

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ALGORITMO PARA LA REDUCCIÓN DE
LOS EFECTOS DE LA VARIABILIDAD ESPECTRAL EN LA FUSIÓN DE
IMÁGENES MULTIESPECTRALES E HIPERESPECTRALES

ARIOLFO CAMACHO VELASCO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA
BUCARAMANGA
2022

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ALGORITMO PARA LA REDUCCIÓN DE
LOS EFECTOS DE LA VARIABILIDAD ESPECTRAL EN LA FUSIÓN DE
IMÁGENES MULTIESPECTRALES E HIPERESPECTRALES

ARIOLFO CAMACHO VELASCO

Trabajo de Grado para optar al título de
Doctor en Ciencias de la Computación

Director

Ph.D. HENRY ARGUELLO FUENTES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA
BUCARAMANGA

2022

DEDICATORIA

Dedico mi disertación a,
mis hijos amados Isabel Sofia y Mathias,
A mi esposa incondicional Katerine, por su apoyo y comprensión, sin ti esto no hubiese sido posible en el tiempo y espacio que transcurrió esta transformación,
A mis Padres Pedro Maria y Elena, su ejemplo y principios enseñados hacen parte de esta evolución,
A mis hermanos Diana Isabel, Pedro Nel y mis sobrinos, gracias por el apoyo recibido, hermanos la educación es el mejor medio para cambiar nuestra manera de pensar, actuar y contribuir a un mundo mejor y sus hijos siempre se lo agradecerán,
A todos mis compañeros y profesores que creyeron en mis capacidades y las respetaron, cada apoyo recibido fue fundamental en cada etapa de mi formación doctoral.

AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento al grupo de investigación High Dimensional Signal Processing (HDSP) por brindar el apoyo científico como equipo, dado a su gran fortaleza de interdisciplinaridad y excelentes miembros que facilitaron el desarrollo de este trabajo de investigación. Gracias a mi director, Ph.D. Henry Arguello Fuentes por la docencia y formación como doctor en ciencias de la computación, gracias por haber visualizado y encontrado el espacio adecuado para mi en su grupo.

Agradezco a mis amigos y compañeros que me apoyaron en este camino, en especial a Edwin y Hector. Principalmente agradezco el apoyo recibido en los momentos difíciles, sus palabras de aliento para seguir adelante fueron asertivas. Así mismo y no menos importantes infinitas gracias a Diana, Yuri, Camilo, Samuel, Claudia, Laura, Ana, Hoover, Cesar, Arley, Edson Florez, Andres Jerez, Edson Mojica, Jose David y perdón por los que no recuerdon; cada uno de ustedes apporto desde su ser y conocimientos a mi formación.

También agradezco a la Universidad Industrial de Santander por la formación, docencia y su apoyo en el desarrollo de la presente tesis. Además, un reconocimiento especial a la UIS por el crédito condonable que permitió el sostenimiento financiero propio y de mi familia.

RESUMEN

TÍTULO: DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ALGORITMO PARA LA REDUCCIÓN DE LOS EFECTOS DE LA VARIABILIDAD ESPECTRAL EN LA FUSIÓN DE IMÁGENES MULTIESPECTRALES E HIPERESPECTRALES *

AUTOR: Ariolfo Camacho Velasco **

PALABRAS CLAVE: Variabilidad Espectral, Fusión MS-HS, Imágenes Hiperespectrales, Imágenes Multiespectrales, Firma espectral.

DESCRIPCIÓN:

Las técnicas de fusión de imágenes han abordado el problema de formación de imágenes de alta resolución a partir de información de múltiples sensores como cámaras hiperespectrales (HS) y multiespectrales (MS), donde los primeros ofrecen alta resolución espectral y los segundos aportan alta resolución espacial. En la práctica, los espectros observados a partir de muestras de un mismo material no son idénticos. Adicionalmente, existen variaciones en la información espectral dentro de experimentos controlados en los laboratorios. Tales variaciones en forma y escala de las firmas espectrales de un mismo material en diferentes píxeles a lo largo de una imagen HS se conoce como variabilidad espectral. Recientemente, la comunidad científica se ha interesado en los efectos de la variabilidad espectral debido a que representan una fuente de error en el análisis de imágenes HS. Sin embargo, los enfoques clásicos de fusión de imágenes MS e imágenes HS aun no han abordado el fenómeno de la variabilidad espectral. Por otro lado, recientes desarrollos de sensores y métodos de procesamiento de datos han conllevado a un mayor uso de imágenes espectrales, principalmente MS e HS en la agricultura mundial. En un contexto colombiano, el desarrollo de aplicaciones e investigaciones científicas de técnicas de teledetección hiperespectral son requeridas en la agricultura, dado el gran potencial agrícola de Colombia por sus condiciones geográficas y climáticas. No obstante, el estudio de la vegetación usando información espectral es afectado por la variabilidad espectral. Por lo tanto, en esta tesis doctoral se diseñó e implementó un algoritmo para la reducción de

* Tesis doctoral

** Escuela de ingeniería de sistemas e informática. Director: Ph.D. Henry Arguello Fuentes.

los efectos de la variabilidad espectral en la fusión de imágenes MS y HS basado en el desmezclado espectral. La principal contribución consiste en el desarrollo de un algoritmo de fusión que combina el modelo de degradación espacio-espectral con el modelo de variabilidad espectral. Particularmente, el desempeño del algoritmo propuesto fue evaluado sobre datos semi-sintéticos, datos reales de escenas de cultivos agrícolas en Colombia y datos espectrales adquiridos en laboratorio, obteniendo una ganancia de hasta 4 dB en términos de la calidad de las imágenes fusionada en comparación con los métodos del estado del arte de fusión de imágenes MS-HS..

ABSTRACT

TITLE: DESIGN AND IMPLEMENTATION OF AN ALGORITHM TO REDUCE THE EFFECTS OF SPECTRAL VARIABILITY IN THE FUSION OF MULTISPECTRAL AND HYPERSPECTRAL IMAGES

*

AUTHOR: Ariolfo Camacho Velasco **

KEYWORDS: Spectral Variability, Fusion MS-HS, Hyperspectral imaging, Multispectral imaging, Spectral signature.

DESCRIPTION:

Image fusion techniques have addressed the problem of forming high-resolution images with information from multiple sensors such as hyperspectral (HS) and multispectral (MS) cameras. The former offers high spectral resolution, and the latter provides high spatial resolution. In practice, the spectra observed from samples of the same material are not identical. Additionally, there are variations in spectral information within controlled experiments in laboratories. Such variation in the shape and scale of the spectral signatures of the same material at different pixels throughout an HS image is known as spectral variability. Recently, the scientific community has been interested in the effects of spectral variability because they represent a source of error in the analysis of HS images. However, classical MS image fusion and HS image fusion approaches have not yet addressed the phenomenon of spectral variability. On the other hand, recent sensors and data processing developments have led to greater use of spectral images, mainly MS and HS, in agriculture. In the Colombian context, the development of applications and scientific research of hyperspectral remote sensing techniques are required in agriculture, given the tremendous agricultural potential of the country due to its geographic and climatic conditions. However, the study of vegetation using spectral information is affected by spectral variability. Therefore, in this doctoral thesis, an algorithm was designed and implemented to reduce the effects of spectral variability in the fusion of MS and HS images based on spectral unmixing. The main contribution consists of developing a fusion algorithm that combines the spatial-spectral degradation model with the spectral variability model. In particular, the performance of the

* Doctoral Thesis

** Department of Systems Engineering and Informatics. Director: Ph.D. Henry Arguello Fuentes.

proposed algorithm was evaluated on semi-synthetic data, real data from scenes of agricultural crops in Colombia, and spectral data acquired in the laboratory, obtaining a gain of up to 4 dB in terms of the quality of the fused images compared to state-of-the-art MS-HS image fusion methods.

Índice general

	pág.
1. Introducción	16
1.1. Retos abiertos	24
1.2. Objetivo General	27
1.2.1. Objetivos específicos	27
1.3. Esquema de la disertación	27
1.4. Contribuciones	28
1.4.1. Listado de Producción	30
1.4.2. Artículos en revistas internacionales	30
1.4.3. Artículos en revistas nacionales	30
1.4.4. Artículos en conferencias internacionales:	31
1.4.5. Otros aportes:	31
2. Marco Teórico : Variabilidad espectral en imágenes hiperespectrales	33
2.1. Imágenes espectrales	33
2.2. Modelo de mezcla lineal (MML)	37
2.3. Variabilidad espectral	39
2.3.1. Principales factores de variabilidad espectral	40
2.4. Fusión de imágenes MS-HS	42
3. Análisis de la variabilidad espectral en imágenes hiperespectrales	46
3.1. Introducción	46
3.2. Enfoques de variabilidad espectral	47
3.2.1. Variabilidad espectral basada en conjuntos (" <i>bundles</i> ")	48

3.2.2. Modelo de mezcla lineal perturbada - PLMM (del inglés <i>Perturbed linear mixing model</i>)	50
3.2.3. Modelo de mezcla lineal extendido - ELMM (del inglés <i>Extended linear mixing model (ELMM)</i>)	51
3.2.4. Modelo de mezcla lineal aumentado - ALMM (del inglés <i>Augmented linear mixing model</i>)	51
3.2.5. Modelos bayesianos NCM y BCM (del inglés <i>Normal composition model and beta compositional model</i>)	52
3.2.6. Algoritmo de descenso coordinado para no linealidades (NL), variabilidad de firma puras o <i>endmembers</i> (EV) y efectos de errores en el modelado (<i>mismodelling</i> - ME)	53
3.2.7. Observaciones sobre modelos de variabilidad espectral	55
3.3. Imágenes hiperespectrales en cultivos de palma de aceite	55
3.4. Variabilidad espectral en la técnica de desmezclado espectral de imágenes HS	59
3.4.1. Conjunto de datos sintéticos	59
3.4.2. Conjunto de datos reales de imágenes HS adquiridas de cultivos de palma de aceite en Colombia	60
3.4.3. Métodos de desmezclado espectral para el análisis de variabilidad espectral y comparación de resultados.	61
3.4.4. Criterios de evaluación	65
3.5. Resultados	66
3.5.1. Experimento 1. Comparación de métodos de desmezclado espectral utilizando datos sintéticos	66
3.5.2. Experimento 2. Validación de la estimación de abundancia utilizando imágenes HS adquiridas en cultivos de palma de aceite en Colombia	70
3.6. Conclusiones	75

4. Fusión de imágenes hiperespectrales y multiespectrales que abordan la variabilidad espectral mediante el uso de un modelo de mezcla lineal aumentado	77
4.1. Introducción	77
4.2. Contexto	81
4.2.1. La variabilidad espectral y el modelo de mezcla lineal	81
4.2.2. Trabajos anteriores en fusión de imágenes HS-MS mediante el enfoque de desmezclado espectral	83
4.3. Formulación del Problema	86
4.3.1. Modelo de observación	87
4.3.2. Problema de optimización	89
4.4. Algoritmo de optimización ADMM	90
4.4.1. Convergencia de algoritmos	91
4.5. Resultados	92
4.5.1. Evaluación del rendimiento	93
4.5.2. Configuración y resultados en conjuntos de datos semi-sintéticos	95
4.6. Problema de optimización con respecto a A , S , E , y a C	105
4.6.1. Optimización con respecto a A	105
4.6.2. Optimización con respecto a S	108
4.6.3. Optimización con respecto a E	111
4.6.4. Optimización con respecto a C	113
4.7. Conclusiones	116
5. Desempeño de algoritmo de fusión de HS-MS que aborda la variabilidad espectral en datos reales de escenas de cultivos agrícolas en Colombia y adquisiciones en laboratorio	118
5.1. Introducción	118

5.2. Fusión de imágenes espectrales con datos reales satelitales (DESI - SENTINEL 2) en Colombia	119
5.2.1. Sensores hiperespectrales satelitales	119
5.2.2. Sensor multiespectral - SENTINEL 2	122
5.2.3. Experimento con datos reales satelitales para realizar la fusión de imágenes HS del sensor DESIS con imágenes MS del sensor SENTINEL 2	123
5.3. Fusión de imágenes espectrales con datos reales adquiridos en el laboratorio de óptica	127
5.3.1. Configuración del experimento en el laboratorio de óptica	127
5.3.2. Experimento con datos reales adquiridos en el laboratorio de óptica	128
5.3.3. Resultado experimental con datos reales adquiridos en el laboratorio de óptica	129
Conclusiones y perspectivas	132
Bibliografía	134

Índice de figuras

	pág.
Figure 1. Introducción del problema de variabilidad espectral y su relación con la tarea de fusión de imágenes HS-MS	21
Figure 2. Imagen espectral	34
Figure 3. Concepto de resolución espacial en diferentes sensores satelitales	35
Figure 4. Clasificación de imágenes espectrales basada en la resolución espectral	36
Figure 5. Concepto de sistema de teledetección hiperespectral.	37
Figure 6. Conceptos de mezclado espectral, firmas mezcladas y firmas puras	39
Figure 7. Firmas espectrales puras y el concepto de variabilidad espectral.	40
Figure 8. Causas principales de variabilidad espectral y su relación con el tipo de variación generada.	42
Figure 9. Esquema sobre técnica de fusión de imágenes HS-MS	44
Figure 10. Enfoques que abordan la variabilidad espectral.	48
Figure 11. Modelos de variabilidad espectral mediante el uso de múltiples firmas espectrales.	50
Figure 12. Firmas espectrales de la biblioteca ASTER utilizadas para crear la imagen HS sintética para inducir el efecto de variabilidad espectral.	60
Figure 13. Área de estudio que corresponde a cultivos de palma de aceite en Colombia.	62
Figure 14. Adquisición de puntos de control geo-referenciados en área del cultivos de palma de aceite para creación de la verdad de terreno.	63

Figure 15. Diagrama de flujo de la metodología utilizada para el análisis de la variabilidad espectral en la tarea de desmezclado espectral en imágenes HS.	67
Figure 16. Comparación de los diferentes enfoques aplicados a la imagen sintética para diferentes niveles de SNR	69
Figure 17. Variabilidad espectral en una muestra de cultivo de palma de aceite.	71
Figure 18. Resultados de estimaciones de mapas de abundancia para tres clases con diferentes algoritmos de desmezclado espectral.	73
Figure 19. El concepto de variabilidad espectral generada sobre dos materiales pasto y techo, tomados del conjunto de datos Urban.	78
Figure 20. Esquema de fusión de imágenes espectrales propuesto que aborda la variabilidad espectral.	88
Figure 21. Conjuntos de datos semisintéticos y conjunto de datos reales que corresponde a imágenes imágenes satelitales reales de MS y HS adquiridas sobre territorio colombiano.	93
Figure 22. Imágenes urbanas superresueltas obtenidas utilizando métodos de fusión HSI-MSI en comparación con el método propuesto que aborda la variabilidad espectral.	97
Figure 23. Resultados de fusión mediante la métrica SAM sobre el conjunto de datos HS de Moffet	98
Figure 24. Comparación de 10 firmas espectrales de la misma clase ubicadas en diferentes lugares dentro de la imagen.	100
Figure 25. Comparación visual de firmas espectrales para dos píxeles diferentes que corresponden al conjunto de datos de Jasper.	101
Figure 26. Resultados de clasificación obtenidos de las imágenes superresueltas obtenidas mediante diferentes algoritmos de fusión	103

Figure 27. Sensibilidad del algoritmo de fusión propuesto a diferentes parámetros de regularización.	104
Figure 28. Sensor hiperespectral DESIS.	122
Figure 29. Resultados del método de fusión de imágenes HS-MS propuesto que aborda la variabilidad espectral sobre un conjunto de datos reales de escena de cultivo de palma de aceite en Colombia	125
Figure 30. Imagen real multiespectral (Sentinel) e imagen HS real(DESIS) y resultado de la imagen fusionada con el método propuesto (10 m)	126
Figure 31. Configuración óptica implementada en el laboratorio para la adquisición de datos espectrales.	128
Figure 32. Escena construida para adquisición de imagen HS en laboratorio de óptica	129
Figure 33. Resultados del método de fusión HSI-MSI propuesto que aborda la variabilidad espectral sobre la escena cubo 2 adquirida en el laboratorio de óptica HDSP.	131

1. Introducción

Una imagen espectral se puede representar como un cubo de datos tridimensional indexado por la tupla (x, y, λ) donde x y y indexan las dos dimensiones espaciales de la escena, y λ indexa la dimensión espectral, cubriendo un rango de longitudes de onda del espectro electromagnético. Ejemplos de imágenes espectrales incluyen imágenes hiperespectrales (HS), imágenes multiespectrales (MS), espectroradiómetros de campo integral, etc. Típicamente, la adquisición de imágenes HS se enfrenta a un intercambio entre las resoluciones espaciales y espectrales debido a la limitación tecnológica de los dispositivos de adquisición, la dispersión atmosférica, la iluminación secundaria, los ángulos de visión cambiantes, el ruido del sensor, etc.¹. En particular, los sensores HS ofrecen una alta resolución espectral, pero baja resolución espacial (BRE) y los sensores MS ofrecen una alta resolución espacial (ARE) pero baja resolución espectral²³. Por ende, la fusión de imágenes HS-MS busca superar tales limitaciones, abordando el problema de estimar una imagen de alta resolución espacial y espectral combinando las mejores características de las imágenes HSs y MSs⁴⁵. Por otro lado, el creciente número de sensores espectrales

-
- ¹ Chein-I Chang. *Hyperspectral data exploitation: theory and applications*. John Wiley & Sons, 2007.
 - ² Nirmal Keshava y John F Mustard. "Spectral unmixing". En: *IEEE signal processing magazine* 19.1 (2002), págs. 44-57.
 - ³ Gary A Shaw y Hsiao-hua K Burke. "Spectral Imaging for Remote Sensing". En: *Lincoln Laboratory Journal* 14.1 (2003), págs. 3-28.
 - ⁴ David Hall y James Llinas. *Multisensor data fusion*. CRC press, 2001.
 - ⁵ Vladimir S Petrovic y Costas S Xydeas. "Gradient-based multiresolution image fusion". En: *IEEE Transactions on Image processing* 13.2 (2004), págs. 228-237.

disponibles en los satélites, la diversidad de sus características óptico-espectrales y la creciente demanda de imágenes de alta resolución espacial y espectral son las razones que enfatizan la necesidad de investigaciones y mejoras en las técnicas de fusión de imágenes espectrales en múltiples aplicaciones de teledetección.

En los últimos años se han propuesto numerosos métodos de fusión de imágenes HS-MS ⁶, que a menudo se clasifican en cuatro grupos: métodos basados en imágenes pancromáticas, métodos bayesianos, métodos basados en aprendizaje profundo y métodos basados en desmezclado espectral (del inglés *unmixing*). El enfoque de fusión de imágenes basado en imágenes pancromáticas se ha utilizado para mejorar la resolución espacial de las imágenes MS mediante la fusión de una imagen BRE con una imagen pancromática, dado que la banda espectral que adquiere la imagen pancromática posee una mejor resolución espacial que todas las otras bandas espectrales ⁷. Los métodos con imágenes pancromáticas más representativos pueden agruparse en sustitución de componentes (CS, del inglés *component substitution*), análisis multi-resolución y representación escasa ⁸⁹¹⁰.

Dado que el problema de la fusión de imágenes HS-MS es un problema mal con-

⁶ Naoto Yokoya, Claas Grohnfeldt y Jocelyn Chanussot. "Hyperspectral and multispectral data fusion: A comparative review of the recent literature". En: *IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine* 5.2 (2017), págs. 29-56.

⁷ Laetitia Loncan et al. "Hyperspectral pansharpening: A review". En: *IEEE Geoscience and remote sensing magazine* 3.3 (2015), págs. 27-46.

⁸ Bruno Aiazzi, Stefano Baronti y Massimo Selva. "Improving component substitution pansharpening through multivariate regression of MS + Pan data". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 45.10 (2007), págs. 3230-3239.

⁹ Xiao Xiang Zhu y Richard Bamler. "A sparse image fusion algorithm with application to pan-sharpening". En: *IEEE transactions on geoscience and remote sensing* 51.5 (2012), págs. 2827-2836.

¹⁰ Gemine Vivone et al. "A critical comparison among pansharpening algorithms". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 53.5 (2014), págs. 2565 -2586.

dicionado, el enfoque de la inferencia bayesiana ofrece una forma conveniente de resolver este problema mediante la incorporación de información previa de la escena observada. Por ejemplo, en ¹¹ se desarrolló una metodología de fusión de imágenes HS-MS bayesiana utilizando tanto una transformación en un sub-espacio como información a priori de la dispersión de los coeficientes de la imagen ARE. Posteriormente, en ¹² se propuso un algoritmo de fusión rápida para imágenes multi-banda mediante la solución de la ecuación de *Sylvester* (FUSE), que combina una imagen de ARE con baja resolución espectral y una de BRE con alta resolución espectral. Adicionalmente, el trabajo desarrollado en ¹³ propuso una estrategia de codificación escasa bayesiana genérica con diccionarios bayesianos aprendidos.

En los últimos años, las arquitecturas de aprendizaje profundo han demostrado ser útiles en muchas tareas de visión artificial, y han sido aplicadas en el problema de fusión de imágenes HS-MS. Por ejemplo, el trabajo en ¹⁴ propone un enfoque de aprendizaje profundo basado en modelos para generar una imagen ARS-HS considerando el modelo de observación de la imagen HS y MS, así como el bajo rango *a priori* a lo largo de la dimensión espectral. Otros métodos de fusión aprovechan las redes neuronales convolucionales totalmente piramidales ¹⁵ o las redes neuro-

¹¹ Qi Wei et al. "Hyperspectral and multispectral image fusion based on a sparse representation". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 53.7 (2015), págs. 3658-3668.

¹² Qi Wei, Nicolas Dobigeon y Jean-Yves Tourneret. "Fast fusion of multi-band images based on solving a Sylvester equation". En: *IEEE Transactions on Image Processing* 24.11 (2015), págs. 4109-4121.

¹³ Naveed Akhtar, Faisal Shafait y Ajmal Mian. "Bayesian sparse representation for hyperspectral image super resolution". En: *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*. 2015, págs. 3631-3640.

¹⁴ Qi Xie et al. "Multispectral and Hyperspectral Image Fusion by MS/HS Fusion Net". En: *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 2019, págs. 1585-1594.

¹⁵ Feng Zhou et al. "Pyramid fully convolutional network for hyperspectral and multispectral image

nales convolucionales con un módulo de paso de mensajes de modo cruzado para compartir la información del modo espectral y el modo espacial ¹⁶. Un reciente trabajo en ¹⁷ presenta un método de fusión HSI y MSI llamado CNN-Fus, que se basa en la representación de sub-espacios y una red neuronal convolucional (CNN) para eliminar ruido. El algoritmo CNN-Fus solo necesita entrenar la red convolucional sobre imágenes en escala de grises y puede ser utilizado directamente para cualquier imagen HS y MS sin re-entrenamiento. Primero, para explotar las altas correlaciones entre las bandas espectrales, aproxima la imagen de alta resolución espectral (HS) con la imagen de baja dimensión espectral (MS) aun un subespacio multiplicado por los coeficientes, esto acelera el algoritmo y también conduce a una recuperación más precisa. Ya que la información espectral existe principalmente en la imagen HS, CNN-Fus aprende del subespacio a través de la descomposición de valores singulares. Debido al rendimiento de aprendizaje y alta velocidad de CNN, CNN-Fus usa la CNN bien entrenada para la eliminación de ruido en imágenes a escala de grises para regularizar la estimación de coeficientes.

En los últimos años han surgido diferentes trabajos donde se resumen los recientes avances y nuevas tendencias sobre la fusión de imágenes HS y MS, en estos trabajos han realizado un análisis de las ventajas y desventajas sobre las técnicas de aprendizaje profundo para la tarea de fusión de imágenes HS y MS. Por ejemplo, en ¹⁸ indica que los enfoques profundos basados en CNN han logrado resultados pro-

fusion". En: *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing* 12.5 (2019), págs. 1549-1558.

¹⁶ Xueting Zhang et al. "SSR-NET: Spatial-Spectral Reconstruction Network for Hyperspectral and Multispectral Image Fusion". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* (2020).

¹⁷ Renwei Dian, Shutao Li y Xudong Kang. "Regularizing hyperspectral and multispectral image fusion by CNN denoiser". En: *IEEE transactions on neural networks and learning systems* 32.3 (2020), págs. 1124-1135.

¹⁸ Renwei Dian et al. "Recent advances and new guidelines on hyperspectral and multispectral

metedores y alta velocidad para la fusión HS-MS. Sin embargo, todavía tienen dos desventajas. 1.) La técnica de fusión abordando las CNN están basadas en datos, y estas requieren de grandes conjuntos de datos HS y MS para el procedimiento de entrenamiento. Sin embargo, los datos de entrenamiento a menudo en ambientes reales no están disponibles. 2.) Además, la capacidad de generalización de las CNN profundas también es un gran desafío. Dado que el número de bandas espectrales, la resolución espacial y los rangos espectrales de los datos pueden ser diferentes, una CNN entrenada con un conjunto de datos en particular no se puede aplicar a otros tipos de datos. Además, los enfoques de fusión HS-MS basados en CNN no necesitan aparentemente conocer la PSF (del inglés point spread function), sin embargo, la CNN usa la PSF para generar los entrenamientos de los datos en fusión de datos reales, o lograr un entrenamiento no supervisado mediante el uso del modelo de observación como función de pérdida.

De igual manera, este trabajo destaca que existen dos ventajas de los métodos de fusión HS-MS basados en CNN profunda. En primer lugar, en comparación con los métodos basados en factorización de matrices y métodos basados en tensores, el método de fusión basado en CNN profundas se puede implementar más rápido, ya que no necesitan iteración y se pueden acelerar fácilmente a través de GPU de alto rendimiento. Además, la función no lineal y la capa de convolución pueden hacer que CNN tenga una poderosa capacidad para aprender las características de la imagen y lograr una fusión precisa.

Por otro lado, los métodos de fusión basados en la técnica de desmezclado espectral de imágenes HS han dado lugar a resultados de vanguardia con la ventaja de tener una interpretación matemática y física del proceso de fusión. El desmezclado espectral consiste en la descomposición de la imagen HS en un conjunto de firmas

image fusion". En: *Information Fusion* 69 (2021), págs. 40-51.

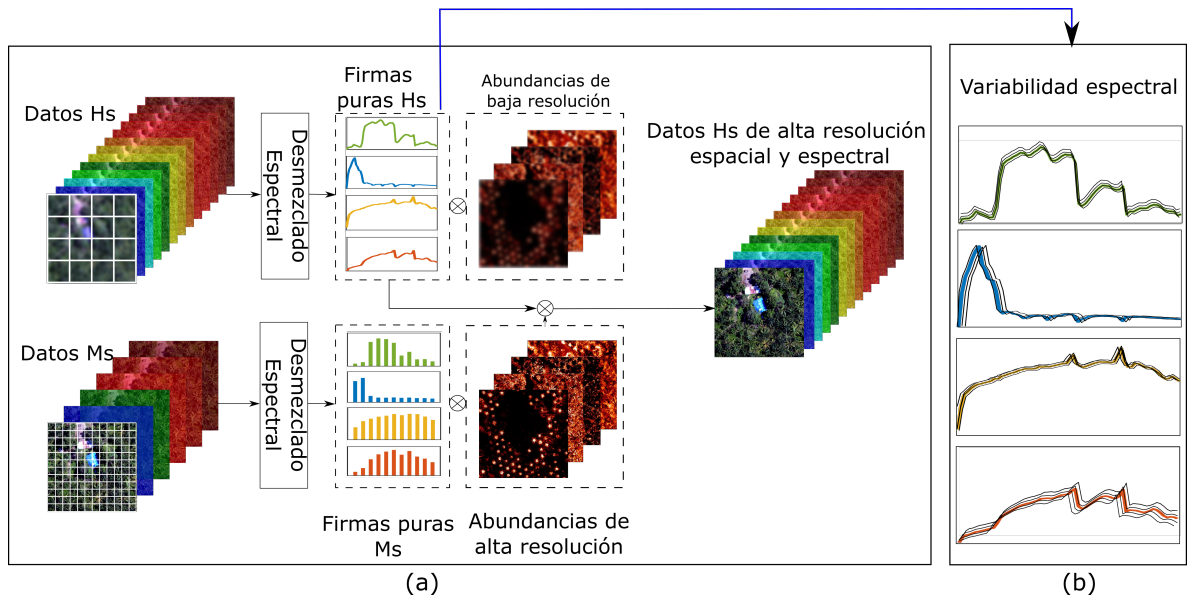


Figura 1. Introducción del problema de variabilidad espectral y su relación con la tarea de fusión de imágenes HS-MS. (a) Los enfoques de fusión basado en el desmezclado espectral buscan obtener información sobre los firmas espectrales puras o miembros finales a partir de imágenes HS de alta resolución espectral y mapas de abundancia a partir de imágenes MS con ARS, Sin embargo, (b) Las firmas puras de la imagen HS presentan variaciones, las cuales inducen errores en la estimación de la imagen fusionada.

espectrales puras conocidas como miembros finales (del inglés *endmembers*), y la proporción de cada miembro final en cada ubicación espacial conocida como mapas de abundancia. Por lo tanto, la idea principal de los métodos de fusión basados en desmezclado espectral es obtener información sobre las firmas espectrales puras o miembros finales a partir de imágenes HS de alta resolución espectral y mapas

de abundancia a partir de imágenes MS con ARE¹⁹²⁰²¹²²²³²⁴. Los enfoques de fusión convencionales que utilizan el desmezclado espectral consideran un modelo de mezcla lineal (MML), que asume que cada vector espectral es la combinación lineal de firmas espectrales puras ponderadas por sus proporciones o abundancias. Sin embargo, el MML ignora las variaciones espectrales entre píxeles de un mismo material en una escena espectral, un fenómeno conocido como *variabilidad espectral*. En particular, el fenómeno de variabilidad espectral se conoce como las variaciones de forma y escala a través del espectro de un material dado en diferentes posiciones espaciales de una imagen HS. Estas variaciones pueden ser causadas por efectos de iluminación, condiciones atmosféricas, topografía o incluso la varia-

-
- ¹⁹ Naoto Yokoya, Takehisa Yairi y Akira Iwasaki. "Coupled nonnegative matrix factorization unmixing for hyperspectral and multispectral data fusion". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 50.2 (2011), págs. 528-537.
- ²⁰ Miguel Simões et al. "A convex formulation for hyperspectral image superresolution via subspace-based regularization". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 53.6 (2014), págs. 3373-3388.
- ²¹ Qi Wei et al. "Multiband image fusion based on spectral unmixing". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 54.12 (2016), págs. 7236-7249.
- ²² Charis Lanaras, Emmanuel Baltsavias y Konrad Schindler. "Hyperspectral super-resolution with spectral unmixing constraints". En: *Remote Sensing* 9.11 (2017), pág. 1196.
- ²³ Edwin Vargas, Henry Arguello y Jean-Yves Tournet. "Spectral image fusion from compressive measurements using spectral unmixing and a sparse representation of abundance maps". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 57.7 (2019), págs. 5043-5053.
- ²⁴ Tatiana Gelvez y Henry Arguello. "Nonlocal Low-Rank Abundance Prior for Compressive Spectral Image Fusion". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 59.1 (2020), págs. 415-425.

bilidad intrínseca del material ²⁵²⁶²⁷²⁸.

La variabilidad espectral se ha considerado como una alta fuente de error en el análisis de imágenes HS. Por ejemplo, la variabilidad espectral compromete la precisión de la mayoría de los algoritmos, para diferentes tareas de inferencia, tales como, el desmezclado espectral, la detección de objetivos, clasificación, detección de cambios ²⁶²⁷. En particular, la asunción de los errores inducidos en un MML generados por la variabilidad espectral, radica en que es físicamente inviable adquirir la misma firma espectral de un material presente en diferentes ubicaciones espaciales de la misma escena. Sin embargo, los métodos de fusión HS-MS convencionales basados en el desmezclado espectral y en los MML ignoran la variabilidad espectral, afectando la calidad de la imagen fusionada. El problema de la variabilidad espectral en los métodos de fusión HS-MS solo se ha abordado hasta el momento en el contexto de la variabilidad espectral estacional. ²⁹, por ejemplo, variaciones espectrales de los materiales presentes en una escena, debido al tiempo transcurrido entre un tiempo t_1 y un tiempo t_2 para su adquisición, por lo tanto, este modelo indica que existe una variación espectral entre las escenas que corresponde al cambio de los materiales en el tiempo, conocida como variación temporal. El trabajo en ²⁹ emplea

²⁵ Ben Somers et al. "Endmember variability in spectral mixture analysis: A review". En: *Remote Sensing of Environment* 115.7 (2011), págs. 1603-1616.

²⁶ Alina Zare y KC Ho. "Endmember variability in hyperspectral analysis: Addressing spectral variability during spectral unmixing". En: *IEEE Signal Processing Magazine* 31.1 (2013), págs. 95-104.

²⁷ Ariolfo Camacho, Claudia V Correa y Henry Arguello. "An analysis of spectral variability in hyperspectral imagery: a case study of stressed oil palm detection in Colombia". En: *International Journal of Remote Sensing* 40.19 (2019), págs. 7603 -7623.

²⁸ Ricardo Augusto Borsoi et al. "Spectral Variability in Hyperspectral Data Unmixing: A Comprehensive Review". En: *arXiv preprint arXiv:2001.07307* (2020).

²⁹ Ricardo Augusto Borsoi et al. "Super-resolution for hyperspectral and multispectral image fusion accounting for seasonal spectral variability". En: *IEEE Transactions on Image Processing* 29 (2019), págs. 116-127.

una formulación basada en sub-espacios y desmezclado espectral considerando un conjunto único de firmas espectrales puras para cada imagen y un modelo paramétrico para representar la variabilidad de las firmas espectrales. El enfoque en ²⁹ ataca principalmente los cambios temporales (estacionales) en la firma espectral de los materiales en la imagen HS que pueden cambiar significativamente con respecto a la imagen MS.

Actualmente, debido a una gran cantidad de satélites ópticos disponibles con diferentes resoluciones espectrales y espaciales ⁶, y gracias a los ciclos de revisita de los satélites sobre un mismo lugar que son cada vez más cortos, es posible adquirir imágenes HS y MS de una misma área con mayor frecuencia. Incluso, se pueden adquirir estas imágenes en un rango menor a una semana (ciclo de revisita \ll 7 días) posiblemente, en las condiciones atmosféricas y ambientales similares. En consecuencia, esta tesis doctoral se centra en el estudio y modelado de la variabilidad espectral en los métodos de fusión para imágenes HS y MS adquiridas durante la misma temporada (con pocos días de diferencia), bajo condiciones atmosféricas y de iluminación muy similares, identificando los retos descritos a continuación.

1.1. Retos abiertos

Esta tesis abarca el estudio de los siguientes retos:

1. **Reducir los efectos de la variabilidad espectral en las imágenes HS:** Las imágenes HS han ganado interés en la comunidad científica y civil para detectar o clasificar materiales por su firma espectral en aplicaciones de teledetección. Sin embargo, las firmas espectrales pueden variar debido a factores como la iluminación, condiciones atmosféricas, topografía, etc. Ignorar esta variabilidad puede ser una fuente importante de error en el análisis de imágenes HS. Por lo que estudiar las causas y efectos de la variabilidad espectral en las imágenes HS ²⁷ podría contribuir en el planteamiento de nuevos métodos

o algoritmos que mitiguen los efectos negativos en tareas de inferencia como clasificación, detección, desmezclado espectral o fusión de imágenes HS-MS.

2. **Modelar la variabilidad espectral en las técnicas de fusión de imágenes**

MS-HS: Las imágenes HS se encuentran actualmente en el centro de un gran y creciente número de aplicaciones de teledetección como el análisis de uso de suelo, detección de minerales, monitoreo ambiental ³⁰. Sin embargo, la alta resolución espectral de las imágenes HS no está exenta de compromisos. Dado que la luz reflejada y que es observada en el sensor debe dividirse en un gran número de bandas espectrales, el tamaño de cada píxel en la imagen HS debe ser lo suficientemente grande como para lograr una relación señal/ruido baja. Esto conduce a imágenes con baja resolución espacial ³. Por otro lado, sensores MS proporcionan imágenes con mayor resolución espacial, aunque con un menor número de bandas espectrales. Un enfoque para obtener imágenes con alta resolución espacial y espectral consiste en combinar imágenes HS y MS de la misma escena, esta técnica se denomina fusión de imágenes HS-MS. En la literatura se han propuesto varios algoritmos para resolver el problema de fusión HS-MS ⁶. Sin embargo, ninguno ha considerado el reto de abordar el problema de variabilidad espectral de las imágenes HS. Esta solo ha sido abordado desde el contexto de variaciones de las firmas espectrales en el tiempo (variabilidad estacional o temporal).

3. **Desarrollar un modelo de fusión de imágenes HS-MS que considere simultáneamente variaciones por escalado y otras variaciones no lineales:**

Las principales causas de variabilidad espectral se deben al escalado de la firma espectral generadas por modificación en la iluminación de la escena o en la

³⁰ Julie Transon et al. "Survey of Hyperspectral Earth Observation Applications from Space in the Sentinel-2 Context". En: *Remote Sensing* 10.2 (2018). DOI: 10.3390/rs10020157.

topografía del terreno. Además, existen variaciones no-lineales que no pueden ser modeladas mediante el escalado. Por ejemplo, las variaciones ocasionadas por efectos atmosféricos o variabilidad intrínseca de los materiales debido a variaciones físico-químicas (por ejemplo, vegetación). En la literatura diferentes autores han planteado soluciones a este problema de manera individual; por ejemplo, ³¹ modela la variabilidad espectral causada por variaciones en la iluminación como factores de escala multiplicativos y elimina sus efectos. ³² modela la variabilidad espectral a través de un término de perturbación aditivo para cada firma espectral pura. Sin embargo, el modelo no considera variabilidades espectrales relacionadas con factores de escala y carece de sentido físico al permitir que la suma de abundancias de una firma mezclada sea mayor a uno.

A pesar de esto, el autor Hong en el área de desmezclado espectral propuso en ³³ un algoritmo que modela simultáneamente los factores de escala y otras variabilidades espectrales. Sin embargo, aún existe el reto de modelar simultáneamente diferentes variaciones espectrales en el problema de fusión de imágenes HS-MS.

Para abordar los retos identificados esta tesis doctoral planteó los siguientes objetivos.

-
- ³¹ Lucas Drumetz et al. "Blind hyperspectral unmixing using an extended linear mixing model to address spectral variability". En: *IEEE Transactions on Image Processing* 25.8 (2016), págs. 3890-3905.
- ³² Jyrki Tuominen y Tarmo Lipping. "Spectral characteristics of common reed beds: Studies on spatial and temporal variability". En: *Remote Sensing* 8.3 (2016).
- ³³ Danfeng Hong et al. "An augmented linear mixing model to address spectral variability for hyperspectral unmixing". En: *IEEE Transactions on Image Processing* 28.4 (2018), págs. 1923-1938.

1.2. Objetivo General

Diseñar e implementar un algoritmo para la reducción de los efectos de la variabilidad espectral en la fusión de imágenes multispectrales e hiperespectrales.

