieran la misma medida. Los estudiantes llamaron a la profesora para que verificara su construcción pero ella les recordó que ellos mismos debían decir si estaba bien o mal la construcción que habían realizado. Los alumnos arrastraron uno de los vértices para validar y se dieron cuenta que la figura dejaba de tener los cuatro lados iguales, llegando a la conclusión que la construcción que habían realizado era incorrecta, la borraron y decidieron empezar de nuevo. Retomando la tarea, los estudiantes construyeron un segmento y por sus extremos trazaron dos rectas perpendiculares como en la construcción del rectángulo. Llaman a la profesora para preguntarle cómo pueden hacer para que los lados del cuadrado siempre sean de la misma medida cuando se mueva cualquier componente de la figura, la profesora les dice que por qué no miran todas las herramientas que les brinda la calculadora (Cabri). Luego de estar mirando las diferentes herramientas, los estudiantes utilizaron “círculo”, realizando dos círculos con centro en cada uno de los extremos del segmento y radio en el otro, encontrando finalmente los cuatro puntos del cuadrado. Con la herramienta “polígono”, repisaron y ocultaron los demás componentes para que solo se viera el cuadrado. Realizaron la validación con el arrastre, pero de nuevo no arrastraron los componentes ocultos, lo cual es de gran importancia para una completa validación.

Lo que se pudo observar en el desarrollo de la actividad, fue que muy pocos estudiantes utilizaron la estrategia únicamente perceptiva, creemos que debido a la institucionalización en la actividad anterior de la construcción del rectángulo. Como se había previsto en el análisis a priori, los estudiantes construyeron el rectángulo, lo cuadraron para que se viera un cuadrado, le pidieron a la profesora para que validara, la profesora les dijo que ellos debían validar, ellos arrastraron para validar, el medio invalidó y los alumnos interpretaron correctamente la validación del medio cambiando la estrategia. En este momento de la clase vemos que el objetivo esperado en el análisis a priori se cumple, ya que los alumnos llegaron a plantear la pregunta “¿cómo hacer para que los lados sean iguales?”. Algo importante por recalcar es que los estudiantes no tuvieron ninguna dificultad en la utilización de la herramienta “círculo”, pues el año pasado la habían trabajado en los conceptos de traslación y simetría axial.

PUESTA EN COMÚN

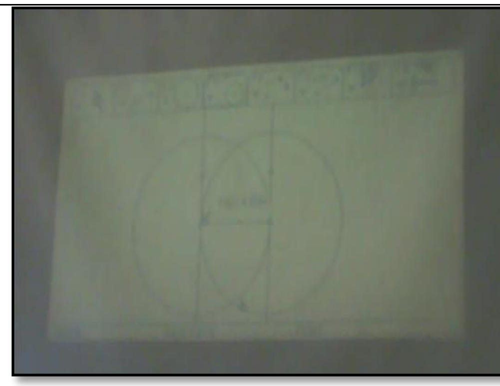
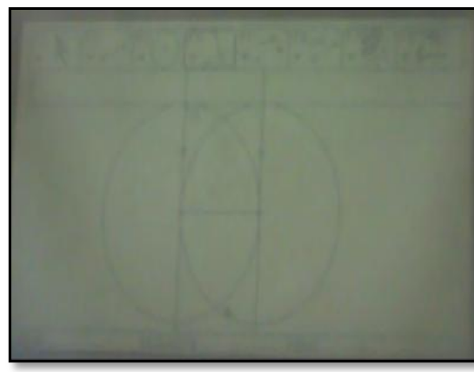
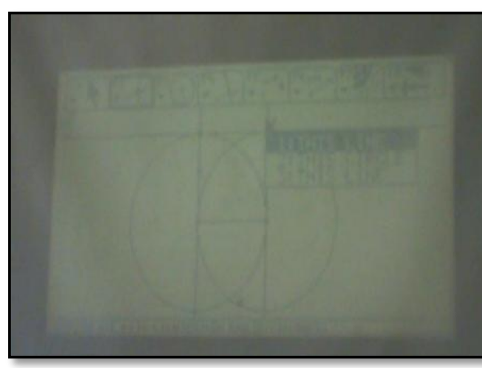
En esta puesta en común la profesora escogió a un estudiante muy inquieto y que poco trabajó en el desarrollo de la actividad, no lograba concentrarse en su realización, pues siempre estaba haciendo otras cosas y no las referentes a la clase; su indisciplina en clase hacía que sus demás compañeros se distrajeran y que la profesora estuviera constantemente haciéndoles llamados de atención. Cuando la profesora le preguntaba por qué no realizaba la actividad, el estudiante respondía que era muy difícil y que no era capaz de realizarla. Aunque no quería pasar al frente en la puesta en común, fue motivado por sus compañeros y por la profesora, convenciéndolo así de participar:

El estudiante inicia construyendo un segmento con la herramienta de Cabri. Aunque parece que los demás alumnos le estaban diciendo los pasos que debía realizar, la profesora pide a sus demás compañeros que no intervengan en la realización de la construcción.	
El estudiante borra el segmento: ***E:*** *profesora yo no sé hacer un cuadrado* ***P:*** *¿No sabe hacer un cuadrado?...... hágalo como quiera no importa si le queda bien o mal, hágalo papá.*	
El estudiante retoma su construcción y realiza un segmento ***P:*** *muy bien…. listo ahora qué más*	

Empieza a buscar entre las herramientas que le brinda Cabri, y con recta perpendicular, realiza dos rectas que pasan por los extremos del segmento. ***P:** ¿Qué está buscando? bien*	
Aunque el estudiante trazó un segmento para completar el cuadrado, los otros compañeros del grupo ya se habían dado cuenta que la construcción que estaba realizando le había quedado mal. ***E2:** ya le quedo mal* ***E3:** más arriba* ***P:** ¿ahí?* ***E4:** noooooooo* ***P:** a ver los quiero a todos en silencio verdad*	
***P:** hijo ¿Qué es un cuadrado? ¿Qué es un cuadrado?* ***E:** un cuadro* ***E2:** un cuadro que tiene las mismas medidas* ***P:** un cuadro, ¡eso es un cuadro!… usted me dice que eso es un cuadrado…* ***E:** no* ***P:** entonces qué es un cuadrado* ***E:** es un objeto que tiene los cuatro lados iguales.*	

P: *muy bien, un objeto, un objeto que tiene cuatro lados iguales*[20]*.* ***P:*** *¿Solamente necesito que tengan cuatro lados iguales? ¿Ese tiene cuatro lados iguales?* ***Grupo:*** *No, no* ***P:*** *entonces qué hago* El estudiante borra el segmento, traza una recta perpendicular, y luego la borra. En este punto podemos notar que la propiedad de perpendicularidad entre los lados ya estaba interiorizada.	
P: *¿qué quiere hacer usted? ¿Qué es lo que quiere hacer?* ***E:*** *que todos los lados sean iguales* ***P:*** *entonces ¿cómo hace para saber que todos los lados son iguales?* ***E:*** *hago un circulo* ***P:*** *¿para qué está buscando un círculo?* ***E2:*** *para hacer la medida profesora, para tomar la medida.* Acá podemos observar que algunos estudiantes sabían para qué servía la herramienta círculo, queriendo decir que con dichas herramientas se garantizaba la igualdad de las distancias de los lados.	

[20] Aquí podemos notar que lo que se previó en el análisis a priori se estaba cumpliendo ya que los alumnos ya empezaban a identificar algunas propiedades implícitas del cuadrado, y algo muy importante para mencionar es que empezaban a notar la relación del rectángulo y el cuadrado respecto a la medida de sus lados

El estudiante realiza los dos círculos utilizando la herramienta compás ***P:*** *¿para qué trazó esos círculos?* ***E:*** *para yo colocar los puntos de arriba* ***P:*** *¿y no hay otra opción para yo colocar la distancia? ¿Tiene que ser con círculo?* ***E:*** *no*	
P: *¿ahora qué hago con esos círculos?* ***E3:*** *una línea perpendicular.* ***P:*** *bueno y ahora qué hago* ***E2:*** *borre los círculos* ***E:*** *los borro* ***P:*** *los borro no, los oculto, f7… ¡ah! pero antes de ocultar, ¿ya tiene los cuatro puntos del cuadrado? ¿Cuál le falta?* ***E2:*** *repíselos* ***P:*** *¿cómo lo repiso?* ***E2:*** *con punto de intersección* ***P:*** *muy bien con punto de intersección dicen sus compañeros, f2 punto de intersección.* Aunque la profesora intervino mucho en este proceso, la mayoría de los avances de la puesta en común fueron aportes de los mismos estudiantes, quienes intentaban ayudar a su compañero creando un ambiente de participación en el cual surgían muy buenas ideas.	 

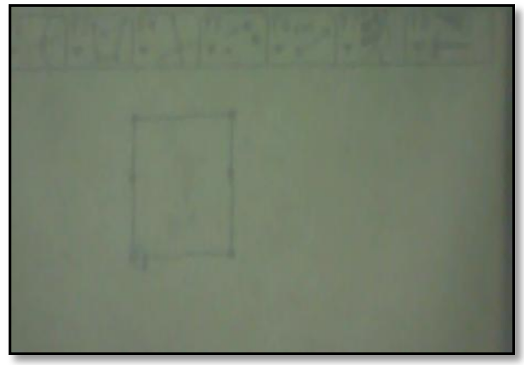
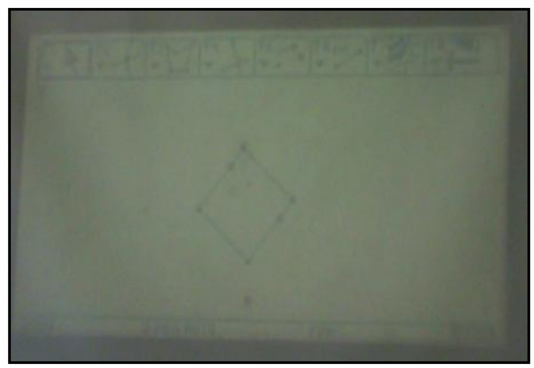
P: *y ¿ahora?* ***E:*** *ocultar* ***P:*** *¿qué está haciendo? ¿Ocultando?* ***E:*** *ocultando* ***P:*** *bueno listo, listo escape ahora haga polígono muy bien polígono, y ahora si una los cuatro puntos que corresponden al cuadrado*[21]*.*	 [22]
P: *ahora vamos a mover los puntos, mueva los puntos, párese ahí.* (señalando uno de los puntos) El estudiante realiza la acción ***P:*** *a ya, ahora mueva el otro punto, arriba, los lados, el del centro* El estudiante arrastra todos los componentes de la figura que se pueden ver.	

Tabla 22. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

La profesora hace una pregunta a todo el salón:

Diálogo

P: *Parece que ese es un cuadrado; ¿Qué dicen ustedes el cuadrado se desbarata?*

[21] Debido a que la toma se realizó desde un costado del salón la imagen parece no ser un cuadrado.

[22] En la figura se ven otros dos puntos que eran los puntos que habían quedado del segmento perceptivo construido al comienzo.

Grupo: *no, no, no,…*

P: *como hago yo para saber efectivamente o para comprobar que es un cuadrado.*

E: *mido*

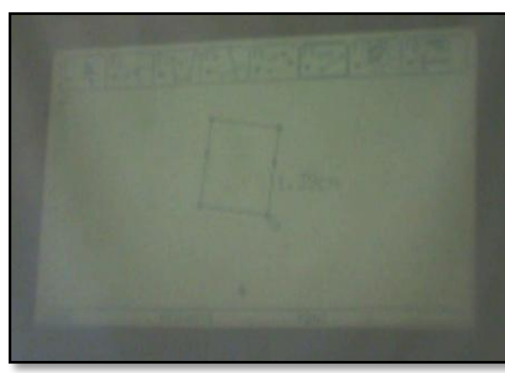
P: *qué mido papá.*

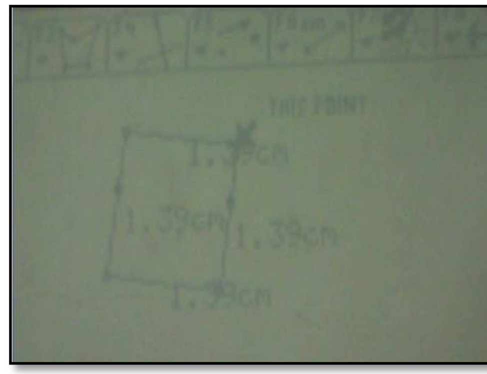
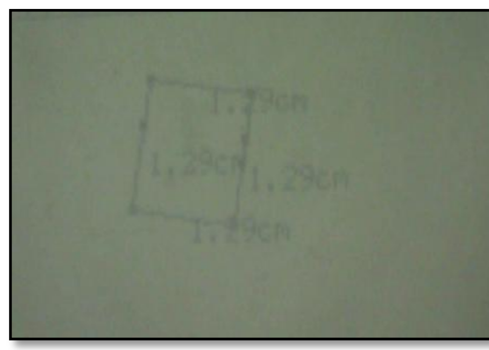
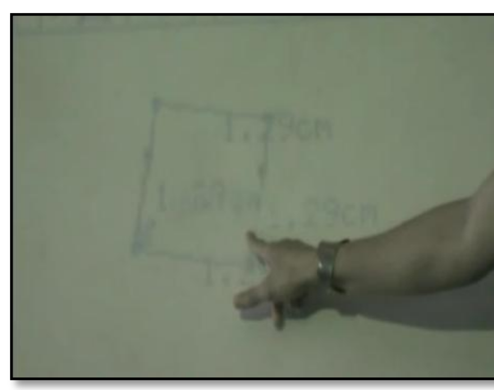
E: *los lados*

P: *bravo si ve que si podía,* (pide a sus compañeros un aplauso)

Aunque en este punto la etapa de validación parece estar completa, se pudo notar que la profesora olvida nuevamente arrastrar los componentes ocultos de la construcción, cosa que se debía realizar para una completa validación.

La profesora prosigue la puesta en común pasando a otro estudiante:

P: *bien ahora vamos a comprobar. ¿Qué va a medir?* ***E:*** *la distancia que tiene el …* ***P:*** *vamos a medir la distancia a ver si los cuatro lados son…* ***Grupo:*** *iguales* ***P:*** *y ¿Qué más le medimos?* ***E2:*** *los ángulos* ***P:*** *muy bien* ***E:*** *y ahora ¿Dónde es que está?* (Refiriéndose a la herramienta que sirve	

para medir los lados). ***P:** en f6, distancia mire, distancia, listo. Entonces ¿desde dónde hasta dónde?* ***E:** del segmento a otro punto* ***P:** desde ese punto…* ***E:** a este otro punto* ***P:** muy bien, y ahora desde ese punto al otro, muy bien.* El estudiante realiza la misma acción para todos los lados ***P:** listo los cuatro lados son iguales*	
***P:** mueva, mueva otra vez a ver si se conserva que los lados son iguales* El estudiante realiza la acción ***P:** si, todos los lados siguen siendo iguales.*	
***P:** ahora ¿Quién pasa y mide los ángulos?* Pasa un estudiante ***P:** f6 ángulos, ahí… listo. Para medir el ángulo entonces usted se va a parar acá, acá y acá.* (señalando tres vértices consecutivos, el cual dará la medida del ángulo que se forma en el vértice del centro) ***P:** listo y después con todos igual*	

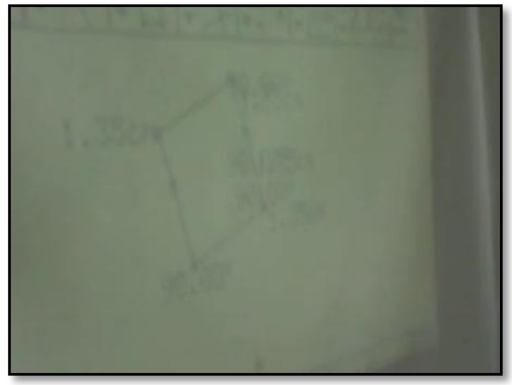
Una vez obtenida la medida de los lados y los ángulos, la profesora da de nuevo la instrucción de realizar el arrastre para que los estudiantes vean que no importa cual punto arrastramos las propiedades siempre se van a conservar. ***P:*** *miren siempre los ángulos cuánto miden…* ***Grupo:*** *noventa grados* ***P:*** *¿Qué varia?* ***Grupo:*** *las medidas* ***P:*** *la medida de los…* ***Grupo:*** *lados* ***P:*** *muy bien*	

Tabla 23. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

Gracias a la utilización de las herramientas de medida de lados y ángulos, fue más claro para los estudiantes observar que no importaba que se arrastrara el cuadrado, que su tamaño variara, o que se inclinara, siempre las medidas de los lados se conservaban iguales y sus ángulos permanecían de noventa grados.

