

La Historia y la Epistemología en la Formación de un Ciudadano Matemáticamente Competente:
un Acercamiento Desde el Estudio de la Trigonometría

Jairo Gutiérrez Balaguera

Trabajo de Grado para Optar el Título de
Magister en Educación Matemática

Directora
Sandra Evely Parada Rico
Doctora En Ciencias

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Maestría en Educación Matemática
Bucaramanga
2019

DEDICATORIA

A Dios por permitirme llegar a concluir la idea de toda una vida.

A mis padres quienes hicieron posible mi existencia y fueron mi gran ejemplo e inspiración.

A Nanny, mi amada esposa en quién la palabra Amor se hace vida, quién ha sido mi apoyo incondicional y con quién espero seguir creciendo hasta el final.

A Kelly, Jairo Alejandro y Valentina mis retoños, quienes son mi mayor orgullo, han alegrado mi vida y prolongan mi existencia.

A mis hermanos por que en cada uno de ellos encuentro admiración y motivos de agradecimiento.

A Celina mi fiel amiga quién siempre da mucho más de lo que uno espera.

A Sandra Evelyn por acompañarme en la materialización de una idea que costó mucho tiempo, comprensión y paciencia.

Tabla de Contenido

Introducción y planteamiento del problema.....	14
1. Antecedentes.....	24
1.1 Historia de las matemáticas como recurso didáctico	26
1.2 La enseñanza de la trigonometría.....	32
1.3 La historia como recurso didáctico en la enseñanza de la trigonometría.....	34
2. Aspectos teóricos y conceptuales.....	37
2.1 La historia de las matemáticas como uso.....	38
2.2 Historia de las matemáticas como integración.....	39
2.3 La historia de las matemáticas como permeador	40
2. 4 Ciudadano matemáticamente competente: un acercamiento desde el estudio de la trigonometría.....	42
2.4.1 Saber-saber: ¿qué aprendizajes de la trigonometría se esperan construir?.....	44
2.4.2 Saber-hacer: ¿qué problemas puedo resolver con lo que aprendí?.....	46
2.4.3 Saber-ser: ¿qué aprendizajes ciudadanos se esperan?	47
3. Aspectos metodológicos	49
3.1 Fase 1. Sistematización de literatura de corte histórico y epistemológico.....	49
3.2 Fase 2. Diseño de la secuencia didáctica	50
3.3 Fase 3. Intervención en el aula.....	54
3.4 Fase 4. Sistematización de la experiencia	56
4. Estudio de la trigonometría con la mediación de la historia y la epistemología.....	58

4.1 Tales y la razón geométrica	59
4.1.1 Análisis a priori.....	59
4.1.2 Caracterización de aprendizajes.....	69
4.2 Angulo y su historia	77
4.2.1 Análisis a priori.....	78
4.2.2 Caracterización de aprendizajes.....	90
4.3 Aristarco y la tls	95
4.3.1 Análisis a priori.....	96
4.3.2 Caracterización de aprendizajes.....	107
4.4 Hiparco y las cuerdas	114
4.4.1 Análisis a priori.....	114
4.4.2 Caracterización de aprendizajes.....	129
5. Reflexiones	135
5.1 Reflexiones acerca del ciudadano matemáticamente competente.....	135
5.1.1 Aprendizajes del saber-saber.....	135
5.1.2 Aprendizajes del saber- hacer	137
5.1.3 Aprendizajes del saber- ser	138
5.2 Reflexiones generales	140
5.3 Perspectivas de investigación.....	141
Referencias bibliográficas	143
Apéndices.....	144

Tabla de figuras

Figura 1 Ciudadano Matemáticamente Competente.....	48
Figura 2 Actividad 1. Recurriendo a la historia Taller uno	63
Figura 3 Actividad Haciendo en contexto Taller uno.....	65
Figura 4 Matematicomania en Tales y la Razón Geométrica.....	67
Figura 5¿Qué sabemos de? Diagnóstico Inicial Caso Nicolás Taller uno	70
Figura 6 Desarrollo Conceptual Caso Nicolás Taller uno	71
Figura 7¿Qué aprendimos? Diagnóstico Final Caso Nicolás Taller uno	71
Figura 8Modelo de Tales Saber Hacer Caso Nicolás Taller uno.....	73
Figura 9Problema del árbol Saber Hacer Caso Nicolás.....	73
Figura 10 Problema del árbol Saber Hacer Caso Nicolás.....	74
Figura 11 Problema del árbol. Saber Hacer Caso Nicolás Taller uno	74
Figura 12Problema del árbol Saber Hacer Caso Nicolás Taller uno	75
Figura 13¿Qué aprendimos? Saber Ser.....	76
Figura 14 Recurriendo a la historia-primera parte Taller dos.....	81
Figura 15 Recurriendo a la Historia Parte dos Taller dos	82
Figura 16 Nariz Respingada Haciendo en Contexto Taller dos.....	85
Figura 17 Mejor ángulo Haciendo en contexto Taller dos	85
Figura 18 Actividad VII Desarrollo Conceptual Taller dos.....	86
Figura 19 Primera actividad Matematicomanía Taller dos.....	87
Figura 20 Segunda actividad Matematicomanía Taller dos.....	88
Figura 21 Tercera actividad Matematicomanía Taller dos	89
Figura 22¿Qué aprendimos? Saber-Saber Caso José Alejandro Taller dos.....	91
Figura 23 Esquema de José Alejandro Saber Hacer, actividad Matematicomania Taller dos	92

Figura 24 Razón geométrica con la que José Alejandro resuelve situación de Matematicomanía	93
Figura 25 Matematicomanía Saber Hacer Caso José Alejandro Taller dos.....	93
Figura 26 Matematicomanía Saber Hacer Caso José Alejandro Taller dos.....	94
Figura 27 ¿Qué aprendimos? Saber-Ser Caso José Alejandro Taller dos	95
Figura 28 ¿Qué sabemos de? Diagnóstico Inicial Taller tres	98
Figura 29 Recurriendo a la Historia Taller tres	99
Figura 30 Preguntas sobre Recurriendo a la Historia Actividad I Taller tres	100
Figura 31 Haciendo en Contexto Actividad II Taller tres.....	101
Figura 32 Desarrollo Conceptual definición de razones geométricas en el triángulo Taller tres	102
Figura 33 Matematicomanía Taller tres	103
Figura 34 Matematicomanía Cálculo del margen de error Taller tres	104
Figura 35 Matematicomanía Taller tres	105
Figura 36 ¿Qué aprendimos? Taller tres	106
Figura 37 Problema de Aristarco Caso Luis Manuel.....	109
Figura 38 Saber-Hacer Taller Tres Caso Luis Manuel	110
Figura 39 Respuesta de Luis Manuel Saber-Hacer	111
Figura 40 Respuesta Luis Manuel Saber-Ser.....	113
Figura 41 ¿Qué sabemos de? Taller cuatro.....	116
Figura 42 Recurriendo a la Historia taller cuatro.....	118
Figura 43 Recurriendo a la Historia Preguntas	119
Figura 44 Haciendo en contexto Taller cuatro.....	120
Figura 45 Haciendo en contexto taller cuatro	121
Figura 46 Desarrollo Conceptual Taller cuatro	122

Figura 47 Desarrollo Conceptual Taller cuatro	124
Figura 48 Desarrollo Conceptual Taller cuatro	125
Figura 49 Matematicomanía Taller Cuatro.....	126
Figura 50 Matematicomanía Taller cuatro.....	127
Figura 51 ¿Qué aprendimos' Taller Cuatro	128
Figura 52 Respuesta Luis Manuel Saber-saber Taller cuatro	130
Figura 53 Respuesta Luis Manuel ¿Qué aprendimos de?	131
Figura 54 Luis Manuel Saber Hacer Taller Cuatro.....	132
Figura 55 ángulo de 18° sin trasportador.....	133
Figura 56 Luis Manuel Saber Ser Taller Cuatro	134
Figura 57Caracterización Ciudadano Matemáticamente Competente.....	139

Índice de tablas

Tabla 1 Indicadores de logro del saber-saber de le Secuencia de Actividades.....	45
Tabla 2 Indicadores del saber-hacer establecido en la Secuencia de Actividades.....	46
Tabla 3 Indicadores del Saber-Ser establecidos en la Secuencia de Actividades	47
Tabla 4 Cronograma de la Intervención.....	55

Lista de Apéndices

Apéndice A: Taller de Tales y la razón geométrica	145
Apéndice B: Taller de Angulo y su historia	153
Apéndice C: Taller de Aristarco y la TLS	163
Apéndice D: Taller de Hiparco y las cuerdas	172

RESUMEN EN ESPAÑOL

TÍTULO: La Historia y la Epistemología en la Formación de un Ciudadano Matemáticamente Competente: un Acercamiento Desde el Estudio de la Trigonometría*

AUTOR: Jairo Gutiérrez Balaguera**

PALABRAS CLAVE: Ciudadano, Formación, Estudio de Trigonometría, Historia

DESCRIPCIÓN: Existen algunas dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría: se desconoce la conexión de la trigonometría con la realidad, modelos gráficos imprecisos para los objetos de la trigonometría, se utilizan muy poco las tecnologías digitales, se desfavorece la actitud crítica y el currículo desaprovecha su contenido histórico y epistemológico. El objetivo de la investigación es: Caracterizar aprendizajes en la formación de un ciudadano matemáticamente competente que desarrolla una secuencia de actividades fundamentadas en una dimensión histórico-epistemológica para el estudio de la trigonometría. Asumimos como referentes teóricos el trabajo de Guacaneme (2016), este enfoque se ha conceptualizado de tres formas distintas, a saber: La Historia de las Matemáticas como uso; La Historia de las Matemáticas como integración; La Historia de las Matemáticas como permeador. El otro referente es el concepto de ciudadano matemáticamente competente que inicialmente lo proponen los lineamientos curriculares MEN (1998) y que luego en los estándares de competencias en matemáticas MEN (2006) lo concretan. El diseño metodológico consta de 4 fases: Sistematización de literatura de corte histórico y epistemológico, Diseño de la secuencia didáctica, Intervención en el Aula y Sistematización de la experiencia. El desarrollo de la experiencia de aula posibilitó la construcción de una estructura metodológica para la enseñanza de la trigonometría mediada de aspectos históricos y epistemológicos. Indicadores de Logro, Preguntas Orientadoras, ¿Qué sabemos?, Recurriendo a la Historia, Haciendo en Contexto, Desarrollo Conceptual, Matematicomanía, ¿Qué aprendimos?, Para profundizar. Es una propuesta metodológica que muestra con actividades originales y muy concretas, cómo se puede hacer uso de la historia en la enseñanza de la matemática para el desarrollo de aprendizajes que afectan positivamente todas las dimensiones del ser, así mismo se ofrece una caracterización del Ciudadano Matemáticamente Competente para contribuir a su difusión y aplicación en el futuro de la enseñanza de la matemática.

***Trabajo de Grado:**

**** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora Sandra Evely Parada Rico.**

Doctora en Ciencias

RESUMEN EN INGLES

TITULO: La Historia y la Epistemología en la Formación de un Ciudadano Matemáticamente Competente: un Acercamiento Desde el Estudio de la Trigonometría*

AUTOR: Jairo Gutiérrez Balaguera**

PALABRAS CLAVE: Ciudadano, Formación, Estudio de Trigonometría, Historia

DECRPTION: There are some difficulties in teaching and learning trigonometry: the connection of trigonometry to reality is unknown, imprecise graphic models for trigonometry objects, digital technologies are rarely used, critical attitude and attitude curriculum are disadvantaged wastes its historical and epistemological content. The objective of the research is: To characterize learning in the formation of a mathematical competent citizen who develops a sequence of activities based on a historical-epistemological dimension for the study of trigonometry. We assume as theoretical references the work of Guacaneme (2016), this approach has been conceptualized in three different ways, namely: The History of Mathematics as use; The History of Mathematics as integration; The History of Mathematics as a permeator. The other reference is the concept of a mathematical competent citizen who is initially proposed by the MEN (1998) curriculum guidelines and then specified in the standards of mathematics competencies MEN (2006). The methodological design consisted of 4 phases: Systematization of historical and epistemological literature, Design of the didactic sequence, Intervention in the Classroom and Systematization of the experience. The development of the classroom experience allowed the construction of acal structure for the teaching of trigonometry mediated historical and epistemological aspects. Indicators of Achievement, Guiding Questions, what do we know? Using History, Making Context, Conceptual Development, Mathematics, what did we learn? To deepen. It is acal proposal methodologist all dimensions of being made, how history can be used in the teaching mathematics for the development of learning that positively affects all dimensions of being Characterization Competent to contribute to its dissemination and application in the future of mathematics teaching.

***Trabajo de Grado:**

**** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora Sandra Evelyn Parada Rico. Doctora en Ciencias**

Introducción y planteamiento del problema

“El que posee las nociones más exactas sobre las causas de las cosas y es capaz de dar perfecta cuenta de ellas en su enseñanza, es más sabio que todos los demás en cualquier otra ciencia.”
Aristóteles

Hace más de treinta años, al graduarme de la Universidad Industrial de Santander (UIS) como Licenciado en Matemáticas, entendía la docencia como una actividad laboral, rutinaria y mecánica. La docencia, me permitía cumplir con otra expectativa, ser Ingeniero de Sistemas, lo que conseguí al año siguiente, pues la docencia me permitía laborar en un colegio privado y estudiar Ingeniería. Una vez terminé mis estudios de Ingeniería, logré vincularme en propiedad como docente del magisterio.

Teniendo formación profesional en dos campos diferentes y con muchos objetos de estudio entre los dos campos profesionales, me encontré en un gran dilema: ¿desempeñarme como Docente o Ingeniero? La docencia me hacía sentir todo tipo de emociones: frustración, realización, esperanza y a veces desesperación. Ser docente era muy significativo para mí porque cada situación dolorosa o gratificante me dejaba grandes enseñanzas, me confrontaba a mí mismo y me preguntaba ¿en realidad la docencia es para lo que estoy hecho?

Tímidamente me convencí, de ser profesor de matemáticas, además conté con mucha suerte porque en la institución donde laboraba en ese momento, nos ofrecían oportunidades de capacitación. Que me permitieron poco a poco ir desistiendo de ser Ingeniero y me fui identificando mucho más con mi rol de profesor de matemáticas. Mi interés hacia la enseñanza de las matemáticas me impulsó a conocer mucho más sobre el área y encontré en la lectura de la historia de las matemáticas una de mis pasiones, en esas lecturas comprendí que la historia podría consolidarse como un recurso didáctico de mi práctica docente.

Desde mis inicios como profesor, permanentemente en clase hacía comentarios sobre las vidas de los matemáticos o relataba anécdotas con contenido histórico. D'Amore (2011) afirma que el referirse al uso de la historia de las matemáticas como recurso didáctico posibilita el análisis crítico de la evolución de las ideas y el desarrollo de los hechos. Durante mi experiencia he podido percibir que a un buen número de estudiantes no les molestaban este tipo de actividades y que por el contrario escuchaban y preguntaban, sentí que usar los hechos históricos en clase de matemáticas estimulaba su curiosidad.

Por lo anterior, asumí dentro de mis concepciones como docente que debía incorporar elementos históricos, epistemológicos y filosóficos para captar la atención de mis estudiantes. Actividad que realicé durante mucho tiempo, incluso, ante los cuestionamientos de directivos, padres de familia, estudiantes y compañeros de trabajo, quienes suponían que las matemáticas consistían en el manejo de números, ecuaciones, procedimientos y solución de problemas. En ese momento encontré en la teoría cierto respaldo: entre las afirmaciones que encontré rescato las siguientes.

Si alguien hubiera intentado despertar mi interés matemático presentándome las matemáticas como una serie de juicios espléndidos elaborados a menudo por una serie de personas a menudo fascinantes, es decir, desplegándola como un proceso de historia intelectual habría respondido como lo hice cuando, por fin, descubrí los encantos ocultos de la historia de las matemáticas. (Goldstein, 1984, p.11-12)

En sus planteamientos, Guzmán (1993) se refiere a que el proceso de aprendizaje matemático a cualquier nivel, trata, de ponernos en contacto con una realidad matematizable que ha dado lugar a los conceptos matemáticos que queremos explorar en nuestros alumnos. Para ello deberíamos conocer a fondo el contexto histórico que enmarca estos conceptos adecuadamente.

Otro autor que en ese momento reforzó mis ideas fue Kline (1992) quien expone:

Si bien el desarrollo lógico no difiere radicalmente del histórico, presenta esta materia muchos caracteres que se revelan más fácilmente con un vistazo a su historia que examinando sus conceptos, teoremas y demostraciones. Así, aprenderemos qué es lo que las matemáticas abarcan en la actualidad, cómo despuntaron sus diversas ramas y cómo la índole de las contribuciones matemáticas hechas por varias civilizaciones fue condicionada por estas mismas. Gracias a esta exploración histórica empezaremos a formarnos una idea de la naturaleza, extensión y aplicaciones de las matemáticas. (p.21)

La visión de una enseñanza permeada por el estudio de la génesis y la evolución de los conceptos matemáticos la encontré en varios autores. Entre ellos, encontré en Poincaré (1981, p.220) que afirma “El educador debe hacer pasar al niño por donde han pasado sus padres; más rápidamente, pero sin saltarse ninguna etapa. De esta manera, la historia de la ciencia debe ser nuestra primera guía”. Así mismo, autores como Cañón (1993) exponen que la Matemática resulta ser así un conocimiento con historia, y para la comprensión de sus resultados el conocimiento del contexto alcanza una significación que deberemos precisar.

Otro aspecto que pude interiorizar es que la enseñanza de la matemática era un punto de reflexión inaplazable para la escuela moderna, lo percibí en los adolescentes, en sus manifestaciones de apatía hacia el aprendizaje de la matemática, éste es para mí un indicador suficiente para la necesidad de replantear su enseñanza. La perspectiva de la enseñanza de la matemática hoy requiere de ingredientes didácticos acordes con el contexto, con la realidad y con las expectativas del educando, de quién debemos estimular el interés y despertar su curiosidad por aprender. En el PEI del Instituto politécnico donde laboro actualmente, se contempla un enfoque pedagógico de carácter holístico, antropológico, social y por competencias, haciendo énfasis en el desarrollo integral desde la 3 dimensiones fundamentales del estudiante como son: el ser, el hacer y el saber, significa que se da gran importancia al proceso formativo y me estimuló para engrandecer mi labor docente.

Por todo lo anterior, reconocí la responsabilidad que tiene el profesor de matemáticas, su papel como formador de la componente moral mediante la exploración, el descubrimiento y reflexión de las raíces del conocimiento matemático. Me di cuenta que esta conexión favorecía la formación humana del alumno porque lo confrontaba consigo mismo y le despertaba sensibilidad, puesto que le revelaba el drama y la tragedia que hacen parte del proceso de consolidación del conocimiento matemático a través de la historia.

En el proceso de mi transformación comprendí, que la clase de matemáticas debería convertirse para el estudiante en un escenario de participación y de construcción colectiva, en el que se privilegiará el respeto, la actitud crítica, la discusión abierta con argumentos fundamentados desde el conocimiento matemático. De igual forma, evolucioné en mi manera de concebir al estudiante como un ser pasivo a un ser en permanente formación y con grandes cuestionamientos hacia la vida, hacía sí mismo y hacía el conocimiento, lo invitaba a ser parte activa de la clase y le señalaba su responsabilidad social al otorgarle el estatus de miembro participativo de una comunidad académica.

También encontré un cambio significativo en la concepción que yo tenía de la matemática porque me di cuenta que era una disciplina con elementos diversos y que se relacionaba con las demás áreas del conocimiento, que hacía parte del despliegue de la ciencia y de la tecnología y que dictaminaba en gran medida el nivel de desarrollo de las sociedades.

Entre las asignaturas del currículo de matemática encontré en la trigonometría una fuente muy rica y diversa de situaciones, escenarios y episodios de la historia, que encajan apropiadamente para utilizarlos como recursos didácticos para la enseñanza y aprendizaje de la misma. La trigonometría es una disciplina matemática que tiene sus orígenes en la Astronomía, sin embargo; de esto no se enteró el estudiante. Al mismo tiempo, esta ciencia provocó gran parte del desarrollo

tecnológico y eso también se desconoce. La trigonometría cuenta con una historia muy prolífica en problemas con soluciones simples pero brillantes, ideas geniales y momentos estelares, pero de esto tampoco se discute en el aula. Es decir, se identifican diversos aspectos didácticos que al ser ignorados dificultan la enseñanza y por lo tanto el aprendizaje de la trigonometría, entre ellos:

- No se muestra la conexión de la trigonometría con la realidad: Parece extraño pero en nuestra cotidianidad está presente la trigonometría, en el acercamiento con los objetos que nos rodean, por ejemplo: cuando se divisa un avión en su recorrido por el azul del cielo, la longitud cambiante de la sombra de un árbol en un día soleado, al desplazarnos por unas escaleras. Todos estos son ejemplos donde se cumplen relaciones trigonométricas, sin embargo, el enfoque de enseñanza de esta disciplina en el aula mantiene un distanciamiento con la realidad inmediata. En este sentido Moore, citado por Fernández, Ruíz & Rico (2016, p.52) sostiene que

la trigonometría es una parte de la matemática que carece de coherencia en su enseñanza por las dificultades que presentan estudiantes y profesores en su uso en múltiples contextos. Estos problemas sugieren que la aproximación a este tópico de la matemática no facilita que alumnos y docentes establezcan conexiones entre sus diferentes componentes de significado.

- No se relacionan los objetos de la trigonometría a escala con la realidad: Una revisión bibliográfica de textos escolares para la enseñanza de la trigonometría muestra un invariante respecto a la representación gráfica de los problemas sobre trigonometría del triángulo rectángulo, en la mayor parte de ellos se presentan modelos geométricos cuyas medidas no se ajustan en escala a las medidas reales de la situación formulada. En este sentido, se obvia la riqueza que contiene el propio diseño del esquema gráfico, sí este se hiciera con medidas ajustadas a la realidad. Esto puede estimular en el estudiante el pensamiento métrico y el razonamiento proporcional, además de sugerir dentro de la misma

línea de pensamiento, la imprescindible presencia y comparación de las medidas teóricas con respecto a las medidas estimadas que determinan un margen de error en las construcciones y que constituyen otro elemento que por sí sólo imprime significado al aprendizaje.

- No se apoya en las tecnologías digitales: Desde mi experiencia, he podido evidenciar que el escenario del aula sigue manteniendo su estructura tradicional y en su mayoría el recurso tecnológico brilla por su ausencia. Este aspecto nos induce a la inevitable exploración e implementación de herramientas tecnológicas en el aula de matemáticas, como son: software de geometría dinámica, celulares, tablets, blogs, hojas de cálculo, editores de video, de sonido y de texto y demás dispositivos y recursos que potencien la actividad constructiva y productiva.
- La actividad del aula no favorece la actitud crítica: Cuando el conocimiento matemático se presenta como un conjunto de verdades irrefutables y en un estricto orden, entonces se le otorga un aire de autoritarismo y se aleja al estudiante del cuestionamiento y del pensamiento crítico. Como lo afirma Lakatos, citado por Maza (1994, p. 19).

Las matemáticas se presentan como un conjunto siempre creciente de verdades eternas e inmutables, en el que no pueden entrar los contraejemplos, las refutaciones o la crítica. El tema de estudio se recubre de un aire autoritario ...El estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se desvanece, las sucesivas formulaciones tentativas del teorema a lo largo del procedimiento probatorio se condenan al olvido mientras que el resultado final se exalta al estado de infalibilidad sagrada.

- El currículo no aprovecha su contenido histórico y epistemológico: Las distintas propuestas de reforma incentivadas por los gobiernos de turno para la enseñanza de la matemática a nivel del sector oficial en Colombia no han dado los frutos esperados. A pesar de sugerir cambios estructurales y sustanciales en la enseñanza, la práctica se mantiene igual. Por

ejemplo, la historia y la epistemología de la matemática que han cobrado gran importancia en los lineamientos y en los estándares continúan siendo aspectos irrelevantes a la hora de diseñar un plan de clase, su desconocimiento por parte del profesorado es preocupante y se da en un alto porcentaje. Así lo afirma Nolla, citado por Gonzáles (2004, p. 18)

Los conceptos y las ideas matemáticas que se tratan en la Enseñanza Secundaria, son presentados a los alumnos de una forma cerrada y acabada. Se olvida que han surgido después de un largo proceso de gestación, en las que las intuiciones más fecundas con otras estériles, han configurado sus presentaciones sucesivas.

Por otra parte, los conceptos se desligan de su génesis y esto es inconveniente para encontrar significado en el aprendizaje. En este sentido (D'Amore, 2007) afirma:

El desarrollo de la matemática, procede en diversas direcciones pero no se puede negar que, en primera instancia y con gran fuerza, se asocie a la creación de conceptos; ahora bien no se pueden crear conceptos sin delinearlos epistemológicamente, por tanto queriendo o sin querer, quién reflexiona sobre el desarrollo de la matemática debe necesariamente plantearse el problema de la naturaleza de los conceptos.(p.03)

Tengo claro que las políticas innovadoras inciden por obvias razones en la labor del profesor, quién bajo este panorama adquiere una importancia de grandes proporciones, dicha práctica está caracterizada por la relación entre el docente y la disciplina científica que él representa, y esta relación está mediatizada por elementos altamente significativos como son las concepciones, actitudes, el conocimiento sobre la materia a explicar y la conducta reflexiva. El efecto de esta interacción es evidente a través de nuestros estudiantes, bien sabemos que la actitud del profesor hacia la materia que explica es una de las enseñanzas más importantes que transmitimos al alumno. En este sentido, la enseñanza de las matemáticas no es la excepción y por el contrario se ha caracterizado por desfigurarse debido a la usual presentación autoritaria de la matemática bajo ese esquema riguroso y rutinario, las clases se vuelven frías, secas y dogmáticas y son estériles para un porcentaje alto de alumnos.

Respecto a lo anterior, Gonzáles (2013, p.13) afirma que “Las matemáticas impartidas por la mayoría de los docentes, en una gran cantidad de nuestras instituciones educativas, se limitan a la memorización de fórmulas y procesos y al reconocimiento de conceptos con el único fin de dar solución a ejercicios”. Esto significa que existe en general una descontextualización en la enseñanza de la matemática.

A nivel nacional, en Colombia, en el año 2006 se presentan los estándares, donde se precisa y se amplía el concepto de competencia

Conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido, de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores (MEN,2006, p.46).

En el mismo documento se exponen los procesos generales que aparecen en toda actividad matemática y que permiten precisar el concepto matemáticamente competente que es de suma importancia en esta tesis.

Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas (MEN,2006, p.51).

Desde esta perspectiva y de las reflexiones sobre mi práctica docente, es importante ver la necesidad de reestructurar la enseñanza de la matemática para que ésta apunte hacia un cambio en las concepciones del docente. Dicha reestructuración implica una autocrítica, un conocimiento holístico, presentando la disciplina en conexión con la realidad, que muestre su relación con otras áreas del saber y que priorice su carácter de ciencia en permanente evolución. Una nueva visión de la matemática y su enseñanza vislumbra la necesidad de rescatar el enfoque epistemológico y

por ende el rescate de la historia como recurso didáctico, este concepto es consistente con los fines de la educación que he mencionado en los estándares e implica la adopción de un modelo epistemológico sobre las propias matemáticas:

La adopción de un modelo epistemológico coherente para dar sentido a la expresión ser matemáticamente competente requiere que los docentes, con base en las nuevas tendencias de la filosofía de las matemáticas, reflexionen, exploren y se apropien de supuestos sobre las matemáticas tales como: Las matemáticas son una actividad humana inserta en y condicionada por la cultura y por su historia, en la cual se utilizan distintos recursos lingüísticos y expresivos para plantear y solucionar problemas tanto internos como externos a las matemáticas mismas. En la búsqueda de soluciones y respuestas a estos problemas surgen progresivamente técnicas, reglas y sus respectivas justificaciones, las cuales son socialmente decantadas y compartidas. (MEN,2006, p.50)

Como fundamento teórico de lo que he intentado desarrollar empíricamente he encontrado la propuesta de Guacaneme (2016), en la que se argumenta que el conocimiento de la historia de la matemática por parte del profesor garantiza una mejor enseñanza, en ese sentido él plantea la apropiación del conocimiento histórico de las Matemáticas por parte de los profesores, se distinguen dos grupos de respuestas, que son: (i) para dotar al profesor de visiones pertinentes para su ejercicio profesional (v.g., visión de la actividad matemática, visión de las Matemáticas, visión del conocimiento matemático, y visión de los objetos matemáticos), y (ii) para dotar al profesor de artefactos adecuados para su ejercicio profesional (v.g., mirada epistemológica y del pensamiento matemático, maneras de enseñar e insumos para el aula y el currículo, y competencias personales y profesionales).

En el escenario de las ideas expuestas se da paso a la siguiente pregunta que motiva ésta investigación:

- ¿Cómo se favorece la formación de un ciudadano matemáticamente competente, mediante el desarrollo de actividades para el estudio de la trigonometría que están fundamentadas desde una dimensión histórico-epistemológica?

Para responder a dicha pregunta se plantea el siguiente objetivo:

- Caracterizar aprendizajes en la formación de un ciudadano matemáticamente competente que desarrolla una secuencia de actividades fundamentadas en una dimensión histórico-epistemológica para el estudio de la trigonometría.

En el siguiente capítulo cito algunos documentos, emergentes de investigaciones o de reflexiones realizadas por diferentes organismos nacionales o internacionales, que refieren por una parte a una iniciativa para una educación matemática más humanizante y por otra parte a la utilización de la historia de la matemática como recurso didáctico. También, menciono investigaciones que aluden a la historia de la matemática en su enseñanza resaltando el valor epistemológico que de ellas se extrae y finalmente me refiero a algunas investigaciones que dan cuenta del estado actual de la enseñanza de la trigonometría.

1. Antecedentes

*“Una mente culta se compone, por así decirlo, de todas las mentes de las edades anteriores”
Le Bovier De Fontenelle*

En mi investigación el mayor interés se enfoca en el derecho a una educación de calidad y humanizante,

se necesita una educación que enseñe a las personas a recuperar su vínculo con la humanidad, la educación del futuro debe construir un nuevo hombre, un nuevo humanismo y una nueva mentalidad (Morin,1999)

A continuación citaré algunos documentos que apoyan esta visión a nivel internacional y a nivel nacional.

En el documento de la UNESCO, los siete saberes necesarios para la educación del futuro, escrito por Edgar Morin (1999) se expone:

De allí la necesidad, para la educación del futuro, de una gran religazón de los conocimientos resultantes de las ciencias naturales con el fin de ubicar la condición humana en el mundo, de las resultantes de las ciencias humanas para aclarar las multidimensionalidades y complejidades humanas y la necesidad de integrar el aporte inestimable de las humanidades, no solamente de la filosofía y la historia, sino también de la literatura, la poesía, las artes...(p.23)

En los principios y Estándares para la Educación Matemática NCTM (2003) cuando mencionan las necesidades de las matemáticas en un mundo cambiante, se plantea que las matemáticas constituyen uno de los mayores logros culturales e intelectuales de la humanidad, y que los ciudadanos deberían apreciar y entender tales logros, incluyendo sus aspectos estéticos y recreativos.

En Colombia para el año 1994, Carlos Eduardo Vasco, propone para la educación matemática, un área en formación. Propuesta que se representa en un octógono de disciplinas (biología, filosofía, antropología, historia de las matemáticas, lógica, lingüística, psicología, informática) que según él, deben hacer parte del cuerpo de conocimientos del nuevo profesor de matemáticas como puntos de referencia para entroncar el proceso de orientación de los escolares. Así mismo, en los lineamientos curriculares de matemáticas MEN (1998) se hace mención al impacto que ejercen algunas nuevas disciplinas científicas sobre el diseño de los currículos, por ejemplo: la filosofía de las matemáticas, la educación matemática y las demás teorías del conocimiento: esto implica introducir la historia y la epistemología como un recurso de gran importancia para la enseñanza de una nueva concepción de la matemática escolar. Esta postura tiene diversos alcances; puesto que significa que el conocimiento matemático alcanza ahora un estatus de actividad social y debe tener en cuenta los intereses y la afectividad del niño y del adolescente, además se reconoce la gran responsabilidad que tiene ahora el profesor de matemáticas, (MEN,1998): “las matemáticas son una herramienta intelectual potente, cuyo dominio proporciona privilegios y ventajas intelectuales” (p.29).

Lo anterior, exige que el educador matemático comprenda que el conocimiento es dinámico, puesto que es el resultado de un proceso permanente de descubrimiento o de creación, que en ese proceso intervienen factores culturales, sociales, políticos y religiosos, y que los aspectos formales de ese conocimiento representan sólo una faceta del mismo, como lo demanda el (MEN,1998):

La perspectiva histórica conlleva a concebir la matemática como una ciencia humana por ende no acabada ni constituida por verdades infalibles, en ocasiones falible pero capaz de corregir sus errores; a su vez este análisis permite alcanzar un conocimiento más profundo de la matemática misma ya que en el proceso histórico los objetos matemáticos aparecen en su verdadera perspectiva.(p.30)

Ulteriormente, en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas el MEN (2006), justifica con los siguientes tres nuevos argumentos;

- 2.1 La necesidad de una educación básica de calidad para todos los ciudadanos, indica la necesidad de cultivar en matemáticas a toda la población sin excepción. Es decir, una educación básica masiva con equidad y calidad
- 2.2 El valor social ampliado de la formación matemática que tiene doble propósito; en primera instancia apunta a finalidades sociales como enfatizar el carácter utilitario del conocimiento matemático en su relación con el desarrollo tecnológico. En segunda instancia proporcionar al ciudadano del mundo moderno herramientas conceptuales para desempeñarse de forma activa y crítica en su vida social y política.
- 2.3 El papel de las matemáticas en la consolidación de los valores democráticos, busca contribuir desde la formación matemática en la construcción de valores democráticos, “para ejercer la ciudadanía crítica, es decir, para participar en la preparación, discusión y toma de decisiones y para desarrollar acciones que colectivamente puedan transformar la sociedad” (MEN,2006, p.48).

Estas tres iniciativas comprometen significativamente las pretensiones de la enseñanza y transforma las concepciones sobre la docencia en matemáticas:

„se hace necesaria una nueva visión de las matemáticas como creación humana, resultado de la actividad de grupos culturales concretos (ubicados en una sociedad y en un período histórico determinado) y, por tanto, como una disciplina en desarrollo, provisoria, contingente y en constante cambio. (MEN,2006, p.48)

1.1 Historia de las Matemáticas como recurso didáctico

La aproximación a la historia de la matemática me condujo a descubrir un camino rico en oportunidades y momentos apropiados para la inducción al contenido de la clase, para establecer

conexiones con otras disciplinas o para relacionar la matemática con hechos actuales. De acuerdo con Guacaneme (2016) se puede establecer una estrecha relación entre la Historia de las Matemáticas y la enseñanza de las Matemáticas.

La revisión bibliográfica presentada por el autor antes citado, está clasificada en cinco tipos de documentos; monográficos de revistas del campo de la educación matemática, revistas especializadas, inventarios bibliográficos, artículos, libros y conferencias. Guacaneme, además da a conocer un volumen significativo de trabajos que apuntan al uso de la historia de las matemáticas como un instrumento didáctico para su enseñanza. Él los ha categorizado así: i) la intervención de la Historia como elemento de motivación hacia las Matemáticas; ii) la intervención de la Historia ligada al pensamiento y comprensión matemática de los estudiantes; iii) el papel de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas; iv) estrategias de clase en torno a la presentación breve de matemáticos famosos, como oportunidad para indagar y; v) aprender, experiencias y fundamentos sobre el uso de la Historia de las Matemáticas en el aula de clase.

Las motivaciones para enseñar matemáticas y desde luego, la manera como se enseñan, pueden verse muy positivamente influenciadas por esa nueva actitud que crea el conocimiento de la historia. Mediante algunos referentes teóricos pude justificar esta consideración:

- El enfoque histórico ofrece una visión más completa de los problemas que surgen de la matemática, porque afina con mayor precisión la importancia de los diversos temas y la articulación de estos. La historia cumple su función de permear la enseñanza, como lo afirma Guacaneme (2016). Así mismo lo propone (Guzmán, 1993): *Normalmente la historia nos proporciona una magnífica guía para enmarcar los diferentes temas, los problemas de los que han surgido los conceptos importantes*

de la materia, nos da luces para entender la razón que ha conducido al hombre para ocuparse de ellos con interés. Si conocemos la evolución de las ideas de las que pretendemos ocuparnos, sabremos perfectamente el lugar que ocupan en las distintas consecuencias, aplicaciones interesantes que de ellas han podido surgir, la situación reciente de las teorías que de ellas han derivado ... (p.10)

- El tratamiento histórico conduce a una comprensión profunda de los problemas matemáticos a través del conocimiento del proceso real de creación de los conceptos y teorías matemáticos, del contexto en que aparecen, de las ideas que lo propician y de las cuestiones que resuelven, de las reformulaciones que sufren, etc., lo que facilita, sin duda, la comprensión y consideración de las dificultades de los contenidos impartidos. Aquí la historia cumple su función de integración en la enseñanza, como lo afirma Guacaneme (2016). De igual manera lo afirma (Guzmán, 1993):

Desde el punto de vista del conocimiento más profundo de la propia matemática la historia nos proporciona un cuadro en el que los elementos aparecen en su verdadera perspectiva, lo que redundo en un gran enriquecimiento tanto para el matemático técnico, como para el que enseña. (p.11)

- El curso de la historia refleja el carácter dinámico de la construcción del conocimiento matemático, presenta la depuración lenta que sufren los conceptos e ilustra acerca de la resistencia al cambio que provoca en las culturas cuando se sienten afectadas por la influencia de un nuevo paradigma de pensamiento. Como lo afirma D'Amore (2011) al referirse al segundo uso de la historia de la matemática como instrumento didáctico; la historia como desarrollo de los hechos, explica los orígenes de las ideas, de los problemas,

de las teorías que han hecho de la matemática lo que es hoy. Ésta infunde la certidumbre de que esta disciplina no es una colección anacrónica de cosas ya hechas y sistematizadas desde siempre y para siempre, sino algo en perpetua evolución, hecha por el hombre para el hombre, rica por lo tanto de referencias a la historia cultural y social entendida en el sentido más amplio.

En la visión de Miguel de Guzmán (1993), tal visión dinámica nos capacitaría para muchas tareas interesantes en nuestro trabajo educativo, entre ello nos aporta: la posibilidad de extrapolación hacia el futuro; la inmersión creativa en las dificultades del pasado, y la comprobación de lo tortuoso de los caminos de la invención.

- La visión histórica es compatible con una propuesta de un aprendizaje activo, al extraer de la historia de la matemática la problemática que debidamente presentada a los alumnos les permitiera redescubrir (a través de una actividad investigativa), los conocimientos que la enseñanza tradicional transmite. En la visión de Gonzáles (2004, p.18) se diría:

Bajo el punto de vista de la eficacia pedagógica, no sólo a corto, sino a medio y largo plazo, además de transmitir un elenco de conocimientos, resultados estereotipados de las exposiciones cerradas y acabadas de la ciencia estática de los manuales que ocultan el zigzagueante camino de la creación científica, se debería despertar en el estudiante, futuro profesional, científico o técnico, unas actitudes y unos hábitos metodológicos acordes con el método científico.

- La intervención de la historia permite que el estudiante reconozca lo relevante de comprender, clarificar y de adquirir los conceptos y procedimientos asociados con un determinado contenido matemático. Por tanto, de acuerdo con Avitel (1995) citado por Miralles & Deulofeu (2005), sólo una perspectiva histórica puede ayudar a los estudiantes a comprender la importancia del hecho de que, a diferencia de las ciencias naturales, las matemáticas son acumulativas.

- El enfoque histórico puede adquirir una función erradicadora de algunas creencias no ajustadas a la realidad:
 - Creencia en un carácter puramente utilitarista de la Matemática al servicio de las otras ciencias. El carácter científico se le restituye profundizando en su historia, advirtiendo que un material experimental de las Matemáticas lo constituyen los saberes y doctrinas anteriores sobre las que se va construyendo el edificio de esta ciencia.
 - Creencia en una Matemática Moderna desarrollada en la actualidad, contraponiéndose a unas Matemáticas tradicionales, como consecuencia de una profunda revolución.
 - Creencia en el rigor como valor supremo de la Matemática que impone una vía única de razonamiento para llegar a los resultados. La historia nos muestra cómo se ha llegado a los mismos resultados matemáticos por caminos muy diferentes y no siempre correctos y cómo nuevos modos de razonar se apoyan sobre otros pasados, que deben ser a su vez modificados para el tratamiento de nuevos problemas.
- El recurso histórico desnuda la fuerza creativa interna inherente a la construcción del conocimiento matemático, lo cual puede contribuir a desarrollar el espíritu creativo del alumno, aquí cumple la historia una función formativa en el estudiante.

Al respecto D'Amore (2011,p.56) insistiendo sobre el tercer uso de la historia como recurso didáctico , afirma que:

Finalmente la tercera (que podría llamar con la sola palabra : anecdótica) fascina a los jóvenes (y no sólo a ellos...); desde mi punto de vista, tiene una función no banal: los matemáticos, personajes que dedican su vida a algo que para la mayoría es misterioso, son seres humanos que tienen una historia personal (que, muchas veces, se confunde con la científica) ; eso los vuelve menos ajenos a los estudiantes, creando una especie de fascinación ya no misteriosa, sino curiosa, alrededor de ellos y de su producto cultural. La matemática se desmitifica, precisamente gracias al hecho que quienes la crean no se hayan fuera del mundo, y se acercan al mundo de los estudiantes.

- La Historia de las Matemáticas pone de manifiesto, por una parte la vinculación entre la Matemática, la filosofía, las ciencias sociales, sirviendo de puente entre las culturas humanística y científica, y por otra; permite conocer las fuerzas sociales y productivas que contribuyeron a su desarrollo. Según Gonzáles (2004, p.17)

Con argumentos apoyados en numerosos textos de ilustres matemáticos, pedagogos, historiadores y profesores, se reclama una función didáctica para la Historia de las Matemáticas como instrumento de comprensión de sus fundamentos y de las Dificultades de sus conceptos para así responder a los retos de su aprendizaje. La Historia es fuente de inspiración, autoformación y orientación en la actividad docente y al revelar la dimensión cultural de la Matemática, el legado histórico permite enriquecer su enseñanza y su integración en el conjunto de los saberes científicos, artísticos y humanísticos que constituyen la Cultura.

- El acercamiento a la historia evidencia en todas sus manifestaciones la complejidad de la naturaleza humana que hace parte del proceso de creación del conocimiento matemático, este aspecto hoy, es clave para la enseñanza porque para la formación de adolescentes en la escuela es inaplazable orientarlos hacia una concepción más centrada en lo espiritual que en lo material. En palabras de Guzmán (1993, p.7):

Para entender esta interacción fecunda entre la realidad y la matemática es necesario acudir, por una parte, a la propia historia de la matemática, que nos desvela ese proceso de emergencia de nuestra matemática en el tiempo, y por otra parte, a las aplicaciones de la matemática, que nos hacen patentes la fecundidad y potencia de esta ciencia. Con ello se hace obvio cómo la matemática ha procedido de forma muy semejante a las otras ciencias, por aproximaciones sucesivas, por experimentos, por tentativas, unas veces fructuosas, otras estériles, hasta que va alcanzando una forma más madura, aunque siempre perfectible. Nuestra enseñanza ideal debería tratar de reflejar este carácter profundamente humano de la matemática, ganando con ello en asequibilidad, dinamismo, interés y atractivo.

Este último autor, menciona que la perspectiva histórica nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada, a veces penosamente reptante y en ocasiones falible, pero capaz también de corregir sus errores. Además, que ésta nos aproxima a las interesantes personalidades de los

hombres que han ayudado a impulsarlas a lo largo de muchos siglos, por motivaciones muy distintas.