1.2.1. Objetivos específicos

1. Seleccionar los principales enfoques que abordan el problema de la variabilidad espectral en imágenes hiperespectrales.
2. Analizar las técnicas tradicionales de fusión de imágenes MS e HS con mejor desempeño para ser comparadas con el método propuesto.
3. Modelar de forma matemática la fusión de imágenes MS e HS a partir de un enfoque que incluya el problema de la variabilidad espectral.
4. Implementar un algoritmo de optimización basado en técnicas de fusión de imágenes MS e HS para reducir los efectos la variabilidad espectral.
5. Evaluar el desempeño del algoritmo propuesto comparado con los algoritmos que no abordan la variabilidad espectral con respecto a la calidad de las imágenes fusionadas, usando datos adquiridos en el laboratorio y datos reales de escenas de cultivos agrícolas en Colombia.

1.3. Esquema de la disertación

Este trabajo está centrado en modelar y reducir el efecto de la variabilidad espectral en la tarea de fusión de imágenes HS-MS. En particular, la disertación se divide en cinco capítulos: El capítulo 2 presenta los antecedentes teóricos fundamentales del problema de variabilidad espectral y los métodos tradicionales de fusión de imágenes HS-MS. El capítulo 3 presenta una descripción de diferentes enfoques

representativos que abordan la variabilidad espectral en imágenes HS. El capítulo 4 propone un algoritmo de fusión de imágenes HS-MS y el modelo matemático que abordan la variabilidad espectral mediante el uso de un modelo de mezcla lineal aumentado, que modela la variabilidad espectral de forma simultánea. El capítulo 5 evalúa y compara los resultados numéricos para analizar los resultados teóricos obtenidos del algoritmo de fusión de imágenes HS-MS que aborda la variabilidad espectral propuesto, utilizando datos reales satelitales sobre una escena de un cultivo agrícola en Colombia. Adicionalmente, el capítulo 5 muestra la adquisición de datos reales en laboratorio, el montaje del sistema de adquisición, la comparación y análisis de los resultados del algoritmo propuesto de fusión de imágenes HS-MS sobre datos reales.

1.4. Contribuciones

El enfoque propuesto en esta tesis aborda cada reto abierto partiendo de la premisa que al modelar la variabilidad espectral en la técnica de fusión de imágenes HS-MS es posible obtener una imagen de alta resolución espectral y espacial, mejorando la precisión de la calidad de la reconstrucción de la imagen o mejorar la precisión en la clasificación u otras tareas e inferencia realizadas sobre la imagen fusionada.

Las principales contribuciones de esta tesis son:

- Se desarrolló un estudio y análisis de los principales enfoques que abordan el problema de la variabilidad espectral en imágenes HS sobre la tarea de inferencia de desmezclado espectral [A2], área en la cual ha sido abordado este problema con el objetivo de analizarlo y poderlo llevar a la tarea de inferencia de fusión de imágenes HS-MS. Así mismo, se desarrolló una conferencia internacional donde se presentó un enfoque basado en la técnica de desmezclado espectral como herramienta de clasificación de enfermedades en cultivo de palma de aceite usando imágenes HS en Colombia [C1]. La conferencia [C1]

permitió obtener las bases para el desarrollo experimental con datos reales para el artículo [A1] y [A3]. Adicionalmente, se desarrolló el artículo [A3] que revisa y evalúa dos enfoques para analizar las plantaciones de palma de aceite a partir de datos de teledetección hiperespectral: desmezclado espectral lineal y variabilidad espectral. Además, se propuso un marco computacional basado en el desmezclado espectral para la estimación de los mapas de abundancias en escenas HS de cultivos de palma de aceite. Este enfoque también considera la variabilidad espectral de las firmas en las imágenes HS. El marco computacional propuesto modifica el MML mediante la introducción de un vector de pesos que permite identificar la influencia de la variabilidad espectral en cada banda, de manera que, se puedan identificar las bandas espectrales que menos contribuyen a la estimación de fracciones de abundancias erróneas. (objetivo específico 1 y objetivo específico 5).

- Un modelo matemático de fusión de imágenes MS e HS que incluye el problema de la variabilidad espectral. El modelo de fusión desarrollado considera simultáneamente la variabilidad espectral por escalado de las firmas espectrales (iluminación) y otra variación, como los efectos atmosféricos, la variabilidad intrínseca de los materiales debido a variaciones físico-químicas, y la mezcla espectral no lineal. Este modelo es implementado en un algoritmo de optimización basado en técnicas de fusión de imágenes HS-MS para reducir los efectos la variabilidad espectral abordando un enfoque de desmezclado espectral que tiene en cuenta la variabilidad espectral a través de un modelo de mezcla lineal aumentado. Una estrategia de optimización alterna se combina con el método de multiplicadores de dirección alterna para minimizar la función de costo subyacente del problema de fusión, logrando superar el comportamiento de los principales métodos de fusión del estado del arte [A1]. (Objetivos específicos 2,3,4, y 5).

- El modelo matemático y el algoritmo propuesto fueron implementados y evaluados respecto a algoritmos que abordan y no abordan la variabilidad espectral, usando datos adquiridos en el laboratorio y datos reales satelitales sobre escenas de cultivos agrícolas en Colombia [A3]. Las imágenes fusionadas sobre la cual fue evaluado el modelo y algoritmo propuestos provienen del sensor hiperespectral DESIS (*Earth Sensing Imaging Spectrometer*) ubicado en la estación internacional espacial (en inglés, *International Space Station [ISS]*) y el sensor multiespectral Sentinel-2. Los dos sensores satélites hacen parte de la Agencia Espacial Europea (ESA). Los datos de laboratorio fueron adquiridos en el laboratorio de óptica del grupo de investigación HDSP. (Objetivo específico 4 y objetivo específico 5).

1.4.1. Listado de Producción

1.4.2. Artículos en revistas internacionales

- [A1] **Camacho, A.**, Vargas, E. , and Arguello, H. (2022). Hyperspectral and multispectral image fusion addressing spectral variability by an augmented linear mixing model. *International Journal of Remote Sensing*, 43(5), 1577-1608.
- [A2] **Camacho, A.**, Correa, C. V., and Arguello, H. (2019). An analysis of spectral variability in hyperspectral imagery: a case study of stressed oil palm detection in Colombia. *International Journal of Remote Sensing*, 43(5), 1577-1608.

1.4.3. Artículos en revistas nacionales

- [A3] Vargas, H., **Camacho, A.**, and Arguello, H. (2019). Spectral unmixing approach in hyperspectral remote sensing: a tool for oil palm mapping. *Tecnológicas*, 22(45), 131-145.

1.4.4. Artículos en conferencias internacionales:

- [C1] **Camacho, A.**, Vargas, H. , and Arguello, H. (2018, Sep). Unmixing-based approach as a tool for classification of oil palm diseases using hyperspectral remote sensing in Colombia. In 2018 SPIE, Remote Sensing. Berlin, Germany.
- [C2] **Camacho, A.**, Vargas, H. , and Arguello, H. (2018, Sep). Smartphone-Based Application for Agricultural Remote Technical Assistance and Estimation of Visible Vegetation Index to Farmer in Colombia: AgroTIC. In 2018 SPIE, Remote Sensing. Berlin, Germany.

1.4.5. Otros aportes:

Participación Oral y Poster en Conferencia TOP:

- **Camacho, A.**, and Arguello, H. (2019, Jun). Smartphone-based application for the identification of diseases in crops using deep convolutional neural networks: AgroTIC + SMART, In Workshop on Computer Vision for Global Challenges in conjunction with the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Long Beach, California.

Propuestas de investigación aprobadas:

- **Camacho, A.** Líder científico del equipo Ganador del Concurso InNóvate 2020 Ecopetrol y Uniredcon la propuesta de investigación titulada "Deep Learning para clasificación automática de patrones sedimentológicos en fotografías de núcleos de roca". Santander, Colombia.
- **Camacho, A.** Planeación, desarrollo y viabilización de propuesta de investigación aprobada por el Sistema General de Regalías de Ciencia, Tecnología e Investigación (SGR-CTel) de Minciencias, titulada: "Desarrollo de un sistema

óptico computacional para estimar el contenido de carbono orgánico de suelos agrícolas a través de imágenes espectrales e inteligencia artificial en cultivos de cítricos de Santander”. BPIN 2020000100415. Santander, Colombia.

2. Marco Teórico : Variabilidad espectral en imágenes hiperespectrales

2.1. Imágenes espectrales

Una imagen espectral es un cubo de datos que es descrito matemáticamente a través de tres argumentos: dos que conforman la dimensión de su posición espacial y uno que define la dimensión espectral. Como se ilustra en la figura 2, el dato $X_{(i,j,\lambda)}$ corresponde a la respuesta del objeto adquirido en la posición espacial y la longitud de onda específica. La posición espacial es indexada usando los símbolos i y j con un total de IJ píxeles y la posición espectral es indexada usando el símbolo λ con un total de Λ bandas ³⁴. Entonces, una imagen HS se dice que tiene una resolución $I \times J \times \Lambda$. Convirtiendo los índices i y j en $n = J(i - 1) + j$ para ($1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J$), el cubo de datos se convierte en una matriz \mathbf{X} con dimensiones $IJ \times \Lambda$. Matemáticamente, la matriz de datos espectrales pueden ser expresada como:

$$\blacksquare \mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n \cdots \mathbf{x}_{IJ}]^T$$

Las imágenes espectrales se utilizan principalmente en aplicaciones, tales como, la fusión de imágenes espectrales, detección de objetivos, clasificación o identificación de objetos en función de sus características espectrales en áreas como minería,

³⁴ Dimitris Manolakis, David Marden y Gary a Shaw. "Hyperspectral Image Processing for Automatic Target Detection Applications". En: *Lincoln Laboratory Journal* 14.1 (2003), págs. 79-116.

caracterización de suelos, agricultura, monitoreo ambiental, entre otros ³⁵³⁶³⁷.

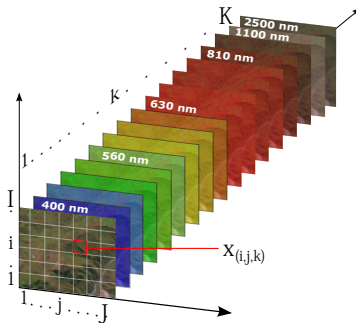


Figura 2. La imagen espectral adquiere información espacial I, J y espectral K , formando un hiperespacio (3D).

Resolución espacial: En los sensores ópticos de imagen, la resolución espacial generalmente está relacionada con el campo de visión (FOV) del sensor ³⁸, siendo el menor tamaño del área cubierta por un único píxel. Tradicionalmente, las imágenes RGB, multiespectrales y pancromáticas se caracterizan por tener una alta resolución espacial, sin embargo, su resolución espectral es baja. La Figura 3 muestra una escena adquirida satelitalmente representada en cuatro resoluciones espaciales diferentes.

³⁵ Pedram Ghamisi et al. "Advanced Spectral Classifiers for Hyperspectral Images: A review". En: *IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine* 5.1 (2017), págs. 8-32.

³⁶ Prasad S Thenkabail et al. "Selection of hyperspectral narrowbands (HNBS) and composition of hyperspectral twoband vegetation indices (HVIs) for biophysical characterization and discrimination of crop types using field reflectance and Hyperion / EO1 data". En: *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing* 6.2 (2013), págs. 427-439.

³⁷ José M Bioucas-dias et al. "Hyperspectral Remote Sensing Data Analysis and Future Challenges". En: *IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine* June (2013), págs. 6-36. DOI: 10.1109/MGRS.2013.2244672.

³⁸ David J Brady. *Optical imaging and spectroscopy*. John Wiley & Sons, 2009.

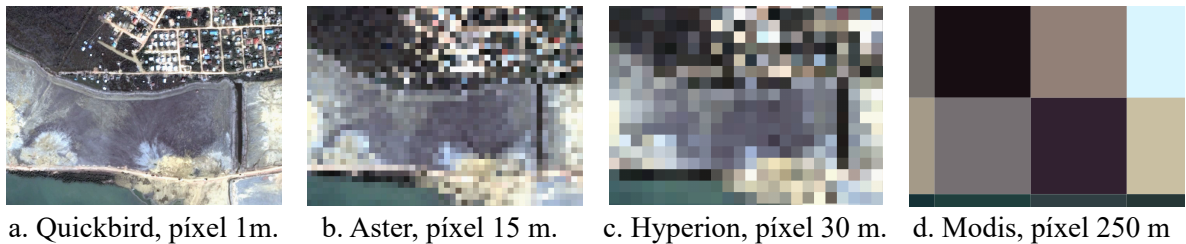


Figura 3. Imagen color natural remuesreada a diferentes resoluciones espaciales de cuatro sensores satelitales multispectrales e hiperespectrales. a.) Imagen original adquirida por el sensor multispectral Quickbird con una resolución espacial de 1 m cada píxel. b.) Sensor multispectral Aster con una resolución de 15m por píxel. c.) Sensor hiperespectral Hyperion con resolución espacial de 30m. d.) Imagen del sensor Modis, con una resolución de 250 m. Imagen original cortesía de Digital Globe, Inc.; imagen adquirida el 19 Sept 2002.

Resolución espectral: Es la capacidad de un sensor para responder a un rango de longitudes de onda específicas (bandas espectrales). Como se muestra en la Figura 4, los sensores se pueden clasificar como pancromáticos (PAN), visibles (RGB), multispectrales (MS), e hiperespectrales (HS). Los sensores PAN funcionan en una banda. Los sensores RGB adquieren información del espectro visible en solo tres bandas (rojo, verde y azul) en el rango de [400-700] nanómetros. Los sensores MS usan con frecuencia el rango espectral visible y el infrarrojo cercano (Vis-NIR), donde el detector se encuentra generalmente en el rango de [400-1000] nanómetros. Los sensores MS adquieren información en decenas de bandas, se caracterizan por tener una baja resolución espectral, sus bandas espectrales son discontinuas y de banda ancha (del inglés, *broadbands*). Sin embargo, los sensores MS se destacan por su alta resolución espacial. Los sensores HS tienen la capacidad de adquirir información con alta resolución espectral, en cientos de bandas contiguas (del inglés, *narrowbands*) sobre un rango del espectro electromagnético ³⁸. El principal reto de las HS es mejorar la baja resolución espacial.

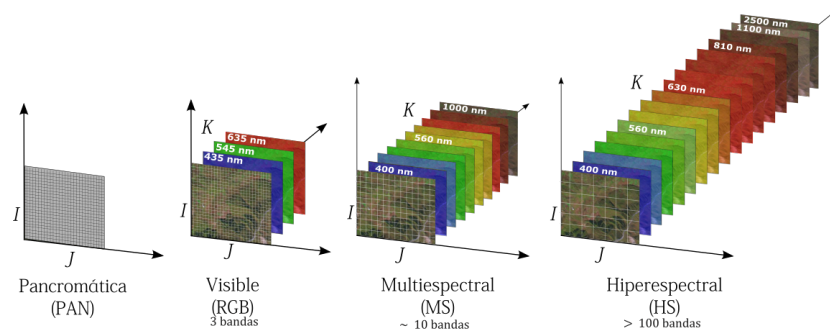


Figura 4. Clasificación de imágenes espectrales basada en la resolución espectral.

Teledetección Hiperespectral (TRH) Se ha definido como la medición, el análisis y la interpretación de imágenes con alta resolución espectral adquiridas a partir de una escena dada a corta, media o larga distancia por un sensor hiperespectral aéreo o satelital ³⁹. Los sensores aerotransportados miden la radiancia reflejada o emitida por los objetos de la superficie terrestre, cubriendo las bandas espectrales del VIS, infrarrojo cercano (NIR) e infrarrojo de onda corta (SWIR) [1000-2500] nanómetros. La Figura 5 ilustra un sistema de TRH, donde el sensor HS adquiere la energía solar reflejada por cada material presente en la escena espacial $(i; j)$, en diferentes longitudes de onda contiguas λ , creando un hipercubo. Dado que, cada píxel en una imagen HS se puede considerar como un vector $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_\lambda]^T$ que se comporta como una “*huella dactilar*” o firma espectral del material en un punto espacial de la imagen. La firma espectral se convierte en un elemento clave para los algoritmos de clasificación, detección de objetivos, desmezclado espectral y la fusión de HS-MS. Sin embargo, este trabajo de investigación estudia cuando esta firma espectral presenta variaciones por diferentes causas.

³⁹ Antonio Plaza et al. “Recent advances in techniques for hyperspectral image processing”. En: *Remote sensing of environment* 113 (2009), S110-S122.

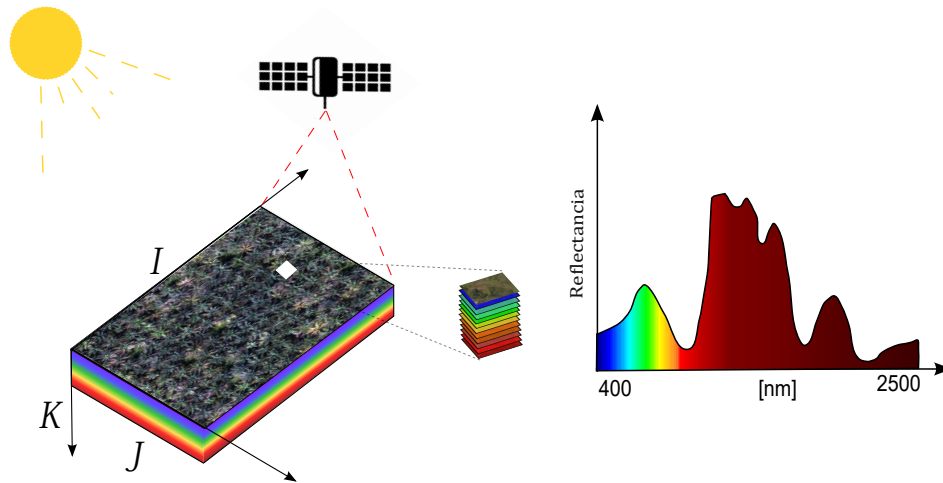


Figura 5. Concepto de sistema de teledetección hiperespectral.

2.2. Modelo de mezcla lineal (MML)

La mayor parte de los píxeles en los sensores hiperespectrales no siempre están constituidos por la presencia de un único material, sino que están formados por distintos materiales. Existen dos clases de píxeles en este tipo de imágenes: Los píxeles puros o firmas puras y los píxeles mezclados. Los píxeles puros representan la firma espectral de un único material y los píxeles mezclados son el resultado de la insuficiente resolución espacial del sensor el cual produce píxeles que son la combinación de la firma espectral de múltiple materiales ⁴⁰. El desmezclado espectral es una metodología que facilita el proceso de identificación y cuantificación de los materiales presentes en una escena espectral. Matemáticamente, de acuerdo al modelo de mezcla lineal, el píxel n en la escena puede ser descrito como la combinación lineal de firmas espectrales puras de la forma

⁴⁰ José M Bioucas-dias et al. "Hyperspectral Unmixing Overview : Geometrical , Statistical , and Sparse Regression-Based Approaches". En: 5.2 (2012), págs. 354-379.

$$\mathbf{x}_n = \sum_{p=1}^P \mathbf{m}_p a_{n(p)} = \mathbf{M} \mathbf{a}_n + \nu_n, \quad (1)$$

donde

- $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^{\lambda \times 1}$ es el píxel mezclado,
- $\mathbf{a}_n \in \mathbb{R}_+^{P \times 1}$ es un vector de pesos de las abundancia,
- $\mathbf{M} \in \mathbb{R}_+^{\lambda \times P}$ es la matriz de píxeles puros,
- $\nu_n \in \mathbb{R}^{\lambda \times 1}$ es el ruido del píxel mezclado,
- P es el número de píxeles puros,

En la ecuación (1), $\mathbf{M} = [\mathbf{m}_1 \cdots \mathbf{m}_p \cdots \mathbf{m}_P]$ corresponde a la matriz de píxeles puros (*endmembers*) ($\mathbf{m}_p \in \mathbb{R}_+^{\lambda \times 1}$), mientras que $\mathbf{a}_n = [a_{n(1)} \cdots a_{n(p)} \cdots a_{n(P)}]^T$ corresponde al vector de proporciones de abundancias. El ruido ν_n es asumido Gaussiano con $\mathbb{E}[\nu_n] = 0$ y $\mathbb{E}[\nu_n \nu_n^T] = \sigma^2 \mathbf{I}_\lambda$. Ahora, si concatenamos todos los píxeles en la matriz $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n \cdots \mathbf{x}_{IJ}]^T$, la ecuación (1) puede ser reescrita como:

$$\mathbf{X} = \mathbf{M} \mathbf{A}^T + \nu, \quad (2)$$

donde

- $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{IJ \times \Lambda}$
- $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{IJ}]^T \in \mathbb{R}^{IJ \times P}$
- $\nu = [+ \nu_1 \cdots \nu_{IJ}]^T \in \mathbb{R}^{IJ \times \Lambda}$

El número de píxeles puros P no es conocido y en esos casos debe estimarse primero. En general, $P \ll \Lambda$, donde Λ corresponde al número de bandas del sensor.

Así mismo, el MML debe cumplir con dos restricciones en el vector de abundancias. Debido a consideraciones físicas, 1) los coeficientes de abundancia deben satisfacer las restricción de no negatividad (ANC) $\mathbf{A} \succeq 0$ en (2) y la restricción de positividad (o suma-a-uno): $\mathbf{1}_{N_p}^\top \mathbf{A} = \mathbf{1}_{N_{xy}}^\top$, donde $\mathbf{1} \in \{1\}^{N_p \times 1}$ es un vector con todas las entradas igual a 1.

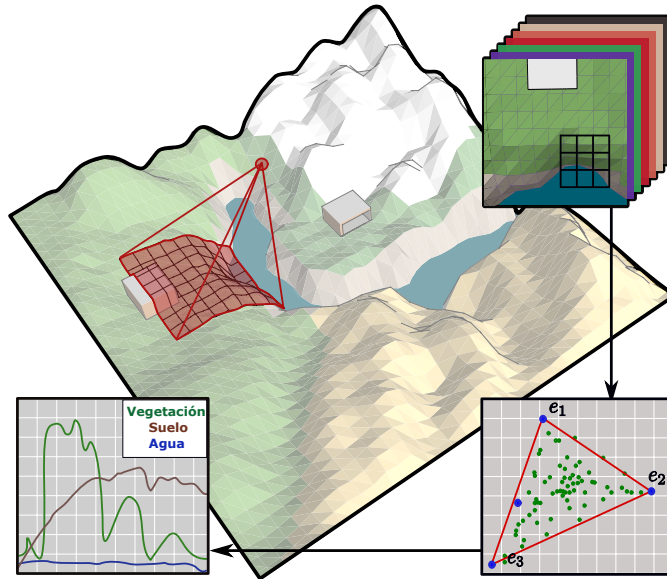


Figura 6. Representación gráfica de los conceptos de mezclado espectral, firmas mezcladas y firmas puras o (*endmembers*).

2.3. Variabilidad espectral

La firma espectral es información fundamental en las imágenes HS, dado que permite la identificación de materiales o la detección de objetos en una escena espectral, teniendo en cuenta que cada objeto presente en una HS posee teóricamente una firma única, que puede servir como una identificación espectral. Sin embargo, no existe un espectro único teóricamente perfecto para ningún material dado ³⁴. Las variaciones en la forma y la escala de las firmas espectrales de un mismo material en diferentes píxeles a lo largo de una imagen HS se conoce como variabilidad

espectral. En la práctica, las firmas espectrales observadas a partir de muestras del mismo material no son idénticas, incluso en experimentos de laboratorio bajo condiciones controladas. La Figura 7.a ilustra el concepto de una firma única para identificar un material frente al concepto de variabilidad espectral (7.b) en el que se observa variaciones en los espectros adquiridos.

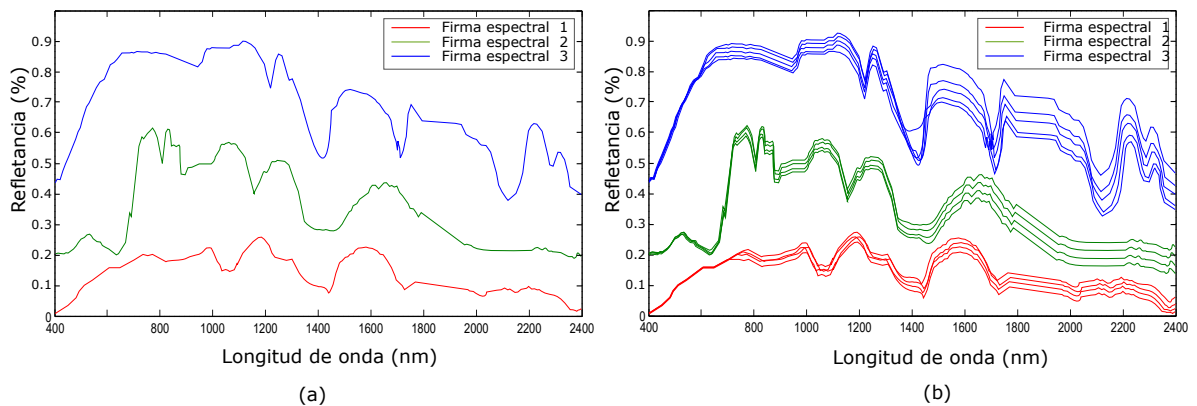


Figura 7. Concepto teórico de (a.) firma pura para identificar un material frente al concepto de (b.) múltiples firmas para identificar un mismo material debido al fenómeno de la variabilidad espectral.

2.3.1. Principales factores de variabilidad espectral La causa principal de la variabilidad espectral en la teledetección hiperespectral es la variación de la iluminación incidente, generada por diferentes factores como la topografía del terreno, la rugosidad de la superficie, la elevación solar, el azimut solar, el ángulo de incidencia local en el material y otros factores ²⁵²⁶⁴⁰ (ver Fig. 8.a-c). Otras causas relevantes de la variabilidad espectral incluyen las condiciones atmosféricas y climáticas. Específicamente, la presencia de gases atmosféricos como: vapor de agua, oxígeno, ozono, monóxido de carbono y dióxido de carbono presentan características de absorción más fuertes o características de dispersión en diferentes longitudes de onda a lo largo del espectro electromagnético que afectan las medidas espectrales ²⁶ (ver Fig. 8.b). Desde el punto de vista del sistema de adquisición o sensor, existen diferentes factores, como la baja resolución espacial de los sensores HS y la adquisición de

escenas de grandes superficies que pueden afectar que un mismo material varíe su firma espectral a lo largo de la escena ⁴¹. Además, el sensor también puede inducir ruido causando variabilidad espectral. En aplicaciones de geología y minería, los cambios en el tamaño de grano y los efectos de iluminación de textura deben considerarse en los minerales, dado que, son causas que generan alta variabilidad espectral ⁴². En las HS de áreas urbanas, las sombras son la fuente más importante de variabilidad, seguido de la alta diversidad de materiales con diferentes grados de desgaste por exposición directa al medio ambiente, por lo que la selección de firmas espectrales individuales es un proceso complejo generado por la variabilidad espectral ⁴³.

Dado que las escenas reales de interés a fusionar en esta tesis corresponden a imágenes HS de cultivos agrícolas, se debe mencionar que las imágenes HS de vegetación o cultivos agrícolas presentan alta variabilidad espectral ³¹. Las características espectrales de la vegetación varían debido a múltiples causas como: la altura, la densidad, el tipo de suelo y la nutrición; adicionalmente, existe una variabilidad intrínseca de las plantas, debido a la variación de parámetros ocultos, tales como, concentración de clorofila (C_{ab}), contenido de agua (C_w), contenido de materia seca (C_m), y diferencias dentro de la fenología de la especie y los cambios en la estructura interna de las hojas ³¹. Por otro lado, los parámetros biofísicos en el tiempo y fenológicos de los cultivos pueden contribuir a agravar el fenómeno de la

⁴¹ Abderrahim Halimi, Paul Honeine y Jose M Bioucas-Dias. "Hyperspectral unmixing in presence of endmember variability, nonlinearity, or mismodeling effects". En: *IEEE Transactions on Image Processing* 25.10 (2016), págs. 4565-4579.

⁴² Tatsumi Uezato et al. "A novel spectral unmixing method incorporating spectral variability within endmember classes". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 54.5 (2016), págs. 2812-2831.

⁴³ Bo Li et al. "Projection matrix design using prior information in compressive sensing". En: *Signal Processing* 135 (2017), págs. 36-47. DOI: 10.1016/j.sigpro.2016.11.024.

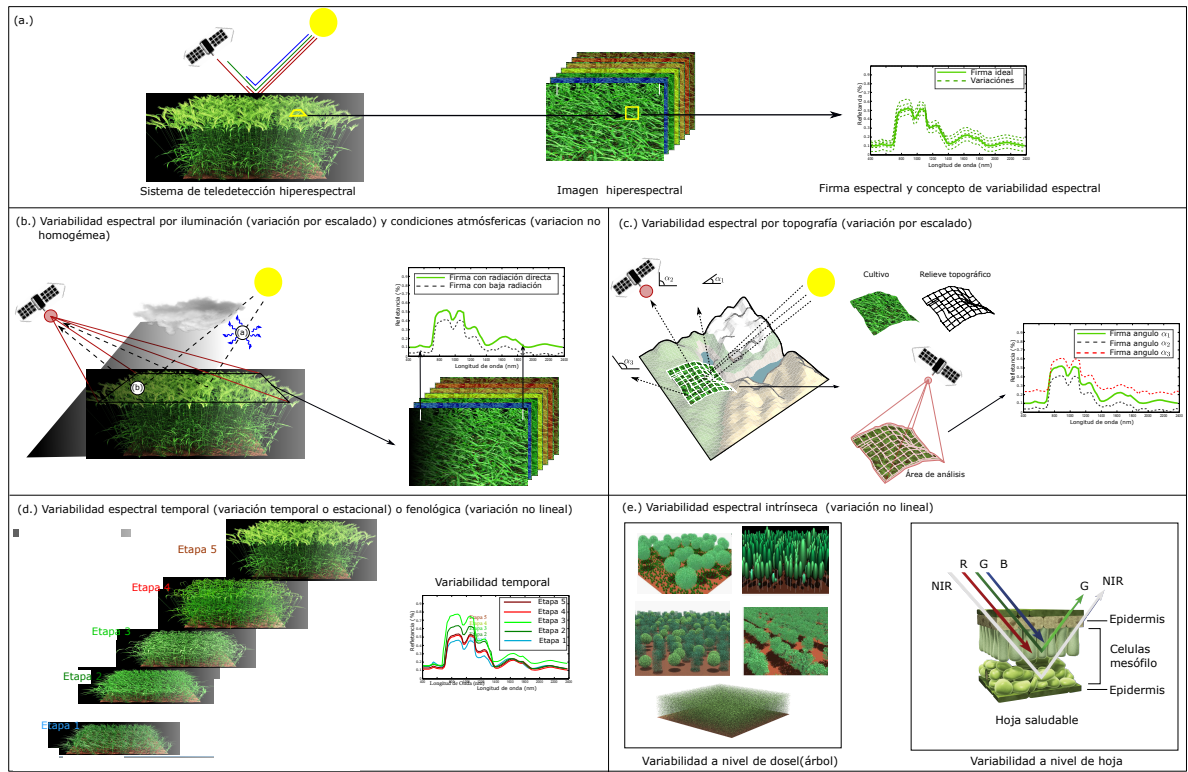


Figura 8. Causas principales de variabilidad espectral en el proceso de (a.) adquisición de HSI, tales como, (b.) variabilidad por iluminación (variación por escalado) y condiciones atmosféricas (variaciones no homogéneas), (c.) topografía del terreno (variación por escalado), (d.) temporal o estacional (variación temporal), y (e.) variabilidad intrínseca (variación no lineal).

variabilidad espectral (ver Fig. 8.d.-e.). Las variaciones en la estructura del dosel, el ángulo promedio de las hojas, el ángulo cenital solar y el índice del área foliar (IAF) representan desafíos importantes en la capacidad de identificar especies de plantas utilizando imágenes HS.

2.4. Fusión de imágenes MS-HS

La fusión de imágenes se puede describir como el proceso de combinar información de dos o más imágenes de una escena en una sola imagen compuesta, que es más informativa y más adecuada para la percepción visual o procesamiento por

computadora.

Fusión de datos HS y MS. En todos los métodos tradicionales para la adquisición de datos HS, debido a razones tecnológicas y físicas de los sensores, existe una compensación entre la resolución espectral y la espacial. En general, las imágenes HS se benefician de excelentes propiedades espectroscópicas con varios o cientos de miles de bandas espectrales contiguas, sin embargo, están limitadas por su resolución espacial relativamente baja ³. Los espectrómetros de imágenes a bordo de vehículos espaciales generalmente se diseñan para proporcionar datos con una distancia de muestreo de suelo [por ejemplo; 30 m]. En los últimos años, la fusión de datos HS con datos MS de mayor resolución espacial es uno de los problemas más abordados para mejorar la resolución espacial de las imágenes de HS. Con base en diferentes enfoques, tales como, la sustitución de componentes ⁸, el análisis de multi-resolución (MRA) ⁴⁴, la separación espectral o desmezclado espectral (*unmixing*) ⁹⁴⁵ y probabilidad bayesiana ⁴⁶, se han propuesto varias técnicas de fusión de datos HS-MS. En ⁶ se presenta una revisión comparativa de diversos algoritmos de fusión ⁶.

La Figura 9.a muestra las características principales de las imágenes HS que permiten la identificación y discriminación de materiales gracias a la alta resolución espectral o firma espectral de los materiales, sin embargo, su baja resolución espacial (e.j. 30 m) hace que la estimación de parámetros de la superficie a un nivel de

⁴⁴ B Aiazzi et al. "MTF-tailored multiscale fusion of high-resolution MS and Pan imagery". En: *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing* 72.5 (2006), págs. 591 -596.

⁴⁵ Claas Grohnfeldt, Xiaoxiang Zhu y Richard Bamler. "Jointly sparse fusion of hyperspectral and multispectral imagery." En: *IGARSS*. 2013, págs. 4090-4093.

⁴⁶ Michael T Eismann y Russell C Hardie. "Application of the stochastic mixing model to hyperspectral resolution enhancement". En: *IEEE transactions on geoscience and remote sensing* 42.9 (2004), págs. 1924-1933.

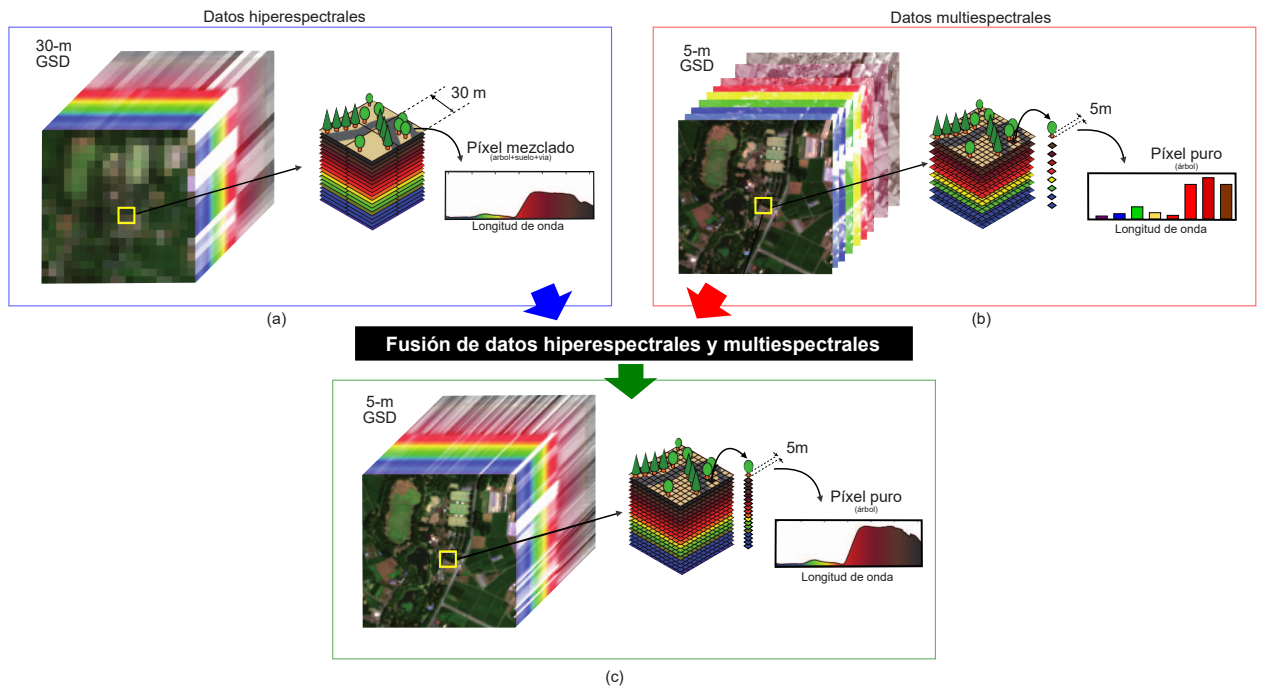


Figura 9. Técnica de fusión de imágenes HS-MS. fusionando (a) la información de alta resolución espectral y las capacidades correspondientes de identificación y discriminación de materiales en una imagen HS con (b) información de alta resolución espacial y los correspondientes métodos de análisis de datos en MS permite estimar una nueva imagen (c) y abre nuevas categorías de aplicaciones que involucran alta resolución espacial y espectral.

precisión alto se ve afectada por la alta mezcla de píxeles limitando el rango de potenciales aplicaciones. Por otro lado, las imágenes MS (ver Figura 9.b) gracias a su alta resolución espacial permiten mejorar nuestra comprensión de eventos naturales en aplicaciones, tales como, el seguimiento y la gestión de los recursos naturales, ecosistemas, biodiversidad, y desastres a un nivel limitado de clasificación impidiendo el uso de algoritmos no supervisados de identificación de objetivos por su baja resolución espectral.

Con el objetivo de superar las limitantes físicas y tecnológicas de los sensores HS y MS, la técnica de fusión de imágenes HS-MS permite generar una imagen HS de alta resolución espacial (ver Figura 9.c), facilitando nuevas aplicaciones a escala

global, que, hasta la fecha, sólo han sido posible localmente con imágenes aéreas de alta resolución espacial.

Matemáticamente, el problema de fusión de datos HS-MS consiste en estimar una HS de alta resolución espacial no observable que de ahora en adelante la denominaremos $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{N_\lambda \times N_{xy}}$, a partir de un imagen observable HS de alta resolución espectral $\mathbf{Y}_h \in \mathbb{R}^{N_\lambda \times N_{lxy}}$ con N_λ bandas espectrales y de baja resolución espacial con N_{lxy} píxeles, y una imagen observable MS de alta resolución espacial $\mathbf{Y}_m \in \mathbb{R}^{N_\lambda \times N_{xy}}$ y con baja resolución espectral con $N_{l\lambda}$ bandas y N_{xy} píxeles, donde $N_{l\lambda} < N_\lambda$ y $N_{lxy} < N_{xy}$.