CONCLUSIONES

Aunque no pudimos recoger la evidencia completa de lo ocurrido en esta actividad, sí pudimos observar que lo previsto en el análisis a priori se cumplió, algo que nos sorprendió fue que la mayoría de los estudiantes ya estaban abandonando las estrategias netamente perceptivas y habían asimilado el concepto de perpendicularidad. Además, recalcamos que se presentó muy buen manejo de la puesta en común, de la cual podemos sacar las siguientes conclusiones:

1. En esta actividad se observaron pocas construcciones únicamente perceptivas ya que parecía que los estudiantes habían interiorizado la propiedad de perpendicularidad.

2. Como se había previsto en el análisis a-priori, la mayoría de los estudiantes utilizaron estrategias mixtas en la construcción del cuadrado, debido a que intentaban replicar el proceso de construcción del rectángulo pero no sabían qué herramienta utilizar para garantizar que los lados de la figura tuvieran la misma medida. Un ejemplo claro de esto ocurrió cuando el estudiante observado empieza su construcción con un segmento y en los vértices de éste traza dos rectas perpendiculares, pero cuando pretende construir el último lado de su cuadrado se detiene un poco, como dudando, y decide trazar un segmento que cuadra a ojo, tratando de garantizar la igualdad de medida entre sus lados. Lo interesante de esta acción es que no tiene que recurrir al arrastre para invalidar su construcción, pues sus mismos compañeros identifican el error y anticipan la invalidación por arrastre.

3. En la etapa de validación la profesora falló de nuevo al no arrastrar los componentes que se encontraban ocultos. Como consecuencia de que nunca hizo énfasis en arrastrar los elementos ocultos, los estudiantes al validar sus construcciones, nunca lo hicieron.

4. Se puede observar que a través de los errores de construcción y de la búsqueda de la estrategia ganadora, surge la pregunta general en el salón sobre qué herramienta utilizar para garantizar que la figura al arrastrarse no pierda la propiedad de tener todos sus lados iguales. Esto nos deja ver con claridad que se cumplió con el objetivo de la actividad propuesta en el análisis a-priori, el cual era: aprender a construir un cuadrado utilizando de manera explícita sus propiedades, de tener cuatro ángulos rectos y cuatro lados iguales; pues aunque los alumnos no eran capaces de llegar a la estrategia ganadora, ya identificaban con claridad las propiedades del cuadrado y querían aplicarlas a su construcción, pero no sabían cuál herramienta utilizar para garantizar que su cuadrado resistiera el arrastre. Aquí vemos que el objetivo de la actividad estaba casi alcanzado pues ellos ya reconocían las propiedades del cuadrado.

5. Los mismos estudiantes fueron los que en la puesta en común propusieron las herramientas "círculo" y "compás", que ya sabían utilizar[23] y con las cuales afirmaban poder garantizar que la medida de los lados del cuadrado fuera la misma.

6. Gracias a que la profesora solicitó medir la longitud de los lados y los ángulos del cuadrado, los estudiantes pudieron observar que aunque cambiara la posición o se girara el cuadrado, de tal manera que sus lados

[23] Los estudiantes ya sabían utilizar estas herramientas gracias al trabajo realizado en la conceptualización de la translación y simetría axial que se desarrolló el año anterior.

dejaban de ser horizontales o verticales, la figura seguía siendo un cuadrado pues conservaba sus propiedades.

4.4. ACTIVIDAD DE CONSTRUCCIÓN DE RECTÁNGULOS PEGANDO CUADRADOS (IGUAL ÁREA, DIFERENTEPERÍMETRO Y FORMA)

OBJETIVO (INTENCIÓN DEL PROFESOR): Crear la experiencia de que dos o más rectángulos pueden tener la misma área pero diferentes medidas de los lados.

MEDIO: En esta actividad, los estudiantes tendrán en cuenta las herramientas que les brinda el programa Cabri para la construcción del cuadrado y la herramienta "simetría axial".

La profesora mostrará cómo producir el reflejo de un cuadrado con respecto a uno de sus lados, utilizando la herramienta "simetría axial". Luego planteará la tarea.

TAREA: Construir todos los rectángulos solución que puedan construirse con la unión de 3 cuadrados, 4 cuadrados, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12 cuadrados. ¿Cuántos rectángulos diferentes es posible construir en cada caso?

4.4.1. ANÁLISIS A PRIORI

Se espera que lo primero que los alumnos hagan sea realizar la actividad introductoria utilizando las herramientas conocidas por ellos hasta este momento y que estén en la capacidad de construir rectángulos formados por la unión de dos cuadrados, validando sus construcciones a través del arrastre.

Después, utilizando la herramienta "simetría axial" deberán obtener las posibles soluciones para el rectángulo formado de la unión de tres cuadrados, y cada vez que obtengan una posible solución deberán dibujarla en su cuaderno.

Se espera que los estudiantes descubran que en algunos casos (4, 6, 8, 9, 10, 12) se pueden formar diferentes rectángulos dependiendo de la posición. También puedan invalidar aquellas figuras en las cuales no dé forma de rectángulo, como se ve a continuación:

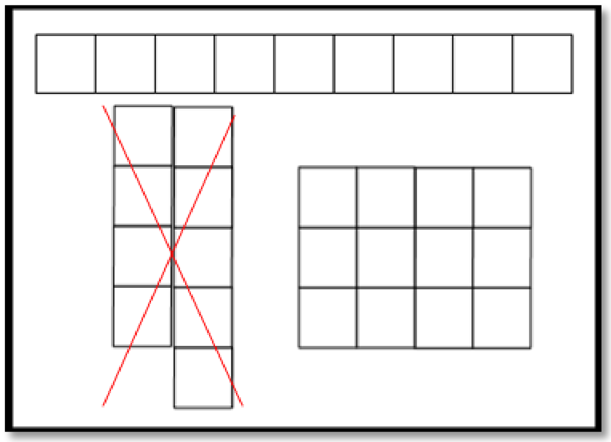
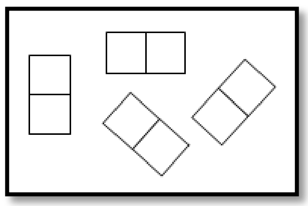
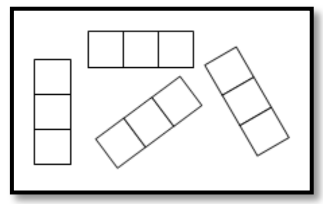
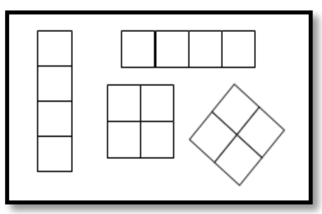
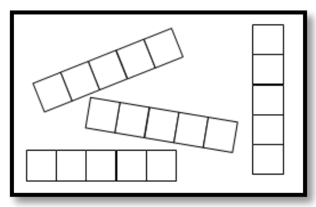
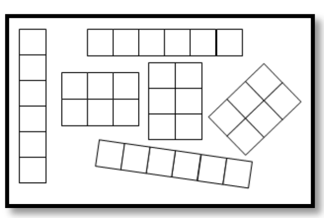
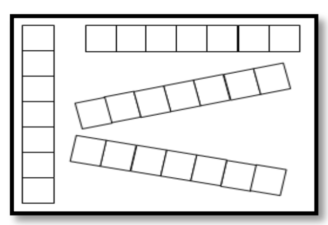


Figura 14. Diferentes rectángulos solución

Algunos alumnos no aceptarán que un cuadrado, por ejemplo de 4x4, sea un rectángulo, pues para ellos el hecho de ser rectángulo implica lados desiguales; es importante plantear la pregunta, pero no definir el debate si hay opiniones diferentes.

La profesora dará la indicación de dibujar aparte en su cuaderno todas las posibles soluciones de cada número de cuadrados con el fin de que los estudiantes puedan comparar las distintas soluciones, y llegar a la conclusión de que tienen la misma área (igual número de cuadrados), pero diferente perímetro (diferente número de cuadrados en el borde).

<table>
<tr><th colspan="2">Posibles Rectángulos Solución</th></tr>
<tr><td>Con dos cuadrados: Un único rectángulo, aunque los alumnos podrán decir que en cada posición el rectángulo es diferente.
</td><td>Con tres cuadrados: Un único rectángulo, aunque los alumnos podrán decir que en cada posición el rectángulo es diferente.
</td></tr>
<tr><td>Con cuatro cuadrados: dos posibles rectángulos solución, aunque los alumnos podrán decir que en cada posición el rectángulo es diferente.
</td><td>Con cinco cuadrados: Un único rectángulo, aunque los alumnos podrán decir que en cada posición el rectángulo es diferente.
</td></tr>
<tr><td>Con seis cuadrados: dos posibles rectángulos solución, aunque los alumnos podrán decir que en cada posición el rectángulo es diferente.
</td><td>Con siete cuadrados: Un único rectángulo, aunque los alumnos podrán decir que en cada posición el rectángulo es diferente.
</td></tr>
</table>

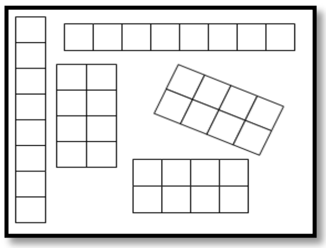
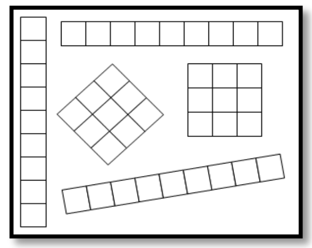
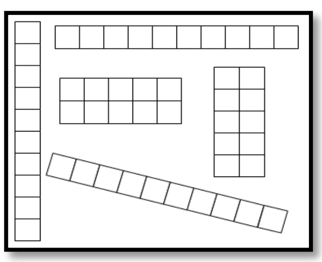
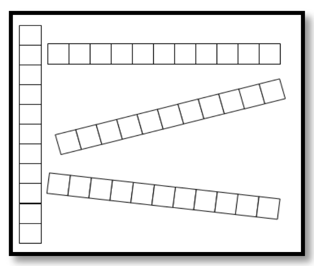
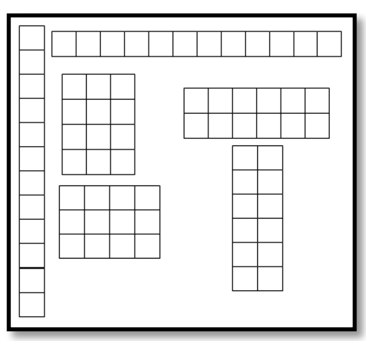
Con ocho cuadrados: dos posibles rectángulos solución, aunque los alumnos podrán decir que en cada posición el rectángulo es diferente. 	**Con nueve cuadrados:** dos posibles rectángulos solución, aunque los alumnos podrán decir que en cada posición el rectángulo es diferente. 
Con diez cuadrados: dos posibles rectángulos solución aunque los alumnos podrán decir que en cada posición el rectángulo es diferente. 	**Con once cuadrados:** Un único rectángulo, aunque los alumnos podrán decir que en cada posición el rectángulo es diferente. 
Con doce cuadrados: tres posibles rectángulos solución, aunque los alumnos podrán decir que en cada posición el rectángulo es diferente. 	

Tabla 24. Posibles rectángulos solución para cada número de cuadrados dado

Se espera que los estudiantes crean que existen muchos rectángulos solución para cada número específico de cuadrados utilizados, pues dirán por ejemplo que un rectángulo de tres cuadrados horizontal es diferente al vertical. Gracias a Cabri el profesor hará ver a los estudiantes que es un mismo rectángulo:

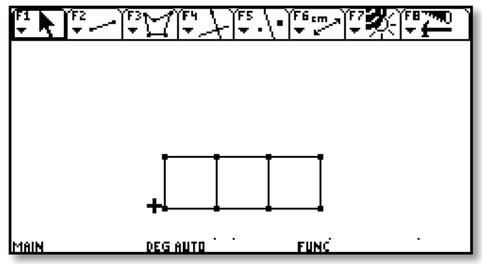
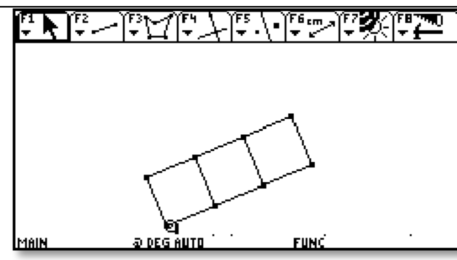
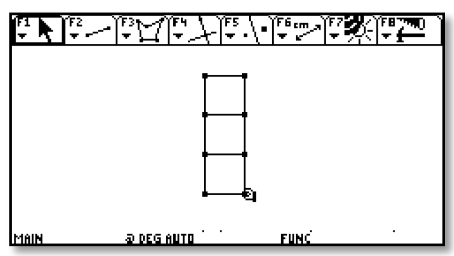
Se construirá un rectángulo de tres cuadrados.	
Arrastrando un punto del segmento con que se inició la construcción del primer cuadrado, se puede cambiar la posición del rectángulo dejándolo en diagonal.	
Se puede seguir arrastrando hasta dejar por ejemplo el rectángulo vertical.	

Tabla 25. Forma de invalidar que el rectángulo es el mismo pero en diferente posición

El profesor podrá mostrar a los estudiantes que los tres rectángulos que aparecen en las figuras son el mismo y que por medio del arrastre se pueden poner en diferente posición.

En la puesta en común, la profesora iniciará pasando un grupo de estudiantes, los cuales se encargarán de mostrar todas las posibles soluciones para un rectángulo formado por tres cuadrados; todas las soluciones serán dibujadas en el tablero y la profesora guiará a los estudiantes para encontrar las relaciones entre ellas y poder identificar que podemos encontrar diferentes rectángulos, construidos con el mismo número de cuadrados. Este proceso se debe realizar con cada número específico de cuadrados hasta que los estudiantes puedan ver con claridad que se pueden construir varios rectángulos con un número determinado de cuadrados, como se puede ver en el ejemplo para doce cuadrados:

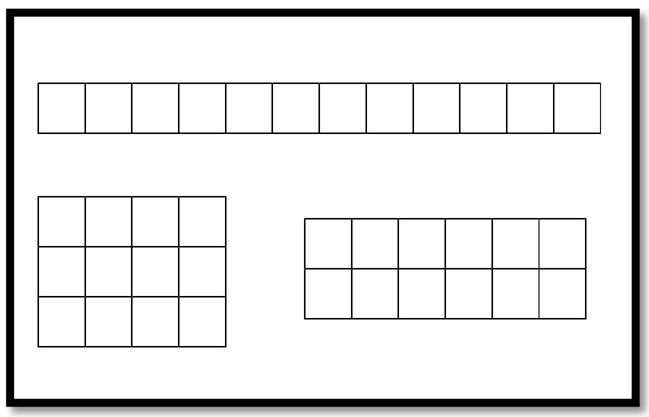


Figura 15. Rectángulos solución para doce cuadrados

Interacción del alumno con el medio			
Acción (alumno)	**Retroacción (medio)**	**Alumno**	**Indicio de Aprendizaje**
Rellena los rectángulos esperando que en el más largo haya más cuadrados	Muestra los rectángulos rellenos completamente con el mismo número de cuadrados.	Cuenta los cuadrados en los dos rectángulos y se da cuenta que los rectángulos tienen el mismo número de cuadrados.	Invalida su hipótesis.
Rellena los rectángulos esperando que en el más ancho haya más rectángulos	Muestra los rectángulos rellenos completamente con el mismo número de cuadrados.	Cuenta los cuadrados en los dos rectángulos y se da cuenta que los rectángulos tienen el mismo número de cuadrados	Invalida su hipótesis.
Rellena los rectángulos esperando que en ambos haya el mismo número de cuadrados	Muestra los rectángulos rellenos completamente con el mismo número de cuadrados.	Cuenta los cuadrados en los dos rectángulos y se da cuenta que los rectángulos tienen el mismo número de cuadrados	Validan su hipótesis.

Tabla 26. Resumen proceso de Aprendizaje por Adaptación

NOTA sobre la actividad planeada:

En esta actividad el medio (Cabri) sirve para invalidar una concepción según la cual un rectángulo es diferente según la posición que tenga. Los estudiantes van a poder construir un rectángulo con la unión de un mismo número de cuadrados en diferente posición (horizontal, vertical, diagonal, etc.), pero a través del arrastre podrán observar que estas construcciones son las mismas, pues basta con arrastrar una de ellas en diferente dirección y observar que todas las que creía diferentes en realidad son el mismo rectángulo pero en otra posición.