1.2 La enseñanza de la trigonometría

Martín, Ruíz y Rico (2016) aseguran que las investigaciones realizadas en torno al significado escolar de seno y coseno son muy escasas. Brown (como se cita en Martín y otros (2016)) señala que «existe escasa investigación en relación con las ideas intuitivas que los estudiantes poseen sobre el contenido de la trigonometría o sobre los métodos más adecuados con los que enfocar y estructurar los nuevos conceptos para construir un núcleo sólido de conocimiento» y Weber (como se cita en Martín y otros (2016)) agrega que la investigación orientada a conocer y superar las dificultades de los estudiantes en trigonometría es escasa. Como lo señala Fiallo (2010), citando a (Kendal y Stacey, 1997; Montiel, 2005; Brown, 2006b).

Las pocas investigaciones encontradas señalan la complejidad de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, debida a la desconexión entre las diferentes formas de ver las razones trigonométricas: como razones entre los lados del triángulo rectángulo, como coordenadas del círculo goniométrico o trigonométrico, como distancias, y como funciones. La experiencia que he adquirido en por lo menos 15 años en la enseñanza de la trigonometría a nivel de colegios oficiales me ha confirmado reiterativamente, que en general los estudiantes cuando llegan a décimo grado presentan dificultades básicas en múltiples aspectos:

- ✓ Poca disposición a la argumentación.
- ✓ Debilidades en el razonamiento proporcional por prevalencia del razonamiento aritmético, como lo afirma Fiallo (2010) citando a Freudenthal (2001)
- ✓ Otra dificultad tiene que ver con la complejidad para la comprensión del concepto “razón” involucrado explícitamente en el tema de las razones trigonométricas.

- ✓ Dificultades con el manejo numérico.
- ✓ Insuficiencia en los dominios del álgebra.

Sin embargo, teniendo en cuenta estas condiciones iniciales de entrada, he intentado desarrollar un proceso de inducción a la trigonometría empezando por conceptos y procedimientos asociados con contenidos temáticos elementales como ángulos, medición del tiempo, razones, proporciones, triángulos y semejanza, haciendo siempre un acercamiento desde la historia y la epistemología para revestir de significado la asignatura y establecer conexiones con otras disciplinas.

Para lograr un proceso de comprensión de los conceptos básicos de la trigonometría por parte del estudiante de décimo, es necesario un inmejorable razonamiento proporcional, se da por hecho que a esa edad ya se consolidó en él, el paso de un esquema aritmético hacia un esquema multiplicativo. Este nivel de desarrollo es muy importante porque para la adquisición del pensamiento trigonométrico se requiere como punto de partida un buen nivel de pensamiento geométrico, en palabras de Esteban, Ibañez & Ortega (1998, p.101) “Una reflexión sobre el currículo induce a considerar que los contenidos de geometría euclídea y trigonometría no pueden separarse, y sobre todo, las consideraciones procedimentales van más allá de una mera relación de afinidad”. Es decir, el grado de asimilación de los conceptos y de las propiedades que se derivan de las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo, está en relación directa con el dominio de los conceptos fundamentales de la geometría, en ese sentido Usiskin citado por Esteban et al. (1998) describe cuatro dimensiones de la geometría que, evidentemente, también pueden ser consideradas como magnitudes de la trigonometría. Éstas son:

- Visualización, dibujo y construcción de figuras
- Estudios de aspectos espaciales del mundo físico

- Uso de algún medio para representar los conceptos matemáticos no visuales y sus relaciones
- Representación como un sistema matemático formal

El desconocimiento de los anteriores elementos es probablemente una de las razones por las cuales existen serias dificultades en el desarrollo del pensamiento trigonométrico de los estudiantes. Según Jácome & Montiel (2007) la investigación en Matemática Educativa ha dado evidencia de las dificultades en el aprendizaje que muestran los estudiantes al manipular, interpretar y significar a las razones, ecuaciones, identidades y funciones vinculadas a las relaciones trigonométricas. De Kee, Mura y Dione (como se cita en Martín y otros (2016)) afirman que la trigonometría es un contenido escolar que resulta difícil de entender por los estudiantes y Brown (citado por Martín y otros (2016)) plantea que es debido a factores diversos como son su complejidad, la conexión con numerosos fenómenos y las interconexiones con otras disciplinas Sin embargo, en esta dirección la historia de las matemáticas como recurso didáctico puede cumplir una función muy importante porque facilita la integración de estos factores propuestos por Usiskin a la enseñanza.

1.3 La historia como recurso didáctico en la enseñanza de la trigonometría

Los conceptos básicos de la trigonometría tales como ángulo, longitud, triángulo y semejanza surgen de actividades primitivas como la repartición de terrenos, la agricultura, la construcción de edificaciones, principalmente la medición del tiempo y el estudio de los cuerpos celestes. Teniendo en cuenta su naturaleza práctica es conveniente hacer uso del potencial histórico que la trigonometría ofrece para enriquecer su enseñanza, ella facilita un arsenal de situaciones originadas en las culturas milenarias como la egipcia, la griega, la hindú y la babilónica, que muestran las necesidades y los problemas que al ser solucionados condujeron al desarrollo de la trigonometría

como disciplina de la matemática. En ese proceso se configuraron los conceptos, las propiedades y los teoremas que al ser elaboraciones del intelecto se establecieron como verdades.

Existen diversos trabajos de investigación que han hecho uso de la historia de la matemática como recurso didáctico en la enseñanza de la trigonometría, cada uno hace énfasis en algún objeto matemático, en particular, en las razones trigonométricas muy pocos. Sin embargo, coinciden en su justificación al reconocer debilidades en los conocimientos epistemológicos que poseen los profesores o un enfoque mecánico en la enseñanza o dificultades en los aprendizajes de los estudiantes.

En su tesis doctoral Montiel (2005) presenta un análisis socioepistemológico sobre la función trigonométrica. Allí, la autora muestra con detalles cada una de las etapas de la trigonometría desde su fase inicial hasta su consolidación como disciplina teórica, reporta los episodios históricos más sobresalientes que dan evidencia de relaciones entre lados y ángulos en un mismo triángulo rectángulo, referencia los trabajos de los distintos personajes que aportaron a la construcción de los conceptos básicos de la trigonometría, rescata los problemas más relevantes cuyas soluciones constituyeron los principios fundamentales de esta ciencia. La investigación en mención, representa un gran aporte a la educación matemática, por su énfasis en lo epistemológico. Al respecto, Montiel identifica varios elementos significativos:

- Establece el origen de la trigonometría desde dos acciones; la medición y la astronomía, este aporte es muy apropiado para diseñar actividades didácticas y para comprender sobre el aprendizaje de los estudiantes.
- Identifica situaciones claves para mostrar con precisión como se configuraron nociones primeras de los elementos básicos de la trigonometría,

- Reconoce la importancia que tiene el concepto de razón geométrica como elemento esencial para hacer la transición hacia los objetos trigonométricos.

En el siguiente capítulo cito algunos trabajos en educación matemática que me sirven como referentes teóricos y conceptuales porque sustentan el uso de la historia de la matemática como fundamento del conjunto de actividades implementadas durante la investigación, estos aportes son los de Maza (1994) y Guacaneme (2016). También, fundamento el concepto de ciudadano matemáticamente competente transitando por los lineamientos curriculares (1998), los estándares de competencias (2006) y por los derechos básicos de aprendizaje (2016) y finalmente describo cada uno de los saberes en los que la trigonometría puede permear el aprendizaje de una manera integral.

2. Aspectos teóricos y conceptuales

“Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas”

E.T.Bell

Para el diseño de la secuencia didáctica que estructuré, implementé y evalué, tuve en cuenta a Maza (1994) quién considera que para enseñar matemáticas desde una perspectiva histórica existen seis formas distintas:

- Introducir anécdotas históricas: Relatos, anécdotas sobre las vidas de los matemáticos teniendo en cuenta el contexto social, cultural y religioso. La eficacia de esta técnica depende enteramente de la conexión entre lo narrado y el tema que se esté tratando.
- Introducción histórica ante un nuevo concepto: Permite la elaboración conceptual enriquecida y clarificada mediante el acercamiento a la historia
- Resolución de problemas históricos: Retomar problemas que en el pasado originaron nuevos conceptos y nuevas relaciones matemáticas
- Construir historias en torno a problemas críticos del pasado que ilustren técnicas y métodos actuales: Es plantear problemas actuales pero resueltos con las herramientas y las limitaciones del pasado para que el estudiante valore la recursividad y la genialidad de esos seres y además comprenda las razones del surgimiento de nuevas tecnologías y el reconocimiento del potencial de aplicación del conocimiento matemático.
- Construcción de posters, trabajos o proyectos sobre un tema histórico: Como consolidación del proceso de aprendizaje y de la transformación conceptual y

actitudinal del estudiante es pertinente proponer este tipo de actividades que favorecen la creatividad, estimulan la imaginación y promueven la libertad de expresión.

- **Análisis de textos históricos:** Para esta estrategia se proponen textos históricos bastante sencillos que faciliten su comprensión, su análisis y una decodificación asequible del lenguaje matemático al lenguaje natural y viceversa.

Los aspectos mencionados por Maza, fueron considerados en el diseño de la estructura metodológica que se estableció en las actividades de la secuencia. La estructura se encuentra ampliamente explicada en el apartado 4.2 de la Metodología de la investigación.

Para el diseño de las actividades, también se tuvieron en cuenta los aportes de Guacaneme (2016), quién en su tesis doctoral menciona tres formas en las que interviene la Historia de las Matemáticas con su enseñanza, a saber:

1.4 2.1 La Historia de las Matemáticas como uso

En este sentido, se pueden incluir por ejemplo anécdotas o referencias históricas a obras matemáticas o matemáticos. Esta forma es similar a proponer problemas históricos en las clases de Matemáticas, o enseñar o estudiar una manera histórica de abordarlos. En general esta tendencia se caracteriza porque la Historia de las Matemáticas es llevada al aula como parte de una lección matemática o como la lección misma.

En este aspecto el diseño de actividades se fortalece significativamente porque siempre es posible relacionar la trigonometría con algunos de los matemáticos griegos de la antigüedad como Tales de Mileto, Menelao, Herón, Euclides, Pitágoras, Eratóstenes, Posidonio, Arquímedes, Apolonio, Tolomeo, Hipatía, Pappus, Diofanto, Hipócrates de Quíos, Aristarco y por su puesto Hiparco. Así mismo, es posible establecer conexión entre los conceptos de la trigonometría y la

obra de un matemático, por ejemplo, la semejanza de triángulos con la medición que hizo Tales de Mileto de la pirámide de Keops o la Tangente de un ángulo agudo con el cálculo que hizo Aristarco de la distancia entre la Tierra, la Luna y el Sol. El genial método de Eratóstenes para calcular la circunferencia de la tierra es imprescindible para ilustrar la solución de problemas mediante la aplicación de razonamientos matemáticos y de conocimientos del contexto.

1.5 2.2 Historia de las Matemáticas como integración

Guacaneme, menciona que la tendencia a emplear la palabra “integración” es referida por Furinghetti (1997) como una manera de aludir no solo al uso de la Historia de las Matemáticas, sino a una enseñanza efectiva de las Matemáticas y de la Historia de las Matemáticas a través de ésta. En un sentido parcialmente semejante, Heiede (1992) esboza aguerridos argumentos a favor de una enseñanza de las Matemáticas que incluya su historia, no como algo adicional, ornamental o supletorio, sino como parte consustancial de las Matemáticas. La expresión “plato fuerte” empleada por Siu & Tzanakis (2004), nos parece que compagina bien con la idea de integración.

En este sentido la historia permite identificar y comprender los bloqueos epistemológicos en la construcción y comprensión de los conceptos. Por ejemplo, la razón trigonométrica se origina a partir de la medición de distancias angulares, es decir, en principio la razón trigonométrica es una medida indirecta de ángulos porque resulta de la comparación de segmentos de recta que a su vez son los lados de un triángulo rectángulo, si el profesor comprende esta noción entonces la enseñanza puede ser más efectiva. Para la comprensión del concepto del número π como razón geométrica entre la longitud de la circunferencia y el diámetro de la misma, es muy apropiado recurrir a la obra de Arquímedes de Siracusa quién deslumbró con su habilidad para calcular con procesos numéricos que incluían cantidades muy grandes o muy pequeñas.

1.6 2.3 La Historia de las Matemáticas como permeador

Se señala que la Historia de las Matemáticas “permea” la educación en Matemáticas cuando se emplea información histórica como criterio orientador en la estructuración de una propuesta curricular. En ese sentido, Guacaneme, reconoce en la expresión “introducir una dimensión histórica”, una interpretación muy cercana a permear la educación en Matemáticas con la Historia.

Para definir la estructura de la secuencia didáctica recurro al orden histórico porque me orienta en la organización y dimensionamiento de la propuesta, en este sentido la Historia de la Matemática interviene como permeador de la enseñanza.

Como cada actividad de la secuencia cumple una estructura conformada por nueve elementos que le dan forma, fondo y contenido (indicadores de logro, preguntas orientadoras, ¿qué sabemos de?, recurriendo a la historia, haciendo en contexto, desarrollo conceptual, matematicomanía, ¿qué aprendimos? y para profundizar), con cada uno de ellos el propósito principal es

- Estimular en el estudiante una actitud hacia el saber enriqueciendo su cultura y valorando el conocimiento matemático porque lo comprende.
- Fomentar en el estudiante el autoaprendizaje y la autocrítica porque es él quién decide aprender y competir consigo mismo.
- Desarrollar en el estudiante habilidades para la identificación del conocimiento matemático en la interpretación de situaciones de la cotidianidad y para aplicarlo en la solución de problemas de su entorno.

En cada una de los elementos que componen la estructura de la secuencia de actividades se puede reconocer la conexión con los elementos conceptuales que propone Guacaneme.

Hacer uso de la historia desde la perspectiva de Guacaneme

- En las “Preguntas Orientadoras” se indaga sobre un aspecto histórico, hecho o personaje, sin embargo, en este punto la Historia delinea el orden y la secuencia.
- En “Haciendo en Contexto” porque se utilizan situaciones de la cotidianidad que por medio de la historia son más fáciles de seleccionar o reconocer.
- En la sección “¿Qué Sabemos de?” porque se valora el aprendizaje y desde la historia se pueden elegir las situaciones con las que se puede realizar esta valoración con mayor objetividad y precisión.

Hacer integración de la historia desde la perspectiva de Guacaneme

- En los “Indicadores de Logro” porque se relacionan las competencias con los desarrollos alcanzados por los pueblos o por los hombres que han hecho posible la matemática.
- En “Recurriendo a la Historia” porque se hace en esta fase se centra la mirada en la conceptualización y en la aproximación histórica al objeto de estudio.
- En “¿Qué aprendimos?” se plantean situaciones de la historia o de contexto en las cuales él aplique el objeto de estudio desarrollado.
- En “Para Profundizar” porque se remite a textos y documentos que pueden complementar, ampliar y precisar un poco más el objeto de estudio.

Hacer de la historia un permeador desde la perspectiva de Guacaneme

- En el “Desarrollo Conceptual” la historia funge como integrador porque facilita la comprensión del objeto de estudio.
- En “Matematicomanía” se proponen aplicaciones que surgen de la historia para que el estudiante nuevamente identifique el objeto de estudio.

Es importante señalar que la función de la historia de permear la enseñanza desde la visión de Guacaneme (2016) se cumple en todo momento puesto que el orden y la organización de la secuencia de actividades obedece a una línea del tiempo.

1.7 2. 4 Ciudadano matemáticamente competente: un acercamiento desde el estudio de la trigonometría

Inicialmente, discutiré sobre ¿Qué es ser matemáticamente competentes? Esto, a la luz de los documentos oficiales del Ministerio de Educación nacional, los lineamientos curriculares, los estándares curriculares y los derechos básicos.

En los lineamientos curriculares (MEN,1998) ya se hace un llamado a la formación por competencias

El enfoque de estos lineamientos está orientado hacia la conceptualización por parte de los estudiantes, a la comprensión de sus posibilidades y al desarrollo de competencias que les permitan afrontar los retos actuales como son: la complejidad de la vida y del trabajo, el tratamiento de conflictos, el manejo de la incertidumbre y el tratamiento de la cultura para conseguir una vida sana (pp,17),

En el mismo documento, luego afirman que

Mediante el aprendizaje de las matemáticas los alumnos no sólo desarrollan su capacidad de pensamiento y de reflexión lógica sino que, al mismo tiempo, adquieren un conjunto de instrumentos poderosísimos para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla, en suma, para actuar en y para ella (pp,35)

Y continúan replicando

El aprendizaje de las matemáticas debe posibilitar al alumno la aplicación de sus conocimientos fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus opiniones y ser receptivo a las de los demás (pp,35)

Ser matemáticamente competente en el marco de los estándares nacionales (MEN, 2006) significa cumplir cada una de las siguientes características: Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas; Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración; Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz.

Sin embargo, en el documento de fundamentación teórica de los DBA (2016, pp.33) se afirma

Ser matemáticamente competente no se relaciona tanto con el despliegue de una lista de conocimientos, como sí con la capacidad de reconocerlos, relacionarlos, organizarlos y utilizarlos, de forma eficiente y eficaz en resolución de problemas que requieran el tratamiento de la cantidad, de la forma, de la variación y de la información.

En el mismo documento DBA (2016, pp.34) concluyen que

Al ser matemáticamente competente confluyen los objetos de conocimiento, los contextos y usos de las matemáticas, y los procesos de pensamiento matemático.

En cada uno de los documentos mencionados se identifica el mismo propósito de dar un giro en la enseñanza de la matemática hacia una nueva visión humanista, sin embargo, se reconoce un mayor acercamiento a este objetivo en los lineamientos curriculares, es decir, se ha venido desestimulando en la acción la fuerza para este fin, puesto que en la formulación de los estándares y de los derechos básicos de aprendizaje se hace caso omiso de la formación del ser. Sin embargo, en este trabajo de investigación se propone una alternativa para materializar este fin primordial de la educación matemática.

Dado que el Objeto Matemático de estudio, en el que se centra mi intervención en el aula es la trigonometría, quiero explicitar en lo que sigue las competencias esperadas con el desarrollo de la secuencia, en sus tres componentes: el saber-saber, el saber-hacer y el saber-ser,).

2.4.1 SABER-Saber: ¿Qué aprendizajes de la trigonometría se esperan construir?

Los conocimientos que adquiere el estudiante, que hacen referencia al conocimiento científico impartido y que son parte de su estructura cognitiva conforman el saber- saber. En el PEI del Instituto politécnico se identifican varios aspectos de la formación en el SABER-SABER que se toman como referentes para el diseño de la secuencia de actividades y para la formulación de las categorías de análisis de los datos arrojados por la investigación.

En el currículo nacional, parece que no se le da mayor importancia al estudio de la trigonometría, mi acepción obedece a lo que se expone en el MEN (2006), donde por pensamiento sólo se encuentran indicadores como:

- Desde el pensamiento geométrico: “Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas” (pp.88).
- Desde el pensamiento métrico: “Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos” (pp.89).
- En el pensamiento variacional: “Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas” (pp.89)

El MEN (2016) se define un único enunciado:

- Comprende y utiliza funciones para modelar fenómenos periódicos y justifica las soluciones (pp.76)

En la Tabla 1, se enuncian los indicadores que permitieron dar seguimiento al desarrollo de las competencias esperadas en relación a los objetos de la trigonometría, que fueron estudiados en la secuencia de actividades en cuanto a los procesos cognitivos. Los indicadores se establecieron para cada uno de los talleres.

COMPETENCIA	TALLER1	TALLER2	TALLER3	TALLER4
SABER	Interpreta como un número, como un porcentaje o como una razón geométrica a la cantidad que surge de la comparación por cociente de las medidas de dos lados cualesquiera de un triángulo rectángulo.	Comprende que el grado sexagesimal es una razón geométrica que resulta de la comparación por cociente entre dos magnitudes lineales.	Establece la relación entre las medidas lineales y las medidas angulares en un triángulo rectángulo, a partir del análisis del episodio histórico de Aristarco y su medición de distancias en el universo.	Comprende el concepto de razón trigonométrica a partir del estudio de la obra de Hiparco de Nicea y del proceso histórico que dio origen al concepto.

Tabla 1 Indicadores de logro del saber-saber de la Secuencia de Actividades

2.4.2 SABER-HACER: ¿Qué problemas puedo resolver con lo que aprendí?

Es la parte de la aplicación encargada de la práctica que el alumno realiza una vez tenga lo cognitivo. El **saber hacer** hace referencia a las competencias prácticas, es decir al desarrollo de una *destreza*. Este tipo de destrezas puede englobar tanto a las destrezas sociales (la capacidad de actuar de acuerdo con los tipos de convenciones), a las destrezas de la vida cotidiana (llevar a cabo las acciones rutinarias), a las destrezas profesionales (las que se necesitan para realizar los deberes del empleo, y a las destrezas del ocio. En el PEI del Instituto politécnico se identifican varios aspectos de la formación en el SABER HACER que se toman como referentes para el diseño de la secuencia de actividades y para la formulación de las categorías de análisis de los datos arrojados por la investigación.

Los enunciados que aparecen en la Tabla 2, actúan como indicadores que evidencian el uso de los aprendizajes contruidos sobre trigonometría, a través del desarrollo de la Secuencia de Actividades de la propuesta que aquí se reporta.

COMPETENCIA	TALLER1	TALLER2	TALLER3	TALLER4
HACER	Resuelve problemas sobre la cotidianidad aplicando el concepto de razón geométrica construido mediante el recurso histórico.	Construye gráficas a escala de los modelos geométricos del contexto para calcular valores estimados de las medidas angulares y lineales en un triángulo rectángulo.	Aplica las herramientas conceptuales y procedimentales para cuantificar e interpretar los márgenes de error entre los valores lineales y angulares obtenidos por medición y los obtenidos por teorización matemática.	Construye un ángulo agudo cualquiera sin utilizar trasportador conociendo el valor de una razón trigonométrica de dicho ángulo.

Tabla 2 Indicadores de logro del saber-hacer establecido en la Secuencia de Actividades

2.4.3 SABER-SER: ¿Qué aprendizajes ciudadanos se esperan?

Hace referencia a las características, rasgos y conductas que son intrínsecas a la persona y que deberían ser fundamentales, pues se refiere a sus actitudes y comportamientos en función de las reglas de la ética y de la humanidad, también se refiere al sentido de responsabilidad. En el PEI del Instituto politécnico se identifican varios aspectos de la formación en el SABER-SER que se toman como referentes para el diseño de la secuencia de actividades y para la formulación de las categorías de análisis de los datos arrojados por la investigación.

En la Tabla 3, se enuncian los indicadores que permiten evidenciar como los aprendizajes esperados en trigonometría se reflejarán en las actitudes y valores, de los estudiantes que desarrollaron la secuencia.

COMPETENCIA	TALLER1	TALLER2	TALLER3	TALLER4
SER	Reconoce el valor que ofrece el estudio de problemas históricos para indagar sobre la realidad, para entender el carácter científico del conocimiento matemático y para establecer la relación entre los modelos abstractos de la matemática y las situaciones de contexto	Muestra curiosidad por aprender sobre el concepto de ángulo al comprender su importancia en la medición del tiempo, en el cálculo de distancias y tamaños relativos entre los cuerpos celestes en las culturas antiguas y contemporáneas.	Comprende la importancia de dar fundamento desde la modelación matemática a las hipótesis formuladas desde la observación del contexto como lo hicieron Tales, Aristarco y Eratóstenes.	Muestra actitud crítica, apreciando el contexto y formulando preguntas sobre la realidad como lo hicieron Tales, Aristarco, Eratóstenes e Hiparco.

Tabla 3 Indicadores de logro del Saber-Ser establecidos en la Secuencia de Actividades

Las competencias ciudadanas antes descritas y los indicadores declarados en cada tabla se usan como categorías de análisis, y los indicadores como descriptores de la categoría.

Los aprendizajes emergentes que surjan de la implementación de la secuencia se identificarán en una de tres categorías asociadas con las competencias del desarrollo integral del estudiante; saber-

saber, saber-hacer y saber-ser. Competencias que son descritas en los estándares de matemáticas propuestos por el MEN (2006) y que están contempladas en el PEI del Instituto Politécnico.

Dichas competencias describen el concepto de ciudadano matemáticamente competente, el cual se ilustra en la Figura 1, allí se muestra la dinámica de formación que se da en el estudiante alrededor del objeto de estudio de la matemática (OM). El OM, es el punto de partida de cada taller, luego que se identifica dicho objeto de estudio se definen las preguntas orientadoras y los indicadores de logro y se ofrece una aproximación histórica al concepto desde su génesis y desde su epistemología si es posible, el propósito es impactar en el pensamiento del educando, la estructura de la secuencia didáctica busca promover a partir de un conjunto de actividades el desarrollo de las distintas dimensiones que hacen parte de la formación integral del estudiante.

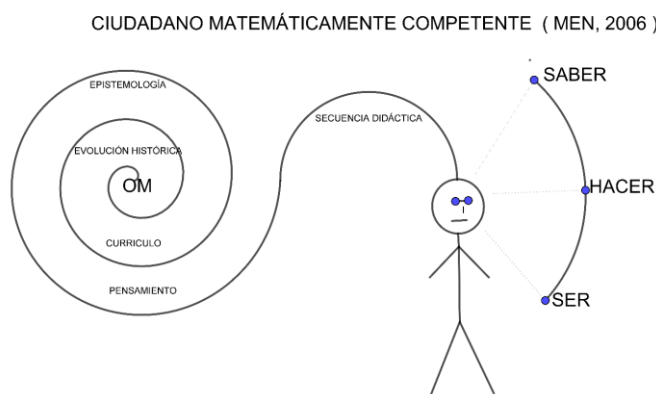


Figura 1 Ciudadano Matemáticamente Competente

Fuente: Construcción del autor

En el siguiente capítulo presentamos los aspectos metodológicos que se tuvieron en cuenta para el diseño de la secuencia de actividades, su implementación, la recolección de datos y el análisis de los mismos que servirán como elementos de valoración para validar el cumplimiento del objetivo que se propuso en éste trabajo de investigación.

3. Aspectos Metodológicos

“No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución”

P. Puig Adam

Siempre he laborado en el nivel de media vocacional y desde el año 2003 soy profesor de Matemáticas en el Instituto Politécnico de la ciudad de Bucaramanga. La intervención en el aula que reporto aquí se corresponde con una investigación de tipo cualitativo y se desarrolló con estudiantes de Décimo grado, jóvenes de escasos recursos que viven situaciones conflictivas (abandono familiar, ausencia de afecto o drogadicción). Con este trabajo quise contribuir en el proceso de transformación de muchas de las realidades de estos jóvenes, bajo la idea de formar Ciudadanos Matemáticamente Competentes.

Para responder la pregunta de investigación ¿Cómo se favorece la formación de un ciudadano matemáticamente competente, mediante el desarrollo de actividades para el estudio de la trigonometría que están fundamentadas desde una dimensión histórico-epistemológica?

He propuesto un proceso metodológico que consta de cuatro fases, las cuales paso a describir.

1.8 3.1 Fase 1. Sistematización de literatura de corte histórico y epistemológico

En esta primera fase realice la recopilación y sistematización de los documentos fuente de conocimientos históricos y epistemológicos asociados a la trigonometría. Dichos documentos fueron la base teórica de la secuencia didáctica diseñada. Así mismo elaboré una base de datos en la que se registró la bibliografía y los recursos didácticos utilizados tales como audios, imágenes, videos y software. En este documento presentaré evidencias de esa base de datos, pues fueron usados como insumo para el diseño de los talleres y de los materiales de apoyo del curso. El

proceso que llevo a cabo con los estudiantes de décimo grado está enriquecido con ayudas audiovisuales y tecnológicas, entre ellos se ha elaborado un blog matematicando395.wordpress.com con el propósito de brindar información complementaria para el aprendizaje de los estudiantes. El blog contiene los talleres de trabajo, los videos relacionados, las preguntas orientadoras con referencias bibliográficas, con imágenes y archivos de texto.

1.9 3.2 Fase 2. Diseño de la secuencia didáctica

El conjunto de actividades tiene una estructura basada en la propuesta de Maza (1994) y Guacaneme (2016), lo cual implica que las intervenciones didácticas están enfocadas en tres funciones distintas: la historia como uso, la historia como integrador y la historia como permeador de la enseñanza. Cada actividad de la secuencia es guiada por un taller el cual puede incluir elementos de tipo histórico, filosófico o epistemológico según la intención de la actividad.

Estructura de la secuencia

La estructura de los talleres incluye los elementos curriculares exigidos por nuestro sistema educativo: eso incluye, estándares, competencias e indicadores de logro. La estructura construida para el diseño de las actividades de la secuencia de enseñanza que aquí reporto, consta de las siguientes partes:

PREGUNTAS ORIENTADORAS. Esta es una fase muy importante porque orienta e induce al contenido de interés, intenta precisar aspectos sobre los cuales centrar la mirada para abordar el objeto de estudio, ubica en el tema de discusión e informa sobre posibles fuentes de consulta. El recurso histórico se elige en función del concepto, del hecho, del personaje o de la competencia a desarrollar, estas preguntas orientadoras se publican con suficiente anticipación en el blog matematicando395.wordpress.com y en

él mismo se suministra material bibliográfico para facilitar la búsqueda de información. Si el objeto de estudio lo permite se anexan videos en el blog para enriquecer la actividad preparatoria hacia el tema de estudio y en lo posible se ambienta la inducción al contenido desde una perspectiva histórica. En la propuesta de maza (1994) se tipifica este momento como introducir anécdotas históricas o como la introducción histórica de un concepto, en la visión de Guacaneme (2016) es hacer uso de la historia como recurso didáctico.

El desarrollo de esas preguntas se hace en el aula en plenaria y el registro se hace por escrito en el cuaderno de apuntes o en una hoja de trabajo que luego el estudiante anexa a su portafolio de matemáticas, este proceso se agota en la fase inicial de la unidad didáctica y el tiempo de realización generalmente es corto.

INDICADORES DE LOGRO. Para cada taller se establecen indicadores asociados a las competencias matemáticas del ser, del saber y del hacer. Estos indicadores se formulan en correspondencia con el enfoque pedagógico del instituto politécnico, que hace énfasis en la formación de un ciudadano matemáticamente competente. Los indicadores se dan a conocer a los estudiantes, se discuten y se explican al inicio de cada sesión de trabajo con los estudiantes.

Desde el contexto de la investigación, los indicadores se usan como descriptores de las categorías de análisis, mismas que corresponden a las competencias el saber ser, saber y hacer.

¿QUÉ SABEMOS DE? En esta parte se pretenden identificar los presaberes del estudiante con miras a abordar el objeto de estudio, es una fuente importante de retroalimentación para redireccionar las actividades. Antes de introducirse en las

reflexiones de carácter histórico y epistemológico, se considera necesario valorar la comprensión de los conceptos previos y necesarios para abordar el objeto de estudio. Para el desarrollo de la secuencia, se valora la disposición que tiene el estudiante para entroncar el aprendizaje guiado por el camino de la historia. Los procesos que dan evidencia de esta fase se recoge por medio de hojas de trabajo, de imágenes o de videos y su duración depende del tipo de preguntas, del tipo de grupo y del manejo del debate.

RECURRIENDO A LA HISTORIA. Esta actividad, es el plato fuerte de la unidad didáctica porque alrededor de ella se diseñan los demás elementos de la estructura. Para el diseño, inicialmente se selecciona el objeto de estudio, luego se hace una selección previa de literatura y de recopilación de material bibliográfico y de elementos didácticos que enriquezcan la presentación del contenido desde un enfoque histórico-epistemológico. A partir de la exploración de la literatura y de los recursos se elabora un texto escrito que se ofrece como material de lectura que puede ir acompañado con un video y que propone un conjunto de preguntas destinadas a explorar en los estudiantes sobre la comprensión y la interpretación del texto, este momento en la visión de maza (1994) se identifica como análisis de un texto histórico.

Este componente de la estructura, es de gran valor porque abre el abanico a la participación, a la indagación, se constituye en el núcleo del proceso constructivo porque aquí se gesta la conceptualización y la labor del profesor como moderador y guía es determinante en este momento, según Guacaneme, aquí la historia de la matemática cumple su función didáctica integradora.

HACIENDO EN CONTEXTO. Planteamiento de situaciones que muestren conexión directa con la realidad, con la cotidianidad, con el entorno, con la tecnología o dentro de la

misma matemática y que hagan uso o aplicación del objeto de estudio de interés. Desde la perspectiva de maza (1994), este momento se corresponde con la resolución de problemas históricos, estos se pueden aprovechar para recrear los hechos y el contexto que hicieron posible y jalaron el desarrollo del conocimiento matemático.

DESAROLLO CONCEPTUAL. Construcción guiada del concepto para reconocer sus propiedades, características, relaciones, conexiones, representaciones, contenidos, extensiones, definiciones, etc. En lo posible se estimula hacia la formalización del concepto y se establecen comparaciones entre distintas formas de representación o de interpretación. Es determinante la construcción de significado para el estudiante, este elemento se favorece mediante la aproximación histórica y epistemológica, aquí la historia de la matemática cumple su función permeadora desde la visión de Guacaneme, puesto que sirve como guía en la delineación del proceso constructivo del concepto y por otra parte, también puede cumplir una función integradora porque favorece la interpretación y la comprensión del significado del mismo.

MATEMATICOMANÍA. Con una mejor elaboración del concepto entonces se formulan ejercicios o problemas cuya solución demande la aplicación del contenido desarrollado, en este punto, se espera que el estudiante haya ganado en comprensión y en habilidades. Para esta fase la propuesta de maza (1994) nos ofrece un elemento importante; confrontar el pasado con lo actual a partir de la recreación de problemas críticos.

¿QUÉ APRENDIMOS? Proceso de valoración del aprendizaje mediante la observación, registro, recolección, organización, revisión y análisis de toda la información relacionada con cada uno de los distintos aspectos asociados con el desempeño, con el desarrollo y evolución del estudiante en los diferentes saberes (saber-saber, saber-hacer, saber-ser).

PARA PROFUNDIZAR. Es la última sección y en ella se da un listado de todos los posibles documentos y referencias bibliográficas que guarden relación alguna con el objeto de estudio.

1.103.3 Fase 3. Intervención en el Aula

Vale la pena mencionar que la secuencia de aprendizaje que se muestra en este documento sufrió un proceso de diseño y pilotaje a lo largo del año 2017 y 2018. Del pilotaje no se presentan aquí resultados, pues el interés primordial fue lograr la estructura antes mencionada y el rediseño de las actividades, para la posterior implementación y análisis, con los cuales se pudiera dar respuesta a la pregunta de la investigación que aquí se reporta.

La secuencia, formalmente, la implementé el primer semestre del año 2019 con cinco cursos de décimo grado del Instituto Politécnico (Bucaramanga, Colombia). La intervención se desarrolló a lo largo de tres meses y para ello conté con cuatro horas semanales de clase por grupo (distribuidas en dos bloques de dos horas). La secuencia constó de cuatro talleres y en cada uno se desarrolló en doce horas, aproximadamente. Las actividades diseñadas se basaron en los planteamientos de Maza(1994) y Guacaneme (2016), tal como se describió en el capítulo 3 de este documento. Para realizar la intervención, fue necesario sensibilizar a los estudiantes, explicándoles que la metodología que se seguiría para la secuencia era de participación abierta, de registro escrito, permanente discusión de ideas y de preparación para los encuentros en el aula. Posteriormente, se les aclaró que la labor del profesor es de orientador y guía en el desarrollo de las actividades de la clase. Todas las actividades que se aplicaron fueron avaladas por las directivas del colegio y por los padres de familia de los estudiantes. La aplicación de los talleres siguió la programación que se muestra en la Tabla 4.

Semana	Actividad	Taller
Feb 4 – Feb 8	Preguntas Orientadoras ¿Qué sabemos de? Recurriendo a la Historia	Tales y la Razón Geométrica
Feb 11- Feb 15	Haciendo en Contexto Desarrollo Conceptual	Tales y la Razón Geométrica
Feb 18 – Feb 22	Matematicomanía ¿Qué aprendimos?	Tales y la Razón Geométrica
Feb 25 – Mar 1	Preguntas Orientadoras ¿Qué sabemos de? Recurriendo a la Historia	Ángulo y su Historia
Mar 4 – Mar 8	Haciendo en Contexto Desarrollo Conceptual	Ángulo y su Historia
Mar 11 – Mar 15	Matematicomanía ¿Qué aprendimos?	Ángulo y su Historia
Mar 18 – Mar 22	Preguntas Orientadoras ¿Qué sabemos de? Recurriendo a la Historia	Aristarco y la TLS
Mar 26 – Mar 29	Haciendo en Contexto Desarrollo Conceptual	Aristarco y la TLS
Abr 1 – Abr 5	Matematicomanía ¿Qué aprendimos?	Aristarco y la TLS
Abr 8 – Abr 12	Preguntas Orientadoras ¿Qué sabemos de? Recurriendo a la Historia	Hiparco y las Cuerdas
Abr 22 – Abr 26	Haciendo en Contexto Desarrollo Conceptual	Hiparco y las Cuerdas
Abr 29 – May 3	Matematicomanía ¿Qué aprendimos?	Hiparco y las Cuerdas

Tabla 4 Cronograma de la Intervención

Después de todo el proceso de implementación seleccione un único grupo de los cinco porque identifique un mayor nivel de participación y de disposición para el aprendizaje, el cual estuvo conformado por 39 estudiantes. Para efectos del análisis de resultados, seleccioné tres casos de estudio: José Alejandro, Luis Manuel y Nicolás. La selección se basó en los siguientes criterios: mostraron mayor disposición para el desarrollo de la experiencia, desarrollaron todas las actividades, la calidad de sus participaciones permitieron identificar evidencias de las categorías de análisis (saber-saber, saber-hacer y saber-ser), sus intervenciones fueron abiertas y argumentadas.

José Alejandro es un estudiante con actitud de escucha, es receptivo a las sugerencias que se le dan, siempre estuvo en todas las actividades desarrolladas y las desarrolló con muy buena disposición para el dialogo abierto y con argumentos.

Luis Manuel es un joven en apariencia tímido pero con una muy buena actitud de escucha, en un primer momento se mostraba algo apático al planteamiento de la clase pero con el tiempo se fue involucrando hasta convertirse en un agente muy positivo para el desarrollo de las actividades.

Nicolás es un estudiante que inició su proceso con buena disposición y que decidió hacer parte activa del mismo, es poseedor de una muy buena actitud crítica y decide por sí mismo ir mucho más allá de lo que se le pide.

1.113.4 Fase 4. Sistematización de la experiencia

La caracterización de los aprendizajes en la formación de las competencias matemáticas de los estudiantes que participaron en la intervención, las presento en un capítulo en el que se muestra cada uno de los cuatro talleres diseñados con su respectivo análisis a priori. Posterior a la presentación de cada taller, relataré la forma en que se desarrolló su implementación eligiendo un

único estudiante como referencia para mostrar evidencias de su aprendizaje. Finalmente, se realizará para ese estudiante la caracterización en términos del ciudadano matemáticamente competente (saber-saber, sabe-hacer, saber-ser), mostrando los resultados finales del proceso.

Los instrumentos que utilice para la recolección de evidencias de la intervención fueron: fotos o imágenes de las hojas de la carpeta de trabajo, autoevaluaciones escritas en el cuaderno de apuntes o en la carpeta de trabajo, registros escritos de expectativas, inquietudes, ideas y sensaciones de los estudiantes frente al propio aprendizaje, video grabaciones de las exposiciones orales y sesiones de trabajo.

Este reporte se cerrará con la presentación de las reflexiones y conclusiones del trabajo de aplicación, para ello se usarán las tres categorías que describen el ciudadano matemáticamente competente (saber-saber, sabe-hacer, saber-ser) y se agregarán algunas reflexiones generales de todo el proceso.

4. Estudio de la trigonometría con la mediación de la historia y la epistemología

“El que influye en el pensamiento de su tiempo, influye en todos los momentos que le siguen. Deja su opinión para la eternidad”.

Hipatya.

Inicialmente la secuencia la implementé en cinco grupos de décimo grado del Instituto Politécnico, para facilitar el análisis de datos, decidí elegir al grupo 10-5, que es un grupo de la línea de Robótica con 39 estudiantes, con ellos pude desarrollar la mayor parte de las actividades. El grupo de estudiantes, en general, mostró una actitud dispuesta, muy participativos y con ellos logré mayor continuidad en el proceso, es decir, los encuentros fueron más frecuentes y más productivos. De este grupo, finalmente seleccioné tres casos de estudio para hacer el análisis de resultados.

En este capítulo presento cada uno de los talleres con su respectivo análisis a priori y posteriormente en cada uno de ellos muestro resultados del análisis en términos de las tres categorías que dan cuenta del ser matemáticamente competente. Ese análisis por taller y por cada una de las categorías, lo realicé basándome en las respuestas de uno de los estudiantes tomados como casos de estudio (José Alejandro, Luis Manuel y Nicolás), así:

- Taller 1. Tales y Razón Geométrica, con el caso de Nicolás
- Taller 2. Ángulo y su historia, con el caso de José Alejandro
- Taller 3. Aristarco y la TLS, con el caso de Luis Manuel
- Taller 4, Hiparco y las cuerdas, con el caso de Luis Manuel

Para ello, me fije específicamente, para describir el saber-saber en las respuestas dadas por los estudiantes a las actividades de recurriendo a la historia. Para, describir los aprendizajes del saber-hacer, rescaté esencialmente las respuestas asociadas a las actividades de haciendo en contexto y desarrollo conceptual. Para responder a la caracterización del saber-ser, retomé evidencias de las respuestas de las actividades de matematicomania y qué aprendimos.

1.124.1 Tales y la razón geométrica

El primer taller (ver Apéndice A). lo diseñé con el fin de fortalecer los conceptos de razón y proporción geométrica, para ello, el episodio histórico de Tales y la medición de la altura de la pirámide fue importante porque permitió motivar al estudiante por medio de lecturas y videos asociados al hecho. La situación se consideró propicia para estimular el razonamiento proporcional mediante la construcción de gráficas a escala, porque el estudiante a través de ella puede valorar la capacidad de abstracción matemática que mostró Tales al resolver el problema y admirar su recursividad para resolverlo.

El aporte epistemológico de este hecho histórico es muy significativo porque muestra el concepto de razón geométrica emergiendo del contexto, de igual manera el estudiante reconoce los esfuerzos hechos por personas que hicieron posible el desarrollo de la matemática. Estos elementos dan cuenta de características propias de un ciudadano matemáticamente competente lo que es el objetivo de esta investigación.

4.1.1 Análisis a priori

En este apartado se describe el taller diseñado para el estudio de la razón geométrica con su respectivo análisis a priori y siguiendo la estructura descrita en el apartado 4.2 del capítulo 4. Para este taller se plantearon los siguientes **Indicadores de Logro:**

- I. Interpreta como un número, como un porcentaje o como una razón geométrica a la cantidad que surge de la comparación por cociente de las medidas de dos lados cualesquiera de un triángulo rectángulo.
- II. Resuelve problemas sobre la cotidianidad aplicando el concepto de razón geométrica construido mediante el recurso histórico.
- III. Reconoce el valor que ofrece el estudio de problemas históricos para indagar sobre la realidad, para entender el carácter científico del conocimiento matemático y para establecer la relación entre los modelos abstractos de la matemática y las situaciones de contexto.

Como se mencionó anteriormente, previamente a la clase se plantean a los estudiantes unas **preguntas orientadoras**, con el fin de que consulten y lleguen a la clase con algunas ideas que permitan introducirse al tema. Para esta sesión se plantearon las siguientes preguntas:

- 1) ¿Quién fue Tales de Mileto? ¿Cuál era el pensamiento filosófico de Tales? ¿Por qué le dio gran importancia al agua? Encuentre e interprete algunas frases célebres de Tales.
- 2) Tales de Mileto, uno de los siete sabios de Grecia, asombró a los egipcios midiendo la altura de las pirámides sin tener que subirse a ellas y solo usando la longitud de la sombra ¿Cómo lo hizo?
- 3) ¿Cómo identificó Tales el concepto de razón geométrica para medir la altura de la gran pirámide?
- 4) ¿Cómo puede explicar que Tales hizo un proceso de abstracción matemático para calcular la altura de la gran pirámide?