3. Análisis de la variabilidad espectral en imágenes hiperespectrales

3.1. Introducción

Este capítulo está dividido en cuatro secciones: Sección 3.2 presenta una revisión detallada del estado del arte de diferentes algoritmos que abordan el problema de la variabilidad espectral en imágenes HS en la tarea de desmezclado espectral, incluyendo los enfoques que no consideran el fenómeno de la variabilidad espectral y los enfoques que tienen en cuenta la variabilidad espectral. Específicamente, los enfoques que modelan la variabilidad espectral incluyen métodos basados en conjuntos, modelos basados en distribuciones estadísticas y enfoques que incorporan la variabilidad en los modelos de desmezclado espectral (*unmixing*). La Sección 3.3 describe los cultivos de palma de aceite y su importancia en la agricultura, escena real usada para evaluar los métodos abordados en este capítulo, asimismo, presenta una revisión del estado del arte acerca del uso y aplicación de las imágenes HS en este tipo de cultivo de interés para Colombia. Para el análisis cualitativo y cuantitativo de los problemas derivados de la variabilidad espectral. En la Sección 3.4 se seleccionan cinco enfoques que abordan y no abordan la variabilidad espectral para ser evaluados con datos sintéticos y reales. Específicamente, se destaca la evaluación con datos reales, el análisis se realiza en un conjunto de datos hiperespectrales de cultivos de palma de aceite en Colombia. En particular, el objetivo de este capítulo es analizar la variabilidad espectral aplicando diferentes enfoques que abordan y no abordan la variabilidad espectral y evaluar su desempeño en la detección de palma de aceite enferma utilizando imágenes HS. Finalmente en la Sección 3.5 se muestran los resultados respecto a diferentes enfoques que abordan la variabilidad espectral, identificando tres clases en la imagen HS real: palma de aceite enferma, palma de aceite sana y fondo conformado por sombra y pasto, este conjunto de

datos permitió evaluar el desempeño de los diferentes enfoques de desmezclado espectral que abordan la variabilidad espectral en la tarea de estimación de mapas de abundancia para cada clase. En resumen, este capítulo presenta el análisis de los MML y diferentes enfoques incluyen o no la variabilidad espectral, con el objetivo de estudiar la detección de palma de aceite enferma en Colombia y la incidencia de variabilidad espectral en los resultados.

3.2. Enfoques de variabilidad espectral

Las causas de variabilidad enunciadas en la sección 2.3.1 han sido identificadas como una fuente de error relevante en el flujo del procesamiento y análisis de imágenes HS, generando un gran interés en la comunidad científica de imágenes HS. ²⁵²⁶⁴¹⁴²⁴⁷⁴⁸⁴⁹⁵⁰. Por ejemplo, en el análisis de los MML, los algoritmos de desmezclado espectral son responsables de estimar las abundancia de cada firma pura para una ubicación espacial específica. Sin embargo, los MML a menudo dan como resultado estimaciones erróneas o bajas precisiones en la estimación de las abundancias, debido a la influencia de la variabilidad espectral. En la última década, se han propuesto varios algoritmos en la literatura para describir y abordar la variabilidad espectral.

⁴⁷ R Heylen et al. "Hyperspectral Unmixing With Endmember Variability via Alternating Angle Minimization". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 54.8 (2016), págs. 4983-4993.

⁴⁸ Mingming Xu et al. "An Image-Based Endmember Bundle Extraction Algorithm Using Both Spatial and Spectral Information". En: 8.6 (2015), págs. 2607-2617.

⁴⁹ Pierre Antoine Thouvenin, Nicolas Dobigeon y Jean Yves Tournet. "Hyperspectral unmixing with spectral variability using a perturbed linear mixing model". En: *IEEE Transactions on Signal Processing* 64.2 (2016), págs. 525-538.

⁵⁰ Omid Ghaffari, Mohammad Javad Valadan Zoej y Mehdi Mokhtarzade. "Reducing the effect of the endmembers' spectral variability by selecting the optimal spectral bands". En: *Remote Sensing* 9.9 (2017), pág. 884.

Estos algoritmos se pueden agrupar en tres enfoques ²⁵²⁶⁴⁷⁴⁹: 1) variabilidad espectral basada en conjuntos, donde las variaciones de las firmas espectrales se ven como conjuntos de características; 2) métodos donde la variabilidad se incluye en los MML, y 3) enfoques que modelan la variabilidad espectral como distribuciones estadísticas. Las revisiones del estado del arte en ²⁵ y ²⁶ han documentado varios enfoques para tener en cuenta la variabilidad espectral. En este capítulo se amplían dichas revisiones y se describen los algoritmos más relevantes para el tratamiento de la variabilidad espectral en la tarea de desmezclado espectral de imágenes HS. La Figura 10 ilustra los tres grupos de enfoques que abordan la variabilidad espectral y que serán ampliados a continuación.

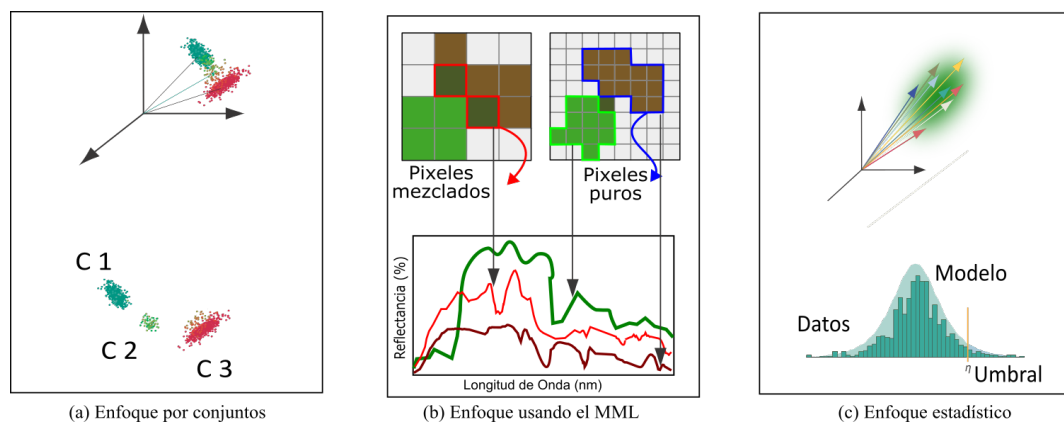


Figura 10. Enfoques que abordan la variabilidad espectral. a. Enfoques por conjunto, b. enfoques basado en el MML, y c. enfoques bayesianos

3.2.1. Variabilidad espectral basada en conjuntos ("bundles") El primer tipo de enfoques de variabilidad espectral considera las firmas espectrales como conjuntos, donde cada píxel se modela como una combinación convexa de una o más representaciones de diferentes conjuntos de firmas espectrales. Este enfoque ha sido nombrado por la literatura como paquetes o en inglés es conocido como *bundle*, donde múltiples espectros pueden describir la variabilidad de una firma espectral

dentro de un conjunto (Fig. 11.a). Formalmente, el concepto se introdujo en ⁵¹, donde un *bundle* es un paquete de firmas con características muy similares. Un paquete espectral dado se puede expresar como

$$D_i = \{\tilde{e}_{i,n}\}_{n=1}^N, \quad (3)$$

donde N es el número de firmas espectrales y $\tilde{e}_{i,n}$ es el conjunto (*bundle*) de N firmas espectrales indexadas por n , que explica la variabilidad espectral en cada firma pura o *endmember* e_i . Por ejemplo, el algoritmo MESMA (del inglés *multiple endmember spectral mixture analysis algorithm*) es un ejemplo de los enfoques basados en conjuntos. MESMA utiliza un conjunto de firmas puras seleccionadas dinámicamente de una biblioteca espectral que contiene cientos de espectros de referencia (Fig. 11.c). MESMA puede seleccionar múltiples firmas puras en la escena para encontrar una firma espectral óptima que permita realizar el proceso de desmezclado espectral ⁵². Sin embargo, cuanto mayor sea el número de materiales de cobertura terrestre de interés, mayor será el número de combinaciones como modelos candidatos, lo que se traduce en altos costos computacionales. Recientemente, se han propuesto múltiples métodos para reducir el número de posibles modelos candidatos, desde tomar la firma espectral media de un conjunto de firmas espectrales puras similares (Fig. 11.b). Por ejemplo, ⁵³ propuso detener las evaluaciones cuando la diferencia entre los modelos candidatos sea menor que un umbral pre-

⁵¹ C Ann Bateson, Gregory P Asner y Carol A Wessman. "Endmember bundles: A new approach to incorporating endmember variability into spectral mixture analysis". En: *IEEE transactions on geoscience and remote sensing* 38.2 (2000), págs. 1083 -1094.

⁵² Fen Chen, Ke Wang y Ting Feng Tang. "Spectral Unmixing Using a Sparse Multiple-endmember Spectral and Mixture Model". En: 54.10 (2016), págs. 1-16.

⁵³ Luca Demarchi et al. "Multiple endmember unmixing of CHRIS/Proba imagery for mapping impervious surfaces in urban and suburban environments". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 50.9 (2012), págs. 3409-3424.

definido. Por otro lado, ⁵⁴ y ⁵⁵ utilizan evaluaciones aleatorias con un número fijo de iteraciones de todo el conjunto de modelos candidatos.

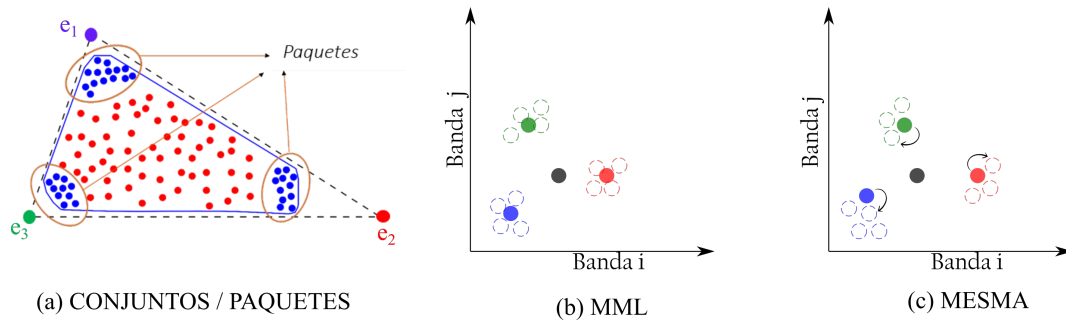


Figura 11. Modelos de variabilidad espectral mediante el uso de múltiples firmas espectrales. a. conjunto o paquetes, b. firma media de múltiples firmas espectrales para aplicar el MML, y c. MESMA

3.2.2. Modelo de mezcla lineal perturbada - PLMM (del inglés *Perturbed linear mixing model*)

Este enfoque introduce un nuevo MML que explica explícitamente las variabilidades espaciales y espectrales ³², a través de un término de perturbación aditivo para cada firma espectral pura \mathbf{m}_i por un vector de perturbación δ_n teniendo en cuenta la variabilidad en cada firma espectral pura. PLMM se puede escribir como

$$\mathbf{x}_n = (\mathbf{M} + \delta_n)\mathbf{a}_n + \nu_n, \quad (4)$$

donde δ_n denota la perturbación en la n -ésima columna de la matriz de firmas es-

⁵⁴ Marian-Daniel Iordache et al. "A dynamic unmixing framework for plant production system monitoring". En: *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing* 7.6 (2014), págs. 2016-2034.

⁵⁵ Laurent Tits, Ben Somers y Pol Coppin. "The potential and limitations of a clustering approach for the improved efficiency of multiple endmember spectral mixture analysis in plant production system monitoring". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 50.6 (2012), págs. 2273-2286.

pectrales puras \mathbf{M} en el n -ésimo píxel, y \mathbf{a}_n es el vector de valores de abundancia en el n -ésimo píxel. Sin embargo, el modelo PLMM no considera importantes variabilidades espectrales relacionadas con factores de escalado, como la variación por condiciones de iluminación, siendo la iluminación una de las principales causas de variabilidad espectral en imágenes HS.

3.2.3. Modelo de mezcla lineal extendido - ELMM (del inglés *Extended linear mixing model (ELMM)*)

El ELMM modela la variabilidad espectral causada por variaciones en la iluminación como factores de escala multiplicativos y reduce sus efectos³¹⁵⁶. Cada píxel es modelado como

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{M}\Psi_n\mathbf{a}_n + \nu_n, \quad (5)$$

donde $\Psi_n = \text{diag}(\psi_{1,n}, \dots, \psi_{K,n})$ es una matriz diagonal de pesos que denota el factor de escala y define cómo una firma determinada varía a lo largo de una imagen HS. Cada coeficiente $\psi_{k,n}$ escala el total del espectro de la firma espectral pura \mathbf{m}_i en el píxel n . Sin embargo, ELMM tiene leves deficiencias para modelar otras variabilidades espectrales. Por ejemplo, efectos atmosféricos o mezcla espectral no lineal, puesto que, solo tiene en cuenta los factores que tiene una relación directa con el escalado de las firmas espectrales puras.

3.2.4. Modelo de mezcla lineal aumentado - ALMM (del inglés *Augmented linear mixing model*)

Para abordar las limitaciones de los modelos ELMM y PLMM, el autor Hong en³³ desarrolló el algoritmo ALMM que modela simultáneamente los factores de escala y otras variabilidades espectrales. Este modelo viene dado por

⁵⁶ Miguel Angel Veganzones et al. "A new extended linear mixing model to address spectral variability". En: *IEEE workshop on hyperspectral image and signal processing: evolution in remote sensing (WHISPERS 2014)*. 2014, n-c.

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{M}\Psi_n \mathbf{a}_n + \Theta_n \Omega_n + \nu_n, \quad (6)$$

donde $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ denota la matriz de variabilidad espectral, $\Omega_n = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ es la matriz de coeficientes correspondientemente a Θ . A diferencia de los algoritmos de ELMM y PLMM, el algoritmo ALMM modela factores de escalado, que representan la firma espectral del diccionario de firmas espectrales puras Ψ y también variabilidades espectrales que no se pueden explicar mediante procesos de escalado, estas otras variabilidades se presentan en un diccionario adicional $\Theta\Omega$.

3.2.5. Modelos bayesianos NCM y BCM (del inglés *Normal composition model and beta compositional model*)

La variabilidad espectral se puede modelar siguiendo una distribución estadística multivariante, donde cada firma espectral está representada por una distribución estadística y cada muestra es una posible variación de la firma espectral pura del material.²⁶ Para tener en cuenta la variabilidad espectral, diferentes enfoques estadísticos han utilizado estimadores bayesianos⁵⁷,⁵⁸. Una propiedad importante de los métodos bayesianos es que una distribución estadística puede considerar la incertidumbre de las proporciones de abundancia, inducida probablemente por problemas de variabilidad. Si existen disponibles varias firmas espectrales dentro de una clase de una firma espectral pura en particular, esta información se puede utilizar para estimar los parámetros (por ejemplo, matriz de covarianza y media) que representan la distribución estadística de esta clase que corresponde a la firma espectral pura⁴². Los modelos más usados en el estado del arte de este tipo son el NCM (del inglés *normal composition model*) y el modelo

⁵⁷ Nicolas Dobigeon et al. "Joint Bayesian endmember extraction and linear unmixing for hyperspectral imagery". En: *IEEE Transactions on Signal Processing* 57.11 (2009), págs. 4355-4368.

⁵⁸ Alina Zare y Paul Gader. "PCE: piecewise convex endmember detection". En: *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 48.6 (2010), págs. 2620 -2632. DOI: 10.1109/TGRS.2010.2041062.

BCM (del inglés *beta compositional model*).

En el NCM ⁵⁹⁶⁰ las firmas espectrales puras se representan mediante distribuciones gaussianas multivariadas en las que un píxel se puede escribir como:

$$\mathbf{x}_n | \mathbf{M}_n, \mathbf{a}_n \sim N(\cdot | \sum_{i=1}^P \mathbf{a}_{i,n} \mu_i, \sum_{i=1}^P \mathbf{a}_{i,n}^2 \Sigma_i), \quad (7)$$

donde \mathbf{x}_n es el vector representado en el n -ésimo píxel, μ_i y Σ_i son respectivamente la media y el vector de varianza de la distribución gaussiana para la i -ésima firma espectral pura. ⁶¹ introdujo el enfoque de desmezclado espectral PM-LDA (del inglés *partial membership latent dirichlet allocation*) para estimar todas las distribuciones de cada firma espectral pura y sus valores de abundancia bajo el NCM mientras se aprovecha la información espacial. Sin embargo, los métodos basados en NCM implican firmas espectrales físicamente poco realistas. Por otro lado, el BCM representa el rango de cada firma espectral en el intervalo [0,1], que es un rango físicamente realista, debido a que los valores de reflectancia de los espectros se encuentran en este intervalo ⁶².

3.2.6. Algoritmo de descenso coordinado para no linealidades (NL), variabilidad de firma puras o *endmembers* (EV) y efectos de errores en el modelado (

⁵⁹ Olivier Eches et al. "Bayesian estimation of linear mixtures using the normal compositional model. Application to hyperspectral imagery". En: *IEEE Transactions on Image Processing* 19.6 (2010), págs. 1403-1413.

⁶⁰ David Stein. "Application of the normal compositional model to the analysis of hyperspectral imagery". En: (2003), págs. 44-51.

⁶¹ Sheng Zou y Alina Zare. "Hyperspectral unmixing with endmember variability using partial membership latent dirichlet allocation". En: *ICASSP* (2017), págs. 6200-6204.

⁶² Xiaoxiao Du et al. "Spatial and spectral unmixing using the beta compositional model". En: *IEEE J. Sel. Topics. Appl. Earth Observ.* 7.6 (2014), págs. 1994-2003. DOI: 10.1109/JSTARS.2014.2330347.

***mismodelling* - ME)** Este enfoque presenta tres modelos de desmezclado hiperespectral, dos de los cuales incluyen variabilidad espectral. Con base en el modelo de análisis de componentes residuales, la formulación general propuesta en ⁴¹ asume que el modelo lineal está alterado por un término aditivo, cuya expresión puede adaptarse para tener en cuenta los siguientes tres aspectos: 1) no linealidades (NLs), 2) variabilidad de firmas espectrales puras o *endmembers* (EV), y 3) efectos por errores en el modelado (MEs, del inglés *mismodelling*). Estos autores proponen el algoritmo de descenso de coordinado para errores por modelado (CDA-ME) como el algoritmo más robusto para modelar dos de los tres aspectos planteados (variabilidad de firmas espectrales puras y modelar las variaciones espectrales generadas por errores en el modelado o *mismodelling*). El algoritmo CDA-ME considera que la firma espectral cambia en su forma y escalado mientras se impone una variación espectral/espacial suave. Adicionalmente, este modelo incluye un parámetro de iluminación que representa la principal variación por escalado en las imágenes HS, CDA-ME viene dado por:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{c}_n \mathbf{M} \mathbf{a}_n + \Phi_n^{\text{ME}} \mathbf{a}_n + \nu_n, \quad (8)$$

donde \mathbf{c}_n es el vector que representa la variabilidad generada por la iluminación, Φ_n^{ME} es un término residual que tiene en cuenta de los efectos por errores en el modelado (*mismodelling*) que pueden depender de las firmas espectrales puras o de las abundancias. Además, CDA-ME puede captar los efectos de NL y EV en presencia de vegetación, relieve del terreno o múltiples componentes físicos. El modelo CDA-ME, además de tratar los errores en el modelado *mismodelling*, también tiene en cuenta otros efectos de variabilidad, confirmando su robustez para manejar diferentes variabilidades inducidas por NL, EV y ME. ⁴¹ dentro de la tarea de desmezclado espectral de imágenes HS.

3.2.7. Observaciones sobre modelos de variabilidad espectral En resumen en la tarea de desmezclado espectral de imágenes HS, algunos autores modelan la variabilidad espectral a través de parámetros multiplicativos o variables escaladas que modulan la matriz de firma espectrales puras. Otros autores modifican la firma espectral de forma aditiva, modelando la variabilidad espectral como un valor que se suma a la matriz de firmas puras. Por otro lado, algunos autores consideran que la variabilidad espectral no es uniforme para todas las bandas espectrales y la modelan mediante un vector de pesos independientes para cada longitud de onda o banda espectral. Sin embargo, el trabajo en ⁴¹ es uno de los primeros enfoques en unir diferentes enfoques para generar un modelo robusto para la tarea de desmezclado espectral para diferentes causas de variabilidad. Específicamente, CDA-ME ha logrado modelar la variabilidad integrando las variaciones en forma y escalado de las firmas espectrales, además ha permitido modelar la presencia de valores atípicos, variaciones de iluminación e incluye una función de suavizado para reducir el impacto de altas variaciones.

3.3. Imágenes hiperespectrales en cultivos de palma de aceite

El cultivo de palma de aceite (*Elaeis guineensis*) es uno de los cultivos extensivos más importantes del sudeste asiático, especialmente en Indonesia, Malasia y Tailandia ⁶³. En América, Colombia lidera la producción de palma de aceite con 590188 hectáreas en 2020 ⁶⁴. La palma aceitera se ha convertido en una fuente cada vez más importante de aceite vegetal, superando la producción de aceite de soja y girasol.

⁶³ Khai Loong Chong et al. "A review of remote sensing applications for oil palm studies". En: *Geospatial Information Science* 20.2 (2017), págs. 184-200.

⁶⁴ Federación Nacional de Cultivadores de Palma de Aceite (Fedepalma). "Balance 2020 y perspectivas de la agroindustria de palma de aceite". En: (2020).

La palma aceitera es un cultivo arbóreo perenne categorizado como monocultivo, típicamente sembrado en grandes extensiones (cientos de hectáreas), por lo que las técnicas de teledetección han ganado relevancia en este manejo agronómico. Por ejemplo, el diagnóstico, manejo y control de enfermedades en los cultivos de palma de aceite requiere altos recursos de tiempo y es complejo cuando es necesario realizar inspecciones visuales de los síntomas. Además, para los casos en los que se realizan análisis químicos de tejido de raíz o tallo, se convierten en procesos altamente costosos e invasivos. Se han aplicado diferentes técnicas de teledetección, como el uso de imágenes multispectrales (≤ 10 bandas espectrales) para la detección de árboles de palma de aceite. En ⁶⁵ y ⁶⁶, se desarrolló un método de detección y re-conteo de árboles de palma de aceite utilizando imágenes satelitales multispectrales de alta resolución espacial; ⁶⁷ propuso un método para determinar la edad de la palma de aceite a través de imágenes multispectrales usando el sensor satelital *World-View-2*. Por otro lado, el uso de imágenes hiperespectrales debido a su gran potencial para adquirir información espectral contigua y estrecha ($\gg 100$ bandas espectrales) ha ganado gran importancia en el manejo de la producción de los cultivos de palma de aceite ⁶⁸, incluyendo la identificación de enfermedades y

⁶⁵ Panu Srestasathiern y Preesan Rakwatin. "Oil palm tree detection with high resolution multispectral satellite imagery". En: *Remote Sensing* 6.10 (2014), págs. 9749 -9774.

⁶⁶ Heri Santoso, Hiroshi Tani y Xiufeng Wang. "A simple method for detection and counting of oil palm trees using high-resolution multispectral satellite imagery". En: *International journal of remote sensing* 37.21 (2016), págs. 5122-5134.

⁶⁷ Abel Chemura, Iris van Duren y Louise M van Leeuwen. "Determination of the age of oil palm from crown projection area detected from WorldView-2 multispectral remote sensing data: The case of Ejisu-Juaben district, Ghana". En: *ISPRS journal of photogrammetry and remote sensing* 100 (2015), págs. 118-127.

⁶⁸ Kamaruzaman Jusoff y Mubeena Pathan. "Mapping of individual oil palm trees using airborne hyperspectral sensing: an overview". En: *Applied Physics Research* 1.1 (2009), pág. 15.

diagnóstico de infección. Actualmente, las plantaciones de palma de aceite en el sudeste asiático enfrentan problemas asociados con la infección por la enfermedad de Ganoderma, que es el nombre común de la pudrición del tallo basal (BSR) inducida por un hongo perteneciente al género *Ganoderma* ⁶⁹. En América, la pudrición de cogollo (PC) de la palma de aceite es responsable de la destrucción de plantaciones enteras en Panamá, Colombia, Surinam, Brasil y Ecuador ⁷⁰. Específicamente, las implicaciones agrícolas y económicas de estos brotes han sido significativas en Colombia, donde las recientes epidemias de PC han destruido más de 70000 hectáreas de cultivos de palma de aceite en las regiones occidental y central productoras de palma aceitera ⁷¹.

La teledetección hiperespectral tiene el potencial de proporcionar información cuantitativa sobre la cobertura espacial, la composición de especies y el estado fisicoquímico de diferentes vegetaciones y cultivos ³⁶⁷²⁷³. El uso de imágenes HS en cultivo de palma de aceite ha sido estudiado en varios trabajos, principalmente para la detección de enfermedades. Por ejemplo, ⁶⁹ estudió la calibración de un modelo estadístico de discriminación entre varias etapas del ataque de *Ganoderma* en pal-

⁶⁹ Camille CD Lelong et al. "Evaluation of oil-palm fungal disease infestation with canopy hyperspectral reflectance data". En: *Sensors* 10.1 (2010), págs. 734-747.

⁷⁰ André Drenth, Gabriel Andrés Torres y Gerardo Martínez López. "Phytophthora palmivora, la causa de la Pudrición del cogollo en la palma de aceite". En: *Revista Palmas* 34 (2013), págs. 87-94.

⁷¹ GA Torres et al. "Bud rot caused by *Phytophthora palmivora*: a destructive emerging disease of oil palm". En: *Phytopathology* 106.4 (2016), págs. 320-329.

⁷² Ariolfo Camacho Velasco, César Augusto Vargas García y Henry Arguello Fuentes. "A comparative study of target detection algorithms in hyperspectral imagery applied to agricultural crops in Colombia". En: *Tecnura* 20.49 (2016), págs. 86-99.

⁷³ Ben Somers et al. "A weighted linear spectral mixture analysis approach to address endmember variability in agricultural production systems". En: *International Journal of Remote Sensing* 30.1 (2009), págs. 139-147.

mas de aceite, basado en mediciones hiperespectrales de campo a escala de árbol. En ⁷⁴, se reveló que las técnicas de teledetección hiperespectral tienen potencial para detectar el estrés nutricional de la palma de aceite. En ⁷⁵, se utilizaron imágenes HS para mapear la infección de enfermedades en plantaciones de palma de aceite utilizando índices de vegetación y aplicando el índice de vegetación del borde rojo (≈ 700) nm. Por otro lado, ⁷⁶ se centró en la posibilidad de detección temprana de la enfermedad de la pudrición del tallo basal (BSR) causada por *Ganoderma* utilizando un índice de eliminación continuo en espectros medidos por reflectancia, y en ⁷⁷, el sensor hiperespectral aerotransportado (AISA) se utilizó para detectar y mapear tres niveles de gravedad de la pudrición del tallo basal en plantaciones de palma de aceitera utilizando cinco índices de vegetación espectrales.

Dada la importancia del cultivo de palma de aceite, específicamente en Colombia, y las ventajas de las imágenes hiperespectrales, este capítulo hace uso de un conjunto de datos de una plantación o cultivo de palma aceite adquiridos a través de la teledetección aérea hiperespectral en Colombia.

⁷⁴ Muhammad Rendana et al. "A Review of Methods for Detecting Nutrient Stress of Oil Palm in Malaysia". En: *J. Appl. Environ. Biol. Sci* 5.6 (2015), págs. 60-64.

⁷⁵ Helmi ZM Shafri y Nasrulhapiza Hamdan. "Hyperspectral imagery for mapping disease infection in oil palm plantation using vegetation indices and red edge techniques". En: *American Journal of Applied Sciences* 6.6 (2009), pág. 1031.

⁷⁶ N MN Maris et al. "Hyperspectral sensing possibilities using continuum removal index in early detection of *Ganoderma* in oil palm plantation". En: August 2010 (2010), págs. 233-239.

⁷⁷ Mohamad Anuar Izzuddin et al. "Spectral based analysis of airborne hyperspectral remote sensing image for detection of *Ganoderma* disease in oil palm". En: *Proceedings of*. 2015, págs. 1-3.

3.4. Variabilidad espectral en la técnica de desmezclado espectral de imágenes HS

3.4.1. Conjunto de datos sintéticos En este capítulo, se simularon varias imágenes HS con diferentes niveles de relación señal/ruido (SNR = 15, 20, 25, 30, 35 dB) utilizando tres firmas espectrales de la biblioteca espectral ASTER ⁷⁸, como se muestra en Fig. 12. Para introducir el efecto de variabilidad espectral en los datos sintéticos, se generó un conjunto de firmas puras considerando el modelo en (8), incluyendo el coeficiente de iluminación c_n que explica la principal variación espectral en imágenes HS. El coeficiente de iluminación aumenta linealmente desde la izquierda de la imagen hacia la derecha en el intervalo 0,9 a 1,15. Por lo tanto, la imagen estará compuesta por tres conjuntos de firmas puras. Para generar las abundancias se utilizó una distribución de *Dirichlet*, cuyos parámetros se seleccionan aleatoriamente en el intervalo [1, 20]. Una distribución de *Dirichlet* se define solo sobre valores no negativos, satisfaciendo la restricción de positividad (o suma-a-uno): $a_{(n,n_e)} \geq 0, \forall n_e = 1$, generalmente empleada para reflejar las consideraciones físicas necesarias para la estimación de abundancias. La imagen generada tiene 2500 puntos de datos y $B = 222$ bandas espectrales.

⁷⁸ AM Baldrige et al. "The ASTER spectral library version 2.0". En: *Remote Sensing of Environment* 113.4 (2009), págs. 711-715.

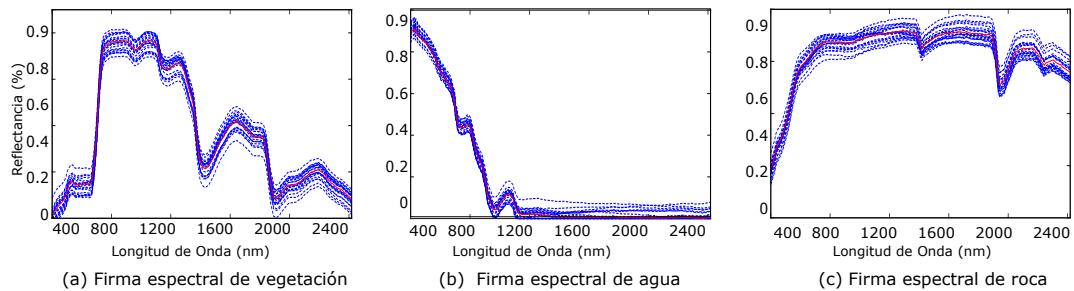


Figura 12. Firmas espectrales de la biblioteca Aster (línea continua roja) utilizadas para crear la imagen HS e inducir el efecto de variabilidad espectral (línea discontinua azul).

3.4.2. Conjunto de datos reales de imágenes HS adquiridas de cultivos de palma de aceite en Colombia

Las imágenes HS fueron registradas y suministradas por la empresa colombiana *Quimbaya Aerial Services*. Estas imágenes fueron adquiridas en el rango Visible e Infrarojo cercano (VNIR) usando un sensor HS HySpex VNIR-1600 (Norsk Elektro Optikk AS, Noruega), sobre cultivos de palma de aceite en la región sureste de Colombia, en 2017. El área de estudio es un cultivo de palma de aceite de 130 hectáreas, la imagen HS se adquirió a través de nueve líneas de vuelo a una altitud de vuelo de 430 m. El conjunto de datos considerado tiene una resolución espacial de $0,6 \text{ m} \times 0,6 \text{ m}$, resolución espectral de 3,7 nm en el rango espectral 415 - 990 nm. Las dimensiones espaciales del hipercubo son 299×294 píxeles y 160 bandas espectrales. Un mapa en RGB de esta imagen se muestra en la Fig. 13 con una combinación de bandas de color verdadero de 56 (rojo), 42 (verde) y 13 (azul). Además, se ilustran los tres componentes principales de la escena, destacando la variabilidad espectral en cada componente así: palma de aceite enferma, palma de aceite sana y fondo (pasto y sombra). La enfermedad más prevalente en el cultivo que forma parte del escenario es la pudrición de cogoyo (PC), la edad del cultivo de palmas de aceite presente en la escena es de siete años después de la siembra. Se realizó una verificación en el terreno para registrar la ubicación de la

palma de aceite enferma con PC en el área de estudio, lo que permitió la creación de un mapa de verdad de terreno. La Figura 14 ilustra la verificación en campo que se realizó tomando puntos de control con un GPS sub-métrico. El mapa de verdad de terreno servirá para evaluar el rendimiento de los algoritmos de desmezclado espectral que abordan y no abordan la variabilidad espectral en la tarea de identificar las palmas de aceite enfermas. A continuación se amplían detalles que permitieron utilizar la información espectral (firmas espectrales) para la creación de los mapa de verdad de terreno: Para determinar la firma espectral asignada a una clase (palma de aceite sana, palma de aceite enferma o fondo (pasto y sobra) se realizó en tres pasos. 1.) Mediante una visita a campo se identificaron los árboles sanos y enfermos y se adquirió su ubicación geográfica mediante el apoyo de un GPS sub-métrico (ver Figura 14, 2.) Con la imagen HS de la escena se procedió a la identificación visual de las plantas que fueron tomadas de referencia en campo, esto permitió, por ejemplo, identificar las palmas enfermas y sus correspondientes píxeles, con los píxeles identificados se procedió a extraer la firmas espectrales de la imagen HS, 3.) La firma espectral de cada clase fue usada como entrada para identificar los píxeles similares a cada clase. El algoritmo usado para la identificación de los píxeles consiste en medir la distancia del ángulo espectral entre dos firmas, la firma de referencia y la firma a evaluar, con esto se obtiene un mapa de verdad de terreno por cada clase. Esta metodología permitió explotar la información espectral de cada clase y ser validada contra los datos tomados en campo, garantizando que es posible separar los píxeles entre las clases, inclusive a nivel de una hoja de palma.

3.4.3. Métodos de desmezclado espectral para el análisis de variabilidad espectral y comparación de resultados. Para analizar los diferentes algoritmos propuestos en el estado del arte que abordan el problema de la variabilidad espectral en la tarea de desmezclado espectral, se seleccionaron cinco métodos que considera la variabilidad espectral y se compararon con dos métodos clásicos de

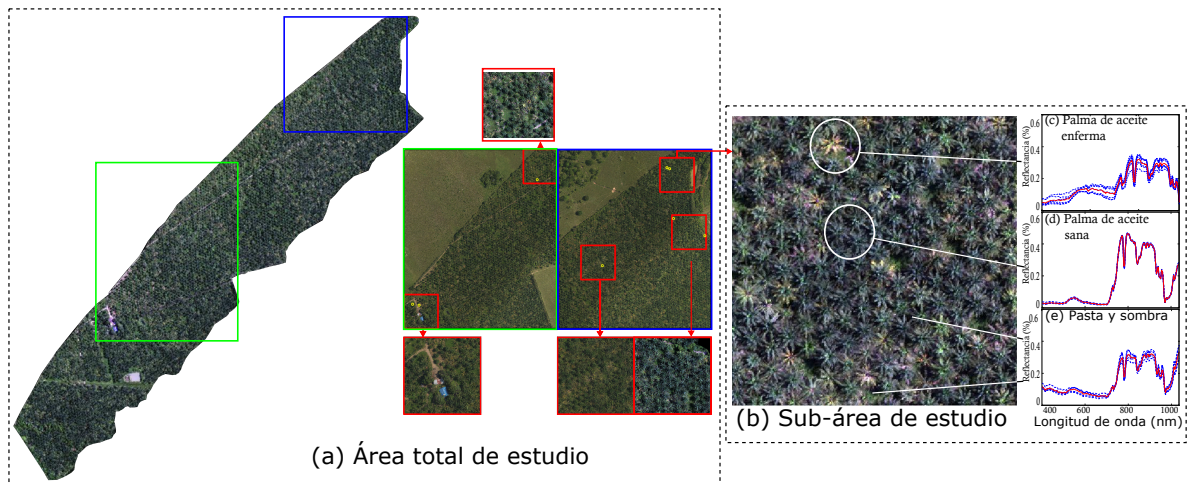


Figura 13. Área de estudio que corresponde a cultivos de palma de aceite en Colombia. (a) Área total de estudio (130 ha de cultivo de palma de aceite) y sub-áreas analizadas (b) Representación RGB de la sub-área de imágenes HS del cultivo de palma de aceite con 160 bandas espectrales en el rango espectral VNIR y sus tres clases predominantes: (c) palma de aceite enferma, (d) palma de aceite sana y (e) fondo (sombra y pasto). (c), (d) y (e) ilustran las firmas espectrales medias (línea continua roja) y la variabilidad espectral (línea discontinua azul) para cada clase.

desmezclado espectral que no tienen en cuenta el problema de la variabilidad espectral. A continuación, se presentan los detalles de implementación más relevantes de los algoritmos seleccionados.

Métodos de desmezclado espectral que no abordan la variabilidad espectral

- *Mínimos cuadrados totalmente restringidos (del inglés Fully Constrained Least Squares - FCLS)*: Este método de MML proporciona estimaciones confiables de las fracciones de abundancia de una firma para la cuantificación de materiales, satisfaciendo las dos restricciones impuestas a la abundancia de materiales en un píxel ⁷⁹: 1) restricción de abundancia suma-a-uno y 2) restricción

⁷⁹ Daniel C Heinz et al. "Fully constrained least squares linear spectral mixture analysis method for material quantification in hyperspectral imagery". En: *IEEE transactions on geoscience and remote sensing* 39.3 (2001), págs. 529-545.

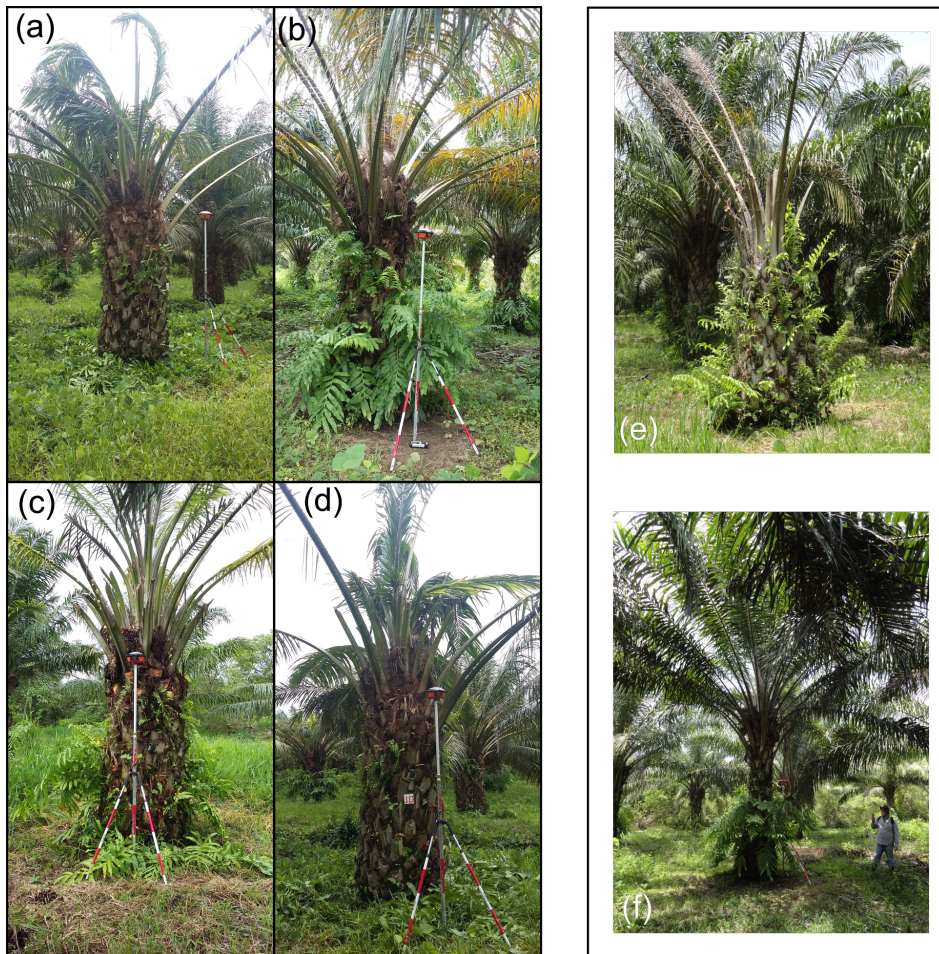


Figura 14. Adquisición de puntos de control geo-referenciados en área del cultivos de palma de aceite para creación de la verdad de terreno. (a-d) Ilustra la adquisición de puntos de control con GPS sub-métrico de palmas de aceite enfermas. (e) Palma de aceite enferma y (f) ilustra una palma de aceite sana, en todas las imágenes se puede ver lo que denominados fondo que hace referencia a la sombra y pasto.

de positividad de las abundancias (ANC) documentadas en la sección 2.2 . Sin embargo, FCLS no considera la variabilidad espectral al estimar abundancias.