Vemos que esta actividad, tal como se aplicó, no ayudó a alcanzar una forma de validación o invalidación en relación con el objetivo propuesto; es más, no se precisa que la relación que se debe establecer es entre el número de cuadrados y la medida de los lados. En esta actividad los alumnos no saben bien qué es lo que tienen que hacer, ni si lo que hicieron está bien o mal, ya que la tarea dice "construir todos los rectángulos solución que puedan construirse con la unión de 3 cuadrados, 4 cuadrados, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12 cuadrados. ¿Cuántos rectángulos diferentes es posible construir en cada caso?", y no se ve que los estudiantes puedan llegar a identificar que dos o más rectángulos pueden tener la misma área pero diferentes medidas de los lados, porque en la tarea no se relaciona la medida de los lados con el número de cuadrados utilizados; Por lo tanto, el profesor termina enseñando directamente el saber sin darse un aprendizaje por adaptación.

Para que esta actividad tome sentido y se pueda alcanzar el objetivo para el cual fue planeada, debe necesariamente estar acompañada de una segunda tarea para que se problematice lo que deben hacer con los rectángulos.

Una propuesta que hacemos para mejorar la actividad es crear dos nuevas tareas complementarias a la anterior. Primero, se entregará a los estudiantes un archivo preparado con antelación, en este caso se describirá el proceso para trabajar con rectángulos construidos con cuatro cuadrados.

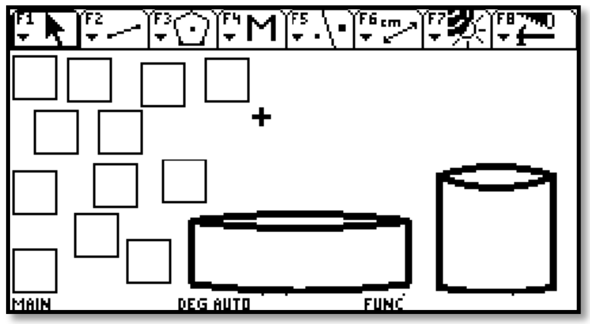


Figura 16. Propuesta de la primera tarea adicional para mejorar la actividad

El archivo consta de doce cuadrados, todos de la misma medida y que al arrastrar no cambien sus propiedades y tamaño, dos recipientes cada uno con diferentes dimensiones y diseñados para que dentro de ellos se pueda construir el respectivo rectángulo, los recipientes se deben crear de manera que ninguno de sus componentes se debe arrastrar (que queden fijos).

Tarea: utilizando la herramienta arrastre, crear dos rectángulos formados por la unión (no intersección) de cuatro cuadrados, de tal forma que cada uno de ellos quede completamente dentro de su respectivo recipiente.

Después de realizar esta tarea se entregará un paquete de archivos, que consiste en una serie de ejercicios donde se pone a prueba la capacidad del estudiante para solucionar un problema de la vida real, se entregarán dos cajas (rectángulos) con diferente perímetro pero con áreas iguales, se pedirá en primera instancia, que respondan a la pregunta ¿En cuál caja caben más fichas de una misma medida? Ellos plantearán sus hipótesis y las escribirán en el cuaderno para ser sustentadas

MEDIO: se entregará un segundo archivo el cual consta de dos rectángulos, uno con 6x1cm y otro de 3x2 cm, la idea es que se les entregue dos cuadriláteros que tengan la misma área y diferente medida de sus lados, además se permitirá a los estudiantes dichas medidas que aparecerán adjuntas a un lado de cada rectángulo como se ve a continuación:

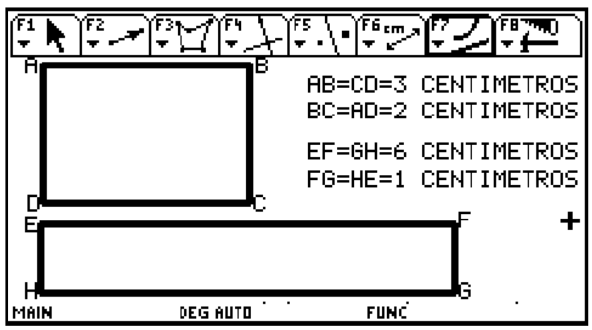


Figura 17: Propuesta de la segunda tarea adicional para mejorar la actividad

Se espera que los estudiantes se dejen llevar solo por la percepción y que aseguren que la caja entre más larga es más grande (refiriéndose a que es en la que caben más fichas), con esta actividad pretendemos que se presente una discusión entre los alumnos sobre cuál de las dos cajas es para ellos más grande. Una vez los estudiantes respondan de esta forma, el profesor pedirá a los estudiantes que verifiquen sus hipótesis rellenando de cuadrados de 1x1 cm cada una de las cajas utilizando la herramienta "simetría axial", para que puedan observar en realidad en cuál de las dos cajas caben más cuadrados.

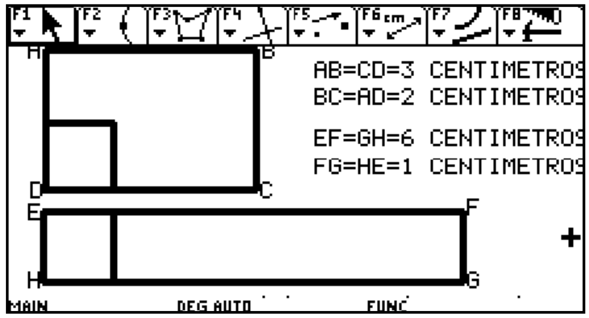


Figura 18: Propuesta de la segunda tarea adicional para mejorar la actividad

Se espera que el estudiante empiece rellenando la caja que para él es considerada como la más grande y que se sorprenda cuando al terminar la que considere más pequeña, se dé cuenta que tienen el mismo número de cuadrados, siendo en este preciso momento donde validará o invalidará sus hipótesis y logrará entender que hay rectángulos que aunque tienen diferente medida de sus lados pueden ser rellenados con el mismo número de cuadrados.

Solo en este momento de la actividad podemos garantizar que el objetivo de crear la experiencia de que dos o más rectángulos pueden tener la misma área pero diferentes medidas de los lados fue alcanzado.

4.4.2. ANÁLISIS A-POSTERIORI

Nota: Como vimos en el análisis a priori, la actividad planeada no garantiza que gracias a la interacción con el software, los alumnos comparen el número de cuadrados con las medidas de los lados de los rectángulos, el cual es el objetivo de la actividad. Entonces el profesor se ve obligado a intervenir para proponer esa comparación.

Por otra parte, la profesora no hizo lo planteado en el análisis a priori, pues no les mostró cómo usar simetría axial para construir el segundo cuadrado.

La profesora da inicio a la actividad olvidando explicar a los estudiantes cómo se construía el simétrico de un cuadrado dado, incumpliendo lo que se había planeado en el análisis a priori. Simplemente les pide que construyan rectángulos utilizando 2, 3,… cuadrados. Por tal razón, la actividad se prolongó por mucho tiempo y fue muy lento el avance de los estudiantes.

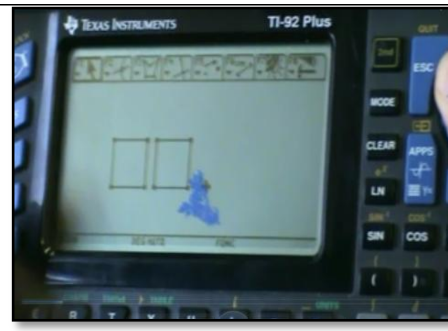
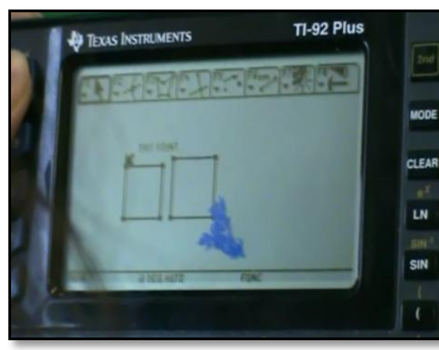
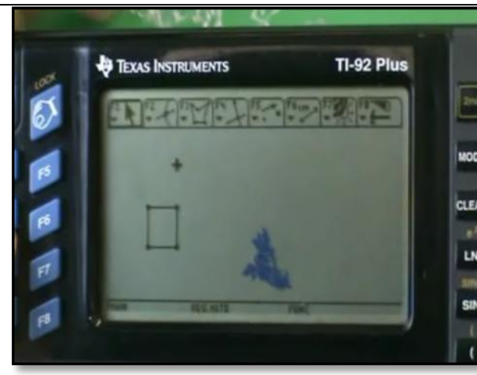
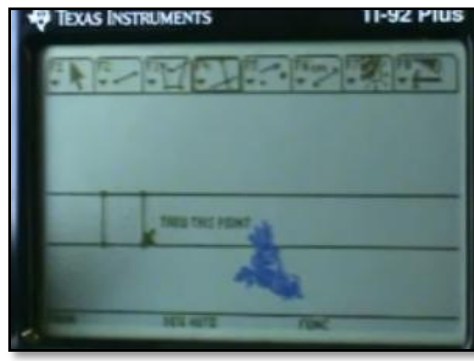
La primera construcción que realizó el estudiante fue con dos cuadrados independientes, uno enseguida del otro y estos no estaban unidos por ninguno de sus lados.	
Al terminar su construcción se dispusieron a tratar de unirlos por uno de sus lados encontrando la dificultad de que por más que tomaba puntos diferentes al arrastrar los dos cuadrados no se podían unir, pues tomaban dimensiones diferentes.	

Tabla 27. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

Aunque la construcción se hizo de manera correcta y los cuadrados cumplían con todas sus propiedades, el estudiante no pudo lograr unirlos usando el arrastre, y de ninguna manera logró hacerlos coincidir por uno de sus lados, razón por la cual tomó la decisión de borrar y empezar de nuevo.

El estudiante empieza realizando un cuadrado.	
Traza dos rectas perpendiculares que pasan por los vértices superior e inferior del cuadrado obteniendo la figura que se ve en la imagen.	
Luego con la herramienta “círculo” crearon los puntos por donde pasaría el otro lado del segundo cuadrado.	

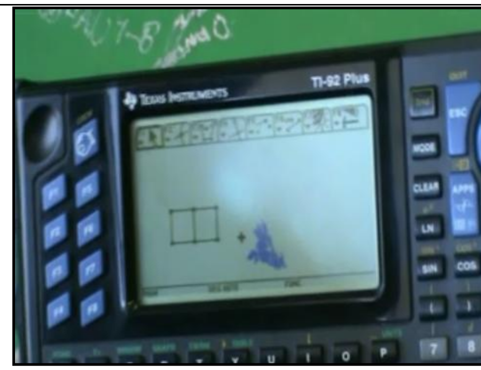
Con la herramienta “polígono” repisa el segundo cuadrado y oculta los demás componentes de la construcción.	
Cuando el estudiante termina la construcción, él mismo la valida a través del arrastre moviendo cada uno de los componentes de la figura. Se le hace la pregunta ¿Cuál es la condición para que quede mal o para que quede bien la construcción?, a lo cual responde ***E:*** *que no se desbarate al moverla, entonces sí quedó bien*	

Tabla 28. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

Después de haber terminado esta parte de la actividad, la profesora da la instrucción a los estudiantes para que ahora construyan todos los rectángulos que puedan hacer con 3, 4, 5,… cuadrados y que cada vez que termine el rectángulo solución lo dibuje en el cuaderno.

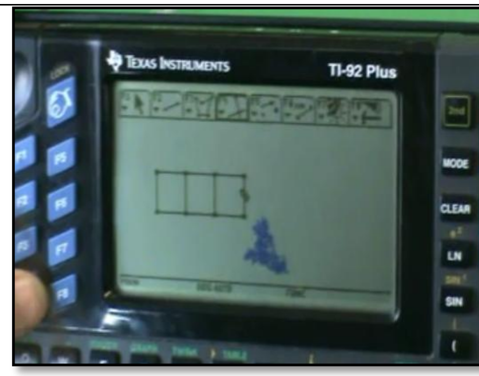
La estudiante vuelve a repetir el proceso de construcción que utilizó al construir su segundo cuadrado y logra finalizar su construcción al validarla arrastrando todos los componentes de la figura. Debido a la confusión de algunos estudiantes en la realización de la actividad, la profesora hace una aclaración en el tablero , la cual veremos a continuación:	
P: *para todos pongan atención, los de atrás, si trazo cinco cuadrados y los uno de esta manera… yo lo que quiero es el contorno verdad…* (dibuja los cinco cuadrados y repisa el contorno de la figura) *¿Esto es un rectángulo?* ***Grupo:*** *no, no* ***P:*** *tiene que ser en forma de rectángulo.* La profesora anula la construcción tachándola con una X	

Tabla 29. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

Gracias a esta intervención de la profesora se aclaró la duda de los estudiantes, pero además, sirvió para que ellos se dieran cuenta que no sólo se trataba de construir cuadrados en una fila hasta construir el rectángulo, sino que lo podían realizar con dos, tres o más filas al lado superior e inferior de su figura base, utilizando la herramienta "Simetría axial", lo cual la profesora había olvidado aclarar desde el comienzo. En especial no se les enseño a utilizar la herramienta de la calculadora correctamente, es decir, para que la calculadora pueda reflejar el simétrico, ella pide dar clic en el objeto que se quiere reflejar y el punto o el lado por el cual se va a reflejar.

Después de que los estudiantes aprendieron a manejar la herramienta “simetría axial” el trabajo se hizo más rápido; sin embargo, pierde sentido la actividad, pues los estudiantes parecen haber olvidado el concepto de simetría axial visto el año anterior, en este momento lo usan como una herramienta de copiar y pegar.

Con la herramienta “Simetría axial”, el estudiante realiza otro cuadrado, y al ver que no tiene un rectángulo decide crear otro.	
Los estudiantes observados se dispusieron a generar cuadrados sin importar su posición, lo único que buscaban era que a través de hacer aparecer cuadrados se viera la forma de un rectángulo sin darle importancia al número de cuadrados utilizados.	

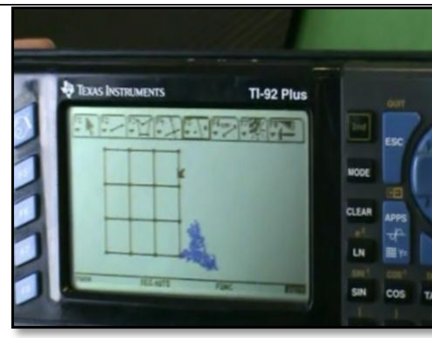
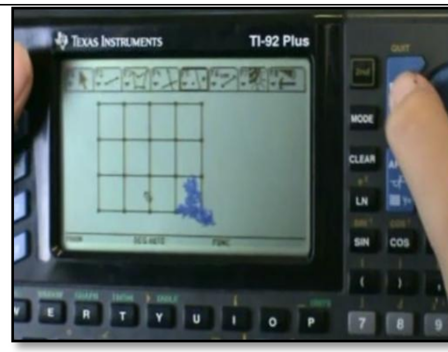
Los estudiantes obtienen la forma de un cuadrado pero no lo ven como un rectángulo solución siguiendo en su proceso de búsqueda y construcción.	
Cuando obtienen esta figura los estudiantes exclaman “listo” refiriéndose que habían terminado un rectángulo solución el cual dibujan en su cuaderno.	

Tabla 30. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

Los alumnos se dedicaron a reproducir los cuadrados con la herramienta “simetría axial” de una forma desordenada y esperaban casi que al azar apareciera una figura con forma de rectángulo para darla como su posible solución.

Se pudo observar en este momento de la actividad algo que se esperaba que ocurriera en el análisis a priori. Cuando al azar los estudiantes obtienen un cuadrado de 3x3 no lo dan como posible solución; esto nos dejó ver que los estudiantes concebían la definición de rectángulo como la figura geométrica de cuatro lados con los lados opuestas paralelos y de la misma medida, pero los lados adyacentes debían ser de diferente medida. No contemplaban el caso en el cual todos los lados tuvieran la misma medida (el cuadrado).