Para iniciar la clase, se invita a los estudiantes a exponer las respuestas a las preguntas orientadoras, esto permite que se dé una discusión interesante y a partir de allí se valore **¿Qué sabemos de la razón geométrica?** Por ello se plantean preguntas como:

- Juan Sebastián afirma que si al ampliar una fotografía de 4cmx7cm se aumenta el ancho a 10 cm entonces el largo se aumenta a 13 cm. Miguel le dice que no está de acuerdo pero que no sabe cómo explicarlo, ¿Cómo puede usted ayudar a Miguel o confirmar la afirmación de Juan Sebastián?

Esta fase es de gran importancia porque permite identificar las concepciones que ellos poseen sobre este objeto de estudio. Las preguntas indagan sobre las propiedades de las razones y sus elementos. Con las respuestas a esta situación se pretende identificar el nivel de razonamiento proporcional que poseen los estudiantes, generalmente porque ellos admiten que el argumento de Juan Sebastián es válido y se fundamenta en un razonamiento aritmético porque centran su argumento en la comparación por diferencia, que es propio de un nivel de pensamiento aritmético. Así, cuándo se les pregunta ¿Qué entiendes por ampliación de una fracción? Se quiere analizar como el estudiante está comprendiendo la fracción. Aquí, muy posiblemente, los estudiantes pueden asociar a la representación del racional de la forma algebraica pues generalmente se les representa de la forma $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Aquí la historia puede ayudar, si aclaramos que en la época de Tales aún no se hablaba de matemáticas como disciplina del conocimiento y que aún no existían representaciones simbólicas para las expresiones matemáticas porque la representación decimal y por fracciones que conocemos, de un número racional, surge mucho tiempo después hasta la invención del sistema hindú_arábigo. En este punto la Historia cumple una función permeadora desde la visión de Guacaneme (2016) porque muestra que el concepto razón geométrica es anterior al surgimiento de las representaciones decimales.

Esta última discusión permite dar paso al apartado de **Recurriendo a la Historia (Figura 2)**, para ello se hace uso de un episodio de la historia en la que el personaje principal es Tales de

Mileto. En ese episodio emerge como objeto de estudio la razón geométrica, que para Tales fue un proceso de abstracción con el que él enfrentó un problema real. Aquí la historia cumple una función de uso desde la perspectiva de Guacaneme (2016) porque ilustra y proporciona al estudiante un ejemplo concreto de lo que significa la modelación matemática mediante la abstracción, como objeto principal de estudio de esta ciencia. Se espera que el estudiante reconozca la razón geométrica como el elemento esencial para resolver este problema. Frente a la pregunta ¿Qué tipo de comparación es más apropiada para esta situación, por diferencia (razón aritmética) o por cociente (razón geométrica)? Es muy normal que un buen número de ellos respondan que la diferencia es justamente la relación que representa mejor la situación, esto porque la relación de comparación por cociente demanda un nivel más alto de pensamiento matemático.

Para orientar a los estudiantes en esta dirección, primero centramos la mirada en el caso más simple que es identificar un triángulo rectángulo isósceles en la primera estrategia de medición que Tales propone. Aunque en la época de Tales de Mileto aún no se representaba el concepto de razón geométrica como lo conocemos ahora, si es cierto que él hizo uso de alguna forma de representación para sortear la situación.

El texto plantea que Tales, espera hasta que la longitud de la sombra del bastón vertical y la longitud del bastón horizontal sean iguales, es decir, hasta que la razón geométrica sea igual a 1. La intención de preguntarle al estudiante por el cociente entre los dos valores, es que él responda que el resultado es 1, así mismo, se quiere que logre identificar la relación de codos de sombra por cada codo de altura.

Recurriendo a la Historia Tales y la pirámide

Cuenta la leyenda relatada por Plutarco que Tales de Mileto, uno de los llamados siete sabios de Grecia, durante uno de sus viajes a Egipto se encontró cierto día visitando la Necrópolis con el joven e inquieto Rey de Egipto, quien deslumbrado por la fama y sabiduría de Tales le preguntó si podía medir la altura de la majestuosa pirámide de Keops que se levantaba ante ellos.



Era por la mañana, muy temprano, y acababa de salir el sol por el horizonte. Es sabido que a esa hora las sombras que las personas y los objetos proyectan son muy largas, luego se acortan a medida que avanza el día, sobre todo al mediodía, y ya por la tarde empiezan de nuevo a alargarse. Ante la pregunta del Rey, Tales reflexionó unos instantes y le contestó que no solo la calcularía, sino que incluso la mediría sin ayuda de ningún instrumento. Dicho esto, tomó dos bastones de igual longitud (también pueden ser distintos, e incluso con uno solo es posible), colocó uno en posición vertical y el otro en horizontal, y se puso a esperar. Como todavía era muy pronto, la sombra proyectada por el bastón vertical superaba con mucho la longitud del bastón horizontal, pero a medida que avanzaba el día esa sombra se fue acortando. Cuando su longitud se hizo igual que la del bastón apoyado en la arena, Tales le dijo al Rey: “Ahora ya es muy fácil conocer la altura de la pirámide”. ¿Por qué?

Figura 2 Actividad 1. Recurriendo a la historia Taller uno

Este razonamiento induce a la noción de razón geométrica, esperando que establezca la conexión con la altura de la pirámide y la longitud de su sombra. Luego, se plantea una pregunta más general con el propósito de hacer que él identifique la relación de codos de altura por cada codo de sombra en cualquier instante, de tal forma que comprenda que la misma razón que se cumple entre la longitud del palo y la longitud de su sombra se cumple entre la altura de la pirámide y la longitud de su sombra ¿Cree usted que Tales pudo haber medido la altura de la pirámide en cualquier momento de un día soleado, utilizando el concepto de razón geométrica?

Posteriormente se presenta el inciso de “Haciendo en Contexto”, con el cual se sugiere hacer uso de lo cotidiano (preferiblemente que se realice en un día soleado para que sea fácil hacer las

mediciones de las sombras de un objeto colocado verticalmente). Se espera que el estudiante fácilmente identifique el triángulo rectángulo como objeto que modela la situación que se muestra en la **Figura 3**. Además, se quiere que él identifique la relación numérica que se da entre la longitud del objeto y su sombra y que de esa relación surja una razón geométrica que se convierte en un número representado de forma fraccionaria o de forma decimal.

Por otro lado, apuntamos hacia el saber-hacer del estudiante porque al identificar la razón esperada es muy probable que él construya en el papel una gráfica a escala y con ello resuelva una situación análoga por aplicación del concepto. Estamos estimulando el razonamiento proporcional del estudiante derivado de una situación en contexto. Esta actividad busca orientar hacia la comparación de segmentos, de un modelo geométrico cotidiano se puede establecer la comparación de las longitudes de las sombras y las alturas. Hacemos abstracción inicialmente de triángulos rectángulos cuyos lados se corresponden perfectamente con bastones y sombras o con alturas de pirámides y sombras, esto con el fin de focalizar hacia la idea de racional (conmensurabilidad).

Con la actividad propuesta, se busca estimular el saber-saber del estudiante y que él construya los elementos conceptuales para explicar por lo menos una forma de interpretación del número que resulte de la comparación. En esta etapa, es muy importante hacer énfasis en el lenguaje oral, escrito y simbólico puesto que la razón entre segmentos de recta permite distintas formas de interpretación entre otras, como razón, como porcentaje, como cociente, etc.

Haciendo en Contexto

Resuelva cada una de las siguientes situaciones utilizando la noción de razón geométrica que usted hasta aquí ha podido consolidar. Explique detalladamente y por escrito.

ACTIVIDAD II

- I. En un día soleado (preferiblemente temprano en la mañana y protegidos del sol), en un espacio descubierto del colegio y por grupos de 3 estudiantes realizar la siguiente experiencia: Tomar una vara delgada de un metro de longitud y mantenerla en posición vertical (ángulo de 90°), mientras otro estudiante mide la longitud de su sombra. Registrar los datos en un papel y luego construir a escala el objeto geométrico resultante de esta experiencia. Con base en el dibujo a escala responder las siguientes preguntas.
- ¿Qué tipo de objeto geométrico se abstrae de esta situación cotidiana? Justifique su respuesta.
 - Escriba la razón geométrica que establezca el número de veces que el cateto mayor contiene al cateto menor ¿Cuántos metros del cateto mayor corresponden por cada metro del cateto menor?
 - Escriba la razón geométrica que establezca el número de veces que el cateto menor contiene al cateto mayor ¿Cuántos metros del cateto menor corresponden por cada metro del cateto mayor?
 - Si un palo tiene 2 m de altura ¿Cuál debería ser la longitud de su sombra a la misma hora del día? Construir un modelo geométrico a escala de este problema.
 - Si un palo proyecta una sombra de 2m a esa misma hora ¿cuál debe ser la longitud del palo? Construir un modelo geométrico a escala de este problema.
 - ¿Considera usted que existe margen de error en las mediciones realizadas para esta experiencia? Explique su respuesta.

Figura 3 Actividad Haciendo en contexto Taller uno

Es importante precisar que de la comparación de las medidas de los lados de un triángulo rectángulo pueden resultar cantidades irracionales (incommensurables) o cantidades racionales (commensurables). Sin embargo, para efectos de la investigación que en este documento se reporta, se hace uso de comparación de cantidades racionales puesto que en esta etapa del proceso centramos la mirada es en la interpretación de la razón y no en su naturaleza. Por otra parte, el único modelo teórico disponible por los estudiantes en esta fase es el teorema de Pitágoras que a pesar de ser una máquina generadora de irracionales no explica por sí mismo su procedencia.

Además, en esta fase del proceso aún no tenemos interés en determinar los porcentajes de error de las mediciones.

Para la fase de “Desarrollo Conceptual” se propone que el estudiante formule un modelo general que permita representar y resolver el problema de medir la altura de la pirámide en cualquier momento de un día soleado.

En la penúltima parte del taller, aparece el apartado de “**Matematicomania**” **Figura 4**, con la que se pretende clarificar, afianzar y desarrollar habilidades de pensamiento mediante la formulación de preguntas que exijan la comprensión de los conceptos y de los procedimientos asociados como se explicó en el apartado 4.2 del capítulo 4.

En este apartado, se seleccionó, el hecho histórico que se muestra en la **Figura 4**. por su riqueza matemática El hecho está relacionado con la trigonometría, resalta el valor de la geometría como abstracción de la realidad y que hace énfasis en el razonamiento proporcional. Suponemos que el estudiante al resolver el problema y encontrar el valor de la circunferencia de la tierra comprende la razón geométrica entre el número de kilómetros de longitud de la línea del Ecuador en la superficie de la tierra por cada grado en el centro de la tierra.

Para terminar el diseño se plantea el apartado, **¿Qué aprendimos?** Allí se plantean cuatro situaciones, la primera de ellas es: En una notaría de Bucaramanga piden una ampliación de una cédula de ciudadanía al 150% ¿Puede usted encontrar los valores de las dimensiones de la cédula ampliada? ¿Cómo sería la representación gráfica de la situación? ¿Cuál podría ser el modelo algebraico para resolver la situación? La primera respuesta esperada aquí es la expresión decimal de la razón geométrica que implica una ampliación del 150%, es decir, el estudiante establece la conexión entre el porcentaje y la razón geométrica. A partir de ese logro es muy probable que el estudiante calcule los valores de las dimensiones de la cédula ampliada y el modelo a escala

debería surgir como complemento de la solución, posiblemente de una explicación algebraica del problema.

Matematicomanía

ACTIVIDAD IV

¿Sabe cómo se podría medir la circunferencia de la tierra? En el año 240 a.c., Eratóstenes la midió basándose en la curvatura. En Siena, Egipto (ubicada en el trópico de cáncer), los rayos del sol eran precisamente perpendiculares al mediodía del 21 de Junio. Al mismo tiempo, en Alejandría, población situada a 800 Km (500 mi ó 5000 estadios), al Norte, los rayos solares caían en un ángulo de $7,2^\circ$, respecto de la vertical. Este ángulo es exactamente el mismo ángulo que se forma en el centro de la tierra si se prolongaran las dos varas hacia ella, y este ángulo resulta ser el ángulo que representa la diferencia entre las dos latitudes geográficas de dichas ciudades. Con esta información y aplicando el concepto de razón geométrica, responde:

a) ¿Cuántos Km sobre la circunferencia de la tierra por cada grado sexagesimal en el centro de la tierra?

b) ¿Puede calcular la longitud de la circunferencia de la tierra en Km, en mi ó en estadios? Compara con el valor actual de la distancia entre Asuan (Siena) y Alejandría, que aparece en la red y expresa por escrito algunas conclusiones. ¿Puede calcular el margen de error de la medición de Eratóstenes?

Figura 4 Matematicomanía- en Tales y la Razón Geométrica

La segunda situación consiste en retomar el problema que aplicamos en la conducta de entrada, Juan Sebastián afirma que si al ampliar una fotografía de 4cmx7cm se aumenta el ancho a 10 cm entonces el largo se aumenta a 13 cm. Miguel le dice que no está de acuerdo pero que no sabe cómo explicarlo, ¿Cómo puede usted ayudar a Miguel o confirmar la afirmación de Juan Sebastián? En esta situación, se espera que el estudiante evidencie por medio de su argumentación gráfica o textual que su pensamiento ha transitado del razonamiento aritmético al razonamiento proporcional, es decir, reconoce la ampliación de la fotografía como un modelo de

proporcionalidad geométrica, se espera que él proponga la razón que se da entre el ancho y el largo de la foto como una razón geométrica y de esa forma pueda dar respuesta al problema.

La tercera pregunta: La sombra de un árbol mide 9m a la misma hora que la sombra de una vara de 1m de altura mide 1.5m. Hallar la altura del árbol. ¿Cuántos metros de longitud de la sombra por cada metro de altura del árbol? ¿Cuál será la altura de otro árbol que a la misma hora produzca una sombra de 12m? ¿Qué porcentaje de la altura del árbol es la longitud de la sombra? ¿Serviría esta misma razón para hallar la altura de los árboles a otra hora distinta? ¿Por qué? Construya una gráfica a escala. Si se ha dado en el estudiante la transición del razonamiento aritmético al razonamiento geométrico entonces su respuesta debe corresponder con un razonamiento proporcional identificando de antemano la razón geométrica que relaciona la altura de la vara con la longitud de su sombra o recíprocamente, en caso contrario, su respuesta probable para la altura del árbol sería 8.5 m porque hace uso de la diferencia de longitudes entre la vara y la sombra, significa que su nivel de pensamiento se mantuvo en el razonamiento aritmético.

Finalmente, se le pregunta al estudiante: ¿Qué incidencia tuvo el hecho de estudiar la vida y obra de Tales y conocer sus estrategias para medir la altura de la pirámide en la comprensión que usted alcanzó del concepto razón geométrica, en el desarrollo de su pensamiento y en su formación integral? Se espera que para el estudiante ésta haya sido una experiencia positiva y gratificante de tal manera que aporte en su formación personal y en el fortalecimiento de su estructura de pensamiento.

Al finalizar el taller, se presenta el apartado “**para profundizar**”, en el que se dan unas ligas a textos, videos, blogs, páginas web donde se encuentra información para profundizar.

4.1.2 Caracterización de aprendizajes

Como el objetivo de esta tesis es caracterizar aprendizajes en la formación de un ciudadano matemáticamente competente que desarrolla una secuencia de actividades fundamentadas en una dimensión histórico-epistemológica para el estudio de la trigonometría. Por ello, en este primer taller sobre Tales y la razón geométrica se plantearon actividades de medición para hacer uso del contexto, mediciones de longitudes de objetos y sus sombras en el patio del colegio, se promovieron actividades de trabajo en equipo, se estimuló la lectura por medio de la consulta, se cultivó la cultura al estudiar la vida y obra de Tales. Con el desarrollo del taller, se resolvieron situaciones de la cotidianidad haciendo uso de la razón geométrica como en el problema de la amplificación de la cédula al 150%, se comprendieron fenómenos cotidianos como el zenit y la determinación del ángulo de inclinación del sol, se promovió el proceso de abstracción identificando modelos matemáticos en hechos cotidianos y se discutió sobre la importancia que tiene la filosofía en la comprensión del mundo.

A continuación, presento la caracterización por categoría y para este taller escogí el caso de Nicolás porque me permitió hacer un análisis robusto del proceso.

a. Saber_Saber

El problema de la foto que se plantea en el ítem b) de la actividad V en la sección ¿Qué sabemos de razón geométrica? Y que sirvió como problema de diagnóstico lo planteo nuevamente con el propósito de valorar el progreso en el aprendizaje. Primero muestro el razonamiento inicial de Nicolás y luego muestro el razonamiento final que él ofrece después de cumplir el proceso de desarrollo de todas las actividades del taller uno.

Juan Sebastián afirma que si al ampliar una fotografía de 4cmx7cm se aumenta el ancho a 10 cm entonces el largo se aumenta a 13 cm. Miguel le dice que no está de acuerdo pero

que no sabe cómo explicarlo, ¿Cómo puede usted ayudar a Miguel o confirmar la afirmación de Juan Sebastián?

Nicolás, tal como se muestra en la **Figura 5**, propone que Miguel tiene la razón, sin embargo, su argumento se corresponde con el razonamiento aritmético puesto que afirma que el incremento debió ser de 10 tanto en el ancho como el largo, interpretando que Juan Sebastián no ha incrementado el mismo número a cada dimensión.

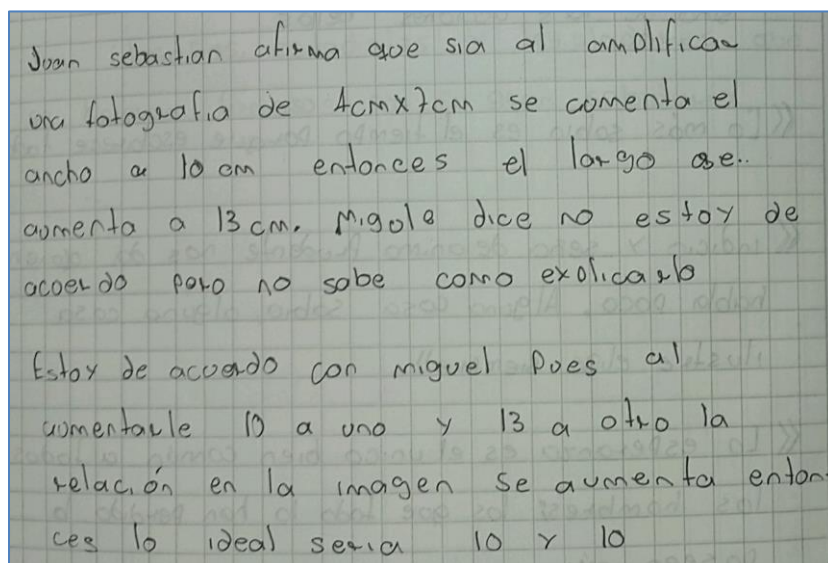
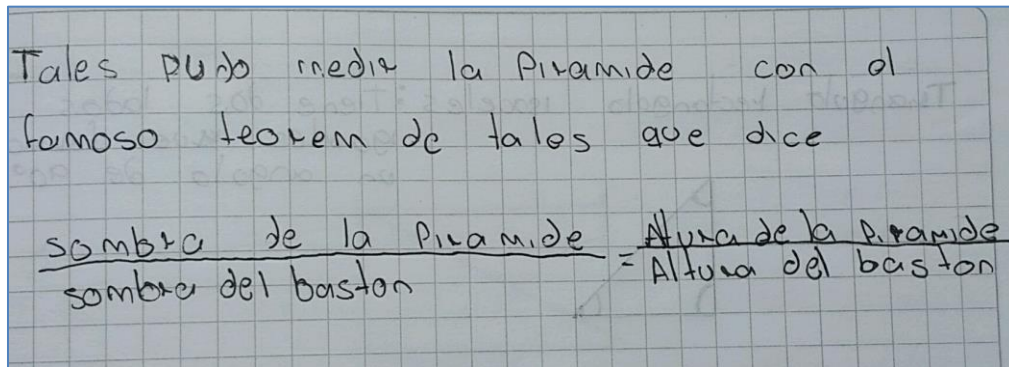


Figura 5 ¿Qué sabemos de? Diagnóstico Inicial Caso Nicolás Taller uno

Esta dificultad evidente en Nicolás es generalizada en los estudiantes, para orientar al grupo aquí propuse la actividad de recurriendo a la historia en la que se ilustra sobre el problema de la medición de la altura de la pirámide, inicialmente como lo describí en el análisis a priori Tales resuelve el problema haciendo uso del triángulo rectángulo isósceles y luego propone un modelo general para calcular la altura de la pirámide en cualquier momento del día.

Nicolás entiende el modelo que propone Tales y lo representa tal como se muestra en **Figura 6**, aquí el recurso histórico funge como integrador desde la visión de Guacaneme (2016) porque

contribuye a la comprensión del modelo de proporcionalidad que es útil para resolver el problema de la foto.



Tales pudo medir la Piramide con el famoso teorem de tales que dice

$$\frac{\text{sombra de la Piramide}}{\text{sombra del baston}} = \frac{\text{Altura de la Piramide}}{\text{Altura del baston}}$$

Figura 6 Desarrollo Conceptual Caso Nicolás Taller uno

Sin embargo, al finalizar el Taller uno en la sección ¿Qué aprendimos de? Se vuelve a proponer el problema de la foto y Nicolás responde como se muestra en la **Figura 7**, allí se puede evidenciar una respuesta bien argumentada en correspondencia con el concepto de razón geométrica y la identificación del factor de amplificación que se debe aplicar.

Miguel tiene la razón puesto que Juan Sebastian no tuvo en cuenta un concepto geométrico llamado razón geométrica, el cual nos indica que para poder mantener la proporción en una figura geométrica sin que esta se deforma al amplificar uno de sus lados el otro se amplifica por el mismo número.

Por ejemplo: Si la fotografía tiene 4cm de ancho y Juan Sebastian quiere aumentarla a 10cm tendría que multiplicarla por 2.5 entonces para poder mantener la proporción de la imagen el largo que equivale a 7cm también hay que multiplicarlo por 2.5. Siguiendo esta ley de la razón geométrica la imagen quedaría de 10cmx17.5cm.

Figura 7 ¿Qué aprendimos? Diagnóstico Final Caso Nicolás Taller uno

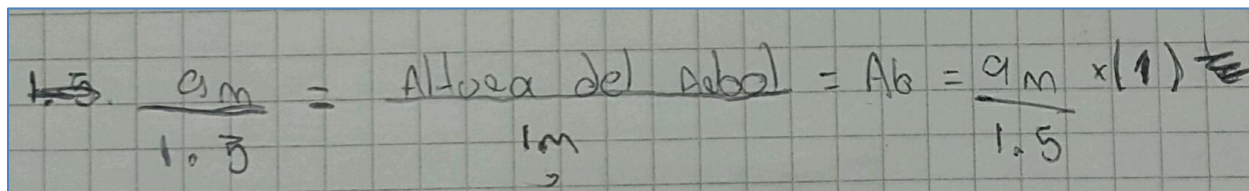
Tomando como referente el indicador de logro del saber-saber en el Taller uno, podemos valorar qué alcances ha obtenido Nicolás con respecto a este descriptor en dicha categoría de aprendizaje: Interpreta como un número, como un porcentaje o como una razón geométrica a la cantidad que surge de la comparación por cociente de las medidas de dos lados cualesquiera de un triángulo rectángulo.

Respecto a este indicador identifiqué en Nicolás un nivel de elaboración puesto que al solucionar las preguntas de la foto y la del árbol él muestra destreza al utilizar el concepto de razón geométrica porque la interpreta como un cociente entre las longitudes de los lados del rectángulo en el caso de la Foto y como cociente entre los lados del triángulo en el caso del árbol y en ambos problemas interpreta la razón como un porcentaje. Maza (1994) lo define como Introducción Histórica ante un nuevo concepto porque permite la elaboración enriquecida y clarificada mediante el acercamiento a la historia.

b. Saber_Hacer

Existen situaciones útiles para hacer geometría y trigonometría, por ejemplo el problema del árbol que se plantea en el ítem c) de la actividad V en la sección en la actividad ¿Qué aprendimos? Recordemos el problema: “La sombra de un árbol mide 9m a la misma hora que la sombra de una vara de 1m de altura mide 1.5m. Hallar la altura del árbol. ¿Cuántos metros de longitud de la sombra por cada metro de altura del árbol? ¿Cuál será la altura de otro árbol que a la misma hora produzca una sombra de 12m? ¿Qué porcentaje de la altura del árbol es la longitud de la sombra? ¿Serviría esta misma razón para hallar la altura de los árboles a otra hora distinta? ¿Por qué? Construya una gráfica a escala.

Nicolás presenta su solución de una manera más robusta y argumentada, inicialmente recurre al modelo de Tales, como se puede observar en la **Figura 8** y lo aplica para plantear el problema.



$$\frac{1.5 \text{ m}}{1.5} = \frac{\text{Altura del Arbol}}{1 \text{ m}} = Ab = \frac{9 \text{ m} \times (1)}{1.5}$$

Figura 8 Modelo de Tales Saber Hacer Caso Nicolás Taller uno

Luego recurre a un modelo a escala que construye en geogebra como se ve en la **Figura 9** donde muestra la altura que debería tener el otro árbol.

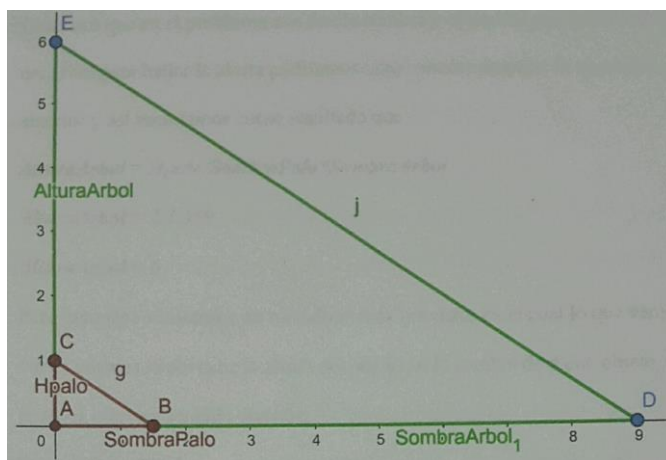


Figura 9 Problema del árbol Saber Hacer Caso Nicolás

Finalmente Nicolás propone una solución más elaborada y presentada en formato digital para el mismo problema (**Figura 10**). Afirmando que la relación que se da entre los catetos de un triángulo rectángulo obedece al valor de los ángulos

Primero para poder resolver las incógnitas planteadas por el docente debemos tener en cuenta una cosa muy importante y es que en una razón geométrica en un triángulo rectángulo la proporción de cuantas veces cabe el cateto menor en el cateto mayor depende directamente de los ángulos que se forman en el triángulo rectángulo, lo que quiere decir que para un determinado ángulo hay una determinada razón. Ahora si tenemos dos objetos ubicados en un mismo sitio a una misma hora el ángulo de inclinación que se forma entre la altura y la sombra de ambos objetos será el mismo, teniendo esto en cuenta y con lo planteado anteriormente podemos determinar que la razón geométrica de los triángulos rectángulos que se forman en ambos casos son la misma. Siendo esta razón.

$$\text{Sombra Palo} / \text{Hpalo} = \text{Sombra Arbol} / \text{Altura Arbol}$$

Figura 10 Problema del árbol Saber Hacer Caso Nicolás

Como se puede ver en la **Figura 11**, el estudiante expresa algebraicamente la relación entre las diferentes magnitudes, altura del objeto, sombra del árbol, sombra del objeto calcular la altura del árbol para finalmente proponer la solución de la segunda parte del problema.

Gracias a que en el problema nos dan la sombra y altura del palo y la sombra del árbol para hallar la altura podríamos simplemente despejar la operación anterior y así sacáramos como resultado que

$$\text{Altura Arbol} = \text{Hpalo} / \text{Sombra Palo} * \text{Sombra Arbol}$$

$$\text{Altura Arbol} = 1 / 1.5 * 9$$

$$\text{Altura Arbol} = 6$$

Pero entonces vámonos a un método menos ortodoxo en el cual lo que vamos a ver es cuantas veces cabe la altura del objeto en la sombra de dicho objeto, esto se logra con una sencilla división.

$$\text{Sombra Palo} / \text{Hpalo}$$

$$1.5 / 1 = 1.5$$

Figura 11 Problema del árbol. Saber Hacer Caso Nicolás Taller uno

Luego, él nuevamente argumenta, tal como se muestra en la **Figura 12**. Diciendo que como la sombra cabe 1.5 veces en el objeto entonces el objeto es el 150% de la sombra, sin embargo, al escribirlo lo expresa de manera invertida, es decir, representa de distintas formas un mismo concepto y con ésta interpretación encuentra otro vía de solución para el mismo problema.

Entonces ya con esto tenemos que la sombra del objeto cabe 1.5 veces en el objeto o lo que es lo mismo que decir que la sombra del objeto es el 150% del objeto. A continuación, únicamente tenemos que hacer otra sencilla división.

Sombra/Arbol/1.5

9/1.5

9/1.5 = 6

En el problema nos piden hallar la altura de un árbol que de sombra tiene 12cm a la misma hora que los otros dos objetos, entonces la razón geométrica es la misma.

12/1.5 = 8cm

Figura 12 Problema del árbol Saber Hacer Caso Nicolás Taller uno

Tomando como referente el indicador de logro del saber-hacer en el Taller uno, podemos valorar qué alcances ha obtenido Nicolás con respecto a este descriptor en dicha categoría de aprendizaje: Resuelve problemas sobre la cotidianidad aplicando el concepto de razón geométrica construido mediante el recurso histórico.

Con respecto a éste indicador reconocí en Nicolás un nivel de respuesta favorable, puesto que al solucionar las preguntas de la foto y del árbol pude notar que resolvió correctamente el problema, en los dos momentos elaboró gráficas a escala, ofreció un procedimiento de solución y un argumento para respaldar el planteamiento y se puede identificar la conexión con el modelo que propuso Tales, es decir, el recurso histórico favorece la comprensión y la solución de problemas de contexto, además encuentra 3 formas distintas de resolver el problema mediante un modelo geométrico, mediante un recurso algebraico y mediante la aplicación del concepto de

razón. Maza (1994) lo define como Resolución de problemas Históricos porque se trata de retomar problemas que en el pasado generaron nuevos conceptos y nuevas relaciones matemáticas, este problema del árbol es en esencia el problema de la pirámide pero en otro contexto.

c. Saber_Ser

Tomé como referencia la última pregunta planteada en la sección ¿Qué aprendimos? del taller uno, tomé textualmente la respuestas que dio Nicolás.

¿Qué incidencia tuvo el hecho de estudiar la vida y obra de Tales y conocer sus estrategias para medir la altura de la pirámide en la comprensión que usted alcanzó del concepto razón geométrica, en el desarrollo de su pensamiento y en su formación integral?

Nicolás responde, que a él particularmente le ha afectado positivamente haber estudiado y conocido la perspectiva matemática en la vida de Tales porque se sintió atraído por sus proezas y advirtió que por medio de la observación es posible identificar modelos matemáticos de la realidad como lo hizo Tales (Figura 13).

Primero que nada, no estaría de más decir que a Tales de Mileto lo conozco desde hace ya algunos años gracias a su trabajo como Filósofo, aun así nunca lo vi desde la perspectiva del prodigio matemático que fue en su época. Al mirar más de cerca el contexto bajo el que trabajaba Tales surgen algunas dudas sobre cómo fue que logró llegar a las distintas conclusiones que tuvo a lo largo de su casi que mítica vida. Respecto a lo de la pirámide un día me puse a pensar ¿Será que anterior a la pirámide Tales ya había hecho la misma medición con otros objetos descubriendo lo que sería la razón geométrica? Posiblemente, con esta clase de preguntas me ayude en mi proceso de comprensión de la matemática en el mundo y como por medio de la observación se puede llegar a un modelo matemático. En las clases del profesor Jairo le di una vuelta de 180° a mi perspectiva de las matemáticas y me propuse hacerla parte de mi diario vivir de está formando logrando utilizar más la razón antes que cualquier operación ejercitando mi mente para poder resolver problemas no solo

Figura 13 ¿Qué aprendimos? Saber Ser

Tomando como referente el indicador de logro del saber-ser en el Taller uno, podemos valorar qué alcances ha obtenido Nicolás con respecto a este descriptor en dicha categoría de aprendizaje: Reconoce el valor que ofrece el estudio de problemas históricos para indagar sobre la realidad, para entender el carácter científico del conocimiento matemático y para establecer la relación entre los modelos abstractos de la matemática y las situaciones de contexto.

Es evidente que en él se dio este indicador porque lo dice explícitamente haciendo mención de la importancia que reconoce en la aproximación histórica ya que por medio de ella se despierta la curiosidad, se genera la pregunta, se valora el conocimiento, se identifica la relación de la matemática con el contexto y se advierte el carácter humano de la misma. Guzmán (1993) dice que la historia muestra el carácter humano y falible de la matemática pero que es capaz de autocorregirse, y nos ilustra sobre las interesantes personalidades de los hombres que las hicieron y sobre sus distintas motivaciones.

1.134.2 Ángulo y su historia

El segundo taller, que se muestra completo en el Apéndice B, lo diseñé con el objetivo de construir con mis estudiantes el concepto de ángulo, para lograr que lo identificarán en la cotidianidad, que valoraran su importancia y que lo aplicarán en la resolución de problemas de contexto. Para ello, fue muy importante aproximarnos al estudio del proceso histórico que nos mostró el origen del concepto, su evolución y la vigencia del sistema sexagesimal. En este taller, se identificó un aporte epistemológico al comprender la naturaleza del concepto y al comprender que el grado sexagesimal es una razón geométrica de carácter adimensional, para contextualizar con las ideas de latitud y longitud geográfica y así despertar la curiosidad por entender la relación del ángulo con diversas áreas del conocimiento.

4.2.1 Análisis a priori

En este apartado describiremos el taller diseñado para el estudio de los ángulos, sus características y aplicaciones en la resolución de problemas. El taller tiene previstos los siguientes **Indicadores de logro**:

- I. Comprende que el grado sexagesimal es una razón geométrica que resulta de la comparación por cociente entre dos magnitudes lineales.
- II. Construye gráficas a escala de los modelos geométricos del contexto para calcular valores estimados de las medidas angulares y lineales en un triángulo rectángulo.
- III. Muestra curiosidad por aprender sobre el concepto de ángulo al comprender su importancia en la medición del tiempo, en el cálculo de distancias y tamaños relativos entre los cuerpos celestes en las culturas antiguas y contemporáneas.

Como se mencionó anteriormente, previamente a la clase se plantean a los estudiantes unas **Preguntas Orientadoras**, con el fin de que consulten y lleguen a la clase con algunas ideas que permitan introducirse al tema. Para esta sesión se plantearon las siguientes preguntas:

- ¿Cómo surge la relación entre el calendario lunar y el ángulo de una vuelta completa?
- ¿De dónde proviene la idea del número 60 como unidad básica de medición en el sistema sexagesimal de la cultura babilónica?
- ¿Qué valor en grados sexagesimales tiene el ángulo cenital del sol a las 11:00 a.m de un día cualquiera del mes de Mayo en Bucaramanga? Puede tomar una imagen de la situación, representarla mediante un modelo geométrico e identificar el ángulo cenital.

Se sugieren lecturas relacionadas con la cultura babilónica por ser ellos fueron quienes contribuyeron en asuntos de medición del tiempo y en la definición del sistema sexagesimal. Por

otra parte, se pretende que el estudiante identifique situaciones reales que se relacionen con el concepto de ángulo, esencialmente se busca que reflexionen sobre la existencia de ellos en escenarios cotidianos. Para iniciar la clase, se espera promover una discusión sobre **¿Qué saben del concepto ángulo?** Para ello se plantean preguntas como:

- a) ¿Qué tipo de grados se utilizan para medir los ángulos?
- b) ¿Existen ángulos de una vuelta más grandes que otros?
- c) ¿El grado sexagesimal es mayor en las circunferencias de mayor radio?
- d) Explica un ejemplo o situación de la cotidianidad en la que utilices un ángulo.

El diagnóstico se hace por escrito y de forma individual, se proponen preguntas que indagan sobre el concepto de ángulo, esta fase es de gran importancia porque permite identificar las concepciones que ellos poseen sobre este objeto de estudio. En ellos aún no existe la idea de sistema sexagesimal y en la mayoría de los casos confunden el grado sexagesimal con el grado centígrado precisamente porque el aprendizaje sobre ángulos es muy superficial y limitado. La pregunta sobre el tamaño de los ángulos también es muy importante porque indaga sobre el concepto y en un buen número de casos afirman que existen ángulos de una vuelta más grandes que otros. Con las preguntas, se busca indagar sobre la naturaleza de los ángulos, en general, los estudiantes reconocen ángulos en situaciones estáticas. Sin embargo, se espera que los estudiantes perciban los ángulos en situaciones de movimiento. De igual manera, se espera que ellos identifiquen los elementos que son invariantes del concepto tales como, vértice, lados, abertura y posiblemente el sentido.

La discusión previa, permite dar paso a la actividad de Recurriendo a la Historia, que se muestra en la Figura 14. Para esta actividad, se seleccionaron documentos escritos que revelan desde la historia el poder del razonamiento y la conexión de la trigonometría con propiedades del cerebro

humano. Es de resaltar que siendo la abstracción el objeto de estudio de la matemática, entonces cobran gran valor estas dos situaciones puesto que en ambas se muestra la abstracción como elemento esencial en la maduración del concepto.

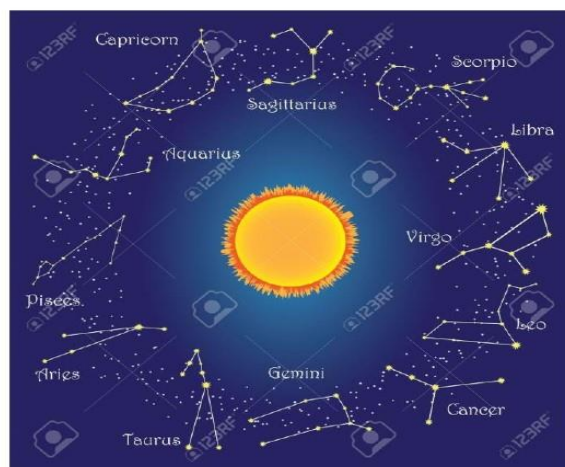
Las lecturas que se proponen tienen como objetivo dar claridad y suficiente información al estudiante para que él advierta sobre el origen del sistema sexagesimal y su relación con la medición del tiempo, tal como se muestra en **Figura 14**. El desarrollo de la actividad, espera enfatizar en el concepto de ángulo desde un enfoque dinámico y desde su epistemología, para que el estudiante comprenda que el ángulo surge como patrón de medida de distancias entre cuerpos celestes.

También es propósito de ésta actividad contribuir a la comprensión del origen del sistema sexagesimal identificando la conexión entre el calendario lunar y la división del ángulo de una vuelta en 360 partes. Al establecer la relación entre la medición del tiempo con el concepto de ángulo entonces es posible que el estudiante diferencie el grado sexagesimal como unidad de medida de ángulos y la hora como unidad de medida de tiempo; diferencia que siempre se les dificulta comprender a causa del desconocimiento de la epistemología del concepto.

Recurriendo a la Historia¹: “Ángulos”

ACTIVIDAD I ¿DE DÓNDE PROVIENE EL SISTEMA SEXAGESIMAL?

Para la mente humana fue una gran conquista percatarse de que había una correspondencia entre la posición del sol en la faja zodiacal y los cambios de las estaciones, conocidos por razones prácticas desde tiempo antes. Otro gran descubrimiento fue del retorno periódico del sol a cada una de las constelaciones, es decir, su ciclo anual. Por su duración, este ciclo fue mucho más difícil de descubrir que el recorrido diario del sol o la sucesión de las fases lunares. Por eso, los primeros datos de que se sirvió el hombre para medir el tiempo fueron el día y el mes. El mes corresponde a una lunación. Es obvio que contar cuantos amaneceres pasan entre una aparición de la luna nueva y la siguiente es un cálculo relativamente fácil y seguramente muy antiguo. Mucho más complejo es investigar la relación entre el período lunar y el ciclo anual del sol. Por lo tanto los más antiguos calendarios fueron lunares. Desde lo más alto de sus templos, sirviéndose de ellos como observatorios, los magos sacerdotes caldeos (sumerios) calcularon primero que el sol surgía cerca de treinta veces entre la aparición de una luna nueva y la repetición de esa situación (mes). Además observaron que después de doce lunaciones el sol se encontraba en el cielo en correspondencia con una misma constelación, y por lo tanto calcularon que el período que nosotros llamamos año tenía 360 días (30×12). La actual división de la circunferencia en 360° se deriva de la representación que los sabios hicieron del recorrido circular del sol por la faja zodiacal, dividido en 360 trechos pequeños que corresponden a los días. Los babilonios se percataron de que doce lunaciones no correspondían exactamente al ciclo anual del sol, que era más largo, y lo corrigieron agregando de vez en vez un mes más.



De acuerdo con la lectura anterior

- a) ¿Existe alguna relación entre el día y el ángulo de un grado? ¿De dónde proviene la idea de dividir la circunferencia en 360 grados?
- b) ¿Qué relación matemática se cumple entre el ángulo de un grado y el ángulo de una vuelta?
- c) ¿Puede afirmarse que el grado es la fracción resultante de comparar por cociente las medidas de dos arcos de circunferencia?

Figura 14 Recurriendo a la historia-primera parte Taller dos

Se espera que con estas actividades, enunciadas en las Figura 14, los estudiantes formen las primeras nociones del concepto ángulo, consoliden el 360 como medida del ángulo de una vuelta y comprendan la naturaleza de la base 60 (sexagesimal). Es importante señalar que esas preguntas intentan aproximar al estudiante a la idea de ángulo como cociente entre dos magnitudes lineales, puesto que su medida se define como la comparación de dos arcos, es decir, se comparan dos arcos

subtendidos por dos ángulos centrales, por ejemplo, para el ángulo de un grado se compara el arco subtendido por dicho ángulo con respecto al arco subtendido por el ángulo de una vuelta completa.

Con las actividades sugeridas en la **Figura 15**, se espera que el estudiante además de identificar la naturaleza del grado sexagesimal como una razón que compara un arco de $1/360$ de una vuelta

El problema a determinar es por qué los sumerios, que partían de un año de 360 días y un círculo de 360 grados, dividieron los días en 12 horas dobles (24), la hora en 60 minutos, y muy posteriormente, el minuto en 60 segundos. Esta respuesta nos obliga a remontarnos a una época sin escritura, en la que se contaba con los dedos, de la que surgen no sólo los sistemas decimales, sino los de base duodecimal (base 12) y los de base sexagesimal (base 60). Si extendemos la palma de la mano derecha y contamos con el dedo pulgar cada una de las tres falanges de los dedos meñique anular corazón e índice, al acabar la cuenta tendremos 12 unidades, en lugar de las cinco obtenidas de contar exclusivamente los dedos.

Si a cada 12 unidades asignamos un dedo de la mano izquierda, habremos obtenido 60 unidades al acabar la cuenta, con lo cual únicamente con 10 dedos, tenemos la posibilidad de designar hasta 60 objetos, con sólo señalar los dedos correspondientes de la mano izquierda, y la falange determinada de un dedo de la mano derecha. La base duodecimal y la sexagesimal quedan establecidas. Los sumerios se encontraron con un mes de 30 días y 12 meses en cada año de 360 días. Obviamente, el círculo de 360 grados lo dividieron en 12 sectores de 30 grados cada uno (signos del Zodiaco), pues la posición de los astros era parte de su mística y sistema de medir el tiempo. Entendemos gracias a su sistema duodecimal que dividieran el día en 12 horas, y posteriormente, en 24 (12 para el día y doce para la noche). Cuando hubo que subdividir la hora o el grado, el sistema sexagesimal (mano izquierda completa) prestó su apoyo. Por lo que se estableció en 60 minutos, desde el año 2000 a. de C. gracias a la existencia de los relojes de arena y de agua. El sistema sexagesimal se usa para medir el tiempo (horas, minutos y segundos) y ángulos (grados, minutos y segundos), en dicho sistema 60 unidades de un orden forman una unidad de un orden superior. El número 60 tiene la ventaja de tener muchos divisores (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 y 60), con lo que se facilita el cálculo con fracciones, además que el 60 es el número más pequeño que es divisible por 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

De acuerdo con la lectura anterior

- ¿Cómo expresaría el número 45 utilizando las dos manos?
- ¿Qué relación existe entre la medición del tiempo y la noción de ángulo?
- Consideras que el origen del concepto de ángulo se corresponde con una percepción estática o dinámica del mundo. Justifica tú respuesta.