En concreto, para este tipo de métodos utilizamos el algoritmo SUNSAL⁸⁰ para

⁸⁰ José M Bioucas-Dias y Mário AT Figueiredo. "Alternating direction algorithms for constrained sparse regression: Application to hyperspectral unmixing". En: *Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing (WHISPERS)*, 2010 2nd Workshop on. IEEE. 2010,

la estimación de las abundancias.

- *Mínimos cuadrados restringidos (del inglés Constrained Least Squares - CLS):* A diferencia de FCLS que satisface las restricciones de suma-a-uno y positividad, el método CLS solo garantiza la restricción de no negatividad. De esta manera, CLS admite abundancias superiores a 1 causadas por variaciones en la iluminación como factores de escala multiplicativos; así, el enfoque modela indirectamente la variabilidad espectral, ya que los efectos de estos factores de escala se eliminan cuando se normalizan las fracciones de abundancia. Sin embargo, el algoritmo CLS pertenece a la clase de algoritmos que no tienen en cuenta la variabilidad espectral de forma directa.

Métodos de desmezclado espectral con variabilidad espectral

- *Minimización de ángulos alternos (MAA):* utiliza conjuntos de espectros para representar la variabilidad presente en cada clase, con el objetivo de encontrar la firma espectral pura final óptima para realizar el desmezclado espectral ⁴⁷. Es similar al popular algoritmo MESMA, pero tiene una complejidad computacional más favorable, y produce resultados similares.
- *Algoritmo CDA-ME* ⁴¹: Este algoritmo fue seleccionado dado que modela dos efectos principales de variabilidad: 1) la variabilidad de la iluminación y 2) los errores por modelado o valores atípicos (ver modelo en (8)) .
- *Modelo de mezcla lineal perturbado (del inglés Perturbed Linear Mixing Model - PLMM):* Se eligió por tener la capacidad de abordar la variabilidad espacial y espectral ⁴⁹, PLMM representa la variabilidad a través de una perturbación aditiva de las firmas espectrales puras(ver modelo en (4)).

- *Modelo de composición normal (NCM) y modelo de composición beta (BCM):* Estos dos algoritmos fueron seleccionados por ser parte del enfoque que describe la variabilidad espectral como distribuciones estadísticas. Los algoritmos NCB y BCM se presentan en la sección 3.2.5 (observar el modelo en (7)).

3.4.4. Criterios de evaluación El rendimiento de los algoritmos seleccionados se evaluó mediante la comparación entre la estimación de las abundancia respecto al mapa de verdad de terreno. El mapa de verdad de terreno se creó cuando se generaron los datos simulados para la imagen sintética. La calidad del desmezclado espectral se evalúa utilizando la raíz del error cuadrático medio (RMSE), definido como

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{NP} \sum_{n=1}^N \| \mathbf{a}_n - \bar{\mathbf{a}}_n \|^2}, \quad (9)$$

donde \mathbf{a}_n corresponde al vector de abundancia del mapa de verdad de terreno, $\bar{\mathbf{a}}$ es el vector de abundancia estimado, N y P son el número de píxeles y firmas espectrales puras, respectivamente. También medimos la calidad de la reconstrucción mediante la métrica del error de reconstrucción (RE), definida como

$$\text{RE} = \sqrt{\frac{1}{\lambda P} \sum_{n=1}^N \| \bar{\mathbf{y}}_n - \mathbf{y}_n \|^2}, \quad (10)$$

donde \mathbf{y}_n es la n -ésima columna de la matriz de imagen original, $\bar{\mathbf{y}}$ es la n -ésima columna de la matriz de imagen estimada, y λ es el número de bandas espectrales. Además, utilizamos la distancia del ángulo espectral o mapeo del ángulo espectral (SAM), definido como

$$\text{SAM} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \arccos \left(\frac{(\mathbf{y}_n^T \bar{\mathbf{y}}_n)}{\| \mathbf{y}_n \| \| \bar{\mathbf{y}}_n \|} \right), \quad (11)$$

para medir el error de reconstrucción de la imagen, donde T representa la operación de transpuesta del vector. SAM compara firmas espectrales calculando el ángulo entre dos firmas.

3.5. Resultados

Esta sección presenta los resultados numéricos para evaluar la capacidad de los diferentes enfoques (con y sin variabilidad espectral) para estimar las abundancias en datos sintéticos y reales. Los experimentos se implementaron en Matlab R2018b y todos los experimentos numéricos se realizaron en una computadora con procesador Intel Core (TM) i7-4790 a 3.60GHz y 32 GB de RAM. La Figura 15 muestra el diagrama de flujo de la metodología empleada en esta capítulo para realizar el análisis de la variabilidad espectral en la tarea de desmezclado espectral en imágenes HS.

3.5.1. Experimento 1. Comparación de métodos de desmezclado espectral utilizando datos sintéticos

Este experimento fue diseñado para evaluar la capacidad de los diferentes enfoques (con y sin variabilidad espectral) para estimar las abundancias en imágenes sintéticas con variabilidad espectral inducida. Además, se evaluó el desempeño bajo diferentes niveles de ruido, variando los valores de SNR de 15 dB a 35 dB en intervalos de 5 dB.

Para este experimento, utilizamos los datos sintéticos creados como se describe en la sección 3.4.1. La tabla 1 muestra el rendimiento de los diferentes enfoques para una imagen sintética con $SNR = 30$ dB, y en la Fig. 16 la comparación del rendimiento en la estimación de abundancia se muestra variando los valores de SNR. Puede verse en la Tabla 1 que CDA-ME presenta los mejores resultados en la estimación de abundancias para las tres métricas RMSE, RE y SAM. El algoritmo CDA-ME confirma su robustez con respecto a los otros enfoques, incluso sobre los

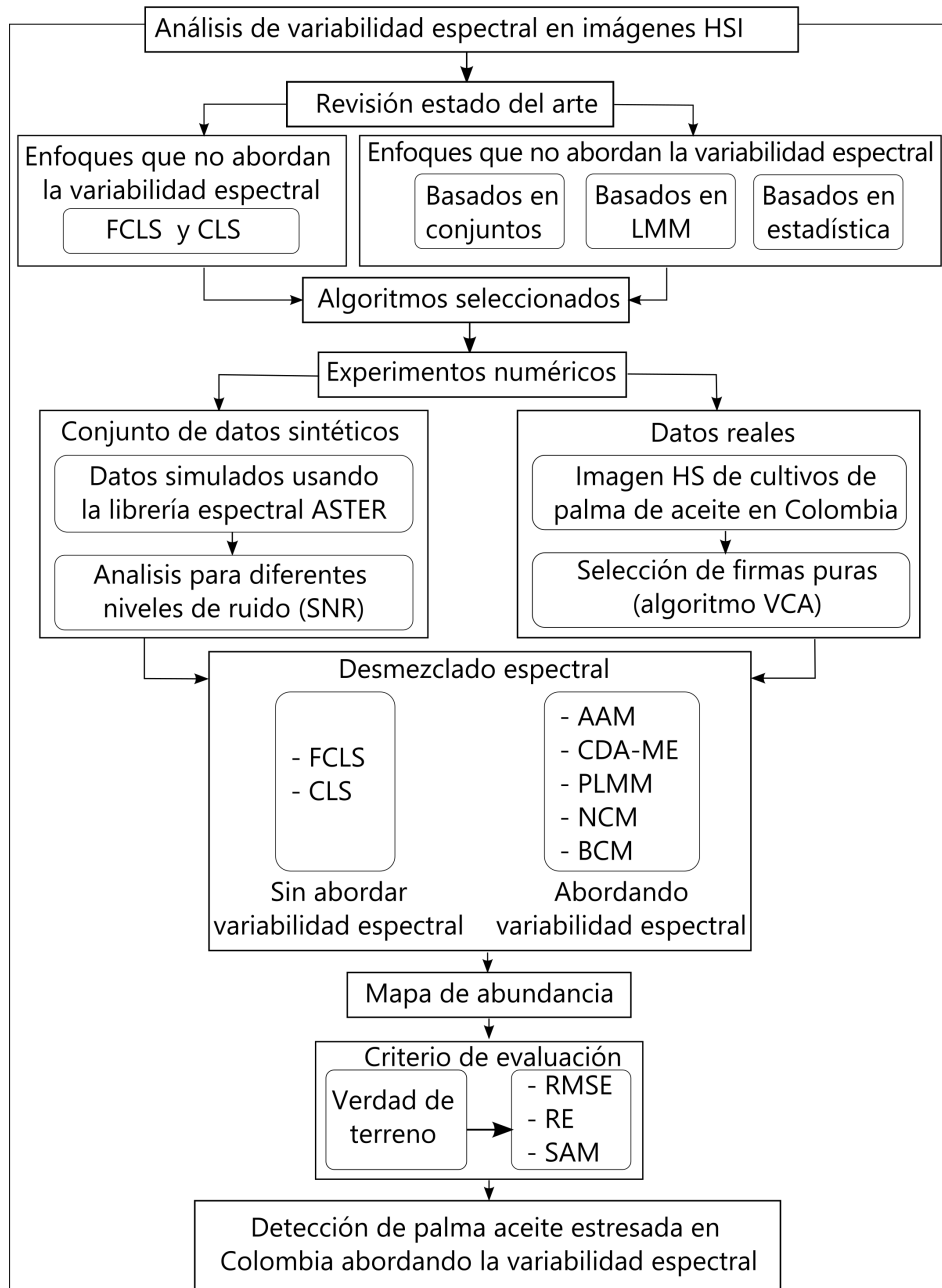


Figura 15. Diagrama de flujo de la metodología utilizada para el análisis de la variabilidad espectral en la tarea de desmezclado espectral en imágenes HS.

enfoques que abordan la variabilidad espectral, como AAM, PLMM, NCB y BCM. Por otro lado, como se esperaba, los algoritmos que no toman en cuenta la variabilidad

Cuadro 1. Evaluación de resultados de desmezclado espectral en datos sintéticos (SNR=30 dB). Los resultados en negrita resaltan el mejor resultado para cada caso

	RMSE ($\times 10^{-2}$)	RE ($\times 10^{-2}$)	SAM ($\times 10^{-2}$)	Tiempo (s)
FCLS	7.838	3.75	5.4267	0.073
CLS	31.417	18.7593	32.9379	1.588
AAM	5.947	6.6477	8.0352	12.188
CDA-ME	1.927	2.243	3.081	36.770
PLMM	7.718	4.1986	5.9151	24.384
NCM	8.277	6.1759	9.3961	16.062
BCM	8.328	7.0498	9.3914	753.732

espectral (CLS y FCLS) exhiben el desempeño más pobre entre todos los métodos en términos de RSME, RE y SAM. En cuanto al tiempo de cálculo, la Tabla 1 destaca que los algoritmos CLS y FCLS son los más rápidos, sin embargo, el algoritmo CDA-ME proporciona un tiempo de cálculo aceptable que muestra su eficiencia para desarrollar la tarea de desmezclado espectral en imágenes HS con mayor precisión.

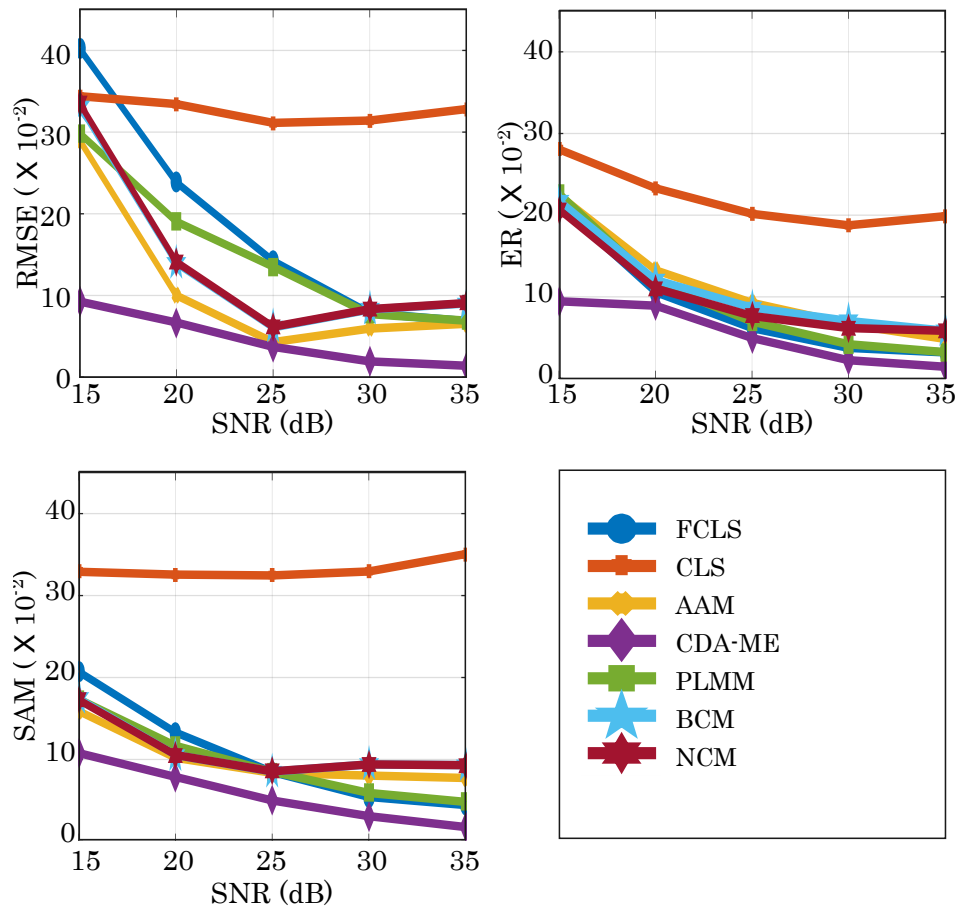


Figura 16. Comparación de los diferentes enfoques aplicados a la imagen sintética para diferentes niveles de SNR evaluados utilizando (a) RMSE, (b) RE y (c) SAM

La Figura 16 muestra la sensibilidad de los algoritmos que no tienen en cuenta la variabilidad espectral (por ejemplo, CLS en todos los casos y FCLS para niveles bajos de SNR). Esto se debe a que los bajos niveles de SNR pueden verse como fuertes variaciones de las firmas espectrales. Dado que FCLS y CLS no están diseñados para abordar la variabilidad espectral, estos algoritmos se ven fuertemente afectados por la presencia de grandes variaciones e incrementos de la intensidad del ruido. La Figura 16 destaca el buen desempeño del algoritmo CDA-ME en diferentes niveles de SNR. De igual forma, se puede observar que a partir de 30 dB el desempeño de todos los algoritmos exhibe un comportamiento más estable.

3.5.2. Experimento 2. Validación de la estimación de abundancia utilizando imágenes HS adquiridas en cultivos de palma de aceite en Colombia

El área de estudio corresponde a un total de 130 hectáreas de cultivo de palma de aceite en Colombia, del total de área se seleccionaron cinco sub-áreas (ver Fig. 13), para lo cual se realizaron experimentos numéricos. Se muestran los resultados de una de las sub-áreas. Se obtuvieron resultados similares en las demás sub-áreas. El área seleccionada es la más representativa para validar los resultados y el rendimiento de los algoritmos a evaluar. Esta imagen fue previamente corregida radiométrica y geoméricamente. El objetivo de este experimento es evaluar el desempeño de los diferentes enfoques que abordan la variabilidad espectral durante la estimación de las abundancias como estrategia para detectar palmas de aceite enfermas. Esta imagen fue seleccionada debido a su alta variabilidad espectral. La Figura 17.a muestra 148 firmas espectrales que corresponden a diferentes píxeles de una sola palma de aceite en la imagen HS. Se puede ver que las firmas de la palma de aceite enferma varían de píxel a píxel, lo que puede interpretarse como variaciones generadas por diferentes niveles de gravedad de la enfermedad. La figura 17.b muestra una representación adicional de la variabilidad espectral a través de la media, la desviación estándar, los valores de reflectancia máxima y mínima y los valores atípicos (representados con símbolos de cruz roja).

Para estos experimentos, se extrajeron tres firmas puras utilizando el algoritmos VCA (del inglés *Vertex Component Analysis* ⁸¹, que se muestran en la Fig. 13. Para los enfoques basados en conjuntos (AAM), y para aquellos que requieren bibliotecas espectrales (NCM y BCM), se crearon tres bibliotecas con los siguientes números

⁸¹ José MP Nascimento y José MB Dias. "Vertex component analysis: A fast algorithm to unmix hyperspectral data". En: *IEEE transactions on Geoscience and Remote Sensing* 43.4 (2005), págs. 898-910.

de muestras por cada clase: 7 (árbol de palma de aceite enferma), 5 (árbol de palma de aceite saludable) y 5(fondo conformado por pasto y sombra). El número de bandas espectrales tanto en la imagen como en las bibliotecas de firmas espectrales puras es 160. Para ejecutar el algoritmo FCLS, cada biblioteca se reemplazó por su promedio espectral. Las firmas espectrales puras de las tres clases de interés y la verificación en campo permitieron la creación de los mapas de verdad de terreno que se muestran en la Fig. 18 (fila superior).

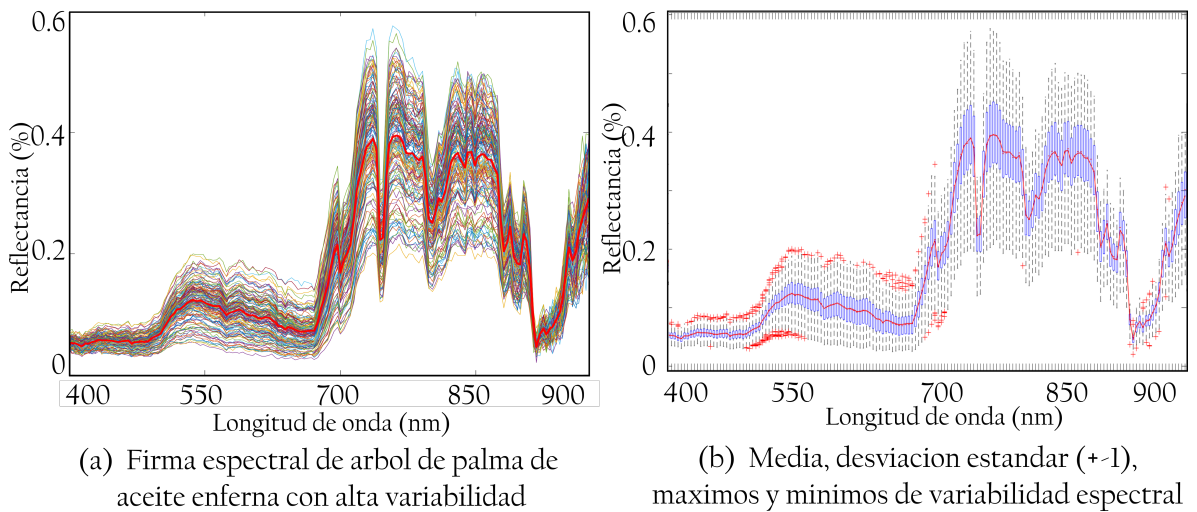


Figura 17. Variabilidad espectral en una muestra de cultivo de palma de aceite.

La Figura 18 muestra los resultados del proceso de detección de palmas de aceite enfermas mediante el uso de cinco algoritmos de desmezclado espectral sobre la imagen HS adquirida. Se evaluó el rendimiento del algoritmo CLS, que pertenece a los algoritmos que no tiene en cuenta la variabilidad espectral. Asimismo, se evaluaron cuatro algoritmos que corresponden a las técnicas que abordan la variabilidad espectral, tales como AAM que pertenece a técnicas basadas en conjuntos o (*bundles*), CDA-ME que permite modelar los efectos de variabilidad por escalado y valores atípicos, y el algoritmo PLMM que permite modelar la variabilidad espectral

como una perturbación aditiva. Finalmente, para evaluar las técnicas basadas en distribución estadísticas, se incluyó el algoritmo BCM. Debido a los altos recursos computacionales requeridos por el modelo NCM respecto al tamaño del conjunto de datos evaluado, este algoritmo no se empleó. En la Fig. 18 se observa que cada columna corresponde a una de las tres clases, cada fila a un algoritmo y la primera fila corresponde al mapa de verdad de terreno. Cada clase se presenta con un color específico: rojo (palma de aceite enferma), verde (palma de aceite sana) y negro (fondo (sombra y pasto)), mientras que un píxel blanco indica una pequeña proporción de abundancia de los materiales correspondientes.

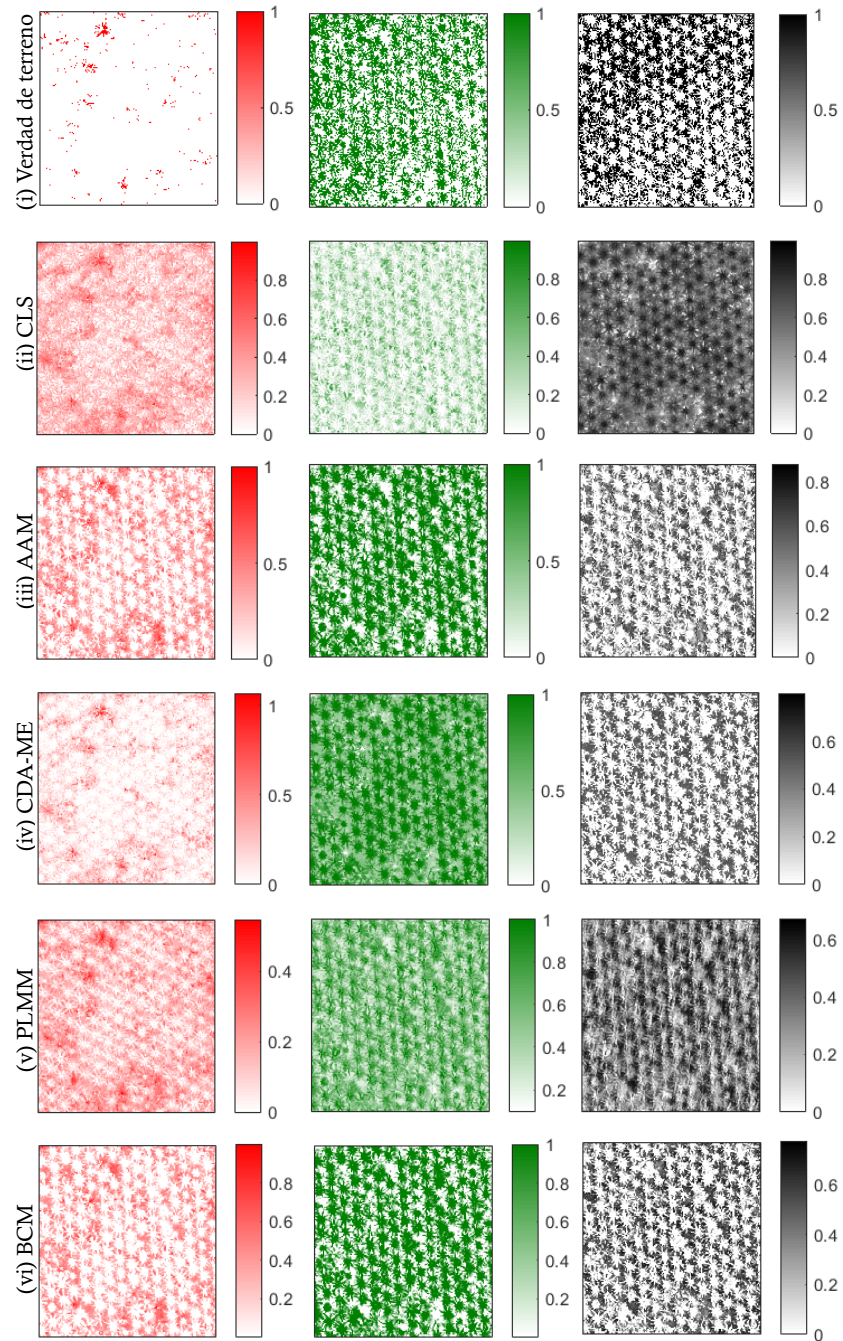


Figura 18. Resultados de la estimación de mapas de abundancia para tres clases y diferentes algoritmos de desmezclado espectral. (a) columna 1: palma de aceite enferma, (b) columna 2: palma de aceite sana, y (c) columna 3: pasto y sombra. (i) La primera fila corresponde a la verdad de terreno. (ii) - (vi) cada fila corresponde a diferentes métodos de desmezclado espectral.

La superioridad de los algoritmos que abordan la variabilidad espectral en este experimento con datos reales se destaca. El algoritmo CDA-ME exhibe el mejor rendimiento, en contraste con el bajo rendimiento del algoritmo CLS seguido por PLMM. El resultado de CLS se puede interpretar como la presencia de alta variabilidad, inducida por variaciones de iluminación en la escena, pues previamente se realizó una inspección visual de las imágenes HS adquiridas, observando diferentes niveles de iluminación, iniciando con niveles altos en la parte superior izquierda y finalizando con niveles bajos de luz solar en la parte inferior derecha de la imagen original. Por otro lado, los mapas de abundancia obtenidos con los algoritmos AAM y BCM muestran una alta similitud.

El rendimiento de los cinco enfoques también se evaluó cuantitativamente estimando el error de reconstrucción (RE) como se muestra en la Tabla 2. Los resultados generados por el algoritmo CLS sugieren la presencia de una gran variabilidad espectral en la escena y su capacidad limitada para abordar este fenómeno. Se debe tener presente que el algoritmo BCM muestra un resultado de error competitivo, sin embargo, el tiempo de cálculo es alto, lo que es una limitación importante a tener en cuenta cuando el tamaño de la escena aumenta. Finalmente, se realizó un análisis para diferentes resoluciones espaciales con el fin de determinar la influencia de la resolución espacial en el comportamiento de la variabilidad espectral. La resolución espacial de la imagen real se redujo en proporciones de 67 %, 57 %, 50 %, 25 % y 3 %. Este experimento permitió determinar que las imágenes HS con alta resolución espacial promueven el aumento de la variabilidad espectral, dada la gran cantidad de píxeles. Sin embargo, este experimento también demostró que, al aplicar los mismos métodos a diferentes resoluciones espaciales, se preservan los resultados y el comportamiento de los algoritmos y se obtienen resultados similares, solo hasta que el número de píxeles es menor que al número de bandas.

Esto se debe a que, si una imagen HS tiene dimensiones $N_1 \times N_2$, donde N_1 es el número de píxeles, N_2 el número de bandas y $N_1 \gg N_2$, entonces el rango R de la imagen HS es $R = \min(N_1, N_2)$. Por tanto, si reducimos la resolución espacial al número de bandas, podríamos pensar que se conservarán los firmas espectrales puras estimadas. Sin embargo, si el número de píxeles es menor que el número de bandas, es posible obtener diferentes firmas espectrales puras.

Cuadro 2. Resultados de la evaluación sobre el conjunto de datos reales. La negrita resalta el mejor resultado para cada caso.

	CLS	AAM	CDA ME	PLMM	BCM
RE ($\times 10^{-2}$)	7.075	6.181	1.515	6.378	6.152
Tiempo (horas)	0.001	0.128	0.294	1.149	13.12

Resumiendo los resultados de los experimentos con datos tanto sintéticos como reales, el algoritmo CDA-ME es el método más robusto, puesto que, proporciona los mejores resultados en la estimación de mapas de abundancia para las tres clases: palma de aceite enferma, palma de aceite sana y fondo (sombra y pasto), en comparación con los otros enfoques analizados. Esto se debe a que el algoritmo CDA-ME puede modelar la variabilidad espectral bajo diferentes estrategias que incluyen cambios de iluminación, valores atípicos y la inclusión de una función de suavizado para reducir los efectos de la variabilidad en imágenes HS.

3.6. Conclusiones

Este capítulo presentó una revisión de diferentes enfoques basados en el modelo de mezcla lineal (MML) para abordar la variabilidad espectral. Algunos de estos métodos se evaluaron en la detección de palma de aceite enferma en una imagen HS de un cultivo colombiano y se compararon con métodos de desmezclado espectral que

no abordan la variabilidad espectral. Se evaluó su capacidad para estimar las abundancias con diferentes niveles de ruido para los diferentes enfoques. Cabe señalar que, esta tesis es una de las primeras investigaciones que explora y evalúa los desafíos y limitaciones en el uso de la teledetección hiperespectral en cultivos agrícolas, en particular en cultivos de palma aceitera y los efectos de la variabilidad espectral en este tipo de aplicaciones en Colombia. En los experimentos realizados se utilizaron datos sintéticos y reales, y las comparaciones muestran que el algoritmo CDA-ME es más robusto al ruido en comparación con los otros métodos estudiados. Específicamente, el algoritmo CDA-ME supera a los enfoques que no abordan el fenómeno de variabilidad espectral en hasta un 90 %, y los enfoques que abordan la variabilidad espectral en hasta un 70 %, puesto que, este algoritmo modela conjuntamente los cambios de iluminación, los efectos de la variabilidad y los valores atípicos en las imágenes HS. Por otra parte, se identificó que ignorar la variabilidad espectral puede inducir errores en el procesamiento y análisis de imágenes HS, lo que resalta la importancia de la variabilidad espectral para la teledetección hiperespectral. Finalmente, los trabajos futuros deberían centrarse en proponer nuevas técnicas para reducir los efectos de la variabilidad espectral, con el fin de mejorar los resultados en los algoritmos de clasificación, detección y en tareas como la fusión de imágenes HS y MS, dada la importancia de la fusión HS-MS para diversas aplicaciones. Asimismo, para el caso específico de Colombia, se debe utilizar el algoritmo CDA-ME para otro tipo de cultivos agrícolas y comparar su desempeño en ambientes de alta variabilidad espectral (cultivos heterogéneos o presencia de varios tipos de cultivos en la misma zona).

4. Fusión de imágenes hiperespectrales y multiespectrales que abordan la variabilidad espectral mediante el uso de un modelo de mezcla lineal aumentado

4.1. Introducción

La fusión de imágenes HS-MS puede combinar las ventajas de las imágenes HS, que suelen tener una alta resolución espectral con la alta resolución espacial de las imágenes MS ²³, dando respuesta a la demanda de imágenes con alta resolución espacial-espectral en múltiples aplicaciones de teledetección. En la última década se han propuesto diversos métodos de fusión de imágenes HS-MS, tradicionalmente estos se clasifican en cuatro grupos: métodos basados en enfoques pancro-máticos, métodos Bayesianos, aprendizaje profundo y métodos de desmezclado espectral. Un estado del arte detallado fue tratado en la Sección 1 de la presente tesis. En particular, los métodos de fusión basados en el desmezclado espectral son el enfoque aplicado en el método de fusión propuesto debido a la ventaja de tener una interpretación matemática y física del proceso de fusión ⁶. La base de los métodos de fusión basados en el desmezclado espectral consiste en obtener información sobre las firmas espectrales puras a partir de imágenes HS y sus mapas de abundancia a partir de imágenes MS ¹⁹²⁰²¹²²²³²⁴. Los enfoques de fusión tradicionales que utilizan el desmezclado espectral consideran un MML, que asume cada vector espectral como una combinación lineal de las firmas espectrales puras con los pesos de cada una de sus abundancias. Una consecuencia matemática natural de los MML debido a la pequeña cantidad de firmas espectrales puras es la reducción de la dimensionalidad para representar una imagen espectral. Otras técnicas para lograr el mismo

objetivo son ⁸²⁸³⁸⁴ las cuales buscan representar escasamente la imagen espectral a través de un hiper-grafo. Sin embargo, estas técnicas carecen de interpretabilidad física en comparación con las firmas espectrales puras para resolver el problema de variabilidad espectral.

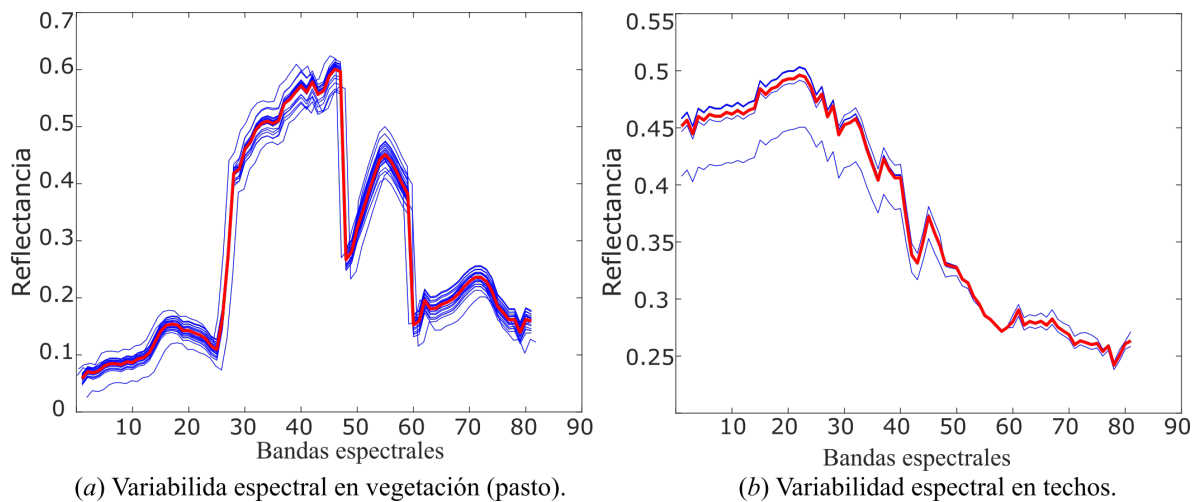


Figura 19. El concepto de variabilidad espectral generada sobre dos materiales (a) pasto y (b) techo, tomados del conjunto de datos Urban. Las firmas espectrales (en azul) del mismo material (en rojo) presentan diferentes variaciones.

Aunque los MML son sencillos y tiene una correcta interpretación del fenómeno físico, ignoran las variaciones espectrales entre píxeles de una imagen espectral, generando *variabilidad espectral*, donde las firmas espectrales puras presentan variaciones en su forma y escalado. Estas variaciones pueden ser causadas por efec-

⁸² Fulin Luo et al. "Sparse-adaptive hypergraph discriminant analysis for hyperspectral image classification". En: *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters* 17.6 (2019), págs. 1082-1086.

⁸³ Yule Duan et al. "Local manifold-based sparse discriminant learning for feature extraction of hyperspectral image". En: *IEEE transactions on cybernetics* (2020).

⁸⁴ Yule Duan, Hong Huang y Yuxiao Tang. "Local constraint-based sparse manifold hypergraph learning for dimensionality reduction of hyperspectral image". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 59.1 (2020), págs. 613-628.

tos de iluminación, condiciones atmosféricas, topografía, o incluso la variabilidades intrínsecas del material ²⁵²⁶²⁷²⁸. Ver sección 2.3.1. La Figura 19 ilustra el concepto de variabilidad espectral generada por escalado sobre dos materiales (vegetación (pasto) Fig. 19.(a) y la firma espectral de techo Fig.19.(b)) tomados del conjunto de datos Urban ⁸⁵, en el que se pueden ver firmas espectrales muy similares que representan la misma firma espectral pura. La variabilidad espectral se ha considerado como una alta fuente de error en el análisis de imágenes HS debido a diferencias en la forma y escala de las firmas espectrales puras. También se ha demostrado que la variabilidad espectral compromete la mayoría de los algoritmos, para diferentes tareas, tales como, desmezclado espectral, detección de objetivos y clasificación ²⁶²⁷. En particular, la suposición que el MML falla se debe a que es físicamente inviable adquirir la misma firma espectral de un material dado en diferentes ubicaciones espaciales dentro de una misma imagen HS. Por lo tanto, los métodos de fusión convencionales basados en el desmezclado espectral que consideran los MML ignoran que la variabilidad espectral afecta la calidad de la imagen fusionada. El problema de la variabilidad espectral se ha abordado en la tarea de fusión HS-MS solo dentro del contexto de la variabilidad espectral estacional ²⁹, es decir, variaciones espectrales de los materiales constituyentes subyacentes debido a diferentes adquisiciones y condiciones estacionales. Es de destacar que el trabajo ²⁹ aborda únicamente los cambios estacionales en la firma espectral de los materiales en la imagen HS que pueden cambiar significativamente de aquellos en la correspondiente imagen MS. Sin embargo, todavía existe una brecha en el estudio y modelado de la variabilidad espectral en los métodos de fusión para imágenes HS y MS adquiridas durante la misma temporada (con pocos días de diferencia), incluso con condiciones atmosféricas y de iluminación similares.

⁸⁵ Feiyun Zhu et al. "Spectral unmixing via data-guided sparsity". En: *IEEE Transactions on Image Processing* 23.12 (2014), págs. 5412-5427.

Esta tesis doctoral propone un método para la fusión de imágenes HS-MS basado en los métodos de desmezclado espectral que tiene en cuenta la variabilidad espectral, este se denominará *FSVA*. La idea clave es combinar el modelo de degradación espacio-espectral y el modelo de variabilidad espectral. Para abordar la variabilidad espectral en esta investigación, consideramos el modelo de mezcla lineal aumentado (ALMM) recientemente propuesto ³³, que modela la variabilidad espectral a través de las firmas espectrales puras y diccionarios de variabilidad espectral. El diccionario de firmas espectrales puras modela las principales variaciones espectrales causadas por cambios de iluminación o topografía (escalado), mientras que el diccionario de variabilidad espectral está diseñado para modelar otras fluctuaciones espectrales generadas por condiciones ambientales, atmosféricas o efectos de mezcla no lineales.

Así, el problema de la fusión se formula como la minimización de una función de costo con respecto a la matriz de abundancia y los parámetros del ALMM. En segundo lugar, dado que el problema de minimización no es convexo, se aborda con una estrategia de optimización alterna. Los subproblemas resultantes son convexos y se resuelven de manera eficiente utilizando el método de multiplicadores de dirección alterna (ADMM).

Este capítulo está organizado de la siguiente forma: En la Sección 4.2 se describe el modelo de mezcla lineal bajo el enfoque de la tarea de fusión de imágenes HS-MS y los diferentes modelos de variabilidad espectral de última generación. En la Sección 4.3, se formula el problema de fusión HS-MS empleando un modelo de mezclado espectral que aborda la variabilidad espectral en fusión de imágenes HS-MS. En la Sección 4.4, se propone el algoritmo de optimización para la tarea de fusión. En la Sección 4.5, se muestran los resultados experimentales y se comparan con los enfoques más avanzados. En la Sección 4.6, se detalla el desarrollo matemático para el problema de optimización con respecto a A , S , E , y a C . Finalmente, las

conclusiones se informan en la Sección 4.7.

4.2. Contexto

Esta sección presenta una corta introducción del estado del arte para modelar la variabilidad espectral en las tareas de desmezclado espectral y fusión de imágenes HS-MS y el problema de fusión de imágenes HS-MS, además una introducción del modelo de mezcla lineal orientado en la tarea de fusión de imágenes HS-MS.