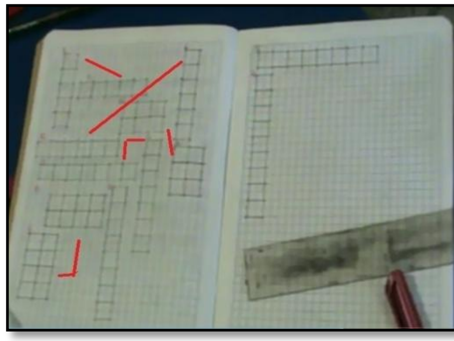
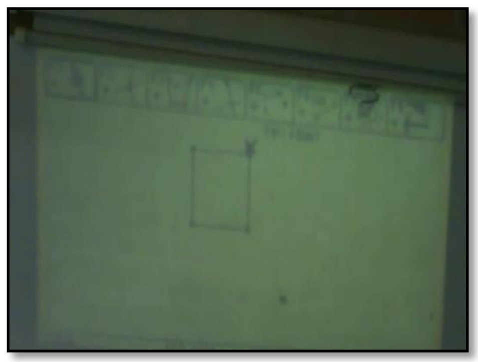
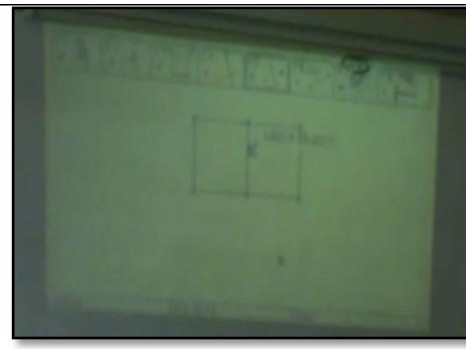
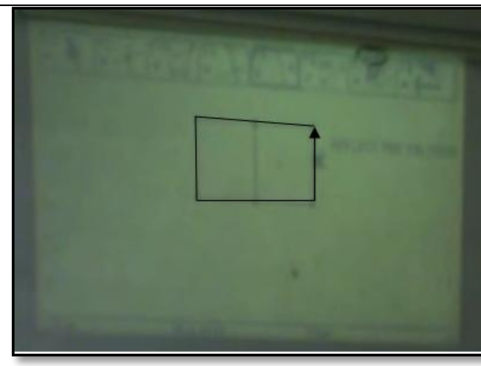
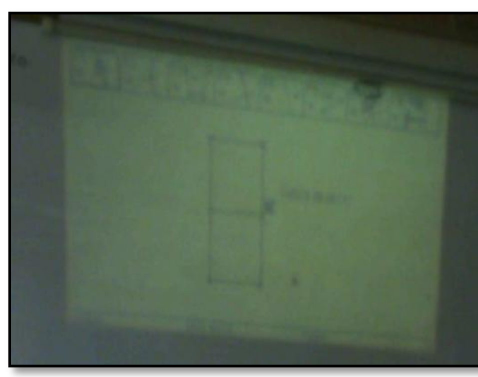
Los estudiantes van obteniendo otros rectángulos solución los cuales van consignando en su cuaderno. Lo interesante, lo cual subrayamos, es que ellos veían el mismo rectángulo pero en diferente posición y lo daban como otra solución.	

Tabla 31. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

PUESTA EN COMÚN

La profesora inicia la puesta en común pasando un grupo de estudiantes a los que les pide que realicen la tarea utilizando tres cuadrados:

El estudiante inicia su construcción realizando un cuadrado que él mismo valida a través del arrastre.	

P: *¿Cuántos rectángulos se pueden formar con dos cuadrados?* ***Grupo:*** *tres, dos, uno.* ***E:*** *dos* ***P:*** *bien dos* (no sabemos si refiriéndose a un rectángulo horizontal y a otro vertical) Rápidamente utilizando la herramienta reflexión construye otro cuadrado.	
P: *perdón ¿Qué hizo?* ***E:*** *hice la reflexión del cuadrado* ***P:*** *la reflexión del cuadrado. ¿Ese es un rectángulo? ¿Cuál es el rectángulo? señáleme el rectángulo.* (haciendo el movimiento de la flecha en la imagen) ***P:*** *¿existe la posibilidad de hacer otro rectángulo?*	
Grupo: *siiiii* ***P:*** *¿Cuál?* ***Grupo:*** *diagonal, horizontal…* ***E:*** *bajando* ***P:*** *¿hay otra posibilidad de hacer otro?* ***Grupo:*** *siiiiiiiii* ***E2:*** *si diagonal*	

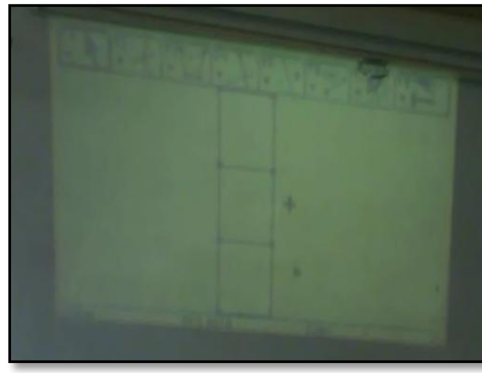
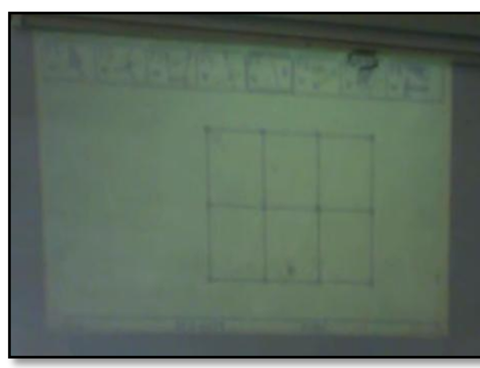
P: *bien con tres cuadrados…* El estudiante de nuevo utiliza la herramienta “Simetría axial” y crea otro cuadrado, generando otro rectángulo solución.	

Tabla 32. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

Otro compañero propone a la profesora hacer un rectángulo diferente a los construidos anteriormente y la profesora le da la oportunidad de participar, conectando al proyector su calculadora que muestra la imagen de un rectángulo construido con seis cuadrados:

P: *con seis cuadrados ¿cuántas formas puedo hacer diferentes?* ***E:*** *cuatro* ***P:*** *cuatro, ¿Cuáles?* ***Grupo:*** *así pero vertical…, horizontal, vertical…*	

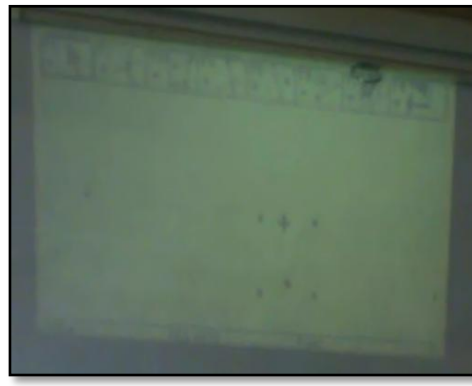
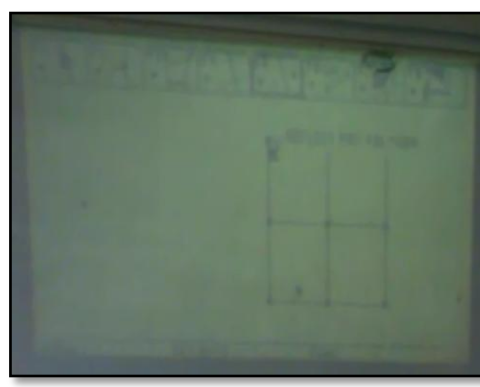
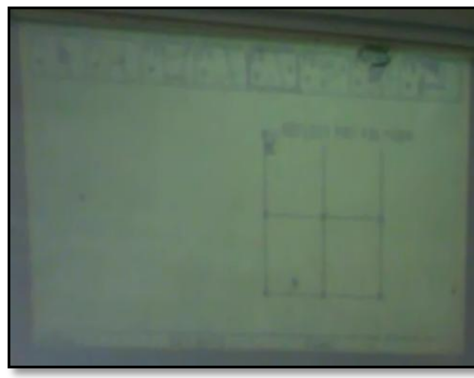
P: *muy bien… háganme con cuatro, todas las formas que haya con cuatro, solo con cuatro.* El estudiante, tratando de cumplir la orden de la profesora, decide borrar dos de sus cuadrados encontrándose con la sorpresa que cuando intenta hacerlo borra toda la construcción. ***P:*** *a ver, perdón ¿por qué se le borró toda la figura?* ***E2:*** *porque se le borró el polígono* ***P:*** *¿Cuál polígono borró?* ***Grupo:*** *el número uno, el general* ***P:*** *el número uno, el original*	
El estudiante vuelve a comenzar su construcción repisando los puntos que correspondian al cuadrado original, y con la ayuda de la profesora utiliza la herramienta “simetría axial” construyendo un rectángulo con cuatro cuadrados. ***Otro estudiante:*** *no ahí hay un cuadrado*	

Tabla 33. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

La profesora empieza una discusión para mirar si la figura que había realizado el estudiante era rectángulo o no:

P: *pregunto ¿eso es un rectángulo?* ***Grupo:*** *no* ***P:*** *¿no es un rectángulo?* ***E3:*** *noooo, no porque tiene los cuatro lados iguales* ***P:*** *pregunto, ¿es un cuadrado pero no es un rectángulo?, ¿no es un rectángulo o sí?* ***Grupo:*** *no* ***P:*** *no es … entonces que es* ***Grupo: P:*** *eso* ***E2:*** *es un cuadrado, porque está hecho de cuadrados* ***P:*** *porque está hecho de los cuadrados… ¿Qué dice la definición de rectángulo?*	
La profesora le dice a un alumno que se pare y diga la definición ***E4:*** *un rectángulo es un cuadrilátero que tiene …* ***P:*** *espere, despacio y fuerte, ella va diciendo y yo voy señalando y miramos si cumple o no las condiciones. Bien es un cuadrilátero verdad, tiene cuatro lados. ¿Qué más?*	

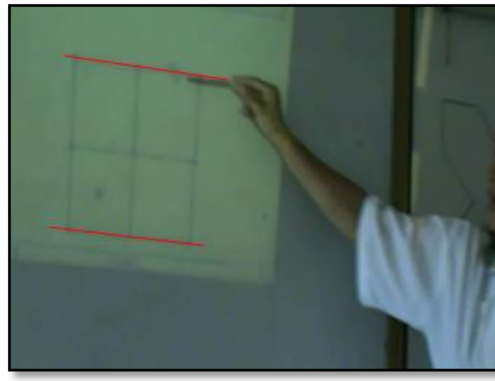
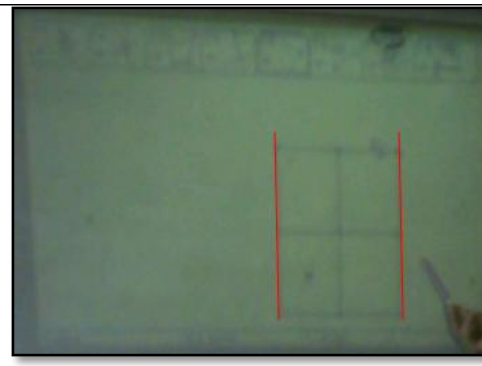
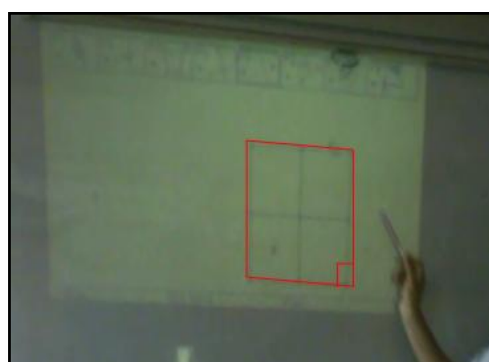
E4: *tiene dos lados iguales…* ***P:*** *¿dos lados cualquiera? ¿Cómo son esos lados?* ***Grupo:*** *paralelos* ***P:*** *este lado, es paralelo a este lado* (señalando el lado de arriba y el de abajo) ***Grupo:*** *si* ***P:*** *¿son iguales?* ***Grupo:*** *si*	
P: *y los otros dos lados ¿Cómo son? Los otros dos lados ¿son paralelos e iguales?* ***Grupo:*** *siiiii* ***P:*** *¿tienen los ángulos rectos?* ***Grupo:*** *siiii* ***P:*** *¿es o no es un rectángulo?* ***Grupo:*** *noooo, siiii* (no logrando ponerse de acuerdo)	
P: *es un cuadrilátero, ¿todos de acuerdo?* ***Grupo:*** *si* ***P:*** *que tiene dos lados opuestos paralelos e iguales. Este lado es opuesto a éste, ¿son paralelos e iguales y tienen los ángulos rectos?* ***Grupo:*** *si* ***P:*** *entonces ¿es o no es un rectángulo?* Y la mayoría de los estudiantes del grupo dice que sí.	

Tabla 34. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

En este preciso instante suena el timbre anunciando la finalización de la clase, lo cual impide la finalización de la puesta en común, está no pudo ser reanudada después por motivo de la perdida de clases durante dos semanas debido a un paro de profesores.

Cuando se retornó de nuevo a la normalidad académica, no se volvió a tocar más esta actividad y se dio paso a la aplicación de la siguiente.

CONCLUSIONES

De las actividades observadas hasta este momento, esta es la única de la cual podemos decir que no se cumplió a cabalidad el objetivo planeado en el análisis a priori, debido a una serie de errores y hechos que no se esperaba que se presentaran.

1. La profesora no mostró el uso de la herramienta simetría axial desde el comienzo y por tanto el problema para los alumnos fue el de ¿cómo pegar los cuadrados? Además, la herramienta simetría axial se utilizó simplemente para producir cuadrados sin tener en cuenta el orden en que salían, se vio que el concepto de simetría axial para los alumnos no es una transformación geométrica (simetría axial de un cuadrado con respecto a un segmento), sino que es algo usado para la reproducción de cuadrados, impidiendo que la actividad se desarrollara en el orden que se había planeado.

2. Un aspecto importante para resaltar y que esperábamos que ocurriera en el análisis a priori fue que los estudiantes observados, y aún la mayoría de los estudiantes del salón, habían asimilado el concepto de cuadrado y de

rectángulo, esto quedó demostrado cuando al realizar la tarea introductoria, el grupo observado empezó su trabajo y realizó perfectamente la construcción de un cuadrado, además, algo importante fue que los estudiantes, sin la intervención del profesor, validaban su construcción a través del arrastre y tenían claro que la única forma de aceptar como válida una construcción "era si la figura resistía el moviendo de todos los componentes"[24], dando como resultado que el estudiante dejaba a un lado el acompañamiento del profesor.

3. En la puesta en común ocurrió un hecho que esperábamos se diera según el análisis a priori, pues notamos la confusión de los estudiantes cuando obtuvieron un rectángulo formado por la unión de seis cuadrados pequeños, pero no lo vieron como una posible solución, pues concebían el rectángulo como cuadrilátero, cuyos lados opuestos eran paralelos y de igual medida, pero que los lados superior e inferior debían tener diferente medida a los lados de la derecha e izquierda y por esto lo rechazaron; hubo confusión en cuanto a ver un cuadrado como un rectángulo, pero gracias al oportuno aporte de la profesora se logró dar solución a dicho inconveniente.

4. La profesora nunca concluyó con respecto al objetivo de la actividad, pues se preocupó mucho por resaltar las propiedades del rectángulo y del cuadrado, olvidando por completo el objetivo principal que era crear la experiencia en la clase de que dos o más rectángulos pueden tener la misma área pero diferentes medidas de los lados.

[24] Esto se pudo ver cuando el estudiante del grupo observado responde la pregunta ¿Cuál es la condición para que queda mal o para que quede bien la construcción?, a lo cual responde: que no se desbarate al moverla.

4.5. ACTIVIDAD DE ÁREA DEL RECTÁNGULO

OBJETIVO (INTENCIÓN DEL PROFESOR): Deducir y comprender la fórmula para calcular el área de un rectángulo[25]. Se conceptualizará el área del rectángulo como la medida de una superficie utilizando cuadrados de igual tamaño.

MEDIO: La figura de trabajo comprende un rectángulo y un cuadrado de 1cm x 1cm en una de sus esquinas. El rectángulo puede arrastrarse y conserva sus medidas. El cuadrado no puede arrastrarse.

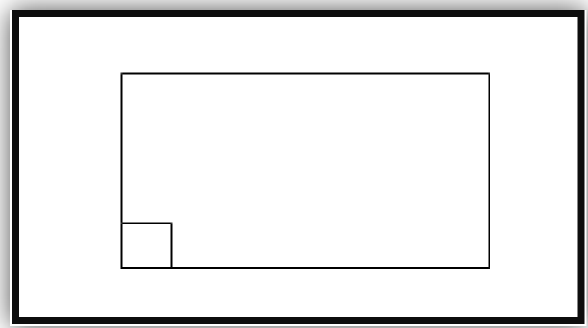


Figura 19. Rectángulo entregado a los estudiantes

TAREA: Rellenar los rectángulos dados con los cuadrados de 1cm x1cm utilizando la herramienta "Simetría Axial" y encontrar el número total de cuadrados utilizados para rellenar exactamente cada rectángulo.