El grado sexagesimal es la medida del ángulo que equivale a un trescientos sesentavo del ángulo de una vuelta completa, es decir, es la razón geométrica que resulta de comparar un arco con respecto a los 360 arcos posibles en la circunferencia, significa que el grado sexagesimal es el resultado de comparar dos medidas lineales.

1 de 360

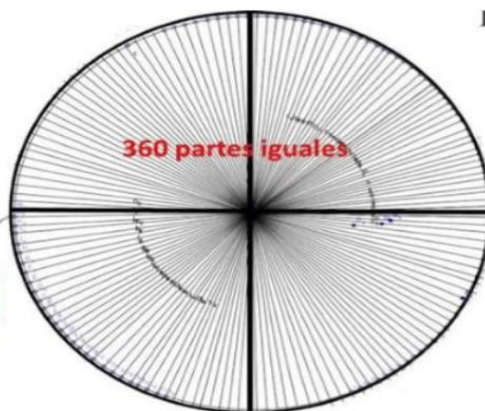


Figura 15 Recurriendo a la Historia Parte dos Taller dos

completa con respecto al arco de vuelta completa, también conozca sobre el origen del sistema sexagesimal, comprendiendo que surge del contexto y de la anatomía del ser humano.

Se sugieren ver dos videos “Ángulo Babilónico” e “Historia del sistema sexagesimal” que se proponen para ilustrar sobre el origen del sistema de medición sexagesimal como resultado de la tendencia natural de un pueblo por medir el tiempo a partir de la observación permanente del comportamiento de los astros del firmamento, ya que ellos encontraron relaciones entre las posiciones de los cuerpos celestes y las manifestaciones de la naturaleza. Lo anterior condujo a dar gran importancia a la contemplación y por lo tanto al registro sistemático de sus observaciones. Finalmente se propone indagar sobre la explicación del 60 como base del sistema sexagesimal y para ello se suministran 2 videos “Dedos y el sistema sexagesimal”, “Ángulo Central” y una lectura que orienta la temática de estudio, se espera que el estudiante entienda la relación del sistema sexagesimal con la composición de nuestras manos y que pueda expresar un número de base decimal en base sexagesimal.

Posteriormente, se presenta la sección “Haciendo en Contexto” y en ella varias actividades la primera es sobre el paralaje, ésta actividad junto con su respectivo video buscan estimular la abstracción del estudiante de tal manera que él advierta la presencia del ángulo como modelo geométrico. Se quiere, que además el estudiante explique ¿por qué? el aparente movimiento del dedo al intercambiar el ojo de visión para el objeto. Es muy improbable que ellos identifiquen de entrada al ángulo como elemento esencial del fenómeno. En esta sección surge la historia de la matemática como uso desde la visión de Guacaneme (2016), puesto que se hace mención del concepto paralaje estelar como elemento de información y así la historia de la matemática es llevada al aula como parte del desarrollo de la clase y de acuerdo con Maza (1994), se hace la

introducción histórica al ángulo permitiendo así la elaboración conceptual enriquecida y clarificada.

Sin embargo, proponemos una segunda actividad para acercar un poco más al concepto, ésta actividad del pitillo también es de mi autoría, con ella se intenta establecer la conexión que existe entre la trigonometría y la cotidianidad. Aquí se espera que fluya un primer modelo geométrico que represente la noción de ángulo que ha interiorizado cada estudiante. La distancia nuevamente se convierte en un factor clave del experimento, el objeto observado permanece fijo y el punto de mira se mueve en línea recta hacia adelante o hacia atrás con respecto al objeto fijo, una vez más el modelo geométrico del concepto ángulo se concretiza desde la idea de movimiento, es decir, aparece otra vez el carácter dinámico del concepto ángulo.

Si revisamos las fuentes históricas encontramos que los antepasados hacen la abstracción del concepto ángulo principalmente a partir de actividades como la observación del cielo, los rituales en círculo, la agrimensura y la construcción de edificios o monumentos. De esta forma la historia y la epistemología de la matemática permean la enseñanza Guacaneme (2016) fungiendo como criterio orientador de la estructura de la actividad.

Las actividades de la paralaje y la del pitillo hacen uso de situaciones reales y cotidianas que pretenden inducir al concepto, es de resaltar que las dos actividades apuntan a su concepción dinámica como suponemos que se originó.

En la actividad “Nariz Respingada” **Figura 16**, se espera que el estudiante comprenda que el valor del ángulo no se altera a pesar de la reducción de la imagen.

ACTIVIDAD IV: NARIZ RESPINGADA

¿Consideras qué en la siguiente imagen, el ángulo de la nariz del hombre, cambia su medida al disminuir el tamaño de la imagen? Justifica tú respuesta.

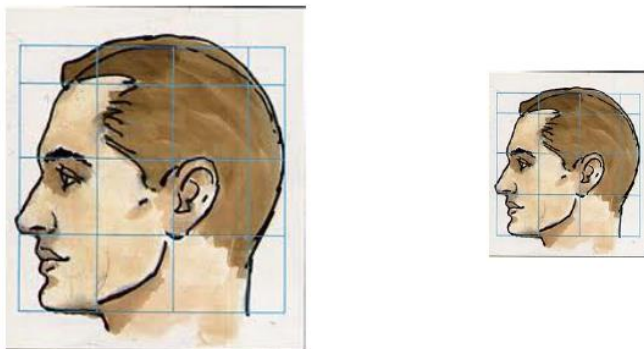


Figura 16 Nariz Respingada Haciendo en Contexto Taller dos

En la actividad del “Mejor ángulo” (**Figura 17**), también se explora la comprensión del concepto de tal manera que el estudiante identifique en cuál de los dos casos existe un mejor ángulo de visión que significa una mayor abertura.

ACTIVIDAD V: MEJOR ÁNGULO

En un partido de fútbol, al cobrar una falta fuera del área se ejecuta un tiro libre directo a la portería, ¿En cuál de los siguientes dos casos se tiene un mejor ángulo de tiro, desde el punto D o desde el punto E? Justifica tú respuesta.

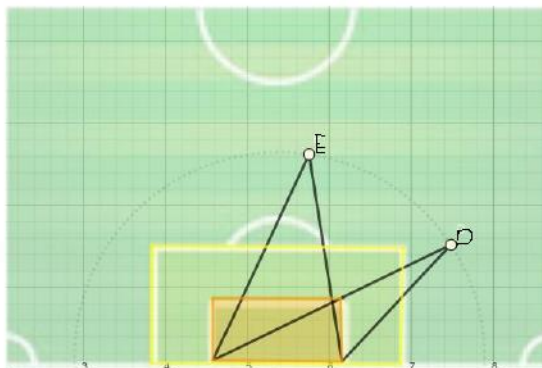


Figura 17 Mejor ángulo Haciendo en contexto Taller dos

Para la actividad VI de Desarrollo Conceptual se muestran 4 definiciones de ángulo y se pide al estudiante que él formule su propia definición junto con una representación gráfica del concepto.

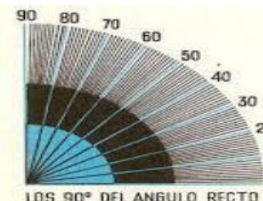
Con el desarrollo de los ítems desde el a) hasta el e) de la Actividad VII de desarrollo conceptual (**Figura 18**) se espera estimular el nivel de comprensión de las unidades básicas de medición de ángulos en el sistema sexagesimal. Además, que el estudiante identifique la equivalencia entre las distintas unidades de medición, y que comprenda que el transportador es un instrumento que muestra la amplificación de un ángulo de una vuelta completa en 360 unidades menores (grados sexagesimales).

SISTEMAS DE MEDICION DE ÁNGULOS.

Para medir la amplitud de los ángulos existen varios sistemas, pero el más usado es el sistema sexagesimal.

ACTIVIDAD VII

SISTEMA SEXAGESIMAL. En este sistema, el ángulo de una vuelta se divide en 360 partes iguales, cada una de las cuales se llama ángulo de un grado, es decir, un grado es $1/360$ parte de un ángulo de una vuelta y es además la unidad de medida de este sistema, es decir, un ángulo de 1° sexagesimal es $1/90$ parte de un ángulo recto. Significa que el arco que corresponde a un ángulo de 1° es $1/360$ del arco que corresponde a un ángulo de una vuelta completa o que el arco que corresponde a un ángulo de 1° es $1/90$ del arco que corresponde a un ángulo recto. En este caso los primitivos determinaron la medida de los ángulos utilizando comparación de arcos de circunferencia. El grado se divide en 60 partes iguales llamadas cada una un ángulo de un minuto sexagesimal $1'$, $1^\circ = 60'$ y éste a su vez se divide en 60 partes iguales $1' = 60''$, cada una de las cuales se llama ángulo de un segundo sexagesimal $1''$.




- a) ¿Cómo se llama cada una de las 60 partes en las que puede dividirse un grado sexagesimal?
- b) ¿Cómo se llama cada una de las 60 partes en las que puede dividirse un minuto sexagesimal?
- c) ¿Cuántos segundos sexagesimales hay en un grado sexagesimal?
- d) ¿Cómo explica usted el hecho de que los babilónicos hayan dividido un grado sexagesimal en 3600 partes? Tome como referencia un transportador para dimensionar la grandeza de este logro babilonio.
- e) El transportador es un instrumento que amplifica la medida del ángulo de una vuelta ¿Por qué?

Si los babilonios definieron la medida del ángulo recto como la cuarta parte del ángulo de una vuelta y el ángulo de un grado como $1/360$ del ángulo de una vuelta completa, entonces, podemos afirmar que:

- i. El grado sexagesimal es una razón geométrica ¿Por qué?
- ii. El ángulo es un objeto adimensional ¿Por qué?

Figura 18 Actividad VII Desarrollo Conceptual Taller dos

Uno de los aspectos de mayor dificultad por parte de los estudiantes, lo cual afirmo desde mi experiencia es que puedan entender que cada una de las 360 partes se pueden amplificar en 3600 partes menores, de tal manera que el ángulo de una vuelta completa podría amplificarse a 1'296.000 partes (segundos sexagesimales), considero que el desarrollo de esta actividad puede ayudar a superar esa dificultad.

En la actividad VIII de “Matematicomanía” se plantean 3 situaciones: Con la primera situación, que se muestra en la **Figura 19**, se espera apreciar la habilidad del estudiante para hacer operaciones aritméticas entre medidas de ángulos dados en grados sexagesimales y en la conversión de grados a grados ($^{\circ}$), minutos ($'$) y segundos ($''$).

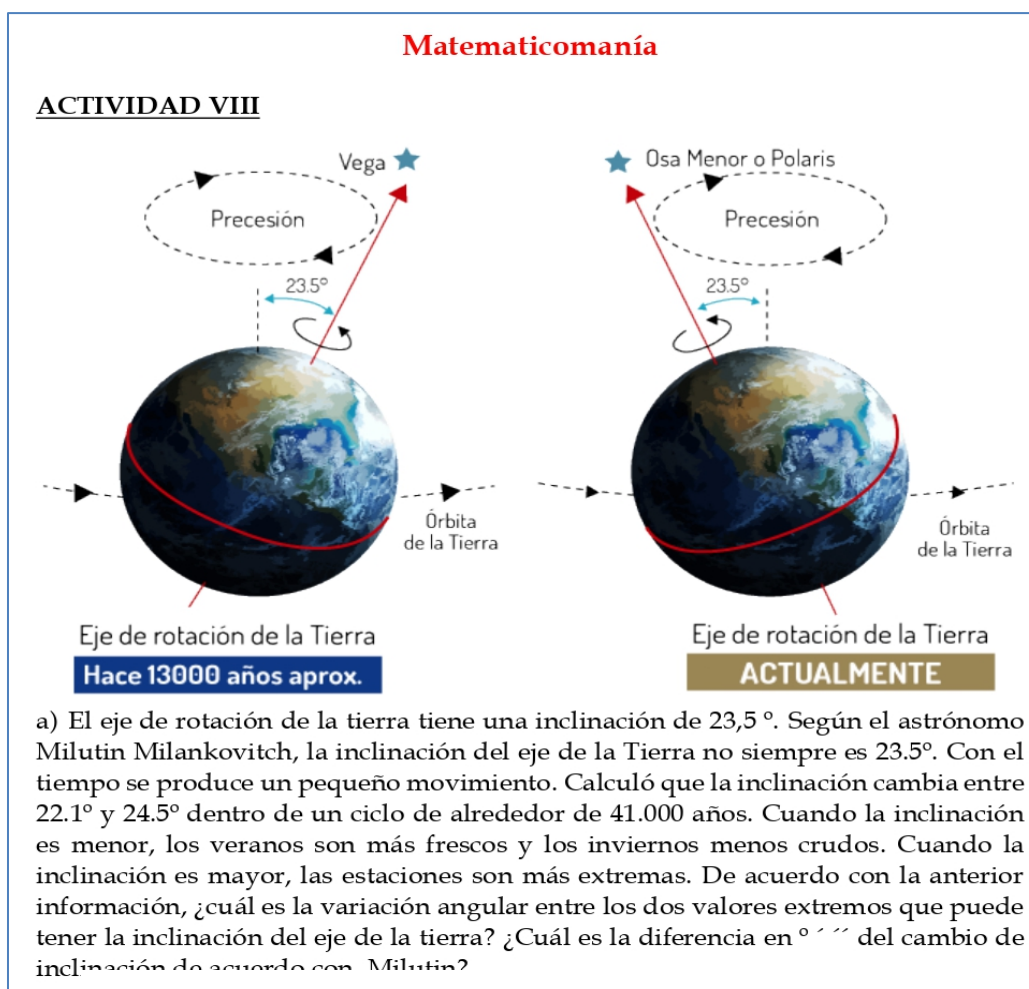


Figura 19 Primera actividad Matematicomanía Taller dos

Con el desarrollo de la situación que se propone en la **Figura 20**, también se quiere favorecer el desarrollo de habilidades aritméticas para entre las medidas de los ángulos, dados en grados sexagesimales y en la conversión de grados a grados ($^{\circ}$), minutos ($'$) y segundos ($''$). Además, se esperaba que logaran razonar y determinar el diámetro angular medio del sol.

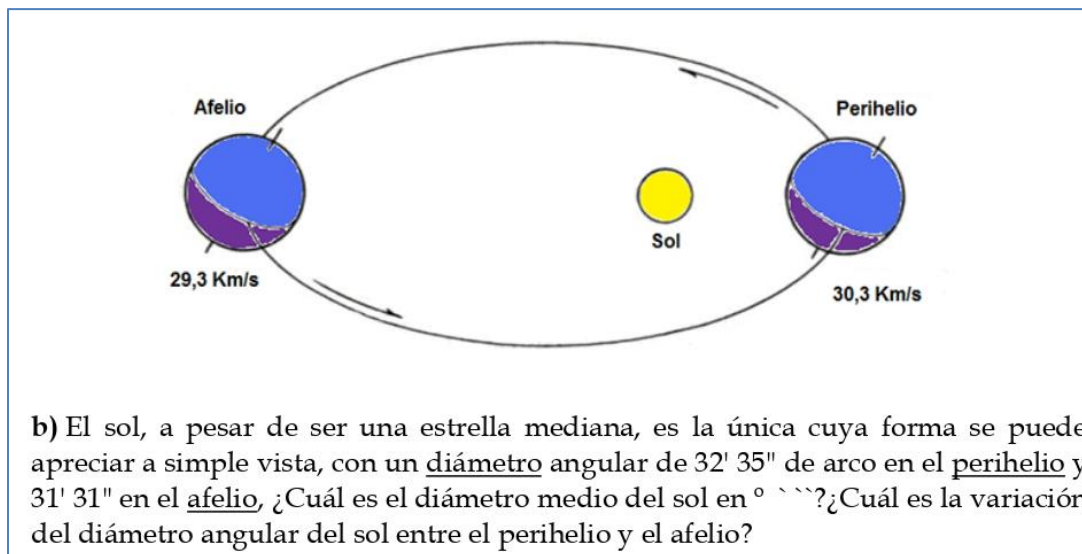


Figura 20 Segunda actividad Matematicomanía Taller dos

En la tercera situación, que se muestra en la **Figura 21**, se aprovecha nuevamente el episodio de Eratóstenes y se propone al estudiante construir una gráfica a escala en la cual represente la vara (1 metro de longitud) y el ángulo de inclinación del sol que calculó Eratóstenes en Alejandría en el solsticio de verano, se espera que el estudiante establezca la longitud de la sombra y así muestre habilidades para la medición de ángulos y para la construcción de modelos a escala. De igual manera se propone consultar en internet por las longitudes geográficas actuales de las dos ciudades para establecer la diferencia y luego comparar este resultado con el valor del ángulo obtenido por Eratóstenes, se presume que el estudiante logrará encontrar los valores esperados y así formule alguna conclusión acerca de la importancia del trabajo de Eratóstenes.

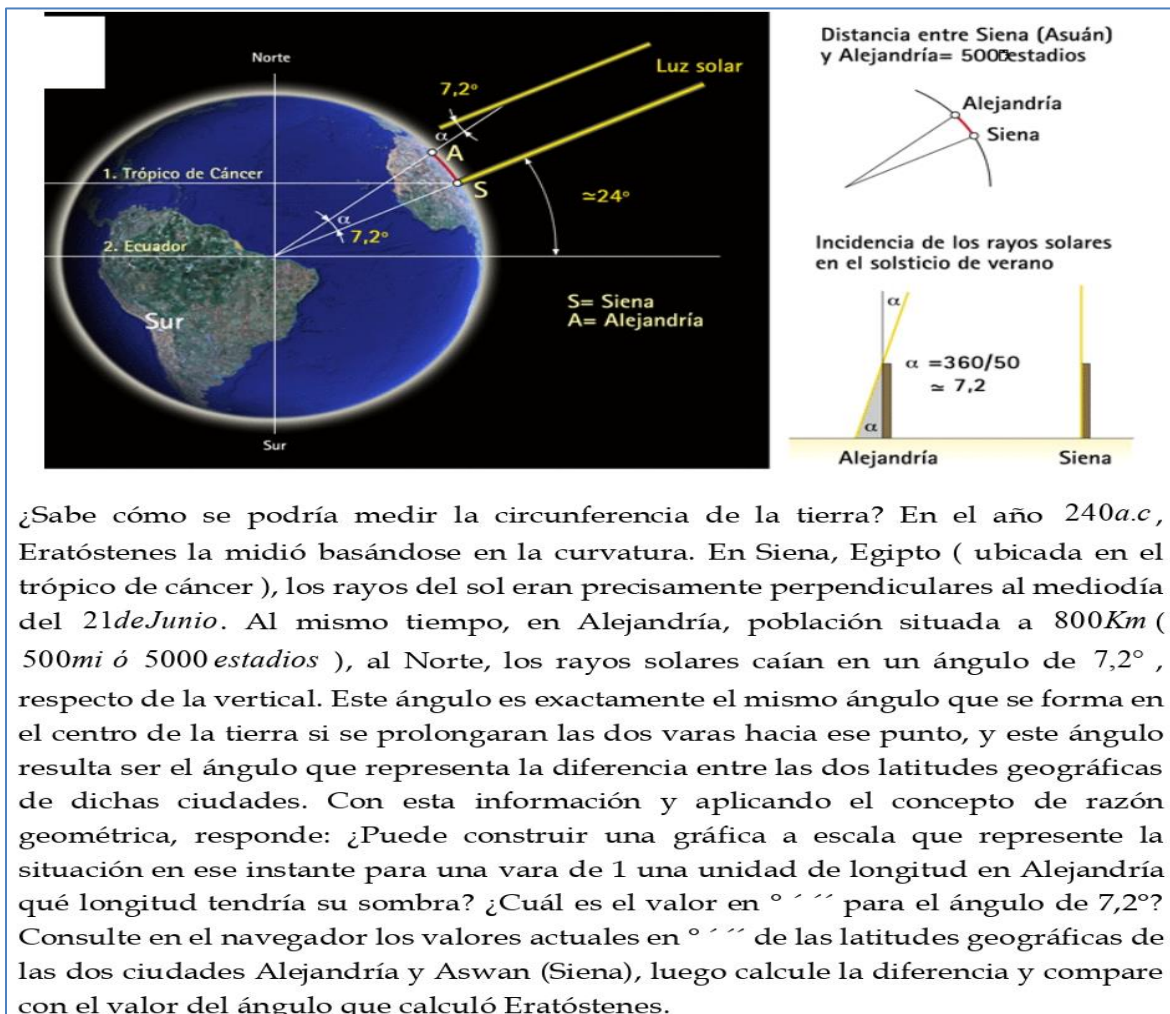


Figura 21 Tercera actividad Matematicomanía Taller dos

Finalmente, en la actividad IX de “¿Qué aprendimos? se formulan las siguientes tareas:

- Con la primera pregunta: “El ángulo de elevación del sol a cierta hora es de 70°. Un astabandera proyecta sobre el piso una sombra que mide 5m de longitud. Encontrar la altura del astabandera”. Ante esta indicación, se esperaba que el estudiante hiciera uso de la medición de ángulos y construya una gráfica a escala para encontrar el valor aproximado de la altura del astabandera.

- Ante la pregunta: “De acuerdo con las equivalencias que establecieron los babilonios para los grados, minutos y segundos sexagesimales entonces ¿En cuántas partes en total pudieron ellos amplificar el ángulo de una vuelta completa?”, lo esperado por parte del estudiante es que identificaran la amplificación que hicieron los babilonios al grado sexagesimal en minutos y segundos sexagesimales y que formule la equivalencia o relación cuantitativa entre unos y otros.
- Con la tercera pregunta: ¿Hacemos uso permanente y a diario de ángulos menores de un grado sin percibirlo? ¿Por qué?, se espera que el estudiante identifique y explique situaciones de la cotidianidad en las cuales se hace uso de ángulos menores de un grado sexagesimal.
- Ante el inciso: Explique por escrito la importancia que usted reconoce al uso del recurso histórico para comprender el concepto de ángulo, de sistema sexagesimal y para entender la relación con la medición del tiempo y con la medición de distancias en el universo, se espera que el estudiante identifique algunas fortalezas que surgen de la aproximación histórica al concepto de ángulo y que se reflejen en su aprendizaje de una manera integral.

Al finalizar el taller, se presenta el apartado “**para profundizar**”, en el que se dan unas ligas a textos, videos, blogs, páginas web donde se encuentra información para profundizar.

4.2.2 Caracterización de aprendizajes

A continuación, presento la caracterización por categoría y para este taller escogí el caso de José Alejandro porque sus aportes me permitieron identificar elementos significativos para el análisis.

a. Saber-Saber

Para el análisis de esta competencia, tomé como referencia una pregunta que se desprende de la Actividad I de Recurriendo a la Historia y que pretende identificar el nivel de elaboración alcanzado con respecto al concepto de ángulo y de grado sexagesimal

¿Cuándo usted mide un ángulo con el trasportador qué es lo que usted recorre sobre el trasportador? Por ejemplo, cuando usted mide un ángulo de 15° ¿qué es lo que usted recorre sobre el trasportador para medir los 15° ? ¿Qué relación matemática se cumple entre el ángulo de un grado y el ángulo de una vuelta? ¿El grado sexagesimal es una razón geométrica? ¿Por qué? ¿Puede afirmarse que el grado es la fracción resultante de comparar por cociente las medidas de dos arcos de circunferencia?

En el caso de José Alejandro, como se observa en la **Figura 22** su respuesta muy ajustada al concepto de ángulo, se puede evidenciar que él identifica la medición del ángulo en un trasportador con el recorrido de un arco, así mismo se puede reconocer que él comprende el concepto de grado sexagesimal puesto que identifica la razón geométrica que lo define, en correspondencia con el origen que tuvo el concepto en Babilonia.

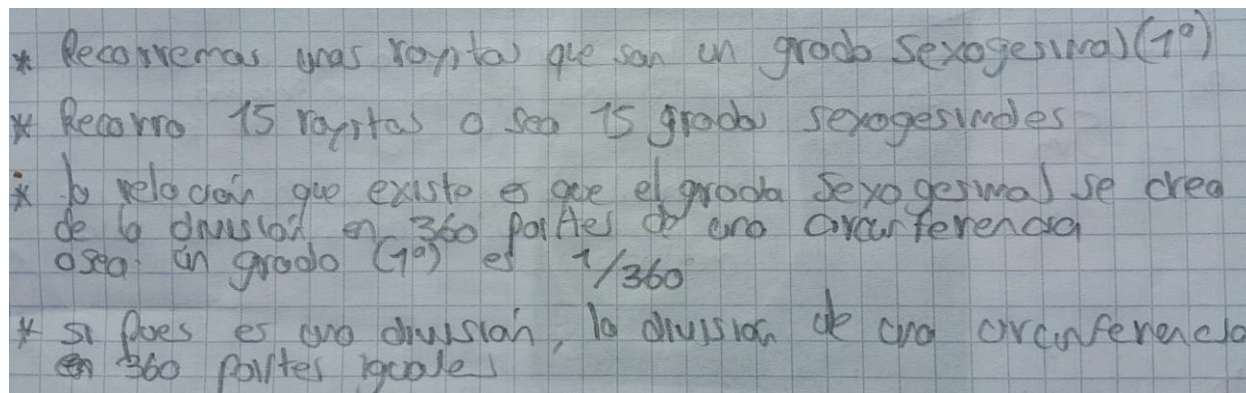


Figura 22 ¿Qué aprendimos? Saber-Saber Caso José Alejandro Taller dos

Tomando como referente el indicador de logro del saber-saber en el Taller dos, podemos valorar qué alcances ha obtenido José Alejandro con respecto a este descriptor en dicha categoría de

aprendizaje: Comprende que el grado sexagesimal es una razón geométrica que resulta de la comparación por cociente entre dos magnitudes lineales.

Con respecto a éste indicador identifique un buen nivel de elaboración conceptual puesto que él dio explicación de por qué el grado sexagesimal es una razón geométrica, el recurso histórico cumple una vez más su función integradora Guacaneme (2016), porque permitió la comprensión del concepto, sin embargo, con respecto al grado sexagesimal como resultado de la comparación por cociente de dos arcos la respuesta no es evidente, encuentro aquí que quizá la orientación que di en esta parte del proceso tuvo alguna relación con la insuficiencia de argumentos de José Alejandro para responder esta parte de la pregunta.

b. Saber-Hacer

Tomé como referencia las respuestas de José Alejandro (**Figura 23** y **Figura 24**) a la situación planteada en el ítem c) de la Actividad VIII de Matematicomanía, en éste problema se propone graficar a escala para que los estudiantes interpreten el problema y propongan una solución fundamentada desde el modelo geométrico, él representa la gráfica a escala (**Figura 23**).

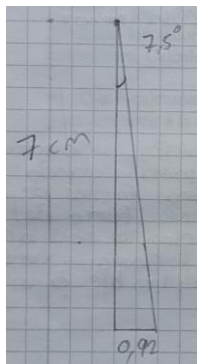
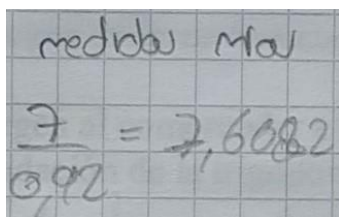


Figura 23 Esquema de José Alejandro Saber Hacer, actividad Matematicomania Taller dos

José Alejandro utiliza una medida de $7,5^\circ$ para el ángulo (**Figura 23**), él dice que por la dificultad de medir $7,2^\circ$ con el transportador, entonces tomó la mitad entre 7° y 8° , es decir, comprende el manejo del transportador. Para el objeto toma una medida de 7cm y él lo define como su unidad,

mide la longitud de la sombra y calcula la razón entre la altura del objeto y su sombra para el ángulo de $7,5^\circ$ como lo muestra la **Figura 24**

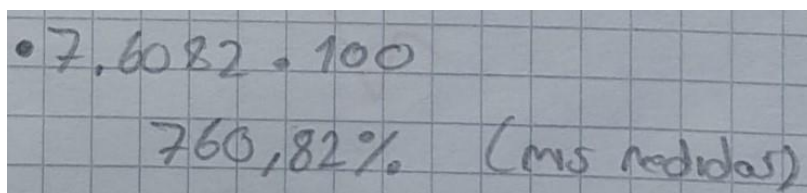


medida M10

$$\frac{7}{0,92} = 7,6082$$

Figura 24 Razón geométrica con la que José Alejandro resuelve situación de Matematicomanía

Finalmente interpreta el número en porcentaje, es decir, que la longitud del objeto equivale al 760.82% de la longitud de la sombra (**Figura 25**)



$$\bullet 7,6082 \cdot 100$$

$$760,82\% \quad (\text{mis medidas})$$

Figura 25 Matematicomanía Saber Hacer Caso José Alejandro Taller dos

Luego él, consulta en Internet sobre las latitudes geográficas de los dos lugares en mención y encuentra la diferencia entre ellas estableciendo una razón aritmética con el valor obtenido por Eratóstenes que fue de $7,2^\circ$, es decir, propone una diferencia entre el valor real y el valor calculado por Eratóstenes, él denomina diferencia entre las diferencias de latitudes (ver **Figura 26**).

Tomando como referente el indicador de logro del saber-hacer en el Taller dos, podemos valorar qué alcances ha obtenido Alejandro con respecto a este descriptor en dicha categoría de aprendizaje: Construye gráficas a escala de los modelos geométricos del contexto para calcular valores estimados de las medidas angulares y lineales en un triángulo rectángulo.

De este descriptor puedo asegurar que él alcanzó un nivel de elaboración esperado, puesto que todas sus construcciones muestran las gráficas a escala y dio respuesta a la pregunta sobre la longitud de la sombra en el episodio de Eratóstenes a partir de la construcción geométrica, en este

punto la historia cumple su función de uso, desde la perspectiva de Guacaneme (2016), porque se recrea un problema para desarrollar pensamiento matemático.

Unidad : 7 cm de varo

* Valor en ($^{\circ}$ ' ")

$$7,2^{\circ} \rightarrow 7^{\circ} + (0,2)(60) \rightarrow 7^{\circ} 12' 0''$$

* Alejandría = $31^{\circ} 12' 56,3''$

Siena = $24^{\circ} 5' 27''$

$$\begin{array}{r} 31^{\circ} 12' 56,3'' \\ - 24^{\circ} 5' 27'' \\ \hline 7^{\circ} 7' 29,3'' \end{array} \rightarrow \text{Angulo real de dif. de latitudes}$$

$$\begin{array}{r} 7^{\circ} 7' 29,3'' \\ - 7^{\circ} 12' 0'' \\ \hline -0^{\circ} 4' 30,7'' \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Angulo hallado por} \\ \text{Eratostenes} \end{array}$$

Diferencia entre las dos dif. de latitudes $\leftarrow -0^{\circ} 4' 30,7''$

Figura 26 Matematicomanía Saber Hacer Caso José Alejandro Taller dos

c. Saber_Ser

Tomé como referencia la pregunta planteada en el ítem d) en la sección ¿Qué aprendimos? del taller dos, tomé textualmente la respuesta que dio José Alejandro al inciso:

Explique por escrito la importancia que usted reconoce al uso del recurso histórico para comprender el concepto de ángulo, de sistema sexagesimal y para entender la relación con la medición del tiempo y con la medición de distancias en el universo.

José Alejandro responde como se muestra en la **Figura 27** que al estudiar el ángulo desde la Historia se hace más fácil verlo y aplicarlo y entendió más que el ángulo, el sistema sexagesimal en su relación con el tiempo y concluye que es más profundo y fuerte el aprendizaje.

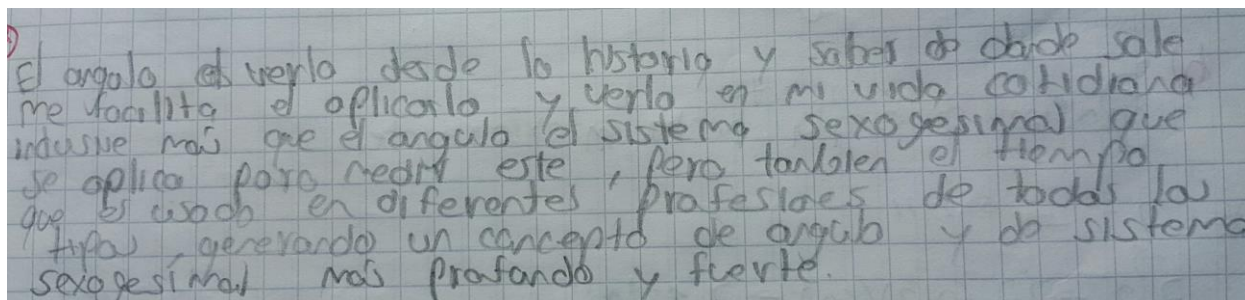


Figura 27 ¿Qué aprendimos? Saber-Ser Caso José Alejandro Taller dos

Tomando como referente el indicador de logro del saber-ser en el Taller dos, podemos valorar los alcances de José Alejandro con respecto a este descriptor en dicha categoría de aprendizaje: Muestra curiosidad por aprender sobre el concepto de ángulo al comprender su importancia en la medición del tiempo, en el cálculo de distancias y tamaños relativos entre los cuerpos celestes en las culturas antiguas y contemporáneas.

Este indicador se logró puesto que él manifiesta explícitamente en su respuesta sobre el valor que le dio al concepto ángulo estudiado desde un enfoque epistemológico, afirmando que con esa visión es posible comprender más profunda y claramente el concepto. De acuerdo con MEN (1998)

A su vez este análisis permite alcanzar un conocimiento más profundo de la matemática misma ya que en el proceso histórico los objetos matemáticos aparecen en su verdadera perspectiva. (p.30)

El MEN en su afán de acercarnos a una visión más humana de la matemática nos quiere hacer ver que si se garantiza una comprensión más profunda de los conceptos entonces se puede esperar de quién aprende mejores conductas y habilidades sociales como se da en el caso de José Alejandro.

1.144.3 ARISTARCO Y LA TLS

El tercer taller (ver APÉNDICE C) lo diseñé, para identificar nocionalmente la relación entre las medidas lineales y las medidas angulares en un triángulo rectángulo. Para estimular el pensamiento métrico, se plantea elaborar construcciones con la regla y el transportador. Lo anterior, con el fin de

resaltar los enfoques y métodos de solución de problemas que utilizaron los antiguos en el cálculo de distancias relativas en el espacio. Además, para estimular el uso de la tecnología se propone comparar los valores obtenidos manualmente con los valores dados por la máquina, para introducir la idea de margen de error que es muy apropiada porque establece la diferencia y la relación porcentual entre un dato estimado y un dato real. Esta actividad, tiene como propósito que los estudiantes reconozcan la importancia de los modelos matemáticos en la solución de problemas, para comprender el valor que tiene el pensamiento crítico en el desarrollo de la ciencia y para conocer el enfoque visionario de Aristarco al concebir un modelo heliocéntrico con sustento geométrico.

El aporte epistemológico de este taller es muy importante porque muestra con suficiente claridad la relación que existe entre las medidas angulares y las medidas lineales en un triángulo con un episodio de la historia, en este taller se comprende como Aristarco surge de alguna manera como precursor de la trigonometría y también permite identificar la sensibilidad que tiene la razón geométrica formada entre la distancia Tierra-Sol con respecto a la distancia Tierra_Luna y el ángulo agudo en la Tierra, es decir, mediante este taller se comprende que la geometría no garantiza soluciones ni explicaciones para cierto tipo de fenómenos de la realidad y por tanto justifica la importancia de la trigonometría.

4.3.1 Análisis a priori

En este apartado describiremos la actividad diseñada para el estudio del episodio de Aristarco y el cálculo de las distancias relativas entre la Tierra, la Luna y el Sol. Para dicha actividad se plantearon los siguientes **Indicadores de logro:**

- I. Establece la relación entre las medidas lineales y las medidas angulares en un triángulo rectángulo, a partir del análisis del episodio histórico de Aristarco y su medición de distancias en el universo.
- II. Aplica las herramientas conceptuales y procedimentales para cuantificar e interpretar los márgenes de error entre los valores lineales y angulares obtenidos por medición y los obtenidos por teorización matemática.
- III. Comprende la importancia de dar fundamento desde la modelación matemática a las hipótesis formuladas desde la observación del contexto como lo hicieron Tales, Aristarco y Eratóstenes.

Como se mencionó anteriormente, previamente a la clase se plantean a los estudiantes unas **Preguntas Orientadoras**, con el fin de que consulten y lleguen a la clase con algunas ideas que permitan introducirse al tema. Para esta sesión se plantearon las siguientes preguntas:

- a. ¿Quién fue Aristarco de Samos? ¿Cómo concebía Aristarco el modelo del universo?
- b. Aristarco tomó como referente las ideas de Anaxágoras, ¿puede explicar alguna de ellas?
- c. ¿Por qué las teorías sobre el modelo del universo de Aristarco no fueron aceptadas?
- d. ¿Cuáles son las fases de la Luna? ¿En cuánto tiempo aproximadamente se cumplen las cuatro fases de la Luna?
- e. Al medir el ángulo que formaban la Luna, la Tierra y el Sol en el cuarto creciente y tomando como vértice la tierra ¿Cuál fue el valor que obtuvo Aristarco en grados sexagesimales? ¿Cuál es el valor real del ángulo medido en la actualidad con tecnología láser?

Se espera que el estudiante comprenda que Aristarco es una figura importante en el desarrollo de la trigonometría y que él propuso un modelo heliocéntrico del universo porque encontró una relación de distancias y de tamaños entre la Tierra, la Luna y el Sol, el estudiante podría reconocer que este logro fue posible gracias al uso que Aristarco hizo de modelos geométricos y advertir que

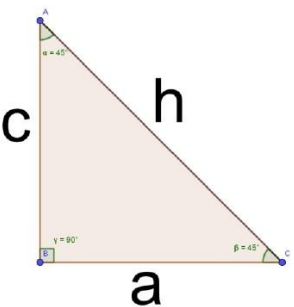
sus cálculos evidencian las primeras mediciones que relacionan los valores lineales y angulares en un triángulo rectángulo.

En la sección **¿Qué sabemos de.....?** Se plantean las siguientes preguntas (ver **Figura 28**)

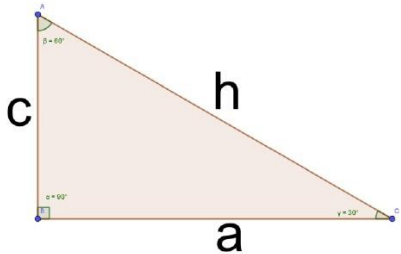
¿Qué sabemos de.....?

I. Triángulos rectángulos

a. En un triángulo rectángulo isósceles se sabe que los ángulos agudos son de 45° y los catetos son iguales, el ángulo recto está frente a la hipotenusa y cada ángulo agudo es opuesto a un cateto. Como el ángulo recto es el doble de 45° entonces, ¿se puede afirmar que la longitud de la hipotenusa es el doble de la longitud de un cateto?, es decir, en la gráfica ¿ $h = 2a$, √, $h = 2c$?



b. En un triángulo rectángulo con un ángulo de 30° y otro de 60° , ¿se puede afirmar que longitud del cateto opuesto al ángulo de 60° es el doble de la longitud del cateto opuesto al ángulo de 30° ?, es decir, en la gráfica ¿ $a = 2c$?



c. Construir un triángulo rectángulo con un ángulo agudo de 34° ¿Cuántas veces cabe el cateto menor en el cateto mayor de dicho triángulo? ¿Qué porcentaje de la longitud del cateto menor es longitud del cateto mayor?

d. Se sabe que en un triángulo rectángulo el cateto mayor es el 140% de la longitud del cateto menor. Construya 3 triángulos rectángulos de distinto tamaño que cumplan dicha condición. Mida los ángulos agudos en cada uno de ellos y saque conclusiones. ¿Cuántas veces cabe el cateto menor en el cateto mayor?

Figura 28 ¿Qué sabemos de? Diagnóstico Inicial Taller tres

En la primera situación se espera que el estudiante afirme que sí porque en algunos casos confunden la comparación de longitudes con la comparación de ángulos, es decir, por simple aritmética suman los dos ángulos agudos como si fueran catetos ó porque por el teorema de Pitágoras mal interpretado se cree que la hipotenusa es la suma de los catetos, en muy pocos casos advierten que la suma de los catetos supera la hipotenusa, sin embargo, aparecen argumentos

métricos o geométricos, en muy pocos casos aritméticos y casi nunca algebraicos. En la segunda situación ya se espera que aparezcan argumentos más coherentes y en sintonía con la pregunta planteada, aquí ya se podría advertir que él estudiante hace diferencia entre las medidas lineales y las medidas angulares y posiblemente adviertan alguna relación entre ellas, por ejemplo que a mayor ángulo corresponde mayor lado en un mismo triángulo. En la tercera situación se espera que el estudiante construya el triángulo rectángulo y que pueda dar un resultado que muestre la relación entre el cateto menor y el cateto mayor, ésta relación debería darse por cociente, sin embargo, si se da en porcentaje significaría que el estudiante ya advierte la razón geométrica como un porcentaje. En la cuarta situación se espera que el estudiante ya identifique la invarianza de la razón geométrica entre los lados y que su valor depende directamente de la medida del ángulo de referencia. Esta última discusión permite dar paso a **Recurriendo a la Historia** (ver Figura 29).

ACTIVIDAD I

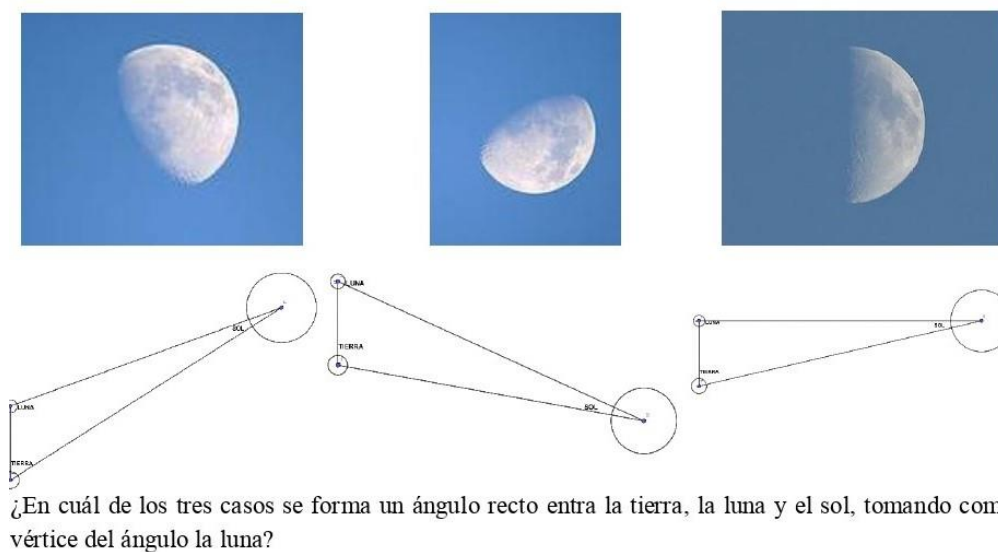


Figura 29 *Recurriendo a la Historia Taller tres*

Se espera que el estudiante reconozca el caso III para el triángulo rectángulo que forman la Tierra, la Luna y el Sol. En la siguiente **Figura 30** se presenta la segunda parte de la Actividad I.