4.2.1. La variabilidad espectral y el modelo de mezcla lineal La variabilidad espectral ha sido estudiada principalmente en algoritmos de desmezclado espectral, debido a la incorrecta estimación de las abundancias, inducidas por la variación espectral de las firmas espectrales puras. Por esta razón, existe un interés creciente en la comunidad científica de las imágenes HS en torno a la variabilidad espectral ⁵²⁵⁰⁸⁶⁸⁷⁸⁸. desde el contexto del desmezclado espectral la variabilidad ha sido abordada en diversas investigaciones, por ejemplo, el trabajo en ⁵² modela la variabilidad espectral como un problema inverso escaso y el trabajo presentado en ⁵⁰ mejora la separabilidad entre firmas espectrales seleccionando las bandas más óptimas en las imágenes HS. En ³³, la variabilidad espectral se modela utilizando un modelo de mezcla lineal perturbado y escalado, y el método en ⁸⁶ adopta el modelo de mezcla

⁸⁶ Yuan Zhou, Anand Rangarajan y Paul D Gader. "A Gaussian mixture model representation of endmember variability in hyperspectral unmixing". En: *IEEE Transactions on Image Processing* 27.5 (2018), págs. 2242-2256.

⁸⁷ Tatsumi Uezato, Mathieu Fauvel y Nicolas Dobigeon. "Hyperspectral unmixing with spectral variability using adaptive bundles and double sparsity". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 57.6 (2019), págs. 3980-3992.

⁸⁸ Ricardo Augusto Borsoi, Tales Imbiriba y José Carlos Moreira Bermudez. "Deep generative end-member modeling: An application to unsupervised spectral unmixing". En: *IEEE Transactions on Computational Imaging* 6 (2019), págs. 374-384.

gaussiana para representar la variabilidad de las firmas espectrales puras.

Para superar las deficiencias de MML, que ignora los efectos de la variabilidad espectral, se han propuesto varios enfoques en la literatura ²⁸. Sus contribuciones y deficiencias se destacan a continuación. El modelo de mezcla lineal extendido (ELMM) describe la variabilidad espectral causada por variaciones en la iluminación como factores de escala multiplicativos y elimina sus efectos ⁵⁶. Sin embargo, ELMM tiene ligeras deficiencias en el modelado de otras causas de variabilidad espectral, por ejemplo, efectos atmosféricos o mezcla espectral no lineal, ya que solo considera los factores de escala, ver Sección 3.2.3. El modelo de mezcla lineal perturbado (PLMM) presenta un nuevo MML que explica explícitamente las variabilidades espaciales y espectrales ⁴⁹, a través de un término de perturbación aditivo para cada firma espectral pura. Sin embargo, PLMM no considera variaciones espectrales importantes relacionadas con factores de escala, como la variación por condiciones de iluminación, siendo la iluminación una de las principales causas de la variabilidad espectral en una imagen HS, ver Sección 3.2.2.

Ahora, desde el contexto de la fusión de imágenes HS-MS se considera una imagen de alta resolución espacial y espectral definida como $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{N_\lambda \times N_e}$, donde las columnas son las firmas espectrales, y N_λ es el número total de bandas. En este trabajo, se asume que $N_{\lambda} \ll N_{xy}$ y cada banda espectral tiene una dimensión espacial $N_{xy} = N_x \times N_y$.

Según el MML ⁴⁰, cada vector espectral de la imagen de alta resolución espacial y alta resolución espectral en el contexto de fusión de imágenes HS-MS, \mathbf{Z} puede representarse mediante una mezcla lineal de varias firmas espectrales puras. Matemáticamente, el MML asume que

$$\mathbf{Z} = \mathbf{MA}, \quad (12)$$

donde $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N_\lambda \times N_e}$ es la matriz de miembros finales cuyas columnas son firmas espectrales, N_e es el número total de firmas puras, y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N_e \times N_{xy}}$ es la matriz de abundancia correspondiente cuyas columnas son las fracciones de abundancia ⁴⁰. Además, se han adoptado las dos restricciones que tienen un sentido físico de la realidad para la estimación de las abundancias de la siguiente manera: 1) la restricción abundancias no negativas, $\mathbf{A} \succeq 0$; y 2) la restricción que impone que la suma de abundancias es igual a uno, $\mathbf{1}_{N_e}^\top \mathbf{A} = \mathbf{1}_{N_{xy}}^\top$, donde $\mathbf{1} \in \{1\}^{N_e \times 1}$ es un vector con todas las entradas iguales a 1.

Para abordar las limitaciones de los algoritmos ELMM y PLMM en la tarea de desmezclado espectral, los autores en ³³ desarrollaron el modelo de mezcla lineal aumentada (ALMM) que representa simultáneamente los factores de escala y otros tipos de variabilidad espectral. Matemáticamente, el algoritmo ALMM en la tarea de fusión de imágenes HS-MS se puede expresar como

$$\mathbf{Z} = \mathbf{MAS} + \mathbf{EC}, \quad (13)$$

donde $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N_{xy} \times N_{xy}}$ es una matriz diagonal con sus valores diagonales $\mathbf{S} \succeq 0$, \mathbf{S} denota la variabilidad espectral por escalado; $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{N_\lambda \times N_l}$ denota la matriz (o diccionario) de variabilidades espectrales que no pueden ser explicadas usando el factor de escalado, y N_l es el número de vectores de la base en \mathbf{E} . La matriz $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N_l \times N_{xy}}$ es la matriz de coeficientes correspondiente a \mathbf{E} .

4.2.2. Trabajos anteriores en fusión de imágenes HS-MS mediante el enfoque de desmezclado espectral

Además de las publicaciones sobre fusión de imágenes, existen varias publicaciones que son relevantes para el presente trabajo, como se comenta a continuación. Vale la pena mencionar que todos los métodos que se

discuten enseguida, emplean imágenes HS de baja resolución espacial e imágenes MS de alta resolución espacial para producir datos fusionados con altas resoluciones espaciales y espectrales:

1) *CNMF*: El método de desmezclado espectral de factorización de matriz no negativa acoplada (del inglés *coupled nonnegative matrix factorization*) se propone en ¹⁹ para el problema de fusión. Computacionalmente, este método funciona actualizando alternativamente los datos hiperespectrales y multiespectrales a través de la firma espectral pura y las matrices de abundancia utilizando una estrategia de factorización de matriz no negativa, asumiendo un modelo de mezcla espectral lineal como en (12). Específicamente, al combinar la matriz hiperespectral de firmas espectrales puras y la matriz de abundancias de alta resolución espacial obtenida de los datos multiespectrales, se generan datos hiperespectrales de alta resolución espacial.

2) *HYSURE*: El método de superresolución hiperespectral (*HYSURE*) en ²⁰, resuelve el problema de fusión formulando una minimización convexa donde la función objetivo combina dos términos de ajuste de datos cuadráticos y un regularizador que preserva los bordes. Específicamente, los términos de ajuste de datos tienen en cuenta el desenfoque, las diferentes resoluciones y el ruido aditivo. Computacionalmente, este método resuelve el problema convexo construyendo la función lagrangiana aumentada como una instancia del método de multiplicadores de dirección alterna (*ADMM*).

3) *LANARAS*: Similar al método *CNMF*, el algoritmo de fusión de Lanaras en ²² aborda la tarea de fusión mediante el desmezclado espectral de manera conjunta tomando como entrada de las dos imágenes las firmas espectrales puras y las abun-

dancias asociadas, siguiendo la ecuación (12). Este método, a diferencia del CNMF, emplea una estrategia de gradiente proyectado para actualizar alternativamente las firmas espectrales puras y las abundancias de alta resolución espacial para resolver las imágenes de entrada HS y MS, respectivamente. Computacionalmente, este método realiza una inicialización de las firmas espectrales puras, que luego se refina resolviendo un problema de desmezclado espectral escaso. Además, para actualizar las abundancias, este método adopta una estrategia con base en la formulación del Lagrangiano aumentado.

4) *FUSE*: El método FUSE, propuesto en ¹², formula el problema de fusión mediante la ecuación de *Sylvester*, que luego se emplea para resolver un programa de maximización de las probabilidades (para ambas imágenes, HS y MS, el ruido es asumido como distribuciones multivariadas gaussianas) de los modelos de observación. Este método aprovecha una solución propuesta de forma cerrada de la ecuación de *Sylvester* para actualizar de manera eficiente la imagen super-resuelta de destino en un sub-espacio de baja dimensión. Además, FUSE tiene la flexibilidad de emplear estimadores bayesianos integrando información previa en el problema de fusión usando el ADMM y el método de descenso coordinado por bloque.

5) *FuVar*: La fusión de imágenes HS-MS con variabilidad espectral estacional ²⁹ se ha propuesto recientemente para abordar el problema de la variabilidad espectral debido a condiciones estacionales. El método FuVar supone que pueden estar presentes diferentes materiales en la imagen HS y MS debido a la gran diferencia de tiempo entre las dos adquisiciones (HS y MS, respectivamente). Para superar este problema, FuVar propuso emplear el MML generalizado (GLMM) ⁸⁹ para modelar las

⁸⁹ Tales Imbiriba, Ricardo Augusto Borsoi y José Carlos Moreira Bermudez. "Generalized linear mixing model accounting for endmember variability". En: *2018 IEEE International Conference on*

firmas espectrales puras de la imagen MS M_{MS} en función de las firmas espectrales puras presentes en la imagen HS M_{HS} . Específicamente, el modelo GLMM tiene en cuenta la variabilidad espectral considerando un factor de escala individual para cada banda espectral de las firmas espectrales puras. Así, matemáticamente, M_{MS} puede describirse como el producto de *Hadamard* entre M_{HS} y una matriz de factor de escalado positivo Ψ .

5) *HMF-IPNMF*: Basado en una versión extendida del método de factorización de matriz no negativa (NMF) para la tarea de fusión, el trabajo ⁹⁰ propuso un método de fusión de imágenes HS-MS que considera la variabilidad espectral. A diferencia de los algoritmos iterativos alternos anteriores, HMF-IPNMF empleó una estrategia secuencial directa. Esto consta de tres etapas que comienzan con la estimación de la firma espectral pura píxel a píxel a partir de una versión muestreada de la imagen HS. Luego, la segunda etapa estima los mapas de abundancia de alta resolución mediante un método de mínimos cuadrados totalmente restringidos (FCLS), mientras que la etapa final consiste en construir la imagen HS super-resuelta combinando las firmas espectrales puras de la primera etapa y los mapas de abundancia obtenidos en la segunda etapa.

4.3. Formulación del Problema

Esta sección establece el problema de fusión del modelo *FSVA* propuesto y considerado en esta tesis para estimar una imagen de alta resolución espacial y espectral empleando un modelo de mezclado espectral que aborda de manera simultánea la

Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). IEEE. 2018, págs. 1862-1866.

⁹⁰ Salah Eddine Brezini et al. "Hypersharpener by an NMF-Unmixing-Based Method Addressing Spectral Variability". En: *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters* (2021).

variabilidad espectral.

4.3.1. Modelo de observación El problema de fusión de datos HS-MS combina diferentes imágenes en una imagen fusionada de mejor calidad, que puede contribuir a la identificación y clasificación precisas de los materiales en un área, observada con una fina resolución espacial-espectral. Formalmente, sea $\mathbf{Y}_h \in \mathbb{R}^{N_\lambda \times N_{lxy}}$ una imagen HS observada de alta resolución espectral y baja resolución espacial con N_λ bandas y N_{lxy} píxeles, y $\mathbf{Y}_m \in \mathbb{R}^{N_{l\lambda} \times N_{xy}}$ una imagen MS observada de alta resolución espacial y baja espectral con $N_{l\lambda}$ bandas y N_{xy} píxeles, con $N_{l\lambda} < N_\lambda$ y $N_{lxy} < N_{xy}$. El problema de fusión consiste en estimar una imagen de alta resolución espacial y alta espectral \mathbf{Z} , a partir de \mathbf{Y}_h y \mathbf{Y}_m . Normalmente, la literatura de fusión HSI-MSI asume que todas las imágenes observadas están registradas conjuntamente. Bajo este supuesto y considerando el modelo de representación en la Ec. (13), el MSI y HSI observados se representan matemáticamente como

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_m &= \mathbf{RZ} + \mathbf{H}_m \\ \mathbf{Y}_h &= \mathbf{ZBD} + \mathbf{H}_h \end{aligned}, \quad (14)$$

donde $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N_{xy} \times N_{xy}}$ representa el desenfoque óptico debido a la función de dispersión del sensor, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N_{xy} \times N_{lxy}}$ (donde $N_{lxy} = N_{xy}/N_l$, donde N_l es el factor de submuestreo espacial) y $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N_{l\lambda} \times N_\lambda}$ es una matriz que contiene las funciones de respuesta espectral de cada banda del sensor MS. $\mathbf{H}_m \in \mathbb{R}^{N_{l\lambda} \times N_{xy}}$ y $\mathbf{H}_h \in \mathbb{R}^{N_\lambda \times N_{lxy}}$ representan el ruido aditivo ²⁰.

El supuesto de linealidad en el MML puede ser una aproximación muy eficaz en la mayoría de los casos reales. Sin embargo, no puede manejar el problema de la variabilidad espectral, que es muy común en los sensores HS. Para superar aún más las limitaciones del MML en imágenes HS, que ignora los efectos de las variabilida-

des espectrales, este trabajo adopta el enfoque ALMM. Incorporando el algoritmo ALMM en la Ec. (12) y en la ecuación del modelo de fusión (14), la imagen MS y la imagen HS observadas se pueden expresar como

$$\begin{aligned} Y_m &= R(MAS + EC) + H_m \\ Y_h &= (MAS + EC)BD + H_h \end{aligned} \quad (15)$$

En la Fig. 20 se muestra una representación esquemática del modelo de fusión propuesto. En aras de la integridad, todas las dimensiones de la matriz y sus respectivas relaciones se resumen en la Tabla 3.

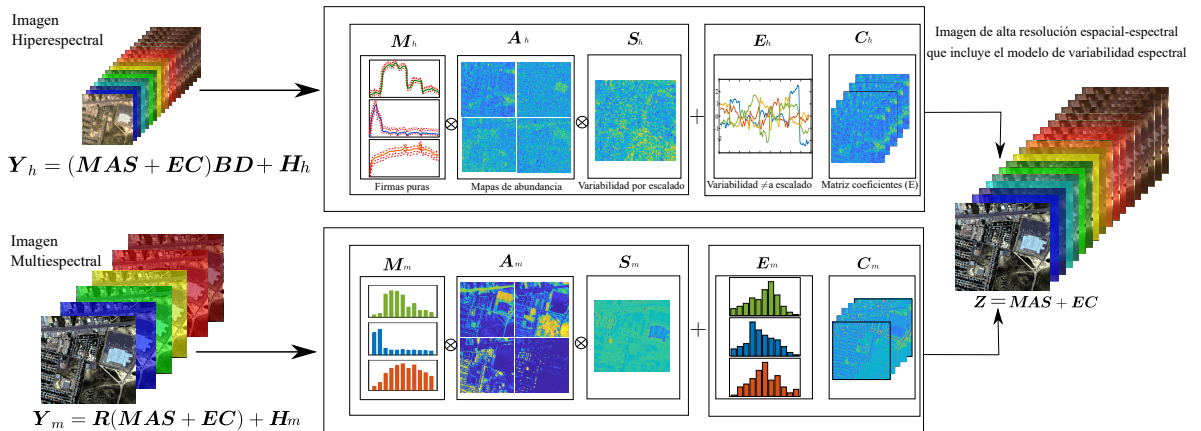


Figura 20. Esquema de fusión de imágenes espectrales propuesto que aborda la variabilidad espectral.

Cuadro 3. Resumen de las dimensiones de las matrices.

Variable	Descripción	Relación
N_{xy}	Alta resolución espacial	$N_{lxy} = N_{xy}/N_d$
N_{lxy}	Baja resolución espacial	
N_e	Número de firmas puras	$N_e < N_k \ll N_{xy}$
N_λ	Alta resolución espectral	$N_{l\lambda} < N_\lambda$
$N_{l\lambda}$	Baja resolución espectral	

4.3.2. Problema de optimización Dadas las observaciones de HSI y MSI en Ec. (15), proponemos el siguiente problema de optimización restringida para recuperar una imagen espectral de alta resolución \mathbf{Z}

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{A}, \mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{C}} J(\mathbf{A}, \mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{C}) \\ \text{s.t. } \mathbf{A} \succeq 0, \mathbf{S} \succeq 0, \end{aligned} \quad (16)$$

con

$$\begin{aligned} J(\mathbf{A}, \mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{C}) = 1/2 \|\mathbf{Y}_h - (\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{E}\mathbf{C})\mathbf{B}\mathbf{D}\|_{\mathbb{F}}^2 \\ + (\lambda_m/2) \|\mathbf{Y}_m - \mathbf{R}(\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{E}\mathbf{C})\|_{\mathbb{F}}^2 + \phi(\mathbf{A}) + \psi(\mathbf{C}) + \gamma(\mathbf{E}) \end{aligned} \quad (17)$$

$$J(\mathbf{A}, \mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{C}) = f(\mathbf{A}, \mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{C}) + \phi(\mathbf{A}) + \psi(\mathbf{C}) + \gamma(\mathbf{E}),$$

donde se requiere estimar las variables \mathbf{A} , \mathbf{S} , \mathbf{E} y \mathbf{C} mientras que se proporciona \mathbf{M} . Dado que el problema de la fusión está mal planteado, se introducen varias asunciones (o conocimientos previos) en el algoritmo ALMM mediante regularizadores a través de las funciones $\phi(\mathbf{A})$, $\psi(\mathbf{C})$ y $\gamma(\mathbf{E})$. Específicamente, la regularización de las abundancias $\phi(\mathbf{A}) = \lambda \|\mathbf{A}\|_{1,1}$ con el parámetro de regularización λ promueve que los mapas de abundancia sean dispersos, considerando que la firma espectral generalmente se compone de un número limitado de materiales en una escena HS. La regularización del coeficiente de variabilidad espectral $\psi(\mathbf{C}) = \beta/2 \|\mathbf{C}\|_{\mathbb{F}}^2$, permite modelar las variaciones que se presentan en el problema de fusión de imágenes HS-MS y que no se pueden modelar por escalado representado por \mathbf{S} . Finalmente, la función de regularización para el diccionario de variabilidad espectral $\gamma(\mathbf{E}) = \nu/2 \|\mathbf{M}^T \mathbf{E}\|_{\mathbb{F}}^2 + \zeta/2 \|\mathbf{E}^T \mathbf{E} - \mathbf{I}\|_{\mathbb{F}}^2$ se construye a partir de dos suposiciones previas: la variabilidad espectral del diccionario debe tener una baja coherencia con

la matriz de firmas espectrales puras M y debe ser ortogonal para representar adecuadamente varios escenarios de variabilidad espectral posibles.

4.4. Algoritmo de optimización ADMM

En esta sección se estudia el algoritmo de optimización propuesto para resolver (17). Se debe recordar que este problema no es convexo con respecto a $[A, S, E, C]$, lo que lo hace desafiante. La estrategia investigada aquí consiste en un algoritmo de gradiente descendiente coordinado por bloque, con optimizaciones alternas con respecto a las matrices requeridas. Los cuatro problemas de optimización resultantes son convexos y, por tanto, pueden resolverse utilizando el algoritmo ADMM ⁹¹. Un bosquejo de la estrategia propuesta se detalla en el Algoritmo 1.

La entrada del algoritmo son la imagen HS (Y_h) y la imagen MS (Y_m), la matrices de decimación R, D y el matriz de desenfoque B , estas matrices dependen de los parámetros de adquisición, y los parámetros de regularización $\lambda, \zeta, \nu, \beta, \rho$. El parámetro ρ corresponde al peso del Lagrangiano aumentado en el algoritmo ADMM (ver la Sección de optimización con respecto a A, S, E , y C para obtener más detalles). En la primera línea empleamos un algoritmo de extracción de las firmas espectrales puras para definir la matriz de firmas puras M . Para nuestros experimentos empleamos el algoritmo SISAL propuesto en ⁹² para extraer las firmas puras. Luego, en la línea 5 optimizamos con respecto a los mapas de abundancia A empleando el algoritmo ADMM. De manera similar, en la línea 6, 9 y 10 optimizamos con respecto a las variables S, E y C , respectivamente. La variabilidad espectral por

⁹¹ Stephen Boyd et al. "Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers". En: *Foundations and Trends® in Machine learning* 3.1 (2011), págs. 1-122.

⁹² José M Bioucas-Dias. "A variable splitting augmented Lagrangian approach to linear spectral unmixing". En: *2009 First workshop on hyperspectral image and signal processing: Evolution in remote sensing*. IEEE. 2009, págs. 1-4.

Algorithm 1 Algoritmo propuesto de fusión de imágenes espectrales que aborda la variabilidad espectral - FSVA

Entrada: $\mathbf{Y}_h, \mathbf{Y}_m, \mathbf{R}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \lambda, \rho$

// Algoritmo de extracción de firmas puras

1: $\mathbf{M} \leftarrow \text{EEA}(\mathbf{Y}_h)$

// Optimización Alternativa

2: **for** $t = 1, 2, \dots$ **hasta criterio de parada do**

// Optimizar A y S usando ADMM.

// Observe los Algoritmos 2 y 3 respectivamente .

3: $\bar{\mathbf{Y}}_m \leftarrow \mathbf{Y}_m - \mathbf{R}\mathbf{E}^{(t)}\mathbf{C}^{(t)}$

4: $\bar{\mathbf{Y}}_h \leftarrow \mathbf{Y}_h - \mathbf{E}^{(t)}\mathbf{C}^{(t)}\mathbf{B}\mathbf{D}$

5: $\mathbf{A}^{(t+1)} \leftarrow \text{ADMM_A}(\bar{\mathbf{Y}}_m, \bar{\mathbf{Y}}_h, \mathbf{S}^{(t)}, \mathbf{M}, \mathbf{R}, \mathbf{D}, \mathbf{B})$

6: $\mathbf{S}^{(t+1)} \leftarrow \text{ADMM_S}(\bar{\mathbf{Y}}_m, \bar{\mathbf{Y}}_h, \mathbf{A}^{(t+1)}, \mathbf{M}, \mathbf{R}, \mathbf{D}, \mathbf{B})$

// Optimizar E y C usando ADMM.

// Observe los Algoritmos 4 y 5 respectivamente .

7: $\hat{\mathbf{Y}}_m \leftarrow \mathbf{Y}_m - \mathbf{R}\mathbf{M}\mathbf{A}^{(t+1)}\mathbf{S}^{(t+1)}$

8: $\hat{\mathbf{Y}}_h \leftarrow \mathbf{Y}_h - \mathbf{M}\mathbf{A}^{(t+1)}\mathbf{S}^{(t+1)}\mathbf{B}\mathbf{D}$

9: $\mathbf{E}^{(t+1)} \leftarrow \text{ADMM_E}(\hat{\mathbf{Y}}_m, \hat{\mathbf{Y}}_h, \dots)$

10: $\mathbf{C}^{(t+1)} \leftarrow \text{ADMM_C}(\hat{\mathbf{Y}}_m, \hat{\mathbf{Y}}_h, \dots)$

11: $\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{M}\mathbf{A}$

Salida: \mathbf{X}

escalado \mathbf{S} se inicializa con unos, el diccionario de variabilidad espectral \mathbf{E} se inicializa como una matriz aleatoria ortogonal y sus coeficientes \mathbf{C} se inicializan con ceros. Se pueden encontrar más detalles sobre la formulación de optimización y los algoritmos ADMM en la Sección 4.6 .

4.4.1. Convergencia de algoritmos El problema de optimización en (16) visto como una función de \mathbf{A} para un valor dado de \mathbf{S} , \mathbf{E} y \mathbf{C} es convexo. De manera similar, la optimización de (16) con respecto a \mathbf{S} , o \mathbf{E} o \mathbf{C} para un valor dado de las otras variables de optimización son convexas.

La función de costo J en (17) es continua y tiene conjuntos de niveles compactos. Además, la función f es diferenciable asegurando que la función J sea regular como

se indica en ⁹³. Como consecuencia, del teorema 4.1 (b) en ⁹³, sabemos que cada punto límite de la secuencia $\{\mathbf{A}(t), \mathbf{S}(t), \mathbf{E}(t), \mathbf{C}(t)\}$ generado por el Algoritmo 1 es un punto estacionario del problema de optimización considerado. Finalmente, tenga en cuenta que el algoritmo BCD requiere la solución exacta de cada subproblema y estas soluciones se alcanzan de forma asintótica con el algoritmo ADMM.

4.5. Resultados

Esta sección presenta extensos experimentos realizados para validar el método propuesto *FSVA* de fusión de imágenes HS y MS que aborda la variabilidad espectral en el proceso de fusión. Los experimentos se llevan a cabo utilizando cinco conjuntos de datos diferentes: cuatro conjuntos de datos semisintéticos y un conjunto de datos reales. Los conjuntos de datos semisintéticos corresponden a imágenes HS reales que se emplean para obtener las imágenes HS y MS que se fusionarán como se describe en la subsección 4.5.2. El primer conjunto de datos semisintéticos es una sección sobre un área urbana (conjunto de datos HS *Urban*, ver la Fig. 21) ⁸⁵. La segunda es una imagen HS que incluye principalmente áreas agrícolas (AVIRIS Moffett Field) ⁶. El tercer conjunto de datos HS muy llamado Jasper Ridge, también capturado por el sensor AVIRIS ⁹⁴. El último conjunto de datos semisintéticos es la imagen HS adquirida en la Universidad de Pavía (*PaviaU*) ⁹⁵ Adquirida por el sensor HS ROSIS. Finalmente, el método propuesto se evaluó en una configuración más real donde las entradas de las imágenes HS y MS se adquieren de dos plataformas

⁹³ Paul Tseng. "Convergence of a block coordinate descent method for nondifferentiable minimization". En: *Journal of optimization theory and applications* 109.3 (2001), págs. 475-494.

⁹⁴ Feiyun Zhu. "Hyperspectral unmixing: ground truth labeling, datasets, benchmark performances and survey". En: *arXiv preprint arXiv:1708.05125* (2017).

⁹⁵ Disponible en <http://speclab.cr.usgs.gov/spectral-lib.html>.

satelitales diferentes: DESIS ⁹⁶ y Sentinel-2 ⁹⁷, respectivamente, sobre territorio colombiano.

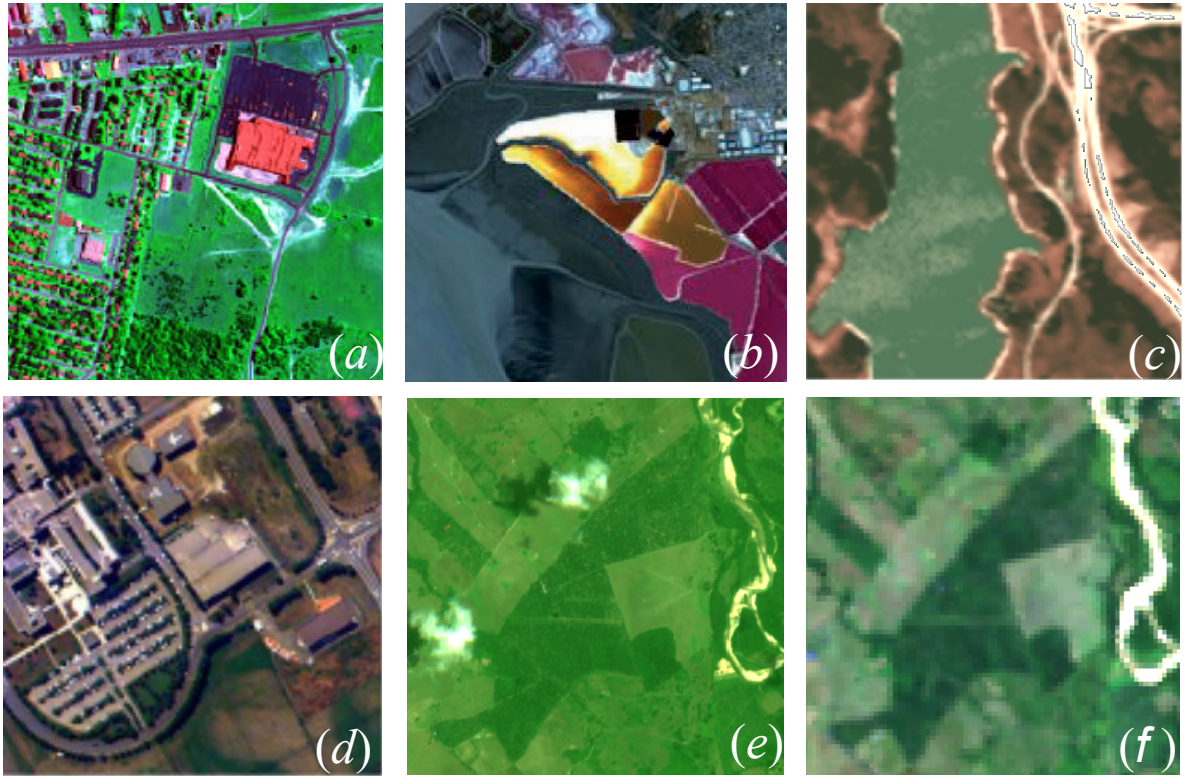


Figura 21. Conjuntos de datos de a.a d. son semisintéticos y de e. a f. Son imágenes espectrales reales. (a) Urban, (b) Moffett field, (c) Jasper, (d) PaviaU. (e)-(f) son las imágenes satelitales reales de MS y HS adquiridas sobre territorio colombiano.

4.5.1. Evaluación del rendimiento El rendimiento del algoritmo propuesto FS-VA de fusión HS-MS abordando el problema de variabilidad espectral se evaluó en

⁹⁶ Rupert Müller et al. "The new hyperspectral sensor DESIS on the multi-payload platform MUSES installed on the ISS". En: *ISPRS - International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences XLI-B1* (jun. de 2016), págs. 461-467. DOI: 10.5194/isprsarchives-XLI-B1-461-2016.

⁹⁷ C Dechoz et al. "Sentinel 2 global reference image". En: *Image and Signal Processing for Remote Sensing XXI*. Vol. 9643. International Society for Optics y Photonics. 2015, 96430A.

función de la medición de la calidad de las imágenes reconstruidas mediante la comparación de los datos hiperespectrales de alta resolución espacial estimados $\hat{\mathbf{Z}}$ respecto a los datos originales \mathbf{Z} , esta evaluación se realizó desde dos puntos de vista: la calidad de reconstrucción espacial de cada banda espectral y la calidad de reconstrucción espectral de cada espectro en un solo píxel. Se usaron cuatro métricas de calidad, la primera es la proporción máxima de señal a ruido o PSNR (del inglés *Peak Signal-to-Noise Ratio*), que se usa para evaluar la calidad de la reconstrucción espacial, y se define como:

$$\text{PSNR}(\mathbf{Z}, \hat{\mathbf{Z}}) = \frac{1}{N_\lambda} \sum_{n_\lambda=1}^{N_\lambda} 10 \log_{10} \left(\frac{M\mathbb{E} \{ \max(\mathbf{Z}_{n_\lambda,:}) \}}{\| \mathbf{Z}_{n_\lambda,:} - \hat{\mathbf{Z}}_{n_\lambda,:} \|_F^2} \right), \quad (18)$$

donde $\mathbf{Z}_{i,:}$ se refiere a la i -ésima fila de la matriz \mathbf{Z} , N_λ es el número total de bandas, y $\mathbb{E} \{ \cdot \}$ es el operador de valor esperado. Los valores altos de PSNR indican una mayor calidad de la reconstrucción espacial.

La segunda métrica es el Mapeo de Ángulo Espectral o SAM (del inglés *Spectral Angle Mapper*)

$$\text{SAM}(\mathbf{Z}, \hat{\mathbf{Z}}) = \frac{1}{N_{xy}} \sum_{n_{xy}=1}^{N_{xy}} \arccos \left(\frac{(\mathbf{Z}_{:,n_{xy}}^\top \hat{\mathbf{Z}}_{:,n_{xy}})}{\| \mathbf{Z}_{:,n_{xy}} \|_2 \| \hat{\mathbf{Z}}_{:,n_{xy}} \|_2} \right), \quad (19)$$

donde $\mathbf{Z}_{:,i}$ se refiere a la i -ésima columna de la matriz \mathbf{Z} y N_{xy} es el número total de vectores espectrales. SAM compara firmas espectrales calculando el ángulo entre dos firmas. La tercera métrica es el índice ERGAS (del francés *Erreur Relative Globale Adimensionnelle de Synthèse*) ⁶, que se define para una imagen estimada $\hat{\mathbf{Z}}$ y una imagen real \mathbf{Z} , como:

$$\text{ERGAS}(\mathbf{Z}, \hat{\mathbf{Z}}) = 100 \sqrt{\frac{N}{N_\lambda N_{xy}} \sum_{n_\lambda=1}^{N_\lambda} \frac{\| \mathbf{Z}_{n_\lambda,:} - \hat{\mathbf{Z}}_{n_\lambda,:} \|_F^2}{\text{mean}(\hat{\mathbf{Z}}_{n_\lambda,:})^2}}, \quad (20)$$

Cuanto menor sea el ERGAS, mejores resultados de fusión se obtienen.

La cuarta métrica es el índice de calidad de imagen universal (UIQI) ⁹⁸, que mide la calidad espectral de la imagen fusionada, la UIQI se evalúa en el intervalo $[-1, 1]$, donde el valor 1 indica que la imagen de referencia o verdad de terreno \mathbf{Z} , y la imagen estimada $\hat{\mathbf{Z}}$ son iguales (recuperación perfecta). La UIQI entre la imagen de referencia \mathbf{Z} y la imagen fusionada $\hat{\mathbf{Z}}$ está definida como:

$$\text{UIQI}(\mathbf{Z}, \hat{\mathbf{Z}}) = \frac{4}{N_\lambda K} \sum_{n_\lambda=1}^{N_\lambda} \sum_{k=1}^K \frac{\text{cov}(\mathbf{P}_k \mathbf{Z}_{n_\lambda}, \mathbf{P}_k \hat{\mathbf{Z}}_{n_\lambda})}{\text{var}(\mathbf{P}_k \mathbf{Z}_{n_\lambda}) + \text{var}(\mathbf{P}_k \hat{\mathbf{Z}}_{n_\lambda})} \times \frac{\text{mean}(\mathbf{P}_k \mathbf{Z}_{n_\lambda}) \text{mean}(\mathbf{P}_k \hat{\mathbf{Z}}_{n_\lambda})}{\text{mean}(\mathbf{P}_k \mathbf{Z}_{n_\lambda})^2 + \text{mean}(\mathbf{P}_k \hat{\mathbf{Z}}_{n_\lambda})^2}, \quad (21)$$

donde \mathbf{P}_k es una matriz de proyección que extrae una ventana $k - th$ de tamaño 32×32 píxeles de las imágenes \mathbf{Z} y $\hat{\mathbf{Z}}$, siendo K el número total de parches de una imagen.

4.5.2. Configuración y resultados en conjuntos de datos semi-sintéticos Seguimos la metodología experimental derivada del protocolo de *Wald* ⁹⁹ para la fusión de imágenes HS-MS. Esta metodología se ha aplicado en ⁶ y ¹⁰⁰. 1) Dada una imagen superresuelta sin ruido, \mathbf{Z} , simulamos una imagen HS de baja resolución espacial, \mathbf{Y}_h , aplicando un kernel espacial de desenfoque gaussiano (\mathbf{B}), y submuestreo uniforme sobre la imagen desenfocada con un factor de cuatro, aplicando el opera-

⁹⁸ Z. Wang y A.C. Bovik. "A universal image quality index". En: *IEEE Signal Processing Letters* 9.3 (2002). cited By 3422, págs. 81-84. DOI: 10.1109/97.995823.

⁹⁹ Lucien Wald, Thierry Ranchin y Marc Mangolini. "Fusion of satellite images of different spatial resolutions: Assessing the quality of resulting images". En: (1997).

¹⁰⁰ Miguel A Veganzones et al. "Hyperspectral super-resolution of locally low rank images from complementary multisource data". En: *IEEE Transactions on Image Processing* 25.1 (2015), págs. 274-288.

dor (\mathbf{D}) en cada dirección espacial. 2) También simulamos una imagen MS de alta resolución espacial, \mathbf{Y}_m , filtrando la dimensión espectral de la imagen de referencia con la respuesta espectral (\mathbf{R}) del sensor Sentinel-2B en los canales del rojo, verde, azul y NIR en las longitudes de onda adecuadas. 3) Se agregó ruido blanco a las dos imágenes, \mathbf{Y}_h y \mathbf{Y}_m , con 30 dB y 40 dB, respectivamente. 4) Luego, estimamos la imagen superresuelta, $\hat{\mathbf{Z}}$, aplicando una metodología de reconstrucción de ambas imágenes, \mathbf{Y}_h y \mathbf{Y}_m . 5) Después de eliminar el ruido de la imagen superresuelta estimada, la comparamos con la original. Para todos los experimentos, el número de firmas espectrales se estima utilizando el algoritmo Hysime¹⁰¹ y la matriz de firmas espectrales puras \mathbf{M} se obtiene empleando el algoritmo SISAL⁹². Los parámetros de regularización se seleccionan ejecutando diferentes experimentos en los conjuntos de datos sintéticos con diferentes configuraciones de parámetros (consulte la sección 4.5.2. Item: Sensibilidad de los parámetros de regularización).

Experimento sobre el conjunto de datos *Urban* Urban es uno de los conjunto de datos HS más utilizados en el estudio y desarrollo de algoritmos para la clasificación, desmezclado espectral o fusión de imágenes HS⁸⁵⁹⁴. La resolución espacial es 307×307 píxeles y cada píxel corresponde a un área de $2 \times 2 \text{ m}^2$. En estos experimentos usamos una sección de 256×256 píxeles. El conjunto de datos *Urban* tiene 210 bandas espectrales de 400 a 2500 nm, pero la dimensión espectral se submuestreó a 128 bandas espectrales dando como resultado una imagen de referencia de tamaño $256 \times 256 \times 128$, a la que nos referiremos como la imagen superresuelta, \mathbf{Z} . Para este experimento los parámetros de regularización se fijaron como $\lambda = 1e - 3$, $\zeta = 1e - 4$, $\nu = 1e - 2$, $\beta = 20$, $\rho = 1e - 5$.

Los resultados cuantitativos de la fusión para el conjunto de datos *Urban* en térmi-

¹⁰¹ José M Bioucas-Dias y José MP Nascimento. "Hyperspectral subspace identification". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 46.8 (2008), págs. 2435-2445.