Serie: esta tarea deberán realizarla con una serie de figuras en las que los rectángulos tendrán diferentes medidas y posiciones[26], y los cuadrados aparecerán en diferentes esquinas.

[25] El área de un rectángulo es el producto de dos lados adyacentes.

La progresión de las figuras es la siguiente

1. Rectángulo con medidas enteras.
2. Rectángulo con medidas no enteras en uno de los lados terminadas en “.5”
3. Rectángulo con medidas no enteras en ambos lados terminadas en “.5”
4. Rectángulo con medidas decimales terminadas en “.2”
5. Rectángulo con medidas muy grandes.

4.5.1. ANÁLISIS A PRIORI

La actividad está compuesta por una serie de figuras en donde los alumnos tendrán que realizar la misma tarea, pero cada vez con rectángulos de diferentes dimensiones. El desarrollo de la actividad debe hacerse en forma secuencial, presentando cada caso en el siguiente orden:

1. Rellenar un rectángulo con cuadrados de 1cm x1cm (medidas fijas enteras)

MEDIDAS ENTERAS

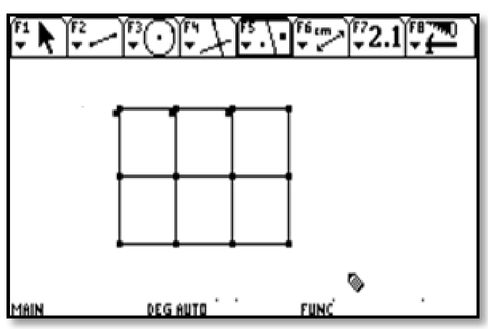


Figura 20. Rectángulo de medidas enteras

[26] Con el fin de evitar reforzar una imagen prototípica del rectángulo como figura con una base más larga paralela a un lado de la pantalla

Se espera que en esta actividad los estudiantes usen con destreza la herramienta “simetría axial” de Cabri para rellenar los rectángulos dados, ya que en la actividad anterior se hizo énfasis en su aplicación. En esta primera figura no se presentarán dificultades, debido a que las medidas de los lados del rectángulo son enteras y por tanto se recubrirán con un número entero de cuadrados. Se espera que la profesora refuerce la actividad realizando el mismo proceso con rectángulos similares de diferentes dimensiones, ubicando el cuadrado en esquinas diferentes. Los alumnos dibujarán en su cuaderno cada rectángulo y al frente de éste el total de cuadrados con los cuales se recubrió el rectángulo.

Interacción del alumno con el medio			
Acción (alumno)	**Retroacción (medio)**	**Validación**	**Indicio de Aprendizaje**
Rellena el rectángulo con cuadrados y cuenta el número de ellos usado para recubrir la figura.	Muestra un rectángulo totalmente relleno de cuadrados.	Observa que los cuadrados cubren totalmente el rectángulo.	Refuerza la acción

Tabla 35. Resumen proceso de Aprendizaje por Adaptación

2. Rellenar un rectángulo con cuadrados de 1x1 (medidas fijas, medios)

MEDIDAS TERMINADOS EN ".5"

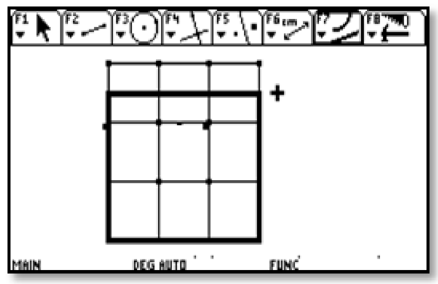


Figura 21. Rectángulo de medidas terminadas en ".5"

Al rellenar el rectángulo se darán cuenta de que en este caso[27] no es posible realizar la tarea, ya que o bien queda un espacio sin cubrir, o bien hay parte de los cuadrados que quedan por fuera del rectángulo. Es posible que algunos estudiantes decidan que el número de cuadrados pedido es el número de cuadrados enteros que pueden quedar dentro del rectángulo. En este caso, el profesor debe intervenir para recordar la consigna, específicamente que deben recubrir totalmente y exactamente el rectángulo.

Es posible que algunos estudiantes decidan que el número de cuadrados pedido es el número de cuadrados que cubren totalmente el rectángulo, aunque lo sobrepasen. En este caso, el profesor debe intervenir para recordar la consigna, específicamente que deben recubrir totalmente y exactamente el rectángulo.

Los estudiantes percibirán que el pedazo de cuadrado que está en el interior del rectángulo corresponde a la mitad de éste, y en consecuencia, contarán dos mitades para formar un cuadrado y así llegar a dar el número exacto de cuadrados que recubren el rectángulo. Se dibujará en el cuaderno la imagen mostrada en la calculadora y frente a ella el número total de cuadrados.

[27] En esta figura el rectángulo tiene un grosor mayor para una mejor explicación del análisis a priori.

En el caso en el que la medida de ambos lados del rectángulo dado termina en punto cinco, se espera que los estudiantes no tengan dificultades para estimar el valor de la porción de cuadrado restante (un cuarto del cuadrado) en alguna de sus esquinas.

Para dar solución al total de número de cuadrados que rellenan el rectángulo, los alumnos utilizarán la suma de fraccionarios.

Interacción del alumno con el medio			
Acción (alumno)	**Retroacción (medio)**	**Validación**	**Indicio de Aprendizaje**
Rellena el rectángulo sólo con los cuadrados que se encuentran exactamente por dentro del rectángulo. Y cuentan estos cuadrados.	Muestra un rectángulo con un espacio sin rellenar.	Intervención del profesor para recordar que el rectángulo debe estar completamente relleno, sin espacios.	Modifica la acción.
Rellena el rectángulo completamente de cuadrados. cuentan aun los que tienen una porción por fuera de la figura.	Muestra un rectángulo relleno completamente de cuadrados, pero algunos sobrepasan el rectángulo.	Intervención del profesor para recordar que el rectángulo debe estar completamente relleno, sin espacios por fuera de la figura.	Modifica la acción.

Rellena el rectángulo con cuadrados y cuenta exactamente el número de cuadrados que se encuentran dentro del rectángulo.	Muestra un rectángulo con mitades de cuadrados por fuera de él.	Intervención del profesor para recordar que el rectángulo debe estar completamente relleno, sin espacios dentro y fuera de la figura.	Refuerza la acción.

Tabla 36. Resumen proceso de Aprendizaje por Adaptación

3. Rellenar un rectángulo con cuadrados de 1cmx1cm (medidas fijas,..,2)

MEDIDAS TERMINADOS EN “.2”

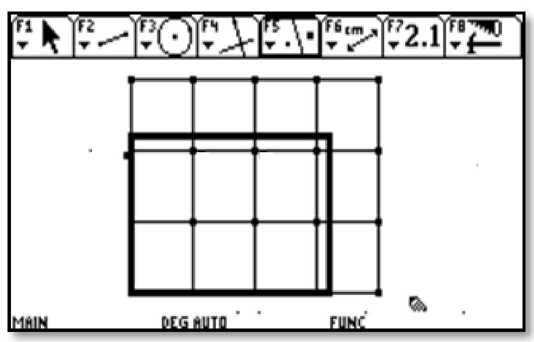


Figura 22. Rectángulo de medidas terminadas en ".2”

La profesora presentará a los estudiantes un archivo en el cual encontrarán un rectángulo con un cuadrado fijo de 1cm x1cm en una de sus esquinas, pero en este caso el rectángulo presentado tendrá medidas terminadas en punto dos.

Si el rectángulo dado en uno de sus lados tiene una medida terminada en punto 2 y la otra entera, se espera que los alumnos calculen correctamente esa parte como un quinto del cuadrado; es ocasión para calcular utilizando quintos y repasar los conceptos de números fraccionarios y números mixtos para realizar la suma.

Si el rectángulo dado tiene sus dos lados con medidas terminadas en punto dos, esperamos que se presente el problema de darle valor a la porción del cuadrado que se encontrará en la esquina, debido a que es muy difícil verlo en la pantalla de la calculadora. La profesora deberá intervenir recordándoles cómo hallar lo que equivale cada pedacito de cuadrado, por ejemplo: si en el rectángulo dado las medidas de los lados terminan en punto dos, habrá una porción correspondiente a punto cero cuatro del cuadrado, o a lo mismo que un veinticincoavo de éste. La profesora podrá intervenir luego de que los estudiantes por ningún método encuentren el valor de los pedacitos que quedan por fuera del rectángulo, ayudándolos para poder realizar la tarea.

Interacción del alumno con el medio			
Acción (alumno)	**Retroacción (medio)**	**Validación**	**Indicio de Aprendizaje**
Rellena el rectángulo sólo con los cuadrados que se encuentran exactamente por dentro del rectángulo. Y, cuentan estos cuadrados.	Muestra un rectángulo con un espacio sin rellenar.	Intervención del profesor para aclarar que el rectángulo debe estar completamente relleno, sin espacios.	Modifica la acción.

Rellena el rectángulo completamente de cuadrados. cuentan aun los que tienen una porción por fuera de la figura.	Muestra un rectángulo relleno completamente de cuadrados, pero algunos pedazos que sobrepasan el rectángulo.	Intervención del profesor para recordar que el rectángulo debe estar completamente relleno, sin espacios por fuera de la figura.	Modifica la acción.
Rellena el rectángulo con cuadrados y cuenta el número de cuadrados (con la intervención de la profesora) que se encuentran exactamente dentro del rectángulo después de algunos cálculos.	Muestra un rectángulo con pedazos de cuadrados por fuera de él.	Intervención del profesor para recordar que el rectángulo debe estar completamente relleno, sin espacios dentro y fuera de la figura.	Refuerza la acción.

Tabla 37. Resumen proceso de Aprendizaje por Adaptación

4. **Rellenar un rectángulo con cuadrados: medidas grandes para obligar a calcular (fórmula del área de un rectángulo)**

Esta actividad se realiza sin las calculadoras. El profesor propone en el tablero rectángulos de medidas más grandes que la pantalla de la calculadora, para que los alumnos se vean obligados a calcular. Primero propondrá rectángulos de medidas enteras, luego rectángulos de medidas decimales, se espera que los estudiantes calculen cuántos cuadrados caben en ese rectángulo a través de la multiplicación de las medidas de cada lado. Con cada respuesta se pedirá a los alumnos que pasen al tablero y expliquen por qué su cálculo funciona.

Al final de la actividad se institucionalizará el procedimiento para calcular el área y su justificación: (ejemplo con rectángulo de medidas 57,28cm y 63,13cm: ‘por este lado podemos colocar 5728 cuadrados de 1mmx1mm y por este lado podemos colocar 6313 cuadrados de 1mmx1mm; es decir, tendremos en total 6313 filas cada una con 5728 cuadrados, o 5728 columnas cada una con 6313 cuadrados; por lo tanto, el total de cuadrados de 1mmx1mm es 5728x6313).

4.5.2. ANÁLISIS A POSTERIORI

La profesora no tuvo en cuenta la planeación de la actividad como una secuencia de figuras que se debían entregar ya hechas a los alumnos. Entregó un rectángulo preparado, de medidas 2cm x2.5 cm y planteó la tarea. Luego escribió en el tablero 4 dimensiones (2.5cm x 3.7cm; 3cm x 4cm; 3cm x 2.7cm; 4.2cm x 3.5cm) diferentes para el rectángulo y le pidió a los alumnos que modificaran los números que aparecían en la pantalla[28] para que el rectángulo tuviera esas dimensiones, y que realizaran la tarea con esos cuatro rectángulos. Las dimensiones pedidas por la profesora no siguen ninguna secuencia de dificultad.

[28] La figura entregada a los profesores comprendía dos números que servían para definir las dimensiones del rectángulo, para que los profesores pudieran producir diferentes figuras con rectángulos de diferentes dimensiones. Pero estos números debían quedar ocultos en las figuras que se entregaran a los alumnos. En este caso, la profesora transfirió a los alumnos el trabajo de producir los rectángulos de diferentes dimensiones.

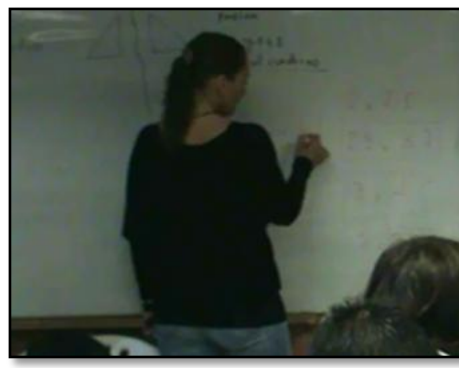
<table>
<tr>
<td>La profesora presenta a los estudiantes el archivo previamente preparado:
P: De 2.5x… de cuánto es que está ahí en su calculadora.
Grupo: de 2x2.5
P: es de 2x2.5cm; ¿con cuántos cuadrados lo rellenarían?
Grupo: con cinco</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>P: con cinco, entonces ahora me lo van a hacer el de 2.5x3.7cm, de 3x4cm, de 3x2.7 y de 4.2x3.5, Vamos a trabajar con estas cuatro medidas, recuerden que cuando voy a modificar el valor debo dar edición numérica, me paro sobre el número y cuando diga ‘este número’, le doy "enter" y me aparece dentro del recuadro y ahí si puedo borrar con la flecha, antes no porque borramos completamente. Listo, ahora si vamos a trabajar con la calculadora y en el cuaderno, ojo ¿con qué opción rellenamos todo el rectángulo?
E: con reflexión[29]
P: bien con reflexión, y vamos a mirar primero cuántos cuadrados necesito para rellenar un rectángulo de 3x4.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Tabla 38. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

[29] Las calculadoras están en inglés, por lo que la herramienta simetría axial es en realidad ‘reflection’.

La profesora no sigue el plan de trabajo del análisis a priori: no preparó figuras separadas con diferentes dimensiones, sino que transfirió ese trabajo a los alumnos. Al hacerlo, no tiene en cuenta la graduación de la dificultad de los ejercicios. A pesar de que oralmente pide que comiencen con el rectángulo de 3cm x 4 cm, como veremos a continuación, los alumnos no la escucharon.

Aunque el trabajo de las calculadoras es de a dos estudiantes, en el grupo que nos corresponde grabar solo trabajo un integrante, ya que su compañero se desentendió por completo de la actividad. La estudiante pasa un tiempo tratando de cuadrar las medidas del rectángulo y decide empezar por el rectángulo de 4.2x 3.5.	
Utilizando la herramienta “simetría axial”, crea el segundo cuadrado en la parte superior del que tenían en la figura original. En este punto vemos la destreza de la estudiante para usar la herramienta.	

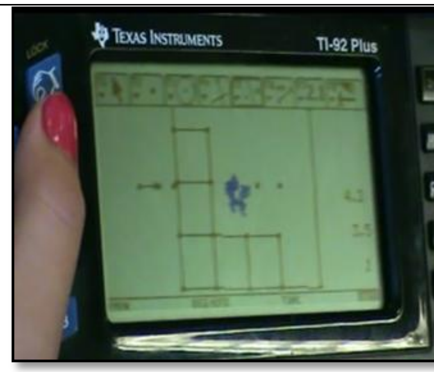
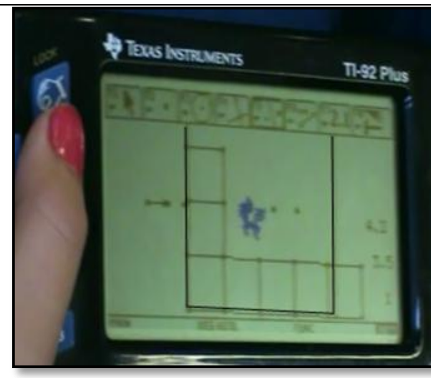
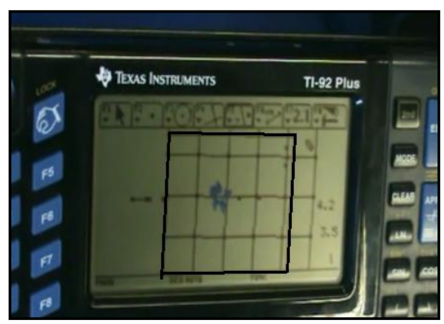
Sucesivamente, usando la herramienta “simetría axial”, y de manera rápida empieza a rellenar la figura de cuadrados. El proceso era muy rápido y la instrucción de rellenar el cuadrado era clara para la estudiante observada.	
Pero llega el momento en el cual la estudiante se detiene al ver que el cuadrado creado en esta oportunidad se sale del rectángulo original[30].	
La estudiante termina de rellenar el rectángulo y procede a contar los cuadrados. Anota 12 en su cuaderno, dibuja la figura y pregunta a la profesora qué debía hacer con los demás.	