- a. ¿Puede construir un modelo geométrico que represente el triángulo TLS que observó Aristarco?
- De acuerdo con su gráfica, Mida TL, mida TS y responda ¿Cuántas veces cabe la distancia TL en la distancia TS?, es decir, calcular la razón $\frac{\overline{TS}}{\overline{TL}}$
- b. Si sabemos que Aristarco midió el ángulo LTS y que su valor aproximado fue de 87° , ¿puede construir un gráfico a escala que se ajuste a dichas medidas angulares y lineales?
- De acuerdo con su gráfica a escala, Mida TL, mida TS y responda ¿Cuántas veces cabe la distancia TL en la distancia TS?, es decir, calcular la razón $\frac{\overline{TS}}{\overline{TL}}$, compare este valor con el valor obtenido en el paso anterior, son similares los resultados, ¿Por qué?
- c. ¿Qué interpretación puede dar a este resultado en el contexto de las ideas de Aristarco? De acuerdo con lo anterior, Aristarco pudo advertir que el tamaño del sol era mucho más grande que el tamaño de la Luna, ¿puede explicarlo detalladamente?
- d. De acuerdo con los resultados encontrados en la actividad anterior ¿se puede afirmar que en todo triángulo rectángulo con un ángulo agudo de 87° se cumple que la hipotenusa contiene aproximadamente 19 veces al cateto menor?

Figura 30 Preguntas sobre Recurriendo a la Historia Actividad I Taller tres

En el inciso a. se espera que el estudiante reproduzca el triángulo rectángulo Tierra-Luna-Sol, sin tener en cuenta aún los valores alcanzados por Aristarco. En el inciso b. se espera que el estudiante construya la gráfica obtenida por Aristarco después de medir el ángulo Luna-Tierra-Sol, es decir, con vértice en la Tierra y con una abertura de 87° , de esa manera identifique la razón geométrica entre la distancia Tierra-Sol con respecto a la distancia Tierra_Luna. En el inciso c. se espera que el estudiante explique sobre las conclusiones que dio Aristarco al reconocer la distancias relativas entre las distancias Tierra-Luna y Sol, por último en el inciso d. ya se espera que el estudiante identifique claramente la relación directa que existe entre el valor del ángulo de 87° y el número de veces que la hipotenusa contiene al cateto menor.

Posteriormente se presenta la sección “**Haciendo en Contexto**” como se ve en la **Figura 31**

Haciendo en Contexto**ACTIVIDAD II**

Resuelva la siguiente situación haciendo mediciones, comparando por cociente las longitudes y relacionando con el ángulo en mención. Explique detalladamente y por escrito.

- a) En un día soleado (temprano en la mañana a las 8:45 a.m. y protegidos del sol), en un espacio descubierto del colegio y por grupos de 5 estudiantes realizar la siguiente experiencia: Tomar 3 varas delgadas de distintas longitudes y mantenerlas en posición vertical (sujetas o clavadas en ángulo de 90°), simultáneamente (al mismo tiempo), medir las longitudes de sus respectivas sombras.
- b) Registrar los datos en un papel y luego construir a escala los objetos geométricos resultantes de esta experiencia. Con base en el dibujo a escala responder las siguientes preguntas.
 - i. Escriba la razón geométrica que establece el número de veces que la longitud del objeto contiene a la longitud de la sombra en cada uno de los 3 gráficos. ¿Cuántos metros del cateto mayor corresponden por cada metro del cateto menor?
 - ii. Medir en el dibujo a escala y con un transportador el ángulo de inclinación del sol en ese preciso instante en cada uno de los gráficos.
- c) Luego en el mismo sitio, con los mismos palos y a las 9 a.m., repetir la experiencia y registrar los datos nuevamente.
- d) Compare los resultados y responda ¿Son iguales ó son diferentes? ¿Puede explicar la razón por la cual son iguales o diferentes?
- e) ¿Qué debería esperarse que sucediera cerca al medio día? ¿Puede identificar cuál es el elemento geométrico esencial que afecta el valor de la razón geométrica en cualquier momento del día?

Figura 31 Haciendo en Contexto Actividad II Taller tres

Esta actividad tiene como objetivo que el estudiante identifique la relación que existe entre la razón geométrica que compara la longitud del objeto con respecto a la longitud de su sombra, es decir, cuántas veces ésta inserta la longitud de la sombra en la longitud del objeto, se espera que él reconozca que el valor de la razón geométrica está directamente relacionada con el valor del ángulo

de inclinación del sol, es decir, que él dé cuenta de la variación del valor de la razón geométrica en la medida que el sol cambia su ángulo de inclinación, en este punto, se espera que el estudiante formule un sinnúmero de preguntas relacionadas con el fenómeno y posiblemente que intenté darle solución.

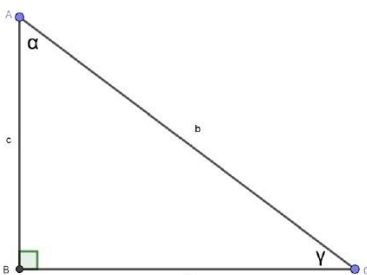
Para Desarrollo Conceptual (actividad III) como se muestra en la **Figura 32**, se propone primero, formular las 6 razones geométricas que se pueden definir al comparar dos cualesquiera de los tres lados de un triángulo rectángulo pero con referencia a uno de los dos ángulos agudos del triángulo.

Desarrollo Conceptual

ACTIVIDAD III

a) ¿Cómo se definirían las 6 razones geométricas para el mismo triángulo utilizando la descripción de los catetos en función del ángulo γ ?

b) Construya 5 triángulos rectángulos diferentes ABC similares al triángulo de la figura, para los siguientes valores del ángulo $\alpha = 12^\circ, 30^\circ, 48^\circ, 66^\circ$ y 84° , en todos los 5 ejemplos, tome el mismo valor de 10 cm para el cateto opuesto al ángulo α .



i. En cada uno de los 5 casos, mida los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

ii. En cada uno de los 5 casos, calcular las razones geométricas

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente } \alpha}$$

iii. Comparar los resultados ¿son iguales ó distintos los valores? ¿Por qué?

iv. ¿En cuál de los 5 casos se hace más grande el valor de la razón geométrica $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$?

v. ¿Qué puede observar? ¿Existe alguna relación entre el valor del ángulo α y los resultados obtenidos? Explique detalladamente su planteamiento.

vi. ¿Podemos afirmar que el valor de la razón geométrica tiene relación directa con el valor del ángulo α ? Explique detalladamente su planteamiento.

Figura 32 Desarrollo Conceptual definición de razones geométricas en el triángulo Taller tres

En este punto se espera que el estudiante entienda la condición de referenciar el ángulo y así definir el enunciado para cada uno de los catetos. En la segunda parte de la actividad se propone inicialmente un ejercicio de construcción para ejercitar la medición de ángulos con transportador y la medición de segmentos con regla, en segundo lugar se pide calcular el valor de la razón geométrica que representa el número de veces que la hipotenusa contiene al cateto adyacente al ángulo α . Después de hacerlo para los 5 triángulos rectángulos construidos se espera que el estudiante formule alguna conclusión al respecto de los valores encontrados y de esa manera infiera que el valor de la razón está íntimamente ligado al valor del ángulo de referencia.

En la actividad IV de “Matematicomanía” se plantean 3 situaciones: En la primera como se puede ver en la **Figura 33** se espera apreciar la habilidad del estudiante para utilizar el geogebra y calcular el valor del ángulo de inclinación del sol, dado que antes ha calculado la razón geométrica que se da entre la longitud del objeto y su sombra.

Matematicomanía

ACTIVIDAD IV

a) De acuerdo con la siguiente imagen y haciendo uso de las herramientas y utilidades del geogebra, mida las longitudes de los palos y sus respectivas sombras, en los dos casos, calcule el número de veces que cabe la sombra en la longitud del palo y mida con el geogebra el ángulo de inclinación del sol en ese preciso instante. Compare los dos resultados y exprese sus conclusiones.

Tenga en cuenta que existe margen de error en varios aspectos, en la orientación de los palos, posiblemente no estén estrictamente paralelos, además, al hacer mediciones con el geogebra de una imagen que muestra un escenario en 3D, procure que los tres puntos de referencia para cada uno de los dos casos estén sobre el mismo plano.



Figura 33 Matematicomanía Taller tres

En la segunda parte (ver **Figura 34**) se propone un ejercicio de extrapolación del objeto de estudio al episodio conocido de Eratóstenes, puesto que se pide que calcule el número de veces que ésta inserta la longitud de la sombra en la longitud del objeto justo en el momento en que el ángulo del sol es de $7,2^\circ$. Se espera que el estudiante interprete la situación y que además de construir una gráfica a escala exprese la razón geométrica que relaciona la longitud del objeto con el tamaño de su sombra en ese preciso instante y así mismo exprese esa relación utilizando el porcentaje. Finalmente que calcule el margen de error que obtuvo Eratóstenes en la medición del ángulo de inclinación del sol, que a la postre es el mismo ángulo que determina la diferencia de latitudes entre las dos ciudades afortunadamente para Eratóstenes, porque dichas ciudades se encuentran sobre el mismo meridiano terrestre.

Matematicomanía

ACTIVIDAD IV

b) ¿Sabe cómo se podría medir la circunferencia de la tierra? En el año 240 a.c., Eratóstenes la midió basándose en la curvatura. En Siena, Egipto (ubicada en el trópico de cáncer), los rayos del sol eran precisamente perpendiculares al mediodía del 21 de Junio. Al mismo tiempo, en Alejandría, población situada a 800 Km (500 mi ó 5000 estadios), al Norte, los rayos solares caían en un ángulo de $7,2^\circ$, respecto de la vertical. De acuerdo con Eratóstenes y teniendo en cuenta el ángulo de inclinación del sol en Alejandría el día del solsticio de verano ¿Cuántas veces cabe la longitud de la sombra en el tamaño del objeto en ese preciso instante? ¿Qué porcentaje de la longitud de la sombra es la altura del objeto? ¿Puede calcular el margen de error de la medición del ángulo que hizo Eratóstenes teniendo en cuenta los valores reales de las latitudes actuales de las dos ciudades?

Distancia entre Siena (Asuán) y Alejandría = 5000 estadios

Incidencia de los rayos solares en el solsticio de verano

$\alpha \approx 360/50 \approx 7,2$

Figura 34 Matematicomanía Cálculo del margen de error Taller tres

En la tercera parte como se muestra en la **Figura 35** se propone un ejercicio de aplicación del concepto para que el estudiante pueda decidir qué tipo de prueba de esquí es posible aplicar en un terreno con unas dimensiones lineales en relación con el ángulo de inclinación de la pista.

Matematicomanía

ACTIVIDAD IV

c) **LOS ÁNGULOS DEL ESQUÍ:** Las pruebas de esquí son de dos tipos: esquí nórdico y esquí alpino. El esquí nórdico se basa en la resistencia y la dureza, con pruebas de fondo, relevos, saltos de trampolín y biathlon. El esquí alpino se basa en la velocidad y la habilidad, con pruebas de descenso y slalom. El descenso se realiza en pistas con ángulos de inclinación entre 23° y 30° . El slalom se efectúa en pistas con un ángulo de inclinación mínimo de 30° y el recorrido está marcado con puertas o palos por donde ha de pasar el esquiador. Se quiere organizar una prueba de esquí alpino en una ladera de 900 m de longitud con un desnivel de 460 m. ¿Qué tipo de prueba es posible organizar en esas condiciones?

Figura 35 Matematicomanía Taller tres

Finalmente, en la actividad V de “¿Qué aprendimos?” se formulan 5 preguntas (ver **Figura 36**). En la primera se espera que identifique el valor del ángulo de inclinación del sol haciendo uso de la gráfica a escala y del transportador. En la segunda, una situación de contexto y se espera que el estudiante proponga la estrategia para hallar el ángulo de inclinación de la rampa haciendo uso de los conocimientos discutidos en clase. En la tercera se evalúa la comprensión de la relación entre la variación del ángulo y la variación de la razón geométrica entre los catetos del triángulo rectángulo, en la medida que cambia el ángulo de inclinación de la caminadora. En la cuarta pregunta se espera que el estudiante identifique la sensibilidad que tiene el valor de la razón geométrica que relaciona la hipotenusa con el cateto menor en un triángulo rectángulo con un ángulo mayor de 87° en la medida que aumenta dicho ángulo, es necesario un proceso muy detallado y meticuloso para que surja esta conclusión. En la última pregunta se espera que el estudiante reconozca el gran valor que tiene la aproximación histórica para comprender los conceptos de la trigonometría y para entender la importancia de la modelación matemática en la solución de problemas cotidianos.

¿Qué aprendimos?

ACTIVIDAD V

- a) ¿Qué generalización puede formular ud acerca de la relación que se cumple entre el cateto mayor y el cateto menor en cualquier triángulo rectángulo que contenga un ángulo agudo de 40° ?
- b) Diseñar un método para calcular el ángulo de inclinación de las rampas que conducen del tercer piso al cuarto piso en el Instituto Politécnico. De acuerdo con la Norma Técnica “para evitar tropezones y caídas durante una evacuación en caso de emergencia, la pendiente máxima permisible dentro de una edificación debería ser de $6,7\%$ ”. Establezca si las rampas del colegio satisfacen la norma técnica.
- c) En el gimnasio Fitness_People la máquina caminadora permite incrementar la pendiente de la banda móvil, un usuario de la máquina decide incrementar el valor de la pendiente de un 6% a un 10% , entonces, ¿podemos afirmar que el ángulo de inclinación de la banda aumento 4° ? En caso contrario, ¿puede usted calcular la variación del ángulo?
- d) Según Aristarco, la distancia de la tierra al sol es 19 veces la distancia de la tierra a la luna, sin embargo, en la realidad la relación es de aproximadamente 382 veces dado que el ángulo TLS calculado con tecnología láser es aproximadamente $89^\circ 57'$. Encuentre el margen de error en los cálculos de Aristarco y explique desde un fundamento geométrico las posibles causas por las cuales sus mediciones arrojaron valores tan desfasados de la realidad.
- e) Explique con sus propias palabras y por escrito ¿Qué importancia encuentra usted en dar fundamento desde la modelación matemática a la formulación de una hipótesis como lo hicieron Tales, Aristarco y Eratóstenes?

Figura 36 ¿Qué aprendimos? Taller tres

Al finalizar el taller, se presenta el apartado “**para profundizar**”, en el que se dan unas ligas a textos, videos, blogs, páginas web donde se encuentra información para profundizar.

4.3.2 Caracterización de aprendizajes

En este tercer taller sobre Aristarco y la TLS, se plantearon situaciones de contexto como la actividad de recrear el hecho histórico de Aristarco al utilizar el cuarto menguante o el cuarto creciente en las fases de la luna para abstraer un ángulo recto y por consiguiente un triángulo rectángulo Tierra- Luna –Sol. En este taller, se plantearon actividades de medición y de estimación de ángulos, se promovieron actividades de trabajo en equipo.

En el taller, se plantean situaciones de la cotidianidad haciendo, para que fueran analizadas con el apoyo de las tecnologías digitales. A través de ellas, se quería favorecer el proceso de razonamiento, identificando modelos matemáticos en hechos cotidianos.

Con las actividades propuestas, se quería favorecer un ambiente de discusión sobre la importancia que tiene la observación para la identificación de modelos matemáticos en la realidad

Desde la competencias del saber-ser, se plantea la reflexión sobre el pensamiento crítico de Aristarco, quién siempre fue rebelde en su forma de interpretar la realidad y que sostuvo sus planteamientos con argumentos científicos a pesar de que en esa época el desarrollo de la matemática y de la tecnología era incipiente. Con las reflexiones emergentes del proceso se quiere ilustrar sobre la sensibilidad que tiene una razón geométrica formada por los lados de un triángulo rectángulo al alterar mínimamente un ángulo agudo, este es un hecho que genera intriga y curiosidad en el estudiante El desarrollo de estos elementos puede estimular en el estudiante una actitud positiva para el aprendizaje y por tanto su transformación como persona.

A continuación, presento la caracterización por categoría y para este taller escogí el caso de Luis Manuel porque sus modelos geométricos y sus argumentos muestran riqueza y profundidad para el análisis.

a. Saber_Saber

El problema planteado en el ítem d) de la Actividad I de Recurriendo a la Historia, sobre Aristarco y la determinación de las distancias relativas entre la Luna, la Tierra y el Sol, tiene un gran valor epistemológico porque se dice que es el primer episodio de la historia en el que se establecen relaciones entre las medidas lineales y angulares en un triángulo rectángulo. Recordemos el problema: De acuerdo con los resultados encontrados en la actividad sobre Aristarco ¿se puede afirmar que en todo triángulo rectángulo con un ángulo agudo de 87° se cumple que la hipotenusa contiene aproximadamente 19 veces al cateto menor?

Luis Manuel, como se muestra en la **Figura 37**, evidencia que él comprende la condición que plantea la pregunta. Además, muestra una gráfica a escala y afirma que manualmente es muy complejo llegar a obtener el valor real pero que con ayuda del geogebra si es posible alcanzar un menor margen de error. Calcula la razón entre la distancia Tierra_Sol con respecto a la distancia Tierra_Luna y obtiene un valor muy cercano a 19 tal y como lo plantea la pregunta, se deduce que él comprende que es el ángulo quién determina la relación, es decir, establece relaciones entre la razón geométrica de dos lados del triángulo con el ángulo, esto evidencia una significativa noción de razón trigonométrica.

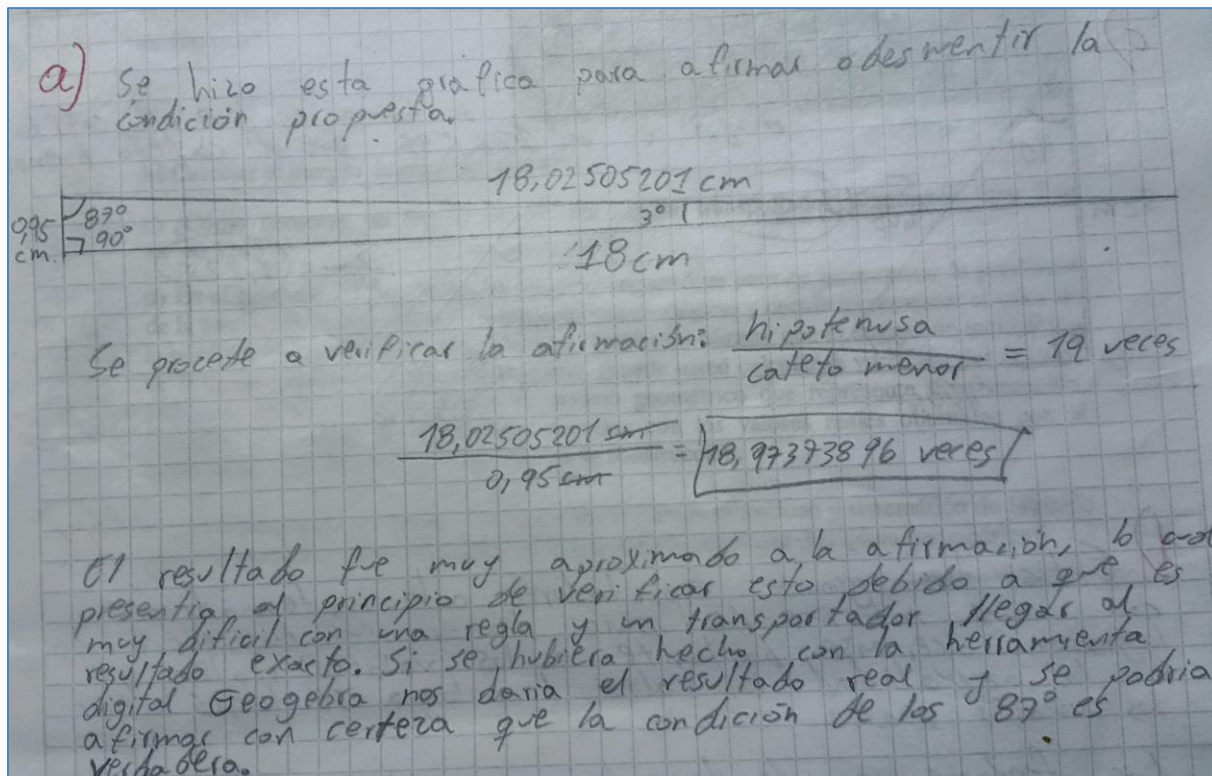


Figura 37 Problema de Aristarco Caso Luis Manuel

Tomando como referente el indicador de logro del saber-saber en el Taller tres, podemos valorar qué alcances ha obtenido Luis Manuel con respecto a este descriptor en dicha categoría de aprendizaje: Establece la relación entre las medidas lineales y las medidas angulares en un triángulo rectángulo, a partir del análisis del episodio histórico de Aristarco y su medición de distancias en el universo.

En la **Figura 37**, se pudo ver claramente un gráfico a escala construido por Luis Manuel, con el que él explica de una manera muy organizada su posición afirmativa con respecto a la pregunta en mención, afirma que entre mejor precisión entonces se ésta más cerca del valor obtenido por Aristarco que es 19 y lo hace notar al tomar un número significativo de cifras decimales en su

medición. Significa que el análisis del episodio de Aristarco le aporó para comprender con más profundidad sobre las relaciones entre las medidas angulares y las medidas lineales en un triángulo rectángulo. Maza (1994) lo menciona como construir historias en torno a problemas críticos del pasado que ilustren técnicas y métodos actuales, se plantea un problema actual pero resuelto con las herramientas y las limitaciones del pasado para que de esa manera el estudiante valore la recursividad y la genialidad de esos seres y además comprenda las razones del surgimiento de nuevas tecnologías y el reconocimiento del potencial de aplicación del conocimiento matemático. Luis Manuel efectivamente resuelve el problema en dos momentos primero con transportador y regla y luego con el geogebra de ahí saca sus conclusiones para resolverlo.

b.Saber_Hacer

Como el problema de Eratóstenes planteado en el ítem b) de la Actividad IV de Matematicomanía tiene riqueza para abstraer de él objetos matemáticos, nuevamente lo utilizo (ver **Figura 38**).

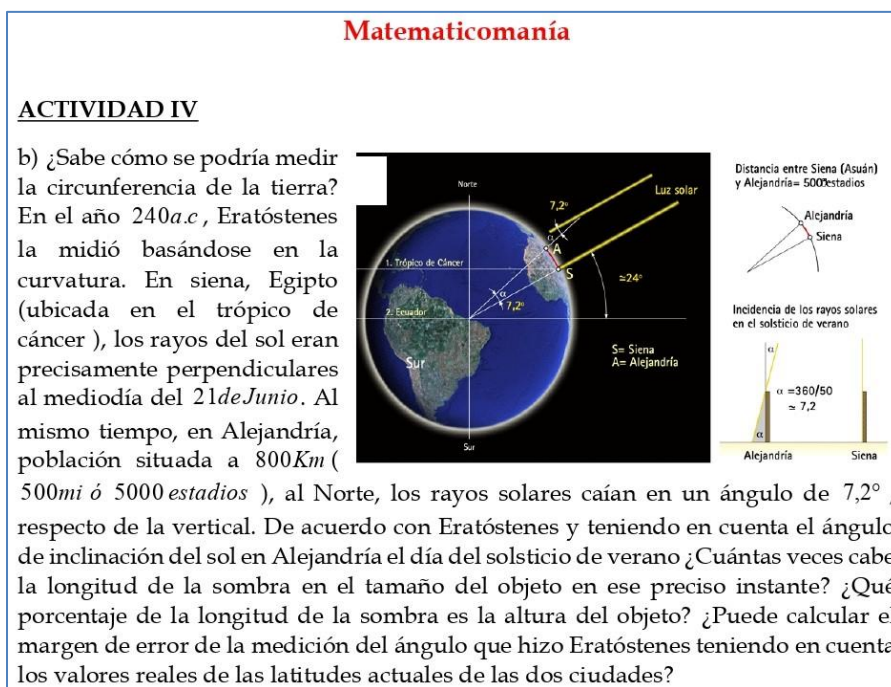


Figura 38 Saber-Hacer Taller Tres Caso Luis Manuel

Específicamente con la intención de pedirle al estudiante que encuentre el margen de error en forma porcentual del ángulo de inclinación que calculó Eratóstenes comparando con los valores reales actuales

Luis Manuel consulta las latitudes geográficas de Alejandría y de Asuan por Internet, halla la diferencia de latitudes entre estas dos ciudades y luego procede a comparar esa diferencia con el valor hallado por Eratóstenes, finalmente hace uso de la fórmula de margen de error y convirtiendo los ángulos a la forma decimal encuentra que el margen de error de los cálculos de Eratóstenes fue aproximadamente del 1.055 % (ver Figura 39).

• latitud Alejandría $\rightarrow 31^{\circ} 12' 56.3''$
 latitud Asuan $\rightarrow 24^{\circ} 5' 27''$
 Valor del Ángulo de Eratóstenes $\rightarrow 7^{\circ} 12' 0'' \rightarrow V.E$

$$\begin{array}{r} 31^{\circ} 12' 56.3'' \\ - 24^{\circ} 5' 27'' \\ \hline 7^{\circ} 7' 29.3'' \end{array} \rightarrow V.R$$

lo que se realizó en esta razón aritmética fue calcular el ángulo que hay entre Alejandría y Asuan, para luego compararlo con el ángulo que declaró Eratóstenes.

Fórmula para ver el margen de error: $\frac{|\text{Valor Real} - \text{Valor Estimado}|}{\text{Valor Real}} \times 100$

$$\frac{|7.124805556^{\circ} - 7.2^{\circ}|}{7.124805556^{\circ}} \times 100 = 1.055389426\% \text{ Error}$$

Figura 39 Respuesta de Luis Manuel Saber-Hacer

Tomando como referente el indicador de logro del saber-hacer en el Taller tres, podemos valorar qué alcances ha obtenido Luis Manuel con respecto a este descriptor en dicha categoría de aprendizaje. El indicador, establecido fue: “Aplica las herramientas conceptuales y procedimentales para cuantificar e interpretar los márgenes de error entre los valores lineales y angulares obtenidos por medición y los obtenidos por teorización matemática”.

De acuerdo con la solución que ofrece Luis Manuel a la pregunta en mención, se hace evidente el dominio de las herramientas conceptuales y procedimentales en la sustentación de su respuesta, puesto que calcula el margen de error pedido administrando de una manera correcta los datos y el modelo matemático asociado. En palabras de Guzmán (1993), hablando de la historia

Con ello se hace obvio cómo la matemática ha procedido de forma muy semejante a las otras ciencias, por aproximaciones sucesivas, por experimentos, por tentativas, unas veces fructuosas, otras estériles, hasta que va alcanzando una forma más madura, aunque siempre perfectible (p.7)

Luis Manuel ha hecho el recorrido que sugiere Guzmán puesto que él asumió las actividades en todas las formas posibles y haciendo uso de las herramientas procedimentales y conceptuales encuentra una primera solución para luego llegar a ofrecer una solución más precisa y mejor argumentada del problema.

c. Saber_Ser

Tomé como referencia la pregunta planteada en el ítem d) en la sección ¿Qué aprendimos? del taller tres, tomé textualmente la respuesta que dio Luis Manuel al inciso:

- e) Explique con sus propias palabras y por escrito ¿Qué importancia encuentra usted en dar fundamento desde la modelación matemática a la formulación de una hipótesis como lo hicieron Tales, Aristarco y Eratóstenes?

Luis Manuel responde, como se puede ver en la Figura 40, que estos tres personajes superaron las limitaciones tecnológicas de la época comparadas con la actualidad porque alcanzaron resultados muy cercanos a los valores medidos con alta tecnología, así mismo, reconoce que dar fundamento a las hipótesis es una fortaleza porque nos muestra el nivel de precisión de nuestras observaciones.

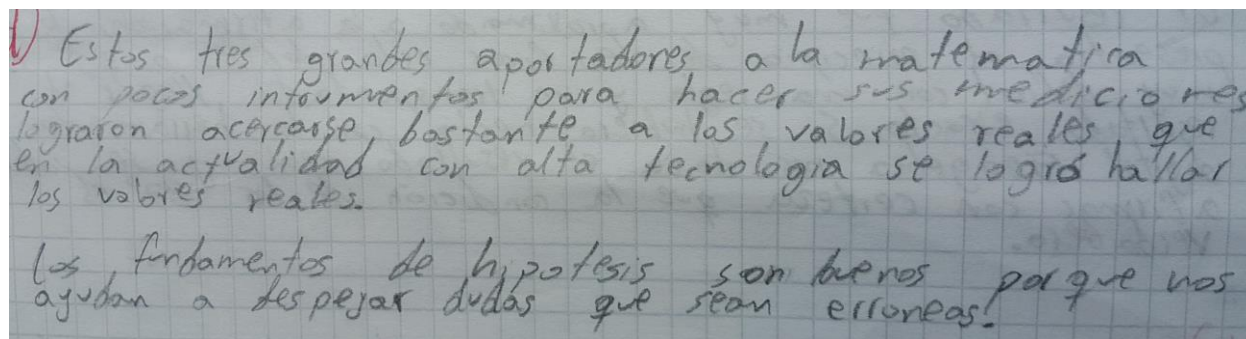


Figura 40 Respuesta Luis Manuel Saber-Ser

Tomando como referente el indicador de logro del saber-ser en el Taller tres, podemos valorar qué alcances ha obtenido Luis Manuel con respecto a este descriptor en dicha categoría de aprendizaje: Comprende la importancia de dar fundamento desde la modelación matemática a las hipótesis formuladas desde la observación del contexto como lo hicieron Tales, Aristarco y Eratóstenes.

En la respuesta que da Luis Manuel a este interrogante y en las soluciones que ofrece al resolver los problemas que se le propusieron puedo apreciar que él valora la importancia del conocimiento matemático como herramienta para comprender la realidad y para dar explicación a los hechos de la cotidianidad, es decir, se aprecia que en él se produce una transformación en su forma de entender la matemática como disciplina científica y en su metodología de aprendizaje. En la visión de Gonzales (2004) aduciendo a la historia de la matemática afirma que

se debería despertar en el estudiante, futuro profesional, científico o técnico, unas actitudes y unos hábitos metodológicos acordes con el método científico (p.18)

En Luis Manuel se aprecian los efectos iniciales de un proceso de transición que le muestra el camino que conduce del conocimiento empírico al conocimiento teórico precisamente porque se ha dispuesto de muy buena manera para resolver todas las actividades del taller. Esto tiene un impacto muy positivo en su formación integral porque ahora comprende que el aprendizaje es un proceso tortuoso y zigzagueante pero que trae sus frutos a largo plazo.

1.154.4 Hiparco y las Cuerdas

El cuarto taller ((ver APÉNDICE D) lo diseñe para construir el concepto de razón trigonométrica desde su origen y contexto, para comprender las relaciones entre medidas angulares y lineales en un triángulo rectángulo, para conocer métodos de construcción de ángulos sin uso del transportador, para identificar la susceptibilidad de las medidas lineales al variar las medidas angulares, para valorar el trabajo minucioso y persistente de Hiparco en la elaboración de las tablas de cuerdas y del catálogo de estrellas.

4.4.1 Análisis a priori

En este apartado describiremos el taller diseñado para el estudio del episodio de Hiparco y la tabla de Semicuerdas. Para dicha actividad se plantearon los siguientes **Indicadores de logro**:

- II. Comprende el concepto de razón trigonométrica a partir del estudio de la obra de Hiparco de Nicea y del proceso histórico que lo originó.
- III. Construye un ángulo agudo cualquiera sin utilizar transportador conociendo el valor de una razón trigonométrica de dicho ángulo.
- IV. Muestra actitud crítica, apreciando el contexto y formulando preguntas sobre la realidad como lo hicieron Tales, Aristarco, Eratóstenes e Hiparco.

Como se mencionó anteriormente, previamente a la clase se plantean a los estudiantes unas **Preguntas Orientadoras**, con el fin de que consulten y lleguen a la clase con algunas ideas que permitan introducirse al tema. Para esta sesión se plantearon las siguientes preguntas:

- ¿Quién fue Hiparco de Nicea? ¿Cuál era el modelo cosmológico de Hiparco? ¿Qué relación tiene su trabajo científico con la trigonometría?
- ¿Qué tipo de mediciones hizo Hiparco sobre el universo? ¿Qué es un paralelo en la tierra? ¿Qué es un meridiano? ¿Qué es latitud geográfica? ¿Cómo se mide? ¿Qué es longitud geográfica? ¿Cómo se mide?
- ¿En qué consiste la tabla de cuerdas de Hiparco para relacionar medidas lineales y angulares en un triángulo rectángulo? Explicar detalladamente su respuesta.
- Con la herramienta Geogebra y con un redondeo a 10 cifras decimales, construya un ángulo central de 60° en una circunferencia de radio 10 unidades. Trace la cuerda, mida su longitud, tome la semicuerda y calcule el número de veces que ésta contiene al radio de la circunferencia. Repita el mismo ejercicio para un ángulo central de 90° .

Se espera que el estudiante comprenda que Hiparco fue autor de la idea de medir ángulos de forma indirecta, es decir, él comprendió que se pueden determinar los valores de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo estableciendo una comparación por cociente de dos de sus lados, esta vía condujo al descubrimiento de la trigonometría como rama de la matemática e hija de la astronomía.

Para abordar el estudio de las razones trigonométricas desde su aproximación histórica consideramos necesario revisar algunos presaberes que se especifican en el siguiente apartado como puede verse en la Figura 41.

En la primera parte de la actividad se explora en el estudiante su comprensión de lo que para él significa cuerda, cuál cree que es la mayor de las cuerdas en una circunferencia y qué explique por escrito si la relación entre la variación de la cuerda y el arco que la describe es directa y además,

si considera qué dicha relación es proporcional. En este punto es muy importante poner atención a la explicación escrita que da el estudiante para advertir, si él identifica la conexión entre la variación de la cuerda y la variación del arco, puesto que sería un primer acierto para la comprensión del origen y de la necesidad de la trigonometría.

¿Qué sabemos de.....?

I. Cuerdas y Semicuerdas

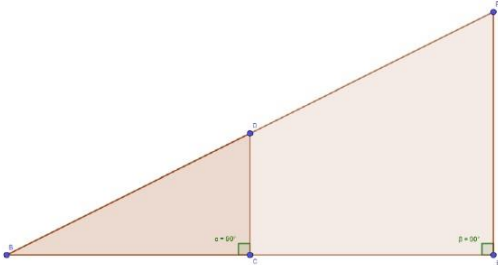
- ¿Qué es una cuerda en una circunferencia? ¿Qué es una semicuerda?
- ¿Cuál es la cuerda de mayor longitud que se puede trazar en un círculo? ¿Qué longitud del arco descrito le corresponde a dicha cuerda?
- ¿A medida que se aumenta el tamaño de una cuerda en una misma circunferencia entonces se puede afirmar que también aumenta el arco que describe?
- Si el arco aumenta a medida que aumenta la cuerda en una misma circunferencia, entonces, ¿se puede afirmar que tanto el arco como la cuerda crecen proporcionalmente?

II. Triángulos semejantes

En la gráfica se puede afirmar que

$$\frac{DC}{BD} = \frac{FE}{BF}$$

¿Puede explicar por qué?



III. Polígonos Regulares

- ¿Qué es un polígono regular? ¿Qué es la apotema de un polígono regular?

Figura 41 ¿Qué sabemos de? Taller cuatro

En la segunda situación se espera que el estudiante haga uso de lo que ya aprendió con el estudio del taller sobre Tales e identifique la relación que se da entre los lados homólogos de dos triángulos

rectángulos de distinto tamaño pero que comparten los mismos ángulos, significa que el estudiante habría comprendido la semejanza de triángulos sin tener conciencia que lo hace, este es un aspecto relevante porque el estudiante comprende que con mucha frecuencia hacemos matemática intuitivamente y luego podemos validar nuestro conocimiento con elementos teóricos.

En la tercera situación se prepara para el ejercicio de aplicación de los polígonos regulares puesto que su uso es necesario en algunas actividades posteriores del taller.

Ahora podemos dar paso a la sección **Recurriendo a la Historia (ver Figura 42)** el texto ilustra sobre el proceso que llevó a cabo Hiparco para establecer relaciones entre las medidas de las cuerdas y el ángulo central en correspondencia con el modelo geocéntrico que él promovía.

Recurriendo a la Historia:
"Hiparco de Nicea"

Los conocimientos de los pueblos anteriores pasaron a Grecia, donde se destacó el matemático y astrónomo **Hiparco de Nicea** (190 a.c – 120 a.c) en el siglo II a.c, siendo uno de los desarrolladores de la trigonometría. Él modeló el movimiento del sol y la luna en un sistema geocéntrico de epiciclos, supuso que el universo era geocéntrico (la Tierra como centro) y que todos los cuerpos celestes orbitaban la Tierra según trayectorias principales, circulares o esféricas llamadas **deferentes**. Hiparco construyó las **tablas de cuerdas** para la resolución de triángulos planos. En ellas iba relacionando las **medidas angulares con las lineales**. Para confeccionar dichas tablas fue recorriendo una circunferencia de radio r desde los 0° hasta los 180° e iba apuntando en la tabla la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central y la circunferencia a la que corta. Posteriormente los astrónomos de la India elaboraron tablas más precisas que relacionaban la mitad del ángulo central con la mitad de su cuerda, lo que hoy conocemos como seno de un ángulo. Ya Aristarco (aprox. 270 a.c) sabía que la relación entre cuerda y arco en un mismo círculo aumenta al disminuir el arco (menor que media circunferencia). Aristarco aproxima el seno de un ángulo expresado a partir de las razones de los lados de un triángulo rectángulo.

Establecer la relación entre el ángulo central y la cuerda implica que a cada ángulo central le corresponde un valor de la cuerda y reciprocamente a cada cuerda le corresponde un único ángulo central dentro de una misma circunferencia. Sin embargo, Hiparco advirtió que al aumentar el radio se aumenta la cuerda y en ese caso se altera la relación simple entre ángulo y cuerda, es decir, para un mismo ángulo central hay varias cuerdas de distinta longitud, como se ve en la gráfica, a un mismo ángulo 2α le corresponden cuerdas de distinto tamaño en circunferencias distintas, posiblemente ésta fue la razón que lo condujo a considerar además de la cuerda, otra medida lineal dentro del modelo geométrico que él utilizaba y entonces, surge el radio del círculo como la otra medida de referencia, así nace la idea de relacionar la medida del ángulo central con la razón geométrica (comparación por cociente) entre la cuerda y el radio de la circunferencia, como muestra la

figura, se cumple que: $\frac{\overline{AJ}}{R1} = \frac{\overline{HK}}{R2} = \frac{\overline{GE}}{R3}$ aquí asumimos

que Hiparco ya conocía la proporcionalidad y la semejanza de triángulos a partir de los trabajos previos de Tales, de Eudoxo y de Euclides. Sin embargo, existen textos que sostienen que Hiparco advirtió que se podía prescindir del ángulo central total y centró la mirada en la mitad del ángulo central, en la figura corresponde con el ángulo α , de esa manera se hace uso solo de media cuerda, o lo que es lo mismo, la semicuerda. Por lo tanto, por la semejanza de triángulos, se cumple que: $\frac{\overline{AI}}{R1} = \frac{\overline{HR}}{R2} = \frac{\overline{GL}}{R3}$, de esta manera encontró un método para establecer una relación directa entre la medida del ángulo

mitad y el cociente entre la semicuerda y el radio. Lo que vino después fue la aplicación de este modelo a la observación de los cuerpos celestes, lo que dio lugar a la sistematización de estos datos mediante registro escrito en unas tablas que pasaron a la posteridad como las tablas de cuerdas de Hiparco, que en la actualidad se reconocen como las primeras tablas de senos.

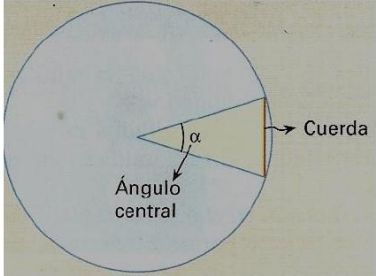
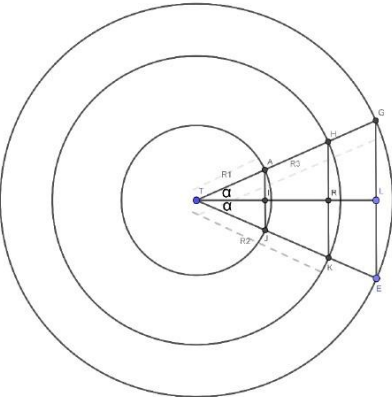



Figura 42 Recurriendo a la Historia taller cuatro

En el mismo texto se plantea el posible razonamiento que él hizo para definir la relación entre la mitad del ángulo central y la semicuerda. Finalmente, se explica cómo llega a establecer la idea de razón seno en el sentido moderno al reconocer que podía establecer una comparación por cociente entre la semicuerda y el radio del círculo y que esta razón se mantiene constante si la mitad del ángulo central es invariante, es decir, utiliza la semejanza de triángulos para madurar el concepto de razón trigonométrica.

Como puede verse en la **Figura 43**, se plantean tres preguntas que indagan sobre el texto de la figura anterior. Con la primera pregunta se espera que el estudiante reconozca que a pesar de que Hiparco se basó en un modelo cosmológico impreciso, aun así pudo formular su teoría que a la postre adquirió consistencia y veracidad. Además, el estudiante debería comprender que la matemática nace de la necesidad de resolver algunos problemas cuya solución permite explicar el funcionamiento del mundo, en el caso de la trigonometría, por el deseo de comprender el funcionamiento del universo de la época.

Recurriendo a la Historia:
"Hiparco de Nicea"

ACTIVIDAD I

a) ¿El modelo cosmológico en el que se basó Hiparco para hacer sus mediciones era el correcto? ¿Qué puede concluir de ese hecho? ¿Cuál fue el origen de los conceptos básicos de la trigonometría? ¿Encuentra relación de la trigonometría con otras disciplinas del conocimiento?

b) ¿Se puede afirmar que el método de las semicuerdas de Hiparco es una forma indirecta de medir ángulos? ¿Por qué decidir tomar la semicuerda proporcionó un modelo geométrico más conveniente para medir ángulos que tomar la cuerda completa?

c) ¿Qué entiende por tabla de cuerdas? ¿Qué magnitudes se relacionan mediante una tabla de semicuerdas a la manera de Hiparco?

Figura 43 Recurriendo a la Historia Preguntas

En la segunda pregunta se indaga sobre la naturaleza y el origen de las razones trigonométricas como resultado de la medición de ángulos por medio de la comparación por cociente entre los lados de un triángulo rectángulo, es relevante hacer énfasis en este aspecto porque es de carácter epistemológico y por lo tanto fortalece la comprensión del concepto razón trigonométrica.

En la tercera pregunta se explora la comprensión que ha hecho del estudiante del texto que acaba de leer, se espera que él reconozca que Hiparco recurrió inicialmente al tamaño de la cuerda

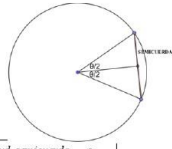
pero que posteriormente comprendió que lo podía generalizar para cualquier círculo si comparaba la cuerda con el radio y que finalmente intuyó que la comparación entre la semicuerda y el radio le conduciría a él y a sus seguidores, por un camino más apropiado para realizar cálculos y mediciones, es decir, la vía del triángulo rectángulo.

Posteriormente se presenta la sección “**Haciendo en Contexto**” que se muestra en dos partes. En la **Figura 44** se muestra la primera parte, se pide al estudiante que haga uso del geogebra y que construya con el software una circunferencia de radio 10 y en ella 19 ángulos centrales con valores que van desde 0° hasta 180° avanzando de 10° en 10° , midiendo en cada caso la cuerda y la semicuerda para luego completar la tabla I.

Haciendo en Contexto

ACTIVIDAD II

a) Con la herramienta Geogebra y utilizando el redondeo con 10 cifras decimales, construya una circunferencia de radio 10 y en ella construya ángulos centrales de 0° hasta 90° avanzando de 10° en 10° , mida cada una de las cuerdas subtendidas, luego tome la mitad del ángulo central, mida la semicuerda y complete la siguiente tabla.



θ	$\frac{\theta}{2}$	longitud de la semicuerda s	$\frac{\text{longitud semicuerda}}{\text{longitud radio}} = \frac{s}{r}$
0°	0°		
10°	5°		
20°	10°		
30°	15°		
40°	20°		
50°	25°		
60°	30°		
70°	35°		
80°	40°		
90°	45°		
100°	50°		
110°	55°		
120°	60°		
130°	65°		
140°	70°		
150°	75°		
160°	80°		
170°	85°		
180°	90°		

Tabla I

Figura 44 Haciendo en contexto Taller cuatro

En la **Figura 45** muestro la segunda parte, aquí el propósito es que el estudiante entienda que es posible establecer un método de medición de ángulos utilizando segmentos de recta y que a su vez existe una relación directa entre la medida de un ángulo central y el cociente entre la cuerda y el radio de la circunferencia.