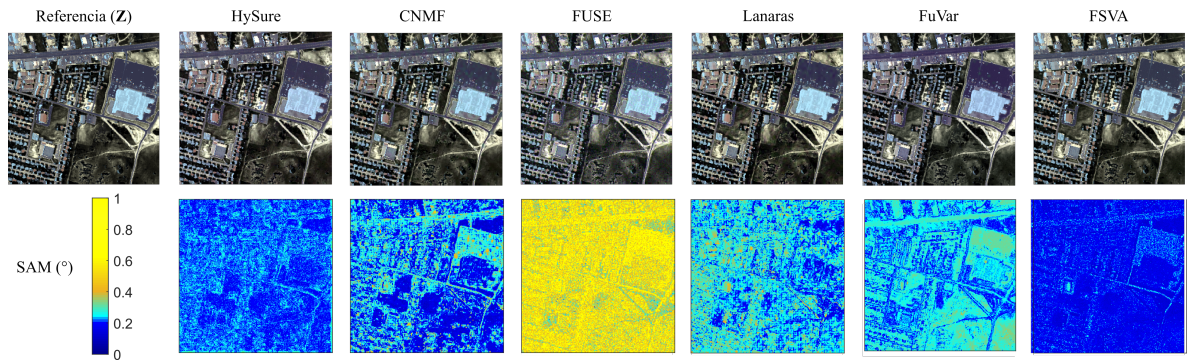


Figura 22. (Arriba) Imágenes urbanas super-resueltas obtenidas utilizando métodos de fusión HSI-MSI de última generación en comparación con el método propuesto que aborda la variabilidad espectral. (Abajo) Métrica SAM normalizada obtenida de las imágenes fusionadas. Hemos normalizado la métrica SAM entre 0 y 1 para mejorar la visualización de errores menores. El enfoque propuesto obtuvo valores más bajos en comparación con los otros algoritmos de fusión comparados.

nos de las métricas PSNR, UIQI, SAM y ERGAS introducidos en la sección 4.5.1 son mostrados en la Tabla 4. Comparamos con los métodos del estado del arte presentados en la sección 4.2.2. Estos resultados muestran que la calidad del método de fusión propuesto *FSVA* es la mejor con respecto a los otros métodos. También realizamos un análisis cualitativo para evaluar el rendimiento de los algoritmos para la calidad de las imágenes fusionadas (ver Fig. 22). En la primera fila se muestra una imagen compuesta en color de la imagen de referencia (*Z*).

Cuadro 4. Evaluación de los resultados de la fusión utilizando el modelo de variabilidad espectral en un conjunto de datos *urban*. En negrita se resalta el mejor resultado para cada caso.

Métodos	PSNR	UIQI	SAM(^o)	ERGAS
Hysure	41.858	0.997	0.870	0.520
CNMF	39.243	0.995	1.005	0.689
FUSE	28.949	0.949	4.437	2.641
Lanaras	37.085	0.993	1.252	0.856
FuVar	40.092	0.997	1.182	0.649
FSVA	45.314	0.998	0.604	0.345

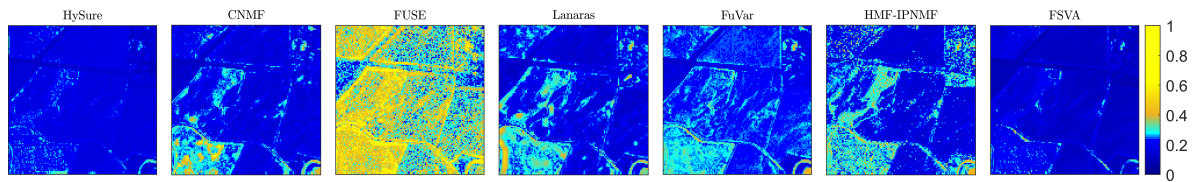


Figura 23. Resultados de fusión mediante la métrica SAM sobre el conjunto de datos HS de Moffet - AVIRIS.

Experimento sobre el conjunto de datos *AVIRIS Moffett Field* Este conjunto de datos fue captado por el sensor HS AVIRIS sobre *Moffett Field* en California. Está compuesto principalmente por vegetación, urbanizaciones y agua. La imagen consta de 1923×753 píxeles, pero seleccionamos una porción de 128×128 y usamos 120 bandas. En la parte superior derecha de la Fig. 21.b) se muestra una imagen en color compuesta de la escena de interés. Para este experimento, los parámetros de regularización se fijaron como $\lambda = 1e - 4$, $\zeta = 1e - 4$, $\nu = 1e - 2$, $\beta = 20$, $\rho = 1e - 5$. En este experimento, también se comparan los cinco métodos de fusión. Es importante tener en cuenta que los métodos FuVar²⁹ y HMF-IPNMF⁹⁰ también abordan el problema de la variabilidad espectral dentro de la tarea de inferencia de fusión. La tabla 5 resume los resultados de todas las métricas de calidad y los métodos estudiados, donde el método FSVA propuesto supera a todos los otros algoritmos de fusión. En términos de tiempo, el algoritmo más rápido es FUSE, sin embargo, presenta el peor rendimiento, mientras que el método de fusión propuesto logra el mejor rendimiento en un tiempo razonable. Además, uno de los algoritmos más competitivos (FuVar) presenta un rendimiento comparable pero es el más lento. Con el fin de facilitar la evaluación cuantitativa del rendimiento y analizar específicamente el comportamiento espectral de la imagen reconstruida, la Fig. 23 muestra la métrica de SAM de manera cualitativa, donde se observa que el método FSVA propuesto tiene una menor variación espectral con respecto a la imagen de referencia (\mathbf{Z}) de alta resolución espacial y espectral.

Cuadro 5. Evaluación de los resultados de la fusión utilizando el modelo de variabilidad espectral en el conjunto de datos de Aviris Moffett y el tiempo de ejecución en minutos. los resultados en negrita resaltan el mejor resultado para cada caso.

Métodos	PSNR	UIQI	SAM(^o)	ERGAS	Tiempo
Hysure	42.260	0.995	2.578	1.256	3.944
CNMF	37.992	0.989	3.534	2.152	1.893
FUSE	25.409	0.817	16.298	10.089	0.029
Lanaras	34.552	0.983	3.794	2.782	1.088
FuVar	37.678	0.987	4.482	2.272	56.662
HMF-IPNMF	27.189	0.937	4.334	6.761	34.766
FSVA	45.308	0.996	2.303	1.173	5.316

Conjunto de datos experimentales de Jasper Ridge La imagen HS de *Jasper Ridge* tiene 512×614 píxeles y 224 bandas en el rango espectral de 380 nm a 2500 nm. Dado que esta imagen es grande, consideramos una subimagen de 128×128 píxeles, que contiene $N_e = 4$ firmas espectrales puras, tales como vegetación, suelo, agua y caminos (ver Fig. 21 (c)). Para este experimento los parámetros de regularización se fijaron como $\lambda = 1e - 3$, $\zeta = 1e - 4$, $\nu = 5e - 5$, $\beta = 10$, $\rho = 1e - 5$. En este experimento, se evaluó el rendimiento del algoritmo para un conjunto de 10 firmas espectrales que corresponden a una misma clase y que presentan variaciones espectrales, las cuales son ilustradas en la Fig. 24 (ver arriba a la izquierda). En la Fig. 24 se grafican las firmas estimadas del mismo conjunto para los algoritmos en comparación contra las firmas estimadas por el método de fusión FSVA propuesto, donde se puede evidenciar la robustez del método propuesto en esta investigación. Además, incluimos la métrica SAM de las firmas espectrales estimadas para evaluar cuantitativamente el desempeño de FSVA en este conjunto de datos específico. En la Fig. 24 podemos observar la ventaja del método propuesto para recuperar todas las firmas espectrales en presencia de variaciones espectrales. Para obtener más detalles y facilitar la visualización, se grafica dos firmas espectrales del conjunto

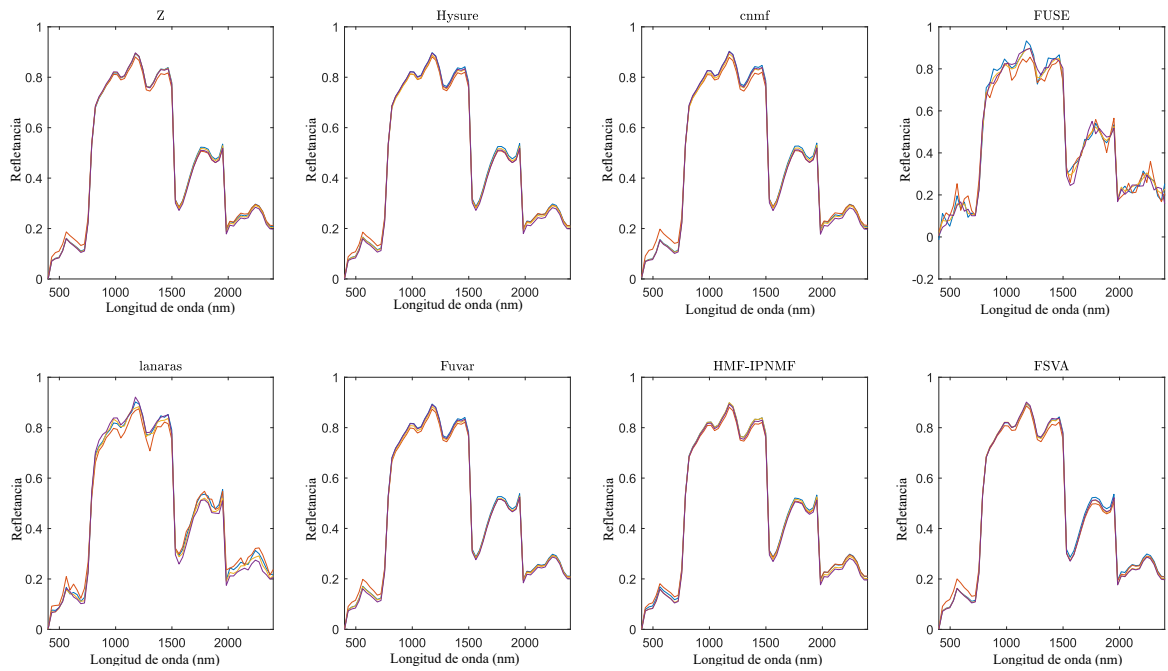


Figura 24. Comparación de 10 firmas espectrales de la misma clase ubicadas en diferentes lugares dentro de la imagen.

seleccionado en la Fig. 25 se evidencia que el método propuesto es el más cercano a las firmas espectrales puras de la imagen de referencia. Para este experimento, también son reportado los resultados cuantitativos en la Tabla 6

Cuadro 6. Evaluación de los resultados de la fusión utilizando el modelo de variabilidad espectral en el conjunto de datos de Jasper. Los resultados en negrita resaltan el mejor resultado para cada caso.

Métodos	PSNR	UIQI	SAM($^{\circ}$)	ERGAS
Hysure	40.309	0.989	1.001	3.977
CNMF	33.224	0.965	2.945	2.538
FUSE	27.432	0.905	7.918	3.338
Lanaras	36.081	0.984	2.133	1.797
FuVar	33.997	0.977	1.941	2.021
HMF-IPNMF	32.249	0.982	1.100	2.961
FSVA	42.705	0.990	1.024	1.750

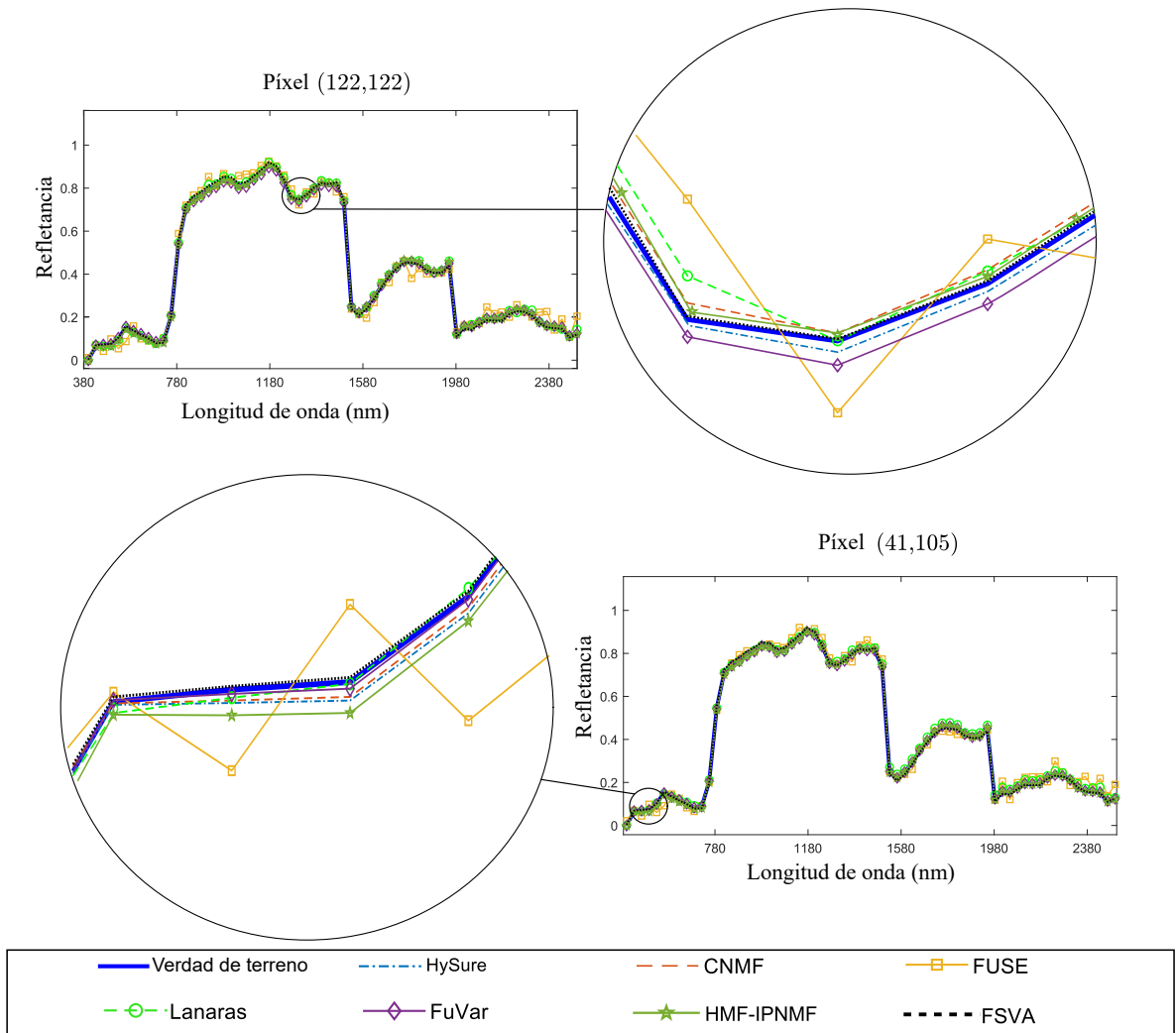


Figura 25. Comparación visual de firmas espectrales para dos píxeles diferentes que corresponden al conjunto de datos de Jasper.

Experimentos con el conjunto de datos *Pavia University* En este experimento evaluamos el desempeño del método de fusión FSVA propuesto en términos de la calidad de la imagen reconstruida. Adicionalmente, se evaluó el resultado de la imagen fusionada en la tarea de inferencia de clasificación usando el conjunto de datos de la Universidad de Pavia. Este conjunto de datos es una imagen HS real que representa un área urbana compuesta principalmente por edificios, vegetación y estacionamientos (ver Fig. 21(d)). La imagen HS fue adquirida sobre Pavia (norte

de Italia) a través del sensor AVIRIS en 1997. Esta imagen HS tiene 610×340 píxeles y 224 bandas espectrales (400nm a 2500nm). Se tomó una sección de la imagen que contenía 128×128 píxeles, generando una imagen de referencia de tamaño $128 \times 128 \times 103$. Para este experimento los parámetros de regularización se fijaron como $\lambda = 5e - 3$, $\zeta = 1e - 4$, $\nu = 5e - 3$, $\beta = 1,5e - 10$, $\rho = 1e - 4$. Los resultados cuantitativos se presentan en la Tabla 7.

Cuadro 7. Evaluación de los resultados de la fusión utilizando el modelo de variabilidad espectral en el conjunto de datos de Pavia. La negrita resalta el mejor resultado para cada caso.

Métodos	PSNR	UIQI	SAM ($^{\circ}$)	ERGAS
Hysure	42.254	0.986	2.654	1.749
CNMF	35.931	0.958	3.712	2.967
FUSE	24.379	0.705	21.359	13.632
Lanaras	34.552	0.959	3.634	3.113
FuVar	33.600	0.945	6.322	4.375
FSVA	43.242	0.986	2.312	1.529

Adicionalmente, se evaluó la calidad de las imágenes fusionadas en términos de precisión para la tarea de clasificación espectral con el fin de resaltar la ventaja de los resultados del método de fusión propuesto para tareas de post-procesamiento. Como medida de desempeño, empleamos la precisión general (OA, del inglés *overall accuracy*) y la precisión promedio (AA, del inglés *average accuracy*). El área de prueba en el conjunto de datos de Pavia contiene ocho clases principales de cobertura del suelo, bitumen, asfalto, árboles, ladrillos, suelo desnudo, láminas de metal (tejado), prados y sombras. La clasificación de esta imagen es una tarea desafiante, dado que las firmas espectrales de las clases de cobertura terrestre son muy similares y algunas de las curvas espectrales están mezcladas. El mapa de verdad de terreno que corresponde a la clasificación de las clases existente y el número de firmas espectrales seleccionadas para entrenamiento y prueba se muestran en

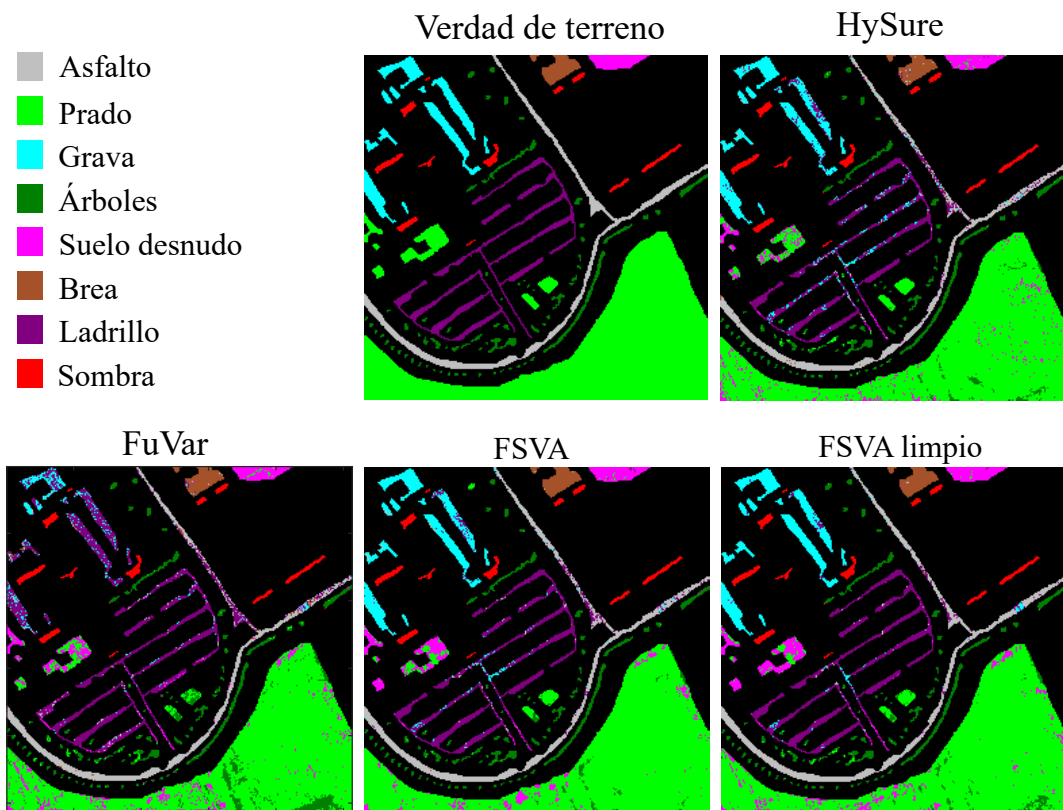


Figura 26. Resultados de clasificación obtenidos de las imágenes superresueltas obtenidas mediante diferentes algoritmos de fusión

la Fig. 26. Para el análisis experimental, los mapas de clasificación se estiman utilizando una máquina de soporte vectorial que tiene como entrada las imágenes HS recuperadas.

Dado que la idea principal del presente trabajo es modelar la variabilidad espectral en el proceso de fusión de imágenes HS-MS, podemos reducir su impacto negativo en las tareas de clasificación simplemente eliminando el término de variabilidad espectral EC y escalando S . Comparamos los resultados de clasificación de la imagen de alta resolución estimada de los métodos HySure y FuVar y la imagen de verdad de terreno. Los resultados cuantitativos en términos de OA y AA se reportan en la Tabla 8, mientras que los mapas de clasificación se muestran en la Fig. 26. En la Tabla 8, FSVA limpio se refiere al enfoque de fusión propuesto removiendo los térmi-

nos que modelan la variabilidad espectral. Los resultados muestran que HySure y FuVar tienen problemas para detectar las clases de asfalto y árboles, mientras que el método propuesto tiene el mejor rendimiento para todas las clases.

Cuadro 8. El promedio estimado y la precisión general para la clasificación sobre los resultados de fusión con o sin modelo de variabilidad espectral en el conjunto de datos de Pavia. Los resultados en negrita resaltan el mejor resultado para cada caso.

Métrica	HySure	FuVar	FSVA	FSVA limpia
AA	0.8908	0.7909	0.9241	0.9452
OA	0.9024	0.8090	0.9109	0.9261

Sensibilidad a los parámetros de regularización Con el objetivo de analizar la sensibilidad del algoritmo propuesto para diferentes parámetros de regularización, se realizó una serie de experimentos variando un parámetro de regularización a la vez, manteniendo los demás fijos. La figura 27 resume los resultados de estos experimentos en términos de PSNR en función de los parámetros de regularización. Como se muestra en la Fig. 27, los parámetros ζ , ν y β juegan un papel dominante, mientras que los parámetros λ , ρ son menos sensibles.

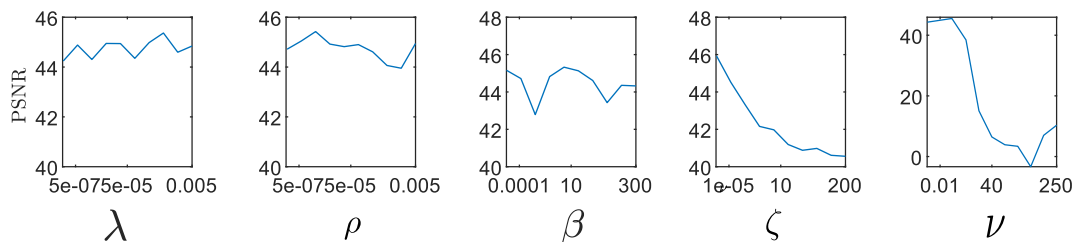


Figura 27. Sensibilidad del algoritmo de fusión propuesto a diferentes parámetros de regularización.

4.6. Problema de optimización con respecto a \mathbf{A} , \mathbf{S} , \mathbf{E} , y a \mathbf{C}

4.6.1. Optimización con respecto a \mathbf{A} El primer paso en la minimización de J en (17) es la optimización de \mathbf{A} mientras que las otras variables son fijas. Al introducir variables de división, el problema de optimización se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
 & \underset{\mathbf{A}}{\text{mín}} (1/2)\|\tilde{\mathbf{Y}}_h - \mathbf{V}_2\mathbf{D}\|_{\mathbb{F}}^2 + \dots \\
 & (\lambda_m/2)\|\tilde{\mathbf{Y}}_m - \mathbf{R}\mathbf{V}_1\|_{\mathbb{F}}^2 + \phi(\mathbf{V}_6) + i_+(\mathbf{V}_7) \tag{22} \\
 & \mathbf{V}_1 = \mathbf{M}\mathbf{V}_3 \quad \mathbf{V}_5 = \mathbf{A}\mathbf{S} \\
 \text{sujeto a} \quad & \mathbf{V}_2 = \mathbf{M}\mathbf{V}_4 \quad \mathbf{V}_6 = \mathbf{A} \\
 & \mathbf{V}_3 = \mathbf{A}\mathbf{S} \quad \mathbf{V}_7 = \mathbf{A} \\
 & \mathbf{V}_4 = \mathbf{V}_5\mathbf{B}
 \end{aligned}$$

donde $\tilde{\mathbf{Y}}_h = \mathbf{Y}_h - \mathbf{E}\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{D}$ y $\tilde{\mathbf{Y}}_m = \mathbf{Y}_m - \mathbf{R}\mathbf{E}\mathbf{C}$. La función indicadora i_+ denota el conjunto con valores no negativos. El lagrangiano aumentado asociado al problema (22) se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\mathbf{A}, \mathbf{V}) = & (1/2)\|\tilde{\mathbf{Y}}_h - \mathbf{V}_2\mathbf{D}\|_{\mathbb{F}}^2 + (\lambda_m/2)\|\tilde{\mathbf{Y}}_m - \mathbf{R}\mathbf{V}_1\|_{\mathbb{F}}^2 + \\
 & \phi(\mathbf{V}_6) + i_+(\mathbf{V}_7) + \frac{\rho}{2}\|\mathbf{V}_1 - \mathbf{M}\mathbf{V}_3 + \mathbf{G}_1\|_{\mathbb{F}}^2 + \\
 & \frac{\rho}{2}\|\mathbf{V}_2 - \mathbf{M}\mathbf{V}_4 + \mathbf{G}_2\|_{\mathbb{F}}^2 + \frac{\rho}{2}\|\mathbf{V}_3 - \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{G}_3\|_{\mathbb{F}}^2 + \tag{23} \\
 & \frac{\rho}{2}\|\mathbf{V}_4 - \mathbf{V}_5\mathbf{B} + \mathbf{G}_4\|_{\mathbb{F}}^2 + \frac{\rho}{2}\|\mathbf{V}_5 - \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{G}_5\|_{\mathbb{F}}^2 + \\
 & \frac{\rho}{2}\|\mathbf{V}_6 - \mathbf{A} + \mathbf{G}_6\|_{\mathbb{F}}^2 + \frac{\rho}{2}\|\mathbf{V}_7 - \mathbf{A} + \mathbf{G}_7\|_{\mathbb{F}}^2
 \end{aligned}$$

donde \mathbf{G}_i , con $i = 1, \dots, 7$, son variables duales y $\rho \geq 0$ pondera el Lagrangiano aumentado. La optimización del Lagrangiano aumentado con respecto a las varia-

bles primarias y duales se puede resolver de manera eficiente empleando el método alternativo de multiplicadores ⁹¹. Este algoritmo se resume en Algoritmo 2

Algorithm 2 subintrações ADMM para estimar \mathbf{A}

```

1: function ADMM_A( $\mathbf{Y}_m, \mathbf{Y}_h, \mathbf{M}, \mathbf{R}, \mathbf{D}, \mathbf{B}$ )
  // Método de dirección alterna
2:   for  $k = 1$  hasta criterio de parada do
3:      $\mathbf{A}^{(k+1)} = \min_{\mathbf{A}} \mathcal{L}(\mathbf{A}, \mathbf{V}_i^{(k)}, \mathbf{G}_i^{(k)})$ 
4:     for  $l = 1$  to 7 do
5:        $\mathbf{V}_l^{(k+1)} = \min_{\mathbf{V}_l} \mathcal{L}(\mathbf{A}^{(k+1)}, \mathbf{V}_l, \mathbf{V}_i, \mathbf{G}_i^{(k)})$ 
6:        $\mathbf{G}_1^{(k+1)} = \mathbf{G}_1^{(k)} + \mathbf{V}_1^{(k+1)} - \mathbf{M}\mathbf{V}_3^{(k+1)}$ 
7:        $\mathbf{G}_2^{(k+1)} = \mathbf{G}_2^{(k)} + \mathbf{V}_2^{(k+1)} - \mathbf{M}\mathbf{V}_4^{(k+1)}$ 
8:        $\mathbf{G}_3^{(k+1)} = \mathbf{G}_3^{(k)} + \mathbf{V}_3^{(k+1)} - \mathbf{A}^{(k+1)}\mathbf{S}$ 
9:        $\mathbf{G}_4^{(k+1)} = \mathbf{G}_4^{(k)} + \mathbf{V}_4^{(k+1)} - \mathbf{V}_5^{(k+1)}\mathbf{B}$ 
10:       $\mathbf{G}_5^{(k+1)} = \mathbf{G}_5^{(k)} + \mathbf{V}_5^{(k+1)} - \mathbf{A}^{(k+1)}\mathbf{S}$ 
11:       $\mathbf{G}_6^{(k+1)} = \mathbf{G}_6^{(k)} + \mathbf{V}_6^{(k+1)} - \mathbf{A}^{(k+1)}$ 
12:       $\mathbf{G}_7^{(k+1)} = \mathbf{G}_7^{(k)} + \mathbf{V}_7^{(k+1)} - \mathbf{A}^{(k+1)}$ 
13:   retorna  $\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{A}^{(k+1)}$ 

```

Actualizando A: Para encontrar la solución \mathbf{A} en la línea 3, forzamos la derivada de (22) con respecto a \mathbf{A} a cero y resolvemos el sistema resultante, lo que lleva a

$$\mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{2} (\mathbf{S}\mathbf{S}^T + \mathbf{I})^{-1} \quad (24)$$

donde $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{V}_3 + \mathbf{G}_3 + \mathbf{V}_5 + \mathbf{G}_5)\mathbf{S}^T + \mathbf{V}_6 + \mathbf{G}_6 + \mathbf{V}_7 + \mathbf{G}_7$.

Actualizando \mathbf{V}_1 : El problema de minimización que involucra \mathbf{V}_1 se puede obtener resolviendo $\partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{V}_1 = 0$, lo que lleva a

$$\mathbf{V}_1 = (\lambda_m \mathbf{R}^T \mathbf{R} + \rho \mathbf{I})^{-1} \boldsymbol{\Xi}, \quad (25)$$

donde $\Xi = \lambda_m \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{Y}}_m + \rho \mathbf{M} \mathbf{V}_3 - \mathbf{G}_1$

Actualizando \mathbf{V}_2 : Para minimizar (23) con respecto a \mathbf{V}_2 , resolvemos $\partial \mathcal{L} / \partial \mathbf{V}_2 = 0$, por lo tanto, se obtiene

$$\mathbf{V}_2 = \Gamma (\mathbf{D} \mathbf{D}^T + \rho \mathbf{I})^{-1}, \quad (26)$$

donde $\Gamma = \tilde{\mathbf{Y}}_h \mathbf{D}^T + \rho \mathbf{M} \mathbf{V}_4 - \mathbf{G}_2$.

Actualizando \mathbf{V}_3 : La actualización de \mathbf{V}_3 puede ser encontrada solucionando $\partial \mathcal{L} / \partial \mathbf{V}_3 = 0$, cuya solución es

$$\mathbf{V}_3 = (\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \mathbf{I})^{-1} \Theta \quad (27)$$

donde $\Theta = \mathbf{M}^T (\mathbf{V}_1 + \mathbf{G}_1) + \mathbf{A} \mathbf{S} - \mathbf{G}_3$.

Actualizando \mathbf{V}_4 : El problema de minimización involucrando \mathbf{V}_4 puede ser obtenida resolviendo $\partial \mathcal{L} / \partial \mathbf{V}_4 = 0$, llevando a

$$\mathbf{V}_4 = (\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \mathbf{I})^{-1} \Lambda, \quad (28)$$

donde $\Lambda = \mathbf{M}^T (\mathbf{V}_2 + \mathbf{G}_2) + \mathbf{V}_5 \mathbf{B} - \mathbf{G}_4$.

Actualizando \mathbf{V}_5 : Para minimizar el Lagrangiano (23) con respecto a \mathbf{V}_5 nosotros solucionamos el problema cuya solución analítica es

$$\mathbf{V}_5 = (\mathbf{B} \mathbf{B}^T + \mathbf{I})^{-1} \Delta \quad (29)$$

donde $\Delta = \mathbf{A}\mathbf{S} - \mathbf{G}_5 + (\mathbf{V}_4 + \mathbf{G}_4) \mathbf{B}^T$. Dado que la matriz \mathbf{B} es circular, la solución se puede calcular de manera eficiente usando la transformada de Fourier.

Actualizando \mathbf{V}_6 : La minimización con respecto a \mathbf{V}_6 corresponde al operador proximal escalado de la función cerrada, propia y convexa $\|\cdot\|_{1,1}$, cuya solución está dada por la columna función de umbral suave vectorial, es decir,

$$\mathbf{V}_6 = \max(0, \|\mathbf{A} - \mathbf{G}_6\|_{1,1} - \lambda/\rho) \text{sign}(\mathbf{A} - \mathbf{G}_6) \quad (30)$$

donde la función $\max(a, b)$ calcula el máximo entre a y b y la función $\text{sign}(c)$ calcula el signo del número c .

Actualizando \mathbf{V}_7 : Finalmente, minimizar el lagrangiano (23) con respecto a \mathbf{V}_7 corresponde al operador proximal de la función indicadora del conjunto \mathbb{R}_+ , cuya solución puede ser directamente obtenido como

$$\mathbf{V}_7 = \max(\mathbf{A} - \mathbf{G}_7, 0). \quad (31)$$

donde la función $\max(a, b)$ calcula el máximo entre a y b .

4.6.2. Optimización con respecto a \mathbf{S} La optimización de J con respecto a \mathbf{S} también se puede resolver usando el ADMM. Introducimos las variables de división para obtener el siguiente problema de optimización

$$\min_{\mathbf{S}} (1/2)\|\tilde{\mathbf{Y}}_h - \mathbf{V}_2\mathbf{D}\|_{\mathbb{F}}^2 + (\lambda_m/2)\|\tilde{\mathbf{Y}}_m - \mathbf{R}\mathbf{V}_1\|_{\mathbb{F}}^2 + i_+(\mathbf{V}_4) \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a} \quad & \mathbf{V}_1 = \mathbf{MAS} & \mathbf{V}_3 = \mathbf{MAS} \\ & \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_3\mathbf{B} & \mathbf{V}_4 = \mathbf{S}, \end{aligned}$$

donde $\tilde{\mathbf{Y}}_m$, $\tilde{\mathbf{Y}}_h$ y i_+ son los mismos que se definieron en la sección anterior. El lagrangiano aumentado asociado al problema (32) se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{S}, \mathbf{V}) &= (1/2)\|\tilde{\mathbf{Y}}_h - \mathbf{V}_2\mathbf{D}\|_{\mathbb{F}}^2 + (\lambda_m/2)\|\tilde{\mathbf{Y}}_m - \mathbf{R}\mathbf{V}_1\|_{\mathbb{F}}^2 + i_+(\mathbf{V}_4) \\ &+ \frac{\rho}{2}\|\mathbf{V}_1 - \mathbf{MAS} + \mathbf{G}_1\|_{\mathbb{F}}^2 + \frac{\rho}{2}\|\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3\mathbf{B} + \mathbf{G}_2\|_{\mathbb{F}}^2 \\ &+ \frac{\rho}{2}\|\mathbf{V}_3 - \mathbf{MAS} + \mathbf{G}_3\|_{\mathbb{F}}^2 + \frac{\rho}{2}\|\mathbf{V}_4 - \mathbf{S} + \mathbf{G}_4\|_{\mathbb{F}}^2, \end{aligned} \quad (33)$$

donde \mathbf{G}_i con $i = 1, \dots, 4$ son nuevamente las variables duales escaladas y $\rho \geq 0$ pondera el Lagrangiano aumentado. El algoritmo para resolver (33) se resume en Algoritmo 3.

Algorithm 3 Sub-iteraciones ADMM para estimar \mathbf{S}

```

1: function ADMM_S( $\mathbf{Y}_m, \mathbf{Y}_h, \mathbf{M}, \mathbf{R}, \mathbf{D}, \mathbf{B}$ )
2:   for  $k = 1$  hasta criterio de parada do
3:      $\mathbf{S}^{(k+1)} = \min_{\mathbf{S}} \mathcal{L}(\mathbf{S}, \mathbf{V}_i^{(k)}, \mathbf{G}_i^{(k)})$ 
4:     for  $l = 1$  hasta 4 do
5:        $\mathbf{V}_l^{(k+1)} = \min_{\mathbf{V}_l} \mathcal{L}(\mathbf{S}^{(k+1)}, \mathbf{V}_l, \mathbf{V}_i, \mathbf{G}_i^{(k)})$ 
6:        $\mathbf{G}_1^{(k+1)} = \mathbf{G}_1^{(k)} + \mathbf{V}_1^{(k+1)} - \mathbf{MAS}^{(k+1)}$ 
7:        $\mathbf{G}_2^{(k+1)} = \mathbf{G}_2^{(k)} + \mathbf{V}_2^{(k+1)} - \mathbf{V}_3^{(k+1)}\mathbf{B}$ 
8:        $\mathbf{G}_3^{(k+1)} = \mathbf{G}_3^{(k)} + \mathbf{V}_3^{(k+1)} - \mathbf{MAS}^{(k+1)}$ 
9:        $\mathbf{G}_4^{(k+1)} = \mathbf{G}_4^{(k)} + \mathbf{V}_4^{(k+1)} - \mathbf{S}^{(k+1)}$ 
10:    retorna  $\mathbf{S} \leftarrow \mathbf{S}^{(k+1)}$ 

```

Actualización de S: El problema de minimización con respecto a S es un problema de mínimos cuadrados que tiene la solución de forma cerrada

$$\mathbf{S} = \left(2(\mathbf{MA})^T \mathbf{MA} + \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{\Xi}, \quad (34)$$

donde $\mathbf{\Xi} = (\mathbf{MA})^T (\mathbf{V}_1 + \mathbf{G}_1 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{G}_3) + \mathbf{V}_4 + \mathbf{G}_4$.

Actualizando \mathbf{V}_1 La minimización de la ecuación (33) lagrangiano con respecto a \mathbf{V}_1 se puede obtener directamente como

$$\mathbf{V}_1 = (\lambda_m \mathbf{R}^T \mathbf{R} + \rho \mathbf{I})^{-1} \mathbf{\Sigma}, \quad (35)$$

donde $\mathbf{\Sigma} = \lambda_m \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{Y}}_m + \rho (\mathbf{MAS} - \mathbf{G}_1)$.

Actualizando \mathbf{V}_2 El problema de optimización del lagrangiano (33) con respecto a \mathbf{V}_2 , se tiene la siguiente solución analítica

$$\mathbf{V}_2 = (\mathbf{DD}^T + \rho \mathbf{I})^{-1} \mathbf{\Theta}, \quad (36)$$

donde $\mathbf{\Theta} = \tilde{\mathbf{Y}}_h \mathbf{D}^T + \rho (\mathbf{V}_3 \mathbf{B} - \mathbf{G}_2)$.

Actualizando \mathbf{V}_3 Para minimizar (33) con respecto a \mathbf{V}_3 resolvemos el problema $\partial \mathcal{L} / \partial \mathbf{V}_3 = 0$ cuya solución analítica es

$$\mathbf{V}_3 = (\mathbf{BB}^T + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{\Delta}, \quad (37)$$

donde $\Delta = \text{MAS} - \mathbf{G}_3 + (\mathbf{V}_2 + \mathbf{G}_2) \mathbf{B}^T$. Dado que la matriz \mathbf{B} es circular, la solución se puede calcular de manera eficiente usando la transformada de Fourier.