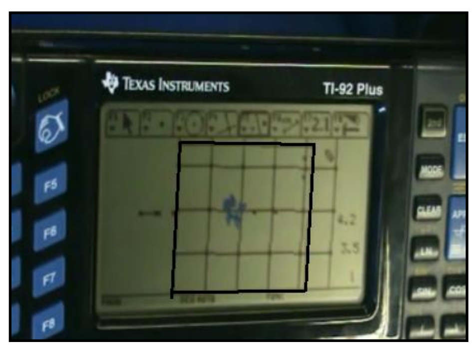
Tabla 39. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

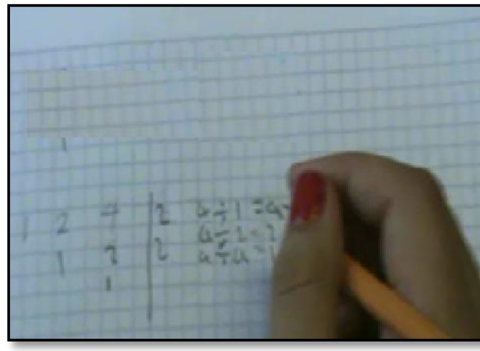
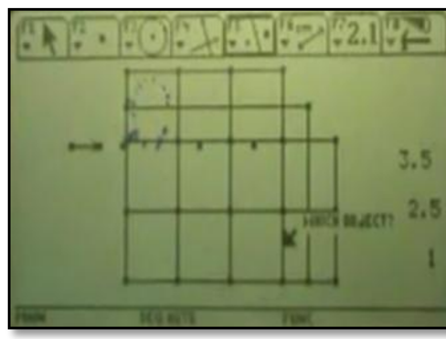
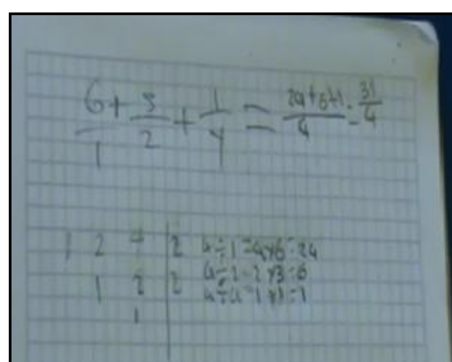
El grupo observado comenzó con un rectángulo de dimensiones no enteras, ni terminadas en punto cinco. Es decir que enfrentan varias dificultades: determinar qué parte del cuadrado queda por dentro del rectángulo en cada uno de los lados y en una esquina. Como habíamos previsto en el análisis a priori, este grupo

[30] En la imagen resaltamos el rectángulo dado.

consideró como única solución los cuadrados que quedaron completamente dentro del rectángulo.

Al pedirle ayuda a la profesora, esta no interviene como se había previsto en el análisis a priori, recordando la consigna para invalidar, puesto que hay una parte del rectángulo sin cubrir. Por el contrario, pregunta a los alumnos cuántos medios cuadrados hay, sin tener en cuenta que el caso estudiado por los alumnos no sólo tiene medios cuadrados, sino también quintos de cuadrados. Como veremos a continuación, la intervención de la profesora deja perplejos a los alumnos, que piden ayuda al grupo de al lado, quienes trabajan únicamente con medios cuadrados, y al final los alumnos observados tratan de reproducir lo que les mostraron sus compañeros.

P: *¿cuántos cuadrados completos hay?* ***E:*** *doce* ***P:*** *y ¿cuántos medios hay?* ***E:*** *casi cuatro* ***P:*** *no, ¿cuántos medios completos hay?* ***E:*** *tres* ***P:*** *aaaah… ¿más cuantos cuartos hay?* ***E:*** *tres y un pedacito pequeño* ***P:*** *¿cuál?* La estudiante señala la parte superior derecha de su rectángulo. ***P:*** *ahora haga suma de fracciones, usted sabe hacer eso, mínimo común múltiplo y suma, hágale. Y me dice exactamente cuántos cuadrados son.*	

La estudiante empieza a sumar en su cuaderno: **P:** *a ver, que hubo.* **E:** *saque mínimo común múltiplo de uno de dos y de cuatro. Pero profesora sobra un cuadradito* Como la profesora no escucha la pregunta de las estudiantes, estas acuden a preguntar a sus compañeros.	
Entonces el grupo de enseguida les muestra su construcción: un rectángulo de 3.5cm x 2.5cm, y empieza a explicarles su proceso. **E2:** *sumo los cuadros enteros seis más cinco medios y un cuarto y listo, ¿no sabe sumar fraccionarios?* **E:** *ummm si ya me acordé.*	
Los estudiantes del segundo grupo escriben la suma de fracciones en el cuaderno y calculan, obteniendo 31/4.	

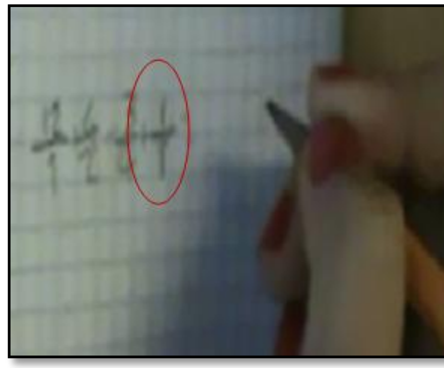
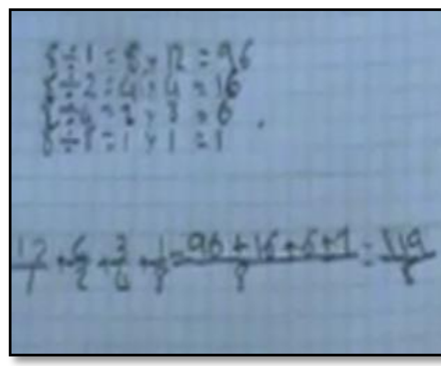
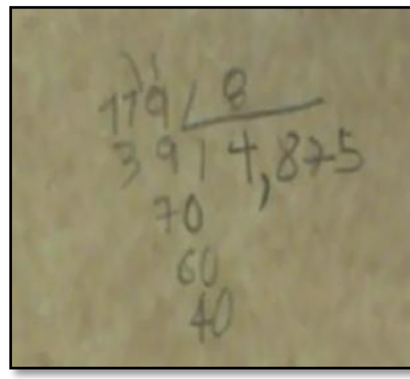
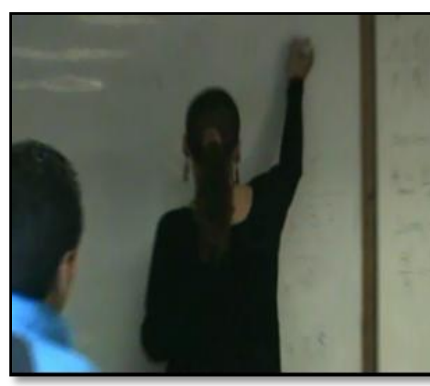
La estudiante del grupo observado se preocupa por darle un valor a los pedazos de cuadrado que quedan dentro del rectángulo. Ya sabe que tres de ellos son medios cuadrados, pero los otros no. Después de pensar un poco, toma la decisión de darle un valor de un cuarto a unos y un octavo al más pequeño y realiza la suma de todos los cuadrados enteros, los medios, los cuartos y el octavo restante.	
Después de un proceso de cálculos, la estudiante llega a una posible solución de área del rectángulo de medidas de 4.2cm x 3.5 cm y su repuesta es $\frac{119}{8}$	

Tabla 40. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

Puede verse que la estudiante trata de realizar el proceso explicado por sus compañeros, pero es consciente de que ella no solamente tiene cuadrados enteros y medios cuadrados, sino otras partes de cuadrado por dentro del rectángulo. Sin embargo, no tiene posibilidad de saber qué partes son. Así que decide asignar un cuarto a las más grandes y un octavo a la más pequeña. En el análisis a priori no se previó esta posibilidad, y por lo tanto tampoco se previó una posibilidad de invalidación por el medio.

Cuando la estudiante le pide a la profesora una evaluación, la profesora sólo revisó que hubiera hecho una suma de fracciones, pero no cuestionó los valores fraccionarios dados por la estudiante:

P: *¿cuántos enteros hay entonces?* ***E:*** *no se* La alumna no entiende la pregunta, razón por la cual la profesora le indica que debía dividir el numerador por el denominador. División que le dio como resultado 14,875. ***P:*** *¿Cuántos enteros le dio?* ***E:*** *catorce* ***P:*** *¿qué significa ese ocho que apareció?* ***E:*** *no se*	
La profesora decide hacer una intervención en el tablero para recopilar las respuestas de los cuatro ejercicios	

P: *¿con cuántos rellenaron el de 3x2.5?, ¿con cuántos?, ¿Quién hizo el de 3x2.5?* ***E1:*** *yo* ***P:*** *¿Cuánto le dio?* ***E1:*** *7.5* ***P:*** *a alguien más le dio 7.5?* ***Grupo:*** *si, si,…* ***P:*** *¿Cuánto les dio el de 3.5x2.5?* ***E2:*** *8.7* ***P:*** *8.7*	
P: *ahora, ¿Quién hizo el de 2.5x3.7?,* *¿Cuánto les dio?* ***E3:*** *profesora 10.55* ***P:*** *y a usted ¿Cuánto le dio?* ***E4:*** *a mi 8.1* ***E5:*** *no da 8.5* La profesora deja pendiente la solución de este rectángulo y anota todas las respuestas dadas.	
P: *¿cuánto les dio el de 4.2x3.5?* Y la estudiante observada contestó ***E:*** *14.875* La estudiante observada muestra la construcción a la profesora.	

Tabla 41. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

La profesora se encuentra en una situación complicada, pues todos los grupos trabajan con rectángulos diferentes, que suponen dificultades diferentes. Mientras algunos pueden encontrar fácilmente los resultados pedidos, otros tienen dificultades para determinar qué parte del cuadrado queda dentro del rectángulo. Entonces, decide intervenir para retomar el control de la situación y solicita los resultados obtenidos por los estudiantes y los escribe en el tablero, pero no cuestiona las respuestas (incorrectas) de los alumnos. Aparentemente, únicamente revisa si los estudiantes están realizando sumas de fracciones, pero no examina las fracciones que utilizaron.

Finalmente, decide abandonar el uso de las calculadoras y comienza una actividad que tenía prevista con rectángulos y cuadrados de papel, que describiremos más adelante.

Pensamos que la profesora no comprendió cómo utilizar la secuencia y las posibilidades de retroacción del software para hacer avanzar la actividad, y por eso mismo ya había previsto una actividad con rectángulos y cuadrados de papel. Por esta razón no siguió ningún orden en el planteamiento de las tareas y terminó finalmente abandonando la actividad.

Una de las cosas importantes que podemos constatar es que nuestro análisis a priori fue defectuoso, pues no se previeron adecuadamente las dificultades de validación de la situación.

Al revisar el análisis a priori con el fin de identificar por qué la actividad no generó una situación a-didáctica, nos encontramos que en la planeación hubo un problema grave de validación en cuatro aspectos fundamentales:

1. En el caso de un rectángulo con una medida no entera, el alumno debe determinar qué parte del cuadrado queda dentro del rectángulo. Aquí aparece una primera necesidad de validación. En el caso de una medida

terminada en punto cinco, puede esperarse que la validación se haga correctamente de manera perceptiva, pues es fácil estimar la mitad del cuadrado. Por el contrario, cuando la medida termina en punto dos, no es tan evidente la validación perceptiva, y pueden aparecer errores de estimación, como sucedió en el caso de la alumna observada quien asumió que el pedazo de cuadrado dentro del rectángulo era un cuarto. Este problema de validación se podría solucionar para el rectángulo de medidas terminadas en punto dos, construyendo el polígono que queda dentro del rectángulo para reproducirlo con la herramienta "simetría axial" hasta rellenar el cuadrado.

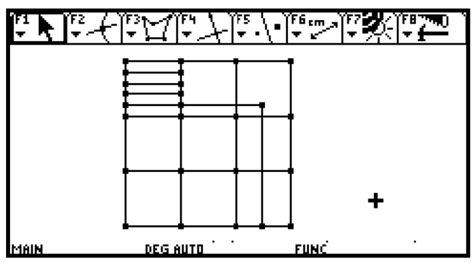


Figura 23. Propuesta de validación

Se sabría a lo que equivale el pedazo ya que los estudiantes se darán cuenta que el cuadrado estaría relleno con cinco pedacitos, invalidando la hipótesis de que es un cuarto.

2. El segundo problema de validación se presenta cuando en una de las esquinas del rectángulo queda un pedacito muy pequeño y no se puede saber fácilmente a cuánto equivale. Aquí no serviría el método de validación del punto anterior ya que debido al tamaño del pedacito, el software no permite seleccionar fácilmente un lado del polígono, y por lo tanto no es posible rellenar el cuadrado con la herramienta simetría axial.

3. Otro problema de validación es que una vez que los estudiantes realizan la suma de los diferentes pedazos de cuadrados, el medio no les brinda la posibilidad de validar su respuesta y saber si lo que realizaron les da el valor exacto de cuadrados utilizados para rellenar el rectángulo. Esto se pudo ver cuando en el grupo observado dieron un valor de 14,875 para el rectángulo de 4.2cmX3.5cm. Para realizar esta validación sería posible utilizar la herramienta ‘área’ del software: cuando los estudiantes terminen el cálculo se les dice que apliquen la herramienta ‘área’ al rectángulo y que comparen el valor que calcularon con el que arroja la calculadora. Esta validación tiene sin embargo el inconveniente de terminar con el problema, pues los alumnos obtienen la respuesta al problema, y ya no tienen que volver a ensayar para producirla por sí mismos.

4. Una última dificultad de validación se presenta en el momento en que deben convertir las fracciones en decimales, ya que al sumar las diferentes partes de cuadrado se utilizarían fracciones, pero recordemos que el área de un cuadrado es la multiplicación de dos lados adyacentes, y por tanto es una multiplicación de números decimales. En la actividad este paso de fracciones a decimales no está planteado: ¿cómo se va hacer para pasar de fracciones a los decimales?, ¿qué sentido van a tener los decimales con respecto a las fracciones? ¿Cómo verificar si los cálculos de esa conversión están correctos? son preguntas que no consideramos en el análisis a priori, y quedan a la deriva dificultando aún más el desarrollo de la actividad.

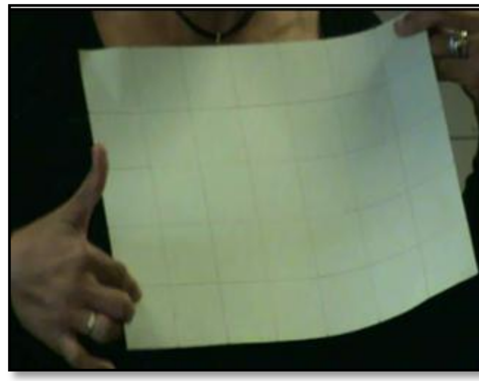
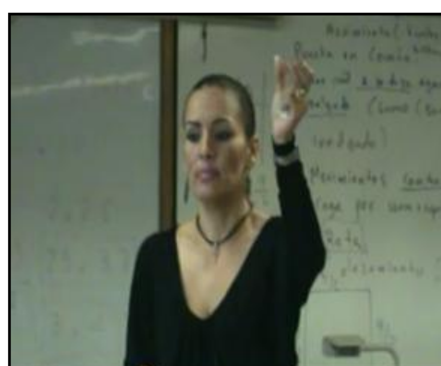
Habiendo así determinado los puntos neurálgicos de la situación que impiden que sea realmente una situación a-didáctica y requieren la intervención del profesor para controlar los procedimientos y resultados que obtienen los estudiantes, a continuación analizaremos la actividad planeada por la profesora, para identificar si controla de alguna manera esos puntos neurálgicos.