Haciendo en Contexto	
<u>ACTIVIDAD II</u>	
a)	¿Existe alguna relación entre el valor del ángulo central y la longitud de la semicuerda subtendida? ¿Al incrementar el valor del ángulo al doble entonces la longitud de la semicuerda es exactamente el doble del valor anterior?
b)	Si dispone las semicuerdas verticalmente y en secuencia, igualmente espaciadas y a lo largo de un eje horizontal ¿La distribución crece en línea recta? ¿Qué puede concluir de la forma que toma la figura resultante?
c)	De acuerdo con la tabla I ¿Por qué la relación semicuerda radio aumenta en un mismo círculo al incrementar el ángulo central?

Figura 45 Haciendo en contexto taller cuatro

Como el software permite el manejo de 10 cifras decimales entonces se espera que el estudiante observe la variación de los valores de la semicuerda y advierta que a medida que se va incrementando el valor del ángulo central entonces se aumenta el valor de la cuerda y por tanto el de la semicuerda. Sin embargo, podría esperarse que el estudiante fuera mucho más allá y notará que la variación del ángulo central no es proporcional con la variación de la cuerda, es decir, la variación de la mitad del ángulo central no es proporcional con la variación de la semicuerda, esto se pretende lograr con la actividad en la que se pide que disponga horizontalmente, a espacios iguales y en orden creciente cada una de los segmentos que representan cada semicuerda para que él reconozca que no se cumple un modelo lineal entre el valor de la mitad del ángulo central y la longitud de la semicuerda.

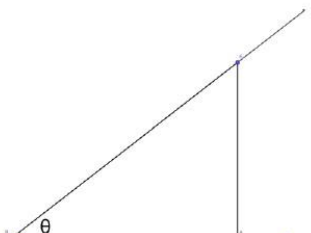
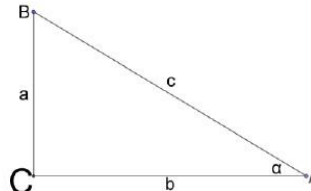
En la primera parte de la sección Desarrollo Conceptual como se muestra en la **Figura 46**, se recurre nuevamente tal y como se hizo en el Taller 3, a las 6 posibles razones geométricas que se

pueden definir entre los lados de un triángulo rectángulo, sin embargo, si se definen estableciendo como referencia uno de los ángulos agudos entonces esas 6 razones se denominan razones trigonométricas y a cada una de ellas se le conoce con un nombre específico.

Desarrollo Conceptual

Realmente es posible medir ángulos sin hacer uso de longitudes de arcos de circunferencia ni de otros procedimientos análogos. Por ejemplo, en lugar de trazar un arco de circunferencia entre los lados del ángulo y medir dicho arco, podemos levantar una perpendicular a uno de sus lados a una distancia unidad del vértice y entonces la medida del ángulo puede ser la longitud BC de dicha perpendicular desde su pie hasta el punto en que corta al otro lado. En ese caso, la medida de ángulos se reduce a la medida de distancia entre dos puntos. Podemos empezar por tomar el punto A , en uno de los lados, a una distancia de B distinta de 1. Teniendo en cuenta las propiedades de los triángulos semejantes la relación entre $\overline{AE}$ y $\overline{BE}$, por ejemplo, la razón $\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}$, es la misma cualquiera que sea la situación de A sobre el lado $\overline{BA}$. Esta relación, por ser constante, nos da la medida del ángulo θ , independientemente de las longitudes de $\overline{AE}$ y $\overline{BE}$. Por esa razón, la medida es una relación trigonométrica.

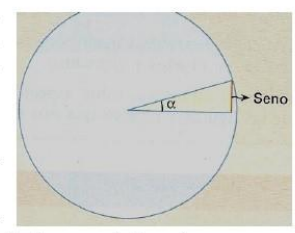
Para el triángulo rectángulo de la figura, definimos las 6 razones geométricas por comparación de las medidas de los lados del triángulo ABC , $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{b}$. Si relacionamos cada una de las razones geométricas con el ángulo agudo α y las redefinimos en función de dicho ángulo, obtenemos:

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \quad \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \quad \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \alpha} \quad \frac{c}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \alpha} \quad \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{cateto opuesto a } \alpha}$$

6 razones trigonométricas para el ángulo agudo α , se denominan trigonométricas porque relacionan las medidas lineales con las medidas angulares en un triángulo rectángulo. En el contexto del modelo geométrico de Hiparco, la primera de las 6 razones relaciona la semicuerda con el radio, es decir,

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{semicuerda}}{\text{radio}}, \text{ o el número de veces que cabe}$$


el radio en la semicuerda para un ángulo central 2α . Posteriormente los astrónomos de la India elaboraron tablas más precisas que relacionaban la mitad del ángulo central con la mitad de su cuerda, lo que hoy conocemos como seno de un ángulo α , $\text{Sen } \alpha = \frac{\text{lado opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{Sen } \alpha = \frac{a}{c}$, es decir, el seno de un ángulo α es la razón geométrica que resulta de calcular el número de veces que cabe la hipotenusa en el cateto opuesto al ángulo α en un triángulo rectángulo, otra posible interpretación del $\text{Sen } \alpha$, es un número que representa qué porcentaje de la hipotenusa es el cateto opuesto al ángulo α . De acuerdo con los resultados en la última columna de la Tabla I haga un ejercicio de comparación con los valores obtenidos con calculadora científica para la razón $\text{Sen } \alpha$. ¿Qué relación encuentra entre los resultados de la tabla y los de la calculadora? ¿Existe margen de error significativo en los valores? ¿Qué puede valorar usted del nivel de precisión alcanzado por Hiparco teniendo en cuenta lo limitado de los recursos tecnológicos disponibles para su época?

Figura 46 Desarrollo Conceptual Taller cuatro

La primera de ellas se llama técnicamente Seno del ángulo α y se define, así:

$\text{Sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$, el estudiante debería notar que ésta razón es exactamente la misma

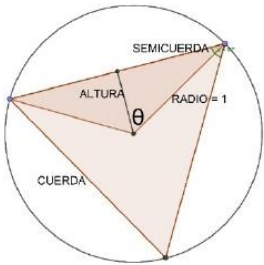
razón que descubrió Hiparco para relacionar medidas angulares con medidas lineales. Además, al comparar los valores obtenidos en la Tabla de la Actividad II debería notar la equivalencia entre los valores obtenidos en la última columna de la Tabla y los respectivos valores de la razón Seno para cada uno de los ángulos registrados en dicha Tabla. De igual manera el estudiante debería mostrar su asombro o por lo menos su interés por comprender el grado de precisión alcanzado por Hiparco en la construcción de su Tabla de Semicuerdas.

En la segunda parte de la sección Desarrollo Conceptual como se muestra en la **Figura 47**, se pretende que el estudiante diligencie la tabla iterando las construcciones de los 7 polígonos regulares que se mencionan, midiendo cada vez la apotema y la longitud de la semicuerda resultante y calculando el cociente entre la longitud de la semicuerda y la longitud de la apotema.

Desarrollo Conceptual

ACTIVIDAD III

a) Construya en Geogebra una circunferencia de radio 10 unidades. Luego construya un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia, elija uno de los tres triángulos que conforman el triángulo inscrito. Trace la mediatriz que parte del centro de la circunferencia hacia la base del triángulo seleccionado, notará que quedo definida la altura de dicho triángulo (apotema del triángulo inscrito) y que dicha altura a su vez subdivide al triángulo seleccionado en dos triángulos rectángulos iguales. Está claro que la hipotenusa del triángulo es 10. Con el mismo software proceda a medir (con redondeo de 10 cifras decimales) el valor de la altura (apotema del polígono), el valor de la semicuerda que resulta de la división de la base en dos partes iguales. ¿Cuál es el valor del ángulo θ ?



b) Repita el ejercicio anterior para un cuadrado, un hexágono regular, un dodecágono regular, un polígono regular de 24 lados, de 48 y de 96 lados. Para cada uno de los valores del ángulo θ , registre en la siguiente tabla el valor de la semicuerda, el valor de la altura (apotema) y la razón geométrica entre la longitud de la semicuerda y la longitud de la altura.

Polígono Regular	θ	<i>longitud de la semicuerda s</i>	<i>longitud de la apotema o altura a</i>	<i>longitud de la semicuerda longitud de la apotema = $\frac{s}{a}$</i>
Triángulo Equilátero	60°			
Cuadrado	45°			
Hexágono Regular	30°			
Dodecágono	15°			
Polígono de 24 lados	7.5°			
Polígono de 48 lados	3.75°			
Polígono de 96 lados	1.875°			

Tabla II

Figura 47 Desarrollo Conceptual Taller cuatro

En la tercera parte de la sección Desarrollo Conceptual (ver **Figura 48**), se dan las definiciones de las razones coseno y tangente. Luego se le pide al estudiante que con base en los resultados obtenidos en la tabla de la actividad anterior, haga una comparación de los valores obtenidos en la última columna de la tabla con los valores obtenidos utilizando la calculadora científica y formule algunas conclusiones.

Desarrollo Conceptual

Las otras 5 razones trigonométricas fueron apareciendo posteriormente, a continuación nombramos las dos siguientes en orden de importancia con sus respectivas definiciones e interpretaciones en el contexto del triángulo rectángulo ABC:

$$\text{Cos} \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$
, se puede interpretar como el número de veces que el cateto adyacente al ángulo α contiene a la hipotenusa del triángulo rectángulo, otra posible interpretación del $\text{Cos} \alpha$, es un número que representa qué porcentaje de la hipotenusa es el cateto adyacente al ángulo α .

$$\text{Tan} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha}$$
, se puede interpretar como el número de veces que el cateto opuesto al ángulo α contiene al cateto adyacente al ángulo α , otra posible interpretación de la $\text{Tan} \alpha$, es un número que representa qué porcentaje del cateto adyacente al ángulo α es el cateto opuesto al ángulo α .

ACTIVIDAD IV

De acuerdo con los resultados de la última columna de la Tabla II haga un ejercicio de comparación con los valores obtenidos con calculadora científica para la razón $\text{Tan} \theta$ ¿Qué concluye después de comparar los valores obtenidos por medición y los valores obtenidos de la calculadora?

Figura 48 Desarrollo Conceptual Taller cuatro

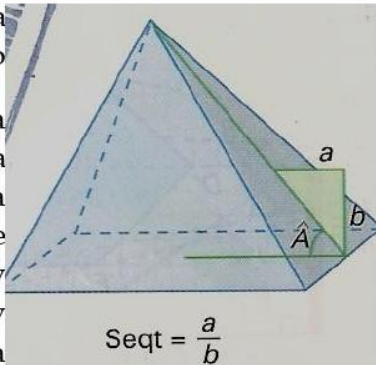
En la tercera parte de la sección Desarrollo Conceptual **Figura 48**, se dan las definiciones de las razones coseno y tangente. Luego se le pide al estudiante que con base en los resultados obtenidos en la tabla de la actividad anterior, haga una comparación de los valores obtenidos en la última columna de la tabla con los valores obtenidos utilizando la calculadora científica y formule algunas conclusiones.

En la actividad V de “Matematicomanía” se plantean dos problemas; el primero que se muestra en la **Figura 49**, es un problema de carácter histórico en el que se muestra cómo los egipcios pudieron mantener en sus construcciones monumentales la inclinación de las caras de la pirámide con un mínimo margen de error, en particular en la pirámide de Keops. Se espera que en esta actividad el estudiante reconozca que la solución a este problema tiene relación directa con la razón trigonométrica tangente de un ángulo y la puede aplicar.

Matematicomanía

ACTIVIDAD V

Los egipcios utilizaron la semejanza de triángulos en la construcción de sus monumentos. Para obtener el mismo ángulo de inclinación, $\hat{A}$, en las cuatro caras de una pirámide, emplearon el *seqt*, razón que medía la separación horizontal de una arista respecto de la vertical por unidad de altura. ¿Cuál es la inclinación de la cara (*seked*) de una pirámide de 250 codos de altura y 360 codos de lado en la base? El *seked* es lo que hoy conocemos por pendiente de una superficie plana inclinada. Es la Pendiente obtenida al poner verticalmente un codo y medir horizontalmente en palmos y dedos. 1 codo = 7 palmos = 28 dedos. ¿A qué razón trigonométrica respecto del ángulo $\hat{A}$ se refieren? ¿Cómo calcularía el ángulo de inclinación de la pirámide? Para ampliar la información se sugiere visitar la sección “Hiparco de Nicea” en “Recurriendo a la Historia” del blog matematicando395.wordpress.com; y ver el video “EL SEQET DE UNA PIRÁMIDE”.



$Seqt = \frac{a}{b}$

Figura 49 Matematicomanía Taller Cuatro

El segundo problema que se muestra en la **Figura 50** propone una actividad de contexto en la que se espera que el estudiante aplique todos los conceptos y procedimientos asociados con construcciones a escala, ángulo de elevación del sol, razones geométricas, triángulos rectángulos semejantes, razones trigonométricas y margen de error. Ésta tarea implica el uso de la calculadora

científica puesto que debe calcular márgenes de error y esto implica el uso de expresiones decimales con un buen número de cifras significativas.

Matematicomanía

ACTIVIDAD VI

Un hombre de 1,80 mts de estatura proyecta una sombra de 2 mts a cierta hora del día. ¿Qué altura tendrá un árbol que a la misma hora del día proyecta una sombra de 10 mts? ¿Cómo determinar el ángulo de elevación del sol? Construya la gráfica ajustada a la realidad utilizando una escala en el papel, mida el ángulo y luego calcule el valor del ángulo aplicando EL MODELO TEÓRICO para las razones trigonométricas, finalmente encuentre el porcentaje de error en la medida del ángulo y en el valor de la altura del árbol.

Figura 50 Matematicomanía Taller cuatro

Para la sección ¿Qué aprendimos de? (ver **Figura 51**) se plantean cinco actividades. En la primera de ellas (Actividad VII) se espera que el estudiante aplique el método de las semicuerdas de Hiparco para establecer la veracidad de los valores de la tabla. En la segunda actividad (Actividad VIII), se espera que el estudiante aplique los conceptos y procedimientos interiorizados durante el desarrollo del taller para que pueda calcular el margen de error del $\text{Sen}47^\circ$ con suficiente nivel de precisión.

En la tercera actividad (Actividad IX), es de gran importancia que el estudiante la resuelva puesto que debe hacer uso de un excelente nivel de conceptualización con respecto a las razones trigonométricas ya que se le pide construir un ángulo de 18° sin utilizar transportador. Epistemológicamente, aquí yace el origen de las razones trigonométricas dado que ellas surgen como un método indirecto de medición de ángulos

¿Qué aprendimos?

ACTIVIDAD VII

a) De acuerdo con la tabla de la figura, ¿puedes explicar cómo construir los valores de dicha tabla utilizando el concepto de semicuerda de Hiparco?

r	$\text{sen } r$	$\text{cos } r$	$\text{tan } r$
46°	.719	.695	1.035
47°	.731	.682	1.072
48°	.743	.669	1.111
49°	.755	.656	1.150
50°	.766	.643	1.192

ACTIVIDAD VIII

a) Calcular el margen de error del $\text{sen}(47^\circ)$.

ACTIVIDAD IX

a) ¿Cómo construir un ángulo de 18° sin utilizar transportador y sabiendo que $\text{Tan}18^\circ = 0,324$?

ACTIVIDAD X

a) En el gimnasio Fitness_People la máquina caminadora permite incrementar la pendiente de la banda móvil, un usuario de la máquina quiere exigirse y decide incrementar el valor de la pendiente de un 6% a un 10%, entonces, ¿podemos afirmar que el ángulo de inclinación de la banda aumento 4° ? En caso contrario, ¿puede usted calcular la variación del ángulo? Utilice el geogebra para construir el modelo geométrico que represente ésta situación. Compare los valores de los ángulos medidos con los valores reales obtenidos con la calculadora. Calcule el margen de error de su construcción.

ACTIVIDAD XI

a) ¿Qué inquietudes le surgen al comprender el trabajo minucioso y sistemático de Hiparco para contribuir a la consolidación de la trigonometría como una disciplina matemática?

Figura 51 ¿Qué aprendimos' Taller Cuatro

En la cuarta actividad (Actividad X), se espera que el estudiante no caiga en la trampa de asumir la linealidad de la variación del ángulo a medida que varía la pendiente o inclinación de la rampa, ésta actividad también tiene un gran valor puesto que aquí es donde aparece el gran aporte de la trigonometría en el cambio de pensamiento del estudiante, de igual manera es muy significativo que el estudiante identifique que la pendiente se puede interpretar como un porcentaje y que éste a su vez es otra forma de representación de la razón tangente de un ángulo.

Por último, en la Actividad XI se espera que el estudiante exprese por escrito sus sensaciones, impresiones y apreciaciones sobre el trabajo minucioso y sistemático que desarrolló Hiparco para hacer posible la trigonometría como una disciplina matemática. Es relevante tener en cuenta que a pesar de basarse en un modelo cosmológico incorrecto, aun así él pudo contribuir al descubrimiento y consolidación de ésta disciplina científica.

Al finalizar el taller, se presenta el apartado **“para profundizar”**, en el que se dan unas ligas a textos, videos, blogs, páginas web donde se encuentra información para profundizar.

4.4.2 Caracterización de aprendizajes

En este taller sobre Hiparco y las cuerdas, se plantearon actividades de medición y de estimación de ángulos, se promovieron actividades de trabajo en equipo, se estimuló la lectura porque fue necesario referenciar distintas fuentes de información para consolidar una idea más precisa sobre el trabajo de Hiparco, se promovió la cultura al estudiar la vida y obra de Hiparco, se promovió el uso de la tecnología porque para encontrar diferencias sutiles en las mediciones es necesario hacer uso del geogebra, se promovió el proceso de abstracción identificando modelos matemáticos en hechos cotidianos y se discutió sobre la importancia que tiene la observación para la identificación de modelos matemáticos en la realidad, se discutió sobre el carácter persistente de

Hiparco para lograr la sistematización importante de datos y se reconoció el alto grado de precisión alcanzado por él en sus cálculos de distancias angulares. El desarrollo de estos elementos pueden estimular en el estudiante una actitud positiva para el aprendizaje y por tanto lo transforma para ser mejor persona.

A continuación, presento la caracterización por categoría y para este taller escogí el caso de Luis Manuel porque sus respuestas bien argumentadas dan cuenta de un aprendizaje significativo y brindan elementos que dan mayor profundidad para el análisis.

a. Saber_Saber

Tomé como referencia el problema del ítem a) de Actividad VII en la sección ¿Qué aprendimos?

a) De acuerdo con la tabla de la figura, ¿puedes explicar cómo construir los valores de dicha tabla utilizando el concepto de semicuerda de Hiparco?

Luis Manuel como lo muestra la **Figura 52** explica sobre el concepto de cuerda y semicuerda, elabora una gráfica, menciona la apotema, la define y además explica que en la tabla de Hiparco se relacionan ángulos con medidas de longitud.

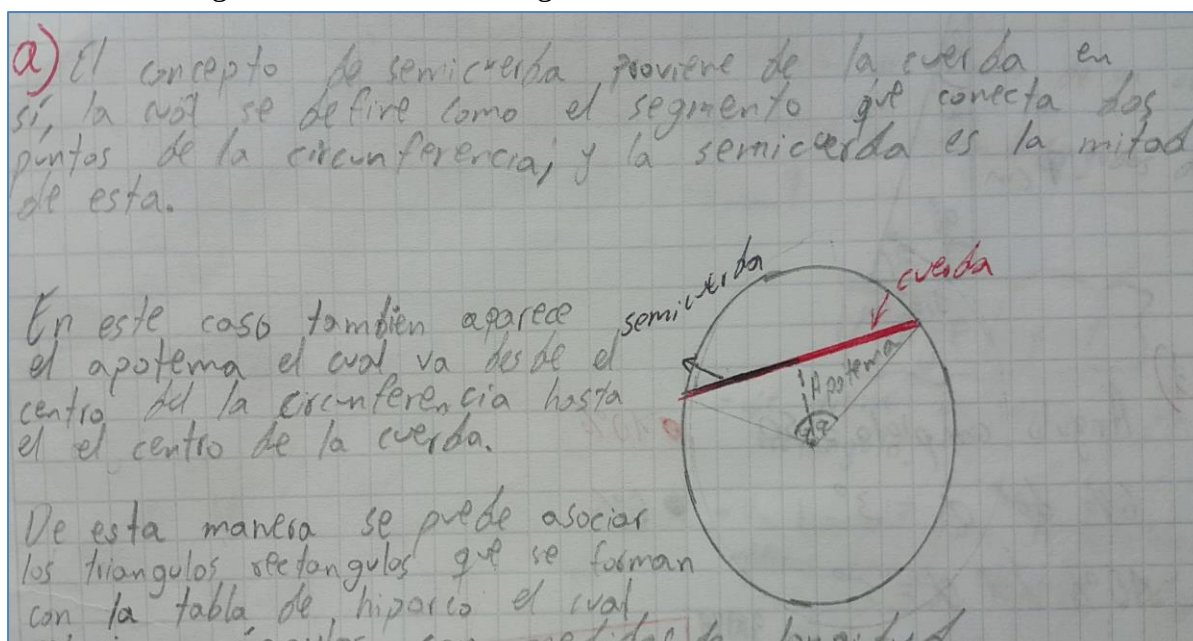


Figura 52 Respuesta Luis Manuel Saber-saber Taller cuatro

Sin embargo, él muestra con un ejemplo como se ve en la **Figura 53** el método de las semicuerdas de Hiparco, define un ángulo central de 94° y construye su cuerda, luego lo divide en dos ángulos iguales y forma dos triángulos rectángulos, mide la semicuerda, mide el radio del círculo y calcula la razón entre la semicuerda y el radio, además da una interpretación afirmando que es la posible interpretación que dio Hiparco, de esa manera calcula el valor del Sen 47° a la manera de Hiparco, el valor obtenido es de 0,73125 que comparado con el valor de la tabla es casi el mismo.

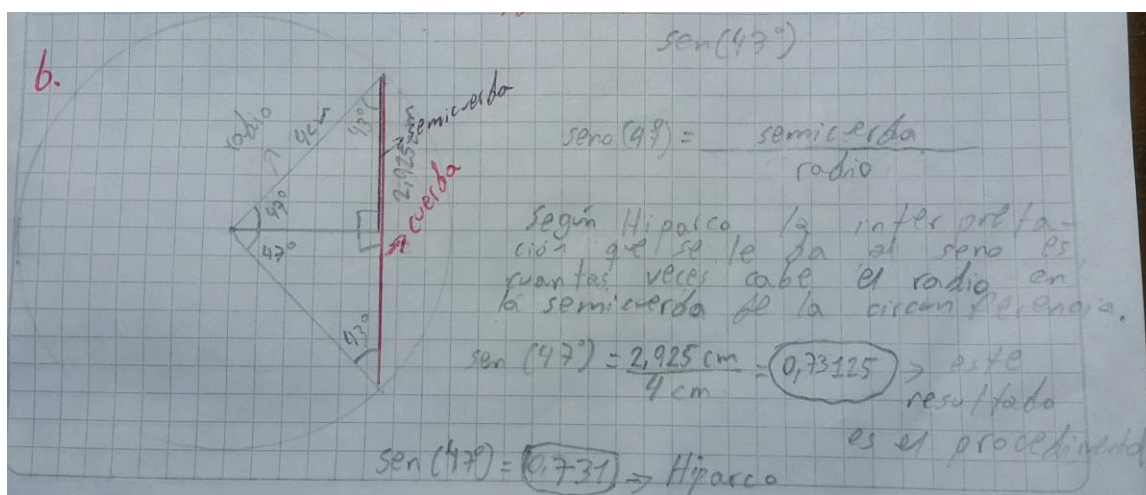


Figura 53 Respuesta Luis Manuel ¿Qué aprendimos de?

Tomando como referente el indicador de logro del saber-saber en el Taller cuatro, podemos valorar qué alcances ha obtenido Luis Manuel con respecto a este descriptor en dicha categoría de aprendizaje: Comprende el concepto de razón trigonométrica a partir del estudio de la obra de Hiparco de Nicea y del proceso histórico que lo originó.

En la **Figura 52** se muestra claramente que Luis Manuel ha comprendido la esencia del descubrimiento de Hiparco porque explica el sentido de la tabla de cuerdas y la **Figura 53** muestra paso a paso el proceso que siguió Luis manuel para calcular el valor del Sen 47° a la manera de Hiparco, estas evidencias dan cuenta que el desarrollo de las actividades del Taller junto con el análisis del trabajo de hiparco le apor to significativamente Luis Manuel para comprender el

concepto de razón trigonométrica con más profundidad , en este punto la historia de la matemática cumple su función integradora desde la perspectiva de Guacaneme (2016) porque facilita el aprendizaje de los conceptos de la matemáticaa a partir del estudio de su historia.

b. Saber_Hacer

Tomé como referencia el problema planteado en el ítem a) de la Actividad VIII de la sección ¿Qué aprendimos?

a) ¿Cómo construir un ángulo de 18° sin utilizar transportador y sabiendo que $\tan 18^\circ = 0,324$?

Luis Manuel resuelve esta pregunta como se muestra en la **Figura 54**, primero utiliza la definición de tangente de un ángulo, y es evidente que interpreta el significado de la razón tangente porque sabe que el cateto mayor es el adyacente al ángulo de 18° , como conoce el valor de la tangente del ángulo de 18° , entonces sabe que puede tomar una medida cualquiera para el cateto mayor y la multiplica por el valor de la tangente para obtener el valor del cateto menor, él toma un valor de 5 cm para el cateto mayor y obtiene un valor de 1,62 cm para el cateto menor.

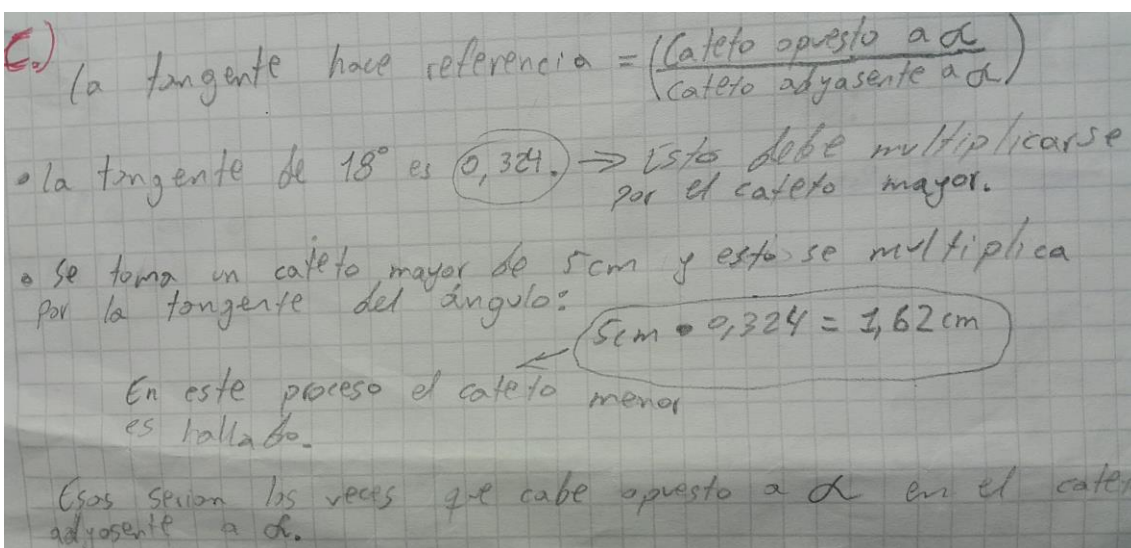


Figura 54 Luis Manuel Saber Hacer Taller Cuatro

Con estos datos Luis Manuel procede a construir el ángulo de 18° ! Sin utilizar transportador ; como lo muestra la **Figura 55**

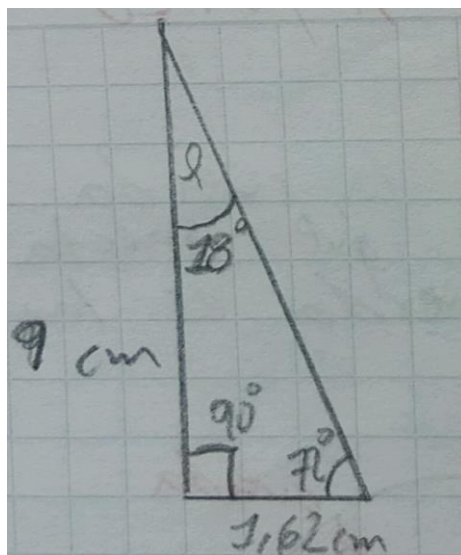


Figura 55 ángulo de 18° sin transportador

Tomando como referente el indicador de logro del saber-hacer en el Taller cuatro, podemos valorar qué alcances ha obtenido Luis Manuel con respecto a este descriptor en dicha categoría de aprendizaje: Construye un ángulo agudo cualquiera sin utilizar transportador conociendo el valor de una razón trigonométrica de dicho ángulo.

Luis Manuel logra la construcción del ángulo sin transportador porque domina el concepto de razón trigonométrica, conoce la definición de tangente, la interpreta y la sabe aplicar, además propone una gráfica a escala para hacer posible la construcción del ángulo. Este logro es posible porque el desarrollo de las actividades asociadas con el taller cuatro y los elementos conceptuales y procedimentales adquiridos en los talleres anteriores contribuyeron a la consolidación del aprendizaje, en este punto la historia de la matemática cumple su función permear Guacaneme (2016) la enseñanza, puesto que el orden de la secuencia de Talleres han rendido sus frutos en el caso de Luis Manuel.

c. Saber_Ser

Tomé como referencia la pregunta propuesta en el ítem a) de la Actividad IX de la sección ¿Qué aprendimos? ¿Qué inquietudes le surgen al comprender el trabajo minucioso y sistemático de Hiparco para contribuir a la consolidación de la trigonometría como una disciplina matemática?

Como lo muestra la **Figura 56** Luis Manuel se plantea un interrogante de ¿cómo pudo Hiparco alcanzar tal grado de precisión en la elaboración de las tablas de cuerdas? dice que ahí se constituyó la trigonometría y que posiblemente es una disciplina subvalorada.

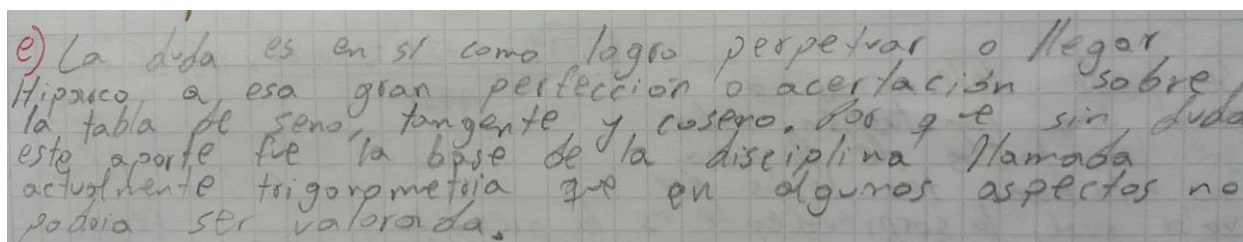


Figura 56 Luis Manuel Saber Ser Taller Cuatro

Tomando como referente el indicador de logro del saber-ser en el Taller cuatro, podemos valorar qué alcances ha obtenido Luis Manuel con respecto a este descriptor en dicha categoría de aprendizaje: Muestra actitud crítica, apreciando el contexto y formulando preguntas sobre la realidad como lo hicieron Tales, Aristarco, Eratóstenes e Hiparco.

Luis Manuel satisface las expectativas del indicador porque se formula interrogantes que están directamente relacionados con el objeto de estudio y con el contexto, por eso su cuestionamiento es de tipo epistemológico, es decir, emerge la actitud crítica en él como resultado del encuentro con lo histórico que estimula la libertad de pensamiento. En la visión de D'Amore (2011),

Ésta infunde la certidumbre de que esta disciplina no es una colección anacrónica de cosas ya hechas y sistematizadas desde siempre y para siempre, sino algo en perpetua evolución, hecha por el hombre para el hombre, rica por lo tanto de referencias a la historia cultural y social entendida en el sentido más amplio.

5. Reflexiones

“Los errores y dificultades no resueltos en el pasado de las matemáticas siempre han sido las oportunidades de su futuro”

E. T. Bell.

Para dar cuenta del cumplimiento del objetivo de mi investigación que propone *Caracterizar aprendizajes en la formación de un ciudadano matemáticamente competente que desarrolla una secuencia de actividades fundamentadas en una dimensión histórico-epistemológica para el estudio de la trigonometría* presentaré mis reflexiones en torno a tres aspectos: en el primero reporto los alcances en términos de las tres categorías que caracterizan al ciudadano matemáticamente competente saber-saber, saber-hacer, saber-ser; en el segundo comparto mis reflexiones sobre el proceso de investigación y las impresiones que de él recibí para mejorar mi práctica docente y en el tercero comunico ideas que podrían abrir el camino para realizar investigaciones en el campo de la educación matemática más específicamente en la línea de la historia de las matemáticas.

1.165.1 Reflexiones acerca del ciudadano matemáticamente competente

En este apartado presento las ideas que fueron observables a partir de las conductas de los tres estudiantes y que dan cuenta de su proceso de formación integral en cada una de las tres categorías que caracterizan al ciudadano matemáticamente competente.

5.1.1 Aprendizajes del saber-saber

Los talleres permitieron el desarrollo de varios aspectos:

La comprensión de conceptos es una fortaleza porque al relacionarse con el conocimiento del origen, evolución y el estudio del contexto se hace más significativo y profundo el abordaje del

objeto matemático. Comprende con más claridad y más profundamente los conceptos de ángulo, razón geométrica, proporción geométrica, sistema sexagesimal, triángulo rectángulo, semejanza de triángulos y razón trigonométrica porque se conoce su origen, su evolución y el contexto en el cual emergió. Utiliza distintas formas de representación de un mismo concepto y establece relaciones entre ellos y los modelos de la cotidianidad a partir del estudio y del análisis de episodios históricos de la trigonometría, por ejemplo, al estudiar el episodio de Eratóstenes se pudo comprender el concepto de ángulo de inclinación del sol.

Enriquece el saber cultural al consultar sobre el contexto, sobre los procesos de evolución de los conceptos y demás elementos que hacen parte de la consolidación de los objetos de estudio de la trigonometría, ellos muestran progresos interesantes porque a medida que iban estudiando las vidas de los personajes y el contexto en el que se desarrollaron los episodios históricos de la trigonometría se fueron apropiando de nuevos conocimientos de las matemáticas y de otras disciplinas tales como la astronomía, la filosofía, las ciencias naturales, las ciencias sociales, el deporte y los adelantos tecnológicos entre otros, es decir, cultiva una visión holística de la matemática al identificar su relación con las otras disciplinas del conocimiento, estableciendo conexiones muy directas y cercanas entre ellas.

En los procesos metacognitivos pude advertir que ellos han progresado porque ahora conocen mejor su forma de pensar y de proceder, es decir, al resolver un problema asumían sin reparo las correcciones y las sugerencias que les di para mejorar la solución y les pedía que no borrarán la gráfica, el argumento o el procedimiento revisado, sino que escribieran a continuación la corrección para que ellos mismos pudieran reconocer su evolución en su forma de pensar en matemáticas.

5.1.2 Aprendizajes del saber- hacer

En la solución de problemas he identificado que los estudiantes ganaron en creatividad porque cada uno de ellos por iniciativa propia propuso distintas formas de solución para un mismo problema. Resuelven problemas sobre la cotidianidad aplicando los conceptos de la trigonometría contruidos mediante el recurso histórico, por ejemplo, determinar el ángulo de inclinación de una escalera.

En habilidades matemáticas puedo afirmar que hubo elementos de la secuencia de talleres que les aportaron representativamente para su aprendizaje, por ejemplo: la construcción de gráficas a escala les favoreció para comprender un problema, identifica el factor de escala para mejorar su razonamiento proporcional y para validar el resultado o la respuesta del problema, además la construcción del gráfico a escala implica un proceso de abstracción que es propósito fundamental de la matemática.

Otro elemento favorable de la propuesta fue la idea de margen de error porque es de actualidad y es necesaria para comprender como funciona el mundo, además ilustra sobre la diferencia entre los modelos empíricos y los modelos teóricos pero al mismo tiempo aclara que sus resultados deben ser muy cercanos o parecidos. La trigonometría sin medición pierde sentido, a partir de las actividades de construcción de modelos a escala es inevitable que surjan imprecisiones y desfases en los distintos valores y resultados obtenidos, entonces es importante advertir y orientar al estudiante en esta dirección.

Las habilidades que se fortalecieron a partir del desarrollo de las actividades propuestas en los talleres fueron diversas: El proceso comunicativo en los estudiantes evoluciono porque era un propósito que ellos expresaran siempre por escrito las justificaciones a sus planteamientos, en otro

memento siempre se les sugirió que sustentaran oralmente y frente al grupo las explicaciones fundamentadas de sus respuestas, en la escucha existe una tendencia a mejorar y es casi que general en los estudiantes de décimo puesto que se les ha inculcado el respeto por la palabra y por la persona que habla y en los hábitos de lectura el progreso que han evidenciado estos tres estudiantes es significativo.

5.1.3 Aprendizajes del saber- ser

En el campo de la formación de actitudes y valores se pueden identificar varios aspectos en los cuales los estudiantes reconocen que se fortalecieron:

El concepto de error visto como una oportunidad para ser mejor les aportó significativamente porque ganaron en autonomía y se sintieron libres para pensar y expresar sus ideas sin temor a ser rechazados ni ridiculizados, el estudio de la historia hace evidente este aspecto.

El pensamiento crítico es una de las fortalezas que ofrece el enfoque histórico puesto que fluye la pregunta, en los estudiantes ha mejorado notablemente, se evidencia en las preguntas que de ellos emergen espontáneamente y que las expresan oralmente o por escrito.

Valoran el legado científico que generalmente es el producto de la perseverancia, del esfuerzo permanente y de una actitud desprovista de intereses económicos o personales. El encuentro con la historia de la matemática generalmente es bien recibido por el estudiante porque siente que la matemática es una ciencia hecha por humanos.

En el aspecto social también existen logros relevantes de la propuesta puesto que la dinámica del aula es de construcción colectiva y ese enfoque promueve el respeto por la diferencia de ideas y la discusión con fundamentos.

En el proceso evaluativo se muestran más objetivos porque crecen en autocrítica y entienden que el resultado del aprendizaje depende de su disposición y disciplina más que de una valoración cuantitativa.

Como un aporte de esta tesis se ofrece una caracterización del Ciudadano Matemáticamente Competente (ver **Figura 57**) para contribuir a su difusión y aplicación en el futuro de la enseñanza de la matemática.

CARACTERIZACIÓN DE UN CIUDADANO MATEMÁTICAMENTE COMPETENTE

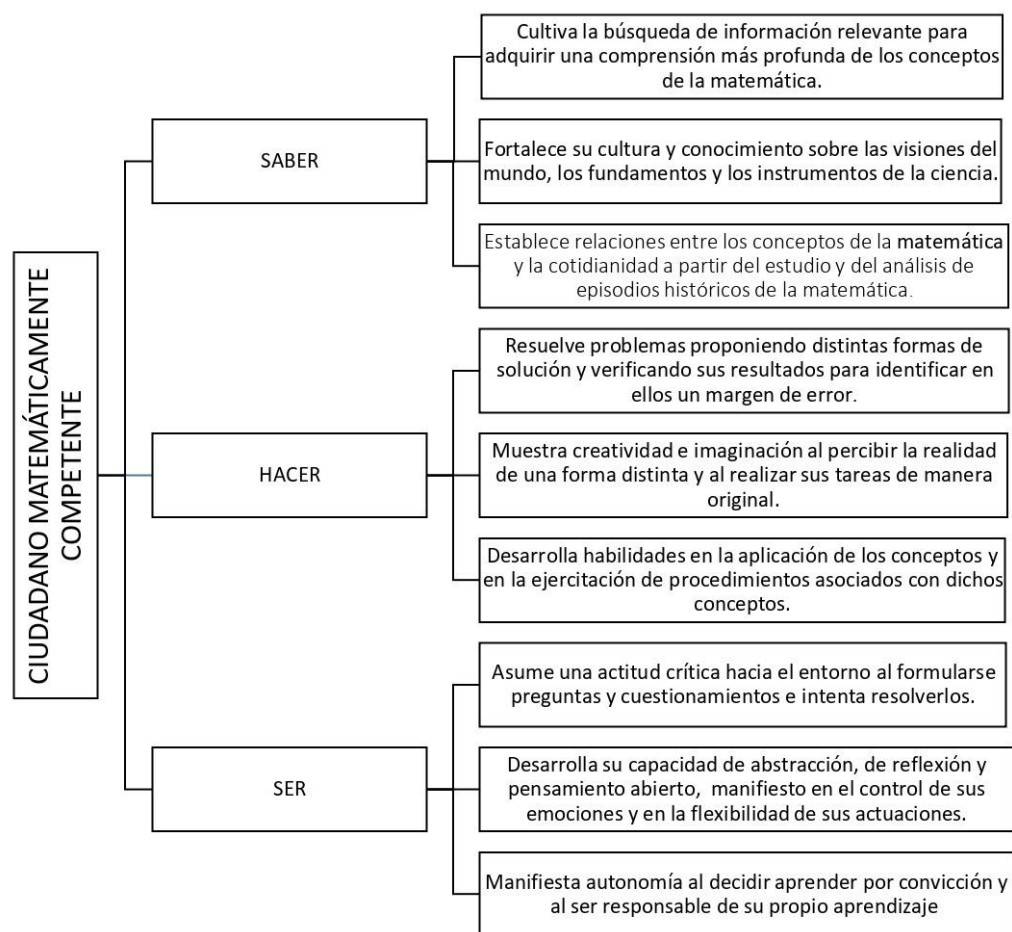


Figura 57 Caracterización Ciudadano Matemáticamente Competente

1.175.2 Reflexiones Generales

Después de esta experiencia tan enriquecedora puedo identificar y validar muchos elementos que han impactado positivamente mi práctica docente y mi formación personal:

El desarrollo de la experiencia de aula posibilitó la construcción de una estructura metodológica para la enseñanza de la trigonometría mediada de aspectos históricos y epistemológicos. Estructura que consta de las siguientes etapas: **Indicadores de Logro, Preguntas Orientadoras, ¿Qué sabemos? , Recurriendo a la Historia, Haciendo en Contexto, Desarrollo Conceptual, Matematicomanía, ¿Qué aprendimos? , Para profundizar**. Es una propuesta metodológica que muestra con actividades originales y muy concretas, cómo se puede hacer uso de la historia en la enseñanza de la matemática para el desarrollo de aprendizajes que afectan positivamente todas las dimensiones del ser.

La historia y la epistemología permiten comprender mejor la forma como aprende un estudiante y eso favorece la relación con él, significa que conociendo la historia y la epistemología de la matemática se pueden identificar bloqueos y dificultades en el aprendizaje tal vez como se dio el proceso en las personas que hicieron posible las matemáticas.

El estudio profundo del conocimiento matemático y en general, es una acción más humana porque al comprender que el conocimiento matemático se sustenta desde la fundamentación teórica entonces se comprende que para formular afirmaciones se necesita un respaldo y eso tiene un impacto importante para la vida del estudiante.

La visión de la matemática debe ser holística, es muy importante relacionarla con las otras disciplinas del conocimiento e intentar contextualizar en todo momento con situaciones de actualidad y en correspondencia con la realidad del estudiante. La enseñanza y el aprendizaje de

las matemáticas deben hacer mayor énfasis en la construcción de conceptos porque la riqueza en los argumentos y la capacidad de solucionar problemas tienen estrecha relación con este aspecto. Los recursos didácticos de orden tecnológico son imprescindibles en el aula, es necesario hacer uso de blogs, software, audios, imágenes, videos, redes sociales y celulares en la clase matemática porque el aula ahora es globalizada.