Actualizando \mathbf{V}_4 Minimizar (33) con respecto a \mathbf{V}_4 involucra al operador proximal de la función indicadora del conjunto \mathbb{R}_+ , cuya solución se obtiene calculando

$$\mathbf{V}_4 = \max(\mathbf{S} - \mathbf{G}_4, 0). \quad (38)$$

4.6.3. Optimización con respecto a \mathbf{E} De manera similar a los algoritmos anteriores, para resolver la optimización de J con respecto a \mathbf{E} mientras se ajustan las otras variables, introducimos las variables de división para obtener el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{E}} \quad & (1/2) \|\hat{\mathbf{Y}}_h - \mathbf{V}_2 \mathbf{D}\|_{\mathbb{F}}^2 + (\lambda_m/2) \|\hat{\mathbf{Y}}_m - \mathbf{R} \mathbf{V}_1\|_{\mathbb{F}}^2 + \gamma(\mathbf{V}_4) \quad (39) \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{V}_1 = \mathbf{E} \mathbf{C} \quad \mathbf{V}_3 = \mathbf{E} \\ & \mathbf{V}_2 = \mathbf{E} \mathbf{C} \mathbf{B} \end{aligned}$$

donde $\hat{\mathbf{Y}}_h = \mathbf{Y}_h - \text{MASBD}$ y $\hat{\mathbf{Y}}_m = \mathbf{Y}_m - \text{RMAS}$. Tenga en cuenta que la función γ corresponde a la función de regularización del diccionario de variabilidad espectral \mathbf{E} . El lagrangiano aumentado asociado al problema (39) se puede expresar como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{V}) = & (1/2) \|\hat{\mathbf{Y}}_h - \mathbf{V}_2 \mathbf{D}\|_{\mathbb{F}}^2 + (\lambda_m/2) \|\hat{\mathbf{Y}}_m - \mathbf{R} \mathbf{V}_1\|_{\mathbb{F}}^2 + \gamma(\mathbf{V}_3) \\ & + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{V}_1 - \mathbf{E} \mathbf{C} + \mathbf{G}_1\|_{\mathbb{F}}^2 + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{V}_2 - \mathbf{E} \mathbf{C} \mathbf{B} + \mathbf{G}_2\|_{\mathbb{F}}^2 \quad (40) \\ & + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{V}_3 - \mathbf{E} + \mathbf{G}_3\|_{\mathbb{F}}^2 \end{aligned}$$

donde \mathbf{G}_i con $i = 1, \dots, 3$ son las variables duales escaladas y $\rho \geq 0$ pondera el Lagrangiano aumentado. Este algoritmo se resume en Algoritmo 4.

Algorithm 4 Sub-iteraciones ADMM para estimar \mathbf{E}

```

1: function ADMM_E( $\mathbf{Y}_m, \mathbf{Y}_h, \mathbf{M}, \mathbf{R}, \mathbf{D}, \mathbf{B}$ )
  // Método de dirección alternativa
2:   for  $k = 1$  hasta criterio de parada do
3:      $\mathbf{E}^{(k+1)} = \min_{\mathbf{E}} \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{V}_i^{(k)}, \mathbf{G}_i^{(k)})$ 
4:     for  $l = 1$  to 3 do
5:        $\mathbf{V}_l^{(k+1)} = \min_{\mathbf{V}_l} \mathcal{L}(\mathbf{E}^{(k+1)}, \mathbf{V}_l, \mathbf{V}_i, \mathbf{G}_i^{(k)})$ 
6:        $\mathbf{G}_1^{(k+1)} = \mathbf{G}_1^{(k)} + \mathbf{V}_1^{(k+1)} - \mathbf{E}^{(k+1)} \mathbf{C}$ 
7:        $\mathbf{G}_2^{(k+1)} = \mathbf{G}_2^{(k)} + \mathbf{V}_2^{(k+1)} - \mathbf{E}^{(k+1)} \mathbf{C} \mathbf{B}$ 
8:        $\mathbf{G}_3^{(k+1)} = \mathbf{G}_3^{(k)} + \mathbf{V}_3^{(k+1)} - \mathbf{E}^{(k+1)}$ 
9:   Retorna  $\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{A}^{(k+1)}$ 

```

Actualizando \mathbf{E} Para actualizar \mathbf{E} , resolvemos la ecuación $\partial \mathcal{L} / \partial \mathbf{E} = \mathbf{0}$ cuya solución es

$$\mathbf{E} = (\mathbf{C} \mathbf{C}^T + \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{B}^T + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{\Xi}, \quad (41)$$

donde $\mathbf{\Xi} = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{G}_1) \mathbf{C}^T + (\mathbf{V}_2 + \mathbf{G}_2) \mathbf{C} \mathbf{B}^T + \mathbf{V}_3 + \mathbf{G}_3$.

Actualizando \mathbf{V}_1 La minimización de (40) con respecto a la variable \mathbf{V}_1 se puede encontrar resolviendo $\partial \mathcal{L} / \partial \mathbf{V}_1 = \mathbf{0}$ cuya solución es

$$\mathbf{V}_1 = (\lambda_m \mathbf{R}^T \mathbf{R} + \rho \mathbf{I})^{-1} \mathbf{\Sigma}, \quad (42)$$

donde $\mathbf{\Sigma} = \lambda_m \mathbf{R}^T \hat{\mathbf{Y}}_m + \rho (\mathbf{E} \mathbf{C} - \mathbf{G}_1)$.

Actualizando \mathbf{V}_2 La minimización del (40) lagrangiano con respecto a \mathbf{V}_2 se puede obtener directamente como

$$\mathbf{V}_2 = (\mathbf{D}\mathbf{D}^T + \rho\mathbf{I})^{-1} \mathbf{\Lambda}, \quad (43)$$

donde $\mathbf{\Lambda} = \tilde{\mathbf{Y}}_h \mathbf{D}^T + \rho(\mathbf{E}\mathbf{C}\mathbf{B} - \mathbf{G}_2)$.

Actualizando \mathbf{V}_3 El problema de optimización con respecto a \mathbf{V}_3 involucra la matriz de Gram $\mathbf{V}_3^T \mathbf{V}_3$, cuyo problema resultante no es convexo. Para solucionar este problema, basamos la solución en la estrategia propuesta en ¹⁰². Consiste en definir \mathbf{V}_p como \mathbf{V}_3 del paso anterior, dando lugar al siguiente problema de optimización con respecto a \mathbf{V}_3

$$\min_{\mathbf{V}_3} \frac{\rho}{2} \|\mathbf{V}_3 - \mathbf{E} + \mathbf{G}_3\|_F^2 + \gamma(\mathbf{V}_3). \quad (44)$$

La solución de este problema se puede calcular de manera eficiente como

$$\mathbf{V}_3 = (\rho\mathbf{I} + \nu\mathbf{V}_p\mathbf{V}_p^T + \zeta\mathbf{M}\mathbf{M}^T)^{-1} \mathbf{\Delta}. \quad (45)$$

donde $\mathbf{\Delta} = \nu\mathbf{V}_p + \rho(\mathbf{E} - \mathbf{G}_3)$.

4.6.4. Optimización con respecto a \mathbf{C} Finalmente, la optimización de J con respecto a \mathbf{C} mientras arreglamos las demás variables también se resuelve con el

¹⁰² Daniele Barchiesi y Mark D Plumbley. "Learning incoherent dictionaries for sparse approximation using iterative projections and rotations". En: *IEEE Transactions on Signal Processing* 61.8 (2013), págs. 2055-2065.

algoritmo ADMM. Introducimos las variables de división para obtener el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{C}} \quad & (1/2)\|\hat{\mathbf{Y}}_h - \mathbf{V}_2\mathbf{D}\|_{\mathbb{F}}^2 + (\lambda_m/2)\|\hat{\mathbf{Y}}_m - \mathbf{R}\mathbf{V}_1\|_{\mathbb{F}}^2 + \psi(\mathbf{V}_4) \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{V}_1 = \mathbf{E}\mathbf{C} \quad \mathbf{V}_3 = \mathbf{E}\mathbf{C} \\ & \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_3\mathbf{B} \quad \mathbf{V}_4 = \mathbf{C}, \end{aligned} \quad (46)$$

donde $\hat{\mathbf{Y}}_h$ y $\hat{\mathbf{Y}}_m$ son los definidos en la sección anterior. Tenga en cuenta que la función ψ corresponde a la función de regularización de los coeficientes asociados con el diccionario de variabilidad espectral \mathbf{E} . El lagrangiano aumentado asociado al problema (46) se puede expresar como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{C}, \mathbf{V}) = & (1/2)\|\hat{\mathbf{Y}}_h - \mathbf{V}_2\mathbf{D}\|_{\mathbb{F}}^2 + (\lambda_m/2)\|\hat{\mathbf{Y}}_m - \mathbf{R}\mathbf{V}_1\|_{\mathbb{F}}^2 + \psi(\mathbf{V}_4) \\ & + \frac{\rho}{2}\|\mathbf{V}_1 - \mathbf{E}\mathbf{C} + \mathbf{G}_1\|_{\mathbb{F}}^2 + \frac{\rho}{2}\|\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3\mathbf{B} + \mathbf{G}_2\|_{\mathbb{F}}^2 \\ & + \frac{\rho}{2}\|\mathbf{V}_3 - \mathbf{E}\mathbf{C} + \mathbf{G}_3\|_{\mathbb{F}}^2 + \frac{\rho}{2}\|\mathbf{V}_4 - \mathbf{C} + \mathbf{G}_4\|_{\mathbb{F}}^2 \end{aligned} \quad (47)$$

donde \mathbf{G}_i con $i = 1, \dots, 4$ son las variables duales escaladas y $\rho \geq 0$ pondera el Lagrangiano aumentado. Este algoritmo se resume en Algoritmo 5.

Actualizando C Para encontrar la solución de la variable \mathbf{C} , forzamos la derivada de (47) con respecto a \mathbf{C} para que sea cero y resolvemos el sistema resultante, lo que lleva a

$$\mathbf{C} = (2\mathbf{E}\mathbf{E}^T + \mathbf{I})^{-1} \boldsymbol{\zeta}, \quad (48)$$

Algorithm 5 Subiteraciones ADMM para estimar \mathbf{C}

```

1: function ADMM_C( $\mathbf{Y}_m, \mathbf{Y}_h, \mathbf{M}, \mathbf{R}, \mathbf{D}, \mathbf{B}$ )
  // Alternating Direction Method
2:   for  $k = 1$  to stopping rule do
3:      $\mathbf{C}^{(k+1)} = \min_{\mathbf{C}} \mathcal{L}(\mathbf{C}, \mathbf{V}_i^{(k)}, \mathbf{G}_i^{(k)})$ 
4:     for  $l = 1$  to 4 do
5:        $\mathbf{V}_l^{(k+1)} = \min_{\mathbf{V}_l} \mathcal{L}(\mathbf{C}^{(k+1)}, \mathbf{V}_l, \mathbf{V}_i, \mathbf{G}_i^{(k)})$ 
6:        $\mathbf{G}_1^{(k+1)} = \mathbf{G}_1^{(k)} + \mathbf{V}_1^{(k+1)} - \mathbf{E}\mathbf{C}^{(k+1)}$ 
7:        $\mathbf{G}_2^{(k+1)} = \mathbf{G}_2^{(k)} + \mathbf{V}_2^{(k+1)} - \mathbf{V}_3^{(k+1)}\mathbf{B}$ 
8:        $\mathbf{G}_3^{(k+1)} = \mathbf{G}_3^{(k)} + \mathbf{V}_3^{(k+1)} - \mathbf{E}\mathbf{C}^{(k+1)}$ 
9:        $\mathbf{G}_4^{(k+1)} = \mathbf{G}_4^{(k)} + \mathbf{V}_4^{(k+1)} - \mathbf{C}^{(k+1)}$ 
10:    retorna  $\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{A}^{(k+1)}$ 

```

donde $\zeta = \mathbf{E}^T (\mathbf{V}_1 + \mathbf{G}_1 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{G}_3) + \mathbf{V}_4 + \mathbf{G}_4$.

Actualizando \mathbf{V}_1 El problema de minimización que involucra \mathbf{V}_1 se puede obtener resolviendo $\partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{V}_1 = \mathbf{0}$, lo que lleva a

$$\mathbf{V}_1 = (\lambda_m \mathbf{R}^T \mathbf{R} + \rho \mathbf{I})^{-1} \Xi, \quad (49)$$

donde $\Xi = \lambda_m \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{Y}}_m + \rho \mathbf{E}\mathbf{C} - \mathbf{G}_1$.

Actualizando \mathbf{V}_2 El problema de optimización del lagrangiano (47) con respecto a \mathbf{V}_2 tiene la siguiente solución analítica

$$\mathbf{V}_2 = (\mathbf{D}\mathbf{D}^T + \rho \mathbf{I})^{-1} \Theta, \quad (50)$$

donde $\Theta = \tilde{\mathbf{Y}}_h \mathbf{D}^T + \rho (\mathbf{V}_3 \mathbf{B} - \mathbf{G}_2)$.

Actualizando V_3 Para minimizar el (47) de Lagrangiano con respecto a V_3 resolvemos el problema $\partial\mathcal{L}/\partial V_3 = 0$ cuya solución analítica es

$$V_3 = (BB^T + I)^{-1} \Delta, \quad (51)$$

donde $\Delta = MAS - G_3 + (V_2 + G_2) B^T$. Dado que asumimos que la matriz B es circular, la solución se puede calcular de manera eficiente usando la transformada de Fourier.

Actualizando V_4 Finalmente, el problema de optimización del lagrangiano con respecto a V_4 involucra una regularización de Tikhonov cuya solución se puede encontrar analíticamente de la siguiente manera

$$V_4 = \rho(C - G_4) / (\rho + \beta). \quad (52)$$

4.7. Conclusiones

Este capítulo es el eje central de la presente tesis doctoral, aquí, se estudió un modelo de fusión de imágenes HS-MS que aborda el problema de variabilidad espectral utilizando un modelo de mezcla lineal aumentado (ALMM). Se han identificado y estudiado las principales causas de variabilidad espectral para ser modeladas dentro del algoritmo propuesto. Adicionalmente, se identificó que los métodos de fusión de imágenes HS-MS basados en el enfoque de desmezclado espectral presentan un problema abierto, al no tener en cuenta la variabilidad espectral. Al analizar los resultados experimentales en cuatro conjuntos de datos semi-sintéticos, encontramos que el método propuesto puede estimar imágenes de alta resolución espacial y espectral con una calidad cuantitativa y cualitativa más alta que los métodos de

fusión de imágenes HS-MS reportados en el estado del arte. Además, de manera experimental se mostró que se logró obtener resultados de mayor precisión en las tareas de clasificación utilizando la imagen fusionada propuesta con clasificadores tradicionales como SVM.

5. Desempeño de algoritmo de fusión de HS-MS que aborda la variabilidad espectral en datos reales de escenas de cultivos agrícolas en Colombia y adquisiciones en laboratorio

5.1. Introducción

El mejoramiento de la resolución espacial de imágenes satelitales adquiridas por sensores HS utilizando imágenes MS, ha aumentado la atención en la última década por parte de los investigadores y empresas del sector aero-espacial, este interés ha sido impulsado por la alta cantidad de misiones satelitales hiperespectrales en desarrollo, así como por el creciente número de aplicaciones para este tipo de datos ⁹⁶¹⁰³¹⁰⁴. Actualmente, existen plataformas satelitales multisensores, que permiten incorporar en una misma plataforma, diferentes tipos de sensores ópticos, un ejemplo de ella es la plataforma MUSES (del inglés *Multi-User System for Earth Sensing*) ubicada en la estación espacial internacional. Plataformas como MUSES permiten el desarrollo de enfoques de fusión de sensores que emplean la misma geometría sol-objetivo-sensor e iguales condiciones atmosféricas y propiedades del escena. En el presente capítulo, se demostró y evaluó el método de fusión FSVA propuesto teniendo en cuenta la variabilidad espectral sobre datos reales del sensor satelital hiperespectral DESIS (del inglés *DLR's Earth Sensing Imaging Spectrometer*) e imágenes del sensor multiespectral Sentinel-2.

¹⁰³ Azadeh Ghiyamat y Helmi Z. M. Shafri. "A review on hyperspectral remote sensing for homogeneous and heterogeneous forest biodiversity assessment". En: *International Journal of Remote Sensing* 31.7 (2010), págs. 1837-1856. DOI: 10.1080/01431160902926681. eprint: <https://doi.org/10.1080/01431160902926681>.

¹⁰⁴ Luis Guanter et al. "The EnMAP spaceborne imaging spectroscopy mission for earth observation". En: *Remote Sensing* 7.7 (2015), págs. 8830-8857.

Un gran reto en el desarrollo de algoritmos de fusión de imágenes HS-MS se presenta cuando el método debe ser validado con datos reales, dado que no se posee la imagen de referencia o el mapa de verdad de terreno para validar su desempeño. Por otro lado, se deben superar el reto de co-registro. Estos retos fueron superados por el método propuesto. Adicionalmente, con el objetivo de validar con diferentes tipo de datos reales se realizó la adquisición de una escena HS en el laboratorio de óptica del grupo de investigación HDSP, permitiendo validar una vez más, el algoritmo de fusión HS-MS propuesto.

5.2. Fusión de imágenes espectrales con datos reales satelitales (DESIS - SENTINEL 2) en Colombia

5.2.1. Sensores hiperespectrales satelitales Los sensores hiperespectrales operacionales abordo de vehículos espaciales con suficiente resolución espectral y espacial, con alta relación señal/ruido (SNR) y buenos tiempos de revisita siguen siendo un desafío ⁹⁶. Principalmente, un sensor satelital HS debe lograr un balance necesario entre el ancho de banda espectral y la energía requerida (radiación) para iluminar los elementos del detector (resolución espacial), buscando mantener una suficiente relación señal/ruido (calidad de los datos) durante el proceso de adquisición de datos. Uno de los primeros sensores hiperespectrales fue el espectrómetro de imágenes AVIRIS (del inglés *Airborne Visible/Infrared Imaging Spectrometer*) ¹⁰⁵, desarrollado por la NASA y fue ubicado sobre un avión para la adquisición de escenas, principalmente, en Estados Unidos. Desde la década del 2000, se han lanzado al espacio instrumentos de teledetección hiperespectral. El primer sensor

¹⁰⁵ Robert O Green et al. "Airborne visible/infrared imaging spectrometer (AVIRIS): recent improvements to the sensor and data facility". En: *Imaging Spectrometry of the Terrestrial Environment*. Vol. 1937. International Society for Optics and Photonics. 1993, págs. 180-190.

HS espacial fue *Hyperion*, lanzado en el año 2000 como parte de la misión *Earth Observing-1* de la NASA ⁷². El sensor Hyperion tenía una resolución espacial de 30 m, una distancia de muestreo espectral de 10 nm en el rango espectral de 400 nm a 2500 nm con 220 bandas y orbitaba a una altura de 700 km sobre la tierra. Hasta ahora, se han lanzado al espacio varios sensores HS adicionales. Una primera categoría de misiones espaciales son aquellas que están en funcionamiento y/o en desarrollo, tales como, CHRIS en PROBA-1 ¹⁰⁶, la misión China Tiangong-1 ¹⁰⁷, el satélite indio de imágenes hiperespectrales (HySIS) ¹⁰⁸ y la misión italiana PRISMA ¹⁰⁹, así como misiones futuras como el sensor alemán EnMAP¹⁰⁴, la misión satelital israelí SHALOM ¹¹⁰ y la misión FLEX de la agencia espacial Europea (ESA) ¹¹¹. Estas misiones satelitales HS son las primeras demostraciones de tecnología y misiones científicas que buscan aprender de ellas con el objetivo de desarrollar sensores HS espaciales más avanzados y técnicas de análisis adecuadas a este tipo de datos. Otra categoría incluye grandes misiones de mapeo operacional como la

-
- ¹⁰⁶ Michael J Barnsley et al. "The PROBA/CHRIS mission: A low-cost smallsat for hyperspectral multi-angle observations of the earth surface and atmosphere". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 42.7 (2004), págs. 1512 -1520.
- ¹⁰⁷ Qingxi Tong, Yongqi Xue y Lifu Zhang. "Progress in hyperspectral remote sensing science and technology in China over the past three decades". En: *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing* 7.1 (2013), págs. 70-91.
- ¹⁰⁸ S Mahalingam et al. "Reflectance based vicarious calibration of HySIS sensors and spectral stability study over pseudo-invariant sites". En: *2019 IEEE Recent Advances in Geoscience and Remote Sensing: Technologies, Standards and Applications (TENGARSS)*. IEEE. 2019, págs. 132-136.
- ¹⁰⁹ Rocchina Guarini et al. "Overview of the prisma space and ground segment and its hyperspectral products". En: *2017 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*. IEEE. 2017, págs. 431-434.
- ¹¹⁰ Tal Feingersh y E Ben Dor. "SHALOM—A commercial hyperspectral space mission". En: *Optical payloads for space missions* 247 (2015).
- ¹¹¹ Peter Coppo et al. "Fluorescence imaging spectrometer (FLORIS) for ESA FLEX mission". En: *Remote Sensing* 9.7 (2017), pág. 649.

mision CHIME (*Copernicus Hyperspectral Imaging Mission for the Environment*)¹¹² y la misión SBG (*Surface Biology and Geology*)¹¹³ de la NASA, que tienen el objetivo de proporcionar una cobertura global a alta resolución temporal para impulsar la generación de productos operativos y de uso comercial. Una tercera categoría comprende las diversas iniciativas de constelaciones *cubesat* con espectrómetros de imágenes abordo, incluida la misión operativa HyperSCOUT¹¹⁴ y la misión CSIMBA prevista¹¹⁵. Estas misiones de constelaciones de satélites investigan su capacidad para reducir el tiempo de revisita y ahorrar altos costos de desarrollo de la misión, asimismo, probar el procesamiento de datos abordo para el desarrollo de productos en tiempo casi real a partir de espectrómetros de imágenes espaciales.

DESIS (*DLR's Earth Sensing Imaging Spectrometer*) El método de fusión FS-VA propuesto se validó usando imágenes del sensor hiperespectral DESIS, a continuación se describen las principales características de este: DESIS es un instrumento hiperespectral abordo de la estación espacial internacional (ISS), desarrollado por la agencia espacial alemana *Deutsches Zentrum für Luft-und Raumfahrt* (DLR) en cooperación con la empresa estadounidense *Teledyne Brown Engineering* (TBE). DESIS tiene 235 bandas espectrales en el rango de longitud de onda desde

¹¹² Jens Nieke y Michael Rast. "Towards the copernicus hyperspectral imaging mission for the environment (CHIME)". En: *IGARSS 2018-2018 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*. IEEE. 2018, págs. 157-159.

¹¹³ Christine M Lee et al. "An introduction to the NASA Hyperspectral InfraRed Imager (HyspIRI) mission and preparatory activities". En: *Remote Sensing of Environment* 167 (2015), págs. 6-19.

¹¹⁴ S Conticello et al. "Hyperspectral imaging for real time land and vegetation inspection". En: *Proceedings of the Small Satellites, System & Services Symposium (4S), Valletta, Malta*. Vol. 30. 2016.

¹¹⁵ Joris Blommaert et al. "CSIMBA: Towards a smart-spectral cubesat constellation". En: *IGARSS 2019-2019 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*. IEEE. 2019, págs. 4614-4617.

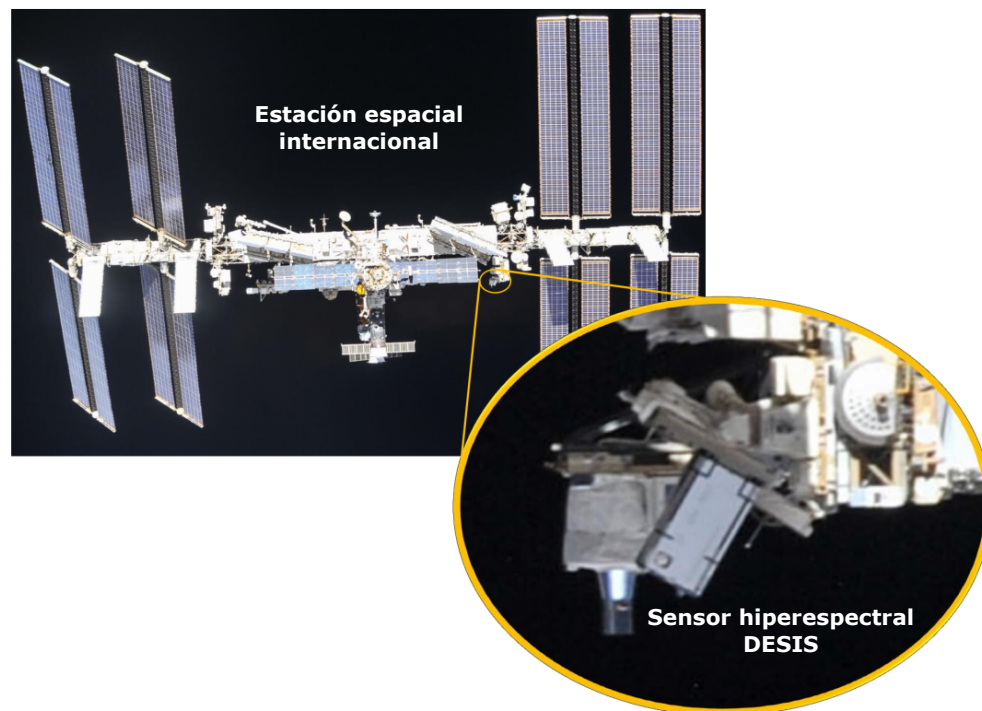


Figura 28. Sensor hiperespectral DESIS.

visible (400 nm) hasta el infrarrojo cercano (1000 nm), lo que da como resultado una distancia de muestreo espectral de 2,5 nm y una resolución espacial de 30 m a una órbita de 400 km de la ISS (ver Fig. 28).

5.2.2. Sensor multiespectral - SENTINEL 2 El desarrollo de la tecnología de teledetección multiespectral ha revolucionado los enfoques de seguimiento de los recursos naturales y humanos en la superficie de la Tierra, dado que esta tecnología permite vigilar grandes áreas logrando adquirir imágenes con alta resolución espacial y baja resolución espectral. El 23 de julio de 1972 fue el primer lanzamiento de la plataforma satelital que lleva el sensor MS (Landsat 1) ¹¹⁶, Landsat 1 tenía

¹¹⁶ Barry N Haack. "Landsat: A tool for development". En: *World Development* 10.10 (1982), págs. 899-909.

como objetivo monitorear la superficie de la Tierra, desde su lanzamiento se han desarrollado sensores MS comerciales, tales como, IKONOS o SPOT; y sensores no comerciales, destinados a la comunidad científica, por ejemplo, Landsat y Sentinel. Landsat y Sentinel producen diferentes datos de detección remota para diferentes aplicaciones como: monitoreo ambiental y forestal, vigilancia de áreas urbanas, seguimiento y prevención de desastres naturales y apoyo a la gestión, seguimiento y vigilancia de cultivos agrícolas ¹¹⁷. En 2014, la Agencia Espacial Europea (ESA) puso en marcha el programa Copernicus. Hasta ahora, el Programa Copernicus ha lanzado varias misiones satelitales que incluyen Sentinel-1, 2, 3 y 5. Una contribución significativa del Programa Copernicus fue el lanzamiento de los instrumentos multiespectrales: Sentinel-2.

Específicamente, la constelación Sentinel-2 incluye dos satélites: Sentinel-2A y 2B. Sentinel-2B es el sensor usado para adquirir la imagen MS que sirve como entrada en el proceso de fusión y que ha permitido validar el método propuesto en esta tesis. Sentinel-2 permite adquirir imágenes MS de 13 bandas espectrales, y sus resoluciones espaciales van desde los 10 m hasta los 60 m.

5.2.3. Experimento con datos reales satelitales para realizar la fusión de imágenes HS del sensor DESIS con imágenes MS del sensor SENTINEL 2 El método FSVA propuesto fue probado fusionando imágenes de sensores espaciales DESIS y Sentinel 2B. Las imágenes espectrales fueron adquiridas sobre una región ubicada al sureste de Colombia, que corresponde a un área con cultivos de palma de aceite. La imagen HS fue adquirida el 21 de agosto de 2020 por el sensor DESIS, y la imagen MS fue adquirida el 7 de septiembre de 2020 por el sensor Sentinel-2. La imagen HS se recortó una región de 128×128 píxeles, con 56 bandas calibra-

¹¹⁷ Darius Phiri et al. "Sentinel-2 data for land cover/use mapping: a review". En: *Remote Sensing* 12.14 (2020), pág. 2291.

das, el rango espectral de 400 a 1000 nm, con una resolución espacial de 30 m. La imagen MS corresponde a la misma área, posee 4 bandas espectrales de las imágenes Sentinel-2 VNIR con un resolución espacial de 10 m (bandas 2, 3, 4 y 8). Las imágenes se registraron conjuntamente utilizando el algoritmo propuesto en ¹¹⁸, este algoritmo realiza los siguientes pasos para lograr el registro: 1.) Las imágenes de entrada Y_h y Y_m se llevan a dimensiones iguales para realizar la alineación, para esto se submuestra espectralmente la imagen Y_h y espacialmente la imagen y Y_m , seguido al re-dimensionamiento, las imágenes resultantes son transformadas a escala de grises, 2.) Las imágenes son comparadas solapando una arriba de la otra, con el objetivo de ver la existencia del desplazamiento entre las dos imágenes, 3.) Se realiza un proceso de estandarización de histogramas para corregir las diferencias de iluminación entre las dos imágenes, 4.) En este paso se encuentra el desplazamiento entre una imagen fija y una imagen desplazada, mediante una transformación, que modela el mapeo espacial de los píxeles desde el espacio de la imagen fija al espacio de la imagen desplazada. 5.) Finalmente, se aplica la transformación a la imagen original de entrada y Y_h según la transformación geométrica de desplazamiento encontrada en el paso anterior. De esta manera, el objetivo de este experimento es obtener una imagen de alta resolución espacial y espectral modelando la variabilidad espectral a través del método de fusión FSVA propuesto. Como resultado la imagen fusionada tendrá un resolución espacial por píxel de 10 m y una resolución espectral de 56 bandas espectrales.

Las imágenes espectrales fusionadas, HS y MS adquiridas se muestran en la Fig. 29. La imagen del sensor DESIS y la imagen de Sentinel-2 en este experimento se adquirieron con una diferencia temporal menor a un mes. Algunas firmas espectrales puras pueden cambiar durante este tiempo, lo que puede ser un factor

¹¹⁸ Tom Vercauteren et al. "Diffeomorphic demons: Efficient non-parametric image registration". En: *NeuroImage* 45.1 (2009), S61-S72.

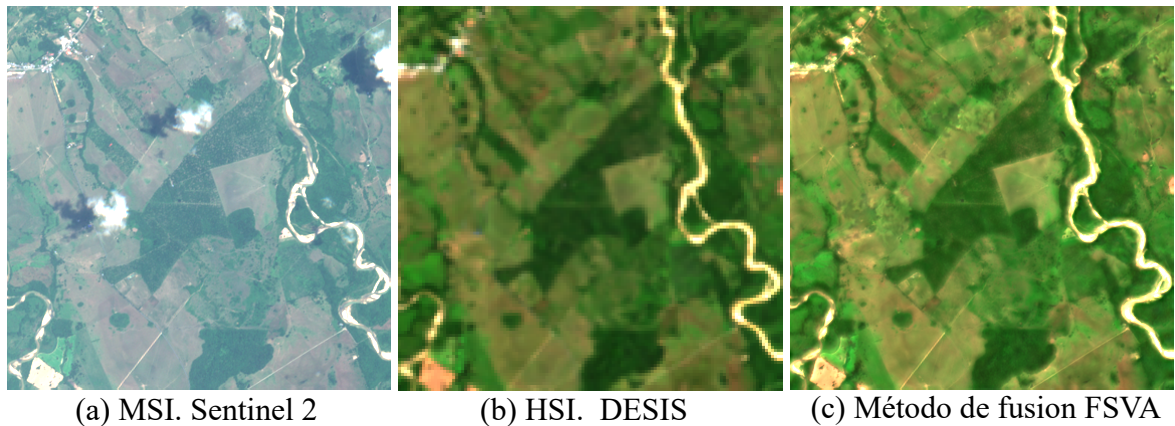


Figura 29. Resultados del método de fusión de imágenes HS-MS propuesto que aborda la variabilidad espectral sobre un conjunto de datos reales de escena de cultivo de palma de aceite en Colombia, (a) subconjunto Sentinel-2, 10 m GSD y 4 bandas, (b) Subconjunto DESIS, 30 m GSD y 56 bandas, (c) Imagen con alta resolución espectral y espacial que aborda el problema de variabilidad espectral obtenida con el método propuesto.

que induce a la variabilidad espectral. La figura 30 muestra versiones ampliadas de subimágenes tomadas de la Fig. 29 y tres firmas espectrales en las subimágenes correspondientes a vegetación, suelo desnudo y píxeles mezclados (vegetación y suelo desnudo). De las Figs. 29 y 30, se puede observar cualitativamente que la imagen fusionada contiene alta resolución espacial y resolución espectral confirmando que la imagen resultante tiene la mejor calidad de resolución de cada imagen de entrada. Un desafío en la evaluación de los resultados de la fusión con datos reales es la no existencia de la imagen de referencia del sitio de interés, en otras palabras, es poco probable tener una imagen HS de alta resolución espectral y alta resolución espacial que sirva como imagen de referencia para comparación de resultados. Para evaluar el rendimiento cuantitativamente del método propuesto, se muestreó espacialmente todas las bandas de la imagen HS del sensor DESIS de 30 m GSD a 10 m GSD, de esta manera, se obtiene la imagen de referencia Z con dimensión espacial de 384×384 píxeles y dimensión espectral de 56 bandas espectrales.

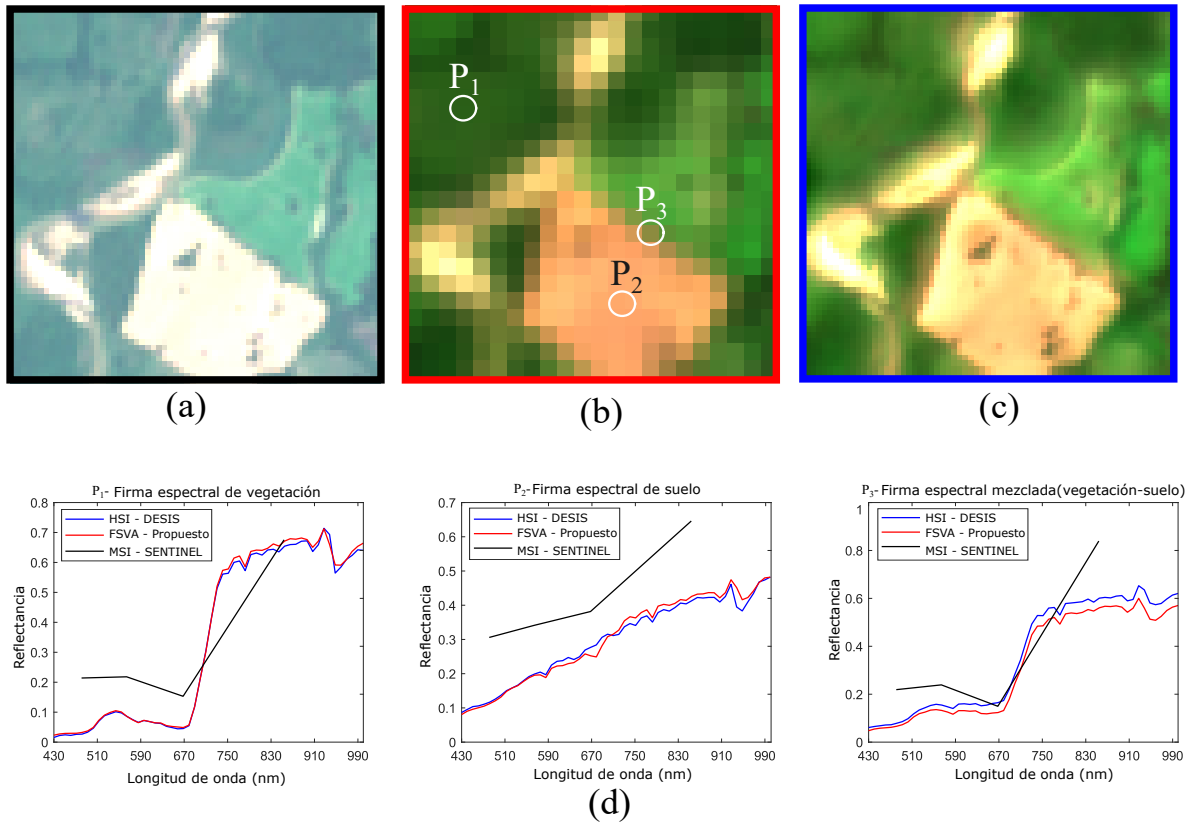


Figura 30. Sub-imágenes de (a) Sentinel-2 (10 m), (b) DESIS (30 m) y (c) Imagen fusionada con el método propuesto (10 m). (d) Firmas espectrales para tres píxeles en las subimágenes correspondientes a P_1 vegetación, P_2 suelo desnudo y P_3 píxel mezclado (vegetación y suelo desnudo). La reconstrucción espectral de la imagen fusionada muestra una estrecha concordancia con la firma espectral del sensor DESIS confirmando el buen desempeño del método propuesto.

Los resultados cuantitativos de la fusión de imágenes satelitales HS-MS reales se detallan en la Tabla 9. En la Tabla 9 se evidencia que el método de fusión FSVA propuesto presenta el mejor desempeño que los otros métodos. Esto se debe al hecho de que el método de fusión propuesto tiene la capacidad de modelar varios tipos de variabilidad presentes en las imágenes HS, la variabilidad por escalado es absorbida por S y las variabilidades no lineales que no pueden explicarse por escalado son absorbidas por E y la matriz C. Esto significa que nuestro método es competitivo frente a los otros métodos utilizando datos reales satelitales.

Cuadro 9. Evaluación de los resultados de la fusión utilizando el modelo de variabilidad espectral en un conjunto de datos reales. Los datos en negrita resalta el mejor resultado para cada caso.

Metodos	PSNR	UIQI	SAM ($^{\circ}$)	ERGAS
Hysure	25.507	0.750	1.740	5.436
CNMF	22.966	0.582	2.304	9.574
FUSE	26.250	0.747	2.531	7.255
Lanaras	24.942	0.581	2.086	7.563
FuVar	28.603	0.850	1.805	4.485
FSVA	28.857	0.855	1.289	4.020

5.3. Fusión de imágenes espectrales con datos reales adquiridos en el laboratorio de óptica

5.3.1. Configuración del experimento en el laboratorio de óptica Se construyó un conjunto óptico en el laboratorio del grupo de investigación HDSP para adquirir imágenes espectrales de dos escenas. La configuración construida se muestra en la Fig.31. Este conjunto utiliza una fuente de luz sintonizable (Oriel Instruments, TLS-300XR) que descompone la iluminación de una fuente de luz halógena en sus correspondientes longitudes de onda monocromáticas, con pasos de 6 nm dentro del rango espectral de 300 nm a 900 nm. Dicha luz monocromática se propaga a través de una fibra óptica bifurcada (Illumination Technologies, 9145HT línea de luz dual de 6”) hacia 2 lámparas que iluminan la escena. Los lentes (Navitar, MVL8M23, 8 mm EFL, $f/1,4$) y la cámara (Stingray F-080B) enfocan la escena de tal manera que el sensor monocromático registre la intensidad de la luz monocromática reflejada por la escena.