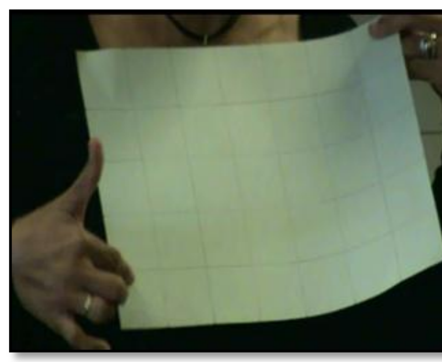
Actividad planeada por la profesora:

Los materiales que la profesora pidió a los estudiantes para realizar la actividad eran los siguientes: dos rectángulos de cartulina con medidas de 25x35cm en los cuales debían traer trazada una cuadrícula de 5x5cm, una sin recortar y otra ya recortada; además pidió traer recortados cuadraditos de 1x1cm.

<table>
<tr>
<td>
P: Muy bien vamos a mirar quienes tienen razón, hagamos una cosa, me hacen un favor ahora, suspendemos un momentico las calculadoras y sacamos el papel rayado, pongan atención:
Tienen esta cuadricula que hicimos y vamos a suponer que estos son cuadrados de uno por uno verdad que si, entonces vamos a decir ¿con cuántos cuadrados relleno yo este rectángulo de 35x25 cm?
E1: 175
P: ¿Qué?, con 175 no, con cuántos cuadrados de estos lo lleno.
(Muestra un cuadrado recortado en papel con medidas de 5x5cm)
E2: a con 35
P: ¿Por qué con 35?
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

E2: *porque 7x5 es igual a 35* Se puede observar que el estudiante se dio cuenta contando que por un lado del rectángulo caben 7 cuadrados y por el otro 5, además no sabemos cómo descubrió que el número de cuadrados era igual al producto de sus lados. ***P:*** *¿de para acá cuántos hay?* (señalando el lado mostrado en la figura) ***Grupo:*** *5, 5, 5,…* ***P:*** *y ¿qué pasa?* ***E2:*** *profesora y de para allá son 7, multiplique 7x5 es 35* ***P:*** *entonces son 35 cuadrados de estos.*	
P: *Ahora, uno de estos, este es de 5x5 si yo lo voy a partir de 1x1. ¿Con cuántos de estos de 1x1 rellena el cuadrado de 5x5?* ***Grupo:*** *5, 8, 5,..* ***P:*** *A ver… ¿con cinco cositos de estos lleno este?* (empieza a rellenar la figura) ***Grupo:*** *no, no, no, no,…* ***P:*** *¿entonces con cuántos?* ***E:*** *25* ***P:*** *¿Por qué con 25?* ***E:*** *porque 5 en un lado y 5 en el otro* ***P:*** *entonces con 25, ¿claro?* ***Grupo:*** *si, si, si,…*	 

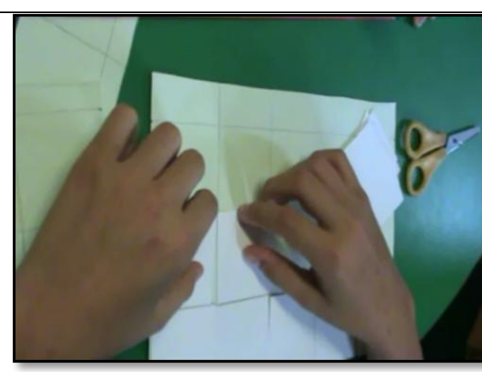
P: *si este grande lo rellené con 35 de estos entonces ¿con cuántos de uno relleno todo este grande?, ¿Qué hago?* ***E1:*** *multiplico* ***P:*** *¿Qué multiplico?* ***E1:*** *35x1* ***P:*** *¿Por qué?* ***E2:*** *875* ***P:*** *¿Por qué?, son 35 de estos y cada uno de estos tiene 25 ¿con cuántos cuadritos chiquitos de estos lo rellenaré?* ***E2:*** *con 875* ***P:*** *¿entonces el área de este rectángulo cuánto es?* ***E2:*** *875* ***P:*** *875 ¿Qué?* ***E3:*** *cuadraditos* ***E4:*** *centímetros* ***P:*** *¿centímetros?* ***E4:*** *si* ***P:*** *¿centímetros qué?* ***E5:*** *cuadrados* ***E6:*** *no cúbicos* ***P:*** *¡cúbicos!, miren este cuadrado chiquito es de un centímetro cuadrado, porque tiene de lados 1x1, entonces este chiquito es un*	 

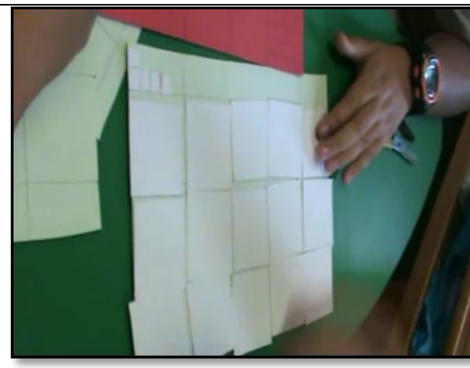
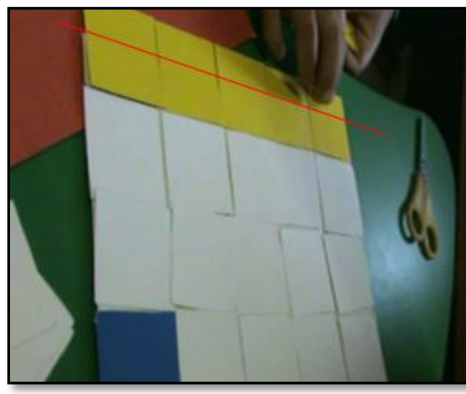
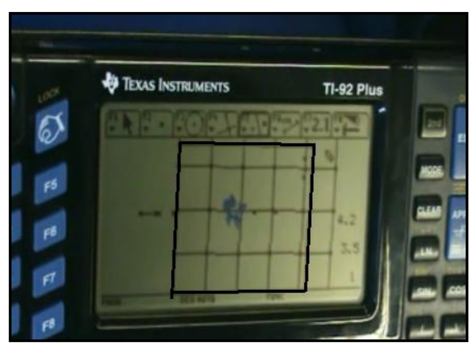
centímetro ¿qué? ***Grupo:*** *cuadrado* ***P:*** *¿con cuántos centímetros cuadrados llene este rectángulo?* ***Grupo:*** *con 875* ***P:*** *seguro* ***Grupo:*** *si*	

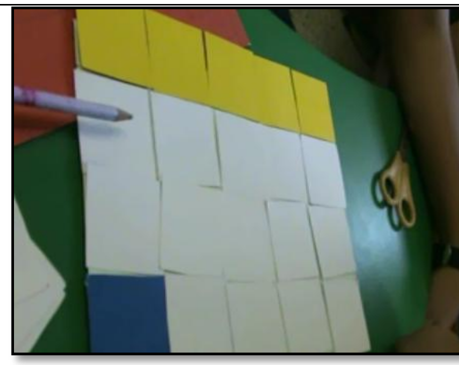
Tabla 42. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

La profesora con un rectángulo de 35cm x 25cm explica a los estudiantes lo que deben realizar, primero rellena el rectángulo con los cuadrados de 5cm x 5cm y con la ayuda de los estudiantes llegan a la conclusión de que se necesitan 35 cuadrados. Luego la profesora preguntó a los estudiantes cuántos cuadrados de 1cm x 1cm rellenarían el de 5cm x 5cm y un estudiante que al parecer ya sabía la fórmula para hallar el área respondió inmediatamente que se necesitaban 25 ya que 5x5 era igual a 25.

A continuación, la profesora repartió los estudiantes en grupos de 4 y a cada grupo le entregó unos rectángulos de diferente medida (17,5cm x 25cm; 12,5cm x 17,5cm; 12,5cm x 8,75cm), dando la indicación a los estudiantes que rellenaran los rectángulos utilizando cuadrados de 5x5cm.

La profesora entrega a los estudiantes un rectángulo de 17.5cm x 25cm, el cual los alumnos empiezan a rellenar. ***E1:*** *profe y ¿Cómo lo llenamos?* ***P:*** *como si estuviéramos llenando una lotería.*	

Después de rellenar los 15 cuadrados de 5cm x 5cm que cabían completamente, se encontraron con la dificultad de cómo llenar los medios cuadrados. Tratando de dar solución a este inconveniente utilizaron los cuadraditos de 1x1cm que tenían recortados.	
Tratando de rellenar los medios cuadrados de cuadraditos de 1x1cm un compañero aporta otra idea: ***E2:*** *espere, espere, éste es la mitad de esté,* (señalando que el espacio que faltaba rellenar era exactamente la mitad del cuadrado de 5x5cm) *¿tienen cuadrados de otro color? Hagamos algo parecido como se ve en la calculadora cuando hacemos reflexión y el cuadro se sale de la figura.* ***E3:*** *sí hay amarillos* ***E2:*** *con estos amarillo se sabe que es la mitad.* (Acá vemos cómo los estudiantes sí comprendieron el trabajo hecho en la calculadora y lo intentaban relacionar con esta actividad, al pretender que se mirara la mitad de color amarillo dentro del rectángulo y la otra mitad por fuera de él, simulando lo que aparecía en la calculadora.	 

E2: *entonces ¿Cuántos cuadrados hay? espere 1, 2, 3, 4,..., 15,* (y uniendo las medias partes sigue contando) *16, 17, diecisiete y medio.* ***E3:*** *diecisiete y medio* ***E2:*** *diecisiete coma cinco* Llaman a la profesora para verificar ***E3:*** *profesora hay diecisiete y medio* ***P:*** *háganme el favor y me los recortan.* ***E2:*** *por la mitad* ***P:*** *Yo no quiero ver eso que sobre así, donde están las tijeras.*	 
P: *¿cuántos cuadrados grandes? ¿Cuántos medios? O sea…* ***E2:*** *hay 15 cuadrados* ***E3:*** *diecisiete y medio* ***E2:*** *y hay cinco medios* ***P:*** *bien entonces son diecisiete coma cinco… ahora esos son los de a cinco centímetros de a cuadrados de a centímetro ¿Cuánto es? entonces ¿qué debo hacer para saber cuántos de estos chiquitos son?* ***E1:*** *como son 25 entonces debo que saber cuánto es la mitad de 25. Un cuadro tiene 25* ***P:*** *un cuadro tiene 25, uno solito tienen 25*	

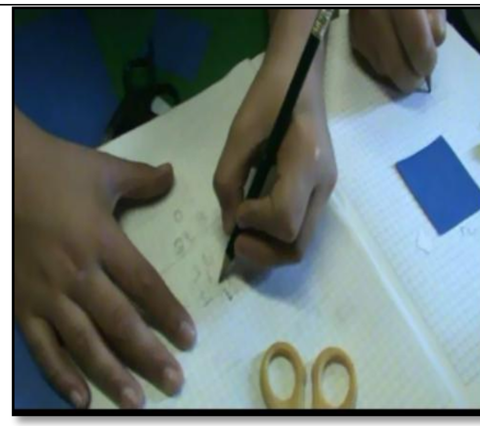
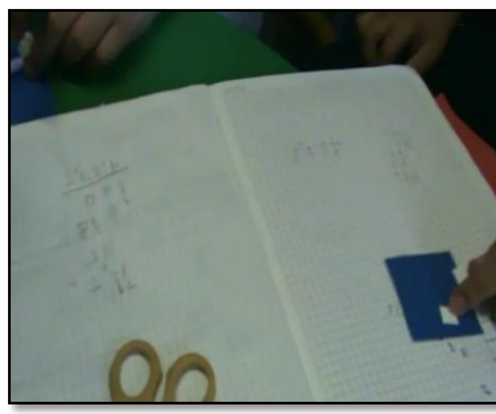
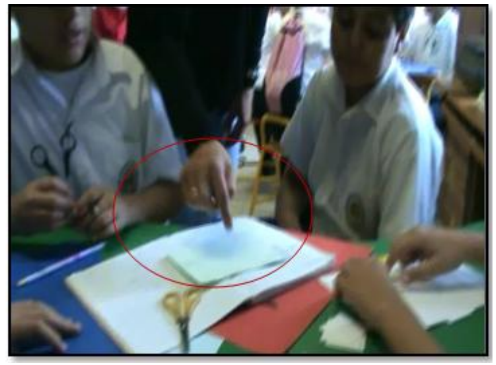
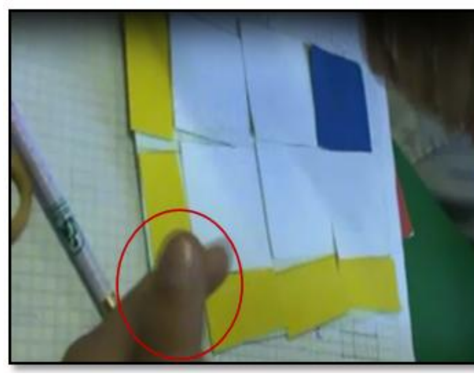
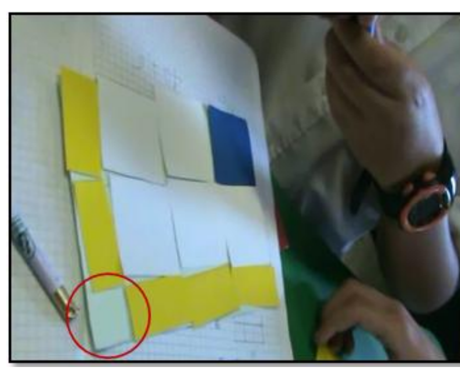
entonces ¿la mitad cuánto son? ***E1:*** *mmmmm 14 …* ***P:*** *no háganlo, ¿Cuántos cuadrados tienen? 17,5 listo porque los voy a multiplicar… ¿cuántos de estos son?* ***Grupo:*** *25, 25* ***P:*** *entonces qué hago para saber ¿cuántos de estos hay?* ***E1:*** *multiplico por 25* ***P:*** *multiplico por 25* Los estudiantes realizan la multiplicación y llaman la profesora ***E1:*** *da 437.5* ***P:*** *¿entonces cuántos cuadrados son?* ***E1:*** *con 437.5* ***P:*** *¿qué significa ese coma cinco?, ¿la mitad de éste o la mitad de éste?* (señalando los cuadrados de 5x5 y 1x1 respectivamente*)* ***E1:*** *de un cuadrito chiquito.* ***P:*** *entonces yo rellenaría eso con 437 y la mitad de éste,* (señalando el cuadrado de 1x1cm) *¡listo!*	 

Tabla 43. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

La profesora entrega a los estudiantes el recorte de un segundo rectángulo en cartulina de dimensiones: 12.5cm x 17.5 cm y da la instrucción de realizar con él lo mismo que con el anterior.