El proceso evaluativo debe individualizarse y centrarse en los avances y progresos particulares de cada estudiante, es decir, se debe hacer énfasis en el aprendizaje y respetar los ritmos en cada uno de ellos, esto significa que la concepción de la evaluación es cualitativa más que cuantitativa.

1.185.3 Perspectivas de Investigación

En la línea de la historia de las matemáticas existe un campo inexplorado que muestra un horizonte muy amplio para trabajos de investigación: El uso de la historia como recurso didáctico es muy poco común en las aulas, sin embargo, el potencial que se puede desarrollar es muy grande, existen elementos de la historia que son aplicables en cualquier nivel de formación ya sea primaria, secundaria, media vocacional o universitaria.

Teniendo en cuenta las políticas que promueve el MEN en asuntos de educación matemática tanto en los lineamientos curriculares (1998) como en los estándares de competencias (2006), es posible identificar en esos documentos la intención de promover una enseñanza de las matemáticas humanizante y una vía posible para lograrlo es por medio del uso de la historia de las matemáticas, con esta tesis se quiere contribuir al mejoramiento de la educación matemática para que la estructura de la secuencia y la caracterización de un ciudadano matemáticamente competente, puedan dar luces a los profesores de la educación primaria, secundaria o universitaria para que sean aplicadas a futuro en la enseñanza de la trigonometría o de la matemática en general.

En lo personal me siento muy motivado para continuar enriqueciendo mi trabajo pedagógico con estos ingredientes, encuentro muy propicio diseñar otros talleres con esta misma estructura para asignaturas como geometría, cálculo, álgebra y estadística.

Referencias Bibliográficas

- Cañón, C. (1993). *La Matemática. Creación y Descubrimiento*. Publicaciones de la Universidad Pontificia Comillas. Madrid, 1993.
- D'Amore, B. (2007). El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. *Cuadernos del Seminario en educación*, n. 8, 1- 36.
- D'Amore, B. (2011). *Didáctica de la Matemática*. Editorial Magisterio. Bogotá, 2011.
- Esteban, M., Ibañez, M., & Ortega, T. (1998). *Trigonometría*. Editorial Síntesis. Madrid. 1998.
- Fernández, E., Ruíz, J., Rico, L. (2016). Significado Escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las Ciencias*, 34.3, 51-71
- Fiallo, J. (2011). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. Tesis de Doctorado en Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia. Valencia. España.
- Gil, Daniel., De Guzmán, Miguel. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e Innovaciones*. Editorial Popular, S.A. Madrid, 1993.
- Goldstein, T. (1984). *Los Albores de la Ciencia. De los Árabes a Leonardo Da Vinci*. Fondo Educativo Interamericano. México, 1984.
- Gonzáles, N. (2013). *La epistemología de las matemáticas y su contribución al aprendizaje significativo en estudiantes de grado sexto (Tesis de Maestría)*. Universidad Nacional de Colombia, Manizales.
- Gonzáles, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *SUMA. Revista sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*. 45, 17-28.
- Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas*. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá. Colombia

- Guzmán, M. (1993). Tendencias Innovadoras en Educación Matemática. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Editorial Popular. Madrid.1993.
- Jácome, G., Montiel G. (2007). Construyendo la noción de razón trigonométrica. Una secuencia basada en la actividad. *Memoria de la XI escuela de invierno en matemática educativa*,11(1) , 433-436.
- Kline, M. (1992). Matemáticas para los estudiantes de Humanidades. Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Fondo de Cultura Económica. México, 1992.
- Martin, E., Ruíz, Juan., Rico, Luis. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las Ciencias*, 34.3, 51-71.
- Maza, C (1994). Historia de las matemáticas y su enseñanza: un análisis. SUMA. *Revista sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*. 17, pp. 17-26.
- Ministerio de Educación Nacional. Matemáticas. Lineamientos Curriculares Áreas Obligatorias y Fundamentales. Serie: Documentos. Santafé de Bogotá, 1998
- Ministerio de Educación Nacional. Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Santafé de Bogotá, 2006
- Miralles, J., Deulofeu, J. (2005). Historia y enseñanza de la matemática. Aproximaciones de las raíces cuadradas. *Educación Matemática*,17 (1), 87-106.
- Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis del Doctorado en Ciencias con especialidad de Matemática Educativa. CICATA, IPN, México.
- Morin, E. (1999). Los siete saberes necesarios para la Educación del Futuro. Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. París, 1999.
- Thales, S. A.E.M. (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla, SAEM Thales.
- Poincaré, H. (1981). Filosofía de la Ciencia. Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. México, 1981.
- Vasco, C. E. (1994). La educación matemática: una disciplina en formación. *Matemáticas. Enseñanza Universitaria*, 3(2), 59-75.

APÉNDICE A: TALLER DE TALES Y LA RAZÓN GEOMÉTRICA

	LA MATEMÁTICA SI VIVE PARA SERVIR			
	ÁREA DE MATEMÁTICAS	Grado: Décimo		
	Docente: Jairo Gutiérrez Balaguera			
Objeto de Estudio: Razón geométrica	Indicadores de logro:			
	I. Interpreta como un número, como un porcentaje o como una razón geométrica a la cantidad que surge de la comparación por cociente de las medidas de dos lados cualesquiera de un triángulo rectángulo II. Resuelve problemas sobre la cotidianidad aplicando el concepto de razón geométrica construido mediante el recurso histórico. III. Reconoce el valor que ofrece el estudio de problemas históricos para indagar sobre la realidad, para entender el carácter científico del conocimiento matemático y para establecer la relación entre los modelos abstractos de la matemática y las situaciones de contexto.			
Nombre:		10-	Fecha:	TALLER 1

Preguntas Orientadoras

- 1) ¿Quién fue Tales de Mileto? ¿Cuál era el pensamiento filosófico de Tales? ¿Por qué le dio gran importancia al agua? Encuentre e interprete algunas frases célebres de Tales.
- 2) Tales de Mileto, uno de los siete sabios de Grecia, asombró a los egipcios midiendo la altura de las pirámides sin tener que subirse a ellas y solo usando la longitud de la sombra ¿Cómo lo hizo?
- 3) ¿Cómo identificó Tales el concepto de razón geométrica para medir la altura de la gran pirámide?
- 4) ¿Cómo puede explicar que Tales hizo un proceso de abstracción matemático para calcular la altura de la gran pirámide?

Visitar la sección “Tales y la razón geométrica” en preguntas orientadoras del blog matematicando395.wordpress.com.

¿Qué sabemos de.....?

I. Triángulos rectángulos

- a) Defina el significado de triángulo rectángulo isósceles. Construya varios triángulos rectángulos isósceles de diferente tamaño ¿Qué características especiales cumple el triángulo rectángulo isósceles?

II. Razonamiento Proporcional

- a) Juan Sebastián afirma que si al ampliar una fotografía de 4cmx7cm se aumenta el ancho a 10 cm entonces el largo se aumenta a 13 cm. Miguel le dice que no está de acuerdo pero que no sabe cómo explicarlo, ¿Cómo puede usted ayudar a Miguel o confirmar la afirmación de Juan Sebastián?

- b) ¿Qué entiendes por ampliación de una fracción?

Recurriendo a la Historia¹: “Tales de Mileto”

ACTIVIDAD I



Cuenta la leyenda relatada por Plutarco que Tales de Mileto, uno de los llamados siete sabios de Grecia, durante uno de sus viajes a Egipto se encontró cierto día visitando la Necrópolis con el joven e inquieto Rey de Egipto, quien deslumbrado por la fama y sabiduría de Tales le preguntó si podía medir la altura de la majestuosa pirámide de Keops que se levantaba ante ellos.

Era por la mañana, muy temprano, y acababa de salir el sol por el horizonte. Es sabido que a esa hora las sombras que las personas y los objetos proyectan son muy largas, luego se acortan a medida que avanza el día, sobre todo al mediodía, y ya por la tarde empiezan de nuevo a alargarse. Ante la pregunta del Rey,

Tales reflexionó unos instantes y le contestó que no solo la calcularía, sino que incluso la mediría sin ayuda de ningún instrumento.

Dicho esto, tomó dos bastones de igual longitud (también pueden ser distintos, e incluso con uno solo es posible), colocó uno en posición vertical y el otro en horizontal (sobre la arena), y se puso a esperar. Como todavía era muy pronto, la sombra proyectada por el bastón vertical superaba con mucho la longitud del bastón horizontal, pero a medida que avanzaba el día esa sombra se fue acortando. Cuando su longitud se hizo igual que la del bastón apoyado en la arena, Tales le dijo al Rey: “Ahora ya es muy fácil conocer la altura de la pirámide”. ¿Por qué? ¿Qué tipo de figura geométrica nos permite modelar esta situación inicial? Explique su respuesta.

Si se quiere establecer en cada momento, el número de codos de longitud de la sombra por cada codo de longitud del bastón ¿Qué tipo de comparación es más apropiada para esta situación, por diferencia (razón aritmética) o por cociente (razón geométrica)? Justifique su respuesta.

Si comparamos la medida de la sombra del bastón con respecto a la longitud del bastón en ese preciso instante ¿qué podemos afirmar? Es decir, si en ese mismo instante construimos un cociente que resulte de calcular el número de veces que cabe la longitud del bastón en la longitud de su sombra, ¿qué valor tiene en ese momento dicho cociente? ¿Cuántos codos (unidad egipcia de longitud) de sombra del bastón por cada codo de altura del bastón?

¿Cree usted que Tales pudo haber medido la altura de la pirámide en cualquier momento de un día soleado? Explique su respuesta.

Ahora, si en un momento anterior, la longitud de la sombra del bastón hubiese medido el doble que la altura del bastón, entonces, ¿qué puede afirmarse de la longitud de la sombra de la pirámide con respecto a su altura en ese mismo instante? ¿Qué tipo de figura geométrica nos permite modelar esta situación? ¿Cuántos *codos* de sombra del bastón por cada *codo* de altura del bastón?

Como la longitud del bastón permanece igual y la longitud de su sombra varía decreciendo a medida que transcurre el tiempo, entonces, se pueden comparar las dos magnitudes en cada instante. Si la longitud de la sombra del bastón ahora es la mitad de la altura del bastón ¿qué puede afirmarse de la longitud de la sombra de la pirámide con respecto a su altura en ese mismo instante? ¿Qué tipo de figura geométrica nos permite modelar esta situación? ¿Cuántos *codos* de sombra del bastón por cada *codo* de altura del bastón?

Para cada una de las dos situaciones anteriores responda las siguientes preguntas:

i. Construya un modelo geométrico a escala para representar cada una de las situaciones anteriores, en cada caso construya la gráfica para el bastón y para la pirámide y mantenga la misma altura para cada uno de los objetos en los dos casos.

ii. Si definimos la longitud de la sombra del bastón como S_b y la longitud del bastón como L_b , entonces, ¿qué valor toma el cociente $\frac{S_b}{L_b} = ?$.

Si definimos la longitud de la sombra de la pirámide como S_p y la altura de la pirámide como L_p , ¿qué valor toma el cociente $\frac{S_p}{L_p} = ?$

iii. Si en un momento posterior la longitud de la sombra del bastón hubiese medido la cuarta parte de su altura, entonces, ¿qué puede afirmarse de la longitud de la sombra de la pirámide con respecto a su altura en ese mismo instante? ¿qué porcentaje de la altura de la pirámide es

la longitud de su sombra? ¿qué valor toma el cociente $\frac{S_p}{L_p} = ?$ ¿qué valor toma el cociente $\frac{S_b}{L_b} = ?$.

iv. ¿Qué relación encuentra entre los dos cocientes, en cada caso?

v. De acuerdo con lo anterior, Tales pudo haber medido la altura de la pirámide en cualquier momento del día, utilizando el concepto de razón geométrica, ¿puede explicarlo detalladamente?

Para ampliar la información se sugiere visitar la sección “Tales de Mileto” en “Recurriendo a la Historia” del blog matematicando395.wordpress.com; leer los artículos y ver los videos publicados y relacionados con el concepto razón geométrica, su historia y la Historia de Tales quién midió la altura de la gran pirámide.

Haciendo en Contexto

Resuelva cada una de las siguientes situaciones utilizando la noción de razón geométrica que usted hasta aquí ha podido consolidar. Explique detalladamente y por escrito.

ACTIVIDAD II

I. En un día soleado (preferiblemente temprano en la mañana y protegidos del sol), en un espacio descubierto del colegio y por grupos de 3 estudiantes realizar la siguiente experiencia: Tomar una vara delgada de un metro de longitud y mantenerla en posición vertical (ángulo de 90°), mientras otro estudiante mide la longitud de su sombra. Registrar los datos en un papel y luego construir a escala el objeto geométrico resultante de esta experiencia. Con base en el dibujo a escala responder las siguientes preguntas.

- ¿Qué tipo de objeto geométrico se abstrae de esta situación cotidiana? Justifique su respuesta.
- Escriba la razón geométrica que establezca el número de veces que el cateto mayor contiene al cateto menor ¿Cuántos metros del cateto mayor corresponden por cada metro del cateto menor? ¿Qué porcentaje del cateto menor es el cateto menor?
- Escriba la razón geométrica que establezca el número de veces que el cateto menor contiene al cateto mayor ¿Cuántos metros del cateto menor corresponden por cada metro del cateto mayor?
- Si un palo tiene 2 m de altura ¿Cuál debería ser la longitud de su sombra a la misma hora del día? Construir un modelo geométrico a escala de este problema.
- Si un palo proyecta una sombra de 2m a esa misma hora ¿cuál debe ser la longitud del palo? Construir un modelo geométrico a escala de este problema.
- ¿Considera usted que existe margen de error en las mediciones realizadas para esta experiencia? Explique su respuesta.

Desarrollo Conceptual

Lee las siguientes definiciones e intente hacer una interpretación de cada una, es decir, reproduzca en un dibujo, en una figura o en un texto lo que asocia con la definición e identifique sus elementos, finalmente construya su propia definición de razón geométrica y de proporción geométrica.

Razón: En matemáticas razón significa comparación entre dos cantidades. Existen dos formas tradicionales de comparación de números a saber:

a. Razón Aritmética: Es una comparación de cantidades por diferencia o resta, es decir, Si a y b son números cualesquiera entonces la razón aritmética entre a y b se define $a - b$, $b - a$ es la razón aritmética entre b y a . Por ejemplo cuando comparamos la diferencia de edades entre dos personas estamos formulando una razón aritmética o cuando comparamos por diferencia la estatura de dos personas.

b. Razón Geométrica: Es una comparación de cantidades por cociente o división, es decir, Si a y b son números cualesquiera, $b \neq 0$, entonces la razón geométrica entre a y b se define $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ es la razón geométrica entre b y a , $a \neq 0$. Por ejemplo cuando informan sobre una epidemia de una enfermedad en una determinada región afirmando que hay 10 personas infectadas por cada 100 habitantes o que en Bucaramanga hay 3 adolescentes menores de 15 años embarazadas de cada 10.

Proporción: Es una igualdad entre dos razones. Existen dos tipos de proporciones:

a. Proporciones Aritméticas: Es la igualdad de dos razones aritméticas, es decir, dados los números a, b, c y d entonces se forma la proporción aritmética, así: $a - b = c - d$. Por ejemplo, la diferencia de edad de un Padre con respecto a la edad de su hijo siempre se mantiene igual mientras ambos estén vivos.

Proporciones geométricas: Es la igualdad de dos razones geométricas, es decir, dados los números a, b, c y d entonces se forma la proporción geométrica, así: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $b \neq 0$, $d \neq 0$.

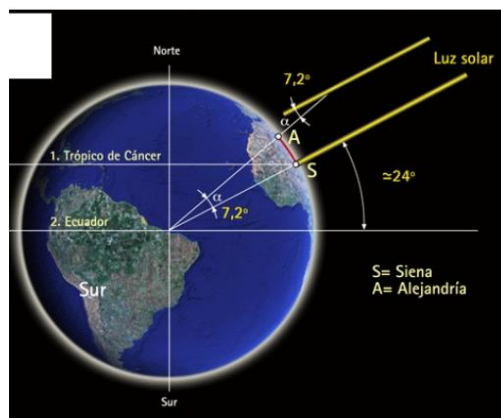
ACTIVIDAD III

Retomando el problema de Tales y la pirámide, si definimos la longitud de la sombra del bastón como S_b , la longitud del bastón como L_b , la longitud de la sombra de la pirámide como S_p y la altura de la pirámide como L_p , ¿Cómo construiría una proporción geométrica general que represente la situación y que permita calcular la altura de la pirámide en cualquier momento?

Matematicomanía

ACTIVIDAD IV

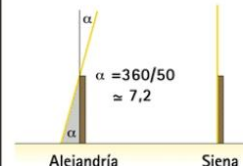
¿Sabe cómo se podría medir la circunferencia de la tierra? En el año 240 *a.c*, Eratóstenes la midió basándose en la curvatura. En Siena, Egipto (ubicada en el trópico de cáncer), los rayos del sol eran precisamente perpendiculares al mediodía del



Distancia entre Siena (Asuán) y Alejandría= 500 estadios



Incidencia de los rayos solares en el solsticio de verano



21 de Junio. Al mismo tiempo, en Alejandría, población situada a 800 Km (500 *mi* ó 5000 *estadios*), al Norte, los rayos solares caían en un ángulo de $7,2^\circ$, respecto de la vertical. Este ángulo es exactamente el mismo ángulo que se forma en el centro de la tierra si se prolongaran las dos varas hacia ella, y este ángulo resulta ser el ángulo que representa la diferencia entre las dos latitudes geográficas de dichas ciudades. Con esta información y aplicando el concepto de razón geométrica, responde:

- ¿Cuántos *Km* sobre la circunferencia de la tierra por cada grado sexagesimal en el centro de la tierra?
- ¿Puedes calcular la longitud de la circunferencia de la tierra en *Km*, en *mi* ó en *estadios*? Compara con el valor actual de la distancia entre Asuan (Siena) y Alejandría, que aparece en la red y expresa por escrito algunas conclusiones. ¿Puede calcular el margen de error de la medición de Eratóstenes?

Para ampliar la información se sugiere visitar la sección "Eratóstenes de Cirene" en "Recurriendo a la Historia" del blog matematicando395.wordpress.com; leer los artículos y ver los videos "Eratóstenes y la Circunferencia de la Tierra", "Eratóstenes Décimo Grado" y "Eratóstenes y la Longitud de la Tierra".

¿Qué aprendimos?

ACTIVIDAD V

- En una notaría de Bucaramanga piden una ampliación de una cédula de ciudadanía al 150%. ¿Puede usted encontrar los valores de las dimensiones de la cédula ampliada? ¿Cómo sería la representación gráfica de la situación? ¿Cuál podría ser el modelo algebraico para resolver la situación?
- Juan Sebastián afirma que si al ampliar una fotografía de 4cmx7cm se aumenta el ancho a 10 cm entonces el largo se aumenta a 13 cm. Miguel le dice que no está de acuerdo pero que no sabe cómo explicarlo, ¿Cómo puede usted ayudar a Miguel o confirmar la afirmación de Juan Sebastián?

c) La sombra de un árbol mide 9m a la misma hora que la sombra de una vara de 1m de altura mide 1.5m. Hallar la altura del árbol. ¿Cuál será la altura de otro árbol que a la misma hora produzca una sombra de 12m? ¿Qué porcentaje de la altura del árbol es la longitud de la sombra? ¿Serviría esta misma razón para hallar la altura de los árboles a otra hora distinta? ¿Por qué? Construya una gráfica a escala.

d) ¿Qué incidencia tuvo el hecho de estudiar la vida y obra de Tales y conocer sus estrategias para medir la altura de la pirámide en la comprensión que usted alcanzó del concepto razón geométrica, en el desarrollo de su pensamiento y en su formación integral?

Para Profundizar

- Asimov, I. (1985). Introducción a la Ciencia. Vol I. Ediciones Orbis, S.A. Barcelona, 1985, pp. 29-34.
- Esteban, M., Ibañez, M., & Ortega, T. (1998). *Trigonometría*. Editorial Síntesis. Madrid, 1998, pp. 36-39.
- Fancello, O. (1985). El camino de la ciencia I. *De la estrella a la vida*. Ed Grijalbo. México. 1985, pp. 21-29.
- García, C. (1995). Los siete sabios (y tres más). Alianza Ediciones del Prado. Madrid, 1995, pp. 49-60.
- Hesse H, (2009). La vuelta a la Historia en cincuenta frases. Ediciones Destino. Barcelona, 2009, pp. 15-19.
- Hogben, L. (1970). El maravilloso mundo de las matemáticas. Ediciones Aguilar. Madrid, 1970, pp. 40-43.
- Hogben, L. (1966). El Universo de los números. *Historia y Evolución de las Matemáticas de las Matemáticas*. Ediciones Destino. Barcelona, 1966, pp. 22-25.
- Hull, L. (1989). Historia y Filosofía de la Ciencia. Ariel Filosofía. Barcelona, 1989, pp. 30-33.
- Kuhn, T. (1978). La Revolución Copernicana. Vol II. Ediciones Orbis, S.A. Madrid, 1978, pp. 348-354.
- Masini, G. (1980). El Romance de los números. Círculo de Lectores. Barcelona, 1980, pp. 31-34.
- Montanelli, I. (1992). Historia de los Griegos. Plaza & Janes Editores, S. A. Barcelona, 1992, pp. 49-53.
- Udías A. (2014). Historia de la Física. De Arquímedes a Einstein. Editorial Síntesis. Madrid, p. 46 – 48.
- Rivaud, J. (1996). *Trigonometría*. Limusa Noriega Editores. México, 1996, pp. 29-31.

APÉNDICE B: TALLER DE ÁNGULO Y SU HISTORIA

	LA MATEMÁTICA SI VIVE PARA SERVIR		
	ÁREA DE MATEMÁTICAS	Grado: Décimo	
	Docente: Jairo Gutiérrez Balaguera		
Objeto de Estudio: Ángulo	Indicadores de logro: I. Comprende que el grado sexagesimal es una razón geométrica que resulta de la comparación por cociente entre dos magnitudes lineales. II. Construye gráficas a escala de los modelos geométricos del contexto para calcular valores estimados de las medidas angulares y lineales en un triángulo rectángulo. III. Muestra curiosidad por aprender sobre el concepto de ángulo al comprender su importancia en la medición del tiempo, en el cálculo de distancias y tamaños relativos entre los cuerpos celestes en las culturas antiguas y contemporáneas.		
	Nombre:	10-	Fecha:

Preguntas Orientadoras

- 1) ¿Cómo surge la relación entre el calendario lunar y el ángulo de una vuelta completa a partir de la medición del tiempo en la cultura babilónica?
- 2) ¿De dónde proviene la idea del número 60 como unidad básica de medición en el sistema sexagesimal de la cultura babilónica?
- 3) ¿Qué valor estimado en grados sexagesimales tiene el ángulo cenital del sol a las 11 a.m de un día cualquiera del mes de Mayo en Bucaramanga? Puede tomar una imagen de la situación, representarla mediante un modelo geométrico e identificar el ángulo cenital.

Visitar la sección “Ángulo y su Historia” en preguntas orientadoras del blog matematicando395.wordpress.com.

¿Qué sabemos de....?

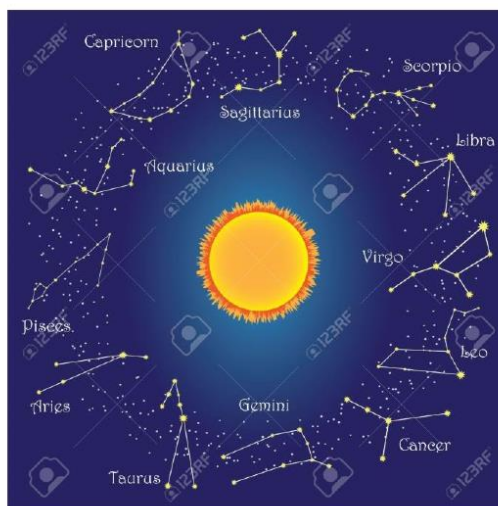
I. Ángulos

- ¿Qué tipo de grados se utilizan para medir los ángulos?
- ¿Existen ángulos de una vuelta más grandes que otros?
- ¿El grado sexagesimal es mayor en las circunferencias de mayor radio?
- Explica un ejemplo o situación de la cotidianidad en la que utilices un ángulo.

Recurriendo a la Historia¹: "Ángulos"

ACTIVIDAD I ¿DE DÓNDE PROVIENE EL SISTEMA SEXAGESIMAL?

Para la mente humana fue una gran conquista percatarse de que había una correspondencia entre la posición del sol en la faja zodiacal y los cambios de las estaciones, conocidos por razones prácticas desde tiempo antes. Otro gran descubrimiento fue del retorno periódico del sol a cada una de las constelaciones, es decir, su ciclo anual. Por su duración, este ciclo fue mucho más difícil de descubrir que el recorrido diurno del sol o la sucesión de las fases lunares. Por eso, los primeros datos de que se sirvió el hombre para medir el tiempo fueron el día y el mes. El mes corresponde a una lunación. Es obvio que contar cuantos amaneceres pasan entre una aparición de la luna nueva y la siguiente es un cálculo relativamente fácil y seguramente muy antiguo. Mucho más complejo es investigar la relación entre el período lunar y el ciclo anual del sol. Por lo tanto los más antiguos calendarios fueron lunares. Desde lo más alto de sus templos, sirviéndose de ellos como observatorios, los magos sacerdotes caldeos (sumerios) calcularon primero que el sol surgía cerca de treinta veces entre la aparición de una luna nueva y la repetición de esa situación (mes). Además observaron que después de doce lunaciones el sol se encontraba en el cielo en correspondencia con una misma constelación, y por lo tanto calcularon que el período que nosotros llamamos año tenía 360 días (30×12). La actual división de la circunferencia en 360° se deriva de la representación que los sabios hicieron del recorrido circular del sol por la faja zodiacal, dividido en 360 trechos pequeños que corresponden a los



días. Los babilonios se percataron de que doce lunaciones no correspondían exactamente al ciclo anual del sol, que era más largo, y lo corrigieron agregando de vez en vez un mes más.

De acuerdo con la lectura anterior

a) ¿Existe alguna relación entre el día y el ángulo de un grado?

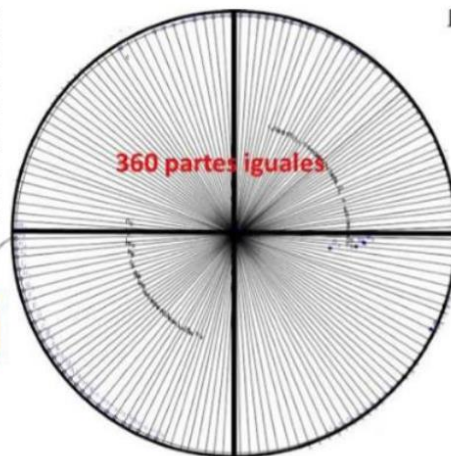
b) ¿De dónde proviene la idea de dividir la circunferencia en 360 grados?

c) ¿Qué relación matemática se cumple entre el ángulo de un grado y el ángulo de una vuelta?

d) ¿Puede afirmarse que el grado es la fracción resultante de comparar por cociente las medidas de dos arcos de circunferencia?

El grado sexagesimal es la medida del ángulo que equivale a un trescientos sesentavo del ángulo de una vuelta completa, es decir, es la razón geométrica que resulta de comparar un arco con respecto a los 360 arcos posibles en la circunferencia, significa que el grado sexagesimal es el resultado de comparar dos medidas lineales.

1 de 360



Para ampliar la información se sugiere visitar la sección "Historia del Sistema Sexagesimal" en "Recurriendo a la Historia" del blog matematicando395.wordpress.com; leer los artículos y ver los videos, "Ángulo Babilónico" e "Historia del Sistema Sexagesimal".

El problema a determinar es por qué los sumerios, que partían de un año de 360 días y un círculo de 360 grados, dividieron los días en 12 horas dobles (24), la hora en 60 minutos, y muy posteriormente, el minuto en 60 segundos. Esta respuesta nos obliga a remontarnos a una época sin escritura, en la que se contaba con los dedos, de la que surgen no sólo los sistemas decimales, sino los de base duodecimal (base 12) y los de base sexagesimal (base 60). Si extendemos la palma de la mano derecha y contamos con el dedo pulgar cada una de las tres falanges de los dedos meñique anular corazón e índice, al acabar la cuenta tendremos 12 unidades, en lugar de las cinco obtenidas de contar exclusivamente los dedos.

Si a cada 12 unidades asignamos un dedo de la mano izquierda, habremos obtenido 60 unidades al acabar la cuenta, con lo cual únicamente con 10 dedos, tenemos la posibilidad de designar hasta 60 objetos, con sólo señalar los dedos correspondientes de la mano izquierda, y la falange determinada de un dedo de la mano derecha. La base duodecimal y la sexagesimal quedan establecidas. Los sumerios se encontraron con un mes de 30 días y 12 meses en cada año de 360 días. Obviamente, el círculo de 360 grados lo dividieron en 12 sectores de 30 grados cada uno (signos del Zodiaco), pues la posición de los astros era parte de su mística y sistema de medir el tiempo. Entendemos gracias a su sistema duodecimal que dividieran el día en 12 horas, y posteriormente, en 24 (12 para el día y doce para la noche).



Cuando hubo que subdividir la hora o el grado, el sistema sexagesimal (mano izquierda completa) prestó su apoyo. Por lo que se estableció en 60 minutos, desde el año 2000 a. de C. gracias a la existencia de los relojes de arena y de agua. El sistema sexagesimal se usa para medir el tiempo (horas, minutos y segundos) y ángulos (grados, minutos y segundos), en dicho sistema 60 unidades de un orden forman una unidad de un orden superior. El número 60 tiene la ventaja de tener muchos divisores (1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30 y 60), con lo que se facilita el cálculo con fracciones, además que el 60 es el número más pequeño que es divisible por 1,2,3,4,5 y 6.

De acuerdo con la lectura anterior

- ¿Cómo expresaría el número 45 utilizando las dos manos?
- ¿Qué relación existe entre la medición del tiempo y la noción de ángulo?
- Consideras que el origen del concepto de ángulo se corresponde con una percepción estática o dinámica del mundo. Justifica tú respuesta.

Para ampliar la información se sugiere visitar la sección "Historia del Sistema Sexagesimal" en "Recurriendo a la Historia" del blog matematicando395.wordpress.com; leer los artículos y ver los videos "Dedos y el sistema sexagesimal", "Ángulo Central".

Haciendo en Contexto

- Para cada una de las siguientes cuatro actividades escribe en tu cuaderno de apuntes o en tu hoja de trabajo las respuestas a cada una de las preguntas formuladas.

ACTIVIDAD II: PARALAJE ESTELAR

a. Observa el video PARALAJE ESTELAR que se encuentra en la sección “ Historia del Sistema Sexagesimal” de “Recurriendo a la Historia” en el blog [matematicando395.wordpress](http://matematicando395.wordpress.com).

b. Cierra un ojo y observa tú dedo índice frente a ti. Luego cambia de ojo y notarás algo extraño en la imagen de tu dedo. ¿Por qué parece que el dedo se mueve? ¿En qué momento parece moverse con mayor amplitud el dedo, a menor o a mayor distancia de nuestro ojo? ¿Si alejo o acerco el dedo a mi ojo, qué se afecta en este experimento matemáticamente hablando?

Explica con la mayor claridad posible y por escrito, ¿cuál objeto geométrico importante se puede abstraer o descubrir en el fenómeno del paralaje?

ACTIVIDAD III: MIRANDO MINIÁNGULOS

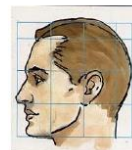
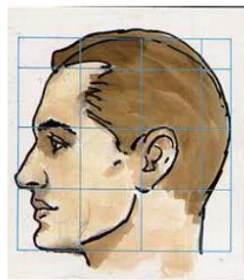
Conformar grupos de 4 estudiantes. Elegir a un compañero para que se convierta en el objeto a observar por el orificio del pitillo. Uno de los otros integrantes va a centrar su mirada en la cara del compañero elegido usando como mira el orificio del pitillo, para ello se distanciará en línea recta del objeto a observar y lo hará desplazándose hasta que la cabeza de su compañero (el objeto observado) se ajuste exactamente al tamaño del orificio del pitillo.

Luego, intercambiar los roles y disponerse a resolver por escrito las siguientes preguntas:

- ¿Por qué la cabeza de nuestro compañero cabe por el orificio del pitillo, si en la realidad su tamaño es mucho más grande que el tamaño del hueco?
- Si decidimos alejarnos aún más, ¿necesitamos un orificio de mayor o de menor tamaño para visualizar el mismo objeto?
- ¿Qué objeto matemático importante determina el tamaño del orificio a medida que nos alejamos si el elemento observado permanece fijo?
- Explica con tus propias palabras, ¿cuáles son los objetos matemáticos que se afectan simultáneamente al distanciarnos o acercarnos al elemento observado que permanece fijo?
- ¿Podrías construir un modelo geométrico a escala del experimento?

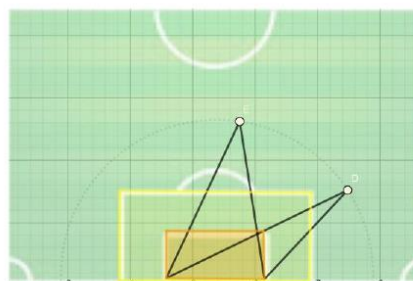
ACTIVIDAD IV: NARIZ RESPINGADA

¿Consideras que en la siguiente imagen, el ángulo de la nariz del hombre, cambia su medida al disminuir el tamaño de la imagen? Justifica tú respuesta.



ACTIVIDAD V: MEJOR ÁNGULO

En un partido de fútbol, al cobrar una falta fuera del área se ejecuta un tiro libre directo a la portería, ¿En cuál de los siguientes dos casos se tiene un mejor ángulo de tiro, desde el punto D o desde el punto E? Justifica tú respuesta.



Desarrollo Conceptual

ACTIVIDAD VI

Lee las siguientes 4 definiciones e intenta hacer un modelo geométrico de cada una, es decir, reproduce en un dibujo la figura que asocias con la definición e identifica sus elementos, finalmente construye tu propia definición de ángulo.

- i. Porción indefinida de plano limitada por dos líneas que parten de un mismo punto o por dos planos que parten de una misma línea y cuya abertura puede medirse en **grados**.
- ii. La noción de **ángulo**, que procede del vocablo latino *angulus*, hace referencia a una figura de la **geometría** que se forma a partir de dos rectas que se cortan entre sí en una misma superficie.
- iii. En **geometría**, el **ángulo** puede ser entendido como la parte del **plano** comprendida entre dos semirrectas llamadas lados que tienen el mismo punto de origen llamado **vértice** del ángulo.
- iv. La cantidad de giro entre dos líneas rectas que tienen un extremo común (el vértice).

CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS

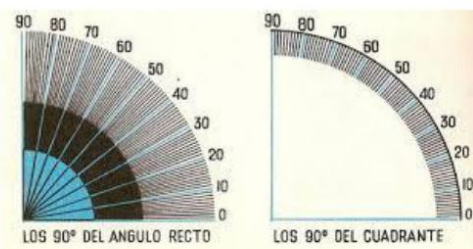
Teniendo en cuenta la magnitud de la abertura, los ángulos se clasifican en: Agudos: los que miden menos de un cuarto de vuelta. Rectos: Los que miden exactamente un cuarto de vuelta. Obtusos: los que miden más de un cuarto de vuelta y menos de media vuelta. Llanos: los que miden exactamente media vuelta.

SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS.

Para medir la amplitud de los ángulos existen varios sistemas, pero el más usado es el sistema sexagesimal.

ACTIVIDAD VII

SISTEMA SEXAGESIMAL. En este sistema, el ángulo de una vuelta se divide en 360 partes iguales, cada una de las cuales se llama ángulo de un grado, es decir, un grado es $1/360$ parte de un ángulo de una vuelta y es además la unidad de medida de este sistema, es decir, un ángulo de 1° sexagesimal es $1/90$ parte de un ángulo recto. Significa que el arco que corresponde a un ángulo de 1° es $1/360$ del arco que corresponde a un ángulo de una vuelta completa o que el arco que corresponde a un ángulo de 1° es $1/90$ del arco que corresponde a un ángulo recto. En este caso los primitivos determinaron la medida de los ángulos utilizando comparación de arcos de circunferencia. El grado se divide en 60 partes iguales llamadas cada una un ángulo de un minuto sexagesimal $1'$, $1^\circ = 60'$ y éste a su vez se divide en 60 partes iguales $1' = 60''$, cada una de las cuales se llama ángulo de un segundo sexagesimal $1''$.



- ¿Cómo se llama cada una de las 60 partes en las que puede dividirse un grado sexagesimal?
- ¿Cómo se llama cada una de las 60 partes en las que puede dividirse un minuto sexagesimal?
- ¿Cuántos segundos sexagesimales hay en un grado sexagesimal?
- ¿Cómo explica usted el hecho de que los babilónicos hayan dividido un grado sexagesimal en 3600 partes? Tome como referencia un transportador para dimensionar la grandeza de este logro babilonio.
- El transportador es un instrumento que amplifica la medida del ángulo de una vuelta ¿Por qué?

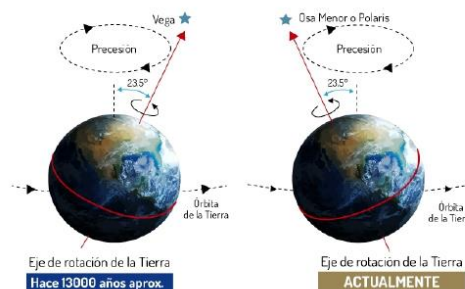
Si los babilonios definieron la medida del ángulo recto como la cuarta parte del ángulo de una vuelta y el ángulo de un grado como $1/360$ del ángulo de una vuelta completa, entonces, podemos afirmar que:

- El grado sexagesimal es una razón geométrica ¿Por qué?
- El ángulo es un objeto adimensional ¿Por qué?

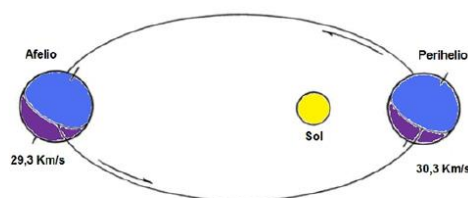
Matematicomanía

ACTIVIDAD VIII

a) El eje de rotación de la tierra tiene una inclinación de $23,5^\circ$. Según el astrónomo Milutin Milankovitch, la inclinación del eje de la Tierra no siempre es $23,5^\circ$. Con el tiempo se produce un pequeño movimiento. Calculó que la inclinación cambia entre $22,1^\circ$ y $24,5^\circ$ dentro de un ciclo de alrededor de 41.000 años. Cuando la inclinación es menor, los veranos son más frescos y los inviernos menos crudos. Cuando la inclinación es mayor, las estaciones son más extremas. De acuerdo con la anterior información, ¿cuál es la variación angular entre los dos valores extremos que puede tener la inclinación del eje de la tierra? ¿Cuál es la diferencia en $^\circ \ ' \ ''$ del cambio de inclinación de acuerdo con Milutin?

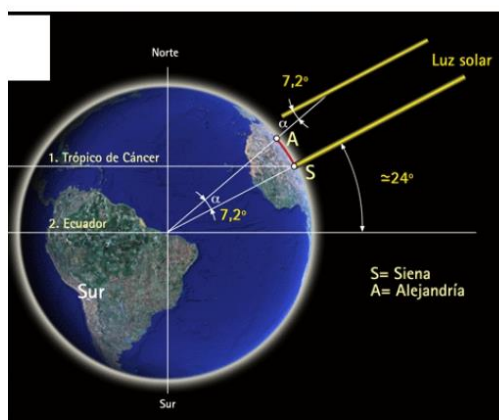


b) El sol, a pesar de ser una estrella mediana, es la única cuya forma se puede apreciar a simple vista, con un diámetro angular de $32' 35''$ de arco en el perihelio y $31' 31''$ en el afelio. ¿Cuál es el diámetro medio del sol en $^\circ \ ' \ ''$? ¿Cuál es la variación del diámetro angular del sol entre el perihelio y el afelio?



c) ¿Sabe cómo se podría medir la circunferencia de la tierra? En el año 240 *a.c*, Eratóstenes la midió basándose en la curvatura. En Siena, Egipto (ubicada en el trópico de cáncer), los rayos del sol eran precisamente perpendiculares al mediodía del 21 de Junio. Al mismo tiempo, en Alejandría, población situada a 800 Km (500 mi ó 5000 estadios), al Norte, los rayos solares caían en un ángulo de $7,2^\circ$, respecto de la vertical. Este ángulo es exactamente el mismo ángulo que se forma en el centro de la tierra si se prolongaran las dos varas hacia ese punto, y este ángulo resulta ser el ángulo que representa la diferencia entre las dos latitudes geográficas de dichas ciudades.

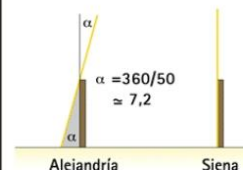
Con esta información y aplicando el concepto de razón geométrica, responde: ¿Puede construir una gráfica a escala que represente la situación en ese instante para una vara de 1 una unidad de longitud en Alejandría que longitud tendría su sombra? ¿Cuál es el valor en $^{\circ} \prime \prime$ para el ángulo de $7,2^{\circ}$? Consulte en el navegador los valores actuales en $^{\circ} \prime \prime$ de las latitudes geográficas de las dos ciudades Alejandría y Aswan (Siena), luego calcule la diferencia y compare con el valor del ángulo que calculó Eratóstenes.



Distancia entre Siena (Asuán) y Alejandría= 5000 estadios



Incidencia de los rayos solares en el solsticio de verano



Para ampliar la información se sugiere visitar la sección “Eratóstenes de Cirene” en “Recurriendo a la Historia” del blog matematicando395.wordpress.com; leer los artículos y ver los videos “Eratóstenes y la Circunferencia de la Tierra”, “Eratóstenes Décimo Grado” y “Eratóstenes y la Longitud de la Tierra”.

¿Qué aprendimos?

ACTIVIDAD IX

- El ángulo de elevación del sol a cierta hora es de 70° . Un astabandera proyecta sobre el piso una sombra que mide 5m de longitud. Encontrar la altura del astabandera.
- De acuerdo con las equivalencias que establecieron los babilonios para los grados, minutos y segundos sexagesimales entonces ¿En cuántas partes en total pudieron ellos amplificar el ángulo de una vuelta completa?
- Hacemos uso permanente y a diario de ángulos menores de un grado sin percibirlo ¿Por qué?
- Explique por escrito la importancia que usted reconoce al uso del recurso histórico para comprender el concepto de ángulo, de sistema sexagesimal y para entender la relación con la medición del tiempo y con la medición de distancias en el universo.

Para Profundizar

- Asimov, I. (1985). Introducción a la Ciencia. Vol I. Ediciones Orbis, S.A. Barcelona, 1985, pp. 29-34.
- Bell, E. (1996). Historia de las Matemáticas. Fondo de Cultura Económica. México, 1996, pp. 35-40.
- El alba de la civilización. Historia Universal. (1984). Vol 1. Circulo de Lectores. Bogotá, 1984, pp.315-318.
- Fancello, O. (1985). El camino de la ciencia I . *De la estrella a la vida*. Ed Grijalbo. México. 1985, pp. 15-20.
- Hogben, L. (1966). El Universo de los números. *Historia y Evolución de las Matemáticas de las Matemáticas*. Ediciones Destino. Barcelona, 1966, pp. 22-25.
- Torra, V. (2001). Del ábaco a la revolución digital. *Algoritmos y Computación*. Ediciones R.B.A.Barcelona, 2011, pp. 14-22.
- Udías, A. (2011). Historia de la Física. *De Arquímedes a Einstein*. Editorial Síntesis. Madrid, 2011, pp. 23-27.