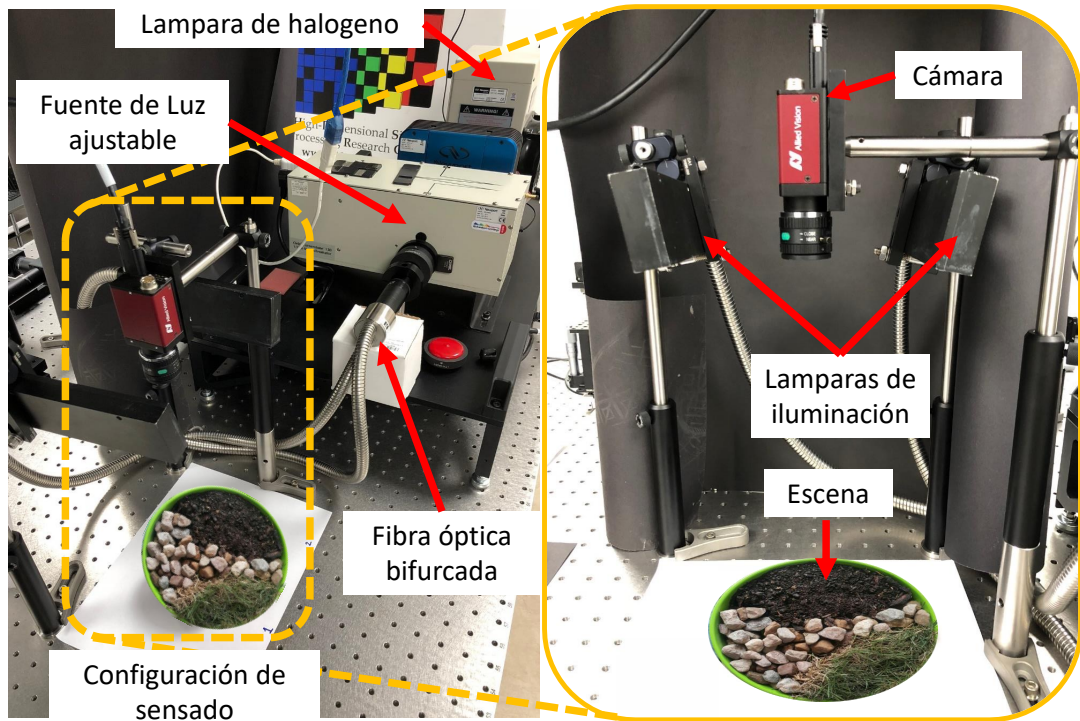


Figura 31. Configuración óptica implementada en el laboratorio para la adquisición de datos espectrales.

5.3.2. Experimento con datos reales adquiridos en el laboratorio de óptica

La imagen HS adquirida tiene una resolución espacial de 1038×1388 y 421 píxeles bandas espectrales. Cabe destacar que, los elementos o materiales que la conforman son vegetación (brócoli), suelo y madera. Esta materiales fueron puestos sobre un recipiente circular con un diámetro de 20 cm (ver Fig. 32). Con el objetivo de obtener una imagen iluminada uniformemente para el proceso de fusión y dadas las características de potencia de la lámpara del monocromador, se tomó una sub-área de la escena que corresponde al centro, garantizando que esté cubierta por el campo de visión del sistema óptico, espectralmente la escena se sub-muestreo con

un factor de 10, finalmente, el tamaño del sub-área seleccionada es de 512×512 píxeles y 42 bandas espectrales, entre 400 nm y 820 nm. En la Fig. 32 se muestra el sub-área (franja amarilla), los materiales y sus firmas espectrales donde se puede visualizar la variabilidad y algunos ejemplos de bandas espectrales adquiridas para la escena.

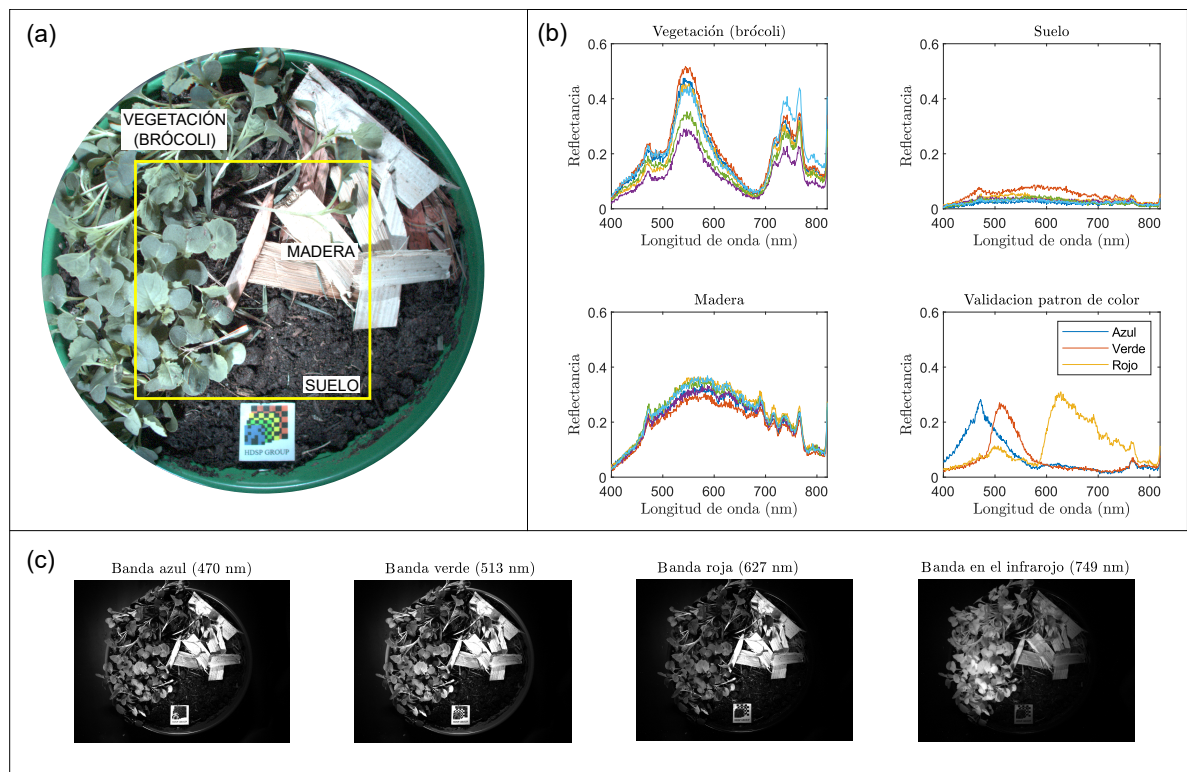


Figura 32. Escena construida para validación del algoritmo de fusión propuesto. (a) La franja amarilla ilustra la sub-área usada para validar el algoritmo. (b) Se gráfica seis firmas espectrales por cada material para visualizar la variabilidad espectral, asimismo, se valida el comportamiento espectral de la escena mediante un patrón de color y la concordancia con su firma espectral (RGB). (c) Se gráfica las escena en las bandas espectrales del azul (470 nm), verde (513 nm), rojo (627 nm) e infrarrojo cercano (749 nm)

5.3.3. Resultado experimental con datos reales adquiridos en el laboratorio de óptica

La configuración del experimento fue similar a la desarrollada en los

experimentos previos, tanto para los datos sintéticos como los datos reales adquiridos por sensores satelitales. Específicamente, se tomó la imagen de referencia Z adquirida en el laboratorio con una dimensión de $512 \times 512 \times 42$, simulamos una imagen hiperespectral de baja resolución espacial, Y_h , aplicando un kernel de desenfoco gaussiano espacial (B), y reduciendo uniformemente la imagen borrosa en un factor de cuatro, aplicando el operador (D) obteniendo una imagen HS Y_h de $128 \times 128 \times 42$ (Fig. 33.b), seguidamente simulamos una imagen multiespectral de alta resolución espacial, Y_m , filtrando la dimensión espectral de la imagen HR de referencia a seis bandas espectrales obteniendo una imagen MS de Y_h de $512 \times 512 \times 6$ (Fig. 33.a). Finalmente, se agregó ruido blanco a ambas imágenes, Y_h y Y_m , con 30 dB y 40 dB, respectivamente. Luego, estimamos la imagen súper resuelta (Fig. 33.c) aplicando nuestro método de fusión FSVA que aborda la variabilidad espectral, cualitativamente se puede ver la calidad de la imagen recuperada, los resultados cuantitativos con respecto a los otros métodos de fusión se pueden ver en la Tabla 10. En los resultados cuantitativos se aprecia que el método Lanaras genera resultados cercanos al FSVA, este comportamiento del algoritmo Lanaras puede ser atribuido a que el método de Lanaras emplea una regularización adaptativa espacial para explotar la información geométrica local de la imagen multiespectral, así como un modelo de desmezclado espectral en cada una de las imágenes multiespectral e hiperespectral. Por lo tanto, en este caso particular real, donde se observan diferentes variaciones de intensidad en la imagen de referencia comparadas con las imágenes espectrales en simulación, una posible explicación al mejoramiento de el algoritmo Lanaras puede deberse al método de regularización espacial adaptativa que el incorpora.

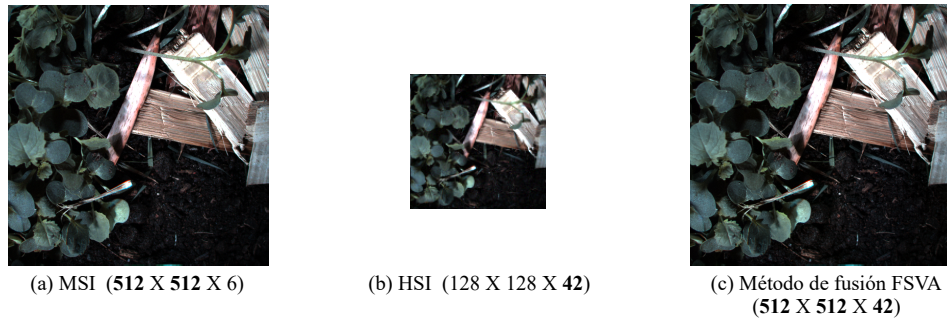


Figura 33. Resultados del método de fusión HSI-MSI propuesto que aborda la variabilidad espectral sobre la escena cubo 2 adquirida en el laboratorio de óptica HDSP, (a) subconjunto de imagen multiespectral, (b) subconjunto de imagen hiperespectral, (c) imagen con alta resolución espectral y espacial que aborda el problema de variabilidad espectral obtenida con el método propuesto.

Cuadro 10. Evaluación de los resultados de la fusión utilizando el modelo de variabilidad espectral en un conjunto de datos reales. los datos en negrita resalta el mejor resultado para cada caso.

Métodos	PSNR	UIQI	SAM ($^{\circ}$)	ERGAS
Hysure	22.349	0.460	40.065	215.510
CNMF	30.532	0.835	17.298	11.420
FUSE	38.189	0.933	11.637	4.398
Lanaras	41.309	0.950	9.037	2.925
FuVar	25.450	0.695	19.444	41.402
FSVA	44.042	0.969	7.645	2.270

Conclusiones y perspectivas

La principal contribución de esta tesis doctoral fue proponer un algoritmo de fusión de imágenes HS-MS basado en desmezclado espectral que tiene en cuenta la variabilidad espectral a través de un modelo de mezcla lineal aumentado (ALMM). El método de fusión FSVA propuesto puede modelar diferentes tipos de variabilidad espectral tales como: la variabilidad espectral generada por factores de escalado (S) de la firma espectral, firma que puede variar principalmente por modificación en la iluminación de la escena o en la topografía del terreno, y las variaciones no-lineales ocasionadas por efectos atmosféricos o variabilidad intrínseca de los materiales debido a variaciones físico-químicas, modeladas a través del diccionario de variabilidad espectral (E) y su matriz de coeficientes (C).

El problema de fusión resultante es un problema no convexo en los parámetros del modelo FSVA planteado, esto se abordó resolviendo subproblemas convexos utilizando una estrategia alterna. Se propuso resolver cada subproblema de manera eficiente haciendo uso del algoritmo ADMM. Los resultados experimentales en conjuntos de datos semi-sintéticos, y en conjunto de datos reales con imágenes HS y MS adquiridas en territorio colombiano por sensores satelitales tales como el sensor HS DESIS y sensor MS Sentinel-2 mostraron que el método FSVA propuesto es capaz de modelar la variabilidad espectral de manera conjunta en el proceso de fusión de imágenes HS-MS y puede estimar imágenes de alta resolución espacial y espectral con una calidad cuantitativa y cualitativa más alta que los métodos de fusión de imágenes HS-MS reportados en el estado del arte. Así mismo, se evaluó sobre datos espectrales adquiridos en el laboratorio de óptica del grupo de investigación HDSP, lo que confirma las ventajas del método de fusión FSVA propuesto tanto en datos semi-sintéticos, datos reales y datos de laboratorio. Además, se validó que al modelar la variabilidad espectral con el método propuesto el resultado de la fusión

(imagen de alta resolución espacial y espectral) contribuye a mejorar el rendimiento de otras tareas de inferencia, tales como, la clasificación de imágenes hiperespectral al obtener resultados de mayor precisión en la clasificación. Finalmente, esta tesis muestra que el enfoque de fusión FSVA propuesto puede ser aplicado a la solución de problemas globales y de interés nacional, como la detección de enfermedades o plagas en la agricultura colombiana.

Como perspectiva, en los últimos años, las arquitecturas de aprendizaje profundo han demostrado ser útiles en muchas tareas de visión artificial y aplicaciones que usan imágenes HS. Como trabajo futuro, se recomienda explorar la combinación del método propuesto con las técnicas de aprendizaje profundo, donde una red neuronal profunda pueda identificar y aprender el comportamiento de diferentes tipos de variaciones espectrales que se presentan en la tarea de de fusión de imágenes HS-MS.

Bibliografía

- Aiazzi, B et al. "MTF-tailored multiscale fusion of high-resolution MS and Pan imagery". En: *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing* 72.5 (2006), págs. 591-596 (vid. pág. 43).
- Aiazzi, Bruno, Stefano Baronti y Massimo Selva. "Improving component substitution pansharpening through multivariate regression of MS + Pan data". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 45.10 (2007), págs. 3230-3239 (vid. págs. 17, 43).
- Akhtar, Naveed, Faisal Shafait y Ajmal Mian. "Bayesian sparse representation for hyperspectral image super resolution". En: *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*. 2015, págs. 3631-3640 (vid. pág. 18).
- Baldrige, AM et al. "The ASTER spectral library version 2.0". En: *Remote Sensing of Environment* 113.4 (2009), págs. 711-715 (vid. pág. 59).
- Barchiesi, Daniele y Mark D Plumbley. "Learning incoherent dictionaries for sparse approximation using iterative projections and rotations". En: *IEEE Transactions on Signal Processing* 61.8 (2013), págs. 2055-2065 (vid. pág. 113).
- Barnsley, Michael J et al. "The PROBA/CHRIS mission: A low-cost smallsat for hyperspectral multiangle observations of the earth surface and atmosphere". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 42.7 (2004), págs. 1512-1520 (vid. pág. 120).

Bateson, C Ann, Gregory P Asner y Carol A Wessman. "Endmember bundles: A new approach to incorporating endmember variability into spectral mixture analysis". En: *IEEE transactions on geoscience and remote sensing* 38.2 (2000), págs. 1083-1094 (vid. pág. 49).

Bioucas-Dias, José M. "A variable splitting augmented Lagrangian approach to linear spectral unmixing". En: *2009 First workshop on hyperspectral image and signal processing: Evolution in remote sensing*. IEEE. 2009, págs. 1-4 (vid. págs. 90, 96).

Bioucas-Dias, José M y Mário AT Figueiredo. "Alternating direction algorithms for constrained sparse regression: Application to hyperspectral unmixing". En: *Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing (WHISPERS), 2010 2nd Workshop on*. IEEE. 2010, págs. 1-4 (vid. pág. 63).

Bioucas-Dias, José M y José MP Nascimento. "Hyperspectral subspace identification". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 46.8 (2008), págs. 2435-2445 (vid. pág. 96).

Bioucas-dias, José M et al. "Hyperspectral Remote Sensing Data Analysis and Future Challenges". En: *IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine* June (2013), págs. 6-36. DOI: 10.1109/MGRS.2013.2244672 (vid. pág. 34).

Bioucas-dias, José M et al. "Hyperspectral Unmixing Overview : Geometrical , Statistical , and Sparse Regression-Based Approaches". En: 5.2 (2012), págs. 354-379 (vid. págs. 37, 40, 82, 83).

- Blommaert, Joris et al. "CSIMBA: Towards a smart-spectral cubesat constellation". En: *IGARSS 2019-2019 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*. IEEE. 2019, págs. 4614-4617 (vid. pág. 121).
- Borsoi, Ricardo Augusto, Tales Imbiriba y José Carlos Moreira Bermudez. "Deep generative endmember modeling: An application to unsupervised spectral unmixing". En: *IEEE Transactions on Computational Imaging* 6 (2019), págs. 374-384 (vid. pág. 81).
- Borsoi, Ricardo Augusto et al. "Spectral Variability in Hyperspectral Data Unmixing: A Comprehensive Review". En: *arXiv preprint arXiv:2001.07307* (2020) (vid. págs. 23, 79, 82).
- Borsoi, Ricardo Augusto et al. "Super-resolution for hyperspectral and multispectral image fusion accounting for seasonal spectral variability". En: *IEEE Transactions on Image Processing* 29 (2019), págs. 116-127 (vid. págs. 23, 24, 79, 85, 98).
- Boyd, Stephen et al. "Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers". En: *Foundations and Trends® in Machine Learning* 3.1 (2011), págs. 1-122 (vid. págs. 90, 106).
- Brady, David J. *Optical imaging and spectroscopy*. John Wiley & Sons, 2009 (vid. págs. 34, 35).
- Brezini, Salah Eddine et al. "Hypersharpener by an NMF-Unmixing-Based Method Addressing Spectral Variability". En: *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters* (2021) (vid. págs. 86, 98).
- Camacho, Ariolfo, Claudia V Correa y Henry Arguello. "An analysis of spectral variability in hyperspectral imagery: a case study of stressed oil palm detection in Co-

- lombia”. En: *International Journal of Remote Sensing* 40.19 (2019), págs. 7603-7623 (vid. págs. 23, 24, 79).
- Camacho Velasco, Ariolfo, César Augusto Vargas García y Henry Arguello Fuentes. “A comparative study of target detection algorithms in hyperspectral imagery applied to agricultural crops in Colombia”. En: *Tecnura* 20.49 (2016), págs. 86-99 (vid. págs. 57, 120).
- Chang, Chein-I. *Hyperspectral data exploitation: theory and applications*. John Wiley & Sons, 2007 (vid. pág. 16).
- Chemura, Abel, Iris van Duren y Louise M van Leeuwen. “Determination of the age of oil palm from crown projection area detected from WorldView-2 multispectral remote sensing data: The case of Ejisu-Juaben district, Ghana”. En: *ISPRS journal of photogrammetry and remote sensing* 100 (2015), págs. 118-127 (vid. pág. 56).
- Chen, Fen, Ke Wang y Ting Feng Tang. “Spectral Unmixing Using a Sparse Multiple-endmember Spectral and Mixture Model”. En: 54.10 (2016), págs. 1-16 (vid. págs. 49, 81).
- Chong, Khai Loong et al. “A review of remote sensing applications for oil palm studies”. En: *Geo-spatial Information Science* 20.2 (2017), págs. 184-200 (vid. pág. 55).
- Conticello, S et al. “Hyperspectral imaging for real time land and vegetation inspection”. En: *Proceedings of the Small Satellites, System & Services Symposium (4S), Valletta, Malta*. Vol. 30. 2016 (vid. pág. 121).
- Coppo, Peter et al. “Fluorescence imaging spectrometer (FLORIS) for ESA FLEX mission”. En: *Remote Sensing* 9.7 (2017), pág. 649 (vid. pág. 120).

- Dechoz, C et al. "Sentinel 2 global reference image". En: *Image and Signal Processing for Remote Sensing XXI*. Vol. 9643. International Society for Optics y Photonics. 2015, 96430A (vid. pág. 93).
- Demarchi, Luca et al. "Multiple endmember unmixing of CHRIS/Proba imagery for mapping impervious surfaces in urban and suburban environments". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 50.9 (2012), págs. 3409-3424 (vid. pág. 49).
- Dian, Renwei, Shutao Li y Xudong Kang. "Regularizing hyperspectral and multispectral image fusion by CNN denoiser". En: *IEEE transactions on neural networks and learning systems* 32.3 (2020), págs. 1124-1135 (vid. pág. 19).
- Dian, Renwei et al. "Recent advances and new guidelines on hyperspectral and multispectral image fusion". En: *Information Fusion* 69 (2021), págs. 40-51 (vid. pág. 19).
- Dobigeon, Nicolas et al. "Joint Bayesian endmember extraction and linear unmixing for hyperspectral imagery". En: *IEEE Transactions on Signal Processing* 57.11 (2009), págs. 4355-4368 (vid. pág. 52).
- Drenth, André, Gabriel Andrés Torres y Gerardo Martínez López. "Phytophthora palmivora, la causa de la Pudrición del cogollo en la palma de aceite". En: *Revista Palmas* 34 (2013), págs. 87-94 (vid. pág. 57).
- Drumetz, Lucas et al. "Blind hyperspectral unmixing using an extended linear mixing model to address spectral variability". En: *IEEE Transactions on Image Processing* 25.8 (2016), págs. 3890-3905 (vid. págs. 26, 41, 51).

- Du, Xiaoxiao et al. "Spatial and spectral unmixing using the beta compositional model". En: *IEEE J. Sel. Topics. Appl. Earth Observ.* 7.6 (2014), págs. 1994-2003. DOI: 10.1109/JSTARS.2014.2330347 (vid. pág. 53).
- Duan, Yule, Hong Huang y Yuxiao Tang. "Local constraint-based sparse manifold hypergraph learning for dimensionality reduction of hyperspectral image". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 59.1 (2020), págs. 613-628 (vid. pág. 78).
- Duan, Yule et al. "Local manifold-based sparse discriminant learning for feature extraction of hyperspectral image". En: *IEEE transactions on cybernetics* (2020) (vid. pág. 78).
- Eches, Olivier et al. "Bayesian estimation of linear mixtures using the normal compositional model. Application to hyperspectral imagery". En: *IEEE Transactions on Image Processing* 19.6 (2010), págs. 1403-1413 (vid. pág. 53).
- Eismann, Michael T y Russell C Hardie. "Application of the stochastic mixing model to hyperspectral resolution enhancement". En: *IEEE transactions on geoscience and remote sensing* 42.9 (2004), págs. 1924-1933 (vid. pág. 43).
- Federación Nacional de Cultivadores de Palma de Aceite (Fedepalma). "Balance 2020 y perspectivas de la agroindustria de palma de aceite". En: (2020) (vid. pág. 55).
- Feingersh, Tal y E Ben Dor. "SHALOM—A commercial hyperspectral space mission". En: *Optical payloads for space missions* 247 (2015) (vid. pág. 120).

- Gelvez, Tatiana y Henry Arguello. "Nonlocal Low-Rank Abundance Prior for Compressive Spectral Image Fusion". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 59.1 (2020), págs. 415-425 (vid. págs. 22, 77).
- Ghaffari, Omid, Mohammad Javad Valadan Zoej y Mehdi Mokhtarzade. "Reducing the effect of the endmembers' spectral variability by selecting the optimal spectral bands". En: *Remote Sensing* 9.9 (2017), pág. 884 (vid. págs. 47, 81).
- Ghamisi, Pedram et al. "Advanced Spectral Classifiers for Hyperspectral Images: A review". En: *IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine* 5.1 (2017), págs. 8-32 (vid. pág. 34).
- Ghiyamat, Azadeh y Helmi Z. M. Shafri. "A review on hyperspectral remote sensing for homogeneous and heterogeneous forest biodiversity assessment". En: *International Journal of Remote Sensing* 31.7 (2010), págs. 1837-1856. DOI: 10.1080/01431160902926681. eprint: <https://doi.org/10.1080/01431160902926681> (vid. pág. 118).
- Green, Robert O et al. "Airborne visible/infrared imaging spectrometer (AVIRIS): recent improvements to the sensor and data facility". En: *Imaging Spectrometry of the Terrestrial Environment*. Vol. 1937. International Society for Optics y Photonics. 1993, págs. 180-190 (vid. pág. 119).
- Grohnfeldt, Claas, Xiaoxiang Zhu y Richard Bamler. "Jointly sparse fusion of hyperspectral and multispectral imagery." En: *IGARSS*. 2013, págs. 4090-4093 (vid. pág. 43).

- Guanter, Luis et al. "The EnMAP spaceborne imaging spectroscopy mission for earth observation". En: *Remote Sensing* 7.7 (2015), págs. 8830-8857 (vid. págs. 118, 120).
- Guarini, Rocchina et al. "Overview of the prisma space and ground segment and its hyperspectral products". En: *2017 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*. IEEE. 2017, págs. 431-434 (vid. pág. 120).
- Haack, Barry N. "Landsat: A tool for development". En: *World Development* 10.10 (1982), págs. 899-909 (vid. pág. 122).
- Halimi, Abderrahim, Paul Honeine y Jose M Bioucas-Dias. "Hyperspectral unmixing in presence of endmember variability, nonlinearity, or mismodeling effects". En: *IEEE Transactions on Image Processing* 25.10 (2016), págs. 4565-4579 (vid. págs. 41, 47, 54, 55, 64).
- Hall, David y James Llinas. *Multisensor data fusion*. CRC press, 2001 (vid. pág. 16).
- Heinz, Daniel C et al. "Fully constrained least squares linear spectral mixture analysis method for material quantification in hyperspectral imagery". En: *IEEE transactions on geoscience and remote sensing* 39.3 (2001), págs. 529-545 (vid. pág. 62).
- Heylen, R et al. "Hyperspectral Unmixing With Endmember Variability via Alternating Angle Minimization". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 54.8 (2016), págs. 4983-4993 (vid. págs. 47, 48, 64).
- Hong, Danfeng et al. "An augmented linear mixing model to address spectral variability for hyperspectral unmixing". En: *IEEE Transactions on Image Processing* 28.4 (2018), págs. 1923-1938 (vid. págs. 26, 51, 80, 81, 83).

- Imbiriba, Tales, Ricardo Augusto Borsoi y José Carlos Moreira Bermudez. "Generalized linear mixing model accounting for endmember variability". En: *2018 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. IEEE. 2018, págs. 1862-1866 (vid. pág. 85).
- lordache, Marian-Daniel et al. "A dynamic unmixing framework for plant production system monitoring". En: *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing* 7.6 (2014), págs. 2016-2034 (vid. pág. 50).
- Izzuddin, Mohamad Anuar et al. "Spectral based analysis of airborne hyperspectral remote sensing image for detection of Ganoderma disease in oil palm". En: *Proceedings of*. 2015, págs. 1-3 (vid. pág. 58).
- Jusoff, Kamaruzaman y Mubeena Pathan. "Mapping of individual oil palm trees using airborne hyperspectral sensing: an overview". En: *Applied Physics Research* 1.1 (2009), pág. 15 (vid. pág. 56).
- Keshava, Nirmal y John F Mustard. "Spectral unmixing". En: *IEEE signal processing magazine* 19.1 (2002), págs. 44-57 (vid. págs. 16, 77).
- Lanaras, Charis, Emmanuel Baltsavias y Konrad Schindler. "Hyperspectral super-resolution with spectral unmixing constraints". En: *Remote Sensing* 9.11 (2017), pág. 1196 (vid. págs. 22, 77, 84).
- Lee, Christine M et al. "An introduction to the NASA Hyperspectral InfraRed Imager (HyspIRI) mission and preparatory activities". En: *Remote Sensing of Environment* 167 (2015), págs. 6-19 (vid. pág. 121).

- Lelong, Camille CD et al. "Evaluation of oil-palm fungal disease infestation with canopy hyperspectral reflectance data". En: *Sensors* 10.1 (2010), págs. 734-747 (vid. pág. 57).
- Li, Bo et al. "Projection matrix design using prior information in compressive sensing". En: *Signal Processing* 135 (2017), págs. 36-47. DOI: 10.1016/j.sigpro.2016.11.024 (vid. pág. 41).
- Loncan, Laetitia et al. "Hyperspectral pansharpening: A review". En: *IEEE Geoscience and remote sensing magazine* 3.3 (2015), págs. 27-46 (vid. pág. 17).
- Luo, Fulin et al. "Sparse-adaptive hypergraph discriminant analysis for hyperspectral image classification". En: *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters* 17.6 (2019), págs. 1082-1086 (vid. pág. 78).
- Mahalingam, S et al. "Reflectance based vicarious calibration of HySIS sensors and spectral stability study over pseudo-invariant sites". En: *2019 IEEE Recent Advances in Geoscience and Remote Sensing: Technologies, Standards and Applications (TENGARSS)*. IEEE. 2019, págs. 132-136 (vid. pág. 120).
- Manolakis, Dimitris, David Marden y Gary a Shaw. "Hyperspectral Image Processing for Automatic Target Detection Applications". En: *Lincoln Laboratory Journal* 14.1 (2003), págs. 79-116 (vid. págs. 33, 39).
- MN Maris, N et al. "Hyperspectral sensing possibilities using continuum removal index in early detection of Ganoderma in oil palm plantation". En: August 2010 (2010), págs. 233-239 (vid. pág. 58).
- Müller, Rupert et al. "The new hyperspectral sensor DESIS on the multi-payload platform MUSES installed on the ISS". En: *ISPRS - International Archives of the Pho-*

togrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences XLI-B1 (jun. de 2016), págs. 461-467. DOI: 10.5194/isprsarchives-XLI-B1-461-2016 (vid. págs. 93, 118, 119).

Nascimento, José MP y José MB Dias. "Vertex component analysis: A fast algorithm to unmix hyperspectral data". En: *IEEE transactions on Geoscience and Remote Sensing* 43.4 (2005), págs. 898-910 (vid. pág. 70).

Nieke, Jens y Michael Rast. "Towards the copernicus hyperspectral imaging mission for the environment (CHIME)". En: *IGARSS 2018-2018 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*. IEEE. 2018, págs. 157-159 (vid. pág. 121).

Petrovic, Vladimir S y Costas S Xydeas. "Gradient-based multiresolution image fusion". En: *IEEE Transactions on Image processing* 13.2 (2004), págs. 228-237 (vid. pág. 16).

Phiri, Darius et al. "Sentinel-2 data for land cover/use mapping: a review". En: *Remote Sensing* 12.14 (2020), pág. 2291 (vid. pág. 123).

Plaza, Antonio et al. "Recent advances in techniques for hyperspectral image processing". En: *Remote sensing of environment* 113 (2009), S110-S122 (vid. pág. 36).

Rendana, Muhammad et al. "A Review of Methods for Detecting Nutrient Stress of Oil Palm in Malaysia". En: *J. Appl. Environ. Biol. Sci* 5.6 (2015), págs. 60-64 (vid. pág. 58).

Santoso, Heri, Hiroshi Tani y Xiufeng Wang. "A simple method for detection and counting of oil palm trees using high-resolution multispectral satellite imagery".

- En: *International journal of remote sensing* 37.21 (2016), págs. 5122-5134 (vid. pág. 56).
- Shafri, Helmi ZM y Nasrulhapiza Hamdan. "Hyperspectral imagery for mapping disease infection in oil palm plantation using vegetation indices and red edge techniques". En: *American Journal of Applied Sciences* 6.6 (2009), pág. 1031 (vid. pág. 58).
- Shaw, Gary A y Hsiao-hua K Burke. "Spectral Imaging for Remote Sensing". En: *Lincoln Laboratory Journal* 14.1 (2003), págs. 3-28 (vid. págs. 16, 25, 43, 77).
- Simões, Miguel et al. "A convex formulation for hyperspectral image superresolution via subspace-based regularization". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 53.6 (2014), págs. 3373-3388 (vid. págs. 22, 77, 84, 87).
- Somers, Ben et al. "A weighted linear spectral mixture analysis approach to address endmember variability in agricultural production systems". En: *International Journal of Remote Sensing* 30.1 (2009), págs. 139-147 (vid. pág. 57).
- Somers, Ben et al. "Endmember variability in spectral mixture analysis: A review". En: *Remote Sensing of Environment* 115.7 (2011), págs. 1603-1616 (vid. págs. 23, 40, 47, 48, 79).
- Srestasathiern, Panu y Preesan Rakwatin. "Oil palm tree detection with high resolution multi-spectral satellite imagery". En: *Remote Sensing* 6.10 (2014), págs. 9749-9774 (vid. pág. 56).
- Stein, David. "Application of the normal compositional model to the analysis of hyperspectral imagery". En: (2003), págs. 44-51 (vid. pág. 53).

- Thenkabail, Prasad S et al. "Selection of hyperspectral narrowbands (HNBs) and composition of hyperspectral twoband vegetation indices (HVIs) for biophysical characterization and discrimination of crop types using field reflectance and Hyperion / EO1 data". En: *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing* 6.2 (2013), págs. 427-439 (vid. págs. 34, 57).
- Thouvenin, Pierre Antoine, Nicolas Dobigeon y Jean Yves Tourneret. "Hyperspectral unmixing with spectral variability using a perturbed linear mixing model". En: *IEEE Transactions on Signal Processing* 64.2 (2016), págs. 525-538 (vid. págs. 47, 48, 64, 82).
- Tits, Laurent, Ben Somers y Pol Coppin. "The potential and limitations of a clustering approach for the improved efficiency of multiple endmember spectral mixture analysis in plant production system monitoring". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 50.6 (2012), págs. 2273-2286 (vid. pág. 50).
- Tong, Qingxi, Yongqi Xue y Lifu Zhang. "Progress in hyperspectral remote sensing science and technology in China over the past three decades". En: *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing* 7.1 (2013), págs. 70-91 (vid. pág. 120).
- Torres, GA et al. "Bud rot caused by *Phytophthora palmivora*: a destructive emerging disease of oil palm". En: *Phytopathology* 106.4 (2016), págs. 320-329 (vid. pág. 57).
- Transon, Julie et al. "Survey of Hyperspectral Earth Observation Applications from Space in the Sentinel-2 Context". En: *Remote Sensing* 10.2 (2018). DOI: 10.3390/rs10020157 (vid. pág. 25).

- Tseng, Paul. "Convergence of a block coordinate descent method for nondifferentiable minimization". En: *Journal of optimization theory and applications* 109.3 (2001), págs. 475-494 (vid. pág. 92).
- Tuominen, Jyrki y Tarmo Lipping. "Spectral characteristics of common reed beds: Studies on spatial and temporal variability". En: *Remote Sensing* 8.3 (2016) (vid. págs. 26, 50).
- Uezato, Tatsumi, Mathieu Fauvel y Nicolas Dobigeon. "Hyperspectral unmixing with spectral variability using adaptive bundles and double sparsity". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 57.6 (2019), págs. 3980-3992 (vid. pág. 81).
- Uezato, Tatsumi et al. "A novel spectral unmixing method incorporating spectral variability within endmember classes". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 54.5 (2016), págs. 2812-2831 (vid. págs. 41, 47, 52).
- Vargas, Edwin, Henry Arguello y Jean-Yves Tourneret. "Spectral image fusion from compressive measurements using spectral unmixing and a sparse representation of abundance maps". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 57.7 (2019), págs. 5043-5053 (vid. págs. 22, 77).
- Veganzones, Miguel A et al. "Hyperspectral super-resolution of locally low rank images from complementary multisource data". En: *IEEE Transactions on Image Processing* 25.1 (2015), págs. 274-288 (vid. pág. 95).
- Veganzones, Miguel Angel et al. "A new extended linear mixing model to address spectral variability". En: *IEEE workshop on hyperspectral image and signal pro-*

- cessing: evolution in remote sensing (WHISPERS 2014)*. 2014, n-c (vid. págs. 51, 82).
- Vercauteren, Tom et al. "Diffeomorphic demons: Efficient non-parametric image registration". En: *NeuroImage* 45.1 (2009), S61-S72 (vid. pág. 124).
- Vivone, Gemine et al. "A critical comparison among pansharpening algorithms". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 53.5 (2014), págs. 2565-2586 (vid. pág. 17).
- Wald, Lucien, Thierry Ranchin y Marc Mangolini. "Fusion of satellite images of different spatial resolutions: Assessing the quality of resulting images". En: (1997) (vid. pág. 95).
- Wang, Z. y A.C. Bovik. "A universal image quality index". En: *IEEE Signal Processing Letters* 9.3 (2002). cited By 3422, págs. 81-84. DOI: 10.1109/97.995823 (vid. pág. 95).
- Wei, Qi, Nicolas Dobigeon y Jean-Yves Tourneret. "Fast fusion of multi-band images based on solving a Sylvester equation". En: *IEEE Transactions on Image Processing* 24.11 (2015), págs. 4109-4121 (vid. págs. 18, 85).
- Wei, Qi et al. "Hyperspectral and multispectral image fusion based on a sparse representation". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 53.7 (2015), págs. 3658-3668 (vid. pág. 18).
- Wei, Qi et al. "Multiband image fusion based on spectral unmixing". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 54.12 (2016), págs. 7236-7249 (vid. págs. 22, 77).

- Xie, Qi et al. "Multispectral and Hyperspectral Image Fusion by MS/HS Fusion Net". En: *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 2019, págs. 1585-1594 (vid. pág. 18).
- Xu, Mingming et al. "An Image-Based Endmember Bundle Extraction Algorithm Using Both Spatial and Spectral Information". En: 8.6 (2015), págs. 2607-2617 (vid. pág. 47).
- Yokoya, Naoto, Claas Grohnfeldt y Jocelyn Chanussot. "Hyperspectral and multispectral data fusion: A comparative review of the recent literature". En: *IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine* 5.2 (2017), págs. 29-56 (vid. págs. 17, 24, 25, 43, 77, 92, 94, 95).
- Yokoya, Naoto, Takehisa Yairi y Akira Iwasaki. "Coupled nonnegative matrix factorization unmixing for hyperspectral and multispectral data fusion". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 50.2 (2011), págs. 528-537 (vid. págs. 22, 77, 84).
- Zare, Alina y Paul Gader. "PCE: piecewise convex endmember detection". En: *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 48.6 (2010), págs. 2620 -2632. DOI: 10.1109/TGRS.2010.2041062 (vid. pág. 52).
- Zare, Alina y KC Ho. "Endmember variability in hyperspectral analysis: Addressing spectral variability during spectral unmixing". En: *IEEE Signal Processing Magazine* 31.1 (2013), págs. 95-104 (vid. págs. 23, 40, 47, 48, 52, 79).
- Zhang, Xueting et al. "SSR-NET: Spatial-Spectral Reconstruction Network for Hyperspectral and Multispectral Image Fusion". En: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* (2020) (vid. pág. 19).

- Zhou, Feng et al. "Pyramid fully convolutional network for hyperspectral and multispectral image fusion". En: *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing* 12.5 (2019), págs. 1549-1558 (vid. pág. 18).
- Zhou, Yuan, Anand Rangarajan y Paul D Gader. "A Gaussian mixture model representation of endmember variability in hyperspectral unmixing". En: *IEEE Transactions on Image Processing* 27.5 (2018), págs. 2242-2256 (vid. pág. 81).
- Zhu, Feiyun. "Hyperspectral unmixing: ground truth labeling, datasets, benchmark performances and survey". En: *arXiv preprint arXiv:1708.05125* (2017) (vid. págs. 92, 96).
- Zhu, Feiyun et al. "Spectral unmixing via data-guided sparsity". En: *IEEE Transactions on Image Processing* 23.12 (2014), págs. 5412-5427 (vid. págs. 79, 92, 96).
- Zhu, Xiao Xiang y Richard Bamler. "A sparse image fusion algorithm with application to pan-sharpening". En: *IEEE transactions on geoscience and remote sensing* 51.5 (2012), págs. 2827-2836 (vid. págs. 17, 43).
- Zou, Sheng y Alina Zare. "Hyperspectral unmixing with endmember variability using partial membership latent dirichlet allocation". En: *ICASSP* (2017), págs. 6200-6204 (vid. pág. 53).