<table>
<tr>
<td>
P: ahora con éste, ¿con cuántos relleno éste?, a ver…. rellenemos éste
E1: espere profesora, coloquemos aquí el resultado.(refiriéndose a escribir en el cuaderno el área del primer cuadrado)
P: ¿usted ya me puede decir cuántos cuadraditos chiquitos necesito sin que lo rellene?, o todavía no sabe cuántos.
E1: 13
P: no, rellene otra vez.
E2: no primero el amarillo, no el azul. (tratando de definir el color con el cual iban a cubrir los medios cuadrados)
E1: así como lo estamos haciendo está bien
E: falta, falta, falta, oiga miren
(refiriéndose al pedacito que hacía falta recubrir)
E1: ese es la mitad de éste.
(señalando el medio cuadro amarillo)
E2: oiga mire ya es de otro color no ve que ya es diferente a los demás, rellenémoslo con otro color.
E1: uno azul, verde o uno naranja.
E2: si uno naranja (trataban de diferenciar por color las diferentes fracciones de papel)
E1: no mejor con este azul
E2: ¿a cuánto equivale eso?
</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

E1: *creo que vale un cuarto,*(recortan y ponen el pedazo que hacía falta, el cual fue obtenido al doblar el cuadrado azul de 5x5cm en cuatro partes iguales)

E1: *entonces mire, tenemos…*

E2: *6, 7, 8, 8 y medio*

E1: *3, 4, 5, 6 cuadrados completos más 1, 2, 3, 4, 5 medios, entonces hay ocho y medio y un cuarto, ¿Cómo es que se escribe un cuarto?*

E2: *no será un quinto*

E1: *no es un cuarto, pero ahora*

E3: *mire aquí esta lo que hicimos ahorita*

E2: *¡profesora¡*

E1: *esta puntica equivale a cuanto a un cuarto*

P: *si*

E1: *profesora entonces esto equivaldría a*

(muestra la operación realizada en el cuaderno la cual tiene como resultado 165,00)

P: *porque, por cuál multiplico*

E1: *por 7.50*

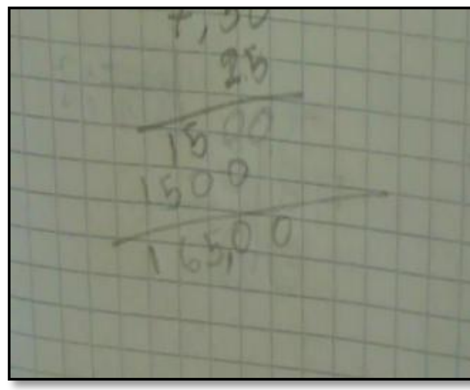
P: *muestre 1, 2,…, 8.5, ¿por qué multiplicaron por 7.50?, miren cuantos cuadrados hay*

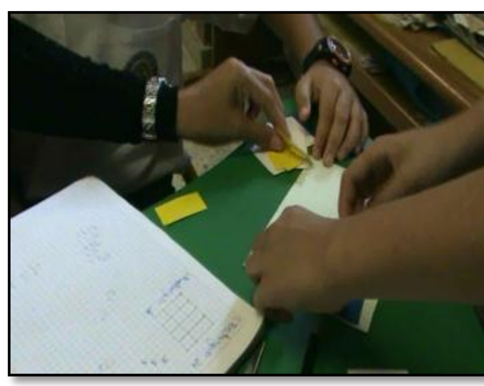
E2: *seis*

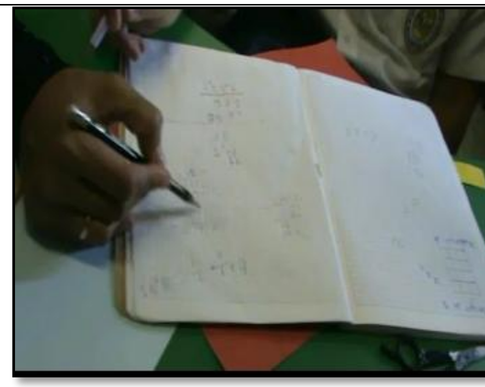
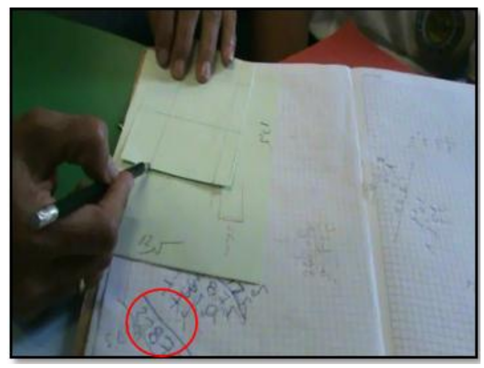
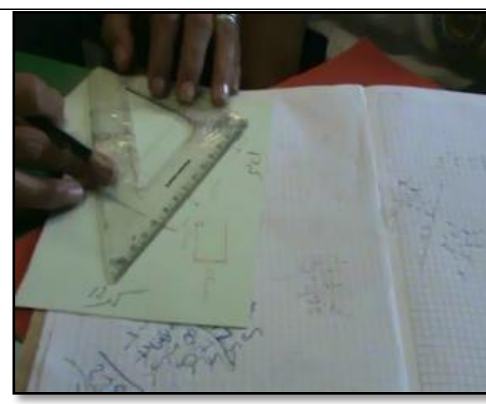
(la profesora vuelve a realizar el conteo)

P: *1, 2, 3, 4,…,8 más una mitad más ¿qué?*

E1: *un cuarto*





P: *entonces esto me da cuanto…* ***E2:*** *8.5* ***P:*** *no, eso me da 8.75, si, al hacer la suma de éstos me da 8.75* ***E1:*** *entonces seria 8.75x25* ***P:*** *si haga la cuenta* (después de realizar la cuenta) ***E1:*** *da 218, 75* (la profesora verifica el resultado y al aprobarlo hace la siguiente pregunta) ***E1:*** *entonces seria 8.75* ***P:*** *¿ese valor que me está dando el área es la multiplicación de qué con qué?* ***E1:*** *de multiplicar el área de este lado por la de éste.* ***P:*** *muy bien ahora vamos a verificar si 17.5x12.5 me da eso* (se realizan los cálculos y se comprueba el resultado)	 
La profesora entrega un tercer rectángulo a los estudiantes pero ahora pide realizar la medida de los lados con regla y después de obtenido los dos valores realizar el producto y así hallar su área. ***P:*** *miremos a ver cuánto mide este lado* ***E1:*** *17.5* ***P:*** *y el otro, haber…* ***E1:*** *8,75*	

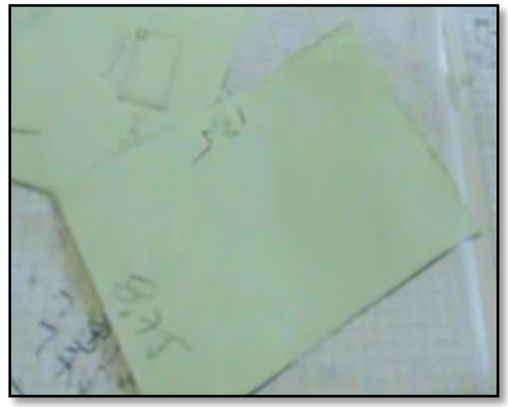
P: *y ¿entonces qué hacemos?* ***E1:*** *se multiplica* ***P:*** *¿cuál lado?* ***E1:*** *el lado del ancho por el lado del largo* ***P:*** *muy bien, el ancho por el largo, entonces cuando yo hago esta multiplicación es el valor de ¿cuántos cuadritos chiquiticos?* ***E2:*** *hagamos esta multiplicación.* *(los estudiantes realizan la operación la cual les da como resultado 153.125)*	

Tabla 44. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri

Es posible que la profesora haya previsto que utilizando materiales físicos y manipulables, la actividad iba ser más fácil para los estudiantes. Sin embargo, tampoco usó el medio (los rectángulos y cuadrados de cartulina) como herramienta de validación; ella hubiera podido prever una validación recortando los cuadrados y rellenando un cuadrado con pedazos de igual tamaño, pero no lo hizo; por el contrario, eliminó de la actividad las situaciones problemáticas (lados del rectángulo con dimensiones terminadas en punto 2).

Podemos entonces decir que la profesora tampoco previó las dificultades de validación que se podían presentar en la realización de su actividad. La única dificultad que anticipó, y para la cual intervino, fue la suma de fraccionarios. Pero los alumnos observados tuvieron la mayor dificultad al no poder dar valor exacto a los pedacitos de cuadrado, equivocándose al dar valores perceptivos erróneos.

Por último, como vemos, al no lograr inducir a los estudiantes en el objetivo final que era deducir y comprender la fórmula para calcular el área de un rectángulo, la profesora decide interrumpir el proceso y exponer el saber, como se pudo observar para el último rectángulo que les dio la profesora, pues les dijo a los estudiantes que para verificar si el resultado que habían obtenido les había quedado bien bastaba con multiplicar la medida de los lados.

CONCLUSIONES

En esta actividad encontramos un error de planeación, pues en el análisis a priori no se previeron e identificaron adecuadamente las diferentes dificultades que se podían presentar en la realización de la actividad. Por tal motivo, la profesora no estuvo preparada para enfrentar una serie de dificultades que nunca esperó se pudieran presentar. Por lo observado en la realización de la actividad, al parecer, para la profesora la única dificultad que se presentaría seria la suma de fraccionarios, la profesora desconfiaba de la capacidad de los estudiantes para realizar dicha operación.

Vimos que en un momento de la clase la profesora se vio enfrentada a tantas dificultades que no supo cómo superar, y que trajeron como consecuencia que la actividad se le saliera de las manos. Para retomar el control decide tomar un camino apresurado abandonando el uso de la calculadora (Cabri), dando paso a la realización de su propia actividad. No sabemos la razón por la cual la profesora había tomado con anticipación la decisión de preparar una estrategia (actividad adicional) que pudiera llevar a los estudiantes a una mejor concepción del concepto de área del rectángulo, pero constatamos que tampoco previó correctamente las dificultades y alternativas de validación para los distintos cálculos que debían realizar.

También pudimos observar que el medio, en este caso Cabri, no sirvió como herramienta de validación, produciendo una inseguridad en el momento de dar valor exacto a porciones pequeñas del cuadrado y a la imposibilidad de validar o invalidar si el valor obtenido al realizar la suma de cuadrados que cubrían el rectángulo era la correcta y equivalente al área total del rectángulo.

Aun la profesora falló en estos mismos aspectos cuando aplicó la actividad que había planeado, tampoco supo utilizar el medio de manera adecuada y se limitó a reducir el problema sin tratar los casos diferentes a enteros y ".5", tampoco previó las dificultades que se podrían presentar, hallando como única solución comunicar el saber de manera directa, mostrándoles que el área de un rectángulo es igual a la multiplicación de la medida de los lados adyacentes.

En esta actividad, en ningún momento se pudo generar una situación a-didáctica que llevara a los estudiantes a deducir y comprender la fórmula para calcular el área de un rectángulo. La gran dificultad de la misma consiste en mostrar al estudiante que la suma de las porciones del cuadrado dentro del rectángulo es equivalente a la multiplicación de dos de sus lados adyacentes.

5. CONCLUSIONES

Después de hacer un análisis a priori donde se formularon hipótesis sobre el posible comportamiento de los alumnos, y un análisis a posteriori donde se evidenció lo que realmente ocurrió, podemos concluir algunos aspectos sobre el carácter a-didáctico de las situaciones examinadas.

De las cinco situaciones analizadas, dos funcionaron de acuerdo con lo previsto en el análisis a priori: la construcción del rectángulo y la construcción del cuadrado. Las otras tres situaciones presentaron diversos problemas que impidieron el desarrollo previsto en el análisis a priori.

Durante la realización del proyecto, pudo observarse que el éxito de las actividades dependía directamente del uso del medio como herramienta de validación. Por ejemplo, en la actividad de cuadriláteros con ejes de simetría y la actividad de área del rectángulo, se observó que los estudiantes no tenían posibilidad de validar o invalidar sus estrategias gracias a las retroacciones del medio. En la actividad de cuadriláteros con ejes de simetría, los estudiantes no podían diferenciar si el cuadrilátero original y su imagen estaban superpuestos o solamente uno al lado del otro; en la actividad de área del rectángulo, los estudiantes formulaban hipótesis sobre la fracción del cuadrado que quedaba dentro del rectángulo, pero no podían verificarlas sin recurrir al profesor. Como el medio no cumplió el papel de validar o invalidar las hipótesis de los estudiantes, en consecuencia no se logró generar una situación a-didáctica. El profesor se vio obligado a intervenir para emitir un juicio sobre el trabajo de los alumnos, o para comenzar una institucionalización apresurada de los conceptos en juego.

Otro problema identificado gracias al análisis a posteriori, es la dificultad que tiene el profesor para controlar el trabajo de los alumnos cuando no se han previsto adecuadamente las dificultades que pueden presentarse. Debido al número de alumnos (42) durante la actividad, el profesor tiene muy poco tiempo para revisar lo que están haciendo y tomar una decisión sobre su forma de intervención. En consecuencia, el profesor sólo interviene de la manera como había planeado previamente; si en el curso de la actividad se presentan dificultades no previstas, el profesor tiende a ignorarlas y continuar con lo que había previsto. Es el caso que se presentó en la última actividad, para la que no se había previsto dificultad en la determinación de la fracción de cuadrado que queda dentro del rectángulo y por lo tanto la profesora pasó por alto los errores formulados por los estudiantes. En cambio, en las actividades dos y tres, donde se habían previsto correctamente las dificultades de los estudiantes, las intervenciones de la profesora fueron adecuadas.

Cuando se está seguro del papel del medio como herramienta de validación y se prevén suficientemente todas las dificultades que se puedan presentar en la realización de la actividad, ésta funcionará muy bien como situación a-didáctica. El profesor se sentirá más seguro y podrá tener más confianza en la actividad, ya que sabrá cómo intervenir sin necesidad de entregar directamente el saber, sino utilizando el medio como herramienta de validación, donde los alumnos a través de las retroacciones producidas por el medio, logran observar e identificar las propiedades en juego, llegando así a construir su propio conocimiento sin la intervención directa del profesor.

Después de analizar esta experiencia podemos concluir que el programa Cabri de la calculadora tiene algunas limitaciones que no lo hacen un medio apropiado para trabajar el concepto de área. A pesar de que formulamos algunas recomendaciones para superar los problemas de validación, Cabri presenta muchas dificultades para que los alumnos puedan hallar el valor exacto a las porciones del cuadrado que están contenidas dentro del rectángulo, en especial cuando las porciones del cuadrado se hacen muy pequeñas, pues hay un momento donde el apuntador de la calculadora no diferencia los objetos con los cuales se quiere trabajar. Por ejemplo, cuando queremos hallar el valor exacto de una porción del cuadrado debemos utilizar simetría axial, y para esto debemos dar “clic” primero sobre el polígono que queremos reflejar y luego sobre el lado por el cual queremos que se refleje; pero al momento de hacer este proceso el apuntador no reconoce ninguno de sus lados, sólo identifica los vértices del pequeño cuadrado, imposibilitando hallar el reflejo de dicha porción y por tanto, el valor exacto de ésta. Como el medio no le facilita este proceso, el alumno no puede validar sus hipótesis, y por consiguiente no puede corregir sus errores.

Algo que no se pudo alcanzar en la realización de las actividades, fue que los estudiantes a través de este medio pudieran deducir y comprender la fórmula para calcular el área del rectángulo, ya que no se les mostró una estrategia para que ellos pudieran observar la equivalencia que hay entre la multiplicación de los lados del rectángulo y la suma de las superficies de los cuadrados de 1cm x1 cm, los cuales estaban contenidos dentro de éste. Esta es una inquietud que queda pendiente para la realización de otros proyectos de grado; además queda una pregunta por responder: ¿Cómo hacer para que a través de Cabri los estudiantes comprendan y observen ese paso armonioso de las fracciones[31] a los decimales[32]?

Para finalizar, queremos dar un aporte netamente personal del por qué nosotros creemos que se presentaron tantas dificultades en la realización de las actividades. Pensamos que esto se debió al hecho de la escogencia del concepto de área de un rectángulo como concepto base dentro de la situación a-didáctica; dicho concepto es muy complejo y difícil de trabajar con Cabri como medio, pues

[31] La suma de las porciones de cuadrado de 1 cm x 1cm dentro del rectángulo.
[32] Producto de los lados adyacentes, pues Cabri no funciona con fracciones, sino con figuras.

lleva implícitos muchos conceptos básicos que los alumnos deben manejar de manera clara, como por ejemplo perpendicularidad, paralelismo, suma de fraccionarios, representación gráfica de fraccionarios, decimales, interpretación de un decimal como fracción, y viceversa, etc. Lo que dificulta el trascurso y la dirección de la actividad ya que esta se ve muy interrumpida al tratar de explicar dichos conceptos y pierde el sentido y la finalidad para la cual fue creada.

Lo más importante por resaltar en nuestro proyecto de grado, es que para poder generar una situación a-didáctica dentro de un aula de clase es indispensable hacer un buen diseño y planeación de las actividades; es necesario prever todas las dificultades que se puedan presentar antes de aplicar la actividad, y lo más importante, hay que asegurarse que el medio (en este caso Cabri) cumpla el papel de generar retroacciones adecuadas al alumno para que lo lleven a validar o invalidar sus hipótesis. En el momento en que no haya una posibilidad de validación por parte del medio, la actividad deja de ser una situación a-didáctica y el profesor estará obligado a intervenir para comunicar directamente el saber.

6. BIBLIOGRAFÍA

- MARGOLINAS Claire (1993), La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas. Publicaciones UIS 2009.

- BROSSEAU, Guy. Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones Didácticas, Libros del Zorzal, 2007, Buenos Aires Argentina.

- INSTITUTO NACIONAL PARA LA EVALUACIÓN DE LA EDUCACIÓN. La enseñanza de la Geometría. México 2008

- CHEVALLARD, Yves. BOSCH, Marianna. GASCÓN, Josep. Estudiar Matemáticas, el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Editorial Horsori (2000)

- RUEDA, karol; MONROY, Lilian. Conceptualización de la Simetría Axial y la Traslación con el programa Cabri Geometry II. Trabajo de Grado 2009.

- Estándares Matemáticas, ministerio de educación nacional.

- CORZO, Oscar; DELGADO, Paola. TRASLACION + TEORIA DE LAS SITUACIONES DIDACTICAS + CABRI GEOMETRY = UNA NUEVA HERRAMIENTA PARA LA CLASE DE GEOMETRIA. Trabajo de Grado 2010.