APÉNDICE C: TALLER DE ARISTARCO Y LA TLS

	LA MATEMÁTICA SI VIVE PARA SERVIR			
	ÁREA DE MATEMÁTICAS	Grado: Décimo		
	Docente: Jairo Gutiérrez Balaguera			
Objeto de Estudio: Relación medidas angulares y lineales	Indicadores de logro:			
	I. Establece la relación entre las medidas lineales y las medidas angulares en un triángulo rectángulo, a partir del análisis del episodio histórico de Aristarco y su medición de distancias en el universo. II. Aplica las herramientas conceptuales y procedimentales para cuantificar e interpretar los márgenes de error entre los valores lineales y angulares obtenidos por medición y los obtenidos por teorización matemática. III. Comprende la importancia de dar fundamento desde la modelación matemática a las hipótesis formuladas desde la observación del contexto como lo hicieron Tales, Aristarco y Eratóstenes.			
Nombre:		10-	Fecha:	TALLER 3

Preguntas Orientadoras

- 1) ¿Quién fue Aristarco de Samos? ¿Cómo concebía Aristarco el modelo del universo?
- 2) Aristarco tomó como referente las ideas de Anaxágoras, ¿puede explicar alguna de ellas?
- 3) ¿Por qué las teorías sobre el modelo del universo de Aristarco no fueron aceptadas?
- 4) ¿Cuáles son las fases de la Luna? ¿En cuánto tiempo aproximadamente se cumplen las cuatro fases de la Luna?
- 5) Al medir el ángulo que formaban la Luna, la Tierra y el Sol en el cuarto creciente y tomando como vértice la tierra ¿Cuál fue el valor que obtuvo Aristarco en grados?

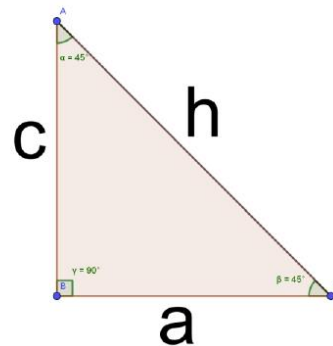
sexagesimales? ¿Cuál es el valor real del ángulo medido en la actualidad con tecnología láser?

Visitar la sección "Aristarco y la TLS" en preguntas orientadoras del blog matematicando395.wordpress.com.

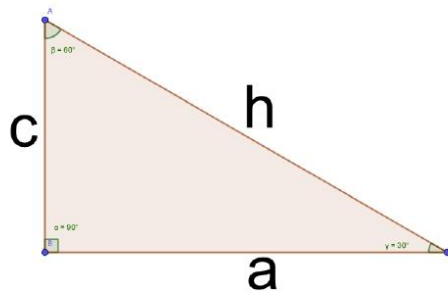
¿Qué sabemos de.....?

I. Triángulos rectángulos

- a. En un triángulo rectángulo isósceles se sabe que los ángulos agudos son de 45° y los catetos son iguales, el ángulo recto está frente a la hipotenusa y cada ángulo agudo es opuesto a un cateto. Como el ángulo recto es el doble de 45° entonces, ¿se puede afirmar que la longitud de la hipotenusa es el doble de la longitud de un cateto?, es decir, en la gráfica ¿ $h = 2a$, √, $h = 2c$?



- b. En un triángulo rectángulo con un ángulo de 30° y otro de 60° , ¿se puede afirmar que longitud del cateto opuesto al ángulo de 60° es el doble de la longitud del cateto opuesto al ángulo de 30° ?, es decir, en la gráfica ¿ $a = 2c$?



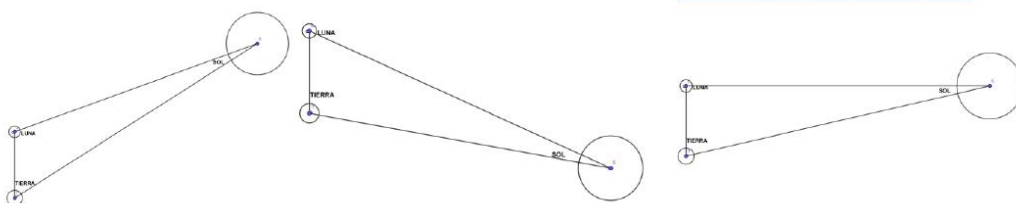
- c. Construir un triángulo rectángulo con un ángulo agudo de 34° ¿Cuántas veces cabe el cateto menor en el cateto mayor de dicho triángulo? ¿Qué porcentaje de la longitud del cateto menor es la longitud del cateto mayor?
- d. Se sabe que en un triángulo rectángulo el cateto mayor es el 140% de la longitud del cateto menor. Construya 3 triángulos rectángulos de distinto tamaño que cumplan dicha condición. Mida los ángulos agudos en cada uno de ellos y saque conclusiones. ¿Cuántas veces cabe el cateto menor en el cateto mayor?
- e.

Recurriendo a la Historia¹: “Aristarco de Samos”

ACTIVIDAD I

Aunque fuera considerada como la descripción óptima de los recorridos planetarios durante casi dos milenios, la concepción de una Tierra inmóvil ubicada en el núcleo del Sistema Solar no fue la única manera de entender la situación de nuestro planeta. Ya incluso en los años de Aristóteles había un astrónomo griego, Aristarco de Samos (310-230 a.C.), que tuvo el ingenio de proponer que el centro del Cosmos no estaba destinado a la Tierra sino al Sol, que aquella y todos los demás planetas le daban vueltas y que, además, las estrellas del cielo estaban a una distancia enorme. Pese a que ahora sabemos el acierto de las ideas de Aristarco, en sus tiempos no fue secundado por prácticamente nadie (excepto, según parece ser, por Seleuco de Seleucia, hacia el año 150 a.C.). Desgraciadamente apenas conocemos los detalles de la obra de Aristarco y sólo aparece una mención en el *Arenario* de Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.), quién por otra parte precisamente no abala la concepción de Aristarco sino que la crítica por considerar su precisión muy inferior al sistema geocéntrico. Si hubo ningún entusiasmo por esta nueva (y correcta) teoría heliocéntrica fue, seguramente, por tres motivos: en aquellos años, la física aristotélica era más convincente y concebía que la Tierra debía ser el centro del Universo, pues era el elemento más pesado; segundo, iba en contra de la visión religiosa del momento, mediante la cual el lugar donde habitaba el ser humano debía coincidir con una posición central de privilegio; y tercero, también seguía un camino distinto al marcado por la astrología, ya que ésta precisaba de referencias geocéntricas. Además, hubo también otro motivo más cercano a cuestiones astronómicas, ya que si la Tierra se movía como dictaba la teoría heliocéntrica, la posición de las estrellas en el firmamento entre dos puntos opuestos de la órbita de nuestro planeta tenía que revelar un ligero cambio en la posición de esos astros. Pese a que el propio Aristarco había supuesto que las estrellas estaban muy lejos de nosotros, a nadie se le ocurrió pensar que precisamente esa gran distancia era la causa de no poder medir las variaciones estelares en el cielo. Aristarco intuía que las estrellas estaban a distancias infinitamente grandes, y que el Sol en realidad era una estrella más, estimó las dimensiones del sol y la luna, así como sus respectivas distancias a la tierra, en función del ángulo LTS formado por los segmentos que unen la tierra con los centros del sol y la luna cuando se halla exactamente medio llena, es decir, comprendió que en cuarto creciente o en cuarto menguante, el ángulo Tierra-Luna-Sol es un ángulo Recto, puesto que la Luna sólo puede estar en dicotomía si el ángulo TLS es recto, el valor del ángulo LTS determina por completo las dimensiones del triángulo rectángulo con vértices en la tierra, el sol y la luna. Al observar las siguientes 3 imágenes de la luna tomadas desde la tierra, podemos establecer una conexión, relacionando cada imagen con cada uno de los triángulos Tierra_Luna_Sol. Para más información se sugiere visitar la sección “Aristarco de Samos” de “Recurriendo a la Historia”

en el blog matematicando395.wordpress.com y ver los videos “Fases de La Luna”, “Geometría del Cielo” e “Hipatía y Aristarco”.



¿En cuál de los tres casos se forma un ángulo recto entre la tierra, la luna y el sol, tomando como vértice del ángulo la luna?

- a. ¿Puede construir un modelo geométrico que represente el triángulo TLS que observó Aristarco?

De acuerdo con su gráfica, mida TL, mida TS y responda ¿Cuántas veces cabe la distancia TL en la distancia TS?, es decir, calcular la razón $\frac{TS}{TL}$

- b. Si sabemos que Aristarco midió el ángulo LTS y que su valor aproximado fue de 87° , ¿puede construir un gráfico a escala que se ajuste a dichas medidas angulares y lineales?

De acuerdo con su gráfica a escala, mida TL, mida TS y responda ¿Cuántas veces cabe la distancia TL en la distancia TS?, es decir, calcular la razón $\frac{TS}{TL}$, compare este valor con el valor obtenido en el paso anterior, son similares los resultados, ¿Por qué?

- c. ¿Qué interpretación puede dar a este resultado en el contexto de las ideas de Aristarco? De acuerdo con lo anterior, Aristarco pudo advertir que el tamaño del sol era mucho más grande que el tamaño de la Luna, ¿puede explicarlo detalladamente?

- d. De acuerdo con los resultados encontrados en la actividad anterior ¿se puede afirmar que en todo triángulo rectángulo con un ángulo agudo de 87° se cumple que la hipotenusa contiene aproximadamente 19 veces al cateto menor?

Para ampliar la información se sugiere visitar la sección “Aristarco de Samos” en “Recurriendo a la Historia” del blog matematicando395.wordpress.com; leer los artículos y ver los videos “GEOMETRÍA DEL CIELO” y “ARISTARCO E HIPATÍA”.

Haciendo en Contexto

ACTIVIDAD II

Resuelva la siguiente situación haciendo mediciones, comparando por cociente las longitudes y relacionando con el ángulo en mención. Explique detalladamente y por escrito.

- a) En un día soleado (temprano en la mañana a las 8:45 a.m. y protegidos del sol), en un espacio descubierto del colegio y por grupos de 5 estudiantes realizar la siguiente experiencia: Tomar 3 varas delgadas de distintas longitudes y mantenerlas en posición vertical (sujetas o clavadas en ángulo de 90°), simultáneamente (al mismo tiempo), medir las longitudes de sus respectivas sombras.
- b) Registrar los datos en un papel y luego construir a escala los objetos geométricos resultantes de esta experiencia. Con base en el dibujo a escala responder las siguientes preguntas.
 - i. Escriba la razón geométrica que establece el número de veces que la longitud del objeto contiene a la longitud de la sombra en cada uno de los 3 gráficos. ¿Cuántos metros del cateto mayor corresponden por cada metro del cateto menor?
 - ii. Medir en el dibujo a escala y con un transportador el ángulo de inclinación del sol en ese preciso instante en cada uno de los gráficos.
- c) Luego en el mismo sitio, con los mismos palos y a las 9 a.m, repetir la experiencia y registrar los datos nuevamente.
- d) Compare los resultados y responda ¿Son iguales ó son diferentes? ¿Puede explicar la razón por la cual son iguales o diferentes?
- e) ¿Qué debería esperarse que sucediera cerca al medio día? ¿Puede identificar cuál es el elemento geométrico esencial que afecta el valor de la razón geométrica en cualquier momento del día?

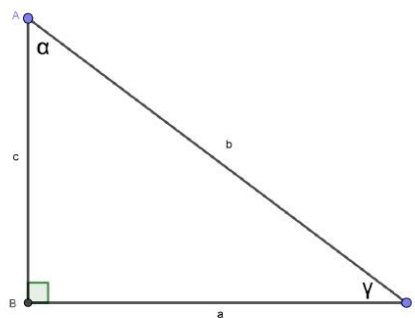
Desarrollo Conceptual

ACTIVIDAD III

En un triángulo rectángulo ABC se identifican un ángulo recto y dos ángulos agudos, llamemos α a uno de los ángulos agudos, como lo muestra la figura, entonces, definimos los catetos del triángulo rectángulo en función del ángulo α , de la siguiente manera, el cateto

$\overline{AB} = c$ es el cateto adyacente al ángulo α

porque es un lado del ángulo y el cateto $\overline{BC} = a$ es el cateto opuesto al ángulo α porque se encuentra frente al ángulo.



Para cada triángulo rectángulo siempre es posible definir 6 razones geométricas que son el resultado de comparar entre sí las longitudes de los lados del triángulo, es decir, para el

triángulo de la figura, tenemos $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{c}{b}$, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{c}{a}$, $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$, $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a}$, $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}$.

Reescriba cada una de las seis razones geométricas anteriores utilizando la descripción de los catetos en función del ángulo α , es decir,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

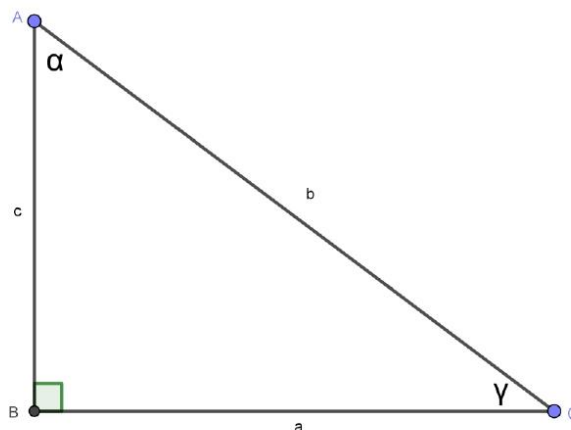
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \alpha}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{cateto opuesto a } \alpha}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha}$$

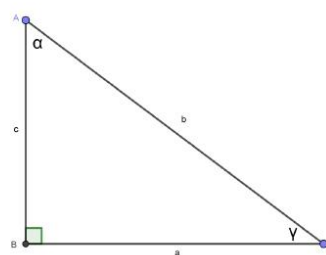
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \alpha}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$



a) ¿Cómo se definirían las 6 razones geométricas para el mismo triángulo utilizando la descripción de los catetos en función del ángulo γ ?

b) Construya 5 triángulos rectángulos diferentes ABC similares al triángulo de la figura, para los siguientes valores del ángulo $\alpha = 12^\circ, 30^\circ, 48^\circ, 66^\circ$ y 84° , en todos los 5 ejemplos, tome el mismo valor de 10 cm para el cateto opuesto al ángulo α .



i. En cada uno de los 5 casos, mida los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

ii. En cada uno de los 5 casos, calcular las razones geométricas

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \alpha}$$

iii. Comparar los resultados ¿son iguales ó distintos los valores? ¿Por qué?

iv. ¿En cuál de los 5 casos se hace más grande el valor de la razón geométrica $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$?

v. ¿Qué puede observar? ¿Existe alguna relación entre el valor del ángulo α y los resultados obtenidos? Explique detalladamente su planteamiento.

vi. ¿Podemos afirmar que el valor de la razón geométrica tiene relación directa con el valor del ángulo α ? Explique detalladamente su planteamiento.

Matematicomanía

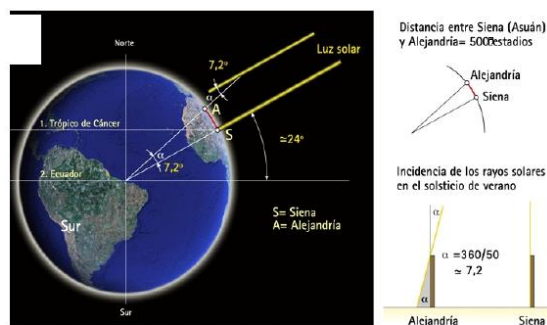
ACTIVIDAD IV

a) De acuerdo con la siguiente imagen y haciendo uso de las herramientas y utilidades del geogebra, mida las longitudes de los palos y sus respectivas sombras, en los dos casos, calcule el número de veces que cabe la sombra en la longitud del palo y mida con el geogebra el ángulo de inclinación del sol en ese preciso instante. Compare los dos resultados y exprese sus conclusiones.

Tenga en cuenta que existe margen de error en varios aspectos, en la orientación de los palos, posiblemente no estén estrictamente paralelos, además, al hacer mediciones con el geogebra de una imagen que muestra un escenario en 3D, procure que los tres puntos de referencia para cada uno de los dos casos estén sobre el mismo plano.



b) ¿Sabe cómo se podría medir la circunferencia de la tierra? En el año 240 *a.c*, Eratóstenes la midió basándose en la curvatura. En Siena, Egipto (ubicada en el trópico de cáncer), los rayos del sol eran precisamente perpendiculares al mediodía del 21 de Junio. Al mismo tiempo, en Alejandría, población situada a 800 Km (500 mi ó 5000 estadios), al Norte, los rayos solares caían en un ángulo de $7,2^\circ$, respecto de la vertical. De acuerdo con Eratóstenes y teniendo en cuenta el ángulo de inclinación del sol en Alejandría el día del solsticio de verano ¿Cuántas veces cabe la longitud de la sombra en el tamaño del objeto en ese preciso instante? ¿Qué porcentaje de la longitud de la sombra es la altura del objeto? ¿Puede calcular el margen de error de la medición del ángulo que hizo Eratóstenes teniendo en cuenta los valores reales de las latitudes actuales de las dos ciudades?



b)c) **LOS ÁNGULOS DEL ESQUÍ:** Las pruebas de esquí son de dos tipos: esquí nórdico y esquí alpino. El esquí nórdico se basa en la resistencia y la dureza, con pruebas de fondo, relevos, saltos de trampolín y biathlon. El esquí alpino se basa en la velocidad y la habilidad, con pruebas de descenso y slalom. El descenso se realiza en pistas con ángulos de inclinación entre 23° y 30° . El slalom se efectúa en pistas con un ángulo de inclinación mínimo de 30° y el recorrido está marcado con puertas o palos por donde ha de pasar el esquiador. Se quiere organizar una prueba de esquí alpino en una ladera de 900 m de longitud con un desnivel de 460 m. ¿Qué tipo de prueba es posible organizar en esas condiciones?

¿Qué aprendimos?

ACTIVIDAD V

- a) La sombra de un palo de 1m de altura mide 1.5m. Construir una gráfica a escala y calcular el valor aproximado del ángulo de inclinación del sol. ¿Cuál será la altura de otro árbol que a la misma hora produzca una sombra de 12m? ¿Serviría esta misma razón para hallar la altura de los árboles a otra hora distinta? ¿Por qué?

- b) Diseñar un método para calcular el ángulo de inclinación de las rampas que conducen del tercer piso al cuarto piso en el Instituto Politécnico. De acuerdo con la Norma Técnica “para evitar tropezones y caídas durante una evacuación en caso de emergencia, la pendiente máxima permisible dentro de una edificación debería ser de 6,7 %”. Establezca si las rampas del colegio satisfacen la norma técnica.
- c) En el gimnasio Fitness_People la máquina caminadora permite incrementar la pendiente de la banda móvil, un usuario de la máquina decide incrementar el valor de la pendiente de un 6% a un 10%, entonces, ¿podemos afirmar que el ángulo de inclinación de la banda aumento 4°? En caso contrario, ¿puede usted calcular la variación del ángulo?
- d) Según Aristarco, la distancia de la tierra al sol es 19 veces la distancia de la tierra a la luna, sin embargo, en la realidad la relación es de aproximadamente 382 veces dado que el ángulo TLS calculado con tecnología láser es aproximadamente $89^{\circ} 57'$. Encuentre el margen de error en los cálculos de Aristarco y explique desde un fundamento geométrico las posibles causas por las cuales sus mediciones arrojaron valores tan desfasados de la realidad.
- e) Explique con sus propias palabras y por escrito ¿Qué importancia encuentra usted en dar fundamento desde la modelación matemática a la formulación de una hipótesis como lo hicieron Tales, Aristarco y Eratóstenes?

Para Profundizar

- Asimov, I. (1985). Introducción a la Ciencia. Vol I. Ediciones Orbis, S.A. Barcelona, 1985, pp. 29-34.
- Fancello, O. (1985). El camino de la ciencia I. *De la estrella a la vida*. Ed Grijalbo. México. 1985, pp. 51-58.
- Hull, L. (1989). Historia y Filosofía de la Ciencia. Ariel Filosofía. Barcelona, 1989, pp. 101-106.
- Kline, M. (1992). Matemáticas para los Estudiantes de Humanidades. Fondo de Cultura Económica. México, 1992, pp. 197-202.
- Kuhn, T. (1978). La Revolución Copernicana. Vol II. Ediciones Orbis, S.A. Madrid, 1978, pp 348-354.
- Rivaud, J. (1996). Trigonometría. Limusa Noriega Editores. México, 1996, pp.29-31.
- Udías A. (2014). Historia de la Física. *De Arquímedes a Einstein*. Editorial Síntesis. Madrid, pp. 44 – 46.

APÉNDICE D: TALLER DE HIPARCO Y LAS CUERDAS

	LA MATEMÁTICA SI VIVE PARA SERVIR			
	ÁREA DE MATEMÁTICAS	Grado: Décimo		
	Docente: Jairo Gutiérrez Balaguera			
Objeto de Estudio: Razones Trigonométricas		Indicadores de logro: - Comprende el concepto de razón trigonométrica a partir del estudio de la obra de Hiparco de Nicea y del proceso histórico que lo originó. - Construye un ángulo agudo cualquiera sin utilizar transportador conociendo el valor de una razón trigonométrica de dicho ángulo. - Muestra actitud crítica, apreciando el contexto y formulando preguntas sobre la realidad como lo hicieron Tales, Aristarco, Eratóstenes e Hiparco.		
Nombre:		10-	Fecha:	TALLER 4

Preguntas Orientadoras

- 1) ¿Quién fue Hiparco de Nicea? ¿Cuál era el modelo cosmológico de Hiparco? ¿Qué relación tiene su trabajo científico con la trigonometría?
- 2) ¿Qué tipo de mediciones hizo Hiparco sobre el universo? ¿Qué es un paralelo en la tierra? ¿Qué es un meridiano? ¿Qué es latitud geográfica? ¿Cómo se mide? ¿Qué es longitud geográfica? ¿Cómo se mide?
- 3) ¿En qué consiste la tabla de cuerdas de Hiparco para relacionar medidas lineales y angulares en un triángulo rectángulo? Explicar detalladamente su respuesta.
- 4) Con la herramienta Geogebra y con un redondeo a 10 cifras decimales, construya un ángulo central de 60° en una circunferencia de radio 10 unidades. Trace la cuerda, mida su longitud, tome la semicuerda y calcule el número de veces que ésta contiene al radio de la circunferencia. Repita el mismo ejercicio para un ángulo central de 90° .

Visitar la sección “Hiparco y la semicuerda” en preguntas orientadoras del blog matematicando395.wordpress.com.

¿Qué sabemos de.....?

I. Cuerdas y Semicuerdas

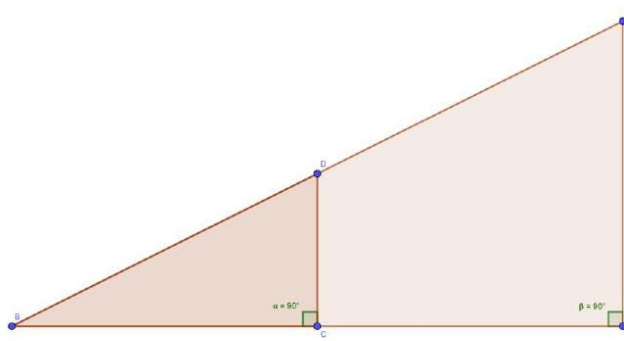
- ¿Qué es una cuerda en una circunferencia? ¿Qué es una semicuerda?
- ¿Cuál es la cuerda de mayor longitud que se puede trazar en un círculo? ¿Qué longitud del arco descrito le corresponde a dicha cuerda?
- ¿A medida que se aumenta el tamaño de una cuerda en una misma circunferencia entonces se puede afirmar que también aumenta el arco que describe?
- Si el arco aumenta a medida que aumenta la cuerda en una misma circunferencia, entonces, ¿se puede afirmar que tanto el arco como la cuerda crecen proporcionalmente?

II. Triángulos semejantes

En la gráfica se puede afirmar que

$$\frac{DC}{BD} = \frac{FE}{BF}$$

¿Puede explicar por qué?

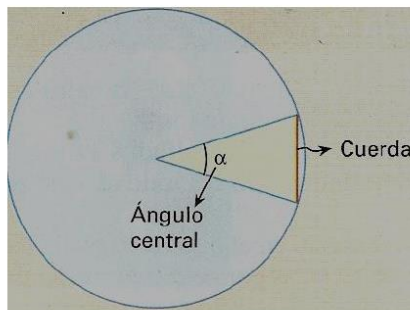


III. Polígonos Regulares

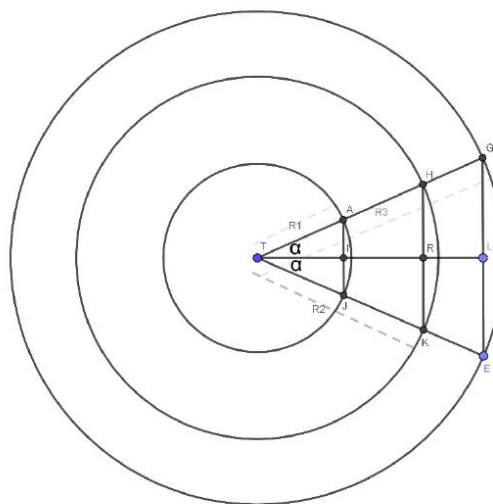
- ¿Qué es un polígono regular? ¿Qué es la apotema de un polígono regular?

Recurriendo a la Historia: "Hiparco de Nicea"

Los conocimientos de los pueblos anteriores pasaron a Grecia, donde se destacó el matemático Y astrónomo **Hiparco de Nicea** (190 a.c - 120 a.c) en el siglo IIa.c, siendo uno de los desarrolladores de la trigonometría. Él modeló el movimiento del sol y la luna en un sistema geocéntrico de epiciclos, supuso que el universo era geocéntrico (la Tierra como centro) y que todos los cuerpos celestes orbitaban la Tierra según trayectorias principales, circulares o esféricas llamadas **deferentes**. Hiparco construyó las **tablas de cuerdas** para la resolución de triángulos planos. En ellas iba relacionando las **medidas angulares con las lineales**. Para confeccionar dichas tablas fue recorriendo una circunferencia de radio r desde los 0^0 hasta los 180^0 e iba apuntando en la tabla la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central y la circunferencia a la que corta. Posteriormente los astrónomos de la India elaboraron tablas más precisas que relacionaban la mitad del ángulo central con la mitad de su cuerda, lo que hoy conocemos como seno de un ángulo. Ya Aristarco (aprox. 270 a.c) sabía que la relación entre cuerda y arco en un mismo círculo aumenta al disminuir el arco (menor que media circunferencia). Aristarco aproxima el seno de un ángulo expresado a partir de las razones de los lados de un triángulo rectángulo.



Establecer la relación entre el ángulo central y la cuerda implica que a cada ángulo central le corresponde un valor de la cuerda y recíprocamente a cada cuerda le corresponde un único ángulo central dentro de una misma circunferencia. Sin embargo, Hiparco advirtió que al aumentar el radio se aumenta la cuerda y en ese caso se altera la relación simple entre ángulo y cuerda, es decir, para un mismo ángulo central hay varias cuerdas de distinta longitud, como se ve en la gráfica, a un mismo ángulo 2α le corresponden cuerdas de distinto tamaño en circunferencias distintas, posiblemente ésta fue la razón que lo condujo a considerar



además de la cuerda, otra medida lineal dentro del modelo geométrico que él utilizaba y entonces, surge el radio del círculo como la otra medida de referencia, así nace la idea de

relacionar la medida del ángulo central con la razón geométrica (comparación por cociente) entre la cuerda y el radio de la circunferencia, como muestra la figura, se cumple que:

$$\frac{\overline{AJ}}{\overline{R1}} = \frac{\overline{HK}}{\overline{R2}} = \frac{\overline{GE}}{\overline{R3}}$$

aquí asumimos que Hiparco ya conocía la proporcionalidad y la semejanza de

triángulos a partir de los trabajos previos de Tales, de Eudoxo y de Euclides. Sin embargo, existen textos que sostienen que Hiparco advirtió que se podía prescindir del ángulo central total y centró la mirada en la mitad del ángulo central, en la figura corresponde con el ángulo α , de esa manera se hace uso solo de media cuerda, o lo que es lo mismo, la semicuerda. Por lo

tanto, por la semejanza de triángulos, se cumple que: $\frac{\overline{AI}}{\overline{R1}} = \frac{\overline{HR}}{\overline{R2}} = \frac{\overline{GL}}{\overline{R3}}$, de esta manera encontró

un método para establecer una relación directa entre la medida del ángulo mitad y el cociente entre la semicuerda y el radio. Lo que vino después fue la aplicación de este modelo a la observación de los cuerpos celestes, lo que dio lugar a la sistematización de estos datos mediante registro escrito en unas tablas que pasaron a la posteridad como las tablas de cuerdas de Hiparco, que en la actualidad se reconocen como las primeras tablas de senos.

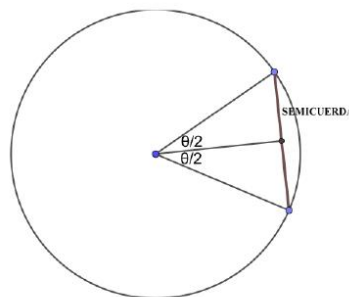
ACTIVIDAD I

- ¿El modelo cosmológico en el que se basó Hiparco para hacer sus mediciones era el correcto? ¿Qué puede concluir de ese hecho? ¿Cuál fue el origen de los conceptos básicos de la trigonometría? ¿Encuentra relación de la trigonometría con otras disciplinas del conocimiento?
- ¿Se puede afirmar que el método de las semicuerdas de Hiparco es una forma indirecta de medir ángulos? ¿Por qué decidir tomar la semicuerda proporcionó un modelo geométrico más conveniente para medir ángulos que tomar la cuerda completa?
- ¿Qué entiende por tabla de cuerdas? ¿Qué magnitudes se relacionan mediante una tabla de semicuerdas a la manera de Hiparco?

Haciendo en Contexto

ACTIVIDAD II

- a) Con la herramienta Geogebra y utilizando el redondeo con 10 cifras decimales, construya una circunferencia de radio 10 y en ella construya ángulos centrales de 0° hasta 90° avanzando de 10° en 10° , mida cada una de las cuerdas subtendidas, luego tome la mitad del ángulo central, mida la semicuerda y complete la siguiente tabla.



θ	$\frac{\theta}{2}$	longitud de la semicuerda s	$\frac{\text{longitud semicuerda}}{\text{longitud radio}} = \frac{s}{r}$
0°	0°		
10°	5°		
20°	10°		
30°	15°		
40°	20°		
50°	25°		
60°	30°		
70°	35°		
80°	40°		
90°	45°		
100°	50°		
110°	55°		
120°	60°		
130°	65°		
140°	70°		
150°	75°		
160°	80°		
170°	85°		
180°	90°		

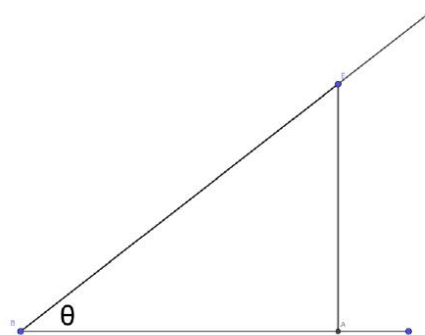
Tabla I

- b) ¿Existe alguna relación entre el valor del ángulo central y la longitud de la semicuerda subtendida? ¿Al incrementar el valor del ángulo al doble entonces la longitud de la semicuerda es exactamente el doble del valor anterior?
- c) Si dispone las semicuerdas verticalmente y en secuencia, igualmente espaciadas y a lo largo de un eje horizontal ¿La distribución crece en línea recta? ¿Qué puede concluir de la forma que toma la figura resultante?

- d) De acuerdo con la tabla I ¿Por qué la relación semicuerda radio aumenta en un mismo círculo al incrementar el ángulo central?

Desarrollo Conceptual

Realmente es posible medir ángulos sin hacer uso de longitudes de arcos de circunferencia ni de otros procedimientos análogos. Por ejemplo, en lugar de trazar un arco de circunferencia entre los lados del ángulo y medir dicho arco, podemos levantar una perpendicular a uno de sus lados a una distancia unidad del vértice y entonces la medida del ángulo puede ser la longitud BC de dicha perpendicular desde su pie hasta el punto en que corta al otro lado. En ese caso, la medida de ángulos se reduce a la medida de distancia entre dos puntos. Podemos empezar por tomar el punto A, en uno de los lados, a una distancia de B distinta de 1. Teniendo en cuenta las propiedades de los triángulos



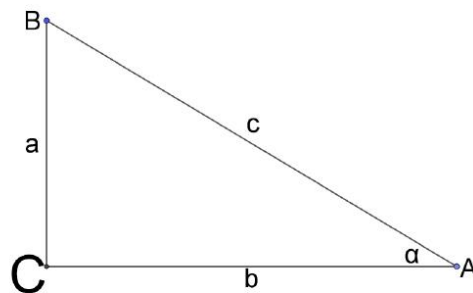
semejantes la relación entre $\overline{AE}$ y $\overline{BE}$, por ejemplo, la razón $\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}$, es la misma cualquiera

que sea la situación de A sobre el lado $\overline{BA}$. Esta relación, por ser constante, nos da la medida del ángulo θ , independientemente de las longitudes de $\overline{AE}$ y $\overline{BE}$. Por esa razón, la medida es una relación trigonométrica.

Para el triángulo rectángulo de la figura, definimos las 6 razones geométricas por comparación de las medidas de los lados del triángulo ABC,

$$\frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{a}{c}, \frac{c}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{b}.$$

Si relacionamos cada una de las razones geométricas con el ángulo agudo α y las redefinimos en función de dicho ángulo, obtenemos:



$$\frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{cateto opuesto a } \alpha}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \alpha}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \alpha}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

6 razones trigonométricas para el ángulo agudo α , se denominan trigonométricas porque relacionan las medidas lineales con las medidas angulares en un triángulo rectángulo.

En el contexto del modelo geométrico de Hiparco, la primera de las 6 razones relaciona la semicuerda con el radio, es decir,

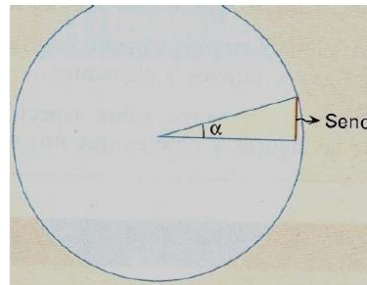
$$\frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{semicuerda}}{\text{radio}}, \text{ o el número de veces}$$

que cabe el radio en la semicuerda para un ángulo central 2α

Posteriormente los astrónomos de la India elaboraron tablas más precisas que relacionaban la mitad del ángulo central con la mitad de su cuerda, lo que hoy conocemos como seno de un

$$\text{ángulo } \alpha, \quad \text{Sen } \alpha = \frac{\text{lado opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{Sen } \alpha = \frac{a}{c}, \text{ es decir, el}$$

seno de un ángulo α es la razón geométrica que resulta de calcular el número de veces que cabe la hipotenusa en el cateto opuesto al ángulo α en un triángulo rectángulo, otra posible interpretación del $\text{Sen } \alpha$, es un número que representa qué porcentaje de la hipotenusa es el cateto opuesto al ángulo α . Para ampliar la información se sugiere visitar la sección "Hiparco de Nicea" en "Recurriendo a la Historia" del blog matematicando395.wordpress.com y ver los videos "SENO HINDÚ", "PARALAJE Y TRIGONOMETRÍA" Y "TRIGONOMETRÍA HINDÚ".



De acuerdo con los resultados en la última columna de la Tabla I haga un ejercicio de comparación con los valores obtenidos con calculadora científica para la razón $\text{Sen } \alpha$. ¿Qué relación encuentra entre los resultados de la tabla y los de la calculadora? ¿Existe margen de error significativo en los valores? ¿Qué puede valorar usted del nivel de precisión alcanzado por Hiparco teniendo en cuenta lo limitado de los recursos tecnológicos disponibles para su época?

Las otras 5 razones trigonométricas fueron apareciendo posteriormente, a continuación nombramos las dos siguientes en orden de importancia con sus respectivas definiciones e interpretaciones en el contexto del triángulo rectángulo ABC:

$$\text{Cos } \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}, \text{ se puede interpretar como el número de veces que el cateto}$$

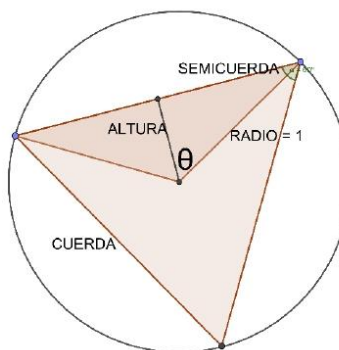
adyacente al ángulo α contiene a la hipotenusa del triángulo rectángulo, otra posible interpretación del $\text{Cos } \alpha$, es un número que representa qué porcentaje de la hipotenusa es el cateto adyacente al ángulo α .

$$\text{Tan } \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha}, \text{ se puede interpretar como el número de veces que el cateto}$$

opuesto al ángulo α contiene al cateto adyacente al ángulo α , otra posible interpretación de la $\text{Tan } \alpha$, es un número que representa qué porcentaje del cateto adyacente al ángulo α es el cateto opuesto al ángulo α .

ACTIVIDAD III

a) Construya en Geogebra una circunferencia de radio 10 unidades. Luego construya un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia, luego construya uno de los tres triángulos que conforman el triángulo inscrito y escoja uno de estos triángulos. Trace la mediatriz que parte del centro de la circunferencia hacia la base del triángulo seleccionado, notará que queda definida la altura de dicho triángulo (apotema del triángulo inscrito) y que dicha altura a su vez subdivide al triángulo seleccionado en dos triángulos rectángulos iguales. Está claro que la hipotenusa del triángulo es 10. Con el mismo software proceda a medir (con redondeo de 10 cifras decimales) el valor de la altura (apotema del polígono), el valor de la semicuerda que resulta de la división de la base en dos partes iguales. ¿Cuál es el valor del ángulo θ ?



b) Repita el ejercicio anterior para un cuadrado, un hexágono regular, un dodecágono regular, un polígono regular de 24 lados, de 48 y de 96 lados. Para cada uno de los valores del ángulo θ , registre en la siguiente tabla el valor de la semicuerda, el valor de la altura (apotema) y la razón geométrica entre la longitud de la semicuerda y la longitud de la altura.

Polígono Regular	θ	longitud de la semicuerda s	longitud de la apotema o altura a	$\frac{\text{longitud de la semicuerda}}{\text{longitud de la apotema}} = \frac{s}{a}$
Triángulo Equilátero	60°			
Cuadrado	45°			
Hexágono Regular	30°			
Dodecágono	15°			
Polígono de 24 lados	7.5°			
Polígono de 48 lados	3.75°			
Polígono de 96 lados	1.875°			

Tabla II

ACTIVIDAD IV

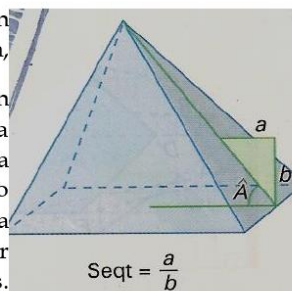
De acuerdo con los resultados de la última columna de la Tabla I haga un ejercicio de comparación con los valores obtenidos con calculadora científica para la razón $\tan \theta$. ¿Qué concluye después de comparar los valores obtenidos por medición y los valores obtenidos de la calculadora?

Matematicomanía

ACTIVIDAD V

Los egipcios utilizaron la semejanza de triángulos en la construcción de sus monumentos. Para obtener el mismo ángulo de inclinación,

$\hat{A}$, en las cuatro caras de una pirámide, emplearon el *seqt*, razón que medía la separación horizontal de una arista respecto de la vertical por unidad de altura. ¿Cuál es la inclinación de la cara (*seked*) de una pirámide de 250 codos de altura y 360 codos de lado en la base? El *seked* es lo que hoy conocemos por pendiente de una superficie plana inclinada. Es la Pendiente obtenida al poner verticalmente un codo y medir horizontalmente en palmos y dedos.



1 codo = 7 palmos = 28 dedos. ¿A qué razón trigonométrica respecto del ángulo $\hat{A}$ se refieren? ¿Cómo calcularía el ángulo de inclinación de la pirámide? Para ampliar la información se sugiere visitar la sección "Hiparco de Nicea" en "Recurriendo a la Historia" del blog matematicando395.wordpress.com; y ver el video "EL SEQET DE UNA PIRÁMIDE".

ACTIVIDAD VI

Un hombre de 1,80 mts de estatura proyecta una sombra de 2 mts a cierta hora del día. ¿Qué altura tendrá un árbol que a la misma hora del día proyecta una sombra de 10 mts? ¿Cómo determinar el ángulo de elevación del sol? Construya la gráfica ajustada a la realidad utilizando una escala en el papel, mida el ángulo y luego calcule el valor del ángulo aplicando EL MODELO TEÓRICO para las razones trigonométricas, finalmente encuentre el porcentaje de error en la medida del ángulo y en el valor de la altura del árbol.

¿Qué aprendimos?

ACTIVIDAD VII

a) De acuerdo con la tabla de la figura, ¿puedes explicar cómo construir los valores de dicha tabla utilizando el concepto de semicuerda de Hiparco?

r	$\text{sen } r$	$\text{cos } r$	$\text{tan } r$
46°	.719	.695	1.035
47°	.731	.682	1.072
48°	.743	.669	1.111
49°	.755	.656	1.150
50°	.766	.643	1.192

ACTIVIDAD VIII

a) Calcular el margen de error del $\text{sen}(47^\circ)$.

ACTIVIDAD IX

a) ¿Cómo construir un ángulo de 18° sin utilizar transportador y sabiendo que $\tan 18^\circ = 0,324$?

ACTIVIDAD X

a) En el gimnasio Fitness_People la máquina caminadora permite incrementar la pendiente de la banda móvil, un usuario de la máquina quiere exigirse e incrementa el valor de la pendiente de un 6% a un 10%, entonces, ¿podemos afirmar que el ángulo de inclinación de la banda aumento 4° ? En caso contrario, ¿puede usted calcular la variación del ángulo? Utilice el geogebra para construir el modelo geométrico. . Compare los valores de los ángulos medidos con los valores reales de la calculadora. Calcule el margen de error de su construcción.

ACTIVIDAD XI

a) ¿Qué inquietudes le surgen al comprender el trabajo minucioso y sistemático de Hiparco para contribuir a la consolidación de la trigonometría como una disciplina matemática?

Para Profundizar

- Asimov, I. (1985). Introducción a la Ciencia. Vol I. Ediciones Orbis, S.A. Barcelona, 1985, pp. 29-34.
- Bell, E. (1996). Historia de las Matemáticas. Fondo de Cultura Económica. México, 1996, pp. 67.
- Esteban, M., Ibañez, M., & Ortega, T. (1998). *Trigonometría*. Editorial Síntesis. Madrid, 1998, pp. 58-59.
- Fancello, O. (1985). El camino de la ciencia I. *De la estrella a la vida*. Ed Grijalbo. México. 1985, pp. 21-29.
- Hofmann, J. (2002). Historia de la Matemática. *Desde el comienzo hasta la revolución francesa*. Editorial Limusa. México, pp. 40-43.
- Hogben, L. (1966). El Universo de los números. *Historia y Evolución de las Matemáticas de las Matemáticas*. Ediciones Destino. Barcelona, 1966, pp. 124-145.
- Hull, L. (1989). Historia y Filosofía de la Ciencia. Ariel Filosofía. Barcelona, 1989, pp. 117-121.
- Mankiewicz, R. (2000). Historia de las Matemáticas. *Del cálculo al caos*. Editorial Paidós. Barcelona, 2000, pp. 20.
- Rivaud, J. (1996). Trigonometría. Limusa Noriega Editores. México, 1996, pp. 29-31.
- Serres, M. (1998). Historia de las Ciencias. Ediciones Cátedra, S.A. Madrid, 1998, pp. 84-85.
- Snyder, E. (1973). Historia de las ciencias Físicas. Editorial Labor, S.A. Barcelona, pp. 20-21.
- Titchmarsh, E. (1966). Esquema de la matemática actual. Fondo de Cultura Económica. México, 1966, pp. 125-129.
- Udías, A. (2011). Historia de la Física. *De Arquímedes a Einstein*. Editorial Síntesis. Madrid, 2011, pp. 39-42.